SBM SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

2019, NÚMERO —, VOLUME —
ISSN 2319-023X

MÉTODO ALTERNATIVO PARA O CÁLCULO DE ÁREAS DE POLÍGONOS EM ESPAÇOS EUCLIDIANOS

Orivaldo Nazareno Monteiro de Ataíde
Universidade Federal do Amapá
<orivaldoataide@yahoo.com.br>

RESUMO

Este artigo pretende mostrar que a área de qualquer polígono é igual à metade do vinculante das cordenadas cartesianas dos vértices desse polígono, sendo estes vértices pontos:

a) Do $\mathbb{R}^2$:

$$A = \frac{1}{2}\left\{ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right\};$$

b) Ou do $\mathbb{R}^3$:

$$A = \frac{1}{2}\left\{ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right\}.$$

Esta pesquisa investiga uma metodologia alternativa de cálculo de áreas de polígonos nos espaços euclidianos bi e tridimensionais. Essa metodologia aborda o conceito de vinculantes de matrizes formadas por coordenadas cartesianas e usa como marco inicial a *Fórmula de Gauss para Áreas de Polígonos*, a qual calcula áreas de polígonos no espaço bidimensional.

Palavras-chaves: Vinculante; Determinante; Método de Gauss; Geometria Analítica; Áreas de Polígonos.

INTRODUÇÃO

Que tal calcular a área do triângulo ABC e do heptágono ABCDEFG pela mesma fórmula, cujos vértices são, respectivamente, os pontos: $A(1, 2, -1)$, $B(2, -1, 1)$ e $C(3, 4, 1)$; $A(2, -7, -4)$, $B(4, -2, 2)$, $C(5, 1, 6)$, $D(3, 1, 10)$, $E(-5, -8, 8)$, $F(3, -1, 6)$ e $G\left(\frac{1}{2}, -5, 3\right)$?

Esse é o objetivo deste trabalho, e esses cálculos podem ser encontrados em **Aplicações**.

Neste trabalho, será usado o conceito de espaço euclidiano *n-dimensional*, tal como o indicado em Lima (2005). Nesse sentido, $\mathbb{R}^2$ é o conjunto dos pares ordenados (x, y) de números reais, e $\mathbb{R}^3$ é o conjunto dos ternos ordenados (x, y, z) de números reais.

Assim, os presentes estudos propõem um *teorema inédito* à sociedade [Teorema (2)], mediante o qual seremos capazes de calcular a área de qualquer polígono, quando conhecidas as coordenadas cartesianas de seus vértices.

ÁREA DE UM TRIÂNGULO NO ESPAÇO BIDIMENSIONAL

Lema 1 *Sejam $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ e $P_3 = (x_3, y_3)$ três pontos de $\mathbb{R}^2$. Seja A a área do triângulo com vértices nos pontos P_1, P_2 e P_3. Então, a área desse triângulo, em qualquer sentido de orientação, é dada por:*

$$A = \frac{1}{2}\left|\sum_{j=1}^{3}\begin{vmatrix} x_j & x_{j+1} \\ y_j & y_{j+1} \end{vmatrix}\right|; \ (x_4, y_4) = (x_1, y_1). \tag{1}$$

Demonstração: Sejam $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ e $P_3 = (x_3, y_3)$ os vértices de um triângulo em $\mathbb{R}^2$; e seja A a área desse triângulo. De acordo com Iezzi (1979), a área A, em função das coordenadas desses pontos, é dada por:

$$A = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{matrix}\right\|. \tag{2}$$

Considerando que, dadas uma matriz quadrada M e sua transposta M^t,

$$detM = detM^t,$$

a Equação (2) transforma-se em:

$$A = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right\|. \tag{3}$$

Aplicando-se a Regra de Laplace, conforme definido em Avritzer (2009), na terceira linha do determinante da Equação (3), encontramos:

$$A = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\right|. \tag{4}$$

Trocando-se de lugar as colunas do determinante da segunda parcela do segundo membro da Equação (4), este determinante fica multiplicado por -1. Assim, vem:

$$A = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\right|. \tag{5}$$

Ordenando-se as parcelas da Equqção (5), temos ainda que:

$$A = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}\right|. \tag{6}$$

O segundo membro da Equação (6) pode ser escrito de acordo com a notação de somatório de determinantes de ordem 2. Assim, conforme queríamos mostrar, temos:

$$A = \frac{1}{2}\left|\sum_{j=1}^{3}\begin{vmatrix} x_j & x_{j+1} \\ y_j & y_{j+1} \end{vmatrix}\right|;\ (x_4, y_4) = (x_1, y_1). \tag{7}$$

ÁREA DE UM POLÍGONO NO ESPAÇO BIDIMENSIONAL

Na mesma estrutura da *Fórmula de Gauss para Áreas de Polígonos*, encontrada no artigo *Shoelace formula* Wikipedia (2018), apresentamos o Lema a seguir.

Lema 2 *Dados m pontos $P = (x, y)$ do $\mathbb{R}^2$, $m \geq 3$. Se esses pontos, na ordem anti-horária, são os vértices de um polígono orientado de m lados; então, a área A desse polígono, em qualquer sentido de orientação, é dada por:*

$$A = \frac{1}{2}\left|\sum_{j=1}^{m}\begin{vmatrix} x_j & x_{j+1} \\ y_j & y_{j+1} \end{vmatrix}\right|;\ (x_{m+1}, y_{m+1}) = (x_1, y_1). \tag{8}$$

Demonstração: Podemos combinar os m vértices de um polígono de três em três, de modo que esse polígono seja composto por triângulos com um vértice comum em algum ponto P_1. Assim, a área A desse polígono será dada pela soma das áreas desses triângulos. Em consequência disso, pelo Lema (1), temos:

$$A = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}\right| + \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_4 \\ y_3 & y_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_4 & x_1 \\ y_4 & y_1 \end{vmatrix}\right| +$$

$$+ \cdots + \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & x_{m-1} \\ y_1 & y_{m-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{m-1} & x_m \\ y_{m-1} & y_m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_m & x_1 \\ y_m & y_1 \end{vmatrix}\right|. \tag{9}$$

Eliminando-se os determinantes simétricos da Equação (9), obtemos um resultado semelhante ao apresentado por Weisstein (1999) no artigo *Polygon Area*:

$$A = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_4 \\ y_3 & y_4 \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} x_{m-1} & x_m \\ y_{m-1} & y_m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_m & x_1 \\ y_m & y_1 \end{vmatrix}\right|. \tag{10}$$

O segundo membro da Equação (10) pode ser escrito de acordo com a notação de somatório de determinantes de ordem 2. Assim, de acordo com o que gostaríamos de mostrar, temos:

$$A = \frac{1}{2}\left|\sum_{j=1}^{m}\begin{vmatrix} x_j & x_{j+1} \\ y_j & y_{j+1} \end{vmatrix}\right|; \ (x_{m+1}, y_{m+1}) = (x_1, y_1). \tag{11}$$

SENTIDO DE ORIENTAÇÃ0 DE UM POLÍGONO DO ESPAÇO BIDIMENSIONAL

Conforme foi visto na seção anterior, a área de um polígono em $\mathbb{R}^2$, em qualquer sentido de orientação, é dada por:

$$A = \frac{1}{2}\left|\sum_{j=1}^{m}\begin{vmatrix} x_j & x_{j+1} \\ y_j & y_{j+1} \end{vmatrix}\right|; \ (x_{m+1}, y_{m+1}) = (x_1, y_1). \tag{12}$$

Ocorre que o somatório dos determinantes do segundo membro da Equação (12) pode ter valor positivo ou negativo; caso o polígono seja orientado no sentido horário, seu valor será sempre NEGATIVO; caso esse polígono seja orientado no sentido anti-horário, o valor desse somatório será sempre POSITIVO. A demonstração desse fato pode ser vista em Ataíde (2010).

DEFINIÇÃO E CONCEITO DE VINCULANTE

Em decorrência da existência dos Lemas (1) e (2), propõe a seguinte definição:

Definição de Vinculante

Definição 1 *Seja*

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \tag{13}$$

uma matriz real $n \times m$, com $n \geq 2$ e $m \geq 4$, $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$. Chamamos de vinculante da matriz A ao número real:

$$vin(A) = \{a_{ij}\}. \tag{14}$$

Conceito de Vinculante

Usaremos chaves como delimitadores da tabela apresentada na Equação (15) para informar que não se trata de uma matriz, que é uma tabela entre parêntesis ou entre colchetes. Além disso, como são usadas barras verticais para representar determinantes, e estes somente são definidos para matrizes quadradas, disporemos os elementos da matriz A entre chaves, formando-se, dessa forma, um **vinculante**, que se trata de um número real associado a uma matriz real.

$$vin(A) = \left\{ \begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{array} \right\}. \tag{15}$$

VINCULANTES DE PONTOS DO ESPAÇO BIDIMENSIONAL

Cálculo de Vinculantes de Pontos do Espaço Bidimensional

Definição 2 *Seja*

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_m & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_m & y_1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

uma matriz de ordem $2 \times (m+1)$*, cujos elementos são as coordenadas de* m *pontos* $P_j = (x_j, y_j)$ *do* $\mathbb{R}^2$*, com* $m \geq 3$*, dispostos em determinada ordem. O vinculante de* A *será representado por:*

$$vin(A) = \left\{ \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_m & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_m & y_1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right\}; \tag{17}$$

E será calculado por:

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_m & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_m & y_1 \end{array} \right\} = \sum_{j=1}^{m} \begin{vmatrix} x_j & x_{j+1} \\ y_j & y_{j+1} \end{vmatrix}; (x_{m+1}, y_{m+1}) = (x_1, y_1). \tag{18}$$

No segundo membro da Equação (18), temos o somatório de determinantes de segunda ordem, tratando-se de uma soma de m determinantes de matrizes quadradas de segunda ordem.

Propriedades de Vinculantes de Pontos do Espaço Bidimensional

Para a apresentação de algumas propriedades de vinculantes de pontos do $\mathbb{R}^2$, consideraremos que x, y e z são variáveis e que a, b, e c são constantes reais quaisquer e assumiremos que:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_m & x_1 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_m & y_1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right\}, \tag{19}$$

para $m \geq 3$.

De acordo com Ataíde (2014, p. 3), "considerando o vinculante $\left\{ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right\}$, x será, doravante, chamado de numerador, e y, de denominador".

Propriedade 1. Se todas as colunas de um vinculante tiverem numeradores e denominadores iguais, então o vinculante será nulo.

$$\left\{ \begin{array}{c} x \\ x \end{array} \right\} = 0. \tag{20}$$

Propriedade 2. Trocando-se de lugar o denominador e o numerador de um vinculante, o valor deste fica multiplicado por -1.

$$\left\{ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right\} = -\left\{ \begin{array}{c} y \\ x \end{array} \right\}. \tag{21}$$

Propriedade 3. Se o denominador de um vinculante for uma constante, o valor deste vinculante será nulo.

$$\left\{ \begin{array}{c} x \\ a \end{array} \right\} = 0. \tag{22}$$

Propriedade 4. Se o numerador de um vinculante for uma constante, o valor deste vinculante será nulo.

$$\left\{ \begin{array}{c} a \\ y \end{array} \right\} = 0. \tag{23}$$

Propriedade 5. Se numerador e denominador de um vinculante forem multiplicados por constantes, então o valor deste vinculante ficará multiplicado por estas constantes.

$$\left\{ \begin{array}{c} ax \\ by \end{array} \right\} = ab\left\{ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right\}. \tag{24}$$

Propriedade 6. Se o denominador de um vinculante for constituído pela soma de duas variáveis, então este vinculante será igual a soma de dois vinculantes cujos denominadores são estas variáveis.

$$\left\{ \begin{array}{c} x \\ y+z \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} x \\ z \end{array} \right\}. \tag{25}$$

Propriedade 7. Se o numerador de um vinculante for constituído pela soma de duas variáveis, então este vinculante será igual a soma de dois vinculantes cujos numeradores são estas variáveis.

$$\left\{ \begin{array}{c} x+z \\ y \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} z \\ y \end{array} \right\}. \tag{26}$$

Propriedade 8. Num vinculante, se o denominador depende linearmente do numerador, então este vinculante será nulo.

$$\left\{ \begin{array}{c} x \\ ax+b \end{array} \right\} = 0. \tag{27}$$

Propriedade 9. Num vinculante, se o numerador depende linearmente do denominador, então este vinculante será nulo.

$$\left\{ \begin{array}{c} ay+b \\ y \end{array} \right\} = 0. \tag{28}$$

Propriedade 10. A adição de uma constante ao denominador de um vinculante, não altera o valor deste vinculante.

$$\left\{ \begin{array}{c} x \\ y+b \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right\}. \tag{29}$$

Propriedade 11. A adição de uma constante ao numerador de um vinculante, não altera o valor deste vinculante.

$$\left\{ \begin{array}{c} x+b \\ y \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right\}. \tag{30}$$

ÁREA DE UM TRIÂNGULO NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

Lema 3 *Sejam* $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ *e* $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$ *três pontos de* $\mathbb{R}^3$. *Seja* A *a área do triângulo com vértices nos pontos* P_1, P_2 *e* P_3. *Então, a área desse triângulo, em qualquer sentido de orientação, é dada por:*

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{\left[\sum_{j=1}^{3}\begin{vmatrix} x_j & x_{j+1} \\ y_j & y_{j+1}\end{vmatrix}\right]^2 + \left[\sum_{j=1}^{3}\begin{vmatrix} y_j & y_{j+1} \\ z_j & z_{j+1}\end{vmatrix}\right]^2 + \left[\sum_{j=1}^{3}\begin{vmatrix} z_j & z_{j+1} \\ x_j & x_{j+1}\end{vmatrix}\right]^2}; (x_4, y_4, z_4) = (x_1, y_1, z_1). \tag{31}$$

Demonstração: Sendo $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ e $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$ os vértices de um triângulo em $\mathbb{R}^3$, e seja A a área desse triângulo. E sejam, ainda, os vetores $\overrightarrow{P_1P_2} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\rangle$ e $\overrightarrow{P_2P_3} = \langle x_3 - x_2, y_3 - y_2, z_3 - z_2\rangle$. De acordo com o apresentado por Venturi (2015), a área A, em função das coordenadas desses pontos, é dada por:

$$A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_2P_3}\right| = \frac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 & z_3 - z_2 \end{array}\right\|. \tag{32}$$

O valor do produto vetorial é dado por:

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_2P_3} = \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_2 & z_3 - z_2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_2 & z_3 - z_2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 \end{vmatrix}\vec{k}. \tag{33}$$

Após as devidas simplificações algébricas na Equação (33), temos:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_2P_3} = &\left(\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_3 & y_1 \\ z_3 & z_1\end{vmatrix}\right)\vec{i} + \left(\begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_2 & z_3 \\ x_2 & x_3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_3 & z_1 \\ x_3 & x_1\end{vmatrix}\right)\vec{j} + \\ &+ \left(\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1\end{vmatrix}\right)\vec{k}.\end{aligned} \tag{34}$$

Usando-se a notação de somatórios nas parcelas do segundo membro da Equação (34), vem:

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_2P_3} = \sum_{j=1}^{3}\begin{vmatrix} y_j & y_{j+1} \\ z_j & z_{j+1}\end{vmatrix}\vec{i} + \sum_{j=1}^{3}\begin{vmatrix} z_j & z_{j+1} \\ x_j & x_{j+1}\end{vmatrix}\vec{j} + \sum_{j=1}^{3}\begin{vmatrix} x_j & x_{j+1} \\ y_j & y_{j+1}\end{vmatrix}\vec{k}; (x_4, y_4, z_4) = (x_1, y_1, z_1). \tag{35}$$

Sabendo-se que um produto vetorial $\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_2P_3}$ tem componentes vetoriais a, b e c, tal que:

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_2P_3} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}; \tag{36}$$

Então, conforme o definido por Avritzer (2009), o valor da norma desse produto vetorial é dado por:

$$\left|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_2P_3}\right| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \tag{37}$$

Assim, da Equação (35), vem:

$$a = \sum_{j=1}^{3}\begin{vmatrix} y_j & y_{j+1} \\ z_j & z_{j+1}\end{vmatrix}; b = \sum_{j=1}^{3}\begin{vmatrix} z_j & z_{j+1} \\ x_j & x_{j+1}\end{vmatrix}; c = \sum_{j=1}^{3}\begin{vmatrix} x_j & x_{j+1} \\ y_j & y_{j+1}\end{vmatrix}. \tag{38}$$

Desse modo, a norma da Equação (37) é dada por:

$$\left|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_2P_3}\right| =$$

$$= \sqrt{\left[\sum_{j=1}^{3}\begin{vmatrix} x_j & x_{j+1} \\ y_j & y_{j+1}\end{vmatrix}\right]^2 + \left[\sum_{j=1}^{3}\begin{vmatrix} y_j & y_{j+1} \\ z_j & z_{j+1}\end{vmatrix}\right]^2 + \left[\sum_{j=1}^{3}\begin{vmatrix} z_j & z_{j+1} \\ x_j & x_{j+1}\end{vmatrix}\right]^2}; (x_4, y_4, z_4) = (x_1, y_1, z_1). \tag{39}$$

Da Equação (32) e da Equação (39), obtemos, para a área do triângulo em comento, um resultado semelhante ao apresentado por Weisstein (1999) na Equação 18 do artigo *Triangle Area*:

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{\left[\sum_{j=1}^{3}\begin{vmatrix} x_j & x_{j+1} \\ y_j & y_{j+1}\end{vmatrix}\right]^2 + \left[\sum_{j=1}^{3}\begin{vmatrix} y_j & y_{j+1} \\ z_j & z_{j+1}\end{vmatrix}\right]^2 + \left[\sum_{j=1}^{3}\begin{vmatrix} z_j & z_{j+1} \\ x_j & x_{j+1}\end{vmatrix}\right]^2}; (x_4, y_4, z_4) = (x_1, y_1, z_1). \tag{40}$$

VINCULANTES DE PONTOS DO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

Cálculo de Vinculantes de Pontos do Espaço Tridimensional

A existência do Lema (3) motivou a proposição da seguinte definição:

Definição 3 *Seja*

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_m & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_m & y_1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & \cdots & z_m & z_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_m & x_1 \end{pmatrix} \tag{41}$$

uma matriz de ordem $4 \times (m+1)$*, cujos elementos são as coordenadas de* m *pontos* $P_j = (x_j, y_j, z_j)$ *do* $\mathbb{R}^3$*, com* $m \geq 3$*, dispostos em determinada ordem. O vinculante de* A *será representado por:*

$$vin(A) = \left\{\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_m & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_m & y_1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & \cdots & z_m & z_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_m & x_1 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right\}; \tag{42}$$

E será calculado por:

$$\left\{\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right\} = \sqrt{\left\{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\}^2 + \left\{\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\right\}^2 + \left\{\begin{matrix} z \\ x \end{matrix}\right\}^2}. \tag{43}$$

Em termos de somatórios, o valor do vinculante de pontos do espaço tridimensional é dado por:

$$vin(A) = \sqrt{\left[\sum_{j=1}^{m}\begin{vmatrix} x_j & x_{j+1} \\ y_j & y_{j+1}\end{vmatrix}\right]^2 + \left[\sum_{j=1}^{m}\begin{vmatrix} y_j & y_{j+1} \\ z_j & z_{j+1}\end{vmatrix}\right]^2 + \left[\sum_{j=1}^{m}\begin{vmatrix} z_j & z_{j+1} \\ x_j & x_{j+1}\end{vmatrix}\right]^2}; (x_{m+1}, y_{m+1}, z_{m+1}) = (x_1, y_1, z_1). \tag{44}$$

No segundo membro da Equação (44), temos somatórios de determinantes de segunda ordem; tratando-se, em cada parcela, de somas de m determinantes de matrizes quadradas de segunda ordem.

Teorema da Área de um Triângulo no Espaço Tridimensional

Teorema 1 *Seja* $\alpha : ax + by + cz = d$ *um plano em* $\mathbb{R}^3$*. A área de qualquer triângulo contido em* α *é proporcional a* $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$*.*

Demonstração: Tomemos três pontos quaisquer de α: $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ e $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$. A área A do triângulo com vértices nesses três pontos é dada pela Equação (40), que pode ser reescrita de acordo com a Equação (43) como:

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix}^2 + \begin{Bmatrix} z \\ x \end{Bmatrix}^2 + \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}^2}. \tag{45}$$

Considerando-se a equação do plano α e tomando-se vinculantes de denominadores iguais a z, temos:

$$\begin{Bmatrix} ax + by + cz \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d \\ z \end{Bmatrix}, \tag{46}$$

o que nos leva a:

$$\begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix} = \frac{a}{b}\begin{Bmatrix} z \\ x \end{Bmatrix}, \tag{47}$$

se $b \neq 0$. Agora, considerando-se a equação do plano α e tomando-se vinculantes de denominadores iguais a y, temos:

$$\begin{Bmatrix} ax + by + cz \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d \\ y \end{Bmatrix}, \tag{48}$$

o que conduz a:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \frac{c}{a}\begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix}. \tag{49}$$

Da Equação (47) e da Equação (49), temos:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \frac{c}{b}\begin{Bmatrix} z \\ x \end{Bmatrix}. \tag{50}$$

Da Equação (45) e da Equação (47), a Equação (50) se transforma em:

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{b^2}\begin{Bmatrix} z \\ x \end{Bmatrix}^2 + \frac{b^2}{b^2}\begin{Bmatrix} z \\ x \end{Bmatrix}^2 + \frac{c^2}{b^2}\begin{Bmatrix} z \\ x \end{Bmatrix}^2} = \frac{1}{2|b|}\left|\begin{Bmatrix} z \\ x \end{Bmatrix}\right|\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \tag{51}$$

De modo análogo, podemos ainda encontrar:

$$A = \frac{1}{2|a|}\left|\begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix}\right|\sqrt{a^2 + b^2 + c^2},\ a \neq 0;\ A = \frac{1}{2|c|}\left|\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}\right|\sqrt{a^2 + b^2 + c^2},\ c \neq 0. \tag{52}$$

ÁREA DE UM POLÍGONO NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL POR VINCULANTE

Teorema 2 *Dados m pontos $P = (x, y, z)$ do $\mathbb{R}^3$, $m \geq 3$. Se esses pontos, na ordem anti-horária, são os vértices de um polígono orientado sobre um plano α; então, a área A desse polígono, em qualquer sentido de orientação, é dada por:*

$$A = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}. \tag{53}$$

Demonstração: Nos termos apresentados por Venturi (2015), podemos combinar os m vértices de um polígono de três em três, de modo que esse polígono seja composto por triângulos com um vértice comum em algum ponto P_1. Assim, a área A desse polígono será dada pela soma das áreas desses triângulos.

$$A = \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \end{array}\right\} + \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{cccc} x_1 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_3 & y_4 & y_1 \\ z_1 & z_3 & z_4 & z_1 \\ x_1 & x_3 & x_4 & x_1 \end{array}\right\} + \cdots + \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{cccc} x_1 & x_{m-1} & x_m & x_1 \\ y_1 & y_{m-1} & y_m & y_1 \\ z_1 & z_{m-1} & z_m & z_1 \\ x_1 & x_{m-1} & x_m & x_1 \end{array}\right\}. \tag{54}$$

Consideremos que o plano α tenha equação $ax + by + cz = d$, com $c \neq 0$. Desse modo, pelo Teorema (1), a Equação (54) torna-se:

$$A = \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2|c|}\left[\left\{\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{array}\right\} + \cdots + \left\{\begin{array}{cccc} x_1 & x_{m-1} & x_m & x_1 \\ y_1 & y_{m-1} & y_m & y_1 \end{array}\right\}\right]. \tag{55}$$

Aplicando-se a definição de vinculante de ordem 2 para cada um daqueles da Equação (55), temos:

$$A = \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2|c|}\left[\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} x_m & x_1 \\ y_m & y_1 \end{vmatrix}\right]. \tag{56}$$

Eliminando-se os determinantes simétricos da Equação (56), obtemos:

$$A = \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2|c|}\left[\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_4 \\ y_3 & y_4 \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} x_{m-1} & x_m \\ y_{m-1} & y_m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_m & x_1 \\ y_m & y_1 \end{vmatrix}\right]. \tag{57}$$

Pela definição de vinculante de ordem 2, a Equação (57) pode ser reescrita para:

$$A = \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2|c|}\left\{\begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \cdots & x_{m-1} & x_m & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & \cdots & y_{m-1} & y_m & y_1 \end{array}\right\}. \tag{58}$$

A Equação (58) pode ser simplificada para:

$$A = \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2|c|}\left\{\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right\}. \tag{59}$$

Analogamente, para o plano $\alpha : ax + by + cz = d$, poderíamos ter encontrado:

a) Para $b \neq 0$,

$$A = \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2|b|}\left\{\begin{array}{c} z \\ x \end{array}\right\}; \tag{60}$$

b) Para $a \neq 0$,

$$A = \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2|a|}\left\{\begin{array}{c} y \\ z \end{array}\right\}. \tag{61}$$

Isolando-se os vinculantes das Equações (59), (60) e (60) e, em seguida, elevando-se ao quadrado cada resultado, temos:

$$\frac{4c^2A^2}{a^2+b^2+c^2} = \left\{\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right\}^2; \tag{62}$$

$$\frac{4b^2A^2}{a^2+b^2+c^2} = \left\{\begin{array}{c} z \\ x \end{array}\right\}^2; \tag{63}$$

$$\frac{4a^2A^2}{a^2+b^2+c^2} = \left\{ \begin{array}{c} y \\ z \end{array} \right\}^2 \tag{64}$$

Somando-se membro a membro as Equações (62), (63) e (64), vem:

$$\frac{4A^2(c^2+b^2+a^2)}{a^2+b^2+c^2} = \left\{ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right\}^2 + \left\{ \begin{array}{c} y \\ z \end{array} \right\}^2 + \left\{ \begin{array}{c} z \\ x \end{array} \right\}^2. \tag{65}$$

Simplificando-se a Equação (65), encontramos:

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{\left\{ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right\}^2 + \left\{ \begin{array}{c} y \\ z \end{array} \right\}^2 + \left\{ \begin{array}{c} z \\ x \end{array} \right\}^2}. \tag{66}$$

Em decorrência da definição de vinculante de coordenadas de pontos do $\mathbb{R}^3$, a área do polígono em estudo é dada por:

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{\left\{ \begin{array}{c} y \\ z \end{array} \right\}^2 + \left\{ \begin{array}{c} z \\ x \end{array} \right\}^2 + \left\{ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right\}^2} = \frac{1}{2}\left\{ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right\}. \tag{67}$$

Aplicações

Problema 1. Determinar a área do triângulo cujos vértices são os pontos $A(1,2,-1)$, $B(2,-1,1)$ e $C(3,4,1)$.

Solução. De acordo com o Teorema (2), a área A do polígono ABC (triângulo) pode ser calculada por:

$$A = \frac{1}{2}\left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\sqrt{8^2+(-10)^2+2^2} = \frac{2}{2}\sqrt{16+25+1} = \sqrt{42}. \tag{68}$$

Problema 2. Dados os pontos $A(2,-7,-4)$, $B(4,-2,2)$, $C(5,1,6)$, $D(3,1,10)$, $E(-5,-8,8)$, $F(3,-1,6)$ e $G\left(\frac{1}{2},-5,3\right)$. Sabendo-se que todos esses pontos pertencem a um mesmo plano, determine a área do polígono $ABCDEFG$.

Solução. A Figura (1) mostra os pontos dados em um sistema de coordenadas tridimensionais e a contrução do Polígono ABCDEFG com orientação definida pelo problema. De acordo com o Teorema (2), a área A do polígono $ABCDEFG$ pode ser calculada por:

$$A = \frac{1}{2}\left\{ \begin{array}{cccccccc} 2 & 4 & 5 & 3 & -5 & 3 & \frac{1}{2} & 2 \\ -7 & -2 & 1 & 1 & -8 & -1 & -5 & -7 \\ -4 & 2 & 6 & 10 & 8 & 6 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & -5 & 3 & \frac{1}{2} & 2 \end{array} \right\}. \tag{69}$$

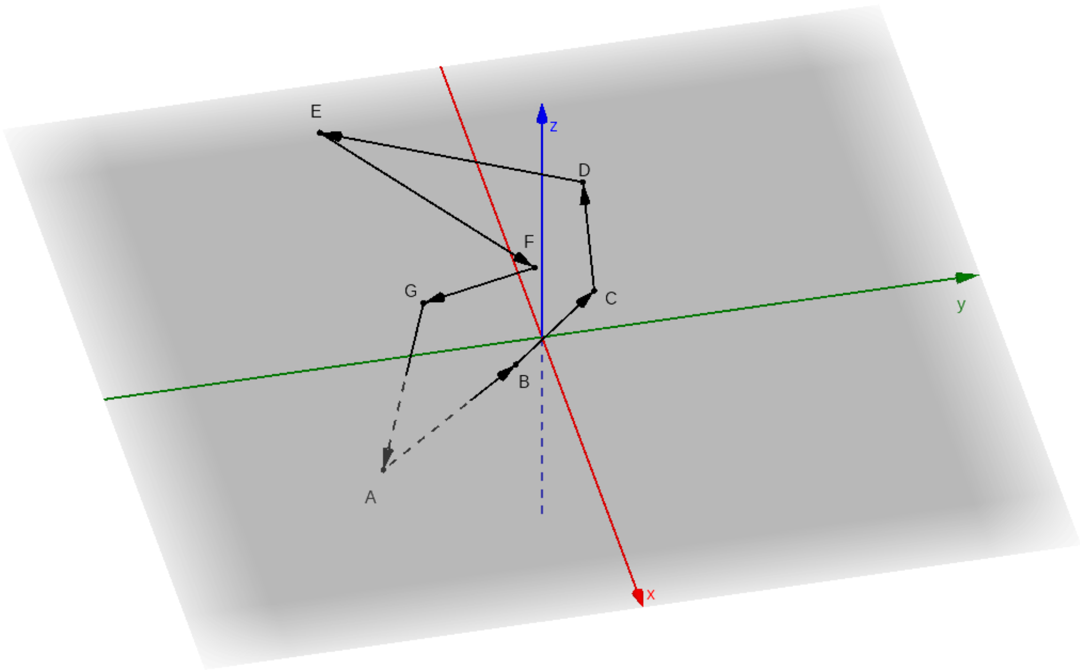

Figure 1: Polígono ABCDEFG, orientado no sentido anti-horário.

Resolvendo-se a Equação (69) pela definição de vinculante de pontos do espaço tridimensional, vem:

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{42^2 + 84^2 + 84^2} = \frac{42}{2}\sqrt{1 + 2^2 + 2^2} = 21 \cdot 3 = 63. \tag{70}$$

ÁREA DE UM POLÍGONO NO ESPAÇO BIDIMENSIONAL POR VINCULANTE

Corolário 1 *A área A de um polígono de m vértices, em $\mathbb{R}^2$, orientado no sentido anti-horário, em função de vinculante, é dada por:*

$$A = \frac{1}{2}\left\{ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right\}. \tag{71}$$

Demonstração: De acordo com o Teorema (2), se os vértices de um polígono de m lados são P_1, P_2, $\cdots$, $P_m \in \mathbb{R}^3$; então, a área desse polígono, em qualquer sentido de orientação, é:

$$A = \frac{1}{2}\left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_m & x_1 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_m & y_1 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_m & z_1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_m & x_1 \end{array} \right\}. \tag{72}$$

Para o espaço $\mathbb{R}^2$, tomemos $z_i = 0$, na Equação (72), para obtermos:

$$A = \frac{1}{2}\left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_m & x_1 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_m & y_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_m & x_1 \end{array} \right\}. \tag{73}$$

Calculando o vinculante da Equação (73), temos:

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{\left\{\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_m & x_1 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_m & y_1 \end{array}\right\}^2 + \left\{\begin{array}{ccccc} y_1 & y_2 & \cdots & y_m & y_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right\}^2 + \left\{\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_m & x_1 \end{array}\right\}^2}$$

Como os vinculantes de pontos do espaço bidimensional com linhas nulas são nulos, então a área de um polígono em $\mathbb{R}^2$, em qualquer sentido de orientação, é:

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{\left\{\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_m & x_1 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_m & y_1 \end{array}\right\}^2} = \frac{1}{2}\left|\left\{\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_m & x_1 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_m & y_1 \end{array}\right\}\right|. \tag{74}$$

Portanto, a área A de um polígono de m vértices, em $\mathbb{R}^2$, orientado no sentido anti-horário, em função de vinculante, é dada por:

$$A = \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_m & x_1 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_m & y_1 \end{array}\right\}. \tag{75}$$

CONCLUSÃO

Tendo em vista o que se mostrou neste trabalho, concluímos que a área de qualquer polígono pode ser calculada em função das coordenadas cartesianas de seus vértices. Isso abre precedente para futuras pesquisas acerca do cálculo de áreas de regiões não poligonais, contidas nos espaços euclidianos bi e tridimensionais.

REFERÊNCIAS
References

Ataíde, Orivaldo N. M. *Uma Abordagem Alternativa de Pontos, Retas e Polígonos na Geometria Analítica Plana*. 2010. 68 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Federal do Amapá, Macapá/AP, 2010. Disponível em: <http://www2.unifap.br/matematica/files/2017/06/TCC-DE-ORIVALDO-NAZARENO-2010.pdf>. Acesso em: 29 de dezembro de 2018.

Ataíde, Orivaldo N. M. *Vinculantes de Pontos do Plano Cartesiano*. 2014. 12 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Matemática) - Faculdades de Administração, Ciências, Educação e Letras, Curitiba/PR, 2014.

Iezzi, Gelson (e outros). *Fundamentos de Matemática Elementar*. vol. 7. São Paulo: Atual, p. 83-84, 1979.

Lima, Elon Lages. *Curso de Análise*. vol. 2. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, IMPA, p. 1, 2005.

Avritzer, Dan. *Geometria Analítica e Álgebra Linear: uma visão geométrica*. Belo Horizonte: Editora UFMG, p. 26, p. 55-56, 2009.

Venturi, Jacir J. *Álgebra Vetorial e Geometria Analítica*. 9 ed. Curitiba: Editora UFPR, p. 107-112, 2015.

Weisstein, Eric W. *Polygon Area*. From MathWorld–A Wolfram Web Resource. Disponível em: <http://mathworld.wolfram.com/PolygonArea.html>. Acesso em: 31 de dezembro de 2018.

Weisstein, Eric W. *Triangle Area*. From MathWorld–A Wolfram Web Resource. Disponível em: <urlhttp://mathworld.wolfram.com/TriangleArea.html>. Acesso em: 31 de dezembro de 2018.

Wikipedia, Org. *Shoelace Formula*. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Shoelace_formula>. Acesso em: 01 de janeiro de 2019.