



INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Modelo de Otimização de Carteiras em Larga Escala com Restrições Alinhadas ao Mercado Financeiro

Autor: **Leonardo Herz Monteiro**

Orientador: **Jorge Passamani Zubelli**

Rio de Janeiro
Setembro de 2019

Para todos aqueles que acreditaram no meu potencial de concluir esta importante etapa da minha carreira acadêmica.

Agradecimentos

Utilizo este espaço para agradecer a todos que tiveram um papel importante na conclusão deste projeto:

Agradeço a Deus e todas as entidades do bem, pela proteção e pela força para vencer todos os desafios e obstáculos.

Agradeço aos membros da minha família, pelo apoio emocional e por aceitar minha ausência e indisponibilidade nos momentos de dedicação.

Agradeço ao meu orientador, Jorge Passamani Zubelli, pela paciência e atenção, manifestadas tanto nas aulas do curso quanto na elaboração desta dissertação.

Agradeço ao Banco Modal e seus integrantes, por terem acreditado no meu potencial de aprendizado e pela oportunidade de desenvolver e aplicar este projeto na prática.

Agradeço aos meus colegas de turma que tornaram toda esta trajetória mais agradável através de suas respectivas companhias.

Resumo

A otimização de carteiras é um tópico clássico no campo de finanças quantitativas e desde o seu surgimento, inúmeros modelos já foram desenvolvidos para abordar o problema de diferentes maneiras. Apesar do grande valor teórico que possuem, muitos destes modelos acabam não sendo utilizados na prática, pois esbarram em diversas peculiaridades que se manifestam na realidade do mercado financeiro. O presente trabalho tem por objetivo apresentar uma nova ótica para o problema de otimização de carteiras, de tal maneira que os principais obstáculos encontrados pelos investidores possam ser mapeados e incorporados ao modelo proposto através de novas variáveis independentes e restrições. Após a incorporação destes elementos, é possível notar uma grande mudança no resultado final, que se torna muito mais consistente e controlável. Adicionalmente, o tempo total de execução do algoritmo é analisado para diferentes configurações com o intuito de verificar a sensibilidade gerada pelos parâmetros de entrada e a viabilidade do modelo para aplicações de larga escala.

Palavras-chave: Otimização de Carteiras, Programação Mista-Inteira Quadrática com Restrições Quadráticas, Mercado Financeiro, Gestão de Recursos.

Abstract

Portfolio optimization is a classical topic in the field of quantitative finance and since its first appearance, many models have been developed to address the problem in different ways. Despite their great theoretical value, many of these models are not used in practice as they run into several peculiarities that manifest themselves in the reality of the financial market. This paper aims to present a new approach to the portfolio optimization problem, so that the main obstacles encountered by investors can be mapped and incorporated into the proposed model through new independent variables and constraints. After incorporating these elements, it is possible to notice a big change in the final result, which becomes much more consistent and controllable. Additionally, the total execution time of the algorithm is analyzed for different configurations, in order to verify the sensitivity generated by the input parameters and the viability of the model for large scale applications.

Key words: Portfolio Optimization, Mixed Integer Quadratically Constrained Quadratic Programming, Financial Markets, Asset Management.

Sumário

Índice	vii
Introdução	1
1 CONCEITOS DE FINANÇAS E INVESTIMENTO	3
1.1 CARTEIRA DE INVESTIMENTOS	3
1.2 PRECIFICAÇÃO DE ATIVOS	4
1.3 PROPRIEDADE DOS ATIVOS	4
1.3.1 REMUNERAÇÃO	4
1.3.2 VALIDADE	5
1.3.3 CARÊNCIA	5
1.3.4 LIQUIDEZ	5
1.3.5 GARANTIA	6
1.4 CATEGORIAS DE ATIVOS	6
1.4.1 TÍTULOS DE DÍVIDA	6
1.4.2 AÇÕES	8
1.4.3 MOEDAS	9
1.4.4 COMMODITIES	10
1.4.5 DERIVATIVOS	10
1.4.6 COTAS DE FUNDOS	11
1.4.7 CRIPTOMOEDAS	12
1.5 MEDIDAS DE AVALIAÇÃO	12
1.5.1 SÉRIES TEMPORAIS	12
1.5.2 ANÁLISE DE ATIVOS DE MANEIRA INDIVIDUAL	14
1.5.3 ANÁLISE DE ATIVOS DE MANEIRA CONJUNTA	15
1.5.4 MODELOS DE PREVISÃO DE DESEMPENHO	17
1.5.5 MODELOS DE PREVISÃO NA PRÁTICA	18
1.6 OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS	18
1.6.1 CONCEITOS DE OTIMIZAÇÃO	18
1.6.2 LIMITAÇÕES PRÁTICAS	19
2 O MODELO PROPOSTO	21
2.1 INTRODUÇÃO	21
2.2 FORMULAÇÃO BÁSICA	21
2.2.1 FUNÇÕES OBJETIVO E RESTRIÇÕES INERENTES	21
2.2.2 FRONTEIRA EFICIENTE	22
2.3 VARIÁVEIS INDEPENDENTES E SEUS DOMÍNIOS	22
2.3.1 VALORES MÍNIMOS E MÁXIMOS DE ALOCAÇÃO	22
2.3.2 ALOCAÇÃO BASEADA EM VALORES MÚLTIPLOS	24

2.4	RESTRICÇÕES DE ATIVOS EM CONJUNTO	26
2.4.1	RESTRICÇÕES DE SOMA DE PESOS	26
2.4.2	RESTRICÇÕES DE CARDINALIDADE	26
2.5	ASPECTOS PRÁTICOS	27
2.5.1	REGRAS DOS CUSTODIANTES E CORRETORAS	27
2.5.2	REGRAS DOS EMISSORES E BOLSAS DE NEGOCIAÇÃO	27
2.5.3	TOLERÂNCIA AO RISCO DE CRÉDITO	28
2.5.4	DISTRIBUIÇÃO DE CARÊNCIA	29
2.5.5	CONTROLE DE DIVERSIFICAÇÃO	30
3	INFRAESTRUTURA DE TESTES	33
3.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	33
3.2	SÉRIES TEMPORAIS DOS ATIVOS FICTÍCIOS	34
3.3	MODELO DOS ATIVOS	35
3.3.1	ATIVOS FICTÍCIOS	36
3.3.2	ATIVOS VERDADEIROS	36
3.3.3	DETALHES DOS ATIVOS	37
3.4	MODELO DO INVESTIDOR	45
3.5	MASSA DE INVESTIDORES	45
3.5.1	OBJETIVO DE INVESTIMENTO	45
3.5.2	CAPITAL DISPONÍVEL	46
3.5.3	TOLERÂNCIA AO RISCO DE CRÉDITO	47
3.5.4	DISTRIBUIÇÃO DE CARÊNCIA	47
3.5.5	LIMITES DE ALOCAÇÃO MÍNIMA E MÁXIMA	47
3.5.6	LIMITE DE LOTE INCREMENTAL	48
3.5.7	LIMITES DE CARDINALIDADE	48
3.6	INVESTIDOR ESPECÍFICO	49
3.7	METODOLOGIA DE TESTES	49
3.7.1	EXECUÇÃO EM LARGA ESCALA	50
3.7.2	ESTUDO DE CASO	50
4	ANÁLISE DOS RESULTADOS	51
4.1	EXECUÇÃO EM LARGA ESCALA	51
4.1.1	SENSIBILIDADE DO TEMPO DE EXECUÇÃO	51
4.1.2	PERFORMANCE DAS CARTEIRAS	52
4.2	ESTUDO DE CASO	53
4.3	CONCLUSÕES	54
4.4	TRABALHOS FUTUROS	55
A	DETALHES TÉCNICOS	61
A.1	OBJETIVO	61
	Referências Bibliográficas	63

Introdução

As instituições e agentes que participam do mercado financeiro possuem diferentes fontes de receita que podem ser categorizadas com base em diversos critérios. Uma delas é a prestação do serviço conhecido como administração de recursos de terceiros, na qual uma equipe especializada gerencia o capital de um ou vários clientes investidores. A remuneração desta atividade se consolida através do pagamento mensal de uma taxa de administração, calculada a partir de um valor percentual que incide sobre o volume financeiro total sob gestão.

A administração de recursos de terceiros costuma ser oferecida em duas modalidades diferentes: fundos de investimento ou carteiras exclusivas.

Os fundos de investimento permitem que a equipe seja capaz de gerir simultaneamente os recursos de muitos clientes, de forma centralizada e organizada. Com isso, é possível afirmar que existe uma certa homogeneidade no perfil desses clientes em relação às expectativas de ganhos ou prejuízos gerados pelo fundo ao longo do tempo.

As carteiras exclusivas são utilizadas para atender investidores individuais que buscam um atendimento mais personalizado. Nestes casos, as equipes precisam construir uma relação de confiança com os clientes, aprendendo sobre suas características e necessidades específicas para melhor atendê-los.

Em alguns casos, também pode ser oferecido em conjunto com as carteiras exclusivas, um serviço de aconselhamento financeiro, no qual a equipe ajudará o cliente a atingir seus objetivos de longo prazo através de um planejamento bem definido que pode considerar aporte regulares ou eventuais saques de emergência.

No âmbito da administração de carteiras exclusivas, não existe uma metodologia consolidada entre os profissionais da área para decidir a melhor escolha dos ativos. Ao longo da história, já foram desenvolvidos muitos modelos teóricos bem fundamentados sobre construção de carteiras de investimento, mas diversos fatores existentes no mundo real que dificultam a aplicação prática destes modelos.

Atualmente, a escolha dos ativos costuma ser realizada com base no instinto e na experiência da equipe responsável, visando atender os objetivos específicos do cliente em questão. Ao final, a ausência de uma metodologia padronizada gera a necessidade de estudar cada caso particular com extrema atenção, o que por sua vez, limita a quantidade de clientes que podem ser atendidos.

É por esse motivo que, geralmente, este serviço só é oferecido para clientes de renda muito elevada, cujo patrimônio administrado tem condições de proporcionar ganhos relevantes aos gestores, compensando assim os custos mais altos de um atendimento exclusivo.

Portanto, um dos grandes desafios das instituições financeiras atualmente é, de alguma forma, ampliar o leque de clientes que possam usufruir do serviço de administração de carteiras exclusivas. Para conseguir cumprir esta missão, é preciso encontrar alguma forma de automatizar o processo de descoberta do perfil do cliente e de escolha dos ativos que serão adotados para a carteira em função deste perfil.

O presente trabalho tem por objetivo documentar a idealização e simulação de uma metodologia de alocação de ativos para uma carteira, baseada em métodos computacionais de otimização.

Como em qualquer carteira exclusiva, o foco é sempre o perfil particular do cliente que contrata o serviço. Por esse motivo, a metodologia deverá ser capaz de entregar uma proposta que esteja perfeitamente alinhada com as necessidades desse cliente.

Tomaremos como premissa o fato de que o perfil do cliente foi mapeado a partir de uma série de perguntas fundamentais e que essas características serão informadas ao algoritmo para que possam ser traduzidas em objetivos e restrições do problema de otimização.

Além disso, o algoritmo deverá apresentar uma boa performance de execução, para que o mesmo não possa ser considerado como um elemento limitador de um eventual processo de automação em larga escala do serviço.

O texto está estruturado em 4 capítulos e 1 apêndice, cujos conteúdos serem resumidamente apresentados a seguir:

- Capítulo 1 - apresenta os principais conceitos de finanças e investimentos que serão utilizados nos capítulos seguintes como base teórica para a modelagem do problema.
- Capítulo 2 - apresenta todas as características do problema de otimização e suas respectivas semelhanças com o mundo prático que justifiquem a inclusão no modelo proposto.
- Capítulo 3 - apresenta toda infraestrutura criada para realizar os testes do modelo através de uma grande variedade de ativos e investidores.
- Capítulo 4 - apresenta os resultados dos testes realizados e as principais conclusões obtidas.
- Apêndice A - apresenta alguns detalhes técnicos sobre a execução do algoritmo.

Capítulo 1

CONCEITOS DE FINANÇAS E INVESTIMENTO

1.1 CARTEIRA DE INVESTIMENTOS

Uma carteira de investimentos pode ser definida como um conjunto de ativos financeiros que foram escolhidos dentre vários disponíveis no mercado.

Para montar uma carteira, um investidor precisa abrir uma conta numa instituição financeira que ofereça os serviços de custódia e liquidação de ativos como bancos e corretoras. Em seguida, ele precisa disponibilizar nesta conta, através de depósitos ou transferências, o volume financeiro que pretende investir. Por fim, ele deverá entrar em contato com algum agente representante desta instituição para solicitar e negociar a aquisição dos ativos que deseja possuir em sua carteira.

No momento em que a transação for concluída, a instituição recebe a custódia dos ativos adquiridos e realiza o registro na conta do cliente. A partir deste momento, o investidor poderá acompanhar o valor financeiro de sua carteira que, por sua vez, é função do valor dos ativos que a compõe.

O objetivo de qualquer investidor ao montar uma carteira é obter resultados financeiros positivos após um determinado período de tempo, de tal forma que, ao se desfazer dos ativos no futuro, o volume financeiro obtido seja maior do que o volume financeiro empregado inicialmente. A diferença desses volumes será então, o resultado líquido de sua carteira.

Os ativos podem, com o passar do tempo, apresentar ganhos positivos ou negativos em diferentes proporções, dependendo de sua natureza. Dessa forma, o investidor precisa estar consciente de todos os riscos envolvidos, para que não seja surpreendido com eventuais resultados desfavoráveis.

Ao longo do tempo, o investidor pode realizar diversas ações que modificam o volume do seu investimento, como aportes ou resgates. Além disso, caso esteja insatisfeito com o desempenho da carteira observado até o momento, ele também poderá realizar operações para substituir alguns ativos por outros e assim tentar corrigir o rumo da rentabilidade.

1.2 PRECIFICAÇÃO DE ATIVOS

Para determinar o valor atual de uma carteira, é necessário primeiramente determinar o valor justo dos ativos que fazem parte da mesma. Neste contexto, existem duas óticas sob as quais a precificação de ativos pode ser analisada: o preço de curva e o preço de mercado.

O preço de curva representa a evolução do valor do ativo até momento de análise, seguindo estritamente as regras e metodologias estabelecidas no contrato do mesmo. Dessa forma, ele ignora qualquer influência externa de mercado, pois assume que o ativo não será negociado em nenhum momento pelo investidor que o adquiriu.

O preço de mercado nada mais é do que o próprio preço de curva, acrescido de um valor de ágio ou deságio. O seu principal objetivo é considerar a possibilidade de uma eventual negociação no mercado, incorporando ao cálculo todas as possíveis influências externas que possam ser exercidas sobre o ativo.

Os principais elementos considerados neste caso são os níveis de oferta e demanda e as expectativas futuras em relação a vários fatores que afetam diretamente o preço de curva dos ativos, como indicadores econômicos, taxa de juros, taxa de câmbio, índices de inflação, entre outros.

A instituição financeira responsável pela carteira deve possuir um documento aberto ao público, conhecido como manual de precificação e marcação a mercado, onde especifica todas as metodologias utilizadas neste processo, para cada tipo de ativo. Um exemplo real deste tipo de documento pode ser obtido na referência [1].

Algumas metodologias são exatamente iguais para todas as instituições, pois há pouca ou nenhuma margem para interpretações divergentes. Outras, porém, ficam a critério de cada instituição, pois não existe senso comum do mercado em relação à melhor metodologia a ser empregada.

Em geral, os órgãos reguladores exigem que as instituições financeiras calculem o valor das carteiras utilizando o preço de mercado, pois consideram que o investidor tem o direito de saber o valor justo dos ativos de sua carteira a qualquer momento, mesmo que não tenha intenção de negociá-los no mercado.

Em algumas situações excepcionais, a dificuldade de acesso à algumas informações inviabiliza a utilização prática de algumas metodologias. Com isso, para evitar possíveis distorções, utilizam-se o preço de curva ao invés de preço de mercado. Outra situação na qual o preço de curva pode ser utilizado é quando o regulamento do ativo não admite qualquer tipo de negociação a mercado.

1.3 PROPRIEDADE DOS ATIVOS

Os ativos disponíveis no mercado possuem propriedades essenciais que devem ser observados pelos investidores, para que os mesmos possam decidir quais se encaixam melhor em suas necessidades e expectativas. As mais importantes serão apresentadas a seguir.

1.3.1 REMUNERAÇÃO

A remuneração é a característica que determina como o ganho financeiro do ativo se comporta ao longo do tempo. O mercado costuma classificar os modelos de remuneração em duas grandes

categorias:

- renda fixa - a remuneração segue um conjunto de regras, de tal forma que o preço de curva do ativo é sempre crescente. Este tipo de remuneração é muito demandada por investidores que preferem evitar riscos elevados em relação aos seus ganhos futuros. Ainda assim, existe a possibilidade de perdas se o investidor decidir se desfazer do ativo num momento inoportuno, quando por exemplo, o preço de mercado está menor que preço pago originalmente na aquisição do ativo.

- renda variável - a remuneração segue um comportamento totalmente imprevisível, pautado fortemente pelos níveis de oferta e demanda que, por sua vez, são influenciadas pelas informações e notícias divulgadas no mercado. Por essas razões, o preço de mercado pode se tornar muito volátil. Com isso, o investidor corre risco de sofrer perdas muito grandes.

1.3.2 VALIDADE

A validade é a característica que determina por quanto tempo o ativo existirá. Neste caso, só existem duas opções:

- validade finita - o ativo possui tempo limitado de existência, de tal forma que na data de expiração, ele será encerrado. Eventualmente, se o regulamento do ativo permitir, o responsável pela emissão poderá antecipar as obrigações de forma parcial ou total, caso julgue necessário por motivos estratégicos. Nesta situação, se todas as obrigações forem liquidadas, o ativo será encerrado antecipadamente e a data de vencimento original será desconsiderada.

- validade infinita - o ativo não possui tempo limitado de existência, de tal forma que continuará existindo enquanto o responsável assim desejar. Neste caso, o investidor poderá manter seu investimento pelo tempo que quiser ou até que o responsável decida encerrá-lo por livre e espontânea vontade.

1.3.3 CARÊNCIA

A carência é a característica que determina quando os recursos investidos poderão ser resgatados. Atualmente, dois tipos de carência que podem ser observadas num ativo:

- carência para solicitação do resgate - é o tempo que o investidor deve aguardar até que possa solicitar resgate total ou parcial do seu investimento.

- carência para liquidação do resgate - é o tempo que o investidor deve aguardar até que um resgate solicitado seja financeiramente liquidado e esteja disponível na sua conta corrente.

1.3.4 LIQUIDEZ

A liquidez é a característica que determina a facilidade de conseguir realizar operações de compra e venda do ativo no mercado em que ele é negociado. A liquidez é muito influenciada

pelo nível de oferta e demanda do ativo negociado e possui peso relevante na determinação do preço de mercado.

Os investidores precisam estar sempre atentos ao risco de liquidez dos ativos que adquirem, para que não sejam surpreendidos caso desejem vendê-los para desfazer o investimento numa situação de emergência ou insatisfação com a rentabilidade obtida até o momento.

1.3.5 GARANTIA

A garantia é a característica que determina se o investidor receberá algum tipo de ressarcimento ou compensação, caso o ativo venha a apresentar perdas totais ou parciais que não estavam previstas no comportamento normal. Este tipo de situação, quando acontece, sempre precisa ser resolvida através de acompanhamento e negociação judicial.

Quando existem garantias vinculadas ao ativo, os investidores precisam ser informados se o responsável terá o direito ou não de realizar transações envolvendo as mesmas.

Quando não existem garantias, é possível que ele seja emitido com diferentes patamares de priorização de recebimento dos pagamentos efetuados que, por sua vez, possuem taxa remuneração inversamente proporcional a este nível de priorização. Dessa forma, os investidores poderão escolher, em função do nível de risco que aceitam, qual das opções é mais satisfatória.

1.4 CATEGORIAS DE ATIVOS

Os ativos possuem diferentes regras de funcionamento, podendo ser classificados em diferentes categorias. Serão apresentadas agora as quatro categorias mais importantes e conhecidas.

1.4.1 TÍTULOS DE DÍVIDA

Os títulos de dívida são instrumentos através dos quais um investidor pode emprestar seus recursos financeiros para uma contraparte durante um período de tempo. Quando um título de dívida é adquirido, uma operação de crédito se estabelece e o investidor passa a ser denominado credor, enquanto a contraparte passa a ser denominada devedor ou emissor. A princípio, todos os títulos de dívida em condições normais, possuem validade finita e são considerados produtos que pertencem à categoria de renda fixa.

Neste tipo de operação, o principal risco enfrentado pelo credor é o a possibilidade de não receber seus recursos financeiros de volta, caso o devedor não consiga cumprir com suas obrigações por algum motivo. Este risco é denominado risco de crédito e precisa ser muito bem avaliado antes que qualquer decisão seja tomada. Por essa razão, o potencial de rentabilidade do título é influenciado por diversos elementos relacionados ao próprio título e ao devedor, como por exemplo:

- confiabilidade e saúde financeira, geralmente informados através de uma agência de *rating* que segue um padrão e uma metodologia para homogeneizar a avaliação de todos os devedores presentes no mercado.

- prazo médio dos fluxos de pagamento, responsável por determinar o tempo total que o devedor estará com a posse dos recursos financeiros.
- possibilidade de cobrança antecipada da dívida, fator que limita as ações do devedor para que os recursos estejam disponíveis caso sejam solicitados pelo credor.
- existência e qualidade de possíveis garantias oferecidas pelo devedor que, em caso de calote, poderão ser exigidas pelo credor como compensação.

A remuneração de um título de dívida costuma ser realizada através três tipos diferentes de metodologia:

- Pré-fixada - a remuneração do título é composta por uma taxa de juros constante, de tal forma que é possível conhecer, no momento da emissão, o preço de curva do título para todos os dias de sua existência.
- Pós-fixada - a remuneração do título é composta por uma taxa de juros flutuante, sendo indexada a partir de algum indicador de mercado, como a taxa básica de juros da economia, a taxa de juros de operações interbancárias, índices de inflação de preços, entre outros. Como não é possível saber o valor desses indicadores antecipadamente, o preço de curva do título só pode ser determinado na medida em que os indicadores são divulgados pelas instituições responsáveis.
- Híbrida - a remuneração do título é composta tanto por uma componente pré-fixada quanto por uma componente pós-fixada. Neste caso, devido à presença da componente pós-fixada, também não é possível pré-determinar os preços de curva.

Outro aspecto importante sobre os títulos de dívida é a periodicidade de pagamentos:

- Cupom zero - o título não possui pagamentos parciais ao longo de sua duração, de tal maneira que o credor receberá de volta seus recursos integralmente apenas no vencimento.
- Cupom periódico - o título possui pagamentos parciais e periódicos ao longo de sua duração, de acordo com um cronograma de eventos. Estes pagamentos podem incluir apenas juros, ou então juros e amortizações.

Existe uma grande variedade de títulos de dívida que podem ser amplamente adquiridos e negociados pelos investidores no mercado. Eles geralmente são classificados com base no emissor, sendo estes os principais:

- Títulos Públicos - são emitidos por instituições responsáveis pela administração pública. Como exemplo, podemos citar os títulos públicos federais (emitidos pelo governo federal), considerados pelo mercado como aqueles que possuem o menor risco de crédito. Por esse motivo, todos os outros títulos disponíveis no mercado costumam ter níveis de rentabilidade maiores ou iguais. Também existem os títulos públicos emitidos pelos governos estaduais e municipais, porém, estes são muito menos conhecidos e negociados entre os investidores e possuem risco maior.

- **Captações Bancárias** - São emitidas por bancos e cooperativas de crédito para captar recursos financeiros. Estas instituições têm um papel importantíssimo na sociedade, pois utilizam esses recursos captados para originar diversas atividades que estimulam o desenvolvimento econômico, como financiamentos e aquisições. Dessa forma, elas podem ser consideradas como grandes intermediárias da economia, criando o elo entre os agentes superavitários (aqueles que poupam mais do que gastam) e os agentes deficitários (aqueles que poupam menos do que gastam). Por esse motivo, o risco de investidor é sempre com o banco e nunca com a outra ponta das operações. Alguns países aumentam a confiança dos investidores para investir em captações bancárias através de uma grande estrutura de garantia, chamada de fundo garantidor de crédito. Este fundo recebe depósitos compulsórios de todas as instituições de natureza bancária que participam do mercado, de tal forma que, em caso de falência de alguma delas, o fundo terá capacidade de ressarcir os investidores. Em geral, para cada investidor, existe um limite por instituição e um limite total para esse ressarcimento.

- **Debêntures** - são emitidas por empresas de capital de aberto. Elas representam, para essas empresas, uma boa alternativa em relação a outros tipos de financiamento, como empréstimos bancários bilaterais que costumam ser mais caros. Alguns destes títulos podem possuir em seu regulamento uma cláusula de conversibilidade que concede ao credor o direito de, em determinadas situações, transformar o seu título de dívida num título de participação societária que será proporcional ao volume da dívida em questão.

- **Títulos securitizados** - são títulos especiais que, na verdade, representam uma aglomeração de vários outros títulos de dívida de menor porte. Eles são originados e distribuídos por um tipo especial de instituição, chamadas de securitizadoras, que muitas vezes conta com o apoio de bancos para conseguir estruturar a operação como um todo. A principal consequência desse modelo é justamente a pulverização do risco de calote, já que não está concentrado num único devedor.

Em geral, apenas as captações bancárias apresentam a possibilidade de prazo de carência nulo, ou seja, o investidor tem o direito de resgatar seu dinheiro a qualquer momento. Por outro lado, a maioria dos títulos públicos e algumas debêntures de empresas bem conhecidas, possuem bastante liquidez no mercado, de tal forma que o investidor pode vendê-los para poder readquirir seu dinheiro antes do vencimento, estando sujeito apenas ao risco da diferença entre o preço de curva e o preço de mercado, conforme explicado anteriormente.

1.4.2 AÇÕES

Ações são títulos de participação societária de uma determinada empresa, negociados livremente na bolsa de valores. Sempre que uma empresa decide se capitalizar, ela tem a possibilidade de contrair dívidas ou emitir ações na bolsa de valores. Esta decisão deve ser tomada com base numa série de premissas em relação ao seu planejamento estratégico.

O processo de emitir ações é conhecido como abertura de capital e só pode ser realizado por empresas que atendem uma lista de pré-requisitos regulatórios. É muito comum que empresas que desejam realizar a abertura de capital contratem os serviços de assessoria financeira de instituições especializadas para ajudar a lidar com a complexidade do processo.

Eventualmente, quando tudo estiver devidamente preparado, a empresa realiza a sua oferta pública inicial, na qual diversos investidores compram pela primeira vez as ações emitidas e

passam a ser donos individuais de várias fatias da empresa, proporcionais à quantidade de ações adquiridas por cada um. A partir deste momento, os investidores que possuem as ações da empresa podem negociá-las com outros investidores na bolsa de valores, sempre que desejarem, pelos preços de compra e venda oferecidos no momento. O preço das ações na bolsa é determinado pelos níveis de oferta e demanda que, por sua vez, são influenciados pelas expectativas dos investidores em relação aos futuros resultados financeiros da empresa.

Existem muitos fatores internos e externos que podem afetar o resultado da empresa, tanto no curto prazo quanto no longo prazo. Os fatores internos podem ser controlados e gerenciados pela estratégia administrativa estabelecida pela diretoria executiva. Já os fatores externos não podem ser controlados, como a atuação das empresas concorrentes, as possíveis interferências de políticas adotadas pelo governo vigente, a saúde da economia do setor na qual a empresa está inserida, entre outros. Toda esta lógica também se aplica ao preço de mercado de eventuais debêntures que a empresa tenha emitido.

Uma das vantagens que as ações oferecem ao investidor é a possibilidade de eventuais pagamentos de dividendos. Quando eles acontecem, o preço da ação é imediatamente subtraído desta quantia, para compensar a saída desses recursos financeiros do patrimônio da empresa.

Em caso de falência da empresa, o valor das ações se torna zero, mas os acionistas, desde que não tenham condição de controlador, não se responsabilizam por eventuais dívidas da empresa.

No mercado brasileiro, especificamente, as ações podem ser oferecidas em duas categorias diferentes:

- Ações ordinárias - os acionistas possuem o direito de votar nas assembleias administrativas da empresa. Em alguns casos, estas ações podem conceder também poder de veto.
- Ações preferenciais - os acionistas, em geral, não têm direito a voto assembleias administrativas da empresa, mas tem prioridade no recebimento de eventuais pagamentos, como dividendos e reembolso de capital em situações de falência. Além disso, a empresa emissora tem o direito de recomprar as ações preferenciais a qualquer momento, se assim desejar.

A proporção máxima de quantas ações podem ser emitidas de cada categoria, em relação ao total emitido, é determinada pelo órgão regulador.

1.4.3 MOEDAS

Cada país do mundo, devidamente consolidado, possui uma moeda oficial que representa a unidade monetária do dinheiro em circulação é utilizada para realizar transações financeiras.

As taxas de câmbio são as referências utilizadas para determinar qual quantidade de uma moeda é necessária para comprar a outra, a partir dos níveis de oferta e demanda observados no mercado. Em geral, esses níveis são fortemente influenciados pelo posicionamento político-econômico do país no cenário mundial.

As moedas são extremamente relevantes para os indivíduos que possuem investimentos fora do seu país de origem, uma vez que estão sempre sujeitos a ganhos e perdas em função dessas taxas de câmbio, tanta na hora de aquisição, quanto na hora do resgate do investimento.

1.4.4 COMMODITIES

As commodities são produtos amplamente utilizados como matéria-prima em diversos setores da economia e que podem ser extraídos da natureza ou gerados em larga escala através de processos produtivos. Essencialmente, os setores primários que originam as principais commodities negociados no mercado são: agricultura, pecuária, energia elétrica, energia fóssil e mineração.

Elas representam ativos físicos que precisam ser produzidos, transportados, armazenados e em alguns casos, consumidas até um prazo máximo, para que sua qualidade não se deteriore. Por esse motivo, os investidores não costumam operar este tipo de ativo na modalidade à vista, devido a todos os custos e responsabilidades adicionais que seriam obrigados a administrar. Ao invés disso, eles negociam estes produtos através de contratos derivativos. Esta categoria de ativo será apresentada no tópico a seguir.

1.4.5 DERIVATIVOS

Derivativos são produtos financeiros cujo valor depende de algum outro ativo subjacente, em função de alguma dinâmica de funcionamento específica. Eles são extremamente relevantes no mercado financeiro, pois permitem que os investidores adotem estratégias diferenciadas de proteção (*hedge*) ou especulação direcional. A princípio, todos os derivativos possuem validade finita e são considerados produtos de renda variável.

Os derivativos mais líquidos são amplamente negociados nas bolsas de valores que, por sua vez, exige uma série de requisitos de segurança financeira, como depósitos de margem de garantia e pagamento de ajustes diários, para forçar o cumprimento das obrigações de todos os participantes. Em eventuais situações de violação de regras, o participante é penalizado e eventualmente impedido de continuar as negociações até que regularize sua situação. No limite, a bolsa é financeiramente responsável por garantir que todas as operações sejam devidamente honradas.

Os derivativos menos líquidos são negociados bilateralmente em outros ambientes, como os mercados de balcão. Estes ambientes não costumam apresentar tais exigências, introduzindo um elemento adicional de risco de crédito na operação.

Serão apresentados agora os derivativos mais comuns negociados pelos investidores no mercado, cuja dinâmica de funcionamento é simples:

- Futuro - impõe o dever de comprar ou vender um determinado produto, por um preço pré-estabelecido, exatamente na data de vencimento do contrato.
- Opção Européia - concede o direito de comprar ou vender um determinado produto, por um preço pré-estabelecido, exatamente na data de vencimento do contrato.
- Opção Americana - concede o direito de comprar ou vender um determinado produto, por um preço pré-estabelecido, a qualquer momento até o limite máximo da data de vencimento do contrato.
- Swap - impõe o dever de pagar ou receber a diferença de rentabilidade entre duas curvas de valorização. Elas são denominadas de ponta ativa e ponta passiva, sendo calculadas a partir de um volume financeiro pré-estabelecido, durante um período que vai do início do contrato até a sua data de vencimento.

Além desses, existem também os derivativos exóticos, cuja dinâmica de funcionamento é bem mais complexa, fazendo com que os mesmos sejam muito menos negociados no mercado.

1.4.6 COTAS DE FUNDOS

Conforme explicado anteriormente, os fundos de investimento são criados a partir da captação de recursos financeiros de vários clientes. Estes recursos são gerenciados por uma equipe de especialistas que, por sua vez, tem por objetivo garantir o crescimento do patrimônio líquido do fundo, seguindo rigorosamente a política de investimento. Esta política aborda diversos aspectos importantes, entre eles, os níveis de risco toleráveis e os prazos de carência para resgate. É importante destacar que qualquer cliente interessado deve concordar com estas políticas para poder participar do fundo.

Cada investidor que participa do fundo possui uma quantidade diferente de cotas de mesmo valor. Esta quantidade é responsável por determinar a sua respectiva participação percentual em relação ao patrimônio total administrado. Ao final de cada dia, a rentabilidade do fundo é incorporada no valor da cota, de tal forma que todos os participantes do fundo apresentem o mesmo ganho percentual. Por outro lado, o ganho absoluto de cada cotista será proporcional à quantidade de cotas que o mesmo possui.

Existem muitos fundos disponíveis no mercado, oferecidos por diferentes instituições gestoras de recursos. Para atender demandas regulatórias, eles precisam ser classificados em alguma categoria que servirá de base para determinar algumas regras fundamentais que devem estar presentes nas políticas de investimento dos fundos.

A princípio, os fundos de investimento possuem validade infinita. Porém, alguns fundos são criados com intuito de serem encerrados no futuro assim que algum objetivo for atingido ou que algum prazo limite seja ultrapassado. Os prazos de carência variam muito em função da categoria do fundo e das estratégias de administração do gestor.

As categorias de fundo a seguir apresentam um prazo de carência relativamente baixo, sendo caracterizados como investimentos de curto ou médio prazo:

- FIRF (Renda Fixa) - investem majoritariamente em títulos de dívida que apresentam baixo risco de calote e liquidez alta ou média.
- FIA (Ações) - investem majoritariamente em ações que são negociadas na bolsa de valores.
- FC (Cambial) - investem majoritariamente em produtos que são diretamente influenciados pela variação de valor de moedas estrangeiras.
- FIM (Multimercado) - investem em diversos tipos de produtos, cuja proporção será determinada em função do nível de risco oferecido pelo fundo.

As categorias de fundo a seguir apresentam um prazo de carência muito elevado, sendo caracterizados como investimentos de longo prazo:

- FDIC (Direitos Creditórios) - investem majoritariamente em títulos de dívida que apresentam risco de calote elevado e pouca liquidez, mas que em contrapartida, oferecem uma rentabilidade diferenciada.

- FII (Imobiliário) - investem na aquisição de imóveis com intuito de obter lucro com a valorização dos mesmos e também com recebíveis mensais, como aluguéis.
- FIP (Participações) - investem em participações societárias, seja através de ações ou através de aquisições diretas em empresas de capital fechado.

Para garantir a segurança dos investidores, os órgãos reguladores realizam com bastante regularidade procedimentos de controle e auditoria em cada fundo disponível no mercado.

1.4.7 CRIPTOMOEDAS

Nos anos recentes, por conta da grande transformação digital sofrida pelo mundo, uma nova classe de ativos denominada criptomoedas surgiu e ganhou grande destaque. Seu principal objetivo é possibilitar um novo modelo de transações financeiras que ocorre de maneira exclusivamente digital, anônima e sem a necessidade de um intermediário operacional.

Diferente dos outros ativos, as criptomoedas não possuem qualquer tipo de regulação associada, representando assim uma quebra de paradigma em relação ao modelo econômico tradicional.

Atualmente, ainda existem muitas dúvidas e preocupações em relação aos níveis de segurança e confiabilidade dos mecanismos de custódia e transação das criptomoedas, o que faz com que muitos investidores tenham medo de negociá-las no mercado. Outro aspecto negativo é a frequente utilização das mesmas para realizar pagamento referentes à atividades ilícitas, devido à característica de anonimidade.

1.5 MEDIDAS DE AVALIAÇÃO

Conforme já foi explicado anteriormente, o preço dos ativos pode evoluir de diferentes maneiras ao longo do tempo. É importante que o investidor consiga, de alguma forma, medir a qualidade dos ativos que carrega e da carteira que é composta pelos mesmos, tanto sob a ótica de rentabilidade quanto sob a ótica de risco.

A base fundamental para este tipo de análise foi desenvolvida e documentada em [7]. Tradicionalmente, esta referência é sempre utilizada como ponto de partida para modelos mais avançados.

Para compreender as metodologias de avaliação de performance, é necessário primeiramente introduzir alguns conceitos básicos sobre séries temporais.

1.5.1 SÉRIES TEMPORAIS

Uma série temporal pode ser descrita como uma sequência de n valores aleatórios, indexados por instantes de tempo com intervalo constante.

Várias medidas estatísticas podem ser extraídas a partir de um conjunto de pontos de uma série temporal. Para as definições a seguir, vamos considerar instantes de tempo quaisquer α e β , tal que $\alpha < \beta$ e também o total de pontos N desde α até β (inclusive). Esse detalhe é importante, principalmente quando as séries temporais são muito extensas e estamos interessados apenas numa parte dela.

Serão apresentadas agora os operadores mais importantes para o contexto da análise de performance de ativos:

- Variação Absoluta - calcula a variação absoluta entre dois valores da série:

$$\Delta_A(t_\alpha, t_\beta) = x_\beta - x_\alpha$$

- Variação Relativa - calcula a variação relativa (geralmente apresentada em valores percentuais) entre dois valores da série, considerando como base o valor de instante de tempo menor:

$$\Delta_R(t_\alpha, t_\beta) = \frac{x_\beta - x_\alpha}{x_\alpha}$$

- Variação Logarítmica - calcula a variação logarítmica entre dois valores da série, considerando como base o valor de instante de tempo menor:

$$\Delta_L(t_\alpha, t_\beta) = \log\left(\frac{x_\beta}{x_\alpha}\right) = \log(x_\beta) - \log(x_\alpha)$$

A variação logarítmica possui propriedades muito úteis para diversos modelos de análise de séries temporais. Por esse motivo, é muito comum aproximar a variação relativa pela variação logarítmica quando os valores são muito pequenos:

$$\Delta_R(t_\alpha, t_\beta) \approx \Delta_L(t_\alpha, t_\beta)$$

- Média Aritmética - calcula a média aritmética dos N valores desde o instante α até o instante β :

$$M(t_\alpha, t_\beta) = \frac{1}{N} \sum_{i=\alpha}^{\beta} x_i$$

- Variância - calcula a variância dos N valores desde o instante α até o instante β :

$$Var(t_\alpha, t_\beta) = \frac{1}{N} \sum_{i=\alpha}^{\beta} (x_i - M(t_\alpha, t_\beta))^2$$

- Desvio padrão - calcula o desvio padrão dos N valores desde o instante α até o instante β :

$$D(t_\alpha, t_\beta) = \sqrt{\text{Var}(t_\alpha, t_\beta)}$$

Considere agora uma segunda série temporal qualquer com a mesma indexação de tempo. A covariância entre as séries X e Y , para os N valores desde o instante α até o instante β , é definida como:

$$\text{Covar}(X_{\alpha,\beta}, Y_{\alpha,\beta}) = \frac{1}{N} \left[\sum_{i=\alpha}^{\beta} x_i \cdot y_i - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=\alpha}^{\beta} x_i \right) \left(\sum_{i=\alpha}^{\beta} y_i \right) \right]$$

É possível mostrar que a covariância entre uma série e ela mesma resultará na própria variância individual.

Um conteúdo mais completo e detalhado sobre séries temporais pode ser encontrado na referência [12].

1.5.2 ANÁLISE DE ATIVOS DE MANEIRA INDIVIDUAL

Considere agora uma série temporal que representa a evolução de preços de um ativo. A rentabilidade acumulada de um ativo durante um período específico de tempo é definida através do operador de variação relativa:

$$R(t_\alpha, t_\beta) = \frac{P_\beta - P_\alpha}{P_\alpha}$$

Além disso, utilizando os mesmos operadores de variação, podemos compor novas séries temporais, conhecida como a série de ganhos (ou retornos) do ativo. Tomando sempre a distância entre α e β como a unidade básica de medida, ou seja, $\alpha = i$ e $\beta = i + 1$, temos:

$$G = \{ (t_0, -), (t_1, \Delta(P_0, P_1)), (t_2, \Delta(P_1, P_2)), \dots, (t_n, \Delta(P_{n-1}, P_n)) \}$$

Observe que o primeiro valor da série não está definido, pois o valor anterior não existe. Com isso, o primeiro ponto da série deve ser descartado e total de pontos passa a ser igual a $n - 1$.

Reescrevendo a série substituindo os termos do operador por uma representação mais simples, temos:

$$G = \{ (t_1, G_1), (t_2, G_2), \dots, (t_n, G_n) \}$$

A rentabilidade acumulada também pode ser calculada a partir da seguinte fórmula alternativa que utiliza os ganhos relativos:

$$R(t_\alpha, t_\beta) = \prod_{i=\alpha}^{\beta} (1 + G_i)$$

Da mesma maneira que qualquer série temporal, podemos utilizar os operadores para calcular as medidas estatísticas.

A volatilidade do ativo é definida como o desvio padrão da série de ganhos:

$$V = D(t_\alpha, t_\beta) = \sqrt{\text{Var}(t_\alpha, t_\beta)}$$

A volatilidade é considerada como uma das principais métricas em relação ao risco dos ativos. A definição de qual série de ganhos utilizar para o seu cálculo é muito importante, pois apesar de os valores finais serem muito próximos, algumas técnicas e propriedades exclusivas de cada uma podem não ser devidamente aplicáveis em relação às outras.

1.5.3 ANÁLISE DE ATIVOS DE MANEIRA CONJUNTA

Na grande maioria das vezes, uma carteira de investimentos é composta por mais de um ativo. Com isso, analisar os ativos de maneira isolada, como foi feito até agora, não é suficiente. Na verdade, o caminho correto é analisar a carteira como um bloco único, considerando a influência que cada ativo exerce sobre todos os outros.

Considere inicialmente um investidor que possui um capital de investimento $B > 0$ que será utilizado integralmente para compor uma carteira num instante de tempo inicial t_0 . Considere também que existe um total de $k > 0$ ativos diferentes que estão disponíveis para negociação no mercado financeiro.

Seja $F_i \geq 0$ o volume financeiro alocado em cada um dos ativos disponíveis, de tal maneira que o somatório dos mesmos resulte no capital de investimento B :

$$B = \sum_{i=1}^k F_i$$

Para cada ativo i , o peso de composição w_i é definido como a razão entre o volume financeiro F_i e o capital de investimento total B :

$$w_i = \frac{F_i}{B}$$

Com isso, o vetor de pesos W é estabelecido como:

$$W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$$

Pelas definições anteriores, é possível concluir que:

$$0 \leq w_i \leq 1 \quad e \quad \sum_{i=1}^k w_i = 1$$

Após um certo período de tempo t_n , os ativos passam a dispor de suas respectivas séries temporais de preço e retornos. A partir dos conceitos introduzidos anteriormente, podemos calcular os indicadores de performance para cada um dos ativos e compor outros vetores auxiliares. Para todas as definições a seguir, considere $\alpha = t_0$ e $\beta = t_n$.

O vetor de rentabilidade é definido como:

$$R = (R_1, R_2, \dots, R_k)$$

A matriz de covariância é definida como:

$$C = \begin{pmatrix} Covar_{1,1} & \cdots & Covar_{1,K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Covar_{K,1} & \cdots & Covar_{K,K} \end{pmatrix}$$

Onde cada elemento i, j da matriz representa a covariância entre série de retornos do ativo i e a série de retornos do ativo j . Pela sua construção, é possível provar que este tipo de matriz possui a propriedade de ser sempre simétrica e positiva semidefinida.

Com isso, podemos finalmente definir os dois principais indicadores de performance de uma carteira de investimento.

A rentabilidade da carteira é definida como o produto matricial entre o vetor de pesos e o vetor de rentabilidades transposto:

$$R_C = W \times R^T$$

A rentabilidade calculada desta forma representa a rentabilidade média da carteira para um período total de $\alpha - \beta$. Para calcular a rentabilidade média para outros períodos de tempo T , é necessário realizar a seguinte operação:

$$R_C(T) = (1 + R_C)^{\left(\frac{T}{\alpha - \beta}\right)}$$

A volatilidade da carteira é definida como a raiz quadrada do produto matricial entre o vetor de pesos, a matriz de covariância e o vetor de pesos transposto:

$$V_C = \sqrt{W \times C \times W^T}$$

Esta fórmula só apresenta o valor exato da volatilidade da carteira se a matriz de covariância for calculada a partir da série de ganhos absolutos, pois a base de referência se mantém constante. Para as séries de ganhos relativos ou logarítmicos, o valor começa a divergir com o passar do tempo, mas mesmo assim acaba ficando relativamente próximo do valor exato.

Além disso, a volatilidade calculada desta forma representa apenas os efeitos de um período unitário de tempo. Para calcular a volatilidade para outros períodos de tempo T , é necessário realizar a seguinte transformação:

$$V_C(T) = V_C \cdot \sqrt{\left(\frac{T}{\alpha - \beta}\right)}$$

Esta fórmula é obtida, sob certas hipóteses, a partir da característica de aditividade da série de ganhos logarítmicos e pode ser utilizada como uma boa aproximação para as outras séries de ganho [9].

Geralmente, as métricas de performance são disponibilizadas para o período equivalente de um ano.

Além da rentabilidade e da volatilidade, existem também outras métricas de qualidade, conhecidas como medidas de performance, que analisam a relação relação de risco-retorno dos ativos. Uma das medidas mais conhecidas e utilizadas atualmente é índice de Sharpe. Mais detalhes sobre este índice podem ser encontrados na referência [11].

1.5.4 MODELOS DE PREVISÃO DE DESEMPENHO

Até o momento, toda a análise de performance de carteira foi baseada em eventos do passado. Em outras palavras, considerando que o instante de tempo atual é t_n , a avaliação de performance da carteira foi realizada ao longo de intervalo de tempo entre os instantes t_0 e t_n . Para instantes de tempo maiores que t_n que ainda não se realizaram, o preço dos ativos é desconhecido.

Por essa razão, a única maneira de analisar o desempenho de uma carteira para um instante de tempo no futuro é estimar a evolução do preço dos ativos através de modelos de previsão. Estes modelos devem ser capazes de retornar um valor esperado para a rentabilidade e a volatilidade do ativo, seja através de fórmulas analíticas ou através simulações computacionais.

Dependendo da modelagem utilizada, o vetor de rentabilidades e a matriz de covariância, ao invés de serem compostos apenas por números reais, passam a ser populados por elementos de grande complexidade. Como consequência, o cálculo dos indicadores, apesar de seguir exatamente os mesmos princípios, torna-se bem mais complicado.

Atualmente, existem inúmeros modelos que tentam prever o valor e o comportamento dos preços. Em geral, eles podem ser divididos em três categorias fundamentais, listadas a seguir:

- Modelos baseados em processos estocásticos
- Modelos baseados em técnicas estatísticas e econométricas
- Modelos baseados em algoritmos de inteligência computacional

O detalhamento destes modelos está fora do escopo deste texto. Certamente não é possível escolher um único modelo ou metodologia que seja melhor que todos os outros. O que pode

ser feito, na verdade, é perceber que um modelo se encaixa melhor que outro em determinadas situações.

As referências [9] e [4] exploram em detalhes como a teoria de carteiras pode ser abordada considerando as incertezas do futuro.

1.5.5 MODELOS DE PREVISÃO NA PRÁTICA

Os profissionais do mercado financeiro responsáveis pela recomendação de carteiras a clientes, em geral, não utilizam modelos sofisticados para tentar prever a performance dos ativos. O principal motivo para isto é a falta de conhecimento técnico de ambas partes envolvidas.

Apesar de existirem modelos mais compreensíveis e difundidos, como por exemplo, o *valuation* de empresas para estimar o preço de ações, nem sempre é fácil obter todas as informações necessárias para alimentar o modelo a qualquer momento. No caso do próprio *valuation*, as grandes empresas de capital aberto só publicam seus relatórios contábeis trimestralmente.

Além disso, nem todos os tipos de ativo podem contemplar um modelo mais simples. Os fundos de investimento multimercado, por exemplo, são verdadeiras caixas pretas, pois sua performance está totalmente vinculada às decisões tomadas pelos gestores responsáveis.

Na verdade, a prática mais comum é assumir que se as algumas condições fundamentais não se alterarem, a performance de um ativo no futuro será muito semelhante à performance no passado, baseando-se isoladamente na observação das séries temporais. É muito mais fácil convencer um cliente leigo a adquirir um ativo através da simples apresentação de seu desempenho recente. Outra vantagem desta prática é que todos os ativos podem ser analisados através de uma metodologia única, sem a interferência de particularidades externas.

1.6 OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS

A otimização de carteiras é um problema matemático muito conhecido na área de finanças e que já vem sendo estudado há muitos anos. O seu principal objetivo é determinar a composição de ativos que consegue trazer a melhor performance possível para o investidor, de acordo com suas preferências.

No que se segue, será apresentados apenas os conceitos básicos de otimização matemática, enquanto a formulação do problema de otimização de carteiras, sob a ótica do modelo proposto, será apresentada no capítulo seguinte.

1.6.1 CONCEITOS DE OTIMIZAÇÃO

Essencialmente, qualquer problema de otimização é composto por três elementos principais:

- Variáveis Independentes - são as variáveis que podem ser manipuladas livremente para tentar encontrar a solução do problema e que estarão presentes nas expressões matemáticas da função objetivo e das restrições. Cada variável independente deve possuir seu domínio bem definido, para que não surjam inconsistências no modelo do problema.

- Função Objetivo - é a função matemática para a qual deseja-se encontrar o valor mínimo ou máximo, considerando que os resultados possíveis estão limitados pelo domínio das variáveis

independentes.

- Expressões de Restrição - são as expressões que representam regras e limitações que devem ser obedecidas. Caso alguma das restrições seja desrespeitada, não é possível considerar o problema como solucionado.

Uma vez definidos todos estes elementos, é possível iniciar o processo de encontrar a solução do problema modelado. Para isso, é necessário fazer uso de fundamentos e técnicas matemáticas que possam ser reproduzidas na forma de algoritmos computacionais.

Ao longo dos anos, muitas metodologias diferentes foram propostas e validadas. Dependendo da natureza e da complexidade do problema, apenas algumas metodologias específicas podem ser utilizadas para encontrar uma solução. Adicionalmente, neste grupo seletivo, uma pode ser mais adequada ou eficiente do que outra.

Por se tratar de um campo de estudo muito amplo, este texto não tem como objetivo se aprofundar nos conceitos referentes às diferentes metodologias de resolução e em quais situações devem ser aplicadas.

A referência [10] pode ser consultada para prover uma vasta base teórica sobre o funcionamento dos principais algoritmos matemáticos de otimização e as respectivas classes de problema em que os mesmos podem ser aplicados.

Conforme mencionado anteriormente, uma carteira também pode ser analisada considerando as expectativas sobre os retornos futuros dos ativos. Quando este é o caso, o problema de otimização determinístico pode ser convertido num problema de otimização estocástica, cuja complexidade é muito maior. Neste texto, vamos nos ater apenas ao caso determinístico. Mais detalhes sobre a teoria de otimização estocástica podem ser encontrada na referência [8].

1.6.2 LIMITAÇÕES PRÁTICAS

Assim como acontece com os modelos de previsão de desempenho, existem algumas barreiras que fazem com que a otimização de carteiras seja pouco utilizada pelos profissionais de administração de recursos de terceiros.

Além da complexidade técnica envolvida, muitas vezes, os modelos não conseguem apresentar resultados aceitáveis, pois não levam em conta diversas limitações que existem no mundo real. Outro elemento complicador muito comum é o tempo de processamento necessário para resolver o problema que, em geral, aumenta proporcionalmente com o número de ativos considerados pelo modelo.

Capítulo 2

O MODELO PROPOSTO

2.1 INTRODUÇÃO

Um dos principais objetivos deste trabalho é identificar as limitações presentes no mundo real e acrescentá-las à formulação do problema de otimização de carteiras, de tal maneira que os resultados obtidos estejam mais alinhados com a realidade prática.

Para que isso seja possível, será necessário construir um modelo mais amplo e detalhado tanto para os ativos quanto para os investidores. As propriedades associadas a cada um deles serão utilizadas para criar novas preferências dos investidores.

Grande parte dos conceitos de modelagem que serão introduzidos neste capítulo foram explorados de maneira similar na referência [6].

2.2 FORMULAÇÃO BÁSICA

A abordagem utilizada nesta seção apresenta diferenças significativas em relação ao modelo original proposto em [7], sendo necessário conhecer bem o mesmo para entender corretamente quais os pontos que apresentam semelhanças e quais pontos seguem uma nova linha de raciocínio.

O primeiro passo para constituir o modelo é definir como a estratégia de investimento do investidor pode ser incorporada. Esta estratégia está sempre associada a um dilema, pois ele deseja obter, simultaneamente, a maior rentabilidade possível e a menor volatilidade possível, mas em geral, estas duas medidas de performance caminham na mesma direção e não em direções opostas. Em outras palavras, com raríssimas exceções, quanto maior a rentabilidade de um ativo, maior a volatilidade do mesmo.

Por esse motivo, o desejo do investidor se torna paradoxal, e o mesmo precisa decidir qual dos dois objetivos é mais prioritário e estabelecer um limite de tolerância para o outro.

2.2.1 FUNÇÕES OBJETIVO E RESTRIÇÕES INERENTES

Com base no dilema apresentado, foram constituídas duas possibilidades para representar a estratégia de investimento adotada pelo investidor.

A primeira possibilidade de estratégia corresponde a maximizar a rentabilidade da carteira, respeitando um limite de volatilidade máxima:

- Função objetivo da medida prioritária $\rightarrow \max(R_C)$
- Restrição inerente da medida coadjuvante $\rightarrow V_C \leq V_{max}$

A segunda possibilidade de estratégia corresponde a minimizar a volatilidade da carteira, respeitando um limite de rentabilidade mínima:

- Função objetivo da medida prioritária $\rightarrow \min(V_C)$
- Restrição inerente da medida coadjuvante $\rightarrow R_C \geq R_{min}$

O problema de otimização, conforme modelado, apresenta um termo quadrático, referente ao cálculo da volatilidade. Por essa razão, deve ser utilizada um algoritmo que seja capaz de chegar uma solução, levando em conta a dificuldade matemática introduzida por este termo.

Atualmente, já foram desenvolvidos e estudados diversos algoritmos de programação quadrática que conseguem resolver o problema independentemente da localização do termo quadrático, seja na função objetivo ou na restrição.

De qualquer forma, para que o problema tenha solução, é necessário que os valores dos limites presentes nas restrições sejam razoáveis e factíveis de serem atendidos.

2.2.2 FRONTEIRA EFICIENTE

Para um determinado problema de otimização de carteiras, existe um conjunto de pontos que correspondem às melhores alocações possíveis para diferentes limites de volatilidade máxima ou rentabilidade mínima. Este conjunto de pontos é conhecido como fronteira eficiente.

Ela costuma ser usada utilizada para verificar o ganho marginal de rentabilidade em relação a um pequeno aumento de volatilidade, ou analogamente, a diminuição marginal de volatilidade em relação a uma pequena redução de rentabilidade.

Além disso, ela também pode ser utilizada para analisar se alguma alocação qualquer, determinada através de outras técnicas, está próxima ou distante da melhor alocação teórica.

2.3 VARIÁVEIS INDEPENDENTES E SEUS DOMÍNIOS

No problema de otimização de carteiras básico, os elementos w_i do vetor W correspondem às únicas variáveis independentes do problema, cujo domínio contínuo está bem definido pela expressão $0 \leq w_i \leq 1$.

Neste momento, serão introduzidas diversas características do modelo que modificam a natureza tradicional destas variáveis independentes e seus respectivos domínios. Para as duas próximas subseções, as notações se aplicam para todo e qualquer ativo i dentre os k ativos disponíveis no mercado.

2.3.1 VALORES MÍNIMOS E MÁXIMOS DE ALOCAÇÃO

No mundo prático, é muito comum encontrar situações voluntárias ou involuntárias nas quais se estabelecem limites de alocação mínima ou alocação máxima para os ativos da carteira.

Estabelecendo F_{min} como o volume financeiro mínimo e F_{max} como o volume financeiro máximo, podemos definir novos parâmetros importantes: o peso percentual mínimo w_{min} e peso percentual máximo w_{max} . Eles podem ser calculados da seguinte maneira:

$$w_{min} = \frac{F_{min}}{B} \quad e \quad w_{max} = \frac{F_{max}}{B}$$

Suponha agora que para um determinado ativo, existem múltiplos valores de limite que impõe restrições de valor mínimo ou de valor máximo. Estabelecendo θ_{min} como o conjunto de valores mínimos e θ_{max} e como o conjunto de valores máximos, temos então:

$$\theta_{min} = \{F_{min|1}, F_{min|2}, F_{min|3}, \dots, F_{min|n}\}$$

$$\theta_{max} = \{F_{max|1}, F_{max|2}, F_{max|3}, \dots, F_{max|n}\}$$

Observe que o capital de investimento B sempre estará presente no conjunto θ_{max} , pois nenhum investidor pode alocar mais volume financeiro num ativo além de seus recursos disponíveis para investimento. Além disso, o valor zero estará sempre presente em θ_{min} , pois o volume financeiro alocado pode ser nulo.

Cada um dos elementos destes conjuntos poderia ser utilizado para compor, separadamente, uma restrição particular do problema. Porém, isso não faz muito sentido, pois com certeza absoluta, duas delas vão dominar todas as outras em relação ao intervalo permitido para alocação. A primeira, com origem em θ_{min} vai fixar o limite inferior F_{inf} , enquanto a segunda, com origem em θ_{max} , vai fixar o limite superior F_{sup} .

No caso de θ_{min} , o volume financeiro dominante F_{inf} é o maior dos elementos do conjunto, enquanto que no caso de θ_{max} , o volume financeiro dominante F_{sup} é o menor dos elementos do conjunto. Dessa forma, fazendo uso das funções matemáticas *small* e *big* que retornam o menor e o maior elemento de um conjunto, respectivamente, podemos escrever:

$$F_{inf} = big(\theta_{min}) \quad e \quad F_{sup} = small(\theta_{max})$$

Para calcular w_{inf} e w_{sup} , basta aplicar a mesma relação matemática utilizada anteriormente:

$$w_{inf} = \frac{F_{inf}}{B} \quad e \quad w_{sup} = \frac{F_{sup}}{B}$$

A partir de todas essas definições, podemos inferir automaticamente que $w_{inf} \geq 0$ e que $w_{sup} \leq 1$, de tal maneira que a relação $0 \leq w \leq 1$ continua sendo respeitada.

A inclusão destes elementos na modelagem dos ativos provoca uma descontinuidade no domínio dos pesos percentuais. Isso acontece porque, independente dos pesos percentuais inferior e superior, o investidor ainda tem a opção de simplesmente não adquirir o ativo, de tal maneira que $w = 0$.

Por esse motivo, o novo domínio dos pesos percentuais passa a ser:

$$w \in \{0\} \cup [w_{inf}, w_{sup}]$$

Podemos contornar este obstáculo de modelagem através da introdução de uma nova variável ao problema. Ela será de natureza binária e determinará se o investidor vai adquirir o ativo ou não. Estabelecendo sua notação como y , temos então:

$$y \in \{0, 1\}$$

Com isso, podemos reescrever a restrição de domínio da seguinte maneira:

$$0 \leq y \cdot w_{inf} \leq w \leq y \cdot w_{sup} \leq 1$$

Dessa forma, dependendo do valor assumido por y , existem duas possibilidades para os valores de w :

$$y = 1 \rightarrow w \in [w_{inf}, w_{sup}] \quad \text{ou} \quad y = 0 \rightarrow w \in \{0\}$$

Como y é uma variável inteira, a complexidade de resolução computacional do problema aumenta significativamente.

2.3.2 ALOCAÇÃO BASEADA EM VALORES MÚLTIPLOS

Além dos valores mínimos e máximos, existe também uma outra situação recorrente que determina que o volume financeiro alocado num ativo deve ser múltiplo de um valor específico, comumente conhecido como lote unitário.

Definindo L como o valor do lote, podemos estabelecer um novo parâmetro w_L que representa a menor fração incremental que um peso percentual pode assumir:

$$w_L = \frac{L}{B}$$

Da mesma maneira que foi definido para os valores máximos e mínimos, é possível que exista mais de uma incidência de lote para o mesmo ativo:

$$\theta_L \rightarrow \{L_1, L_2, L_3, \dots, L_n\}$$

Neste caso, aplica-se o procedimento de obter o mínimo múltiplo comum entre todos os elementos do conjunto através da função matemática *MMC*:

$$L = MMC(\theta_L)$$

Utilizando os elementos F_{inf} e F_{sup} apresentados anteriormente, podemos calcular as quantidades que satisfazem os limites do intervalo. Porém, como estas quantidades devem ser números inteiros e como não é possível garantir que F_{inf} e F_{sup} sejam múltiplos de L , precisamos utilizar as funções matemáticas *ceiling* e *floor* que funcionam da seguinte maneira:

- Função *ceiling* \rightarrow recebe um número real qualquer m e retorna o menor número natural p tal que $p \geq m$.
- Função *floor* \rightarrow recebe um número real qualquer m e retorna o maior número natural p tal que $p \leq m$.

Estabelecendo x_{inf} como a quantidade limite inferior e x_{sup} como a quantidade limite superior, temos:

$$x_{inf} = ceiling\left(\frac{F_{inf}}{L}\right) \quad e \quad x_{sup} = floor\left(\frac{F_{sup}}{L}\right)$$

Seja agora x_n o conjunto de todos os números naturais compreendidos entre x_{inf} e x_{sup} , inclusive:

$$x_n = \{x_{inf}, x_{inf} + 1, x_{inf} + 2, \dots, x_{sup}\}$$

O novo intervalo de domínio do peso w , incluindo a regra do valor múltiplo, passa a ser:

$$w \in \{0\} \cup \{w_L \cdot x_n\},$$

onde podemos ainda calcular, se necessário:

$$w_{inf} = w_L \cdot x_{inf} \quad e \quad w_{sup} = w_L \cdot x_{sup}$$

Após este resultado, é possível constatar que o domínio dos pesos percentuais ficou ainda mais descontínuo, pois os valores possíveis de w passam a ser números discretos, distribuídos uniformemente entre w_{inf} e w_{sup} , além do próprio elemento nulo $\{0\}$.

Para contornar este obstáculo de modelagem, é preciso incluir uma terceira variável no problema, representada por x , a partir da qual, modificamos as restrições de domínio definidas anteriormente e adicionamos uma nova que determina o vínculo entre x e w :

$$0 \leq y \cdot x_{inf} \leq x \leq y \cdot x_{sup} \leq x_{sup} \quad e \quad w = w_L \cdot x$$

Dependendo dos valores B e L de cada ativo, existe uma chance de que o problema não tenha solução, devido a impossibilidade de respeitar a restrição fundamental de que o somatório de todos os pesos percentuais deve ser igual a 1.

2.4 RESTRIÇÕES DE ATIVOS EM CONJUNTO

Até o momento, as restrições dos ativos foram tratadas individualmente, tratando especificamente da definição das variáveis independentes e seus respectivos domínios. Porém, na prática, existem muitas outras restrições que se manifestam a partir de um conjunto de ativos que estão conectados entre si.

Para as próximas definições, vamos considerar Ω como o conjunto genérico de ativos que possuem alguma característica em comum. A variedade de conjuntos Ω possíveis que podem ser idealizados é muito grande. Por essa razão, será importante restringir esta variedade ao que de fato faz sentido prático.

2.4.1 RESTRIÇÕES DE SOMA DE PESOS

As restrições de soma de peso limitam, de maneira agregada, o peso percentual que um grupo de ativos pode assumir. Implicitamente, já foi definida a primeira restrição de soma de pesos universal, associada a todos os ativos:

$$\sum_{i=1}^k w_i = 1$$

Focando agora em grupos específicos de ativos, estabelecemos o peso do grupo como w_Ω , cujo valor pode ser calculado através da seguinte expressão:

$$i \in \Omega \rightarrow w_\Omega = \sum w_i$$

A partir desta soma, é possível confrontá-la contra diversos valores de limites por grupo através dos principais operadores matemáticos de comparação de expressões, para estabelecer as restrições.

Desde que o conjunto Ω esteja bem definido, uma grande variedade de restrições podem ser definidas.

2.4.2 RESTRIÇÕES DE CARDINALIDADE

Por fim, será apresentada agora o último tipo de restrição do modelo, conhecida como restrição de cardinalidade. Este tipo de restrição faz uso da variável independente y_i , introduzida anteriormente, para determinar quantas instâncias de ativos poderão estar presentes na carteira.

Considerando que y_i é uma variável binária que indica se um ativo estará presente ou não na carteira, podemos calcular a cardinalidade da carteira K a partir da seguinte expressão:

$$K = \sum_{i=1}^k y_i$$

Da mesma maneira que as restrições de soma de pesos, é possível também calcular a cardinalidade referentes a ativos que pertencem a um mesmo grupo:

$$i \in \Omega \rightarrow K_{\Omega} = \sum y_i$$

A partir desta soma, é possível confrontá-la contra diversos valores de limites de cardinalidade através dos principais operadores matemáticos de comparação de expressões, para estabelecer as restrições.

2.5 ASPECTOS PRÁTICOS

Agora que as técnicas de modelagem foram devidamente introduzidas, serão apresentados os principais aspectos práticos que devem ser traduzidos para o modelo através destas técnicas.

2.5.1 REGRAS DOS CUSTODIANTES E CORRETORAS

Os agentes custodiantes e corretoras podem estabelecer regras para garantir que o investidor não se coloque em situações de risco de crédito perante ela mesma.

Em geral, para garantir esta segurança, basta que elas proibam operações que possibilitem ao investidor aumentar seu patrimônio disponível original, como assumir posições vendidas ou utilizar mecanismos de alavancagem.

No fim das contas, esta regra de proteção se traduz na restrições fundamentais dos pesos percentuais que já haviam sido estabelecidas previamente:

$$0 \leq w_i \leq 1 \quad e \quad \sum_{i=1}^k w_i = 1$$

A modelagem do problema envolvendo a possibilidade de posições vendidas e alavancagem é muito mais complexa e está fora do escopo deste texto.

2.5.2 REGRAS DOS EMISSORES E BOLSAS DE NEGOCIAÇÃO

Os agentes emissores e bolsas de negociação podem estabelecer regras para viabilizar e facilitar a negociação dos ativos no mercado financeiro, entre elas:

- Valor mínimo de aquisição por ativo - geralmente são estipulados para garantir que todas as instâncias de aplicação recebidas são capazes de cobrir, a partir do lucro que proporcionam, seus custos de manutenção individual, como registros e controles de posições e operações.

- Valor máximo de aquisição por ativo - na grande maioria das vezes, são uma consequência direta do volume total disponível para negociação do ativo. Numa situação aonde um determinado investidor possui um capital de investimento muito elevado, ele pode ser capaz de cobrir com uma oferta de compra todo o volume que está em circulação no mercado.

- Lote padrão por ativo - geralmente são definidos para possibilitar que os ativos sejam negociados a partir de quantidades inteiras. Estas quantidades, quando multiplicados pelo valor do lote padrão, resultam no volume financeiro total. Seguindo esta metodologia, é possível manter um controle interno muito mais eficiente, pois a faixa de valores que podem surgir numa transação daquele ativo torna-se bem mais restrita.

Além destas, podem existir também outras regras mais específicas que não serão consideradas no modelo.

2.5.3 TOLERÂNCIA AO RISCO DE CRÉDITO

Conforme explicado anteriormente, os ativos emitidos a partir de operações de crédito, como títulos de dívida e fundos de direitos creditórios, oferecem risco de perda total de investimento, pois existe a possibilidade de calote por parte do devedor.

Alguns deles, porém, oferecem garantias, de tal forma que, se ocorrer algum evento desta natureza, parte do volume financeiro poderá ser recuperado até um valor máximo por investidor individual.

Cada investidor possui um nível de tolerância diferente para este tipo de risco que determinará o volume financeiro que o mesmo está disposto a alocar além da garantia. Para esta característica, foi considerado que os investidores se dividem em dois grupos diferentes:

- Tolerância absoluta - o investidor ignora completamente o risco de crédito, admitindo a alocação de qualquer volume financeiro no ativo, mesmo que seja ultrapassado o teto da garantia oferecida.

- Tolerância parcial - o investidor considera o risco de crédito relevante, admitindo apenas a alocação de um volume financeiro que seja menor ou igual ao teto da garantia oferecida.

No caso da tolerância absoluta, o modelo se mantém inalterado, enquanto que no caso da tolerância parcial, um pequeno ajuste deve ser realizado para considerar este efeito, introduzindo as restrições equivalentes que determinem que o volume financeiro alocado nunca ultrapassará o teto da garantia, mesmo que existam recursos suficientes para tanto.

Neste modelo, serão considerados duas possibilidades de garantia de crédito ao investidor:

- Valor máximo garantido por ativo individual - indica o valor máximo que pode ser recuperado para um ativo específico que possua risco de crédito.

- Valor máximo de garantia agregada - conforme explicado anteriormente, existem também

garantias que se aplicam de maneira agregada a algumas categorias de ativo, ou então ao tipo de instituição emissora.

No caso da garantia individual, o valor da mesma será comparado com os outros valores máximos que se aplicam ao ativo e o valor de F_{sup} será automaticamente ajustado pelo valor dominante.

Já no caso da garantia agregada, devem ser introduzidas novas restrições de soma de peso em função dos grupos que consolidam a garantia. Estabelecendo e_i como o emissor do ativo, E_j como o conjunto de ativos que pertencem a um emissor específico, u_i como categoria do ativo e U_j como o conjunto de ativos que pertencem a uma categoria de renda fixa específica, então, para cada conjunto E_j e U_j que possuam garantias agregada H_{E_j} e H_{U_j} , respectivamente, é necessário construir as restrições a seguir:

$$\forall i \mid e_i \in E_j \rightarrow W_{E_j} = \sum w_i \rightarrow 0 \leq W_{E_j} \leq H_{E_j}$$

$$\forall i \mid u_i \in U_j \rightarrow W_{U_j} = \sum w_i \rightarrow 0 \leq W_{U_j} \leq H_{U_j}$$

Para que esta modelagem seja possível, os ativos deverão possuir categorias e instituições emissoras bem definidas.

2.5.4 DISTRIBUIÇÃO DE CARÊNCIA

Um dos aspectos mais importantes que um investidor precisa ter em mente quando realiza um investimento é, justamente, quanto tempo ele precisa esperar para ter acesso novamente aos recursos aplicados.

Com base nesta necessidade, é possível definir a distribuição de carência da carteira, cujo objetivo é determinar as alocações máximas para diferentes intervalos de carência dos ativos.

A partir dos conceitos de conjuntos relacionais, os grupos de distribuição C devem ser definidos de tal maneira que um sempre esteja totalmente contido no outro:

$$C_1 \subset C_2 \subset C_3 \subset \dots \subset C_N$$

Além disso, qualquer elemento que não esteja presente na interseção entre um conjunto e todos os seus subconjuntos, deve ser maior que o maior elemento desta interseção. Estabelecendo P como o conjunto dos elementos exclusivos em relação ao nível imediatamente inferior, esta regra pode ser escrita da seguinte maneira:

$$x \in C_{j+1} \text{ e } x \notin C_j \cap C_{j+1} \rightarrow x \in P_{j+1} \rightarrow \min(P_{j+1}) > \max(C_j)$$

Em outras palavras, as carências devem surgir nos conjuntos em ordem crescente, para manter a consistência dos intervalos temporais. O exemplo a seguir com três grupos e cinco prazos ajuda a compreender melhor este conceito:

$$\begin{aligned} & \{a\} \in C_1 \quad , \quad \{a, b, c\} \in C_2 \quad , \quad \{a, b, c, d, e\} \in C_3 \quad , \quad b < c \quad , \quad d < e \\ & \rightarrow \quad \{a\} \in P_1 \quad , \quad \{b, c\} \in P_2 \quad , \quad \{d, e\} \in P_3 \quad , \quad a < b < c < d < e \end{aligned}$$

Dessa maneira, é possível formar uma cadeia de grupos com diferentes níveis de flexibilidade, onde o primeiro conjunto é o menos flexível e o último conjunto (que abrange todos os ativos disponíveis) é o mais flexível.

Por fim, vale destacar que o somatório das alocações de cada um dos grupos deve totalizar 100%. A construção da cadeia de restrições para alcançar este objetivo não é tão trivial quanto parece. Estabelecendo c_i como a carência do ativo, H_{C_j} como o limite percentual de alocação máxima para cada conjunto C e Q como total de conjuntos C , tal que $1 \leq j \leq Q$, temos então:

$$\begin{aligned} \forall i \mid c_i \in P_j \quad & \rightarrow \quad W_{P_j} = \sum w_i \quad , \\ j = 1 \rightarrow H_{C_j} \leq W_{P_j} \leq 1 \quad & e \quad j > 1 \rightarrow 0 \leq W_{P_j} \leq 1 - \sum_{c=1}^{j-1} H_{C_j} \end{aligned}$$

Com isso, por mais que exista um certo nível de flexibilidade para alocar os recursos em prazos de carência mais elevado, aqueles que possuem um prazo menor continuarão elegíveis para este mesmo nível e poderão ser selecionados se forem mais vantajosos para atingir um resultado otimizado.

2.5.5 CONTROLE DE DIVERSIFICAÇÃO

Conforme demonstrado na referência [7], o modelo de otimização por média-variância é capaz de proporcionar uma redução no risco de carteira a partir da diversificação. Porém, muitas vezes, este modelo provoca a pulverização excessiva da carteira, recomendando alocações muito pequenas em vários ativos diferentes. Também é possível observar a situação contrária, na qual o modelo recomenda um nível de concentração muito elevado em alguns poucos ativos específicos.

O objetivo do controle de diversificação é evitar estes fenômenos indesejáveis, a partir de restrições de controle que limitem as alocações conforme as preferências do investidor ou do gestor.

As restrições de controle podem ser estabelecidas de maneira equânime para todos os ativos, ou de maneira personalizado, fixando configurações específicas para cada ativo individualmente. Neste modelo, serão trabalhadas apenas as restrições de perfil equânime.

Um ponto importante a ser considerado é que quaisquer limites definidos dessa maneira representam uma preferência estratégica. Eles não devem ser confundidos com os limites estabelecidos pelos agente emissores e bolsas de negociação que estão totalmente fora do controle dos investidores e gestores.

Também é relevante destacar que os limites relacionados à alocação podem ser informados pelo investidor diretamente em termos de peso percentual ou em termos de valor financeiro absoluto que, por sua vez, precisarão ser convertidos eventualmente para medida de peso percentual em função do capital de investimento.

O controle de diversificação pode ser realizado efetivamente através de técnicas baseadas em conceitos que já foram introduzidos.

A primeira técnica é baseada nos limites máximos e mínimos de alocação:

- Valor mínimo de alocação - geralmente são definidos com o objetivo de garantir que o volume financeiro alocado num ativo não seja muito pequeno, a ponto de gerar mais um nível de controle para pouca possibilidade de retorno.
- Valor máximo de alocação - geralmente são definidos com o objetivo de garantir que o volume financeiro alocado num ativo não seja muito grande, reduzindo assim o risco de concentrar muitos recursos num único ativo.

Para que estes limites façam sentido, o valor mínimo deve ser sempre maior ou igual a 0%, enquanto o valor máximo deve ser sempre maior ou igual ao valor mínimo e também menor ou igual a 100%:

$$0 \leq H_{min} \leq H_{max} \leq 1$$

A segunda técnica é baseada no conceito do valor de lote múltiplo de alocação:

- Lote incremental da carteira - geralmente são definidos com o objetivo de garantir que o aumento marginal de peso num determinado ativo seja suficientemente relevante.

Os valores do lote devem ser necessariamente divisores de 100%, caso contrário, o problema de otimização se torna insolúvel:

$$\frac{1}{H_L} \in \mathbb{N}$$

Com, isso os valores possíveis fazem parte do conjunto a seguir:

$$H_L \in 10^{-(2+e)} \cdot \{100, 50, 25, 20, 10, 5, 2, 1\} \quad e \in \mathbb{N}$$

A terceira técnica é baseada no conceito da cardinalidade da carteira:

- Quantidade mínima de ativos da carteira - geralmente são definidos para garantir que a carteira tenha uma quantidade mínima de ativos, independente de seus respectivos percentuais de alocação, contribuindo para estabelecer um patamar mínimo de diversificação.
- Quantidade máxima de ativos da carteira - geralmente são definidos para garantir que a carteira tenha uma quantidade máxima de ativos, independente de seus respectivos percentuais de alocação, contribuindo para estabelecer um patamar máximo de diversificação.

Para que estes limites façam sentido, a quantidade mínima de ativos deve ser sempre maior ou igual a 1, enquanto a quantidade máxima de ativos deve ser sempre maior ou igual a

quantidade mínima e também menor ou igual ao total de ativos que podem ser selecionados para a carteira:

$$1 \leq K_{min} \leq K_{max} \leq k$$

Por fim, é importante evidenciar que, por mais que estas técnicas pareçam independentes entre si, elas afetam umas às outras e determinadas combinações de valor podem adulterar indiretamente os limites estabelecidos originalmente ou até mesmo tornar o problema insolúvel.

A primeira situação que deve ser observada é a sintonia entre a alocação mínima e cardinalidade máxima e também entre a alocação máxima e a cardinalidade mínima. Se elas não forem respeitadas, o problema torna-se insolúvel:

$$H_{min} \leq \frac{1}{K_{max}} \quad e \quad H_{max} \geq \frac{1}{K_{min}}$$

Outra situação relevante é a sintonia da alocação mínima e da alocação máxima com o lote incremental. Idealmente, o lote incremental deve ser divisor dos limites de alocação, para evitar um estreitamento forçado do intervalo original:

$$\frac{H_{min}}{H_L} \in \mathbb{N} \quad e \quad \frac{H_{max}}{H_L} \in \mathbb{N}$$

Para evitar estes tipos de inconsistência, a escolha dos limites deve ser feita de maneira astuciosa e integrada.

Capítulo 3

INFRAESTRUTURA DE TESTES

3.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

No capítulo anterior, foram apresentados todos os conceitos teóricos que fazem parte do modelo proposto. O próximo passo consiste em verificar como ele se comporta na prática. Para que esta etapa pudesse ser concluída com êxito, foi necessário construir uma infraestrutura de testes, composta de bases diversificadas de ativos e investidores. A base de ativos foi dividida em dois grupos:

- Ativos fictícios - os ativos deste grupo foram construídos de maneira artificial com o objetivo de refletir as características do mundo real que o modelo tenta capturar. As suas respectivas séries temporais foram produzidas de forma aleatória, a partir de um modelo que será detalhado na próxima seção. Propositamente, foram estabelecidas condições de aquisição mais rigorosas e limitadoras para os ativos que conquistaram as melhores relações risco-retorno.

- Ativos verdadeiros - os ativos deste grupo foram escolhidos a partir de produtos financeiros reais que podem ser encontrados e adquiridos nas principais instituições distribuidoras do mercado.

A base de investidores também foi dividida em dois grupos:

- Massa de investidores - esta base foi construída com o objetivo de gerar o maior nível de diversidade possível entre os investidores. Para cada tipo de preferência introduzida no capítulo anterior, foram estabelecidos diferentes intervalos de valores de tal maneira que, ao realizar o produto cartesiano entre todos os conjuntos, foi obtida uma base de com muitas instâncias de investidores, cada uma com características exclusivas.

- Investidor específico - esta base possui apenas um único investidor, definido para permitir a realização de análises mais granulares e detalhadas.

Cada uma das bases será apresentada em maiores detalhes nas próximas seções. Em seguida, serão estabelecidas as métricas e metodologias de teste a partir das quais será possível avaliar o resultado do modelo.

3.2 SÉRIES TEMPORAIS DOS ATIVOS FICTÍCIOS

As séries temporais dos ativos fictícios foram geradas artificialmente de forma aleatória, seguindo as regras de um modelo, com o objetivo de produzir uma base diversificada em relação aos níveis de performance e covariância.

Elas apresentam as seguintes características em comum:

- Os instantes de observação são medidos na unidade temporal de dias úteis, ou seja, dias em que ocorre negociação no mercado financeiro.
- Os ganhos diários relativos são calculados a partir de uma fórmula aleatória que, por sua vez, tenta reproduzir o comportamento dos ativos daquela natureza.
- A observação de preço no instante de tempo t_0 é sempre fixada em $P = 1$ para que todas as séries possuam o mesmo ponto de partida normalizado. Além da observação inicial fixa, elas possuem um total de 250 observações de preço. Consequentemente, temos um total de 250 observações de ganho diário relativo.

Para cada ativo, uma instância aleatória da série é gerada. Em seguida, é feita uma análise para verificar se todas as regras estabelecidas pelo modelo foram respeitadas. Se alguma regra não tiver sido respeitada, a instância atual é descartada e uma nova instância é gerada. Este procedimento é realizado repetidamente, tantas vezes quantas forem necessárias, até que a instância gerada consiga respeitar todas as regras. Quando isso acontece, a instância é armazenada e se torna a série temporal oficial daquele ativo.

Foi estabelecido um único modelo de construção de série que faz uso da geração de número aleatórios X a partir da função distribuição acumulada inversa F_X^{-1} , aplicada sobre uma amostra de distribuição uniforme U com intervalo $[0, 1]$, conforme a expressão a seguir:

$$X \sim F_X^{-1}(U)$$

Mais especificamente, serão gerados números aleatórios que seguem uma distribuição normal com média μ e desvio padrão σ :

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

A referência [5] apresenta diversas técnicas para geração de números aleatórios e também para construção de séries temporais artificiais.

O modelo em questão tem por objetivo produzir séries temporais que possuem uma tendência de variação absoluta positiva no longo prazo, a partir das seguintes regras:

- A rentabilidade da série temporal R_S deve respeitar um valor alvo de rentabilidade R_A , de tal maneira que no último instante de observação, a rentabilidade acumulada deve ser igual a esta meta, considerando uma pequena margem de tolerância de desvio $\xi = 0,001$:

$$R_S = R(t_1, t_{250}) \quad R_A - \xi \leq R_S \leq R_A + \xi$$

• A volatilidade da série temporal V_S deve respeitar um valor alvo de volatilidade V_A , de tal maneira que no último instante de observação, a volatilidade acumulada deve ser igual a esta meta, considerando uma pequena margem de tolerância de desvio $\xi = 0,001$:

$$V_S = D(t_1, t_{250}) \quad V_A - \xi \leq V_S \leq V_A + \xi$$

• A ganho diário da série é calculado a partir do produto entre o ganho diário da meta de rentabilidade R_A e uma variável aleatória O_B que indica um percentual de performance em relação a esta mesma taxa. Este termo O_B é responsável por causar oscilações na tendência de subida (conhecida também pelo termo técnico *drift*) e segue uma distribuição normal de média $\mu = 100\%$ e desvio padrão $\sigma = V_B$:

$$R_B = (1 + R_A)^{250-1} - 1 \quad O_B \sim N(100\%, V_B) \quad R_D \sim R_B \cdot O_P$$

O desvio V_B é calibrado manualmente para cada par de meta R_A e V_A com objetivo de aumentar a probabilidade de gerar uma série que consiga respeitar estes parâmetros.

3.3 MODELO DOS ATIVOS

Os ativos do modelo devem possuir os seguintes parâmetros bem definidos:

Parâmetro	Descrição
i	→ código de identificação único
P	→ código da categoria do ativo
E	→ código da instituição emissora
C	→ prazo da carência em dias corridos ou úteis
F_{min}	→ valor financeiro mínimo para aquisição
F_{max}	→ valor financeiro máximo para aquisição
F_G	→ valor financeiro para garantia de crédito individual.
L	→ valor financeiro do lote padrão
R	→ rentabilidade obtida a partir das séries temporais
V	→ volatilidade obtida a partir das séries temporais

Quando o parâmetro F_G não for aplicável a um determinado ativo, ele possuirá um valor extremamente elevado, para facilitar a interpretação do algoritmo de que não há risco de crédito envolvido. Esta estratégia não prejudicará a eficiência do código, pois o capital de investimento B será sempre inferiormente dominante em relação ao valor de F_G .

As características das bases de ativos fictícios e reais serão apresentadas a seguir, na sequência, serão são apresentadas as tabelas contendo os detalhes de cada ativo.

3.3.1 ATIVOS FICTÍCIOS

A base de ativos fictícios é composta por 60 ativos, sendo 30 da categoria de renda fixa e 30 de renda variável.

Os ativos de renda fixa possuem as seguintes características exclusivas:

- Possuem o valor do parâmetro V sempre igual a zero. Como consequência direta, eles possuem covariância nula entre si e em relação aos ativos de renda variável. Esta característica implica que todos os títulos possuem metodologia de remuneração pré-fixada e que qualquer influência das negociações a mercado estão sendo descartadas.

- Quando se tratar de um título público emitido pelo governo federal, o valor F_G está bem definido e deve ser menor que o valor F_{max} . Além desta, não há nenhuma outra mecânica de garantia de crédito estabelecida.

- Quando se tratar de uma captação bancária, o valor F_G não se aplica. Em substituição, surgem dois novos limite de garantia de crédito. O primeiro corresponde a um limite individual referente ao banco emissor, no valor de 250.000,00 enquanto o segundo corresponde a um limite geral das captações bancárias como um todo, no valor de 1.000.000,00.

Para cada captação, existe um banco emissor associado, num total de 4 possíveis, identificados através do código da instituição que variam de 2 a 5. Os ativos restantes são títulos públicos, emitidos pelo governo federal, identificados através do código da instituição igual a 1.

Os ativos de renda variável possuem as seguintes características exclusivas:

- Possuem o valor do parâmetro V sempre maior que zero.
- Nenhuma mecânica de garantia de crédito se aplica.

No caso dos ativos de renda variável, a definição precisa da categoria e do agente emissor são desnecessárias. Por esse motivo, foram os utilizados o mesmos códigos para todos os ativos.

3.3.2 ATIVOS VERDADEIROS

A base de ativos verdadeiros é composta por 247 fundos de investimento, cujas séries temporais de preço estão bem definidas no intervalo de tempo compreendido entre as datas 02/07/2018 e 02/07/2019. Dessa forma, foi possível construir as séries de ganhos diários com um total de 250 dias úteis. Para cada fundo, é disponibilizado o código de identificação CNPJ (Cadastro Nacional de Pessoas Jurídicas), a partir do qual é possível obter seus respectivos nomes e gestores.

Além disso, todos eles apresentam as seguintes características em comum:

- $F_{max} = 1.000.000.000,00$
- $F_G = 1.000.000.000,00$
- $L = 1,00$

Como temos apenas fundo nesta base, todos os ativos são classificados na categoria de renda variável. Apesar de nenhum título privado ter sido selecionado para compor a categoria

de renda fixa, alguns dos fundos selecionados utilizam apenas este tipo de produto para compor sua carteira, de tal forma que efeito de rentabilidade constante e baixa volatilidade acaba por dominar o comportamento do fundo.

3.3.3 DETALHES DOS ATIVOS

A tabela a seguir apresenta os 30 ativos de renda fixa fictícios e seus respectivos parâmetros:

i	P	E	C	F_{min}	F_{max}	F_G	L	R	V
1	1	1	0	100,00	50.000.000,00	25.000.000,00	100,00	0,50%	0,00%
2	1	1	180	100,00	50.000.000,00	25.000.000,00	100,00	1,00%	0,00%
3	1	1	0	1.000,00	50.000.000,00	25.000.000,00	1.000,00	1,00%	0,00%
4	1	1	360	100,00	50.000.000,00	25.000.000,00	100,00	1,50%	0,00%
5	1	1	180	1.000,00	50.000.000,00	25.000.000,00	1.000,00	1,50%	0,00%
6	1	1	360	1.000,00	50.000.000,00	25.000.000,00	1.000,00	2,00%	0,00%
7	2	2	0	100,00	10.000.000,00	1.000.000.000,00	100,00	2,50%	0,00%
8	2	2	180	100,00	10.000.000,00	1.000.000.000,00	100,00	3,00%	0,00%
9	2	2	0	1.000,00	10.000.000,00	1.000.000.000,00	1.000,00	3,00%	0,00%
10	2	2	360	100,00	10.000.000,00	1.000.000.000,00	100,00	3,50%	0,00%
11	2	2	180	1.000,00	10.000.000,00	1.000.000.000,00	1.000,00	3,50%	0,00%
12	2	2	360	1.000,00	10.000.000,00	1.000.000.000,00	1.000,00	4,00%	0,00%
13	2	3	0	100,00	10.000.000,00	1.000.000.000,00	100,00	4,50%	0,00%
14	2	3	180	100,00	10.000.000,00	1.000.000.000,00	100,00	5,00%	0,00%
15	2	3	0	1.000,00	10.000.000,00	1.000.000.000,00	1.000,00	5,00%	0,00%
16	2	3	360	100,00	10.000.000,00	1.000.000.000,00	100,00	5,50%	0,00%
17	2	3	180	1.000,00	10.000.000,00	1.000.000.000,00	1.000,00	5,50%	0,00%
18	2	3	360	1.000,00	10.000.000,00	1.000.000.000,00	1.000,00	6,00%	0,00%
19	2	4	0	100,00	10.000.000,00	1.000.000.000,00	100,00	6,50%	0,00%
20	2	4	180	100,00	10.000.000,00	1.000.000.000,00	100,00	7,00%	0,00%
21	2	4	0	1.000,00	10.000.000,00	1.000.000.000,00	1.000,00	7,00%	0,00%
22	2	4	360	100,00	10.000.000,00	1.000.000.000,00	100,00	7,50%	0,00%
23	2	4	180	1.000,00	10.000.000,00	1.000.000.000,00	1.000,00	7,50%	0,00%
24	2	4	360	1.000,00	10.000.000,00	1.000.000.000,00	1.000,00	8,00%	0,00%
25	2	5	0	100,00	10.000.000,00	1.000.000.000,00	100,00	8,50%	0,00%
26	2	5	180	100,00	10.000.000,00	1.000.000.000,00	100,00	9,00%	0,00%
27	2	5	0	1.000,00	10.000.000,00	1.000.000.000,00	1.000,00	9,00%	0,00%
28	2	5	360	100,00	10.000.000,00	1.000.000.000,00	100,00	9,50%	0,00%
29	2	5	180	1.000,00	10.000.000,00	1.000.000.000,00	1.000,00	9,50%	0,00%
30	2	5	360	1.000,00	10.000.000,00	1.000.000.000,00	1.000,00	10,00%	0,00%

A tabela a seguir apresenta os 30 ativos de renda variável fictícios e seus respectivos parâmetros:

i	P	E	C	F_{min}	F_{max}	F_G	L	R	V
31	3	6	360	100.000,00	50.000.000,00	1.000.000.000,00	1.000,00	20,00%	1,25%
32	3	6	360	10.000,00	50.000.000,00	1.000.000.000,00	1.000,00	20,00%	2,50%
33	3	6	180	100.000,00	50.000.000,00	1.000.000.000,00	1.000,00	20,00%	2,50%
34	3	6	180	10.000,00	50.000.000,00	1.000.000.000,00	1.000,00	20,00%	3,75%
35	3	6	0	100.000,00	50.000.000,00	1.000.000.000,00	1.000,00	20,00%	3,75%
36	3	6	0	10.000,00	50.000.000,00	1.000.000.000,00	1.000,00	20,00%	5,00%
37	3	6	360	100.000,00	50.000.000,00	1.000.000.000,00	1.000,00	25,00%	6,25%
38	3	6	360	10.000,00	50.000.000,00	1.000.000.000,00	1.000,00	25,00%	7,50%
39	3	6	180	100.000,00	50.000.000,00	1.000.000.000,00	1.000,00	25,00%	7,50%
40	3	6	180	10.000,00	50.000.000,00	1.000.000.000,00	1.000,00	25,00%	8,75%
41	3	6	0	100.000,00	50.000.000,00	1.000.000.000,00	1.000,00	25,00%	8,75%
42	3	6	0	10.000,00	50.000.000,00	1.000.000.000,00	1.000,00	25,00%	10,00%
43	3	6	360	100.000,00	50.000.000,00	1.000.000.000,00	1.000,00	30,00%	11,25%
44	3	6	360	10.000,00	50.000.000,00	1.000.000.000,00	1.000,00	30,00%	12,50%
45	3	6	180	100.000,00	50.000.000,00	1.000.000.000,00	1.000,00	30,00%	12,50%
46	3	6	180	10.000,00	50.000.000,00	1.000.000.000,00	1.000,00	30,00%	13,75%
47	3	6	0	100.000,00	50.000.000,00	1.000.000.000,00	1.000,00	30,00%	13,75%
48	3	6	0	10.000,00	50.000.000,00	1.000.000.000,00	1.000,00	30,00%	15,00%
49	3	6	360	100.000,00	50.000.000,00	1.000.000.000,00	1.000,00	35,00%	16,25%
50	3	6	360	10.000,00	50.000.000,00	1.000.000.000,00	1.000,00	35,00%	17,50%
51	3	6	180	100.000,00	50.000.000,00	1.000.000.000,00	1.000,00	35,00%	17,50%
52	3	6	180	10.000,00	50.000.000,00	1.000.000.000,00	1.000,00	35,00%	18,75%
53	3	6	0	100.000,00	50.000.000,00	1.000.000.000,00	1.000,00	35,00%	18,75%
54	3	6	0	10.000,00	50.000.000,00	1.000.000.000,00	1.000,00	35,00%	20,00%
55	3	6	360	100.000,00	50.000.000,00	1.000.000.000,00	1.000,00	40,00%	21,25%
56	3	6	360	10.000,00	50.000.000,00	1.000.000.000,00	1.000,00	40,00%	22,50%
57	3	6	180	100.000,00	50.000.000,00	1.000.000.000,00	1.000,00	40,00%	22,50%
58	3	6	180	10.000,00	50.000.000,00	1.000.000.000,00	1.000,00	40,00%	23,75%
59	3	6	0	100.000,00	50.000.000,00	1.000.000.000,00	1.000,00	40,00%	23,75%
60	3	6	0	10.000,00	50.000.000,00	1.000.000.000,00	1.000,00	40,00%	25,00%

A tabela a seguir apresenta as características dos ativos verdadeiros (código 1 até 42):

i	CNPJ	F_{min}	C	R	V
1	29.286.406/0001-64	25.000,00	43	5,07%	3,84%
2	23.951.048/0001-80	50.000,00	22	5,13%	3,74%
3	26.648.868/0001-96	1.000,00	23	51,74%	34,07%
4	13.001.211/0001-90	5.000,00	11	11,98%	12,93%
5	15.862.830/0001-03	1.000,00	23	33,79%	19,24%
6	13.608.337/0001-28	5.000,00	21	10,17%	4,27%
7	17.397.804/0001-79	5.000,00	23	24,43%	13,75%
8	09.625.909/0001-00	100,00	2	7,90%	0,76%
9	11.357.776/0001-80	5.000,00	5	5,08%	3,14%
10	06.041.290/0001-06	5.000,00	22	5,19%	4,19%
11	03.168.062/0001-03	5.000,00	3	36,50%	21,66%
12	07.158.060/0001-86	5.000,00	5	6,22%	2,70%
13	07.279.657/0001-89	0,00	3	32,91%	21,78%
14	22.100.009/0001-07	10.000,00	32	7,69%	0,17%
15	26.387.057/0001-89	1.000,00	6	5,93%	0,44%
16	09.141.893/0001-60	5.000,00	5	6,37%	2,49%
17	04.455.632/0001-09	10.000,00	1	7,90%	3,58%
18	11.392.165/0001-72	0,00	21	36,87%	20,36%
19	14.812.722/0001-55	5.000,00	21	7,24%	4,85%
20	17.087.932/0001-16	50.000,00	22	9,35%	2,69%
21	08.892.340/0001-86	50.000,00	45	36,95%	20,01%
22	09.635.172/0001-06	50.000,00	23	36,23%	20,60%
23	17.867.221/0001-64	50.000,00	21	1,79%	4,23%
24	06.070.574/0001-12	50.000,00	22	27,48%	16,88%
25	29.283.812/0001-73	25.000,00	22	27,36%	17,83%
26	05.097.427/0001-73	50.000,00	21	11,13%	4,18%
27	08.739.850/0001-18	50.000,00	21	15,34%	6,52%
28	09.120.774/0001-20	5.000,00	23	40,61%	15,52%
29	14.799.785/0001-19	5.000,00	23	18,86%	6,32%
30	01.214.092/0001-75	5.000,00	22	7,15%	3,35%
31	11.952.873/0001-10	5.000,00	5	4,46%	0,78%
32	23.711.497/0001-51	25.000,00	12	5,28%	3,81%
33	20.146.294/0001-71	5.000,00	32	6,94%	0,70%
34	13.615.411/0001-33	5.000,00	1	6,60%	0,66%
35	05.488.919/0001-90	10.000,00	4	6,33%	2,29%
36	10.705.335/0001-69	1.000,00	1	6,59%	0,70%
37	05.109.839/0001-86	10.000,00	24	8,49%	2,80%
38	11.182.064/0001-77	5.000,00	15	49,36%	17,69%
39	16.948.298/0001-04	50.000,00	44	50,19%	19,53%
40	09.720.710/0001-60	3.000,00	1	6,76%	0,09%
41	20.879.578/0001-77	3.000,00	1	7,10%	0,10%
42	19.628.666/0001-17	10.000,00	24	23,77%	8,24%

A tabela a seguir apresenta as características dos ativos verdadeiros (código 43 até 84):

i	CNPJ	F_{min}	C	R	V
43	09.141.867/0001-31	10.000,00	23	49,95%	14,18%
44	07.659.002/0001-36	10.000,00	6	10,12%	1,82%
45	21.312.739/0001-09	5.000,00	9	46,57%	33,25%
46	14.806.166/0001-04	5.000,00	5	13,12%	5,96%
47	02.895.694/0001-06	5.000,00	3	33,90%	19,24%
48	27.880.333/0001-09	1.000,00	25	11,60%	3,62%
49	01.823.373/0001-25	5.000,00	22	11,02%	4,70%
50	08.912.569/0001-35	20.000,00	3	43,74%	20,10%
51	03.804.917/0001-37	5.000,00	1	10,50%	4,64%
52	23.686.459/0001-96	20.000,00	22	7,09%	3,86%
53	24.592.505/0001-50	25.000,00	21	23,99%	6,70%
54	17.335.646/0001-22	5.000,00	23	41,19%	20,02%
55	11.182.072/0001-13	10.000,00	5	54,75%	32,55%
56	16.986.049/0001-03	100.000,00	23	7,24%	3,08%
57	09.441.308/0001-47	20.000,00	8	7,12%	3,34%
58	09.296.022/0001-15	5.000,00	3	35,76%	18,23%
59	21.581.510/0001-70	20.000,00	22	-0,60%	17,83%
60	08.929.653/0001-61	5.000,00	21	3,44%	3,77%
61	05.903.038/0001-98	5.000,00	21	1,78%	6,74%
62	07.899.238/0001-40	5.000,00	3	35,42%	22,44%
63	18.908.578/0001-06	5.000,00	2	9,48%	6,04%
64	20.516.919/0001-40	5.000,00	2	6,00%	1,55%
65	05.257.287/0001-53	3.000,00	5	9,62%	3,83%
66	06.301.947/0001-19	1.000,00	1	7,19%	1,27%
67	06.893.041/0001-30	100,00	1	6,63%	0,05%
68	14.146.726/0001-41	5.000,00	22	12,72%	5,84%
69	14.115.116/0001-80	1.000,00	1	6,72%	0,67%
70	19.488.768/0001-84	1.000,00	1	6,74%	0,09%
71	17.759.778/0001-81	1.000,00	23	18,14%	13,99%
72	14.083.797/0001-42	25.000,00	12	44,26%	19,23%
73	17.002.861/0001-01	50.000,00	23	31,49%	14,53%
74	22.354.046/0001-41	50.000,00	22	8,02%	4,82%
75	08.815.403/0001-09	20.000,00	22	2,38%	5,69%
76	10.608.762/0001-29	5.000,00	24	43,02%	14,62%
77	12.430.167/0001-71	5.000,00	12	16,18%	5,75%
78	23.729.512/0001-99	25.000,00	13	10,03%	1,82%
79	11.451.917/0001-29	10.000,00	5	42,68%	20,82%
80	17.155.131/0001-40	25.000,00	5	10,45%	4,63%
81	27.250.923/0001-58	5.000,00	3	47,22%	20,75%
82	07.967.080/0001-06	10.000,00	1	7,86%	2,52%
83	26.344.425/0001-01	5.000,00	12	9,36%	3,77%
84	09.543.255/0001-75	1.000,00	1	6,65%	0,06%

A tabela a seguir apresenta as características dos ativos verdadeiros (código 85 até 126):

i	CNPJ	F_{min}	C	R	V
85	22.504.083/0001-99	50.000,00	21	5,32%	3,35%
86	22.003.868/0001-88	10.000,00	22	3,69%	5,75%
87	25.274.966/0001-48	1.000,00	21	6,86%	0,11%
88	20.519.551/0001-73	10.000,00	63	6,88%	0,62%
89	07.552.643/0001-97	5.000,00	4	20,62%	18,57%
90	26.759.909/0001-11	5.000,00	23	7,76%	0,51%
91	12.923.387/0001-37	1.000,00	0	5,91%	0,02%
92	14.188.162/0001-00	5.000,00	23	7,03%	0,09%
93	18.507.745/0001-07	50.000,00	43	0,61%	4,06%
94	12.282.747/0001-69	50.000,00	33	37,07%	13,74%
95	17.164.804/0001-29	50.000,00	23	48,80%	19,19%
96	07.381.653/0001-07	5.000,00	1	7,68%	0,91%
97	11.458.131/0001-33	5.000,00	5	5,25%	0,64%
98	11.458.144/0001-02	2.500,00	3	39,62%	19,27%
99	12.839.769/0001-87	5.000,00	5	7,27%	0,90%
100	04.899.128/0001-90	5.000,00	1	6,84%	0,24%
101	17.797.426/0001-10	2.500,00	3	34,50%	16,27%
102	23.243.536/0001-33	10.000,00	22	39,07%	18,71%
103	12.287.682/0001-44	5.000,00	10	47,65%	17,49%
104	26.190.924/0001-91	10.000,00	12	7,71%	3,16%
105	00.836.263/0001-35	1.000,00	1	7,45%	0,43%
106	26.673.556/0001-32	1.000,00	23	20,81%	19,98%
107	28.911.598/0001-90	10.000,00	13	14,30%	6,70%
108	26.587.503/0001-07	10.000,00	3	37,49%	21,51%
109	08.279.304/0001-41	20.000,00	3	53,87%	16,71%
110	19.719.727/0001-51	500,00	6	14,76%	2,26%
111	22.504.092/0001-80	20.000,00	4	6,75%	2,01%
112	05.755.769/0001-33	20.000,00	1	7,01%	0,20%
113	07.900.255/0001-50	20.000,00	1	6,74%	0,10%
114	01.430.938/0001-04	5.000,00	1	0,63%	13,98%
115	20.077.065/0001-42	10.000,00	2	1,48%	13,61%
116	07.187.591/0001-05	5.000,00	21	19,98%	5,56%
117	03.319.016/0001-50	1.000,00	1	0,54%	13,88%
118	09.394.243/0001-26	1.000,00	22	7,15%	2,66%
119	10.326.625/0001-00	1.000,00	11	7,08%	0,17%
120	23.729.525/0001-68	10.000,00	64	7,56%	0,05%
121	20.584.638/0001-24	1.000,00	22	7,01%	0,83%
122	21.006.934/0001-00	250.000,00	25	0,28%	5,19%
123	28.462.423/0001-42	50.000,00	22	2,06%	3,10%
124	21.917.184/0001-29	10.000,00	23	54,00%	26,56%
125	26.525.548/0001-49	50.000,00	24	5,91%	9,92%
126	27.324.405/0001-31	25.000,00	10	12,30%	2,82%

A tabela a seguir apresenta as características dos ativos verdadeiros (código 127 até 168):

i	CNPJ	F_{min}	C	R	V
127	13.503.226/0001-57	5.000,00	5	7,00%	1,51%
128	22.344.843/0001-48	500,00	1	7,26%	0,29%
129	22.344.837/0001-90	500,00	3	41,25%	21,63%
130	22.632.296/0001-04	500,00	4	8,55%	3,38%
131	30.586.677/0001-14	25.000,00	22	14,88%	4,42%
132	26.323.079/0001-85	25.000,00	21	9,38%	6,43%
133	27.077.299/0001-39	10.000,00	11	7,77%	3,62%
134	09.620.860/0001-00	10.000,00	4	9,51%	0,31%
135	08.771.538/0001-01	10.000,00	22	3,21%	3,36%
136	26.218.614/0001-38	25.000,00	23	23,96%	15,50%
137	26.687.461/0001-78	20.000,00	23	44,78%	14,44%
138	23.186.344/0001-32	5.000,00	23	40,93%	13,17%
139	06.118.222/0001-90	10.000,00	21	43,23%	14,71%
140	12.154.412/0001-65	5.000,00	22	6,67%	2,77%
141	18.391.138/0001-24	5.000,00	22	2,84%	7,22%
142	26.243.348/0001-01	10.000,00	23	31,53%	19,98%
143	11.403.956/0001-50	5.000,00	11	10,31%	3,28%
144	17.164.789/0001-19	5.000,00	23	17,07%	8,06%
145	19.821.469/0001-10	50.000,00	5	6,07%	4,37%
146	13.083.227/0001-90	20.000,00	23	34,74%	17,45%
147	30.317.454/0001-51	5.000,00	23	31,22%	10,08%
148	13.476.201/0001-01	1.000,00	23	53,30%	30,05%
149	28.419.514/0001-03	5.000,00	23	43,56%	30,46%
150	29.587.389/0001-03	50.000,00	5	8,99%	2,01%
151	26.112.046/0001-96	50.000,00	5	9,55%	4,19%
152	27.826.059/0001-90	3.000,00	21	6,99%	0,10%
153	17.554.200/0001-99	5.000,00	23	26,07%	17,21%
154	15.799.713/0001-34	50.000,00	22	8,80%	5,41%
155	17.251.743/0001-37	25.000,00	64	9,56%	0,06%
156	11.741.429/0001-56	5.000,00	24	46,66%	20,96%
157	11.435.287/0001-07	0,00	1	6,70%	0,09%
158	23.799.268/0001-30	5.000,00	4	15,14%	3,99%
159	23.711.486/0001-71	5.000,00	1	0,60%	13,88%
160	09.290.813/0001-38	5.000,00	32	40,37%	18,45%
161	23.960.625/0001-09	100.000,00	21	26,35%	16,85%
162	29.762.329/0001-71	10.000,00	22	10,16%	3,72%
163	14.115.118/0001-70	1.000,00	3	29,17%	5,75%
164	20.658.576/0001-58	20.000,00	12	48,96%	24,44%
165	24.140.256/0001-62	20.000,00	22	8,60%	5,08%
166	28.581.159/0001-66	50.000,00	24	14,83%	11,92%
167	28.581.166/0001-68	50.000,00	21	9,01%	3,86%
168	23.565.840/0001-05	1.000,00	15	9,68%	0,95%

A tabela a seguir apresenta as características dos ativos verdadeiros (código 169 até 210):

i	CNPJ	F_{min}	C	R	V
169	09.083.868/0001-77	5.000,00	8	6,85%	2,38%
170	09.586.692/0001-76	10.000,00	6	-2,36%	8,79%
171	22.128.306/0001-60	50.000,00	24	-2,18%	8,63%
172	21.689.246/0001-92	10.000,00	10	12,37%	24,55%
173	03.369.187/0001-93	1.000,00	1	6,15%	1,36%
174	25.213.405/0001-39	5.000,00	21	16,43%	2,14%
175	21.646.715/0001-96	0,00	12	2,53%	17,28%
176	30.057.258/0001-95	5.000,00	16	5,05%	6,15%
177	21.329.166/0001-26	5.000,00	12	55,57%	23,54%
178	18.860.180/0001-47	50.000,00	13	7,15%	0,71%
179	21.983.042/0001-60	50.000,00	13	8,52%	1,06%
180	18.860.059/0001-15	50.000,00	5	7,47%	2,32%
181	12.845.796/0001-62	20.000,00	2	45,02%	19,78%
182	24.769.058/0001-62	100,00	1	7,59%	0,26%
183	26.664.935/0001-66	3.000,00	22	10,00%	0,60%
184	22.003.346/0001-86	100,00	0	7,30%	0,19%
185	00.601.692/0001-23	300.000,00	42	40,16%	19,78%
186	10.783.480/0001-68	500,00	5	6,89%	0,07%
187	26.142.614/0001-00	100,00	21	9,99%	0,91%
188	12.672.120/0001-14	500,00	3	13,66%	2,43%
189	28.259.415/0001-01	5.000,00	22	8,42%	0,49%
190	22.662.135/0001-55	0,00	44	37,19%	13,86%
191	07.317.588/0001-50	20.000,00	43	33,27%	13,64%
192	17.899.612/0001-60	5.000,00	2	6,72%	0,13%
193	26.978.438/0001-32	1.000,00	1	6,91%	0,10%
194	16.599.959/0001-25	500,00	11	7,16%	0,27%
195	26.768.800/0001-40	1.000,00	21	46,85%	17,38%
196	07.383.028/0001-02	1.000,00	1	6,52%	0,76%
197	21.624.757/0001-26	5.000,00	21	8,90%	2,11%
198	08.610.270/0001-26	5.000,00	0	7,20%	0,31%
199	27.717.045/0001-38	100,00	5	9,50%	0,85%
200	12.082.452/0001-49	100.000,00	44	17,20%	10,73%
201	28.903.657/0001-88	10.000,00	65	10,00%	0,03%
202	24.325.079/0001-99	5.000,00	5	6,30%	0,79%
203	09.720.734/0001-10	5.000,00	1	7,19%	0,09%
204	29.044.189/0001-04	5.000,00	22	8,24%	0,23%
205	05.382.556/0001-03	10.000,00	23	45,52%	16,98%
206	29.206.196/0001-57	5.000,00	1	6,97%	0,09%
207	28.075.532/0001-07	25.000,00	45	10,71%	17,28%
208	11.228.500/0001-00	50.000,00	22	20,93%	6,41%
209	07.013.315/0001-12	50.000,00	23	4,64%	5,27%
210	02.603.461/0001-84	20.000,00	1	7,90%	0,61%

A tabela a seguir apresenta as características dos ativos verdadeiros (código 211 até 247):

i	CNPJ	F_{min}	C	R	V
211	00.400.490/0001-13	20.000,00	11	10,90%	4,74%
212	18.719.154/0001-01	20.000,00	0	6,47%	0,05%
213	26.406.529/0001-01	20.000,00	23	29,20%	13,19%
214	18.628.948/0001-51	5.000,00	1	6,95%	1,36%
215	17.021.319/0001-04	1.000,00	43	12,75%	6,10%
216	28.581.175/0001-59	20.000,00	22	6,34%	2,38%
217	11.447.124/0001-36	1.000,00	22	7,31%	0,10%
218	02.536.364/0001-16	1.000,00	0	6,45%	0,04%
219	11.888.706/0001-58	50.000,00	24	45,36%	16,55%
220	12.796.232/0001-87	25.000,00	5	6,82%	0,10%
221	09.599.346/0001-22	500,00	4	29,43%	15,33%
222	11.301.137/0001-00	5.000,00	11	-2,13%	19,76%
223	18.623.722/0001-68	1.000,00	22	19,30%	2,88%
224	17.414.721/0001-40	10.000,00	1	15,90%	2,64%
225	17.787.909/0001-34	20.000,00	12	45,48%	20,47%
226	21.732.619/0001-60	25.000,00	7	13,11%	3,73%
227	19.959.703/0001-70	25.000,00	22	8,93%	4,95%
228	73.970.642/0001-97	500,00	0	5,89%	0,03%
229	12.239.939/0001-92	5.000,00	21	39,09%	17,22%
230	04.362.333/0001-11	5.000,00	3	35,57%	20,34%
231	07.657.641/0001-62	25.000,00	5	7,73%	14,95%
232	25.108.905/0001-00	10.000,00	21	17,43%	2,66%
233	05.104.498/0001-56	5.000,00	3	29,50%	5,94%
234	08.823.534/0001-20	5.000,00	11	8,13%	3,41%
235	02.539.921/0001-52	5.000,00	1	7,85%	0,68%
236	00.398.561/0001-90	20.000,00	3	49,60%	22,12%
237	04.066.545/0001-51	1.000,00	3	8,12%	2,49%
238	18.471.807/0001-78	50.000,00	12	32,54%	12,41%
239	00.947.958/0001-94	50.000,00	1	9,57%	2,26%
240	13.106.983/0001-97	50.000,00	3	48,96%	18,93%
241	09.550.197/0001-07	500,00	20	48,97%	15,48%
242	12.105.992/0001-09	100.000,00	43	10,26%	8,20%
243	29.726.133/0001-21	50.000,00	22	15,63%	5,56%
244	29.177.021/0001-69	5.000,00	43	7,18%	0,09%
245	28.558.421/0001-51	50.000,00	22	3,00%	4,21%
246	06.170.653/0001-03	10.000,00	21	11,29%	11,37%
247	03.618.010/0001-83	1.000,00	12	100,68%	31,67%

3.4 MODELO DO INVESTIDOR

O perfil exclusivo do investidor deve ser definido a partir das seguintes características:

- Objetivo de investimento
- Capital disponível
- Tolerância ao risco de crédito
- Distribuição de carência

Além destes parâmetros, temos também o controle de diversificação que, por sua vez, é subdividido nas três técnicas:

- Limites de alocação mínima e máxima
- Limite de lote incremental
- Limites de cardinalidade

Com isso, existe um total de 7 parâmetros que precisam ser definidos para compor um perfil individual.

3.5 MASSA DE INVESTIDORES

Para formar a massa de investidores, foi necessário estabelecer, para cada um dos 7 parâmetros, o conjunto de valores possíveis. O total de elementos de cada conjunto é apresentado a seguir:

Parâmetro	Possibilidades
• Objetivo de investimento	20
• Capital disponível	10
• Tolerância ao risco de crédito	2
• Distribuição de carência	3
• Limites de alocação mínima e máxima	4
• Limite de lote incremental	5
• Limites de cardinalidade	9

A partir do produto cartesiano dos conjuntos definidos, foi obtido um total de 86.400 combinações possíveis de perfis exclusivos. Dentro deste universo de combinações, vários grupos podem ser formados a partir da segmentação de um único parâmetro de forma isolada.

Cada conjunto será apresentado em maiores detalhes nos tópicos a seguir, tomando como base todos os conceitos que foram introduzidos nos capítulos anteriores.

3.5.1 OBJETIVO DE INVESTIMENTO

Cada investidor deve apresentar um objetivo específico, associado a uma restrição inerente.

Para cada um dos dois objetivos, foram estabelecidos 10 níveis de limite, totalizando assim 20 possibilidades em relação ao objetivo de investimento e suas respectivas restrições, apresentados nas tabelas a seguir:

Código	V_{max}	Código	R_{min}
1	2,5%	11	2,5%
2	5,0%	12	5,0%
3	7,5%	13	7,5%
4	10%	14	10,0%
5	12,5%	15	15,0%
6	15,0%	16	20,0%
7	17,5%	17	25,0%
8	20,0%	18	30,0%
9	22,5%	19	35,0%
10	25,0%	20	40,0%

Os valores dos limites foram escolhidos com base nos valores de R e V dos ativos com o intuito de provocar o confronto de escolhas.

3.5.2 CAPITAL DISPONÍVEL

O capital disponível indica o volume financeiro total que o investidor utilizará para compor sua carteira. Foram elencados 10 valores de capital, apresentados na tabela a seguir:

Código	B
1	5.000,00
2	10.000,00
3	50.000,00
4	100.000,00
5	500.000,00
6	1.000.000,00
7	5.000.000,00
8	10.000.000,00
9	50.000.000,00
10	100.000.000,00

Os valores escolhidos tentam representar as diferentes classificações dos investidores em relação a seu nível de renda e patrimônio.

3.5.3 TOLERÂNCIA AO RISCO DE CRÉDITO

Cada investidor deve decidir se aceita ou não alocações em ativos de renda fixa acima do nível de garantia oferecido.

Com isso, existe um total de 2 possibilidades em relação à tolerância ao risco de crédito:

Código	Tolerância
1	0 → <i>Parcial</i>
2	1 → <i>Absoluta</i>

Em função dos valores de garantia estipulados, este tipo de decisão impacta mais profundamente os investidores com valores mais elevados de capital disponível.

3.5.4 DISTRIBUIÇÃO DE CARÊNCIA

A distribuição de carência determina o nível de disponibilidade dos recursos financeiros do investidor para diferentes prazos.

Utilizando como base os valores de prazo selecionados diretamente da base de ativos artificiais, foram estruturados 3 grupos de carência:

$$\{0\} \in C_A \quad , \quad \{0, 180\} \in C_B \quad , \quad \{0, 180, 360\} \in C_C$$

A partir dos 3 grupos de carência, foram definidas 3 distribuições:

Código	C_A	C_B	C_C
1	0%	0%	100%
2	0%	100%	0%
3	100%	0%	0%

Vale destacar que a configuração 1 implica diretamente em ignorar todas as restrições de distribuição de carência, pois permite a alocação em qualquer ativo, independente do prazo.

3.5.5 LIMITES DE ALOCAÇÃO MÍNIMA E MÁXIMA

Estes limites estabelecem os valores mínimos e máximos que o investidor permite que sejam alocados num ativo. Com base nas regras e orientações definidas anteriormente, foram criadas 4 configurações de limites de alocação:

Código	H_{min}	H_{max}
1	0%	100%
2	0%	80%
3	20%	100%
4	20%	80%

Vale destacar que a configuração 1 implica diretamente em adotar flexibilidade total nas alocações dos ativos.

3.5.6 LIMITE DE LOTE INCREMENTAL

Este limite estabelece o lote financeiro incremental que um ativo deve seguir para qualquer percentual de alocação. Com base nas regras e orientações definidas anteriormente, foram estabelecidos 2 valores possíveis para o lote incremental:

Código	H_L
1	5%
2	10%

Com base nestes valores, olhando isoladamente apenas para a última configuração deste limite, cuja flexibilidade é menor, a cardinalidade da carteira pode variar de 1 até 10 ativos diferentes.

3.5.7 LIMITES DE CARDINALIDADE

Este limite estabelece a quantidade de ativos distintos que uma carteira pode possuir. Com base nas regras e orientações definidas anteriormente, foram criados 9 intervalos diferentes de cardinalidade:

Código	K_{min}	K_{max}
1	1	2
2	2	2
3	1	3
4	2	3
5	3	3
6	1	4
7	2	4
8	3	4
9	4	4

Vale destacar que a configuração $K_{min} = K_{max} = 1$ foi descartada de seleção, pois causaria conflito direto com as configurações 2 e 4 dos limites de alocação.

3.6 INVESTIDOR ESPECÍFICO

O investidor específico, cujo objetivo é maximizar a rentabilidade, possui as seguintes características:

Parâmetro	Valor
B	100.000,00
Tolerância	Absoluta
C_A	25 %
C_B	50 %
C_C	25 %
H_{min}	20 %
H_{max}	80 %
H_L	10 %
K_{min}	2
K_{max}	3

Onde os intervalos de carência foram estabelecidos como:

$$[0, 3] \in C_A \quad , \quad [4, 19] \in C_B \quad , \quad [20, 65] \in C_C$$

Conforme será explicado em breve, o investidor específico foi moldado para ser utilizado num teste bastante particular. O limite da restrição inerente V_{max} , cujo valor ainda não havia sido estabelecido, será considerado neste momento.

3.7 METODOLOGIA DE TESTES

Para avaliar o modelo, foram realizados 2 tipos de testes. Em ambos, para cada otimização de carteira, foram armazenados:

- O vetor de pesos W que contém as alocações percentuais dos ativos.
- O valores obtidos para a rentabilidade e para a volatilidade.
- O tempo total utilizado pelo o algoritmo para encontrar a solução do problema.

A partir dos resultado obtidos, serão gerados indicadores e métricas para avaliar a aderência e a viabilidade do modelo e verificar seus os pontos positivos e negativos. A natureza dos testes realizados será explicada a seguir.

3.7.1 EXECUÇÃO EM LARGA ESCALA

Este teste utilizou a base de ativos fictícios e a massa de investidores. O seu principal objetivo foi avaliar:

- o tempo de execução do modelo e sua sensibilidade em relação à variação dos parâmetros do investidor.
- o impacto das restrições na performance geral das carteiras.

Para cada um dos 86.400 perfis únicos, foi realizada a otimização para determinar os pesos de alocação dos 60 ativos fictícios.

Adicionalmente, foram obtidos todos os pontos da fronteira eficiente, executando a otimização de maximizar a rentabilidade para 2.500 limites de volatilidade diferentes, sem considerar qualquer outra restrição. Devido a esta última característica, este problema de otimização específico volta a ser de natureza contínua, pois apenas as variáveis w_i serão utilizadas. Isso implica diretamente numa redução significativa do tempo de execução.

3.7.2 ESTUDO DE CASO

Este teste utilizou a base de ativos verdadeiros e o investidor específico. O seu principal objetivo foi simular a utilização do modelo num caso simples que poderia se manifestar no mundo real.

Considerando o perfil do investidor específico definido anteriormente, será realizada a otimização de carteira para 3 níveis de V_{max} diferentes:

Nível	V_{max}
1	10 %
2	20 %
3	30 %

Também serão obtidos os pontos equivalentes da fronteira eficiente, utilizando a mesma metodologia considerada no teste de execução em larga escala, para fins de comparação.

Capítulo 4

ANÁLISE DOS RESULTADOS

4.1 EXECUÇÃO EM LARGA ESCALA

A execução do algoritmo foi concluída com sucesso, sem retornar nenhuma crítica referente a erros ou falhas de processamento. Um resumo do tempo de execução para cada etapa é apresentado a seguir:

- A etapa de otimização das 86.400 carteiras dos investidores levou aproximadamente 7.091 segundos para ser executada, tempo correspondente a 1 hora, 58 minutos e 11 segundos. Com base neste desempenho, concluímos que o tempo médio para otimizar uma carteira foi de aproximadamente 82,0 milissegundos.

- A etapa de geração dos 2.500 pontos da fronteira eficiente levou aproximadamente 18 segundos para ser executada. Com base neste desempenho, concluímos que o tempo médio para otimizar uma carteira foi de aproximadamente 7,2 milissegundos.

Das 86.400 carteiras, apenas 6.224 retornaram um vetor de alocação vazio, indicando que o problema de otimização não pode ser solucionado.

As seções a seguir apresentam análises que foram realizadas com base nos resultados obtidos.

4.1.1 SENSIBILIDADE DO TEMPO DE EXECUÇÃO

A partir do tempo médio de processamento obtido, é possível concluir que o algoritmo apresenta uma velocidade de execução bastante satisfatória. Porém, ao observar os resultados de forma mais granular, é possível perceber que existem grandes diferenças em relação ao tempo de processamento individual por carteira. Isso acontece porque cada grupo de parâmetros exerce uma influência diferente sobre o custo computacional do algoritmo.

Com base neste fato, foi realizada uma investigação mais profunda para compreender melhor como cada parâmetro se comporta de maneira isolada. Considerando que as configurações das carteiras correspondem ao produto cartesiano de todas as possibilidades, podemos formar diferentes agrupamentos para cada parâmetro e analisar, para cada instância do mesmo, a participação percentual em relação ao tempo total de execução.

A partir desta ideia, foram criados gráficos de análise para cada um dos 7 parâmetros disponíveis. O eixo horizontal indica o código de referência da instância, enquanto o eixo

vertical indica a participação percentual:

- Observando a Figura 4.1, associada ao parâmetro de objetivo de investimento, é possível perceber que existem duas regiões de cujo é custo computacional é muito maior. A nível de fronteira eficiente, estas regiões são equivalentes do ponto de vista dual, pois proporcionam resultados mais próximos, a partir caminhos diferentes. Além disso, também é possível notar que maximizar a rentabilidade é um pouco mais custoso que minimizar a volatilidade, o que de certa forma indica que o termo quadrático da volatilidade causa um aumento de custo maior quando está localizado na restrição inerente e um aumento menor quando está localizado na função objetivo.

- Observando a Figura 4.2, associada ao parâmetro de capital disponível, é possível perceber que para valores menores, o custo computacional é menor, pois existem muitas barreiras involuntárias, como os valores mínimos de aquisição dos ativos que limitam o leque de opções. O mesmo fenômeno é observado na instância de maior valor, onde a situação se inverte e os valores máximos de aquisição é que começam a impor limitações.

- Observando a Figura 4.3, associada ao parâmetro de tolerância ao risco de crédito, é possível perceber que a instância que proporciona mais nível de flexibilidade, por possibilitar mais possibilidades de alocação, é também a que possui maior custo computacional.

- Observando a Figura 4.4, associada ao parâmetro de distribuição de carência, é possível perceber quanto mais liberdade de escolha, maior o custo computacional.

- Observando a Figura 4.5, associada ao parâmetro de limite de alocação, é possível perceber que o valor de alocação mínima domina a influência sobre o custo computacional, fazendo com que o mesmo seja maior quando há mais flexibilidade.

- Observando a Figura 4.6, associada ao parâmetro de lote incremental, é possível perceber que a instância que proporciona mais nível de flexibilidade, por possibilitar uma granularidade de alocação maior, é também a que possui maior custo computacional.

- Observando a Figura 4.7, associada ao parâmetro de limite de cardinalidade, é possível perceber que o custo computacional aumenta significativamente em função da quantidade máxima, independente da quantidade total estipulada pelo intervalo.

A principal conclusão que podemos consolidar com base nestes resultados é que, no momento em que o problema de otimização passa a ter variáveis inteiras, um aumento de diversidade ou flexibilidade nas condições de alocação dos ativos para a carteira provoca um aumento de custo de processamento computacional. Cada parâmetro possui uma sensibilidade diferente em relação ao impacto que pode causar neste aumento de custo, em função do nível de liberdade adicional que tem capacidade de proporcionar.

4.1.2 PERFORMANCE DAS CARTEIRAS

Para analisar o resultado da otimização das carteiras, foi construído um gráfico, exibido na Figura 4.8, contendo os pontos da fronteira eficiente e os pontos de performance obtidos para

cada perfil de investidor.

Observando esta figura, percebemos que muitas carteiras ficaram com a performance distante da fronteira eficiente, enquanto outras conseguiram ficar mais próximas. Esse resultado era exatamente o que se esperava, pois na medida em que os investidores sofrem limitações involuntárias ou estabelecem limitações voluntárias, as mesmas se traduzem em restrições do problema de otimização e acabam por forçar uma performance inferior ao melhor resultado teórico. Em outras palavras, quanto mais flexível for o perfil do investidor, mais chances ele tem de ficar próximo à fronteira eficiente.

Este fenômeno também pode ser observado na Figura 4.9, na qual é possível visualizar o percentual de alocação de cada ativo em relação à riqueza total disponível.

Para calcular os percentuais corretamente, é necessário atentar para alguns detalhes. No caso do universo da fronteira eficiente, como não há definição de capital de investimento, basta tomar a média aritmética da alocação para cada ativo. Já no caso dos investidores, como cada um possui um capital de investimento diferente, é necessário tomar a média ponderada, multiplicando a alocação pela base de capital correspondente.

É possível perceber que as distribuições de alocação são muito diferentes, de tal maneira que no caso dos investidores, muitos ativos de performance inferior acabam sendo selecionados para carteira com o objetivo de respeitar as restrições estabelecidas.

4.2 ESTUDO DE CASO

A execução do algoritmo foi concluída com sucesso, sem retornar nenhuma crítica referente a erros ou falhas de processamento.

Na notação a seguir, o subscrito F indica resultados associados à fronteira eficiente, enquanto o subscrito I indica resultados associados ao investidor específico.

A tabela a seguir exibe os indicadores de performance das carteiras para cada nível:

Nível	R_F	V_F	R_I	V_I
1	45,34 %	10,00 %	45,09 %	9,98 %
2	71,43 %	20,00 %	70,92 %	19,97 %
3	96,67 %	30,00 %	86,84 %	26,67 %

Após análise, é possível perceber que a performance da carteira do investidor, nos níveis 1 e 2, apresentou valores muito próximos de daqueles obtidos para a carteira da fronteira eficiente.

Por outro lado, no nível 3, a performance da carteira do investidor sofreu um distanciamento significativo em relação à performance da fronteira eficiente, embora parte deste distanciamento tenha sido causado pela impossibilidade de alcançar o teto de volatilidade máxima.

Estes resultados corroboram o que já havia sido observado no teste de execução em larga escala.

A tabela a seguir exibe os pesos de alocação para cada nível:

Nível	i	w_F	w_I
1	42	15,35 %	
	115	20,20 %	20,00 %
	163	30,51 %	50,00 %
	241	3,24 %	
	247	30,70 %	30,00 %
2	42	20,30 %	
	115	13,58 %	30,00 %
	241	0,31 %	
	247	65,81 %	70,00 %
3	42	3,97 %	
	109		30,00 %
	115	0,96 %	
	247	95,07 %	70,00 %

Após análise, verificamos que para os diferentes níveis de volatilidade, os mesmos ativos são selecionados, mas com pesos de alocação diferentes. Isso acontece porque estes ativos apresentam, em relação aos outros, a melhor relação de risco-retorno e acabam dominando o processo de alocação.

Novamente, este fenômeno é o mesmo observado no teste de execução em larga escala.

4.3 CONCLUSÕES

Após analisar os resultados obtidos, concluímos que o modelo proposto está adequado para representar as limitações práticas que existem no mercado financeiro, tanto do ponto de vista do investidor quanto do ponto de vista dos ativos.

Para as aplicações de larga escala, onde muitas execuções do algoritmo podem ser acionadas simultaneamente, um tempo de execução pequeno é extremamente importante para evitar congestionamentos ou quedas de servidores.

Considerando que existe uma enorme variedade de ativos no mercado, é necessário ser criterioso na seleção de quais deles farão parte do problema de otimização. A escolha de um número muito elevado de ativos pode acabar resultando num aumento significativo do tempo de execução ou até mesmo numa matriz de covariâncias não convexa. Este último fenômeno faz com que o problema não consiga ser resolvido pelos métodos comumente disponíveis nos *softwares* de otimização. A melhor maneira de fazer esse corte é eliminar ativos que possuem uma performance muito ruim no período analisado ou aqueles que são muito parecidos ou redundantes em relação a algum que já tenha sido selecionado.

Além disso, também é importante selecionar com cuidado o intervalo de valores aos quais podem pertencer os parâmetros que calibram as preferências do investidor, pois eles são igualmente capazes de impactar a custo computacional do algoritmo. Os elementos do modelo

relacionados às variáveis inteiras, como as restrição de lote e as restrições de cardinalidade, são os mais sensíveis em relação a gerar aumentos do custo computacional do algoritmo.

Os resultados de performance obtidos para qualquer investidor sempre poderão ser avaliados com base na distância dos mesmos em relação a fronteira eficiente. Com isso, cada um deles terá uma boa métrica para decidir se está satisfeito com resultado atual ou se prefere refazer a otimização com parâmetros que possibilitem mais flexibilidade de alocação.

Por fim, concluímos que seguindo estas recomendações, o modelo proposto tem o potencial de proporcionar bons resultados para investidores que busca aconselhamento e recomendações, independente de suas características particulares, como nível de renda e tolerância ao risco. Adicionalmente, os profissionais envolvidos na atividade de administração de recursos de terceiros, como gestoras e agentes autônomos, também podem explorar os benefícios deste modelo, utilizando o mesmo para tomar decisões estratégicas com base numa técnica totalmente pautada em conceitos matemáticos muito bem fundamentados.

4.4 TRABALHOS FUTUROS

Com base no que foi desenvolvido neste projeto, é possível elencar alguns tópicos que poderiam ser utilizados como temas de trabalhos e pesquisas no futuro:

- incluir o tratamento de pesos negativos na modelagem do problema, da tal maneira que seja possível para o investidor assumir posições vendidas e se financiar através das mesmas até um certo limite.
- modelar a utilização de outras medidas de avaliação de qualquer natureza (rentabilidade, risco ou relação risco-retorno) na função objetivo ou nas restrições.
- desenvolver um novo modelo que tenha como base a metodologia de Black-Litterman (mais detalhes na referência [9]) e que considere todas as restrições de natureza prática exploradas ao longo do texto.

Para qualquer um destes possíveis desenvolvimentos, é importante destacar a necessidade de realizar toda a avaliação de performance computacional e validação dos resultados com ativos verdadeiros.

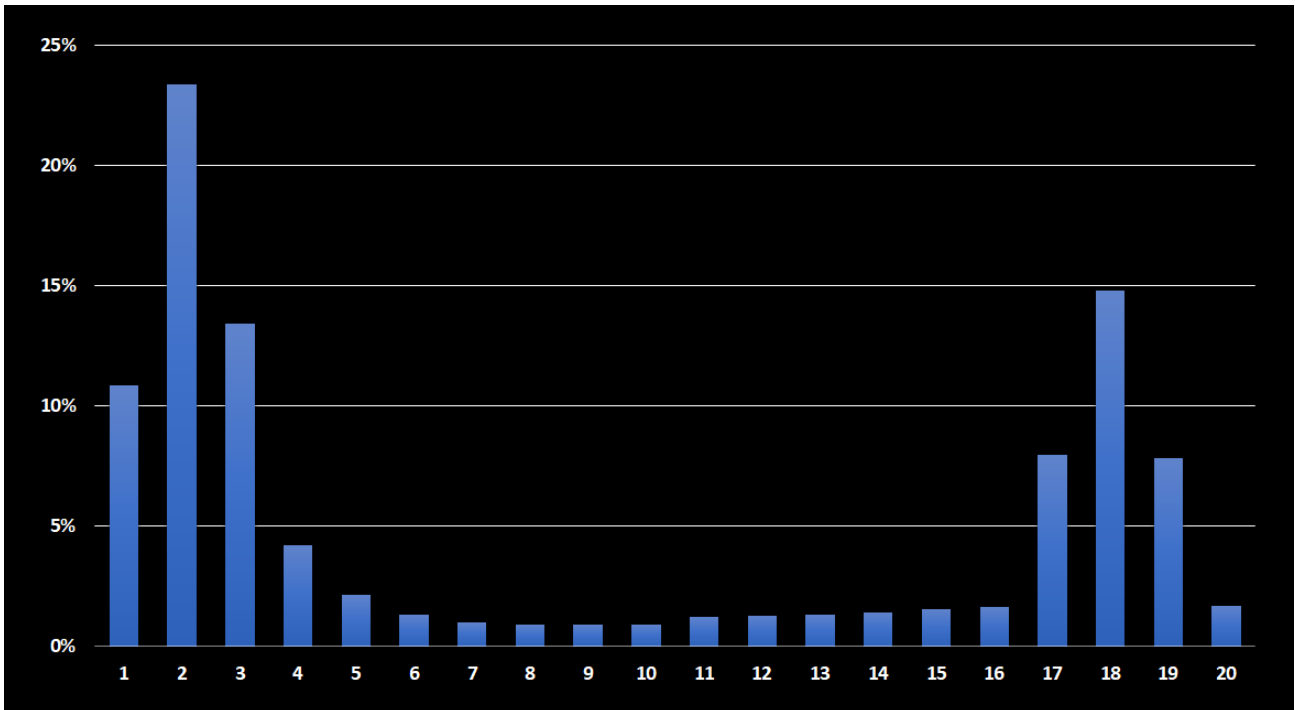


Figura 4.1: Tempo de processamento em função dos objetivos de investimento. O eixo vertical indica o percentual de participação no tempo total, enquanto o eixo horizontal indica a instância do parâmetro.

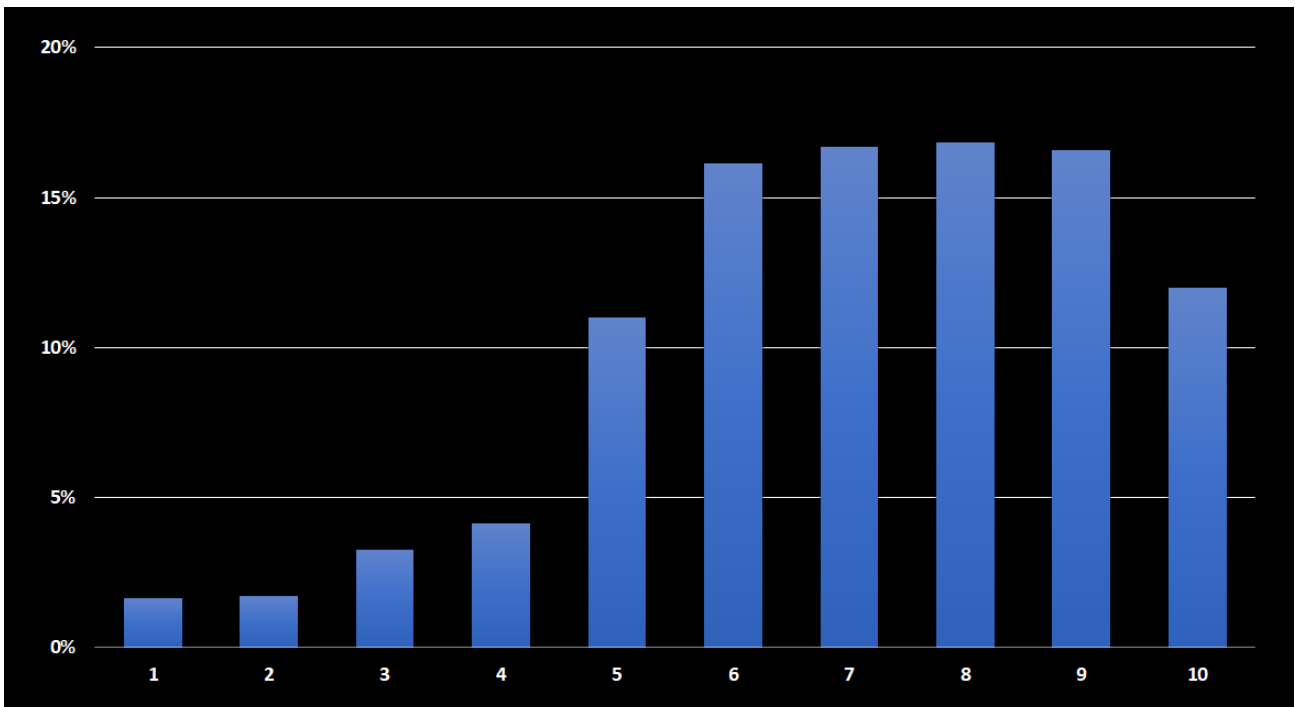


Figura 4.2: Tempo de processamento em função do capital disponível. O eixo vertical indica o percentual de participação no tempo total, enquanto o eixo horizontal indica a instância do parâmetro.

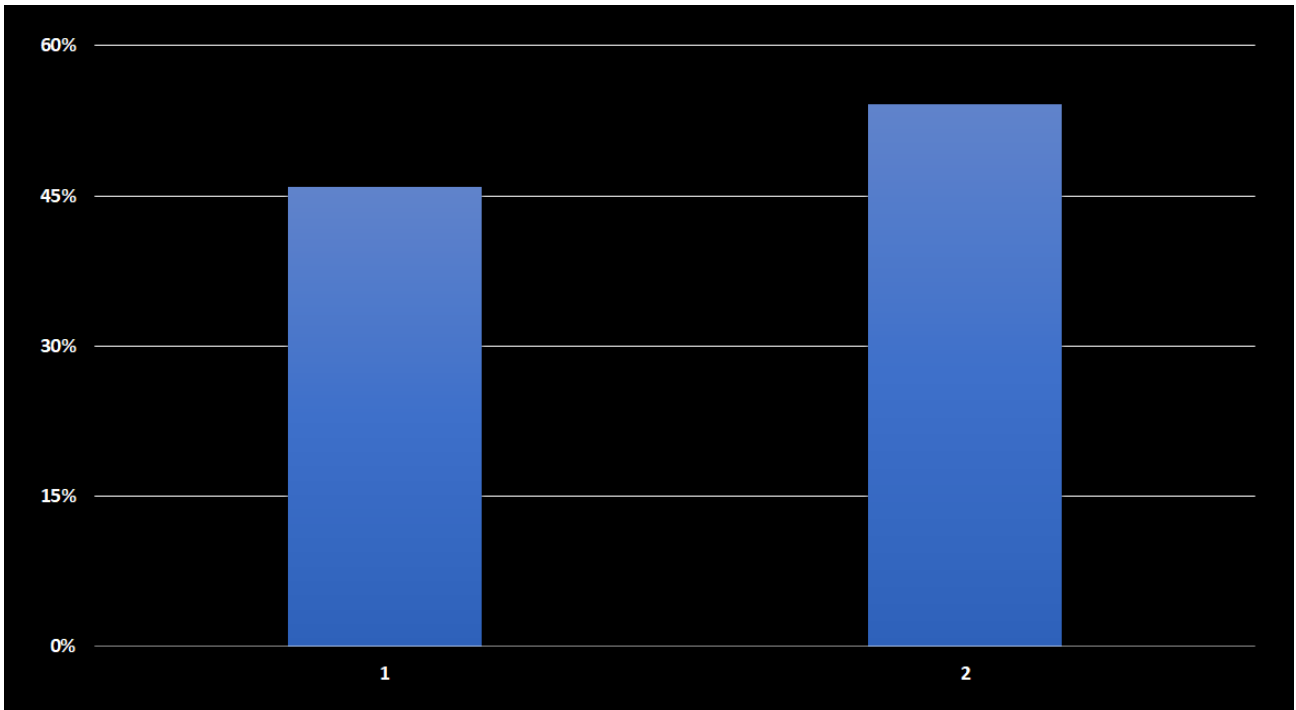


Figura 4.3: Tempo de processamento em função da tolerância ao risco de crédito. O eixo vertical indica o percentual de participação no tempo total, enquanto o eixo horizontal indica a instância do parâmetro.

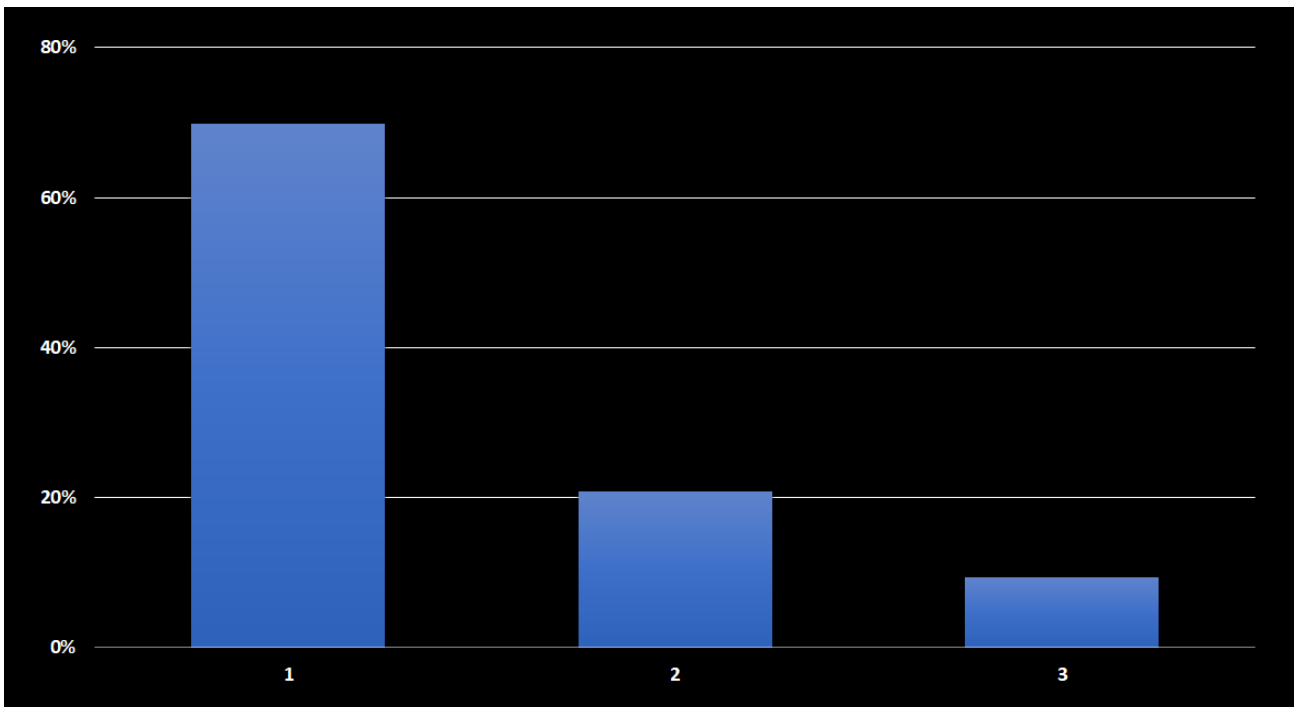


Figura 4.4: Tempo de processamento em função da distribuição de carência. O eixo vertical indica o percentual de participação no tempo total, enquanto o eixo horizontal indica a instância do parâmetro.

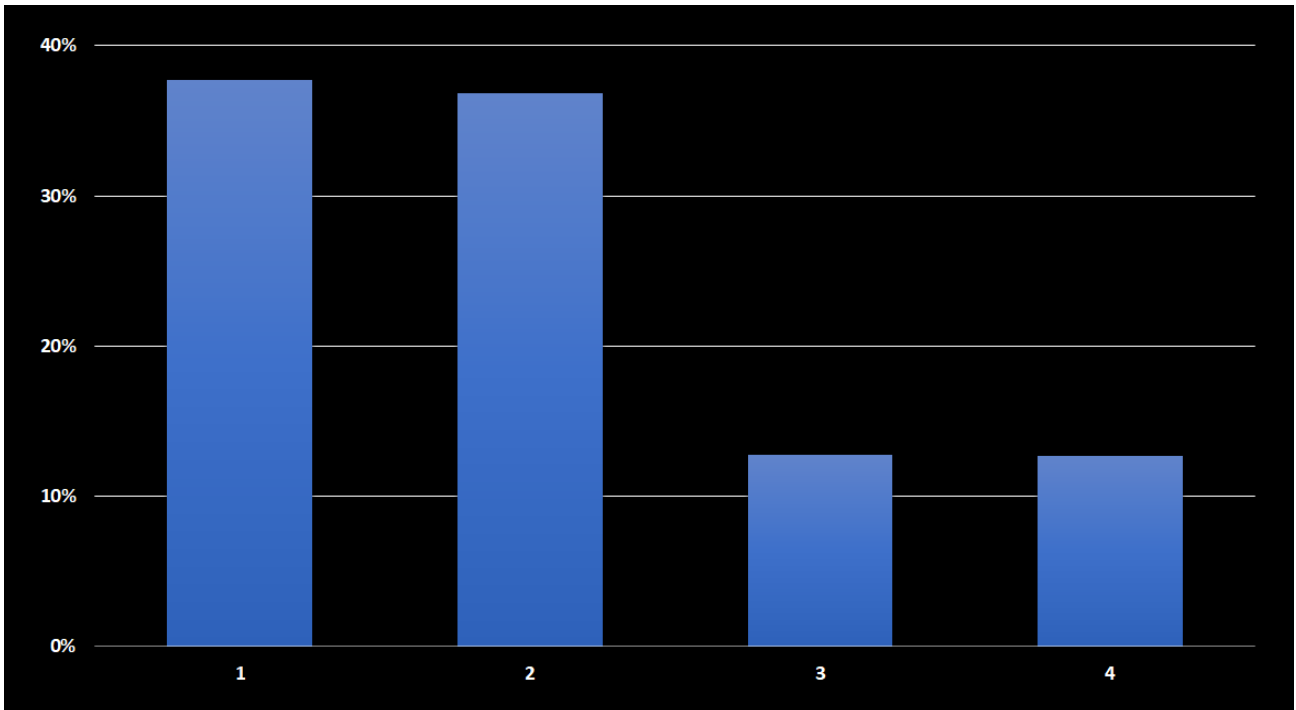


Figura 4.5: Tempo de processamento em função dos limites de alocação. O eixo vertical indica o percentual de participação no tempo total, enquanto o eixo horizontal indica a instância do parâmetro.

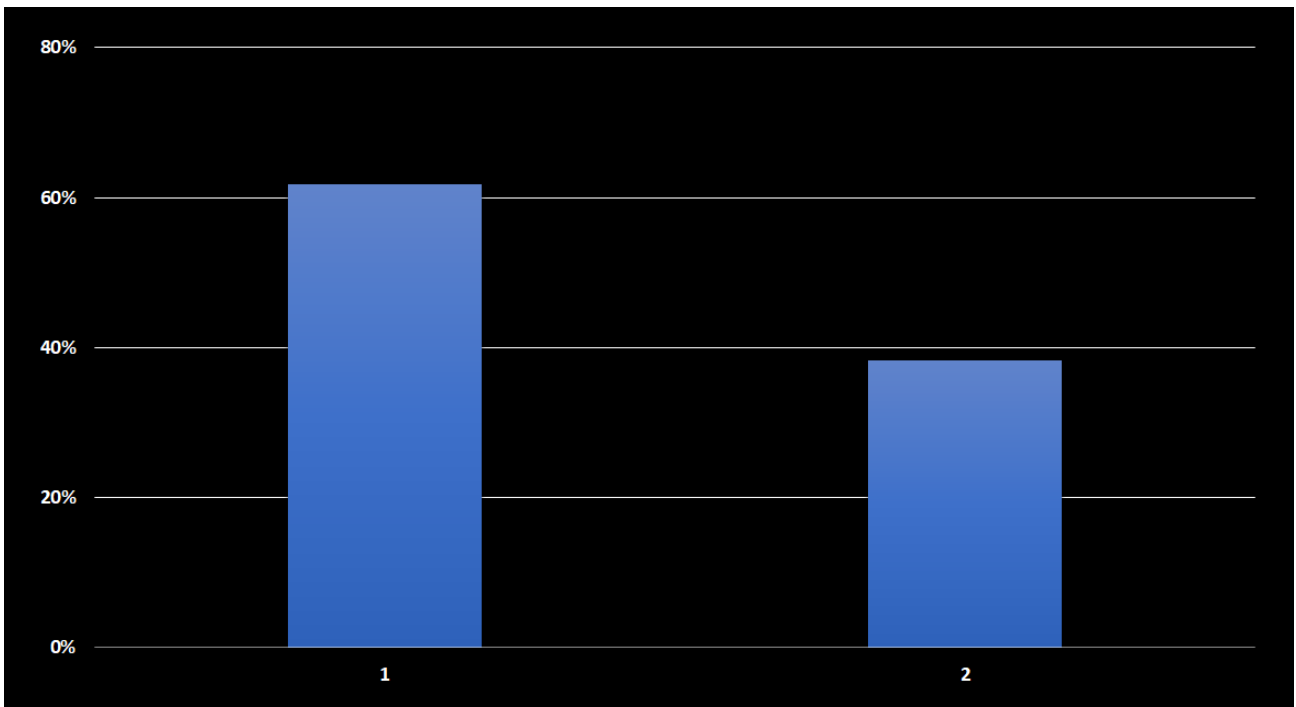


Figura 4.6: Tempo de processamento em função do limite de lote incremental. O eixo vertical indica o percentual de participação no tempo total, enquanto o eixo horizontal indica a instância do parâmetro.

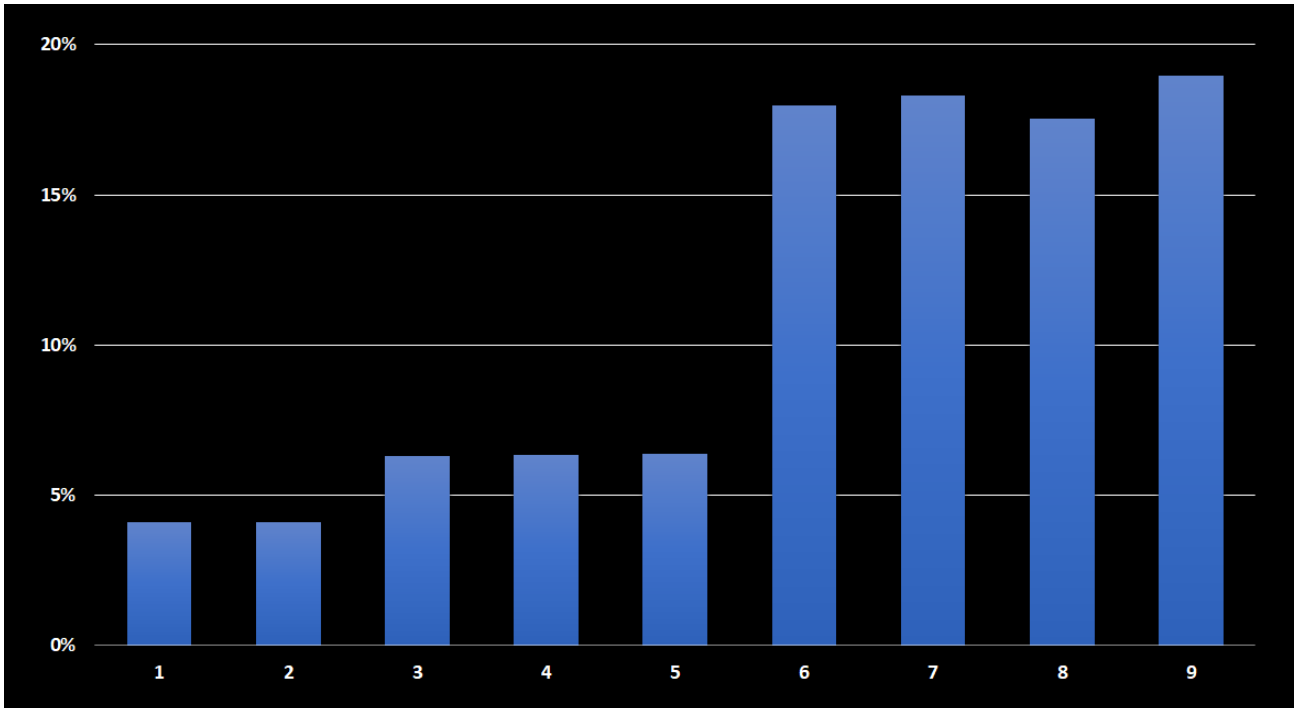


Figura 4.7: Tempo de processamento em função dos limites de cardinalidade. O eixo vertical indica o percentual de participação no tempo total, enquanto o eixo horizontal indica a instância do parâmetro.

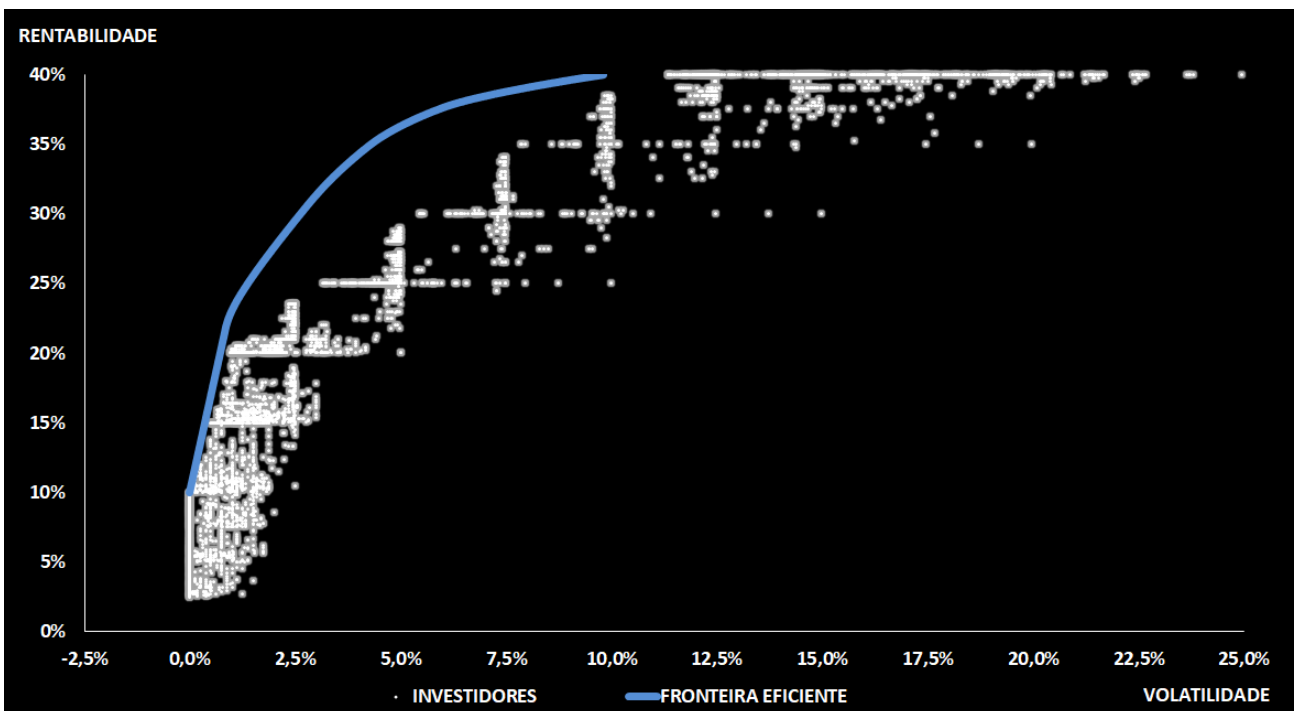


Figura 4.8: Performance das carteiras em relação à fronteira eficiente. O eixo vertical indica a rentabilidade anualizada, enquanto o eixo horizontal indica a volatilidade anualizada.

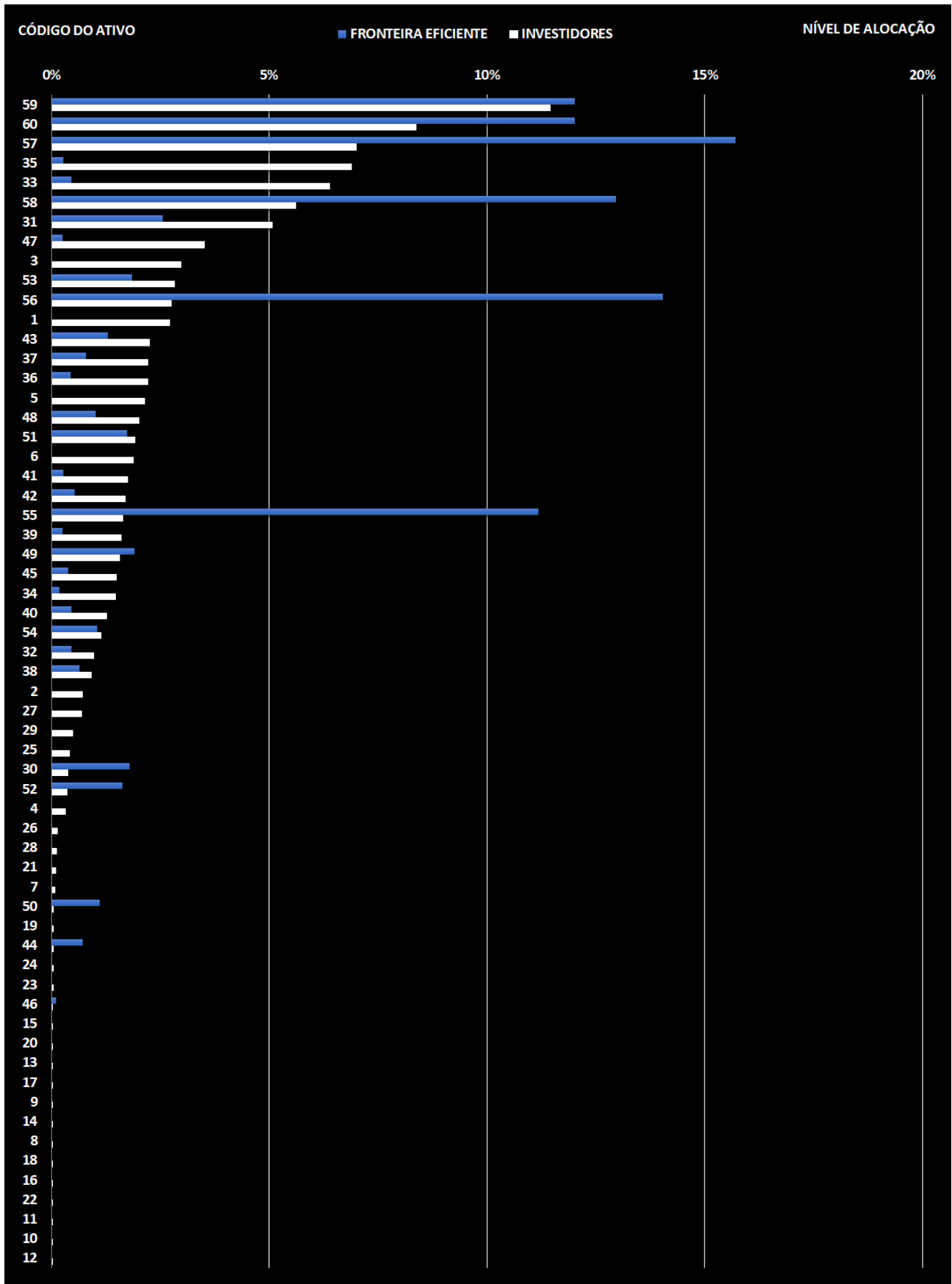


Figura 4.9: Alocação dos ativos em relação à riqueza total existente, tanto para fronteira eficiente quanto para os investidores. O eixo vertical indica o código de identificação do ativo, enquanto o eixo horizontal percentual de alocação.

Apêndice A

DETALHES TÉCNICOS

A.1 OBJETIVO

Este apêndice tem por objetivo fornecer detalhes adicionais sobre o *script* e o ambiente em que o mesmo foi executado:

- A linguagem de programação Julia v1.0.3.1 foi utilizada para gerar a modelagem do problema de otimização. Mais informações sobre esta linguagem podem ser encontradas na referência [2].

- O *solver* IBM ILOG CPLEX v12.8.0.0 foi utilizado para resolver os problemas de otimização. Foi utilizada a edição gratuita *Community* que permite a definição de no máximo 1000 variáveis independentes e 1000 restrições. Mais informações sobre este *solver* podem ser encontradas na referência [3].

- A máquina utilizada para execução do script possui sistema operacional Windows 10, processador Intel(R) Core(TM) i7-7700K CPU @ 4.20GHz e 16Gb de memória RAM instalada.

Por razões de confidencialidade comercial, o script original não será publicado. Ao invés disso, será apresentada uma descrição superficial das etapas que pode ser dividida em dois blocos:

- Bloco de preparação - precisa ser executado apenas uma única vez para gerar o arcabouço básico de informações.

- Bloco de otimização - pode ser executado várias vezes em loop, para cada carteira que se deseja otimizar.

Eles serão apresentadas a seguir e devem ser interpretados como um conjunto de ações sequenciais, exatamente como um algoritmo de programação.

- O bloco de preparação corresponde aos seguintes passos:

- 1 – Definir a data inicial das séries temporais

- 2 – Calcular o total de dias observados em função da data inicial

3 – Identificar os ativos que poderão ser selecionados na otimização de carteira

4 – Para cada ativo i da lista:

4.1 – Verificar se o mesmo começou a existir após a data inicial estabelecida:

Em caso positivo: Excluir o ativo da lista e pular para o próximo

Em caso negativo: Manter o ativo na lista e executar os passos seguintes

4.2 – Coletar a série temporal de preços e armazenar num vetor

4.3 – Montar a série temporal de ganhos relativos a partir da série temporal de preços e armazenar num vetor

5 – Determinar o total de ativos na lista após a validação da data inicial

6 – Dimensionar o vetor de rentabilidades e a matriz de covariâncias

7 – Para cada ativo i da lista:

7.1 – Calcular a rentabilidade acumulada entre a data inicial e a data atual e inserir no vetor de rentabilidades

7.2 – Para cada ativo j da lista:

7.2.1 – Calcular a covariância entre o ativo i e o ativo j e inserir na matriz de covariâncias na posição linha i e coluna j

7.3 – Buscar e inserir o valor das informações complementares:

7.3.1 – Categoria

7.3.2 – Emissor

7.3.3 – Prazo de Carência

7.3.4 – Valor mínimo de aquisição

7.3.5 – Valor máximo de aquisição

7.3.6 – Valor máximo garantido

7.3.7 – Valor do lote padrão

8 – Definir limite do FGC total e por instituição

• O bloco de otimização corresponde aos seguintes passos:

9 – Buscar as informações do investidor:

9.1 – Objetivo de investimento

9.2 – Limite da restrição inerente

9.3 – Capital disponível

9.4 – Tolerância ao risco de crédito

- 9.5 – Distribuição de carência nível A
- 9.6 – Distribuição de carência nível B
- 9.7 – Distribuição de carência nível C
- 9.8 – Alocação mínima por ativo
- 9.9 – Alocação máxima por ativo
- 9.10 – Lote incremental por ativo
- 9.11 – Cardinalidade mínima da carteira
- 9.12 – Cardinalidade máxima da carteira

10 – Para cada ativo i da lista:

10.1 – Estabelecer o limite financeiro inferior

10.2 – Estabelecer o limite financeiro superior, levando em conta a tolerância ao risco de crédito.

10.3 – Estabelecer o lote consolidador através do mínimo múltiplo comum

10.4 – Estabelecer a quantidade inteira mínima

10.5 – Estabelecer a quantidade inteira máxima

10.6 – Definir a variável de otimização - peso percentual W

10.7 – Definir a variável de otimização - quantidade alocada X

10.8 – Definir a variável de otimização - decisão de alocação Y

10.9 - Estabelecer as restrições de intervalo

11 - Estabelecer as restrições de garantia agregada por emissor

12 - Estabelecer as restrições de garantia agregada por categoria

13 - Estabelecer as restrições de distribuição de carência

14 – Verificar o objetivo de investimento do cliente:

Caso seja maximizar a rentabilidade:

14.1 – Definir a função objetivo de maximizar a rentabilidade

14.2 – Definir a restrição de limite máximo de volatilidade

Caso seja minimizar a volatilidade:

14.1 – Definir a função objetivo de minimizar a volatilidade

14.2 – Definir a restrição de limite mínimo de rentabilidade

15 – Executar a otimização do modelo

16 – Exportar as informações de alocação (pesos percentuais contidos no vetor W)

17 – Exportar as informações de performance (rentabilidade, volatilidade)

Referências Bibliográficas

- [1] *Manual de Marcação a Mercado do Banco Modal*, <https://www.modal.com.br/arquivos/2017/12/Manual-de-Marcacao-a-Mercado.pdf>, Data de acesso: 2019-08-07.
- [2] *Website da linguagem Julia*, <https://julialang.org/>, Data de acesso: 2019-08-07.
- [3] *Website do solver CPLEX*, <https://www.ibm.com/br-pt/analytics/cplex-optimizer>, Data de acesso: 2019-08-07.
- [4] E. Robert Fernholz, *Stochastic Portfolio Theory*, Stochastic Modelling and Applied Probability, Springer, 2002.
- [5] Paul Glasserman, *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Stochastic Modelling and Applied Probability (Book 53), Springer, 2003.
- [6] Renata Mansini, Wlodzimierz Ogryczak, and M. Grazia Speranza, *Linear and Mixed Integer Programming for Portfolio Optimization*, EURO Advanced Tutorials on Operational Research, Springer, 2015.
- [7] Harry Max Markowitz, *Portofolio Selection*, The Journal of Finance **7** (1952), no. 1, 77–91.
- [8] Kurt Marti, *Stochastic Optimization Methods*, N/A, Springer, 2005.
- [9] Attilio Meucci, *Risk and Asset Allocation*, Springer Finance, Springer, 2005.
- [10] Alexander Schrijver, *Theory of Linear and Integer Programming*, Wiley Series in Discrete Mathematics and Optimization (Book 13), Wiley, 1986.
- [11] William F. Sharpe, *Mutual Fund Performance*, The Journal of Business **39** (1966), no. 1, 119–138.
- [12] Robert H. Shumway, *Time Series Analysis and Its Applications*, Springer Texts in Statistics, Springer, 2000.