Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

Apreçamento com Ativos Não Negociáveis

Uma Abordagem por Indiferença

Autor: **Tereza Cristina Amorelli Coelho**

Orientador: **Roberto Imbuzeiro Oliveira**

Rio de janeiro

Outubro de 2018

À minha família

Agradecimentos

Agradeço a todos que, de alguma forma, contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho. Em especial aos meus colegas de turma pelo companheirismo e a todos os professores e monitores, os quais foram imprescindíveis para a minha formação.

Agradeço também ao meu orientador, Roberto Imbuzeiro, pelas sugestões, bem como pelo apoio e paciência.

Ao professor Jorge Zubelli por todo o conhecimento compartilhado nas diversas disciplinas ministradas e também por todo o seu apoio.

Ao Prof. Fernando Aiube, membro da minha banca, pela revisão e sugestões a este trabalho.

À minha família, em especial ao meu esposo Max pelas longas discussões acadêmicas e pela sugestão do tema desta dissertação.

Ao Banco do Brasil S.A pelo suporte ao densenvolvimento profissional dos seus funcionários. Em especial, agradeço aos colegas de trabalho que me encorajaram e apoiaram na busca do meu desenvolvimento acadêmico, principalmente: Ubiratan Paes, Cláudio Guimarães, Mauricio Nogueira, Sérgio Gusman, Cirio, Lino e Juliano.

E um agradecimento, não menos especial, aos meus gatinhos Fourier e Nikita pelas longas esperas por bolinhas lançadas.

Resumo

Diante de mercados incompletos, nos quais os contratos derivativos, nem sempre, são perfeitamente replicáveis, o apreçamento por indiferença apresenta-se como uma alternativa de apreçamento neutro ao risco, levando em conta as preferências dos agentes. Em particular, foi trabalhado um modelo discreto no tempo em que o ativo objeto, apesar de observável, não é negociado, e.g. índices econômicos e índices de clima. A partir desse modelo, foi desenvolvido um método de apreçamento multiperíodo definido a partir de um funcional não-linear. Este método foi implementado computacionalmente em um mercado binomial com dois ativos de risco, sendo um negociável e outro não.

Palavras chave: mercados incompletos, apreçamento por indiferença, ativos não negociados.

Abstract

In incomplete markets, not every contingent claim is perfectly replicable. For those claims, indifference pricing is an alternative to the usual risk-neutral pricing, which takes into account the agent's preferences and is compatible with non-arbitrage theory. In particular, we presented a discrete time model where the traded assets comprise a complete market, but with some of the underlying assets being non-traded — eg. economic indices and weather data. Using this market model, a pricing framework, based on indifference valuation with an exponential utility was developed; this framework leads a pricing method based on a non-linear, time-consistent functional. A computational implementation of this method using a binomial tree for two assets — with only one being traded — was also presented.

Keywords: incomplete markets, indifference pricing, non-traded assets.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

Nos mercados financeiros uma grande e crescente gama de produtos faz uso de metodologias de apreçamento envolvendo a modelagem de incertezas.

Em especial, como exemplo clássico, temos as opções atreladas a algum ativo objeto. No caso das opções europeias, para as quais os exercícios só podem ser realizado quando do vencimento do contrato, os trabalhos de Black & Scholes (1973) e Merton (1973) constituem um marco para a teoria de finanças.

Esses trabalhos, apesar de suas diversas hipóteses simplificadoras, têm, ainda hoje, seus resultados aplicados no mercado financeiro.

No entanto, com a crescente demanda por produtos mais complexos, modelos com maior acurácia foram e continuam sendo desenvolvidos.

Em muitos casos, a hipótese de não-arbitragem utilizada por Black & Scholes (1973) não é suficiente para determinar os preços dos derivativos — por exemplo, quando o mercado for incompleto. Nestes casos os preços não serão determinados de forma única e, em geral, existe um intervalo de preços que são compatíveis com não arbitragem. Em várias aplicações este intervalo pode ser bastante extenso — um exemplo extremo é descrito em Hubalek & Schachermayer (2001), onde o intervalo de preços compatíveis com não arbitragem é $(0, +\infty)$. Nestas situações, há a necessidade de se considerar outros fatores que levem a determinação de um preço que seja representativo para os agentes de mercado.

Derivativos de clima, opções executivas, opções de reais são alguns casos nos quais nos deparamos com a necessidade de modelar um mercado incompleto, pois os ativos atrelados a tais contratos não são por si negociáveis, o que impossibilita a construção de um portfólio replicador do *payoff* desses contratos.

Neste trabalho apresentamos uma discussão do apreçamento em mercados inconpletos e apreçamento por indiferença em mercados com ativos não-negociáveis, mas cujo subconjunto de ativos negociáveis formem um mercado completo, sempre, trabalhando em tempo discreto.

O modelo de apreçamento aqui apresentado pode ser visto como uma extensão do trabalho de Musiela & Zariphopoulou (2004) seja, por incluir múltiplos ativos negociáveis e não-negociáveis de uma forma complementar ao mencionado em Carmona (2009), bem como, por permitir que o mercado para os ativos não-negociáveis seja contínuo nos preços destes ativos.

Apresentamos também uma implementação computacional, usando uma árvore binomial 2-D seguindo Kwok (2008), Grasselli (2011) — veja também Boyle (1988). Dentre os experimentos apresentados, destacamos: análise do comportamento do preço por indiferença em diversas situações, incluindo a diferença entre o preço de compra e venda; a recuperação do preço neutro ao risco usando extrapolação quando a aversão ao risco tende a zero; aplicação ao apreçamento de opções americanas — seguindo Grasselli (2011); exemplo de apreçamento utilizando opções de Margrabe —Margrabe (1978).

O trabalho está organizado da seguinte forma: no capítulo 1, revisamos o problema de apreçamento neutro ao risco, em tempo discreto, considerando os mercados completos e incompletos. Já, no capítulo 2, apresentamos uma breve revisão da teoria de preferências. A partir dessas revisões discutimos, no capítulo 3, o apreçamento em mercados incompletos utilizando indiferença. O capítulo 4, apresenta um método de apreçamento que estende o algoritmo apresentado por Musiela & Zariphopoulou (2004); esta extensão contempla um mercado consistindo de um submercado completo com ativos negociáveis (com preços necessariamente discretos) e com ativos não-negociados, com preços que podem ser contínuos ou discretos. Uma implementação computacional usando árvores binomiais, exibindo diversos exemplos, é apresentada no capítulo 5. No capítulo 6 apresentamos uma conclusão sobre o trabalho desenvolvido. Completam o trabalho dois apêndices.

Capítulo 1

Apreçamento através de Medida Martingal Equivalente em Tempo Discreto

Neste capítulo será introduzida a notação que será utilizada no restante do texto, bem como, a apresentação de um resumo dos resultados clássicos aplicados à teoria de finanças em mercados completos e incompletos. O contexto sempre irá considerar uma formatação discreta do tempo.

Como marco inicial destacamos o proposto por Black e Scholes, em Black & Scholes (1973) e Merton, na publicação Merton (1976) com vistas à resolver o problema de apreçamento de opções europeias.

No trabalho desenvolvido utiliza-se a montagem de um portfólio composto pelo ativo objeto e pelo derivativo. A variação no valor do portfólio no tempo é, então, modelada por uma equação diferencial parcial de segunda ordem (EDP) que, sob o pressuposto do portfólio ser imune aos riscos de mercado, será redutível à equação de difusão do calor, a qual, possui solução analítica.

Porém, com o desenvolvimento dos mercados financeiros e a necessidade de se apreçar ativos mais complexos, a utilização de modelos via EDP mostrou-se mais complicada, uma vez que, nem sempre, uma solução analítica para as mesmas é possível, levando à utilização de técnicas mais avançadas envolvendo soluções numéricas.

Para contornar tais dificuldades, uma boa forma de encarar o problema é a observância do trabalho de Harrison e Pliska, em Harrison & Pliska (1981), que introduzem o conceito de apreçamento através da medida martingal equivalente, a qual denotaremos MME.

Resumidamente, o apreçamento via MME consiste na substituição da medida histórica, que representa a crença, dos agentes econômicos, na realização dos possíveis cenários econômicos, por uma medida equivalente que seja martingal em relação ao preço do ativo objeto e, então, calcula-se o valor esperado, no vencimento, para o contrato utilizado-se esta medida.

No desenvolvimento do capítulo veremos que a MME nem sempre será única, mostrando, assim, que o mercado possui algum tipo de imperfeição, ou seja, nem todos os ativos são negociáveis, falta de liquidez, custos de transação, dentre outras.

Na seção 1.2 provamos que, no caso do mercado completo, se o tempo for representado de forma discreta o modelo dererá ser atômico. Portanto, o número de possíveis cenários será finito.

Na seção 1.3, encerramos o capítulo como uma discussão sobre algumas formas de apreçamento no caso de incompletude de mercado. Na literatura sobre o assunto a escolha entre os diversos preços compatíveis com não arbitragem é exploradada sob diversas óticas. Entre elas temos o preço de Davis, Davis (1997), que parte de argumentos mais econômicos utilizando a função de utilidade do agente e sua aversão ao risco . Sob outras formulações, deve-se escolher uma MME entre as diversas medidas disponíveis, levando à utilização dos conceitos de medida martingal de variância mínima e medida martingal de entropia mínima.

Os conceitos é definições aqui usados seguem, bem de perto, o desenvolvido em Föllmer & Schied (2004) por julgarmos traduzir todos os conceitos necessários no desenvolvimento adiante.

1.1 Preliminares

Nesta seção introduziremos uma série de definições básicas para fixar notação.

Definição 1.1. *Um espaço de probabilidade é uma tripla $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, onde $\mathcal{F}$ é uma σ-álgebra de Ω e P é uma medida de probabilidade .*

Definição 1.2. *Uma função $f : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ é mensurável se $f^{-1}((c, +\infty])$ pertence a $\mathcal{F}$ para todo $c \in \mathbb{R}$.*

Definição 1.3. *Uma filtração representa uma família $(\mathcal{F}_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ de σ-álgebras em Ω com $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ para $s < t$.*

Teorema 1.4 (Radon-Nikodým)**.** *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade. Tomando uma medida Q, em $(\Omega, \mathcal{F})$, equivalente a P, a função $\varphi \geqslant 0$, $\mathcal{F}$-mensurável, será denominada derivada de Radon-Nikodym de Q em relação à P, sendo denotada por:*

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} := \varphi.$$

Proposição 1.1. *Suponha a medida Q absolutamente continua em relação à P $(Q \ll P)$ em $\mathcal{F}$ com densidade φ, além disso, $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ seja, também, σ-álgebra. Então, para qualquer $\mathcal{F}$-mensurável $F \geqslant 0$,*

$$\mathbb{E}_Q[F|\mathcal{F}_0] = \frac{1}{\mathbb{E}_P[\varphi|\mathcal{F}_0]} \cdot \mathbb{E}_P[F\varphi|\mathcal{F}_0], \quad Q\text{-q.c.}$$

A demonstração do resultado está em Föllmer & Schied (2004, p.405).

Definição 1.5. *Uma sequência $X = \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de variáveis aleatórias, definidas no espaço $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, é denominada um processo estocástico em tempo discreto.*

Definição 1.6. *Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e $(\mathcal{F}_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ uma filtração:*

1. *Um processo estocástico $X = (X_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ é dito $\mathcal{F}_t$-adaptado se X_t for $\mathcal{F}_t$-mensurável.*

2. *Um processo estocástico $Y = (Y_t)_{1\leqslant t\leqslant T}$ é dito $\mathcal{F}_t$-previsível se Y_t for $\mathcal{F}_{t-1}$-mensurável.*

Intuitivamente um processo adaptado depende da informação até o tempo t, enquanto que, o processo previsível até o tempo $t - 1$.

Definição 1.7. *Um processo estocástico* $X = (X_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ *em um espaço de probabilidade filtrado* $\left(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}, Q\right)$ *é dito um martingal se:*

1. X *é adaptado.*
2. X *satisfizer:* $\mathbb{E}_Q\left[|X_t|\right] < \infty, \quad \forall t$
3. $X_s = \mathbb{E}_Q\left[X_t | \mathcal{F}_s\right]$ *para todo* $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$.

Q *será dita medida neutra ao risco ou medida martingal.*

Sendo,

$$\| \ f \ \|_p := \begin{cases} \mathbb{E}\left[\, |f|^p \,\right]^{\frac{1}{p}}, & \text{se } 0 < p < \infty, \\ \\ sup\ ess_P\,(f) = inf\,\{c \geq 0 \,|\, P\left[\,|f| > c\,\right] = 0\}\,, & \text{se } p = \infty, \end{cases}$$

temos a seguinte definição:

Definição 1.8. *Seja* $\mathcal{L}^p\left(\Omega, \mathcal{F}, P\right)$ *com* $p \in (0, \infty]$ *representando o conjunto de todas as funções* $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $\mathcal{F}$*-mensuráveis, tais que* $\| \ f \ \|_p < \infty$*. Definimos de forma usual* $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P) = \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, P)/\sim$ *como o espaço onde duas funções* f *e* $\tilde{f}$ *são equivalentes, se satisfizerem:*

$$f \sim \tilde{f} \ \Leftrightarrow \ f = \tilde{f} \ P\text{-q.c.}$$

Definição 1.9. *Um conjunto* $A \in \mathcal{F}$ *é dito átomo de* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, se* $P\left[A\right] > 0$ *e se cada* $B \in \mathcal{F}$ *com* $B \subset A$ *satisfaça ao menos uma das condições:*

1. $P\left[B\right] = 0$
2. $P\left[B\right] = P\left[A\right]$

A proposição seguinte irá caracterizar a dimensão dos espaços L^p.

Proposição 1.2. *Para qualquer que seja* $p \in [0, \infty]$*, a dimensão do espaço* $L^p := L^p\left(\Omega, \mathcal{F}, P\right)$ *é dada por:*

$$\begin{aligned} &\dim L^p\left(\Omega, \mathcal{F}, P\right) \\ &\qquad = sup\left\{n \in \mathbb{N} \,|\, \exists \text{ uma partição } A^1, \dots, A^n \text{de } \Omega \text{ com } A^i \in \mathcal{F} \text{ e } P\left[A^i\right] > 0\right\}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Em particular, $n := \dim L^p\left(\Omega, \mathcal{F}, P\right) < \infty$ *se e somente se existir uma partição de* Ω *em* n *átomos de* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Demonstração. Seja $A^1, \dots, A^n$ uma partição de Ω, com $A^i \in \mathcal{F}$ e $P[A^i] > 0$. Neste caso, as funções indicadoras $\mathbf{1}_{A^i}$ são elementos linearmente independentes de L^p. Portanto, $\dim L^p \geq n$. Assim, se o lado direito de (1.1) não for finito, nada mais precisa ser demonstrado.

Por outro lado, suponha que o lado direito de (1.1) seja $n_0 < \infty$. Então a partição correspondente é formada apenas por átomos. Se assim não fosse, seja A^{i_0} um elemento desta partição que não seja um átomo. Neste caso, existe $B \subset A^{i_0}$ satisfazendo $P[B] > 0$ e $P[B] < P[A^{i_0}]$. Portanto, $\{A^1, \dots, A^{i_0 - 1}, A^{i_0} - B, B, A^{i_0 + 1}, \dots A^{n_0}\}$ é uma partição com $n_0 + 1$ elementos com medida positiva e, assim, n_0 não é maximal. Desta forma, todo $Z \in L^p$ é constante P-q.c. em A^i, $i = 1, \dots, n_0$. Seja z_i o valor de Z em A^i. Então

$$Z = \sum_{i=1}^{n_0} z_i \mathbf{1}_{A^i}, \quad P - \text{q.c.}$$

e as funções indicadoras $\mathbf{1}_{A^1}, \dots \mathbf{1}_{A^{n_0}}$ são uma base de L^p. □

1.2 Modelo de Mercado

Nesta seção iremos detalhar o mercado no qual os ativos serão negociados, para posteriormente utilizar o apreçamento utilizando a medida martingal equivalente (MME).

O mercado será formado por $N+1$ ativos com preços observáveis no tempos $t = 0, 1, \ldots T$, sendo representados pelo vetor de variáveis aleatórias, no espaço de probabilidade filtrado $L^1\left(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{0\leqslant t\leqslant T}, P\right)$, como o processo estocástico adaptado com valores em $\mathbb{R}^{N+1}$. Neste caso denotaremos, em forma vetorial, as variáveis aleatórias representantes dos preços dos ativos como:

$$\left(\overline{S}_t\right)_{0\leqslant t\leqslant T} = \left(S_t^{(0)}, S_t\right)_{0\leqslant t\leqslant T} = \left(S_t^{(0)}, S_t^{(1)}, \ldots, S_t^{(N)}\right)_{0\leqslant t\leqslant T}.$$

Considera-se que os preços irão sempre assumir valores positivos, sendo mensuráveis com respeito à σ-álgebra $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$. Intuitivamente $\mathcal{F}_t$ representa todos os eventos revelados até o tempo t, de forma que:

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \ldots \subset \mathcal{F}_T.$$

represente uma família de σ-álgebras.

$S_t^{(i)} = S_t^{(i)}(\omega)$ irá representar o valor do i-ésimo ativo para um dado cenário $\omega \in \Omega$ no tempo t, sendo $P(\omega) > 0$ para todo $\omega \in \Omega$.

De forma análoga, a representação vetorial dos preços dos ativos no instante inicial será dada na forma:

$$\overline{S}_0 = \left(S_0^{(0)}, S_0\right) = \left(S_0^{(0)}, S_0^{(1)}, \ldots, S_0^{(N)}\right).$$

Para este mercado, iremos considerar, também, a existência de um *ativo livre de risco* (0-ésimo elemento do vetor acima), ou seja, livre da incerteza quanto do valor que irá valer em um tempo t qualquer e será definido como:

$$S_0^{(0)} = 1 \quad \text{e} \quad S_t^{(0)} \equiv \prod_{k=1}^{t} (1 + r_k).$$

Com $r_t \geq 0, \forall t$, constante representando a taxa de juros livre de risco da econonia.

O ativo livre de risco sera usado como *numerário* em nossa abordagem. Um numerário corresponde a uma base de preços na qual os outros ativos do mercado serão expressos. Usualmente a mudança de numerário se mostra como um recurso facilitador na solução dos cálculos via MME.

Ao utilizar o ativo livre de risco como *numerário* obteremos o denominado *processo de preços descontados*, que iremos definir como:

$$X_t^{(i)} = X_t^{(i)}(\omega) := \frac{S_t^{(i)}(\omega)}{S_t^{(0)}}, \quad t = 0, \ldots, T\,,\, i = 0, \ldots N.$$

Logo, os valores dos ativos em relação ao numerário podem representados na forma vetorial:

$$X_t^{(0)} \equiv 1 \quad \text{e} \quad X_t = \left(X_t^{(1)}, \ldots, X_t^{(N)}\right)$$

assim,

$$\left(\overline{X}_t\right)_{0\leqslant t\leqslant T} = \left(X_t^{(0)}, X_t\right)_{0\leqslant t\leqslant T} = \left(X_t^{(0)}, X_t^{(1)}, \ldots, X_t^{(N)}\right)_{0\leqslant t\leqslant T}.$$

Neste modelo é permitido ao agente investir, no tempo $t = 0$, em um portfólio formado pelo ativo livre de risco e nos demais ativos, por exemplo, uma ação. Esse investimento pode ser representado pelo par $\left(x, \overline{\xi}\right)$, onde x representa o capital dispendido na compra do portfólio e $\overline{\xi}$ a proporção aplicada em cada ativo.

As possíveis estratégias que um investidor pode assumir serão representadas como um processo estocástico em Ω representando a quantidade investida no ativo i-ésimo entre os instantes $t-1$ e t, sendo definidas como:

Definição 1.10. *Uma estratégia de negociação é um processo* $\overline{\xi} = \left(\overline{\xi}_t\right)_{1 \leqslant t \leqslant T}$ *previsível em* $\mathbb{R}^{N+1}$*, com:*

$$\overline{\xi} = \left(\xi^{(0)}, \xi\right) = \left(\xi_t^{(0)}, \xi_t^{(1)}, \ldots, \xi_t^{(N)}\right)_{1 \leqslant t \leqslant T}$$

Uma estratégia $\overline{\xi}$ é dita *previsível* quando a quantidade alocada em cada ativo é determinada no começo do período, ou seja, em $t-1$.

A estratégias $\xi_t^{(i)}$ poderão assumir valores tanto positivos quanto negativos.

Valores negativos de $\xi_t^{(i)}$ correspondem ao que, no mercado, é conhecido como posição *short* no ativo. Isto é, o investidor irá, em $t = 0$, vender uma quantidade $|\xi_1^{(i)}|$ de um certo ativo $S_0^{(i)}$ com a obrigação de entregá-lo ao comprador em uma data preestabelecida t.

Com esse recurso extra, o investidor, irá aplicar o montante adquirido em uma outra oportunidade de investimento que julgue trazer um retorno superior à valorização do ativo correspondente à posição *short* - $S^{(i)}$.

Caso sua crença em relação ao comportamento do mercado se realize, na data futura, irá honrar seu compromisso entregado o ativo $S_t^{(i)}$ ao comprador e ainda assim, irá perfazer um lucro quando da apuração do resultado das duas operações em conjunto.

Agora, iremos combinar os ativos base, passíveis de negociação neste mercado, de forma a representar os possíveis portfólios que um agente econômico poderá compôr negociando em tal mercado.

Para montar um portfólio composto obrigatoriamente com o ativo livre de risco e com uma riqueza inicial x haverá o dispêndio de $\xi_1^{(0)} \times S_0^{(0)}$, correspondendo à aquisição do ativo livre de risco, sobrando, então, a quantia de $x - \xi_1^{(0)} \times S_0^{(0)}$ para aplicação nos demais ativos de forma que em $t = 0$, momento de sua composição, o valor do portfólio valerá x, ou seja:

$$x = \xi_1^{(0)} \times S_0^{(0)} + \sum_{i=1}^{N} \xi_1^{(i)} \times S_0^{(i)}$$

Em um tempo $t \geqslant 1$ o valor do portfólio estará associado à incerteza nos valores que os ativos poderão assumir, dependendo do cenário $\omega \in \Omega$ que irá se realizar e que não é conhecido a priori. Podemos, então, definir o **processo de valor** para um portfólio, como:

Definição 1.11. *O Processo de Valor (descontado) correspondente à estratégia* $\overline{\xi} = \left(\overline{\xi}_t\right)_{1 \leqslant t \leqslant T}$ *é dado pelo processo estocástico:*

1. $V_0\left(\overline{\xi}\right) := \overline{\xi}_1 . \overline{X}_0$ *e,*

2. $V_t\left(\xi\right) := \overline{\xi}_t . \overline{X}_t = \sum_{i=0}^{N} \xi_t^{(i)} . X_t^{(i)}$ *para* $t = 1, \ldots, T$.

Um classe particular de estratégias de negociação são as chamadas *estratégias auto financiadas*.

Definição 1.12. *Uma estratégia* $\overline{\xi} = \left(\overline{\xi}_t\right)_{1 \leqslant t \leqslant T-1}$ *é dita auto financiada se:*

$$\overline{\xi}_t \, . \, \overline{S}_t = \overline{\xi}_{t+1} \, . \, \overline{S}_t \tag{1.2}$$

Intuitivamente, (1.2) significa que o portfólio é sempre rebalanceado de forma a preservar o valor presente sem, no entanto, fazer qualquer tipo de aporte monetário adicional ou retirada de capital. Logo os ganhos e perdas resultantes das flutuações no valor do ativo serão a única fonte de variação no valor do portfólio. Os ganhos e as perdas no valor do investimento, também, podem ser descritos como um processo estocástico:

Definição 1.13. *Dada uma estratégia* $\overline{\xi}$*, o processo de ganhos* $\left(G_t\left(\overline{\xi}\right)\right)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ *correspondente é dado por:*

1. $G_0 := 0$, *e*
2. $G_t\left(\xi\right) = \sum_{k=1}^{t} \xi_k \, . \, \left(X_k - X_{k-1}\right)$.

O processo de ganhos, assim definido, irá refletir o ganho líquido acumulado, em relação ao numerário, até o momento t. A condição (1.2) pode ser verificada, mesmo quando os ativos forem expressos em termos do numerário, conforme Proposição a seguir:

Proposição 1.3. *Para uma estratégia* $\overline{\xi}$ *as seguintes condições são equivalentes:*

a) $\overline{\xi}$ *é auto-financiado.*

b) $\overline{\xi}_t \, . \, \overline{X}_t = \overline{\xi}_{t+1} \, . \, \overline{X}_t \quad$ *para* $t = 1, \ldots, T-1$.

c) $V_t = V_0 + G_t = \overline{\xi}_1 \, . \, \overline{X}_0 + \sum_{k=1}^{t} \xi_k \, . \, \left(X_k - X_{k-1}\right), \quad$ *para* $t = 1, \ldots T$.

Demonstração. $(a) \Leftrightarrow (b)$ Dividindo (1.2) por S_t^0, temos:

$$\overline{\xi}_t \overline{X}_t = \overline{\xi}_{t+1} \overline{X}_t, \quad t = 1, \ldots, T-1.$$

$(b) \Leftrightarrow (c)$ Tomemos

$$\begin{aligned} V_{t+1} - V_t &= \overline{\xi}_{t+1} \overline{X}_{t+1} - \overline{\xi}_t \overline{X}_t \\ &= \overline{\xi}_{t+1} \overline{X}_{t+1} - \overline{\xi}_{t+1} \overline{X}_t && \text{por (b)} \\ &= \overline{\xi}_{t+1} \left(\overline{X}_{t+1} - \overline{X}_t\right) \\ &= \xi_{t+1} \left(X_{t+1} - X_t\right) && \text{pois } X_t^0 = 1, \, \forall t \\ &= G_{t+1} && \text{por definição} \end{aligned}$$

Logo,

$$V_{t+1} = V_t + G_{t+1}$$

e temos

$$V_t = V_0 + \sum_{k=1}^{t} G_k.$$

□

Como decorrência da proposição anterior, observa-se que, sendo $\overline{\xi_t} = (\xi_t^{(0)}, \xi_t)$ estratégia auto finaciada, o processo $\xi_t^{(0)}$ relativo à quantidade investida no ativo livre de risco será inteiramente determinado em função do investimento inicial V_0 e do processo d-dimensional ξ_t. De fato,

$$V_0 := \overline{\xi_1} \,.\, \overline{X_0} \;=\; \xi_1^{(0)} + \xi_1.X_1 \;\Leftrightarrow\; \xi_1^{(0)} = V_0 - \xi_1.X_0. \tag{1.3}$$

Adicionalmente a esse fato, segue da Proposição:

$$\xi_{t+1}^{(0)} - \xi_t^{(0)} = -\left(\xi_{t+1} - \xi_t\right).X_t, \quad t = 1, \ldots, T-1, \tag{1.4}$$

logo, de 1.3 e 1.4:

$$\xi_{t+1}^{(0)} = V_0 - \xi_1.X_0 - \sum_{k=1}^{t} \left(\xi_{k+1} - \xi_k\right).X_k.$$

Agora, faremos uma conexão entre os processos definidos acima e a medida martingal equivalente (MME) - Q, a qual, para o contexto de mercado descrito, existirá se o processo estocástico relativo aos preços descontados for $Q-$martingal, conforme definição 1.7. No teorema a seguir vamos usar a notação V^- para denotar a parte negativa da variável aleatória V.

Teorema 1.14. *Dada uma medida de probabilidade Q, as seguintes condições são equivalentes:*

1. *Q é uma medida martingal equivalente.*
2. *Se $\overline{\xi} = \left(\xi^{(0)}, \xi\right)$ for auto financiado e ξ_t limitado , então o processo de valor V de $\overline{\xi}$ é um Q-martingal.*
3. *Se $\overline{\xi} = \left(\xi^{(0)}, \xi\right)$ for auto financiado e seu processo de valor V satisfizer $\mathbb{E}_Q\left[V_T^-\right] < \infty$, então V é um Q-martingal.*
4. *Se $\overline{\xi} = \left(\xi^{(0)}, \xi\right)$ for auto financiado e seu processo de valor V satisfizer $V_T \geqslant 0$ $Q-$ q.c., então $\mathbb{E}_Q\left[V_T\right] = V_0$.*

Demonstração.

(1⇒2) Se Q é uma medida martingal, então, por definição, o processo de preço descontado $X_t^{(i)}$ é um $Q-$ martingal, isto é:

$$\mathbb{E}_Q\left[X_t^{(i)}\right] < \infty \quad \text{e} \quad X_s^{(i)} = \mathbb{E}_Q\left[X_t^{(i)} \mid \mathcal{F}_s\right] \quad \text{,para } 0 \leq s \leq t \leq T \quad i = 1, \ldots, d.$$

Se V é o processo de valor referente à estratégia $\overline{\xi} = (\xi_0, \xi)$ e sendo $|\xi|$ limitado por uma constante, a qual iremos denominar como c, então, temos:

$$\begin{aligned} V_t &= V_0 + G_t \\ &= V_0 + \sum_{k=1}^{t} \xi_k \left(X_k - X_{k-1}\right). \end{aligned}$$

Pela desigualdade triangular e pelo fato de que $|\xi_k| \leq c$:

$$|V_t| \leq |V_0| + \sum_{k=1}^{t} c\left(|X_k| + |X_{k-1}|\right)$$

Como todo $|X_k|$ pertence ao conjunto $\mathcal{L}^1(Q)$ das funções $\mathcal{F}$-mensuráveis em $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$, temos que $\mathbb{E}_Q[|X|] < \infty$, logo, $\mathbb{E}_Q[|V_t|] < \infty$. Além disso,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_Q[V_{t+1}|\mathcal{F}_t] = & \\
&= \mathbb{E}_Q[V_t + \xi_{t+1}(X_{t+1} - X_t)|\mathcal{F}_t] \\
&= V_t + \xi_{t+1}\mathbb{E}_Q[(X_{t+1} - X_t)|\mathcal{F}_t], \qquad && V_t \text{ e } \xi_{t+1}\ \mathcal{F}_t\text{-mensuráveis} \\
&= V_t && \text{,pois } \mathbb{E}_Q[X_{t+1} - X_t|\mathcal{F}_t] = 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, o processo de valor V é Q-martingal.

(2⇒3) Iremos mostrar:

$$\mathbb{E}_Q\left[V_t^-\right] < \infty \text{ então } \mathbb{E}_Q[V_t \mid \mathcal{F}_{t-1}] = V_{t-1} \quad \forall t. \tag{1.5}$$

Temos por hipótese que $\mathbb{E}_Q\left[V_T^-\right] < \infty$, além disso, $V^- = -(V \wedge 0)$. Como a função mínimo é convexa, pela Desigualdade de Jensen temos: $\mathbb{E}_Q[V_T|\mathcal{F}_{T-1}]^- = V_{T-1}^-$. Portanto:

$$\mathbb{E}_Q\left[V_{T-1}^-\right] = \mathbb{E}_Q\left[\mathbb{E}_Q[V_T|\mathcal{F}_{T-1}]^-\right] \leqslant \mathbb{E}_Q\left[\mathbb{E}_Q\left[V_T^-|\mathcal{F}_{T-1}\right]\right] = \mathbb{E}_Q\left[V_T^-\right] < \infty$$

Repetindo esse mesmo procedimento recursivamente de trás para frente, segue:

$$\mathbb{E}_Q\left[V_t^-\right] < \infty \quad \text{e } \mathbb{E}_Q[V_t|\mathcal{F}_{t-1}] = V_{t-1} \quad \forall t.$$

Como V_0 é uma constante finita, temos $\mathbb{E}_Q[V_t] = V_0$, o que, com o fato de $\mathbb{E}_Q\left[V_t^-\right] < \infty$ implica em $V_t \in \mathcal{L}^1(Q), \forall t$, garantindo, então a integrabilidade do processo de valor.

Para provarmos (1.5), note que $\mathbb{E}_Q[V_t|\mathcal{F}_{t-1}]$está bem definida devido à hipótese de que $\mathbb{E}_Q\left[V_t^-\right] < \infty$.
Pelo item 2 do Teorema, temos que ξ é limitado, portanto, podemos definir:

$$\xi_t^{(a)} := \xi_t \mathbf{1}_{\{|\xi_t| \leq a\}}, \quad a > 0.$$

Com isso, o processo de valor relacionado a essa estratégia será dado por:

$$V_t \mathbf{1}_{\{|\xi_t| \leq a\}} = \left(V_{t-1} + \xi_t^{(a)}(X_t - X_{t-1})\right) \mathbf{1}_{\{|\xi_t| \leq a\}}.$$

Tomando a esperança condicional na expressão acima:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_Q[V_t|\mathcal{F}_{t-1}]\,\mathbf{1}_{\{|\xi_t| \leq a\}} &= \left(\mathbb{E}_Q[V_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}] + \mathbb{E}_Q\left[\xi_t^{(a)}(X_t - X_{t-1})|\mathcal{F}_{t-1}\right]\right) \mathbf{1}_{\{|\xi_t| \leq a\}} \\
&= V_{t-1}\mathbf{1}_{\{|\xi_t| \leq a\}} \quad \text{, pois } X_t \text{ é } Q\text{-martingal.}
\end{aligned}
$$

Fazendo $a \to \infty$, temos válida a afirmação (1.5)

(3⇒4) Se um processo M é Q-martingal, então:

$$M_0 = \mathbb{E}_Q[M_T|\mathcal{F}_0] = \mathbb{E}_Q[M_T],$$

pois $\mathcal{F}_0$ é a σ-álgebra trivial.

(4⇒1) Para provarmos que $X_t^i \in \mathcal{L}^1(Q)$ para dados i e t, consideremos o processo determinístico definido, como:

$$\begin{cases} \xi_s^{(i)} := \mathbb{1}_{\{s \leq t\}} \\ \xi_s^{(j)} := 0, \quad j \neq i. \end{cases}$$

Repare que para uma estratégia auto financiada $\overline{\xi}$, a componente referente ao numerário satisfaz:

$$\xi_{t-1}^{(0)} - \xi_t^{(0)} = -\left(\xi_{t+1} - \xi_t\right).X_t \text{ para } t = 1, \ldots, T-1.$$

Desde que, $\xi_1^{(0)} = V_0 - \xi_1.X_0$. Portanto, ξ pode ser completada com processo previsível ξ_0 tal que $\overline{\xi} = (\xi_0, \xi)$ é uma estratégia auto financiada com investimento inicial $V_0 = X_0^i$. O processo de valor correspondente, satisfaz:

$$V_T = V_0 + \sum_{s=1}^{T} \xi_s. \left(X_s - X_{s-1}\right) = X_t^{(i)} \geqslant 0.$$

De (4):

$$\mathbb{E}_Q\left[X_t^{(i)}\right] = \mathbb{E}_Q\left[V_T\right] = V_0 = X_0^{(i)}, \tag{1.6}$$

o que leva a, $X_t^{(i)} \in \mathcal{L}^1(Q)$. A condição (1) segue se for verdade que $\mathbb{E}_Q\left[X_t^{(i)}; A\right] = \mathbb{E}_Q\left[X_{t-1}^{(i)}; A\right]$, para dados t, i e $A \in \mathcal{F}_{t-1}$. Para tanto, iremos definir o processo previsível $\eta \in \mathbb{R}^d$ satisfazendo:

$$\begin{cases} \eta_s^{(i)} := \mathbb{1}_{\{s<t\}} + \mathbb{1}_{A^c}\mathbb{1}_{\{s=t\}} \\ \eta_s^{(j)} := 0, \quad j \neq i. \end{cases}$$

Como acima, vamos considerar o processo previsível $\eta^{(0)}$, tal que, $\overline{\eta} = \left(\eta^{(0)}, \eta\right)$ seja uma estratégia auto financiada cujo investimento inicial é dado por $\tilde{V}_0 = X_0^{(i)}$ e o no tempo final T, por:

$$\tilde{V}_T = \tilde{V}_0 + \sum_{s=1}^{T} \eta_s. \left(X_s - X_{s-1}\right) = X_t^{(i)}\mathbb{1}_{A^c} + X_{t-1}^{(i)}\mathbb{1}_A \geqslant 0.$$

Por (4):

$$X_0^{(i)} = \tilde{V}_0 = \mathbb{E}_Q\left[\tilde{V}_T\right] = \mathbb{E}_Q\left[X_t^{(i)}; A^c\right] + \mathbb{E}_Q\left[X_{t-1}^{(i)}; A\right].$$

Comparando a identidade acima com a equação 1.6, conclui-se, que $\mathbb{E}_Q\left[X_t^{(i)}; A\right] = \mathbb{E}_Q\left[X_{t-1}^{(i)}; A\right]$.

□

Conceito fundamental na teoria de finanças é o relativo à não possibilidade de oportunidade de arbitragem em mercados ditos eficientes. Sendo o mercado eficiente, oportunidades de arbitragem até podem acontecer, porém a simetria da informação fará com que ocorra uma maior demanda sobre os ativos mal apreçados fazendo com que automaticamente os preços retornem ao equilíbrio.

Nos mercados em que possibilidades de arbitragem existam, os agentes econômicos são capazes de montar estratégias de atuação, para as quais, obtem lucro com certeza, sem no entanto, estarem expostos a alguma possibilidade de perda.

Por exemplo, se um agente de mercado consegue montar um portfólio em que sua riqueza inicial seja $x = 0$ (situação factível através de posicionamento *short* em alguns ativos, os quais irão financiar a aquisição dos demais), que a probabilidade de perda com o portfólio seja nula e ainda possua probabilidade positiva de o portfólio atingir um valor positivo em $t = 1$ estaremos diante de uma condição de ineficiência de mercado. Esse desequilíbrio nas forças de mercado é denominado *oportunidade de arbitragem*.

De forma mais técnica uma *oportunidade de arbitragem* é definida da seguinte forma:

Definição 1.15. *Uma estratégia auto financiada $\overline{\xi}$ é dita uma oportunidade de arbitragem se seu processo de valor V satisfizer:*

1. *tiver custo inicial nulo ou negativo (indicando posição short),*
$$V_0 \leqslant 0;$$
2. *não houver risco de perda de capital,*
$$V_T \geqslant 0 \quad P\text{-}q.c, \;;$$
3. *tiver probabilidade estritamente positiva de obter ganho,*
$$P\left[V_T > 0\right] > 0.$$

Podemos, também, definir uma oportunidade de arbitragem em termos do processo de ganhos, ou seja, uma estratégia $\overline{\xi} = (\xi^0, \xi)$ será dita oportunidade de arbitragem se satisfizer:

$$G \geqslant 0 \ P\text{-q.c} \ \text{ e } \ P\left[G > 0\right] > 0.$$

Em um modelo multiperíodo, ausência de oportunidade de arbitragem corresponde à não-possibilidade de ocorrer arbitragem para cada um dos períodos individuais (modelo de mercado de um período). Tal resultado decorre da Proposição a seguir:

Proposição 1.4. *Um mercado admite possibilidade de arbitragem, se somente se, existir $t \in \{1, \ldots, T\}$ e $\eta \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F}_{t-1}, P; \mathbb{R}^d)$, tal que:*

$$\eta.\left(X_t - X_{t-1}\right) \geqslant 0 \ P\text{-}q.c, \ e \ P\left[\eta.\left(X_t - X_{t-1}\right) > 0\right] > 0. \tag{1.7}$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja $\overline{\xi} = (\xi_0, \xi)$ uma oportunidade de arbitragem cujo respectivo processo de valor seja dado por V, além disso, considere:

$$t := \min\{k \mid V_k \geqslant 0 P\text{-q.c}, \text{e } P\left[V_k > 0\right] > 0\}. \tag{1.8}$$

Por hipótese $t \leqslant T$. Além disso, para $t-1 < t$ temos: $V_{t-1} = 0$ P -q.c ou $P\left[V_{t-1} < 0\right] > 0$. De fato, se $V_{t-1} \geqslant 0$ P-q.c, por (1.8) temos que $P\left[V_{t-1} > 0\right] = 0$, o que nos leva à $V_{t-1} = 0$, P-q.c. Por outro lado, se tivermos $P\left[V_{t-1} > 0\right] > 0$, então, de novo por (1.8), temos $P\left[V_{t-1} < 0\right] > 0$.

No primeiro caso, temos:

$$\xi_t.(X_t - X_{t-1}) = V_t - V_{t-1} = V_t, \quad P\text{-q.c.}$$

Tomando $\eta = \xi_t$, obtemos a condição 1.7, ou seja:

$$\begin{aligned} &\eta \left(X_t - X_{t-1}\right) = V_t \geqslant 0, \quad P\text{-q.c} \quad \text{e} \\ &P\left[\eta \left(X_t - X_{t-1}\right) > 0\right] = P\left[V_t > 0\right] > 0. \end{aligned}$$

No segundo caso, tomemos a estratégia $\eta := \xi_t \, \mathbf{1}_{\{V_{t-1}<0\}}$, representando as estratégias com processo de valor estritamente negativo no tempo $t-1$, sendo, tal estratégia $\mathcal{F}_{t-1}$-mensurável, além do que:

$$\eta.(X_t - X_{t-1}) = (V_t - V_{t-1})\mathbf{1}_{\{V_{t-1}<0\}} \geqslant -V_{t-1}\mathbf{1}_{\{V_{t-1}<0\}}.$$

A parte direita da expressão acima é não negativa e, com probabilidade positiva, de ser estritamente positiva, portanto, temos 1.7 satisfeita.

($\Leftarrow$) Para t e η como em 1.7, define-se o processo previsível $\xi \in \mathbb{R}^d$, como:

$$\xi_s := \begin{cases} \eta, & \text{se } s = t \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \tag{1.9}$$

portanto, ξ define uma estratégia autofinanciada $\overline{\xi} = (\xi^0, \xi)$, com investimento inicial $V_0 = 0$ (custo zero) e sendo ξ_0 determinada pela estratégia d-dimensional e pelo investimento inicial. vamos mostrar que essa estratégia implica em ganho certo. De fato, pelo ultimo item da Proposição 1.3:

$$V_T = V_0 + \sum_{k=1}^{T} \xi_k . \left(X_k - X_{k-1}\right), \quad \forall t = \xi_t . \left(X_t - X_{t-1}\right) \geqslant 0, \quad P\text{q.c} \quad \text{(por hipótese).}$$

Portanto, $\overline{\xi}$ é uma oportunidade de arbitragem.

□

A seguir vamos apresentar o *Primeiro Teorema Fundamental de Apreçamento* que irá relacionar as hipóteses de mercado necessárias para existência da medida neutra ao risco. Para tal, antes, iremos enunciar um resultado necessário na sua demontração, denotando por $L^0_+ := L^0_+ \left(\Omega, \mathcal{F}_t, P\right)$ o cone de todos os elementos não-negativos do espaço $L^0 := L^0 \left(\Omega, \mathcal{F}_t, P\right)$. Com esta notação, a condição:

$$\mathcal{K} \cap L^0_+ = \{0\}$$

equivale à condição de ausência de arbitragem (decorrente da Proposição 1.4)

Teorema 1.16. *Seja $\mathcal{P}$ o conjunto das medidas martingais equivalentes e $\mathcal{K}$ o conjunto dos ganhos descontados , para $t \in \{1, \ldots, T\}$, definido como:*

$$\mathcal{K} := \{\eta . \left(X_1 - X_0\right) | \eta \in L^0 \left(\Omega, \mathcal{F}_0, P; \mathbb{R}^d\right)\}.$$

As seguintes condições são equivalentes:

1. $\mathcal{K} \cap L^0_+ = \{0\}$.
2. $(\mathcal{K} - L^0_+) \cap L^0_+ = \{0\}$.
3. *Existe uma medida $P^* \in \mathcal{P}$ com densidade $\mathrm{d}P^*/\mathrm{d}P$ limitada.*
4. $\mathcal{P} \neq \emptyset$.

A demonstração do Teorema está em Föllmer & Schied (2004)(p. 33–34).

Teorema 1.17. *(Teorema Fundamental de Apreçamento) Um modelo de mercado é livre de oportunidade de arbitragem se e somente se o conjunto $\mathcal{P}$ das medidas martingais equivalentes for não-vazio. Neste caso, existe uma medida $Q \in \mathcal{P}$ com densidade $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}P$ limitada.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Suponha que exista uma medida martingal equivalente $P^* \in \mathcal{P}$, pelo Teorema 1.14, qualquer que seja o processo de valor associado a uma estratégia autofinanciada, com $V_0 \leqslant 0$ e $V_T \geqslant 0$, irá satisfazer:

$$0 \leqslant \mathbb{E}^*\left[V_T\right] = V_0 \leqslant 0, \text{portanto, } V_T = 0 \ P^*\text{-q.c.}$$

Além disso, como $P \approx P^*$, tais medidas coincidem nos conjuntos de medida nula, portanto, o mercado original, também, não admitirá oportunidades de arbitragem.

($\Rightarrow$) Para $t \in \{1, \ldots, T\}$, seja o conjunto dos ganhos descontado para t-ésimo período definido como:

$$\mathcal{K}_t := \{\eta.\left(X_t - X_{t-1}\right)|\eta \in L^0\left(\Omega, \mathcal{F}_{t-1}, P; \mathbb{R}^N\right)\}.$$

Como visto, o mercado não admitirá oportunidade de arbitragem, se e somente se,

$$\mathcal{K}_t \cap L^0_+\left(\Omega, \mathcal{F}_t, P\right) = \{0\}, \quad \forall t. \tag{1.10}$$

Repare que 1.10 depende da medida P apenas sobre os conjuntos de medida nula.

A condição 1.10 nos permite aplicar o Teorema 1.16 ao t-ésimo período de negociação. Em especial, para $t = T$ obtemos uma medida de probabilidade $\tilde{P}_T$ equivalente à $P(\tilde{P}_T \approx P)$, com densidade $\mathrm{d}\tilde{P}_T/\mathrm{d}P$ limitada e tal que:

$$\tilde{\mathbb{E}}_T\left[X_T - X_{T-1}|\mathcal{F}_{T-1}\right] = 0.$$

Agora, suponha que exista uma medida de probabilidade $\tilde{P}_{t+1} \approx P$ com densidade limitada dada por $\mathrm{d}\tilde{P}_{t+1}/\mathrm{d}P$, tal que:

$$\tilde{\mathbb{E}}_{t+1}\left[X_k - X_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1}\right] = 0, \quad \text{para } t+1 \leq k \leq T. \tag{1.11}$$

Como $\tilde{P}_{t+1} \approx P$, temos que as medidas coincidem nos conjuntos de medida nula, portanto, a condição de não arbitragem 1.10 continua válida substituindo P por $\tilde{P}_{t+1}$. Garantimos, então, que não existe oportuinidade de arbitragem a partir do período $t + 1$.

Da mesma forma, se aplicarmos o Teorema 1.16 no t-ésimo período de negociação, obteremos uma medida de probabilidade $\tilde{P}_t$ cuja densidade em relação à $\tilde{P}_{t+1}$ é dada por $Z := \mathrm{d}\tilde{P}_t/\mathrm{d}\tilde{P}_{t+1} > 0$, sendo limitada e $\mathcal{F}_t$-mensurável, tal que:

$$\tilde{\mathbb{E}}_t\left[X_t - X_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}\right] = 0.$$

Como $\tilde{P}_{t+1} \approx P$ e $\tilde{P}_t \approx \tilde{P}_{t+1}$, temos $\tilde{P}_t \approx P$, tal que, a densidade é dada por :

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{P}_t}{\mathrm{d}P} = \frac{\mathrm{d}\tilde{P}_t}{\mathrm{d}\tilde{P}_{t+1}}.\frac{\mathrm{d}\tilde{P}_{t+1}}{\mathrm{d}P},$$

sendo limitada, pois representa o produto de duas outras densidades limitadas.

Além disso, se $t+1 \leqslant k \leqslant T$, pela Proposição 1.1 e pelo fato de Z_t ser $\mathcal{F}_t$-mensurável, temos:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{E}}_t\left[X_k - X_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1}\right] &= \frac{\tilde{\mathbb{E}}_{t+1}\left[\left(X_k - X_{k-1}\right) Z_t|\mathcal{F}_{k-1}\right]}{\tilde{\mathbb{E}}_{t+1}\left[Z_t|\mathcal{F}_{k-1}\right]}\\ &= \tilde{\mathbb{E}}_{t+1}\left[\left(X_k - X_{k-1}\right)|\mathcal{F}_{k-1}\right]\\ &= 0.\end{aligned}$$

Portanto, 1.11 passa a ser válida para $\tilde{P}_t$. Fazendo esse mesmo procedimento, sempre retrocedendo no tempo, atingiremos $P^* := \tilde{P}_1$, a qual, será a medida martingal equivalente requerida, ou seja, será a medida que irá garantir não haver oportunidade de arbitragem para o período $1 \leqslant k \leqslant T$.

□

O Teorema 1.17 é um dos marcos no apreçamento por medidas neutras ao risco.

Iremos agora introduzir novos ativos na economia: os chamados contratos contingentes.

Definição 1.18. *Um Contrato Contingenciado é definido como uma variável aleatória C em $(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$, tal que:*

$$0 \leqslant C < \infty \qquad P\text{-q.c.}.$$

O termo derivativo é comumente utilizado para designar os contratos com valores determinados pelo processo de preço.

Definição 1.19. *Um contrato C será dito um derivativo dos ativos $S^{(0)} \dots S^{(N)}$ se C for mensurável com respeito à σ-álgebra gerada pelo processo de preços $\left(\overline{S}_t\right)_{0\leqslant t\leqslant T}$. Definimos seu valor descontado em relação ao numerário S^0 por:*

$$H := \frac{C}{S_T^0}.$$

Esse novo ativo, da forma como definida em 1.18, representa uma nova fonte de incerteza no mercado, em princípio dissociada das geradas pelos ativos base.

Veremos no decorrer do trabalho que, na verdade, precisaremos garantir que $H \in L^2\left(\Omega, \mathcal{F}_T, P\right)$, pois queremos garantir a existência da média e variância do contrato.

Quando abordarmos o contexto de mercados completos, adiante, veremos que os contratos contingentes serão descritos em função dos ativos base da economia, ou seja:

$$C = f\left(S_T^{(0)}, \dots, S_T^{(N)}\right),$$

sendo $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

Em tal contexto, toda as fontes de incertezas associadas aos contratos serão conhecidas e explicadas pelas incertezas referentes aos ativos negociáveis.

No entanto, vale destacar que a definição 1.18 não está restrita à situação de completude de mercado. A definição abrange qualquer forma de objeto negociável cujo valor futuro envolva o conceito de aleatoriedade.

Ao definir-se o contrato C de uma forma mais geral, estamos considerando, por exemplo, contratos sob índices de tempo em que o valor do ativo, apesar de observável, não é negociado no mercado. Também consideramos, contratos que nem mesmo possuam informação disponível, como os casos em que os ativos apesar de negociáveis e observáveis sigam um modelo de volatilidade estocástica, para os quais, a volatilidade instantânea do ativo é não observável.

Assumindo um modelo livre de oportunidade de arbitragem, isto é, $\mathcal{P} \neq \emptyset$, iremos definir quando um contrato contingente é replicável.

Definição 1.20. *Um contrato contingente C é atingível (replicável, redundante) se existir uma estratégia auto financiada $\overline{\xi}$ para a qual o valor final de um portfólio formado a partir dos ativos $S^{(0)} \dots S^{(N)}$ coincida com C:*

$$C = \overline{\xi}_T \,.\, \overline{S}_T \qquad P\text{-}q.c$$

Logo, um contrato contingente C será atingível, se e somente se, $H = C/S_T^{(0)}$ for da forma:

$$H = \overline{\xi}_T \,.\, \overline{X}_T = V_T = V_0 + \sum_{t=1}^{T} \xi_t \,.\, (X_t - X_{t-1})\,.$$

onde $\overline{\xi} = (\xi^0, \xi)$ é uma estratégia auto financiada com processo de valor V.

Os possíveis valores que um contrato replicável poderá assumir no vencimento é denominado *conjunto dos payoffs admissíveis* e definido como:

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}(\omega) := \{\overline{\xi}.\overline{S}_T(\omega) \;\mid \overline{\xi} \in \mathbb{R}^{N+1}\}, \quad \text{para todo } \omega \in \Omega. \tag{1.12}$$

O Teorema a seguir mostra que sendo o contrato contingente replicável, então, o preço descontado representará um processo integrável em relação à medida martingal equivalente.

Teorema 1.21. *Um contrato contingente descontado H, quando atingível, é integrável em relação a qualquer medida martingal equivalente, isto é:*

$$\mathbb{E}^*[H] < \infty \quad \textit{para toda}\, P^* \in \mathcal{P}.$$

Além disso, para cada $P^* \in \mathcal{P}$ o processo de valor para uma estratégia replicadora satisfaz:

$$V_t = \mathbb{E}^*[H|\mathcal{F}_t] \quad P.q.c \quad t=0,\dots,T.$$

Em particular, V é P^*-martingal, assumindo valores não negativos.

Logo, o preço justo de um contrato contingente em um mercado livre de oportunidade de arbitragem poderá ser calculado a partir das esperanças do processo H sob as medidas martingais equivalentes.

Teorema 1.22. *O conjunto de preços relativo a um contrato contingente descontado H para os quais não exista oportunidade de arbitragem é não vazio e dado por:*

$$\Pi(H) = \{\mathbb{E}^*[H] \,|\, P^* \in \mathcal{P} \;\, e \;\, \mathbb{E}^*[H] < \infty\}\,.$$

Além disso, os limites superior e inferior de $\Pi(H)$ é dado por:

$$\pi_{inf}(H) = \inf_{P^* \in \mathcal{P}} \mathbb{E}^*[H] \quad e \quad \pi_{sup}(H) = \sup_{P^* \in \mathcal{P}} \mathbb{E}^*[H]$$

As demonstrações desses teoremas estão em Föllmer & Schied (2004, p.237 e p.239–240) .

O teorema anterior nos garante que ausência de oportunidade implica na existência de uma medida martingal equivalente, necessária na determinação do preços de H livres de arbitragem.

No entanto, aqui, nos deparamos com outro dilema. Cada agente de mercado possui suas próprias crenças em relação às ocorrências futuras, ou mesmo possuem graus de aversão ao risco distintos. Portanto, esses indivíduos podem discordar do preço referente a um dado contrato H— dentro dos limites do teorema anterior. O Teorema a seguir mostra que tal problema ocorre, de fato, se e somente se H não for replicável.

Teorema 1.23. *Seja H contrato contingente descontado.*

1. *Se H é replicável, então o conjunto $\Pi(H)$ dos preços livres de oportunidade de arbitragem para H consistirá de um único elemento V_0, onde V é o processo de valor para alguma estratégia replicadora de H.*

2. *Se H não for replicável, então $\pi_{inf}(H) < \pi_{sup}(H)$ e*

$$\pi(H) = (\pi_{inf}(H), \pi_{sup}(H)).$$

A demonstração do Teorema está em Föllmer & Schied (2004, p.242–243).

Quando H não é replicável, os limites inferior ($\pi_{\text{inf}}(H)$) e superior ($\pi_{\text{sup}}(H)$) correspondem às estratégias de sub e super replicação, respectivamente. Mais precisamente, pode se mostrar que $\pi_{\text{sup}}(H)$ é o menor preço possível de um portfólio ξ que satisfaz $\overline{\xi} \cdot \overline{S} \geq H$ P-quase certamente (com um resultado análogo para $\pi_{\text{sup}}(H)$).

No modelo desenvolvido por Black e Scholes para chegar a um único preço representativo no mercado adicionou-se a hipótese de completude de mercado.

Definição 1.24. *Um modelo de mercado livre de oportunidade de arbitragem é considerado completo se todo contrato contingente for atingível.*

O Teorema a seguir mostra que, em um mercado completo, existe apenas uma única medida martingal equivalente.

Teorema 1.25. *Um modelo de mercado livre de oportunidade de arbitragem é completo, se e somente se, exista uma única medida martingal equivalente. Neste caso, o número de átomos em $(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ é limitado por $(N+1)^T$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Observe-se que para todo o conjunto $A \in \mathcal{F}$ temos que $\mathbf{1}_A$ é um contrato contigenciado. Como o mercado é completo por hipótese, temos que $\mathbf{1}_A$ é um contrato contigenciado; em particular é replicável.Pelo teorema 1.23 o preço de $\mathbf{1}_A$ é único:

$$P^*[A] = \mathbb{E}^*[\mathbf{1}_A] = \pi_(\mathbf{1}_A).$$

Logo existe uma única medida martingal equivalente, i.e., $|\mathcal{P}| = 1$.

($\Leftarrow$) Se $\mathcal{P} = \{P^*\}$, então seja H um contrato limitado $P^* - q.c.$; em particular, temos $\mathbb{E}^*[H] < \infty$. Neste caso, H tem um único preço livre de arbitragem e, pelo teorema 1.23, C é replicável. Se $T = 1$ e se o mercado não for redundante, isso quer dizer que temos $H = \overline{\xi} \cdot \overline{S}$ para algum $\overline{\xi} \in \mathbb{R}^{N+2}$. Desta forma, temos

$$H \in \mathcal{V} := \left\{\overline{\xi} \in \mathbb{R}^{N+2} \,|\, \overline{\xi} \cdot \overline{S} = C\right\}.$$

Por outro lado, como H é uma função limitada temos que $H \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_1, P)$. Concluímos então que

$$\dim L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_1, P) \leq \dim \mathcal{V} \leq N + 1.$$

Suponha que a limitação vale para $T - 1$. Então, podemos escrever

$$H = V_{T-1} + \xi_T \cdot (X_T - X_{T-1}),$$

com V_{T-1} e ξ_T sendo $\mathcal{F}_{T-1}$-mensuráveis e, portanto, constantes em cada átomo A.

Desta forma, segue-se que $\dim L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_T, P[\cdot|A]) < N+1$. Aplicando a hipótese de indução, obtemos o resultado.

□

Repare que pela parte final do Teorema, garante-se que o número de fontes de incertezas no mercado serão proporcionais ao número de ativos negociáveis. Se estivessemos em um modelo de um único período, o nosso modelo teria exatamente $N + 1$ possíveis cenários.

1.3 Mercado Incompleto

Nesta seção, procuraremos explicar os desafios impostos por mercados incompletos. Veremos também algumas maneiras que foram propostas na literatura para lidar com incompletude.

Vimos que, em um mercado completo, todo contrato contingente C será replicável e seu preço $\pi(C)$ será determinado de forma única pelo funcional linear:

$$\pi(C) = \mathbb{E}_Q[H],$$

onde Q representa a medida martingal equivalente à distribuição histórica P e H o contrato contingente (C) descontado pela taxa livre de risco.

No teorema 1.23 vimos que, se H não for replicável o preço livre de oportunidade de arbitragem irá residir em um intervalo. Estaremos, assim, diante do chamados mercados incompletos.

Portanto, mercados incompletos são contextos em que nem todo contrado transacionado pode ser replicado pelos ativos-base da economia, mesmo sob a hipótese de não haver oportunidades de arbitragem.

Observe-se que um contrato é replicável se todas as fontes de incerteza relativas a este ativo serão conhecidas e explicadas pela σ-álgebra do espaço de medidas $\big(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{0\leqslant t\leqslant T}, P\big)$. Ou seja, todas as fontes de incerteza serão observáveis. No modelo de Black e Scholes, isto significa dizer que podemos construir um *hedge perfeito* para H.

Já nos mercados incompletos existem uma ou mais componentes de risco intrínsecas ao contrato e a informação disponível não será suficiente para explicar essas novas fontes de incertezas, ou seja, não conseguiremos encontrar uma estratégia de *hedge* que as eliminem completamente.

Um exemplo básico de mercados incompletos pode ser dado supondo uma opção europeia. Isto é, um contrato que dá ao comprador (vendedor) o direito de comprar (vender) um determinado ativo (S_T) em uma data futura T preestabelecida, por um preço K, denominado *preço de exercício*. Neste caso o valor futuro ou *payoff* do contrato será descrito da seguinte forma:

1. Opção de Compra: $H_T = (S_T - K)^+$.

2. Opção de Venda: $H_T = (K - S_T)^+$.

Nos casos em que o ativo S não seja negociável, não conseguiremos replicar o *payoff*. A aleatoriedade no preço futuro do ativo não poderá ser determinada através de uma única MME.

Porém, a incompletude de mercado envolve conceitos mais amplos, como os casos em que o mercado possui custos de transação. Nestes casos o ativo por si só não será suficiente para montar uma posição totalmente protegida.

Há, também, os casos de insuficiência de liquidez, muito comuns nos mercados de mercadorias (commodities). Quando o agente econômico monta sua estratégia de *hedge*, este supõe que poderá refazer seu posicionamento a qualquer momento (no nosso caso o tempo é discreto). Nos casos de ativos ilíquidos isso não é realista, o que faz com que essas situações sejam tratadas como exemplos de mercados incompletos.

Outros exemplos podem ser elencados, como opções sobe índices de clima, neste caso especial, o índice pode até mesmo ser observável, estaria na σ-álgebra. No entanto, se o índice não for negociável não poderá ser usado como proteção.

Nessas situações, uma alternativa comum é a utilização de um ativo correlacionado, que seja negociável, no lugar do ativo objeto e proceder o apreçamento deste outro ativo por não arbitragem via BSM ou MME.

Em Hubalek & Schachermayer (2001), critica-se esse procedimento. Para os autores, a utilização do argumento de não arbitragem não é suficiente para tratar os casos em que os ativos não sejam negociáveis, mesmo que exista outro ativo altamente correlacionado — com módulo da correlação menor do que um.

Neste mesmo trabalho é explorado o apreçamento de uma opção de real sobre uma *commodity* de petróleo. Em opções de reais, os ativos de interesse, são em geral não negociáveis. Os autores argumentam que um apreçamento mais apropriado seria obtido a partir da resolução de um problema de minimização da variância.

Isso leva, naturalmente, a se escolher uma dentre as medidas martingais disponíveis: a medida de variância mínima. Esta medida está também relacionada com o conceito de medida martingal mínima.

Definição 1.26. *Seja $\mathfrak{M}$ o conjunto representativo de todas as medidas martingais. Uma medida $\overline{Q}$ será denominada medida martingal de variância mínima se corresponder à minimização da variância referente à derivada de Radon-Nikodym* $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}P$*:*

$$\overline{Q} : \mathrm{Var}\left[\frac{\mathrm{d}\overline{Q}}{\mathrm{d}P}\right] = \min_{Q\in\mathfrak{M}} \mathrm{Var}\left[\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\right].$$

No entanto, Frittelli (1995) e Ansel & Stricker (1992) salientam que nem sempre poderemos garantir que os conjuntos $\mathfrak{M}$ e $\mathcal{P}$ coincidam. Ou seja, a medida martingal de variância mínima nem sempre será equivalente à medida histórica P.

Exemplo 1.1. *Vamos exemplificar este fato, seguindo Frittelli (1995).*

Suponha um modelo discreto de um período, com a seguinte estrutura no espaço $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ e $\omega_i \in \Omega$, $r = 1$ e $x \in \mathbb{R}$.

O valor do ativo no tempo $t = 0$ será dado por $S_0 = 100$ e em $t = 1$:

$$\begin{cases} S_1(\omega_1) = 100\left(1 + \frac{x+1}{100}\right) & \textit{com } p_1 = \frac{1}{4}, \\ S_1(\omega_2) = 100\left(1 + \frac{x}{100}\right) & \textit{com } p_2 = \frac{1}{2}, \\ S_1(\omega_3) = 100\left(1 + \frac{x-1}{100}\right) & \textit{com } p_3 = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Iremos definir o vetor a, como:

$$a = a(\omega_i) := \begin{bmatrix} 1 + \frac{x+1}{100} \\ \\ 1 + \frac{x}{100} \\ \\ 1 + \frac{x-1}{100} \end{bmatrix}$$

de forma que $S_1 = S_0 \;.\; a$.

Para garantirmos que o conjunto das medidas martingais equivalentes seja tal que $\mathfrak{M} \neq \emptyset$, *devemos ter:*

$$\mathbb{E}_{\overline{P}}[S_1] = S_0,$$

para $\overline{P} \in \mathfrak{M}$.

Portanto, com um pouco de algebrismos, podemos garantir que a medida $\overline{P}$ *será martingal se:*

$$\mathfrak{M} \neq \emptyset \Leftrightarrow -1 < x < 1. \tag{1.13}$$

Para este exemplo, Frittelli (1995), calcula a medida de variância mínima como:

$$\frac{\mathrm{d}\overline{Q}}{\mathrm{d}P} = \mathbf{1} + \frac{\mu - r}{\sigma^2}(\mu\mathbf{1} - a) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2x \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1.14}$$

Onde μ *e* σ^2 *serão dados por:*

$$\begin{aligned} \mu := \mathbb{E}_P[a] &= \sum_{i=1}^{3} p_i . a(\omega_i) \\ &= p_1 \left(1 + \frac{x+1}{100}\right) + p_2 \left(1 + \frac{x}{100}\right) + p_3 \left(1 + \frac{x-1}{100}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{3} p_i + p_1 \left(\frac{x+1}{100}\right) + p_2 \left(\frac{x}{100}\right) + p_3 \left(\frac{x-1}{100}\right) \end{aligned}$$

substituindo as probabilidades históricas:

$$= 1 + x\ 10^{-2}.$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &:= \mathbb{E}_P\left[a^2\right] - \mathbb{E}_P^2[a] \\ &= \sum_{i=1}^{3} p_i \;.\; a(\omega_i)^2 - \mu^2 = \frac{1}{2}10^{-4}. \end{aligned}$$

Substituindo μ *e* σ^2 *em 1.14:*

$$\frac{\mathrm{d}\overline{Q}}{\mathrm{d}P} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2x \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para que $\overline{Q}$ seja martingal, x deve satisfazer 1.13. Tomando, por exemplo, $x = \frac{1}{2}$, teremos:

$$\begin{bmatrix} \overline{Q}(\omega_1) \\ \\ \overline{Q}(\omega_2) \\ \\ \overline{Q}(\omega_3) \end{bmatrix} = \frac{\mathrm{d}\overline{Q}}{\mathrm{d}P} \cdot \begin{bmatrix} P(\omega_1) \\ \\ P(\omega_2) \\ \\ P(\omega_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ \frac{1}{2} \\ \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

A medida $\overline{Q}$ só será equivalente à P se as duas concordarem em todos os conjuntos de medida nula. No entanto, verificamos que $\overline{Q}(\omega_1) = 0$ e $P(\omega_1) \neq 0$, portanto, P e $\overline{Q}$ não são equivalentes.

O fato de buscarmos uma medida equivalente à medida objetiva P reside no fato de pressupormos o equilíbrio de mercado. Se o mercado está em equilíbrio, a medida histórica será uma boa fonte de informação. Portanto, ao trocarmos de medida, queremos que esta nova distribuição preserve ao máximo a estrutura de P.

Outro critério utilizado na escolha de uma medida martingal equivalente no conjunto $\mathcal{P}$, de forma a preservar ao máximo a estrutura da medida original, é a caracterização por meio da entropia relativa $H(\cdot|P)$ conduzindo ao conceito de *medida martingal de entropia relativa mínima.*

Conforme destacado em Frittelli (2000), a entropia relativa nos fornece uma forma de comparar a similaridade ou diferença entre duas medidas de probabilidade. De forma não rigorosa podemos pensar na entropia relativa como a *"distância"* entre duas medidas P e Q.

Definição 1.27. *Define-se a entropia relativa de uma medida de probabilidade Q com respeito a medida P, como:*

$$H(Q|P) := \begin{cases} \mathbb{E}\left[\frac{dQ}{dP}\log\frac{dQ}{dP}\right] & \text{se } Q \ll P \\ \\ +\infty & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{1.15}$$

A entropia relativa será sempre positiva, assumindo o valor zero quando as distribuições forem iguais e assumindo valores crescentes a medida que as distribuições divergem.

De fato, como a função $f(x) = x\log x$ é estritamente convexa podemos utilizar a *desigualdade de Jensen*, o que leva à:

$$H(Q|P) = \mathbb{E}\left[\frac{dQ}{dP}\log\frac{dQ}{dP}\right] \geqslant \mathbb{E}\left[\frac{dQ}{dP}\right]\log\left[\mathbb{E}\left[\frac{dQ}{dP}\right]\right] = 0$$

pois $\mathbb{E}\left[\frac{dQ}{dP}\right] = 1$.

Além disso, $H(Q|P) = 0$ se, e somente se, $\frac{dQ}{dP} = 1$ P-q.c., ou seja, quando $Q = P$.

Como estamos interessados em manter ao máximo a estrutura da medida objetiva P, queremos minimizar a "distância"entre tais medidas, levando à definição de medida martingal equivalente de entropia mínima.

Definição 1.28. *A medida de probabilidade $Q_0 \in \mathcal{P}$ será dita Medida Martingal Equivalente de Entropia Mínima se satisfizer:*

$$H(Q_0|P) = \min_{Q\in\mathcal{P}} H(Q|P) = \min_{Q\in\mathcal{P}} \mathbb{E}\left[\frac{dQ}{dP}\log\left(\frac{dQ}{dP}\right)\right].$$

A partir dos resultados encontrados em (Frittelli 2000, Teoremas 2.1 e 2.2), podemos enunciar os seguintes Teoremas.

Teorema 1.29. *Seja $\mathfrak{X}$ o conjunto de processos estocásticos $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ adaptados com valores em $\mathbb{R}$ e o conjunto $\mathcal{M}$ representando o conjunto das medidas martingais absolutamente contínuas com respeito à P. Se $H(\mathcal{M}, P) < +\infty$ e se os processos em $\mathfrak{X}$ forem limitados, então a medida martingal de entropia mínima existirá e será única.*

Teorema 1.30. *Seja $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}$ o conjunto das medidas martingais equivalentes à P e Q_0 medida martingal de entropia mínima. Caso exista $Q_1 \in \mathcal{M}_{\mathcal{E}}$ - medida de probabilidade tal que $H(Q_1, P) < +\infty$, então Q_0 será equivalente à P.*

Uma versão mais simplificada desses Teoremas foi mostrada em Frittelli (1995), a qual é exemplificada abaixo.

Exemplo 1.2. *Conforme exposto em Frittelli (1995), para determinarmos o preço de um contrato C definido em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, precisaremos determinar a medida $Q = (q_1, \ldots, q_n)$, a qual, será a solução do problema de minimização descrito na definição 1.28, portanto:*

$$\min_{q\in\mathbb{R}^n, q\geqslant 0} \sum_{i=1}^{n} q_i \ln\left(\frac{q_i}{p_i}\right) \quad s.a \quad q.\mathbf{1} = 1 \ e \ q.a = r.$$

A solução do problema de otimização irá determinar as componentes do vetor de medida Q, como:

$$q_j = \frac{p_j \ \mathrm{e}^{-\gamma a_j}}{\sum_{i=1}^{n} p_i \ \mathrm{e}^{-\gamma a_i}} = \frac{p_j \ \mathrm{e}^{-\gamma a_j}}{\mathbb{E}_P\left[\mathrm{e}^{-\gamma a}\right]}.$$

Sendo γ, a solução de:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \ a_i \ e^{-\gamma a_i} = r \sum_{i=1}^{n} p_i \ \mathrm{e}^{-\gamma a_i},$$

e $j = 1, \ldots, n$.

portanto, o preço de C, ou seja, de um contrato contingente, será dado pelo apreçamento linear:

$$\pi(C) = \mathbb{E}_Q\left[\frac{1}{r} \ C\right] = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{r} \ \frac{p_j \ \mathrm{e}^{-\gamma a_j}}{\mathbb{E}_P\left[\mathrm{e}^{-\gamma a}\right]} \ C(\omega_j).$$

Outra proposta de apreçamento em mercados incompletos é a de Davis (1997). Ele incorpora ao apreçamento de um contrato a função de utilidade do investidor $U : (0, \infty) \to \mathbb{R}$. Esta função deve satisfazer as propriedades usuais: estritamente crescente; estritamente côncava; de classe C^2; com $U' > 0$ e $\lim_{x\to 0} U'(x) = \infty$, bem como, $\lim_{x\to\infty} U'(x) = 0$.

Assumindo que a riqueza inicial do agente econômico seja dada por $x > 0$ e o processo de valor $\left(V_t\left(x, \overline{\xi}\right)\right)_{1\leqslant t\leqslant T}$ como definido em 1.11, com $\overline{\xi} \in \mathcal{V}$ representando as estratégias admissíveis, então, a utilidade máxima que esse agente poderá alcançar negociando no mercado é dada por:

$$W(x) := \sup_{\xi\in\mathcal{V}} \mathbb{E}\left[U\left(V_T\left(x, \overline{\xi}\right)\right)\right]$$

Introduzindo o contrato $C \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ no portfólio do investidor, o preço p de q unidades do contrato contingente deverá obedecer a seguinte relação:

$$\sup_{\xi\in\mathcal{V}} \mathbb{E}\left[U\left(V_T\left(x - pq, \overline{\xi}\right) + qC\right)\right] = W(x).$$

Ou seja, o preço justo será atingido quando a demanda pelo contrato for nula ($q = 0$).

Seguindo Frittelli (1995), vamos exemplificar a metodologia de Davis (1997) .

Exemplo 1.3. *Seja um modelo de um período, composto de dois ativos* $\left(S_t^{(0)}, S_t^{(1)}\right)_{t\in\{0,1\}}$ *e um contrato contingente* $(C_t)_{t\in\{0,1\}}$*. Suponhamos que agente irá investir uma riqueza inicial* x_0 *em cada um dos ativos seguindo uma estratégia admissível* $\overline{\xi} = \left(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \xi^{(3)}\right)$*. Em* $t = 0$*, teremos:*

$$x_0 = \xi^{(1)}\ S_0^{(0)} + \xi^{(2)}\ S_0^{(1)} + \xi^{(3)}\ C_0$$

No tempo final $t = 1$*, o valor do portfólio será dado pela variável aleatória* x_1 *e será descrito como:*

$$x_1 = \xi^{(2)}\ S_1^{(1)} + \xi^{(3)}\ C_1 + \left(x_0 - \xi^{(2)}\ S_0^{(1)} - \xi^{(3)}\ C_0\right)\ S_1^{(0)}$$

Logo, o investidor estará interessado em maximizar a esperança da sua riqueza final, ou seja:

$$\max_{\xi^{(2)},\xi^{(3)}\in\mathbb{R}} \mathbb{E}_P\left[U\left(x_1\right)\right] =$$

$$= \max_{\xi^{(2)},\xi^{(3)}\in\mathbb{R}} \mathbb{E}_P\left[U\left(\xi^{(2)}\ \left(S_1^{(1)} - S_0^{(1)}S_1^{(0)}\right) + \xi^{(3)}\left(C_1 - C_0 S_1^{(0)}\right) + x_0 S_1^{(0)}\right)\right]$$

Tomando as condições de primeira ordem do problema:

$$\begin{cases} \mathbb{E}\left[\left(S_1^{(1)} - S_0^{(1)}S_1^{(0)}\right)U'\left(x_1\right)\right] = 0, \\ \\ \mathbb{E}\left[\left(C_1 - C_0 S_1^{(0)}\right)U'\left(x_1\right)\right] = 0. \end{cases}$$

O preço de Davis será dado tomando $\xi^{(3)} = 0$*, ou seja, queremos que a taxa marginal de substituição entre a utilidade do processo* V_T *e* C_T *tenha efeito nulo. Isso é equivalente à avaliarmos a derivada* $U'\left(x_1\right)$ *tomando* $\xi^{(3)} = 0$*.*

Logo, com $\xi^{(3)} = 0$ *o processo de riqueza ótimo do investidor será dado por:*

$$x_1^*\left(S_1^{(1)}, \xi^{(2)}\right) = \xi^{(2)}\left(S_1^{(1)} - S_0^{(1)}S_1^{(0)}\right) + x_0 S_1^{(0)}$$

Substituindo x_1^* *nas condições de primeira ordem e levando em conta a linearidade da esperança, temos:*

$$\begin{cases} \mathbb{E}\left[S_1^{(1)}U'\left(x_1^*\right)\right] = S_0^{(1)}S_1^{(0)}\mathbb{E}\left[U'\left(x_1^*\right)\right], \\ \\ \mathbb{E}\left[C_1 U'\left(x_1^*\right)\right] = C_0 S_1^{(0)}\mathbb{E}\left[U'\left(x_1^*\right)\right]. \end{cases} \tag{1.16}$$

O preço do contrato será dado como a esperança do preço descontado pelo ativo livre de risco, portanto martingal:

$$\begin{cases} \mathbb{E}\left[\left(\frac{S_1^{(1)}}{S_1^{(0)}}\right)\frac{U'\left(x_1^*\right)}{\mathbb{E}\left[U'\left(x_1^*\right)\right]}\right] = S_0^{(1)}, \\ \\ \mathbb{E}\left[\left(\frac{C_1}{S_1^{(0)}}\right)\frac{U'\left(x_1^*\right)}{\mathbb{E}\left[U'\left(x_1^*\right)\right]}\right] = C_0. \end{cases}$$

Donde conclui-se que o ***critério de utilidade máxima esperada*** *nos fornece a Medida de utilidade martingal equivalente a P:*

$$Q_U = \frac{\mathrm{d}Q_U}{\mathrm{d}P} = \frac{U'(x_1^*)}{\mathbb{E}[U'(x_1^*)]}.$$

Um fato interessante é a equivalência entre a medida martingal equivalente e a medida de utilidade martingal, nos casos em que a função de utilidade seja a exponencial:

$$U(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}.$$

De fato, sendo a derivada da função é: $U'(x) = \mathrm{e}^{-x}$, podemos escrever para x_1^*,

$$U'(x_1^*) = \mathrm{e}^{-\xi^{(2)}\ S_1^{(1)}} \left[\mathrm{e}^{S_1^{(0)}\left(\xi^{(2)}\ S_0^{(1)} - x_0\right)} \right].$$

Além disso, do exemplo 1.1, temos que $a = \frac{S_1^{(1)}}{S_0^{(1)}}$, tomando $\gamma = \xi^{(2)}\ S_0^{(1)}$, teremos:

Portanto,

$$\frac{\mathrm{d}Q_U}{\mathrm{d}P} = \frac{U'(x_1^*)}{\mathbb{E}[U'(x_1^*)]}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{-\xi^{(2)}\ S_1^{(1)}}}{\mathbb{E}_P\left[\mathrm{e}^{-\xi^{(2)}\ S_1^{(1)}}\right]}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{-\gamma a}}{\mathbb{E}_P[\mathrm{e}^{-\gamma a}]}$$

Esta é a mesma medida obtida na discussão sobre medidas martingais equivalentes de entropia mínima no exemplo 1.2.

1.4 Próximos Capítulos

Neste trabalho, o intuito é estudar a utilização do apreçamento por indiferença em mercados incompletos. Esse tipo de apreçamento, como no caso do preço de Davis (1997), leva em conta as preferências de risco do investidor através da sua função de utilidade. De forma sucinta, o apreçamento por indiferença pode ser entendido da seguinte forma: Seja $V(x, k)$ a utilidade esperada de um investidor com portfólio que contenha k unidades do contrato contingente. O preço de venda utilizando indiferença de uma unidade deste contrato, ν_v é a única solução da seguinte equação:

$$V(x, 0) = V(x + \nu_v, -1).$$

Enquanto que o preço de compra ν_c satisfaz à equação:

$$V(x, 0) = V(x - \nu_c, 1).$$

Estas equações acima expressam a ideia intuitiva de que $\nu_{c/v}$ é o valor do contrato que torna o investidor indiferente a ter este contrato em seu portfólio, seja comprado ou vendido.

Os preços de compra e vendem satisfazem a relação $\nu_v \geq \nu_c$ e para contratos contingentes não replicáveis a desigualdade é em geral estrita.

Se denotarmos por ν_{nr} o preço neutro ao risco deste mesmo contrato vale a relação:

$$\nu_v \geq \nu_{nr} \geq \nu_c.$$

Se o contrato for replicável a relação acima vale com igualdade enquanto que no caso não replicável as desigualdades são, em geral, estritas.

Além disso, diferentemente do apreçamento neutro ao risco, o apreçamento por indiferença nos levará a um preço não linear.

Nesse intuito iremos apresentar no capitulo 2 uma breve introdução à teoria de preferências e utilidade esperada. No capítulo 3, apresentaremos e desenvolveremos o conceito sobre apreçamento por indiferença. Com esta base apresentaremos então no capítulo 4 um método de apreçamento por indiferença.

Capítulo 2

Introdução a Preferências

2.1 Motivação

Vimos no capítulo anterior que em mercados incompletos os argumentos de não arbitragem não são suficientes para determinarmos os preços dos contratos, quando estes não são perfeitamente replicáveis.

Algumas alternativas foram apresentadas para o apreçamento em mercados incompletos, dentre as quais pudemos perceber a conexão entre a medida de entropia relativa com a maximização da esperança da função de utilidade do agente.

Isso sugere que, em mercados incompletos, os preços podem ser definidos de forma mais fundamental através da utilização da função de utilidade do agente, levando ao apreçamento por indiferença. Considerando-se portanto, as preferências e aversão ao risco do indivíduo.

Para apresentarmos o apreçamento por indiferença iniciaremos expondo algumas noções preliminares necessárias para o entendimento do conceito.

Neste capítulo continuaremos seguindo em grande parte do tempo o texto de Föllmer & Schied (2004).

2.2 Preferências e suas Propriedades

Se um investidor possui diversas alternativas de investimentos, as quais formalmente são elencadas como elementos x de um conjunto $\mathcal{X} \neq \emptyset$, podemos representar sua preferência dentre duas opções distintas, por exemplo x e y, através de uma relação de ordem a partir das definições a seguir:

Definição 2.1. *Uma ordem de preferência em um conjunto $\mathcal{X}$ é definida como uma relação binária, representada pelo símbolo $\succ$, com as seguintes propriedades:*

- *Assimetria:*
  Se $x \succ y$, então $y \not\succ x$.

- *Transitividade Negativa*

Se $x \succ y$ *e* $z \in \mathcal{X}$*, então* $x \succ z$ *e/ou* $z \succ y$*.*

Definição 2.2. *Uma ordem de preferências é denominada uma preferência fraca, quando as seguintes relações são verificadas:*

- *Quando não há uma preferência clara entre as duas possibilidades de escolha,* $\succsim$*:*

  $$x \succsim y \quad \Leftrightarrow \quad y \nsucc x.$$

- *Quando o agente é indiferente entre as alternativas,* $\sim$*:*

  $$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad x \succsim y \quad e \quad y \succsim x$$

Das definições acima pode-se concluir facilmente as seguintes propriedades:

1. *Completude:*

   Para todo x e $y \in \mathcal{X} \Rightarrow y \succsim x$ e/ou $x \succsim y$.

2. *Transitividade:*

   Se $x \succsim y$ e $y \succsim z \Rightarrow x \succsim z$.

Para o desenvolvimento do conceito de utilidade esperada a partir das relações de preferência sob o conjunto $\mathcal{X}$ estaremos preocupados em determinar uma representação numérica sob esse conjunto através da utilização de algum funcional que aqui denotaremos U.

Definição 2.3. *Uma representação numérica de uma ordem de preferência* $\succ$ *será uma função* $U : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$*, tal que:*

$$y \succ x \Leftrightarrow U(y) > U(x).$$

ou equivalentemente,

$$y \succsim x \Leftrightarrow U(y) \geqslant U(x).$$

A definição a seguir irá garantir que dados dois elementos de um conjunto de alternativas apresentadas a um indivíduo, para os quais, exista uma ordem de preferência, poderemos garantir a existência de uma infinidade de elementos comparáveis entre eles.

Definição 2.4. *Sejam* $\succ$ *uma relação de preferência em* χ *e* $\mathcal{Z}$ *subconjunto de* $\mathcal{X}$*. Diremos que* $\mathcal{Z}$ *é denso com respeito à ordem* $\succ$*, se para todo* $x, y \in \mathcal{X}$ *satisfazendo* $x \succ y$*, existe* $z \in \mathcal{Z}$ *tal que* $x \succsim z \succsim y$*.*

Nem sempre uma relação de preferência $\succ$ tem uma representação numérica U. O teorema a seguir dá uma condição necessária e suficiente para que uma relação de preferência tenha tal representação:

Teorema 2.5. *Para a existência de uma representação numérica de uma relação de preferência $\succ$ é necessário e suficiente que exista um subconjunto $\mathcal{Z}$ de $\mathcal{X}$ que seja enumerável e denso com respeito à ordem $\succ$.*

Demonstração.

($\Leftarrow$) Suponha, primeiramente, que exista um subconjunto $\mathcal{Z}$ de $\mathcal{X}$ enumerável e denso em relação a ordem $\succ$.

Para $x \in \mathcal{X}$, define-se os seguintes conjuntos:

$$\overline{\mathcal{Z}}(x) := \{z \in \mathcal{Z} \mid z \succ x\}$$

e

$$\underline{\mathcal{Z}}(x) := \{z \in \mathcal{Z} \mid x \succ z\}.$$

A relação de preferência $x \succsim y$ implica em $\overline{\mathcal{Z}}(x) \subseteq \overline{\mathcal{Z}}(y)$ e $\underline{\mathcal{Z}}(y) \subseteq \underline{\mathcal{Z}}(x)$. Se a relação de preferência estrita $x \succ y$ é válida, então, pelo menos uma das inclusões será estrita.
De fato, como $\mathcal{Z}$ é denso em relação a ordem, existe $z \in \mathcal{Z}$ com $x \succsim z \succsim y$, portanto, pelo menos uma das seguintes relações será válida: $x \succ z \succsim y$ ou $x \succsim z \succ y$.
No primeiro caso, $z \in \underline{\mathcal{Z}}(x) \setminus \underline{\mathcal{Z}}(y)$, enquanto que no segundo caso, $z \in \overline{\mathcal{Z}}(y) \setminus \overline{\mathcal{Z}}(x)$. Seja, agora, uma distribuição de probabilidade μ em $\mathcal{Z}$ estritamente positiva tal que:

$$U(x) := \sum_{z \in \underline{\mathcal{Z}}(x)} \mu(z) - \sum_{z \in \overline{\mathcal{Z}}(x)} \mu(z)$$

Como uma das inclusões, acima descritas, é estrita tem-se claramente que:

$$U(x) > U(u) \Leftrightarrow x \succ y$$

Portanto, U é uma representação numérica da relação de preferência.

($\Rightarrow$) Considere U uma representação numérica da preferência, conforme definida em 2.3. Tomando o conjunto enumerável $\mathcal{J}$, tal que:

$$\mathcal{J} := \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{Q}, a < b, U^{-1}([a, b]) \neq \emptyset\}$$

Para todo intervalo $I \in \mathcal{J}$, podemos escolher um $z_I \in \mathcal{X}$, tal que, $U(z_I) \in I$, com isso, define-se o conjunto enumerável:

$$A := \{z_I \mid I \in \mathcal{J}\}$$

Repara-se que para o conjunto A, acima definido, não se pode garantir que dados $x, y \in \mathcal{X}$ em que $U(x) < U(y)$, exista $z \in \mathcal{X}$ com $U(x) < U(z) < U(y)$. Na verdade, tal fato, apenas seria verdade se $U(z) = U(x)$ ou $U(z) = U(y)$. Portanto, não satisfazendo as condições para que, o conjunto A, seja por si só denso com respeito à ordem $\succ$.
Com o intuito de construir tal conjunto, tomemos, agora, o conjunto C de todos os pares (x, y) tal que não exista $z \in A$ com $y \succ z \succ x$:

$$C := \{(x, y) \mid x, y \in \mathcal{X} \setminus A,\ y \succ x \text{ e } \nexists z \in A \text{ com } y \succ z \succ x\}$$

Nota-se que o fato de $(x, y) \in C$ implica que não pode existir nenhum $z \in \mathcal{X}$ tal que $y \succ z \succ x$, caso contrário, existiria $a, b \in \mathbb{Q}$, tais que:

$$U(x) < a < U(z) < b < U(y),$$

e, portanto, $I := [a, b]$ pertenceria à $\mathcal{J}$ e o correspondente z_I seria um elemento de A com $y \succ z_I \succ x$, o que contradiz o fato de $(x, y) \in C$.
Logo, segue que os intervalos $(U(x), U(y))$ com $(x, y) \in C$ são disjuntos e não vazios. Portanto, apenas um número enumerável de conjuntos desse tipo pode existir.
Para cada um desses intervalos, os quais denominaremos por J, tomemos um único par $(x^J, y^J) \in C$ de forma que $U(x^J)$ e $U(y^J)$ sejam os extremos de J. Denotando o conjunto enumerável B de todos os elementos x^J e y^J, temos que: $\mathcal{Z} := A \cup B$ é o conjunto denso com respeito à ordem de $\mathcal{X}$.
De fato, se $x, y \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{Z}$ com $y \succ x$, então existe algum $z \in A$, tal que $y \succ z \succ x$ ou $(x, y) \in C$. No segundo caso, existirá algum $z \in B$ com $U(y) = U(z) > U(x)$ e, consequentemente, $y \succsim z \succ x$. $\square$

Vamos agora introduzir a noção de preferência contínua. Com este objetivo, vamos relembrar alguns conceitos de topologia. O espaço (X, τ) será um espaço topológico, quando o conjunto τ for um subconjunto do conjunto das partes de X satisfazendo as propriedades dos abertos:

1. $\emptyset, X \in \tau$;
2. $A_1, A_2 \in \tau \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau$;
3. $(A_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{Z}^+}$, com $A_\lambda \in \tau \Rightarrow \cup_{\lambda \in \mathbb{Z}^+} A_\lambda \in \tau$.

Além disso, um espaço topológico (X, τ) será dito conexo quando não existirem A_1 e A_2 abertos, disjuntos e tais que $A_1 \cup A_2 = X$.

Definição 2.6. *Dado um espaço topológico (X, τ) e $Z \subset X$, dizemos que Z é denso em X, se $\forall\, y \in X - Z$ temos que todo aberto que contém y, contém também algum ponto de Z. Dizemos ainda que X é separável, se possui um subconjunto enumerável denso.*

Definição 2.7. *Seja $\mathcal{X}$ um espaço topológico. Uma relação de preferência $\succ$ é dita contínua se para todo $x \in \mathcal{X}$:*

$$\overline{\mathcal{B}}\,(x) := \{y \in \mathcal{X} \mid y \succ x\} \quad e \quad \underline{\mathcal{B}}\,(x) := \{y \in \mathcal{X} \mid x \succ y\}$$

forem subconjuntos abertos de $\mathcal{X}$.

Proposição 2.1. *Seja $\mathcal{X}$ um espaço topológico conexo com uma relação de preferência contínua $\succ$. Então todo subconjunto $\mathcal{Z}$ que seja denso em $\mathcal{X}$ será denso com respeito à ordem $\succ$ em $\mathcal{X}$. Em particular, existirá uma representação numérica de $\succ$ sempre que $\mathcal{X}$ for separável.*

Demonstração. Sejam $x, y \in \mathcal{X}$ com $y \succ x$.

Temos que mostrar que $\exists z \in \mathcal{Z}$, tal que, $y \succ z \succ x$.

De fato, pela definição 2.7, temos que $y \in \overline{\mathcal{B}}\,(x)$ e $x \in \underline{\mathcal{B}}\,(y)$.

Pela propriedade de transitividade negativa da relação de preferência, segue que: $\mathcal{X} = \overline{\mathcal{B}}\,(x) \cup \underline{\mathcal{B}}\,(y)$.

Como $\mathcal{X}$ é conexo, então:

$$\overline{\mathcal{B}}\,(x) \cap \underline{\mathcal{B}}\,(y) \neq \emptyset$$

Sendo o subconjunto $\mathcal{Z}$ denso, então $\exists z \in \mathcal{Z}$ tal que: $z \in \overline{\mathcal{B}}\,(x) \cap \underline{\mathcal{B}}\,(y) \neq \emptyset$, satisfazendo $y \succ z \succ x$.
Portanto, $\mathcal{Z}$ é denso com respeito à ordem $\succ$ em $\mathcal{X}$.

Além disso, se $\mathcal{X}$ for separável, então, existe um subconjunto $\mathcal{Z}$ denso e enumerável de $\mathcal{X}$. Tal conjunto, pelo o acima mostrado também será denso com respeito à ordem $\succ$ em $\mathcal{X}$. Portanto, pelo Teorema 2.5 existirá uma representação numérica de $\succ$.

□

Embora a proposição 2.1 dê uma condição suficiente para a existência de uma representação numérica de uma preferência contínua, esta condição nem sempre é facilmente verificável. O teorema a seguir nos diz, essencialmente, que se tivermos uma representação contínua em um subconjunto denso, então teremos uma representação numérica em todo o conjunto. Para isso precisamos introduzir a noção de espaço métrico.

Definição 2.8. *O par (X, d) é um espaço métrico, se $d : X \times X \to \mathbb{R}$ satisfizer as seguintes propriedades:*

1. $d(x, y) \geq 0$;
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
3. $d(x, y) = d(y, x)$;
4. $d(z, x) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Teorema 2.9. *Seja $\mathcal{X}$ um espaço métrico conexo com uma relação de preferência contínua $\succ$ e seja $U : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se a restrição de U a um subconjunto $\mathcal{Z}$, denso em $\mathcal{X}$, é uma representação numérica da restrição de $\succ$ a $\mathcal{Z}$, então U é uma representação numérica (contínua) de $\succ$ sobre $\mathcal{X}$.*

Demonstração. Precisamos mostrar que $y \succ x$ se, e somente se, $U(y) > U(x)$.

(⇒) Tome $x, y \in \mathcal{X}$ com $y \succ x$. Como na demostração da Proposição 2.1, seja $z_0 \in \mathcal{Z}$ tal que $y \succ z_0 \succ x$. O mesmo argumento nos dá $z_0' \in \mathcal{Z}$ cp, $z_0 \succ z_0' \succ x$. Tome agora duas subsequências (z_n) e (z_n') tais que $z_n \to y$ e $z_n' \to x$. Da continuidade de $\succ$, temos que para n suficientemente grande deve valer

$$z_n \succ z_0 \succ z_0' \succ x.$$

Como U é uma representação de $\succ$ sobre $\mathcal{Z}$ temos

$$U(z_n) > U(z_0) > U(z_0') > U(z_n')$$

Da continuidade de U, temos que $U(z_n) \to U(y)$ e $U(z_n') \to U(x)$ e, portanto, temos

$$U(y) \geq U(z_0) > U(z_0') \geq U(x).$$

(⇐) Sejam $x, y \in \mathcal{X}$ tal que $U(y) > U(x)$. Como U é contínua, temos que

$$\overline{\mathcal{U}}(x) := \{z \in \mathcal{X} \,|\, U(z) > U(x)\}$$

e

$$\underline{\mathcal{U}}(y) := \{z \in \mathcal{X} \,|\, U(z) < U(y)\}$$

são abertos e satisfazem $\overline{\mathcal{U}}(x) \cup \underline{\mathcal{U}}(y) = \mathcal{X}$. A conexidade de $\mathcal{X}$ implica que $\overline{\mathcal{U}}(x) \cap \underline{\mathcal{U}}(y) \neq \emptyset$. Isso implica a existência de $z_0 \in \mathcal{Z}$ satisfazendo $U(y) > U(z_0) > U(x)$. Uma repetição deste argumento nos dá então $z_0, z_0' \in \mathcal{Z}$ satisfazendo

$$U(y) > U(z_0) > U(z_0') > U(x).$$

Como U é representação numérica da preferência $\succ$ em $\mathcal{Z}$, então, $z_0 \succ z_0'$.
Agora, sendo $\mathcal{Z}$ denso em $\mathcal{X}$, podemos encontrar sequências (z_n) e (z_n') em $\mathcal{Z}$ tais que $z_n \to y$ e $z_n' \to x$ e também satisfazendo que $U(z_n) > U(z_0) > U(z_0') > U(z_n')$.
Portanto, usando novamente o argumento de que U é representação numérica da preferência $\succ$ em $\mathcal{Z}$, vale:

$$z_n \succ z_0 \succ z_0' \succ z_n'.$$

Pela continuidade de $\succ$ não podemos ter $z_0 \succ y$, nem $x \succ z_0'$. Logo, $y \succ x$.

□

2.3 Representação de Von Neumann - Morgenstern

Na seção anterior as relações de preferências foram apresentadas de uma forma genérica. Em princípio nenhuma restrição aos elementos de $\mathcal{X}$ foi exigida. Aqui estaremos interessados em modelar as incertezas associadas a um certo elemento do conjunto de escolhas $\mathcal{X}$, em particular, estaremos interessados em que esse elemento possa ser associado à uma função de distribuição de probabilidade para os prováveis cenários. Logo, estaremos interessados nos elementos de $\mathcal{X}$ que possam ser interpretados como variáveis aleatórias.

Iremos, portanto, identificar $\mathcal{X}$ a um subconjunto $\mathcal{M}$ do conjunto $\mathcal{M}_1$, definido como:

$$\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_1\left(S, \mathfrak{S}\right) := \{\mu : \mu \text{ distribuição de probabilidade no espaço mensurável } \left(S, \mathfrak{S}\right)\}.$$

Na literatura é comum encontrarmos a terminologia "loterias"como referência aos elementos do conjunto $\mathcal{M}$.

Definição 2.10. *Seja $\succ$ uma relação de preferência em $\mathcal{M}$. Uma representação numérica U da forma:*

$$U\left(\mu\right) = \int u\left(x\right) \mu\left(dx\right) \quad \textit{para todo } \mu \in \mathcal{M} \tag{2.1}$$

será denominada ***representação de von Neumann-Morgenstern****.*

A representação (2.1), originalmente mostrada no trabalho de Von Neumann & Morgenstern (1947), tem uma forma bastante particular e não é claro a priori que ela deva existir para qualquer preferência que tenha uma representação numérica.

De fato, uma propriedade importante que decorre da equação (2.1) é que toda *representação de von Neumann Morgenstern* U é *afim* em $\mathcal{M}$, no seguinte sentido:

$$U\left(\alpha\mu + (1-\alpha)\nu\right) = \alpha U\left(\mu\right) + (1-\alpha) U\left(\nu\right)$$

com $\alpha \in [0,1]$ e $\mu, \nu \in \mathcal{M}$.

Esta propriedade, leva naturalmente ao conceito de independência para relações de preferência:

Definição 2.11. *Uma relação de preferência $\succ$ em $\mathcal{M}$ irá satisfazer o* ***axioma da independência*** *se, para todo μ, $\nu \in \mathcal{M}$ tal que $\mu \succ \nu$ e para todo $\lambda \in \mathcal{M}$ e $\alpha \in (0,1]$ implicar em:*

$$\alpha\mu + (1-\alpha)\,\lambda \succ \alpha\nu + (1-\alpha)\,\lambda.$$

O axioma da independência nos mostra que a partir de uma relação de preferência dada entre duas loterias μ e ν, a introdução de uma terceira distribuição de probabilidade λ não irá afetar a relação pré-estabelecida.

Definição 2.12. *Uma relação de preferência $\succ$ em $\mathcal{M}$ irá satisfazer o* ***axioma arquimediano*** *se para todo $\mu \succ \lambda \succ \nu$ existirem α, $\beta \in (0,1]$ tais que:*

$$\alpha\mu + (1-\alpha)\,\nu \succ \lambda \succ \beta\mu + (1-\beta)\,\nu.$$

A partir das definições 2.11 e 2.12 pode-se mostrar o seguinte resultado:

Teorema 2.13. *Seja $\succ$ uma relação de preferência em $\mathcal{M}$ que satisfaz as definições 2.11 e 2.12 acima. Então, existirá uma representação afim U de $\succ$. Além do que, U será única a menos de uma transformação afim, isto é, qualquer que seja uma outra representação afim será da forma: $\tilde{U} = aU + b$ com $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$.*

Observe que a representação numérica cuja existência é garantida pelo Teorema 2.13 não é necessariamente uma representação de Von Neumann- Morgersten. Entretanto, isso será verdade em ao menos um caso:

Corolário 2.1. *Se $\mathcal{M}$ for um conjunto de distribuição de probabilidades ditas elementares, isto é, se $\mathcal{M}$ for da forma:*

$$\mathcal{M} = \{\mu : \mu = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^{\mu} \delta_{x_i}\}, \quad \textit{com } x_i \in S \textit{ e } \alpha_i \in (0,1]$$

e $\succ$ uma relação de preferência em $\mathcal{M}$ satisfazendo as definições 2.11 e 2.12, então existe uma representação de von Neumann Morgenstern U.

As demonstrações do Teorema 2.13 e do corolário acima estão em Föllmer & Schied (2004, p.55–56; p.53).

Sendo S finito, temos que toda medida de probabilidade será simples, com isso segue:

Corolário 2.2. *Supondo $\mathcal{M}$ o conjunto de todas as distribuições de probabilidade em um conjunto finito S e uma relação de preferência $\succ$ em $\mathcal{M}$ que satisfaça 2.11 e 2.12. Então existe uma representação de von von Neumann Morgenstern U, a qual será única a menos de uma transformação afim.*

As demonstrações do Teorema 2.13 e dos corolários acima estão em Föllmer & Schied (2004, p.55–56; p.53).

Por outro lado, mesmo quando as hipóteses do Teorema 2.13 são satisfeitas é possível que não haja uma representação de von Neumann-Morgenstern como mostra o seguinte exemplo:

Exemplo 2.1. *Seja $\mathcal{M}$ o conjuntos das medidas de probabilidade μ em $S = \mathbb{N}$, para as quais a função U abaixo esteja bem definida:*

$$U(\mu) := \lim_{k \to \infty} k^2 \mu(k). \tag{2.2}$$

Então U é claramente afim e induz uma preferência em $\mathcal{M}$ que satisfaz os axiomas de independência e arquimediano.
Afirmamos que U não tem uma representação de von Neumann-Morgenstern.

De fato, se tomarmos:

$$\mu = \delta_i(j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \textit{caso contrário} \end{cases}$$

com $i, j \in \mathbb{N}$.

Teremos, então:

$$U(\delta_i) = U(\delta_1) = \lim_{k \to \infty} k^2 \ \delta_i(k) = 0, \quad \forall i \in S. \tag{2.3}$$

Logo, se existisse uma representação de von Neumann-Morgenstern para U, ou seja:

$$U(\delta_i) = \sum_{j=1}^{\infty} u(j) \mu(j),$$

então teríamos:

$$U(\delta_i) = \sum_{j=1}^{\infty} u(j) \delta_i(j) = u(i). \tag{2.4}$$

Portanto de (2.3) e (2.4) segue que:

$$U(\delta_i) = u(i) = 0 \quad \forall i \in S.$$

Desta forma se U pudesse ser representada de forma única como uma representação de von Neumann-Morgenstern, teríamos:

$$U(\mu) \equiv 0.$$

No entanto, se considerarmos a seguinte distribuição de probabilidade:

$$\mu = \frac{6}{\pi^2} \frac{1}{k^2},$$

temos, pela definição de U em (2.2), que:

$$U(\mu) = \lim_{k \to \infty} k^2 \mu(k) = \frac{6}{\pi^2}.$$

Assim $U(\mu)$ não será identicamente nula e, portanto, U não possui representação de von Neumann-Morgenstern.

Antes de enunciar o próximo resultado, recordamos que dadas duas topologias: (X, τ_1) e (X, τ_2), diremos que τ_1 será uma *topologia fraca* em relação à $\tau_2 \Leftrightarrow \tau_1 \subseteq \tau_2$. Precisamos então de uma definição e um resultado geral como se segue.

Definição 2.14. *A topologia fraca em $\mathcal{M}(S)$ é a topologia mais fraca para a qual todas as aplicações*

$$\mathcal{M}(S) \ni \mu \mapsto \int f \, \mathrm{d}\mu, \quad f \in C_b(S),$$

são contínuas. Sendo $C_b(S)$ o conjunto de todas as funções continuas e limitadas em S.

Definição 2.15. *Seja (X, d) um espaço métrico. Uma sequência (x_n) é dita Cauchy se*

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{m,n\geq k} d\left(x_n, x_m\right) = 0.$$

Um espaço métrico é dito completo se toda sequência de Cauchy converge. Além disso, (X, d) é um espaço polonês se for um espaço métrico, separável e completo.

Teorema 2.16. *Seja S um espaço polonês. Então o espaço $\mathcal{M}(S)$ é separável e metrizável na topologia fraca. Além disso, se S_0 é um conjunto denso de S, então $\mathcal{M}_s(S_0)$ é denso em $\mathcal{M}(S)$, na topologia fraca.*

Uma demonstração do Teorema 2.16 pode ser encontrada em Aliprantis & Border (2006).

Vamos agora enunciar e demonstrar um resultado que garante a existência desta representação

Teorema 2.17. *Seja $\mathcal{M} := \mathcal{M}_1(S) = \mathcal{M}_1(S, \mathfrak{S})$ o espaço das distribuições de probabilidade em S munido com uma topologia fraca e, seja, $\succ$ uma preferência de ordem contínua em $\mathcal{M}$ satisfazendo o axioma da independência 2.11. Então existirá uma representação de von Neumann Morgenstern:*

$$U(\mu) = \int u(x)\,\mu(dx)$$

para a qual a função $u : S \to \mathbb{R}$ será limitada e contínua. Além do que, U e u serão determinadas unicamente a menos de uma transformação positiva afim.

Demonstração. Seja $\mathcal{M}_s$ o conjunto de todas as distribuições de probabilidade simples sobre S. Como a continuidade de $\succ$ implica no Axioma 2.12, concluímos do Corolário 2.1 que $\succ$ restrito a $\mathcal{M}_s$ tem uma representação de Von Neumann-Morgenstern.

Vamos agora mostrar que a função u nesta representação é limitada. Suponha que u não seja limitada superiormente. Então existem um sequência (x_n) em S, satisfazendo $u(x_1) > u(x_0)$ e $u(x_n) > n$. Seja

$$\mu_n := \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\delta_{x_0} + \frac{1}{\sqrt{n}}\delta_{x_n}.$$

Temos que $\mu_n \to \delta_{x_0}$ fracamente. Como $\succ$ é contínua e como $\delta_{x_1} \succ \delta_{x_0}$, temos que $\delta_{x_1} \succ \mu_n$, para n suficientemente grande. Entretanto, $U(\mu_n) > \sqrt{n}$, em contradição a $\delta_{x_1} \succ \mu_n$.

Um argumento similar mostra que u deve ser também limitada inferiormente.

O próximo passo é mostrar que u é contínua. Suponha que não seja o caso e seja $x \in S$ e $(x_n) \subset S$ tal que $x_n \to x$, mas $u(x_n) \not\to u(x)$. Passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que $u(x_n) \to a$. Suponha que $\epsilon := u(x) - a > 0$. Então existe m tal que $|u(x_n) - a| < \epsilon/3$, se $n \geq m$. Seja $\mu := \dfrac{1}{2}(\delta_x + \delta_{x_m})$. Se $n \geq m$, temos

$$U(\delta_x) = a + \epsilon > a + \frac{2\epsilon}{3} > \frac{1}{2}\left(u(x) + u(x_m)\right) = U(\mu) > a + \frac{\epsilon}{3} > U(\delta_{x_n}).$$

Portanto, temos $\delta_x \succ \mu \succ \delta_{x_n}$. Entretanto, isso contradiz a continuidade de $\succ$. O caso em que $\epsilon < 0$ pode ser excluído da mesma maneira.

Como u é contínua e limitada o funcional

$$U(\mu) := \int u(x)\,\mu(\mathrm{d}x), \quad \mu \in \mathcal{M},$$

é continuo com respeito a topologia fraca. Como $\mathcal{M}_s$ é denso em $\mathcal{M}$ pelo teorema 2.16, o resultado segue do teorema 2.9. □

2.4 Funções de Utilidade e Utilidade esperada

Nesta seção serão apresentados os conceitos de *equivalente certo* e *aversão ao risco*, os quais estarão relacionados com a teoria relativa ao apreçamento por indiferença a ser visto na seção seguinte, sempre utilizando a medida *histórica* ou *subjetiva*, também denominada *medida atuarial*.

Para desenvolver tais conceitos consideremos que os *payoffs* dos ativos/derivativos financeiros tenham suas distribuições de probabilidade conhecidas a priori. Tais distribuições dos ativos podem ser vistas como loterias cujos resultados estão contidos em um intervalo $S \subset \mathbb{R}$. Neste contexto, consideraremos um conjunto de medidas de probabilidades de Borel $\mathcal{M}$ fixo.

Suporemos que $\mathcal{M}$ é convexo, que contém todas as medidas atômicas δ_x com $x \in S$ e que todo $\mu \in \mathcal{M}$ tem esperança finita, i. e.,

$$\int |x| \ \mu(dx) < \infty.$$

Neste caso, escreveremos:

$$m(\mu) := \int x \ \mu(dx) \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Utilizando a representação de preferência sobre loterias define-se a monotonicidade e aversão ao risco sobre $\mathcal{M}$ da seguinte forma:

Definição 2.18. *Uma relação de preferência $\succ$ em $\mathcal{M}$ é dita **monótona** se:*

$$x > y \quad \textit{implicar em} \quad \delta_x \succ \delta_y.$$

Definição 2.19. *Uma relação de preferência $\succ$ em $\mathcal{M}$ é dita **avessa ao risco** se para todo $\mu \in \mathcal{M}$:*

$$\delta_{m(\mu)} \succ \mu \ \textit{a menos que} \ \mu = \delta_{m(\mu)}.$$

Portanto, aversão ao risco significa que o indivíduo preferirá o recebimento certo da média dos ganhos possíveis, a ter que participar do jogo. Suponha o seguinte exemplo:

Exemplo 2.2. *Suponha que seja proposto a um indivíduo um jogo no qual é lançada uma moeda justa com as seguintes possibilidades de ganho:*

1. *Receber \$100 caso saia cara;*
2. *\$0 caso saia coroa;*
3. *Receber \$50 caso opte por não participar desse jogo.*

Neste caso um indivíduo avesso ao risco irá preferir, conforme definição acima, a opção 3.

Munidos das definições 2.18 e 2.19 podemos incluir algumas propriedades à função u, a qual, aparece na representação de von Neumann- Morgenstern no Teorema 2.17.

Proposição 2.2. *Suponha que a relação de preferência $\succ$ possua uma representação de von Neumann Morgenstern:*

$$U(\mu) = \int u \; d\mu.$$

Então,

1. *$\succ$ é monótona se e somente se u for estritamente crescente.*
2. *$\succ$ é avesso ao risco se e somente se u for estritamente côncava.*

Demonstração.

1. Sejam x e y em S tal que $x > y$.

   Sob a hipótese de monotonicidade da relação de preferência temos, pela Definição 2.18, que $\delta_x \succ \delta_y$.

   Segue da Definição 2.3:
   $$U(\delta_x) \; > \; U(\delta_y).$$

   Mas, $U(\delta_z) = u(z)$ para qualquer $z \in S$.

   Então,
   $$u(x) > u(y) \quad \text{para } x > y.$$

2. Se a relação de preferência $\succ$ identifica uma aversão ao risco, então, dados $x, y \in S$ e $\alpha \in (0,1)$, pela Definição 2.19, temos:

   $$\delta_{\alpha x \, + \, (1-\alpha) y} \; \succ \; \alpha \delta_x \; + \; (1-\alpha)\, \delta_y$$

   Como visto no item anterior, vale:

   $$u(\alpha x \; + \; (1-\alpha)\, y) \; > \; \alpha u(x) \; + \; (1-\alpha)\, u(y),$$

   portanto, u é estritamente côncava. Mas, se u é estritamente côncava então vale a desigualdade de Jensen (Shreve 2004):

   $$u\left(\int x \; \mu(dx)\right) \; \geqslant \; \int u(x) \;\; \mu(dx),$$

   valendo a desigualdade estrita quando $\mu \neq \delta_{m(\mu)}$.

   Como $u(m(\mu)) = U\left(\delta_{m(\mu)}\right)$, segue que:

   $$U\left(\delta_{m(\mu)}\right) \; \geqslant \; U(\mu),$$

   com igualdade apenas quando $\mu = \delta_{m(\mu)}$.

   Logo,
   $$\delta_{m(\mu)} \; \succ \; \mu \quad \text{a menos de } \mu = \delta_{m(\mu)}.$$

   Da Definição 2.19 segue que relação de preferência assume a aversão ao risco de um suposto agente econômico.

□

Definição 2.20. *Uma função $u : S \to \mathbb{R}$ é denominada função de utilidade se for estritamente côncava, estritamente crescente e contínua em S.*

Suponha agora que u é diferenciável.Sendo a função de utilidade do agente estritamente crescente, teremos:

$$u'(s) > 0, \quad s \in S.$$

Logo para cada unidade adicional de riqueza haverá um incremento na utilidade do indivíduo, ou seja, quanto maior a riqueza maior será sua satisfação.

Adiante, veremos que a concavidade está relacionada com a aversão ao risco do agente.

Se fixarmos uma relação de preferência $\succ$ definida no conjunto $\mathcal{M}$ e admitindo uma representação de von Neumann Morgenstern, teremos:

$$U(\mu) = \int u \; d\mu,$$

sendo $u : S \to \mathbb{R}$.

Portanto, U representa o valor esperado dos possíveis valores de u dada uma medida $\mu \in \mathcal{M}$.

Pelo Teorema 2.17, u é limitada e contínua em um intervalo $[a, b]$. Sendo u estritamente crescente, temos: $u(b) > U(\mu) > u(a)$. Portanto, pelo Teorema do valor intermediário existe um único valor $c(\mu) \in \mathbb{R}$ tal que $b > c(\mu) > a$ que satisfaz :

$$u(c(\mu)) = U(\mu) = \int u \; d\mu. \tag{2.6}$$

Dessa igualdade, temos que a esperança calculada para a medida μ é equivalente à utilidade gerada por um certo valor monetário $c(\mu)$. Esse valor é definido como o equivalente certo em relação a uma certa loteria, i. e.,

Definição 2.21. *Dada uma relação de preferência $\succ$ em $\mathcal{M}$ a qual admita uma representação por von Neumann Morgenstern. O* ***equivalente certo*** *de uma loteria $\mu \in \mathcal{M}$ é definido como o valor $c(\mu)$, tal que:*

$$u(c(\mu)) = U(\mu) = \int u \; d\mu.$$

Além disso, o ***prêmio de risco*** *de μ é dado por:*

$$\rho(\mu) := m(\mu) \; - \; c(\mu).$$

Note que, como mostrado acima, temos $\delta_{m(\mu)} \succ \mu$ e, portanto, $m(\mu) > c(\mu)$ a menos de $\mu = \delta_{m(\mu)}$. Isso mostra que, em geral, o prêmio de risco $\rho(\mu)$ é estritamente positivo.

Queremos agora introduzir o conceito de aversão ao risco, antes porém, seguindo Föllmer & Schied (2004, p.67), vamos calcular o prêmio de risco.

Para tal, suponha que u seja suave e que μ seja uma medida de variância finita $(\mathrm{var}(\mu))$, defina $m := m(\mu)$.

Por um lado, temos:

$$\begin{aligned} u\left(c\left(\mu\right)\right) &= u\left(m\right) + u'\left(m\right)\left(c\left(\mu\right) - m\right) + o\left(c\left(\mu\right) - m\right) \\ &= u\left(m\right) - u'\left(\mu\right)\rho(\mu) + o\left(\rho(\mu)\right). \end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} u\left(c\left(\mu\right)\right) &= \int u(x)\ \mu(dx) \\ &= \int \left[u(m) + u'(m)(x-m) + \frac{1}{2}u''(m)(x-m)^2 + r(x)\right]\mu(dx) \\ &= u(m) + \frac{1}{2}u''(m)\mathrm{var}\left(\mu\right) + \int r(x)\mu(dx). \end{aligned}$$

Supondo agora que

$$\rho(\mu), \int r(x)\mu(dx) \ll 1$$

obtemos que:

$$u\left(m\right) - u'\left(\mu\right)\rho \approx u\left(\mu\right) + \frac{u''}{2}\ \mathrm{var}\left(\mu\right).$$

Logo,

$$\rho\left(\mu\right) \approx -\frac{u''\left(m\right)}{2u'\left(m\right)}\ \mathrm{var}\left(\mu\right).$$

Logo, como destacado em Föllmer & Schied (2004), $-u''\left(m\right)/u'\left(m\right)$ corresponde ao fator pelo qual o agente está ponderando o seu risco, este representado pela variância de μ, i. e., $\mathrm{var}\left(\mu\right)$.

Esse fator de ponderação corresponde ao conceito de *coeficiente de aversão ao risco*, definido:

Definição 2.22. *Suponha $u : S \to \mathbb{R}$ seja uma função de utilidade de classe C^2, então*

$$\alpha(x) := -\frac{u''(x)}{u'(x)}, \quad x \in S. \tag{2.7}$$

é denominado coeficiente absoluto de aversão ao risco de Arrow-Pratt da função de utilidade u. A Tolerância ao Risco é definida como o inverso do coeficiente de Arrow-Pratt, isto é:

$$T_a(x) := \frac{1}{\alpha(x)} = -\frac{u'(x)}{u''(x)}, x \in S \tag{2.8}$$

A ideia por trás da definição de aversão ao risco está no fato de que indivíduos diferentes respondem de formas diferentes quando confrontados ao mesmo padrão de risco, isto é, alguns são mais aversos ao risco, ditos *"conservadores"*, enquanto outros podem se mostrar mais propensos a correr riscos. O coeficiente de Arrow-Pratt $\alpha\left(\mu\right)$ corresponde ao fator que um agente econômico com função de utilidade u usa para ponderar o risco a que está sujeito, sendo este último mensurado por $\frac{1}{2}\mathrm{var}\left(\mu\right)$.

Uma classe muito comum de funções de utilidade usadas em finanças é que presume que o agente tenha uma tolerância linear ao risco, i. e., a equação (2.8) deverá satisfizer:

$$T_a(x) = A + Bx, \quad (A, B) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \tag{2.9}$$

Essa classe de funções são as chamadas **HARA**, em inglês, *Hyperbolic Absolute Risk Aversion.*

Para uma função de utilidade tipo *HARA* o seu *coeficiente absoluto de aversão ao risco* deverá satisfazer:

$$\alpha(x) := -\frac{u''(x)}{u'(x)} = \frac{1}{A + Bx}, \quad x \in S. \tag{2.10}$$

Exemplo 2.3. *Vamos exemplificar essa classe de funções de utilidade.*

Primeiro, percebe-se facilmente que $\alpha\left(x\right)$ *pode ser reescrito como* $\alpha\left(x\right) = -\frac{\mathrm{d}\log u'(x)}{\mathrm{d}x}$, *portanto:*

$$\alpha(x) := -\frac{u''(x)}{u'(x)} = \frac{1}{A + Bx} = -\frac{\mathrm{d}\log u'(x)}{\mathrm{d}x}. \tag{2.11}$$

1. *Função de utilidade exponencial (B=0)*

$$\begin{aligned}
-\frac{\mathrm{d}\log u'(x)}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{A} \\
\log u'(x) &= -\frac{1}{A}x \\
u'(x) &= \mathrm{e}^{\frac{-x}{A}} \\
u(x) &= -A\mathrm{e}^{\frac{-x}{A}} + C, \quad C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

2. *Função de utilidade logarítmica (B=1)*

$$\begin{aligned}
-\frac{\mathrm{d}\log u'(x)}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{A + x} \\
-\log u'(x) &= \log\left(A + x\right) \\
u'(x) &= \frac{1}{A + x} \\
u(x) &= \log\left(A + x\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

3. *Power utility function ($B \neq 0$ e $B \neq 1$)*

$$
\begin{aligned}
-\frac{\mathrm{d}\log u'(x)}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{A+x} \\
-\log(u'(x)) &= \int \frac{1}{A+Bx}\mathrm{d}x \\
-\log(u'(x)) &= \log\left(A+Bx\right)^{\left(\frac{1}{B}\right)} \\
u'(x) &= \frac{1}{(A+Bx)^{\frac{1}{B}}} \\
u(x) &= \int (A+Bx)^{-\frac{1}{B}}\,\mathrm{d}x \\
u(x) &= \frac{1}{B}\int v^{-\frac{1}{B}}\mathrm{d}v && v = Ax+B \\
u(x) &= \frac{1}{B\left(1-\frac{1}{B}\right)}v^{1-\frac{1}{B}} \\
u(x) &= \frac{(A+Bx)^{1-\frac{1}{B}}}{B\left(1-\frac{1}{B}\right)} + C, && C \in \mathbb{R}, \quad B \neq 0 \quad e \quad B \neq 1.
\end{aligned}
$$

4. *Função de utilidade Linear*
   Tomando $B = 0$ e, formalmente, $B = \infty$, obtemos:

$$
\begin{aligned}
-\frac{\mathrm{d}\log u'(x)}{\mathrm{d}x} &= 0 \\
\log u'(x) &= b' && b' \in \mathbb{R} \\
u'(x) &= \mathrm{e}^{b'} \\
u(x) &= a+bx && b > 0.
\end{aligned}
$$

   Neste caso, o coeficiente de Arrow-Pratt será $\alpha(x) = 0$.

No caso particular da função exponencial, observa-se que o seu coeficiente de aversão ao risco absoluto será igual à uma constante positiva.

Neste caso, diremos que a função de utilidade, com tolerância ao risco linear, de forma que:

$$T_a(x) = A + Bx \quad ,com \quad B = 0 \tag{2.12}$$

é denominada **CARA**, expressando o termo em inglês: *Constant Absolute Risk Aversion.*

Proposição 2.3. *Suponha que u e $\tilde{u}$ são funções de utilidade de classe C^2 em S com α e $\tilde{\alpha}$ seus respectivos coeficientes de Arrow-Pratt conforme definição 2.7. Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. *$\alpha(x) \geqslant \tilde{\alpha}(x)$ para todo $x \in S$.*

2. *$u = F \circ \tilde{u}$ para uma função F estritamente crescente e côncava*

3. *Os prêmios de risco ρ e $\tilde{\rho}$ associados à u e $\tilde{u}$ respectivamente satisfazem $\rho(\mu) \geqslant \tilde{\rho}(\mu)$ para todo $\mu \in \mathcal{M}$.*

Demonstração.

- $(a) \Rightarrow (b)$ Conforme definição 2.20 $\tilde{u}$ é estritamente crescente, logo podemos definir a sua função inversa $w : \mathbb{R} \to S$. Com isso se tomarmos $u : S \to \mathbb{R}$ podemos definir:

  $$F(t) := u(w(t)),$$

  como, u também segue a definição 2.20 temos que F é estritamente crescente e de classe C^2, satisfazendo $u = F \circ \tilde{u}$. Sendo w função inversa de $\tilde{u}$, temos :

  $$w' = \frac{1}{\tilde{u}'(w)},$$

  Portanto, utilizando a regra da cadeia, a derivada segunda será dada por:

  $$w'' = -\tilde{u}''(w) \cdot w' \frac{1}{\tilde{u}'(w)^2},$$

  substituindo w':

  $$w'' = -\frac{\tilde{u}''(w)}{\tilde{u}'(w)} \frac{1}{\tilde{u}'(w)^2} = \tilde{\alpha}(w) \cdot \frac{1}{\tilde{u}'(w)^2}.$$

  Agora, calculando as duas primeiras derivadas de F:

  $$F' = u'(w) \cdot w' = \frac{u'(w)}{\tilde{u}'(w)} > 0$$

  pois u e $\tilde{u}$ são funções estritamente crescentes, portanto suas derivadas são positivas. Para a segunda derivada:

  $$\begin{aligned} F'' &= u''(w) \cdot (w')^2 + u'(w) \cdot w'' \\ &= \frac{1}{\tilde{u}'(w)^2} \left[u''(w) + u'(w)\,\tilde{\alpha}(w)\right] \\ &= \frac{u'(w)}{\tilde{u}'(w)^2} \left[\tilde{\alpha}(w) - \alpha(w)\right] \\ \text{por (a):} & \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

  Logo, F é côncava e estritamente crescente.

- $(b) \Rightarrow (c)$ Utilizando a desigualdade de Jensen teremos que $c(\mu)$ e $\tilde{c}(\mu)$ irão satisfazer:

  $$\begin{aligned} u(c(\mu)) &= \int u \, d\mu = \int F \circ \tilde{u} \, d\mu \\ &\leqslant F\left(\int \tilde{u} \, d\mu\right) = F(\tilde{u}(\tilde{c}(\mu))) = u(\tilde{c}(\mu)). \end{aligned} \tag{2.13}$$

  Portanto,

  $$\rho(\mu) = m(\mu) - c(\mu) \geq m(\mu) - \tilde{c}(\mu) = \tilde{\rho}(\mu).$$

- $(c) \Rightarrow (a)$

  Considerando a condição (a) falsa, haverá um intervalo abeto $O \subset S$ tal que $\tilde{\alpha}(x) > \alpha(x)$, $\forall x \in O$.

  Seja $\tilde{O} := \tilde{u}(O)$ e denotando w a função inversa da função $\tilde{u}$. Então, a função $F(t) = u(w(t))$ será estritamente convexa no intervalo aberto O. Portanto, se μ for uma medida com suporte em O, a desigualdade 2.13 torna-se estrita, logo segue que $\rho(\mu) < \rho(\mu)$ o que contradiz a condição (c).

□

Um ponto importante e útil a destacar, no caso da função de utilidade exponencial, ou seja, $u(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\alpha x}$, é a não dependência da relação de preferências entre as loterias e a riqueza inicial do agente, aqui denotada por w, de fato:

$$\int u(w+x)\,\mu dx < \int u(w+x)\,\nu dx$$

$$\int 1 - \mathrm{e}^{-\alpha w - \alpha x}\mu dx < \int 1 - \mathrm{e}^{-\alpha w - \alpha x}\nu dx$$

$$\int \mu dx - \mathrm{e}^{-\alpha w}\int \mathrm{e}^{-\alpha x}\mu dx < \int \nu dx - \mathrm{e}^{-\alpha w}\int \mathrm{e}^{-\alpha x}\nu dx \tag{2.14}$$

$$-\int \mathrm{e}^{-\alpha x}\mu dx < -\int \mathrm{e}^{-\alpha x}\nu dx \tag{2.15}$$

$$\int \mathrm{e}^{-\alpha x}\mu dx > \int \mathrm{e}^{-\alpha x}\nu dx \tag{2.16}$$

Capítulo 3

Apreçamento por Indiferença

3.1 Introdução

O apreçamento por indiferença é a forma como a qual o investidor irá determinar o preço que estará disposto a pagar (receber) quando da compra (venda) de um contrato contingente cujo *payoff* dependa de um ativo associado a um certo grau de incerteza de forma a maximizar sua função de utilidade dada uma riqueza. Portanto, a determinação do preço do derivativo envolve o problema de otimização da utilidade esperada. A seguir, veremos as condições para que o problema seja bem posto o que nos levará a preços livres de oportunidades de arbitragem.

Nesta forma de apreçamento, serão considerados, além da dinâmica dos ativos, a riqueza inicial e a preferência de risco do agente que está apreçando o pagamento contingente Isto será feito através da utilidade esperada com a função de utilidade refletindo a preferência do agente.

Veremos na Seção 3.4 que podemos associar a cada função de utilidade uma distribuição de risco e, desta forma, podemos quantificar a aversão ao risco de um dado agente através das suas preferências quanto a essas distribuições. Entretanto, uma função de utilidade terá sempre duas características será: crescente e côncava. A primeira reflete o fato de que o agente prefere ter mais riqueza, enquanto que a segunda reflete o fato de que o agente é avesso ao risco—i.e. dado duas possibilidades para um mesmo ganho esperado, ele escolherá a de menor risco.

Como foi visto na seção 1.3, encontra-se na literatura métodos para apreçamento de contratos não-replicáveis que preservam o apreçamento linear feito nos mercados completos. No apreçamento por indiferença, todavia, este mecanismo será estendido a um apreçamento que poderá ser não-linear, mas que recupera os preços lineares no caso de contratos replicáveis.

Conforme destacado em Henderson (2007), em contraste com o modelo de apreçamento neutro ao risco, o apreçamento por indiferença não guarda uma relação linear com o número k de contratos negociados, ou seja, o preço de kC_T contratos ($k \in \mathbb{R}$) não corresponderá a k vezes o preço de um único contrato.

Geralmente, o apreçamento por indiferença resulta em um intervalo de preços cujos limites inferior e superior irão representar os preços de venda e compra respectivamente que o investidor irá aceitar dado que a sua utilidade seja máxima. Em decorrência da não-linearidade dos preços não mais devemos esperar igualdade entre os preços de compra e venda de um contrato não-replicável, conforme enfatizado em Musiela & Zariphopoulou (2004). No entanto, se o mercado for completo, ou seja, o contrato for replicável a partir dos ativos negociáveis, o preço por indiferença será único e coincidirá com o preço calculado utilizando a medida martingal, preservando assim, a linearidade do preço em relação a quantidade negociada.

3.2 Maximização da Utilidade Esperada e Não-Arbitragem

O apreçamento por indiferença é baseado na maximização da utilidade esperada do agente sob todos os processos de riquezas factíveis dada a sua restrição orçamentária.

O problema do investidor consiste, então, em determinar o portfólio $\overline{\xi}$ de forma a maximizar a sua estrutura de preferência, descritas em termos de uma função de utilidade $\tilde{u}$, dado que estará disposto a investir, em termos de quantia monetária, um valor de w, ou seja:

$$\max \mathbb{E}\left[\tilde{u}\left(\overline{\xi} \cdot \overline{S}\right)\right] \quad \text{s.a} \quad \overline{\pi} \cdot \overline{\xi} \leqslant w.$$

Em Föllmer & Schied (2004) manipula-se o problema descrito acima reformulando-o sem a utilização da restrição orçamentária. Para isso, partindo do conceito da definição 1.13 poderemos reescrever o *payoff* em termos do processo de ganhos descontados, de fato tomando:

$$\frac{\overline{\xi} \cdot \overline{S}}{1+r} - \overline{\pi} \cdot \overline{\xi} = \xi \cdot Y$$

sendo Y o vetor de dimensão d cujas componentes são dadas por:

$$Y^{(i)} = \frac{S^{(i)}}{1+r} - \pi^{(i)} \quad i = 1, \dots N.$$

Assumindo que para todo portfólio $\overline{\xi}$ sujeito à restrição orçamentária $\overline{\pi} \cdot \overline{\xi} \leqslant w$ adicionar o ativo livre de risco sempre levará à um portfólio preferível, então, pode-se assumir $\overline{\pi} \cdot \overline{\xi} = w$. Assim, obtém-se:

$$\overline{\xi} \cdot \overline{S} = (1+r)\left(\xi \cdot Y + w\right),$$

Denotando u como transformação da função original $\tilde{u}$:

$$u(y) := \tilde{u}\left((1+r)(y+w)\right).$$

Com isso, o problema consistirá em maximizar a utilidade esperada $\mathbb{E}\left[u\left(\xi \cdot Y\right)\right]$ sobre todos os $\xi \in \mathbb{R}^d$ tal que $\xi \cdot Y$ esteja contido no domínio D de u.

Agora queremos encontrar qual o portfólio ξ^* que complementado com o investimento no ativo livre de risco ξ^0, ou seja, $\overline{\xi}^* = (\xi^0, \xi^*)$ irá maximizar a utilidade do agente considerando sua restrição orçamentária. Para tal, vamos em um primeiro momento determinar o conjunto dos possíveis portfólios candidatos à solução do problema, ou seja, o conjunto dos portfólios admissíveis.

Definição 3.1. *Sendo $u : D \to \mathbb{R}$ função de utilidade, limitada superiormente e tal que $D = \mathbb{R}$. O conjunto dos portfólios admissíveis será dado pelo seguinte conjunto dos vetores em $\mathbb{R}^d$:*

$$\wp(D) := \left\{\xi \in \mathbb{R}^N \mid \xi \cdot Y \in D \ P.q.c\right\}.$$

O teorema a seguir irá conectar o conceito de oportunidade de arbitragem com a teoria de função de utilidade.

Teorema 3.2. *Suponha que a função de utilidade $u : D \to \mathbb{R}$ seja limitada superiormente e tal que $D = \mathbb{R}$. Logo haverá um valor máximo para a utilidade esperada*

$$\mathbb{E}\left[u\left(\xi \cdot Y\right)\right], \quad \xi \in \wp(D),$$

se e somente se o mercado não permitir oportunidade de arbitragem. Além disso, a solução será única se o mercado for não redundante.

A demonstração do teorema está em Föllmer & Schied (2004, p.110–112).

3.3 Apreçamento por Indiferença.

Posta a garantia de existência de uma solução ótima para o problema de maximizar a utilidade esperada do investidor sujeito a uma restrição orçamentária, iremos definir o que de fato corresponde apreçar um contrato contingente utilizando-se das preferências e sensibilidades frente ao risco dos agentes econômicos.

O apreçamento por indiferença é definido como o valor ou preço $\nu_t\left(C_T\right)$ que um dado contrato contingente C_T, cujo payoff será entregue em um tempo futuro $T > 0$, irá valer no instante inicial de forma a atender que a esperança de utilidade máxima do agente com o contrato e sem o contrato sejam iguais.

O apreçamento por indiferença está relacionado com a alternativa de escolha entre comprar (vender) um contrato hoje e receber (pagar) um *payoff* no futuro ou simplesmente não efetuar a transação.

O intuito é chegar ao preço ótimo do contrato utilizando as preferências/restrições do agente que serão utilizadas como parâmetros do modelo, tais como: aversão ao risco, riqueza inicial e sua exposição inicial aos riscos não replicáveis. Esta última característica está relacionada ao fato de que o preço por indiferença quando em um mercado incompleto não será uma função linear da quantidade de contratos transacionados, ou seja, o preço de $k \in \mathbb{Z}$ unidades de um contrato C_T com preço unitário $\nu\left(C_T\right)$ não corresponderá, necessariamente, a $k\nu\left(C_T\right)$.

Portanto, conforme Henderson (2007), $\nu_t^b\left(C_T\right)$ será o preço de compra, também denominado *bid price*, pelo qual o agente é indiferente entre não adquirir o contrato C_T e, portanto, não receber o payoff correspondente no tempo T ou adquiri-lo hoje, pagando $\nu_t\left(C_T\right)$, com garantia de receber C_T em T.

Se considerarmos um modelo multiperíodo, com um ativo livre de risco e d ativos arriscados, de forma que para $i = 0, \ldots d$ e $t = 0, \ldots T$:

1. $S_t^{(i)}$, represente o processo de preços do ativo i no espaço de probabilidade filtrado $\left(\Omega, \left(\mathcal{F}_t\right)_{0 \leqslant t \leqslant T}, P\right)$, ou seja, o preço dos ativos será representado por um processo estocástico.

2. $\overline{\xi}_t^{(i)}$ processo representativo da estratégia auto financiadas adotada para o ativo i pelo investidor no período $[t-1, t]$ com $1 \leqslant t \leqslant T$. Denotaremos o conjunto das estratégias $(\xi_1, \ldots, \xi_T)$ autofinanciadas por $\mathcal{A}$.

3. X_t processo de riqueza associado à estratégia auto financiada. De forma que:

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1} = \overline{\xi}_t^{(i)} \cdot \Delta S_t^{(i)},$$

portanto,

$$X_T = x + \sum_{t=1}^{T} \overline{\xi}_t^{(i)} \cdot \Delta S_t^{(i)},$$

sendo $X_0 = x$.

Teremos que um contrato contingente C_T com vencimento em $T \geqslant 0$ correspondendo à posição *comprada* no mesmo, terá sua esperança de utilidade máxima representada, por:

$$V^{C_T}\left(X_t, k, t; T\right) = \sup_{\xi \in \wp} \mathbb{E}_P\left(u\left(X_T + kC_T\right) | \mathcal{F}_t\right), \tag{3.1}$$

com k representado a quantidade de contrato adquirida.

Por outro lado, a esperança de utilidade máxima não considerando o contrato é definido como:

$$V^0\left(X_t, 0, t; T\right) = \sup_{\xi \in \wp} \mathbb{E}_P\left(u\left(X_T\right) | \mathcal{F}_t\right). \tag{3.2}$$

Antes de continuarmos, convém notar que embora o Teorema 3.2 não se aplique exatamente às maximizações dadas por (3.1) e (3.2) não é difícil generalizá-lo para este caso. Uma demonstração no caso discreto pode ser encontrada em Pliska (1997). Referimos a Elton & Gruber (1974) para uma discussão sobre quando as diferenças entre otimização em um período e multiperíodo. Uma demonstração no caso contínuo pode ser encontrada em Korn & Korn (2001).

O preço por indiferença $\nu_t\left(C_T\right)$ será uma variável aleatória $\mathcal{F}_t$-mensurável obtido igualando-se as equações (3.1) e (3.2), onde

$$V^0\left(X_t, 0, t; T\right) = V^{C_T}\left(X_t - \nu_t^b\left(C_T\right), k, t; T\right), \quad p.q.c. \tag{3.3}$$

O preço $\nu_t^b\left(C_T\right)$ representa representa o valor máximo que o investidor está disposto a pagar no tempo t por k unidades do contrato C_T que gerará um payoff no vencimento T.

Em essência quando o investidor iguala as equações em (3.3) ele estará garantindo que ao comprar ou vender um contrato ele não diminuirá sua utilidade comparativamente a não fazê-lo.

Da mesma forma, o preço por indiferença para a venda de um contrato contingente C_T, ou seja, o *ask price* $\nu_t^s\left(C_T\right)$ que irá representar uma posição *vendida* será o menor preço que o investidor estará disposto a receber para vender k unidades do contrato, ou seja, $\nu_t^s\left(C_T\right)$ irá ser solução de:

$$V^0\left(X_t, 0, t; T\right) = V^{C_T}\left(X_t + \nu_t^s\left(C_T\right), -k, t; T\right), \quad p.q.c \tag{3.4}$$

onde,

$$V^{C_T}\left(X_t + \nu_t^s\left(C_T\right), -k, t; T\right) = \sup_{\xi \in \wp} \mathbb{E}_P\left(u\left(X_T - kC_T\right) | \mathcal{F}_t\right). \tag{3.5}$$

Em um mercado incompleto o payoff do contrato não será, necessariamente, perfeitamente replicável acarretando a não eliminação total do risco a que o agente está exposto. No caso de venda do contrato esse risco remanescente está representado redentado na equação 3.5 como $X_T - kC_T$. O apreçamento por indiferença irá ser útil exatamente para tratar esse risco residual através da especificação a preferência ao risco do agente que está vendendo o contrato. O que será feito via função de utilidade.

A seguir elencaremos algumas propriedades importantes do apreçamento por indiferença.

1. *Apreçamento não linear.*

   Para exemplificarmos a não linearidade vamos supor o seguinte exemplo: seja um mercado de um período ($t = 0, 1$), formado por uma ativo livre de risco $S_t^{(0)}$, um ativo negociável $S_t^{(1)}$ e um ativo não negociável Y_t; por simplicidade, $S_t^{(0)} \equiv 1$ para todo t; os demais ativos seguem o modelo binomial; por hipótese, supomos independência entre as variáveis $S_T^{(1)}$ e Y_T em relação à medida histórica P e sendo o processo de riqueza (descontado) no tempo $T = 1$ dado como:

   $$X_T = \beta + \alpha P_1 = x + \alpha\left(S_T^{(1)} - S_0^{(1)}\right)$$

   onde, α quantidade do ativo negociável, β quantidade do ativo sem risco e x a riqueza inicial.

   Vamos considerar também neste mercado o contrato contingente $C_T\left(Y_T\right)$ cujo *payoff* é função apenas do ativo não negociável. A função de utilidade do investidor é dada pela função exponencial:$u\left(x\right) = -\mathrm{e}^{-\gamma x}$, onde γ irá representar a sua aversão ao risco.

O preço de venda desse contrato $\nu(C_T)$ deverá satisfazer:

$$V^{C_T}\left(X_0+\nu(C_T),1,0;T\right)=V^0\left(X_0,0,0;T\right).$$

Por um lado, denotando $C_T\left(Y_T\right)=C_T$, temos:

$$\begin{aligned}V^{C_T}\left(X_0+\nu(C_T),1,0;T\right)&=\sup_{\alpha}\mathbb{E}_P\left(u\left(X_T-C_T\right)\right)\\&=\sup_{\alpha}\mathbb{E}_P\left(-\mathrm{e}^{-\gamma(X_T-C_T)}\right)\\&=\mathrm{e}^{-\gamma(x+\nu(C_T))}\sup_{\alpha}\mathbb{E}_P\left(-\mathrm{e}^{-\gamma\alpha\left(S_T^{(1)}-S_0^{(1)}\right)+\gamma C_T}\right).\end{aligned}$$

Portanto, para satisfazer a igualdade acima, temos:

$$\begin{aligned}V^0\left(X_0,0,0;T\right)&=V^{C_T}\left(X_0+\nu(C_T),1,0;T\right)\\\mathrm{e}^{-\gamma x}\sup_{\alpha}\mathbb{E}_P\left(-\mathrm{e}^{-\gamma\alpha\left(S_T^{(1)}-S_0^{(1)}\right)}\right)&=\mathrm{e}^{-\gamma(x+\nu(C_T))}\sup_{\alpha}\mathbb{E}_P\left(-\mathrm{e}^{-\gamma\alpha\left(S_T^{(1)}-S_0^{(1)}\right)+\gamma C_T}\right)\end{aligned}$$

devido à independência das variáveis aleatórias,

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-\gamma x}\sup_{\alpha}\mathbb{E}_P\left(-\mathrm{e}^{-\gamma\alpha\left(S_T^{(1)}-S_0^{(1)}\right)}\right)&=\mathrm{e}^{-\gamma(x+\nu(C_T))}\ \mathbb{E}_p\left(\mathrm{e}^{\gamma C_T}\right)\ \sup_{\alpha}\mathbb{E}_P\left(-\mathrm{e}^{-\gamma\alpha\left(S_T^{(1)}-S_0^{(1)}\right)}\right)\\\mathrm{e}^{-\gamma x}&=\mathrm{e}^{-\gamma x-\gamma\nu(C_T)}\mathbb{E}_p\left(\mathrm{e}^{\gamma C_T}\right)\\1&=\mathrm{e}^{-\gamma\nu(C_T)}\ \mathbb{E}_p\left(\mathrm{e}^{\gamma C_T}\right)\\-\gamma\nu(C_T)&=\log 1-\log\mathbb{E}_P\left(\mathrm{e}^{\gamma C_T}\right)\\\nu(C_T)&=\frac{1}{\gamma}\log\mathbb{E}_P\left(\mathrm{e}^{\gamma C_T}\right).\end{aligned}$$

Mostrando, claramente, a não linearidade no apreçamento do contrato.

2. *Recuperação do Mercado Completo.*

   De fato, se C_T for replicável seja X_0^R a riqueza associada à posição inicial do portfólio replicador e defina $\nu(kC_T)=kX_0^R$. Podemos então decompor o investimento inicial na parte de investimento e de replicação da seguinte forma:

$$\begin{aligned}X_0&=X_0^I+kX_0^R-kC_0\\&=X_0^I,\end{aligned}$$

   onde X_0^I está associado ao investimento feito a partir da riqueza inicial x. Como C é replicável, temo sainda $X_T=X_T^I$. Desta forma, temos

$$\begin{aligned}V^{C_T}\left(X_t+\nu_t\left(C_T\right),-k,t;T\right)&=\sup_{\xi\in\wp}\mathbb{E}_P\left(u\left(X_T-kC_T\right)|\mathcal{F}_t\right)\\&=\sup_{\xi\in\wp}\mathbb{E}_P\left(u\left(X_T^I\right)|\mathcal{F}_t\right)\\&=V^0\left(X_t,0,t;T\right)\end{aligned}$$

Da definição de preço por indiferença concluímos que

$$\begin{aligned}\nu(kC_T) &= kX_0^R \\ &= k\mathbb{E}_{P^*}[C_T] \qquad\qquad P^* \text{ medida martingal equivalente.}\end{aligned}$$

3. *Monotonicidade*

Seja p^i com $i = 1,2$ o preço por indiferença relativos à C_T^i tal que $C_T^1 \leqslant C_T^2$, então $p^1 \leqslant p^2$.

De fato, considerando x a riqueza inicial, teremos que o preço por indiferença para C_T^i será dado por:

$$V^{C_T^i}\left(x - p^i, k, 0; T\right) = V^0\left(x, 0, 0; T\right),$$

Como o lado direito da equação acima não se altera, afirma-se que vale:

$$V^{C_T^1}\left(x - p^1, k, 0; T\right) = V^{C_T^2}\left(x - p^2, k, 0; T\right)$$

Denotando por X_T^i será o processo de riqueza relativo à riqueza inicial $x - p^i$, reescreve-se a igualdade anterior, como:

$$\sup_{\xi \in \wp} \mathbb{E}_P\left(u\left(X_T^1 + kC_T^1\right) | \mathcal{F}_t\right) = \sup_{\xi \in \wp} \mathbb{E}_P\left(u\left(X_T^2 + kC_T^2\right) | \mathcal{F}_t\right).$$

Sendo $u(\cdot)$ função de utilidade será crescente, além disso temos:

$$C_T^1 \leqslant C_T^2 \;\Rightarrow\; kC_T^1 \leqslant kC_T^2$$

Para que valha a igualdade devemos ter $X_T^1 \geqslant X_T^2$, com isso no tempo inicial, também valerá:

$$x - p^1 \geqslant x - p^2 \;\Rightarrow\; p^1 \leqslant p^2.$$

Com isso mostramos a monotonicidade do preço de indiferença.

Uma detalhe a se destacar é a relação envolvendo o preços de super e sub-replicação de um determinado contrato C_T e o preço replicador deste mesmo contrato.

$$p^{sub}(k) \leqslant p(k) \leqslant p^{sup}(k).$$

4. *Concavidade do preço*

Seja p_λ o preço por indiferença para o seguinte contrato $\lambda C_T^1 + (1-\lambda) C_T^2$, onde $\lambda \in [0,1]$. Então

$$p_\lambda \geqslant \lambda p^1 + (1-\lambda) p^2.$$

Seguindo Henderson (2007), mostra-se que de fato se estivermos considerando preço de compra (*bid*) do contrato, teremos que sendo X_T^i o processo de riqueza para um indivíduo com riqueza inicial $x - p^i$, ou seja, para o indivíduo que tenha adquirido uma unidade do contrato C_T^i. Então, por definição:

$$V^0(x, 0, 0; T) = V^{C_T^i}\left(x - p^i, 1, 0; T\right) = \sup_{\xi \in \wp} \mathbb{E}_P\left(u\left(X_T^i + C_T^i\right) | \mathcal{F}_t\right)$$

Definindo:

$$\overline{X}_T = \lambda X_T^1 + (1-\lambda) X_T^2.$$

$\overline{X}_T$ representará o processo de valor associado à riqueza inicial $x_0 = x - \lambda p^1 - (1-\lambda)\,p^2$. Então

$$\begin{aligned} V^{\lambda C_T^1 + (1-\lambda) C_T^2}\left(x_0, 1, 0; T\right) &= \sup_{\xi \in \wp} \mathbb{E}_P\left(u\left(X_T + \lambda C_T^1 + (1-\lambda)\, C_T^2\right) | \mathcal{F}_t\right) \\ &\geqslant \mathbb{E}_P\left(u\left(\overline{X}_T + \lambda C_T^1 + (1-\lambda)\, C_T^2\right) | \mathcal{F}_t\right) \\ &= \mathbb{E}_P\left(u\left(\lambda\left(X_T^1 + C_T^1\right) + (1-\lambda)\left(X_T^2 + C_T^2\right)\right) | \mathcal{F}_t\right) \\ &\geqslant \lambda \mathbb{E}_P\left(u\left(\left(X_T^1 + C_T^1\right)\right) | \mathcal{F}_t\right) + (1-\lambda)\, \mathbb{E}_P\left(u\left(\left(X_T^2 + C_T^2\right)\right) | \mathcal{F}_t\right) \\ &= V^0\left(x, 0, 0; T\right) \\ &= V^{\lambda C_T^1 + (1-\lambda) C_T^2}\left(x - p_\lambda, 1, 0; T\right). \end{aligned}$$

Aqui vimos a concavidade do preço de compra. Por outro lado, um argumento similar mostra a convexidade dos preço de venda.

3.4 A escolha da Função de Utilidade

A técnica descrita nesta seção, introduzida por Bernard et al. (2013), identifica a função de utilidade, bem como seus parâmetros, a partir da distribuição de retornos requerida pelo agente e o contexto de mercado em que os ativos são negociados.

Mais precisamente, Bernard et al. (2013) discute uma formulação que, para uma dada distribuição de retornos de um portfólio ótimo, associa uma função de utilidade correspondente.

Esta formulação considera um mercado livre de oportunidade de arbitragem $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ de um período (T=1). A densidade da medida neutra ao risco em relação à medida histórica é representada por φ_T - que neste contexto denotaremos de *pricing Kernel*. A densidade φ_T é positiva em $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$. O processo de valor X_0 será dado por:

$$X_0 = \mathbb{E}[\varphi_T X_T],$$

com X_T representado o processo no tempo T e considerado de forma que X_0 seja finito.

A relação de preferência é suposta satisfazer *dominância estocástica de primeira ordem* (DEP), a qual é definida como:

Definição 3.3. *Sejam F e G distribuições cumulativas de probabilidade com suporte em $\mathbb{R}$. F terá dominância estocástica de primeira ordem sobre G, se e somente se,*

$$F\left(x\right) \leqslant G\left(x\right)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

A dominância estocástica de primeira ordem de F sobre G será condição necessária, porém não suficiente para termos:

$$\mathbb{E}_F\left(x\right) > \mathbb{E}_G\left(x\right).$$

Adicionalmente será exigido que a relação de preferência tenha uma representação numérica U, que seja não decrescente (estritamente crescente) e que satisfaça a *lei de invariância*—veja Bernard et al. (2013) para uma discussão mais detalhada dessas hipóteses.

Neste contexto, Bernard et al. (2013) prova o seguinte resultado:

Teorema 3.4. *A preferência $U(\cdot)$ será não decrescente e satisfará a lei de invariância se e somente se $U(\cdot)$ satisfizer DEP.*

Consideremos agora o seguinte problema:

$$\max \; U(X_T) \quad \text{s.a} \quad \mathbb{E}[\varphi_T X_T] = X_0. \tag{3.6}$$

Suponha que exista uma solução ótima X_T^* para o problema (3.6) e denote sua distribuição cumulativa de probabilidade por F. Intuitivamente, se $U(\cdot)$ satisfaz as hipóteses do teorema 3.4, então isso significa dizer que, dentre todas as estratégias com distribuição acumulada F, a estratégia ótima X_T^* será a menos custosa. O Lema 3.1 abaixo mostra que a nossa intuição está correta:

Lema 3.1. *(Custo eficiente) Assumindo que exista uma solução ótima X_T^* para 3.6 e denotado sua distribuição cumulativa de probabilidade por F. Então X_T^* será a estratégia mais barata (mais eficiente) de se obter F em um investimento de horizonte temporal $T > 0$, isto é, X_T^* resolve o problema:*

$$\min \mathbb{E}\left[(\varphi_T X_T)\right] \quad s.a \quad X_T \sim F \tag{3.7}$$

No contexto da teoria de utilidade esperada teremos $U(X_T) = \mathbb{E}\left[u(X_T)\right]$ e portanto o problema (3.6) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\max \; \mathbb{E}\left[u(X_T)\right] \quad \text{s.a} \quad \mathbb{E}[\varphi_T X_T] = X_0. \tag{3.8}$$

Vamos agora tentar identificar a função de utilidade u em (3.8) que seja compatível com a solução custo eficiente descrita pelo Lema 3.1. Para isso, seguindo Bernard et al. (2013), vamos introduzir uma classe apropriada de funções de utilidade:

Definição 3.5. *Seja $(a,b) \subset \mathbb{R}$ onde $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, com $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Define-se $\mathcal{U}_{(a,b)}$ como o conjunto das funções de utilidade u em (a,b) tal que $u : (a,b) \to \mathbb{R}$ seja de classe C^1, estritamente crescente em (a,b), u' estritamente decrescente em (a,b) (portanto o investidor é avesso ao risco), $u(c) = 0$ para algum $c \in (a,b)$, $u'(a) := \lim_{x \searrow a} u'(x) = +\infty$ e $u'(b) := \lim_{x \nearrow b} u'(x) = 0$.*

Vamos agora enunciar o resultado mais importante desta seção:

Teorema 3.6. *Considere uma distribuição de probabilidade acumulada F em $(a,b) \subset \mathbb{R}$ com $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, que seja estritamente crescente e contínua. Seja X_T^* a solução do problema (3.7) e suponha que o custo associado X_0 seja finito. Então X_T^* também será solução do problema (3.6) com a seguinte função de utilidade $u \in \mathcal{U}_{(a,b)}$:*

$$u(x) = \int_c^x F_{\varphi_T}^{-1}\left(1 - F(y)\right) dy \tag{3.9}$$

para algum c tal que $F(c) > 0$. Na equação (3.9), temos $F_{\varphi_T}^{-1}(p) = \inf\{t \mid F_{\varphi_T}(t) \geqslant p\}$, onde F_{φ_T} é a distribuição acumulada de φ_T. A função de utilidade u será única em $\mathcal{U}_{(a,b)}$ a menos de uma transformação linear.

Convém observar, conforme Bernard et al. (2013), que no caso de mercados atômicos a unicidade da função de utilidade não é garantida. Entretanto, na prática, mercados atômicos são parametrizados de forma a convergir para um mercado contínuo no limite em que o número de estados vai para infinito. Desta forma, é natural utilizar a utilidade encontrada no modelo contínuo, ainda que, utilizada como uma aproximação no caso discreto.

Em especial, para os casos em que os ativos seguem um modelo de difusão, como em Black-Scholes, e quando F for a distribuição acumulada normal, então a função de utilidade que se obtém aplicando-se o Teorema 3.6, será a função exponencial, como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 3.1. *De fato, no contexto do modelo de Black-Scholes, o ativo de risco segue:*

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} = \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t,$$

com W_t movimento browniano sob a medida histórica P, μ o drift e σ a volatilidade.

A solução do preço do ativo é dada por:

$$S_t = S_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right]$$

e, portanto, temos $\frac{S_t}{S_0} \sim \mathcal{LN}\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}t, \sigma^2 t\right)$.

Conforme Bernard et al. (2014), o processo referente à φ_t será determinado de forma única, por:

$$\varphi_t = \mathrm{e}^{-rt}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\frac{\mu-r}{\sigma})^2 t}\mathrm{e}^{-(\frac{\mu-r}{\sigma})W_t},$$

sendo $r < \mu$ a taxa livre de risco.

Consequentemente, φ_T é escrito como função do preço do ativo S_T, da seguinte forma:

$$\varphi_T = \alpha\left(\frac{S_T}{S_0}\right)^{-\beta},$$

onde $\alpha = \exp\left(\frac{\theta}{\sigma}\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T - \left(r + \frac{\theta^2}{2}\right)T\right)$, $\beta = \frac{\theta}{\sigma}$ e $\theta = \frac{\mu - r}{\sigma}$.

Desta forma, concluímos que a distribuição acumulada de φ_T, F_{φ_T} é dada pela seguinte fórmula:

$$F_{\varphi_T}(x) = P(\varphi_T \leqslant x) = \Phi\left(\frac{\ln(x) - M}{\theta\sqrt{T}}\right),$$

com $\varphi_T \sim \mathcal{LN}\left(-rT - \frac{\theta^2 T}{2}, \theta^2 T\right)$.

Como calculado em Bernard et al. (2013), temos que:

$$F_{\varphi_T}^{-1}(y) = \exp\left\{\Phi^{-1}(y)\theta\sqrt{T} - rT - \frac{\theta^2 T}{2}\right\}.$$

Portanto, tomando F como a distribuição de uma variável aleatória normal de média M e *variância* Σ*, temos que:*

$$F_{\varphi_T}^{-1}(1 - F(y)) = F_{\varphi_T}^{-1}\left(1 - \Phi\left(\frac{y-M}{\Sigma}\right)\right)$$

$$= F_{\varphi_T}^{-1}\left(\Phi\left(-\frac{y-M}{\Sigma}\right)\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{y-M}{\Sigma}\theta\sqrt{T} - rT - \frac{\theta^2}{2}T\right)$$

$$= \exp\left(\frac{M}{\Sigma}\theta\sqrt{T} - rT - \frac{\theta^2}{2}T - \frac{y}{\Sigma}\theta\sqrt{T}\right).$$

De posse desses cálculos preliminares, podemos agora aplicar o Teorema 3.6 e obter:

$$u(x) = \int_{\infty}^{x} \exp\left(\frac{M}{\Sigma}\theta\sqrt{T} - rT - \frac{\theta^2}{2}T - \frac{y}{\Sigma}\theta\sqrt{T}\right) \mathrm{d}y$$

$$= -\frac{\Sigma}{\theta\sqrt{T}} \exp\left(\frac{M}{\Sigma}\theta\sqrt{T} - rT - \frac{\theta^2}{2}T - \frac{x}{\Sigma}\theta\sqrt{T}\right).$$

Tomando $a = \exp\left(\frac{M}{\Sigma}\theta\sqrt{T} - rT - \frac{\theta^2}{2}T\right)$ *e* $\gamma = \frac{\theta\sqrt{T}}{\Sigma}$*, temos:*

$$u(x) = -\frac{a}{\gamma}\exp(-\gamma x).$$

Ou seja, a menos do fator multiplicativo a*, a função de utilidade associada a retornos normais para o mercado de Black-Scholes é a exponencial.*

No caso de agentes mais conservadores, ou mesmo menos sofisticados, a especificação de uma distribuição normal de retornos parece bastante apropriada. Como vimos acima isso leva naturalmente a escolha de uma função de utilidade exponencial. Motivados por esta discussão, trataremos de agora em diante do apreçamento por indiferença utilizando essa função.

Capítulo 4

Método de Apreçamento Baseado em Indiferença

4.1 Introdução

Neste capítulo estendemos o trabalho de Musiela & Zariphopoulou (2004) e de Elliott & van der Hoek (2009).

Inspirados em Musiela & Zariphopoulou (2004) construímos um funcional, tal que, para um contrato contingente C_T o preço $\nu(C_T)$ é dado por:

$$\nu(C_T) = \mathcal{E}_{P^*}(C_T),$$

estabelecendo critérios para as escolhas da medida P^* e do funcional $\mathcal{E}$.

Com isso, contribuindo, para a aplicação do modelo em situações mais próximas às realidades, as quais os agentes de mercados vivenciam.

Em Musiela & Zariphopoulou (2004) o modelo de mercado envolve dois ativos, um negociável e outro não negociável, ambos seguindo a dinâmica do modelo binomial (tempo discreto). Os autores assumem que o submercado consistindo dos ativos negociáveis é completo. O ativo não negociável traz a componente de risco não mitigável , ou seja, ao ser considerado torna o mercado incompleto levando a não linearidade dos preços, conforme visto no capítulo 3. Nesse contexto de mercado, os autores apreçam por indiferença um contrato contingente, que leva em conta a aversão ao risco associada ao agente.

Neste trabalho utiliza-se, no mesmo espírito de Musiela & Zariphopoulou (2004), o apreçamento por indiferença. Preservaremos a hipótese de completude do sub-mercado de ativos negociáveis, entretanto não haverá restrições ao número de ativos negociáveis. Para o ativo não negociável, tampouco haverá restrições quanto ao números de ativos e quanto ao número de estados, podendo inclusive ser não enumerável. Tal extensão altera o problema de otimização envolvido no apreçamento por indiferença, transformando o problema de otimização em dimensão finita no contexto de Musiela & Zariphopoulou (2004) em um problema de otimização em dimensão infinita.

No caso de mercados incompletos vemos que a a teoria de indiferença nos leva naturalmente, por um lado, aos conceitos de *certainty equivalent* com a utilização de um modelo atuarial envolvendo a medida histórica P, não preservando a linearidade dos preços e, por outro lado, também, irá envolver o conceito de medida neutra ao risco sob o pressuposto de ausência de oportunidade de arbitragem.

Cada um desses conceitos está relacionado com a identificação e mensuração dos riscos considerados replicáveis ou não. Com o isolamento e tratamento adequado para cada um deles, esses conceitos são combinados para fornecer o preço do contrato.

Iremos usar a função de utilidade exponencial como representativa da preferência do agente.

O capítulo será dividido da seguinte forma: a primeira, fazendo o modelo para dois estágios de tempo; a seguir, mostrando que o modelo recupera o preço dos mercados completos e por fim, estendendo o método para o caso multiperíodo.

4.2 Solução para o Problema do Investidor

Vamos supor um modelo de mercado incompleto de um período no qual os preços dos ativos estarão definidos em um espaço de probabilidade (Ω, P) com $t = 0, \cdots, T = 1$.

Os $N + 1$ ativos negociáveis serão representados por:

$$\overline{S}_t = \left(S_t^{(0)}, S_t\right) = \left(S_t^{(0)}, S_t^{(1)}, \ldots, S_t^{(N)}\right),$$

com $t \in \{0, T = 1\}$ considerando que os ativos não sejam redundantes.

O ativo livre de risco correspondendo ao 0-ésimo ativo. Sem perda de generalidade iremos supor $S_t^{(0)} \equiv 1, \forall t$. No que se segue isso corresponde a tomar o ativo livre de risco como numerário.

A estratégia de negociação para cada um dos ativos, definida para o período $[0, T = 1]$, será dada por:

$$\bar{\xi} = \left(\xi_1^{(0)}, \xi_1\right) = \left(\xi_1^{(0)}, \xi_1^{(1)}, \ldots, \xi_1^{(N)}\right)$$

e o processo de riqueza $(X_t)_{t \in \{0, T=1\}}$ será definido, da forma usual, como:

$$\begin{aligned} X_0 &= \omega \\ X_{T=1} &= \omega + \bar{\xi} \cdot \triangle \bar{S}_1, \end{aligned}$$

sendo ω a riqueza inicial do agente e $\triangle \bar{S}_1 = \bar{S}_1 - \bar{S}_0$.

Para fins de simplificação da notação utilizaremos $X_T = X$, em particular, X irá corresponder a uma variável aleatória variando dentro de uma classe convexa $\mathcal{X} \subset L^0(\Omega, P)$.

Y representa o ativo não negociável ou mesmo um conjunto de ativos sem prejuízo do resultado apresentado. Por fim, também, consideramos a existência do contrato contingente C_T com vencimento em $T = 1$, dado por:

$$C_T(S_T, Y_T) \in L^2(\Omega, P).$$

No contexto apresentado o espaço amostral Ω é escrito como o produto cartesiano:

$$\Omega = \Omega_S \times \Omega_Y \tag{4.1}$$

dos espaços amostrais de S e Y, respectivamente.

Como em Musiela & Zariphopoulou (2004), suporemos que o submercado consistindo apenas dos ativos negociáveis seja completo. Seguindo a terminologia de Musiela & Zariphopoulou (2004), diremos que o *mercado aninhado* formado apenas pelos ativos negociáveis é completo.

Neste caso, pela Teorema 1.25, existe uma única medida neutra risco P_S^* em Ω_S, além disso, (Ω_S, P_S^*) é atômico. Em particular, Ω_S é um conjunto finito.

Por conta disso, qualquer conjunto $A \subset \Omega$ pode ser decomposto da seguinte forma:

$$A = \bigcup_{k=1}^{m} \tilde{S}_k \times \tilde{Y}_k, \qquad \tilde{S}_i \times \tilde{Y}_i \cap \tilde{S}_j \times \tilde{Y}_j = \emptyset, \quad i \neq j,$$

para algum inteiro $m > 0$.

Desta forma, se $A \in F_\Omega$ então:

$$P(A) = \sum_{k=1}^{m} P\left(\tilde{S}_k \times \tilde{Y}_k\right)$$

.

Da definição de probabilidade condicional, temos que:

$$P\left(\tilde{Y}|\tilde{S}\right) = \frac{P\left(\tilde{S} \times \tilde{Y}\right)}{P\left(\tilde{S} \times \Omega_Y\right)}.$$

Além disso, a distribuição marginal de P com respeito a S é dada por:

$$P_S\left(\tilde{S}\right) = P\left(\tilde{S} \times \Omega_Y\right).$$

Portanto, a medida P pode ser fatorada da seguinte forma:

$$P\left(\tilde{S} \times \tilde{Y}\right) = P_S\left(\tilde{S}\right) P\left(\tilde{Y}|\tilde{S}\right). \tag{4.2}$$

Desta forma, temos:

$$\mathbb{E}_P\left[G(S,Y)\right] = \mathbb{E}_{P_S}\left[\mathbb{E}_P\left[G(S,Y)|S\right]\right] \tag{4.3}$$

com $G(\cdot)$ F_Ω-mensurável. Em especial, a identidade em (4.3) será utilizada várias vezes no decorrer da seção.

A partir de agora estamos interessados em determinar o preço ν_{C_T} de k unidades do contrato $C_T(S_T, Y_T)$.

Para tal, comecemos definindo o conjunto $\mathcal{B}_{\bar{\omega}}$ dos *payoffs* admissíveis dada uma riqueza inicial $\bar{\omega} = \omega + \nu_{C_T}$, como:

$$\mathcal{B}_{\bar{\omega}} := \{X \in \mathcal{X} \cap L^1(P^*) \mid \mathbb{E}_{P^*}[X] = \mathbb{E}_{P_S^*}[X] = \bar{\omega}\},$$

sendo $P^* \approx P$, representando a distribuição conjunta dos ativos, a qual é fatorada de forma similar à P na equação (4.2). Além disso:

$$\frac{\mathrm{d}P^*}{\mathrm{d}P} = \varphi.$$

No contexto de mercados incompletos a medida martingal equivalente não será única, portanto, conforme Musiela & Zariphopoulou (2004) iremos escolher convenientemente P^* de forma que esta medida seja tal que em relação ao ativo negociável ela seja martingal, ao mesmo tempo que, a distribuição condicional do ativo não negociável em relação aos negociáveis seja preservada com relação à medida histórica P, isto é:

$$P^*(Y|S) = P(Y|S) \tag{4.4}$$

Conforme Henderson & Hobson (2009) uma medida satisfazendo 4.4 é conhecida como medida martingal mínima (MMM) que foi introduzida por Follmer & Schweizer (1990).

Como discutido no exemplo 3.1 estamos interessados em portfólios cujos retornos sejam normais, portanto utilizaremos a função de utilidade exponencial. Essa função é estritamente crescente e estritamente côncava o que, conforme Proposição 2.2, induz uma preferência monótona e avessa ao risco.

A função de utilidade exponencial é dada por:

$$u(x) = A - B\mathrm{e}^{-\gamma x}, \qquad A \in \mathbb{R} \text{ e } \gamma, B \in \mathbb{R}^+$$

e sem perda de generalidade podemos tomar $A = B = 1$, como, de fato, faremos daqui em diante.

Reparemos ainda que a função $u(x)$ satisfaz as condições de Inada:

$$u'(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} u'(x) = \infty \text{ e } u'(\infty) = \lim_{x\to\infty} u'(x) = 0.$$

Conforme apresentado na Seção 3.3, o preço do contrato ν_{C_T} será calculado utilizando o apreçamento por indiferença que consiste na solução do problema:

$$V^{C_T}(\omega + \nu_{C_T}, k, 0; 1) = V^0(\omega, 0, 0; 1), \tag{4.5}$$

onde, $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ representa a quantidade de contratos na posição vendida.

Olhando, para o lado esquerdo da equação 4.5, estamos interessados em resolver o problema de maximizar a utilidade esperada de um portfólio em cuja composição seja considerado uma posição vendida em k unidades do contrato contingente cujo *payoff* seja função dos ativos negociáveis e do não negociável sendo a riqueza inicial dada por $\bar{\omega} = \omega + \nu_{C_T}$, ou seja:

$$V^{C_T}(\omega + \nu_{C_T}, k, 0; 1) = \sup_{X \in \mathcal{B}_{\bar{\omega}}} \mathbb{E}_P(u(X - kC_T)) \tag{4.6}$$

Considerando X^* solução do problema de otimização descrito na equação 4.6, podemos, de forma heurística, considerar pertubações a esta solução de forma que a restrição orçamentária continue sendo satisfeita:

$$X_\lambda = X^* + \lambda(X - \mathbb{E}_{P^*}[X]), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

com,

$$Z_\lambda = X_\lambda - kC_T$$

e X_λ satisfazendo a restrição do consumidor, ou seja, $\mathbb{E}_{P^*}[X_\lambda] = \omega + \nu_{C_T}$.

A condição necessária para que X^* seja o ponto que maximize a esperança da função de utilidade é que:

$$0 = \frac{d}{d\lambda}|_{\lambda=0}\mathbb{E}_P\left[u\left(Z_\lambda\right)\right] = \frac{d}{d\lambda}|_{\lambda=0}\mathbb{E}_P\left[u\left(X^* + \lambda\left(X - \mathbb{E}_{P^*}\left[X\right]\right) - kC_T\right)\right].$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}_P\left[u'\left(Z_\lambda\right)\left(X - \mathbb{E}_P{}^*\left[X\right]\right)\right] \\
&= \mathbb{E}_P\left[u'\left(X^* - kC_T\right)\left(X - \mathbb{E}_P\left[\varphi X\right]\right)\right] \\
&= \mathbb{E}_P\left[u'\left(X^* - kC_T\right)X - u'\left(X^* - kC_T\right)\mathbb{E}_P\left[\varphi X\right]\right] \\
&= \mathbb{E}_P\left[u'\left(X^* - kC_T\right)X\right] - \mathbb{E}_P\left[u'\left(X^* - kC_T\right)\mathbb{E}_P\left[\varphi X\right]\right] \\
&= \mathbb{E}_P\left[u'\left(X^* - kC_T\right)X\right] - \mathbb{E}_P\left[\varphi X\right]\mathbb{E}_P\left[u'\left(X^* - kC_T\right)\right] \\
&= \mathbb{E}_P\left[u'\left(X^* - kC_T\right)X\right] - \mathbb{E}_P\left[\mathbb{E}_P\left[u'\left(X^* - kC_T\right)\right]\varphi X\right].
\end{aligned}
$$

Definindo: $c := \mathbb{E}_P\left[u'\left(X^* - kC_T\right)\right]$.

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_P\left[u'\left(X^* - kC_T\right)X\right] - \mathbb{E}_P\left[c\varphi X\right] = 0 \\
&\mathbb{E}_P\left[u'\left(X^* - kC_T\right)X\right] = \mathbb{E}_P\left[c\varphi X\right] = \mathbb{E}_{P^*}\left[cX\right]
\end{aligned}
$$

Decompondo as esperanças acima em termos de suas esperanças condicionais, uma vez que a medida P^* preserva a medida histórica P quando condicionada nos ativos negociáveis, temos:

1. Para o lado esquerdo da equação acima, temos:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_P\left[Xu'\left(X^* - kC_T\right)\right] = & \\
&= \mathbb{E}_{P_S}\left[\mathbb{E}_P\left[Xu'\left(X^* - kC_T\right) \mid S\right]\right] \\
&= \mathbb{E}_{P_S}\left[X\ \mathbb{E}_P\left[u'\left(X^* - kC_T\right) \mid S\right]\right]
\end{aligned}
$$

2. Como o processo X depende apenas do conjunto de ativos S, o lado direito da equação poderá ser reescrito em termos da medida P_S, como:

$$\mathbb{E}_P\left[c\varphi X\right] = \mathbb{E}_{P_S}\left[\mathbb{E}_P\left[c\varphi X \mid S\right]\right] = \mathbb{E}_{P_S}\left[X\mathbb{E}_P\left[c\varphi \mid S\right]\right] = \mathbb{E}_{P_S}\left[Xc\varphi\right]$$

Logo,

$$\mathbb{E}_{P_S}\left[X\ \mathbb{E}_P\left[u'\left(X^* - kC_T\right) \mid S\right]\right] = \mathbb{E}_{P_S}\left[Xc\varphi\right]$$

Para todo X mensurável e limitado, temos:

$$\mathbb{E}_P \left[u' \left(X^* - kC_T\right) \mid S\right] = c\varphi$$

Aplicando a igualdade acima para a função exponencial, temos $u'(x) = \gamma \, \mathrm{e}^{-\gamma x}$ e, assim, obtemos:

$$\begin{aligned} c\varphi &= \mathbb{E}_P \left[u' \left(X^* - kC_T\right) \mid S\right] \\ &= \mathbb{E}_P \left[\gamma \, \mathrm{e}^{-\gamma(X^* - kC_T)} \mid S\right] \\ &= \gamma \, \mathrm{e}^{-\gamma X^*} \mathbb{E}_P \left[\mathrm{e}^{\gamma k C_T} \mid S\right] \\ &= u' \left(X^*\right) \mathbb{E}_P \left[\mathrm{e}^{\gamma k C_T} \mid S\right] \end{aligned}$$

Donde, conclui-se:

$$u' \left(X^*\right) = \frac{c\varphi}{\mathbb{E}_P \left[\mathrm{e}^{\gamma k C_T} \mid S\right]}.$$

Definindo: $I := \left(u'\right)^{-1}$.

Como u é côncava, então, u' é estritamente decrescente, logo:

$$X^* = I \left(\frac{c\varphi}{\mathbb{E}_P \left[\mathrm{e}^{\gamma k C_T} \mid S\right]}\right) \tag{4.7}$$

Considerando o contexto em que estamos trabalhando iremos adaptar o teorema enunciado em Föllmer & Schied (2004), o qual garante a existência e unicidade para o ponto que maximiza a esperança da função de utilidade.

Teorema 4.1. *Considere o problema de otimização:*

$$\sup_{X \in \mathcal{B}_{\bar{\omega}}} \mathbb{E}_P \left(u \left(X - kC_T\right)\right).$$

Para o qual:

$$u(x) = A - B\mathrm{e}^{-\gamma x}, \qquad A \in \mathbb{R} \text{ e } \gamma, B \in \mathbb{R}^+.$$

Seja $I := \left(u'\right)^{-1}$ *e* $c > 0$ *constante, tal que:*

$$X^* := I \left(\frac{c\varphi}{\mathbb{E}_P \left[\mathrm{e}^{\gamma k C_T} \mid S\right]}\right) \in L^1 \left(P_S^*\right).$$

Supondo que $\mathbb{E}_{P_S^*} \left[X^*\right] = \bar{\omega}$, *então:*

X^* *será a única solução para o problema de otimização na classe* $\mathbb{E}_{P_S^*}[X] \leq \mathbb{E}_{P_S^*}\left[X^*\right]$.

Demonstração. Segue da hipótese que:

$$\lim_{x \uparrow -\infty} u'(x) = +\infty,$$

Além disso, sendo $u(\cdot)$ limitada superiormente sua derivada deverá satisfazer:

$$\lim_{x\uparrow\infty} u'(x) = 0,$$

Portanto, $u'(\cdot)$ irá assumir valores em $(0,\infty)$, com isso, podemos afirmar que $I(\cdot)$ será Pqc bem definida para todo $c > 0$.

Sendo $u(\cdot)$ côncava e X^* o ponto de máximo, temos que para qualquer que seja $X - kC_T \in L^1(P^*)$, valerá:

$$u(X - kC_T) \leq u(X^* - kC_T) + u'(X^* - kC_T)(X - X^*)$$

tomando a esperança com respeito a P

$$\mathbb{E}_P[u(X - kC_T)] \leq \mathbb{E}_P[u(X^* - kC_T) + u'(X^* - kC_T)(X - X^*)]$$

$$\leq \mathbb{E}_P[u(X^* - kC_T)] + \mathbb{E}_P[u'(X^* - kC_T)(X - X^*)],$$

a desigualdade acima será satisfeita, quando:

$$0 \geq \mathbb{E}_P[u'(X^* - kC_T)(X - X^*)]$$

sendo $u'(x) = B\gamma \mathrm{e}^{-\gamma x}$:

$$\geq \mathbb{E}_P\left[B\gamma \mathrm{e}^{-\gamma(X^* - kC_T)}(X - X^*)\right]$$

$$\geq \mathbb{E}_P\left[B\gamma \mathrm{e}^{-\gamma X^*}\mathrm{e}^{\gamma kC_T}(X - X^*)\right]$$

$$\geq \mathbb{E}_P\left[u'(X^*)\mathrm{e}^{\gamma kC_T}(X - X^*)\right]$$

$$\geq \mathbb{E}_{P_S}\left[u'(X^*)(X - X^*)\,\mathbb{E}_P\left[\mathrm{e}^{\gamma kC_T} \mid S\right]\right]$$

como $u'(X^*) = \frac{c\varphi}{\mathbb{E}_P\left[\mathrm{e}^{\gamma kC_T} \mid S\right]}$,

$$\geq \mathbb{E}_{P_S}[c\varphi(X - X^*)] = c\,\mathbb{E}_{P^*}[(X - X^*)]$$

Como c é uma constante positiva:

$$\mathbb{E}_{P_S^*}[X^*] \geq \mathbb{E}_{P_S^*}[X]$$

Portanto, X^* realmente será ponto de máximo.

A unicidade da solução, segue por contradição: Suponhamos a existência de X_1 e X_2 pontos de máximo.

Sendo $u(\cdot)$ estritamente côncava, teremos para $t \in (0,1)$:

$$t\, u(X_1 - kC_T) + (1-t)\, u(X_2 - kC_T) < u(t(X_1 - kC_T) + (1-t)(X_2 - kC_T))$$

tomando a esperança em relação à P:

$$t\, \mathbb{E}_P [u(X_1 - kC_T)] + (1-t)\, \mathbb{E}_P [u(X_2 - kC_T)] < \mathbb{E}_P [u(t(X_1 - kC_T) + (1-t)(X_2 - kC_T))] .$$

Por este argumento o ponto representativo da combinação linear de X_1 e X_2 seria máximo, o que é absurdo.

Portanto, o ponto de máximo será único.

$\square$

Sendo:

$$I := (u')^{-1} \text{, ou seja, } I(x) = -\frac{1}{\gamma} \log \frac{x}{\gamma},$$

Teremos:

$$\begin{aligned}
X^* &= I\left(\frac{c\varphi}{\mathbb{E}_P [\mathrm{e}^{\gamma k C_T} \mid S]}\right) \\
&= -\frac{1}{\gamma} \log \left[\frac{\varphi c}{\gamma \mathbb{E}_P [\mathrm{e}^{\gamma k C_T} \mid S]}\right] \\
&= -\frac{1}{\gamma} \left[\log \frac{c\varphi}{\gamma} - \log \mathbb{E}_P \left[\mathrm{e}^{\gamma k C_T} \mid S\right]\right] \\
&= I(c\varphi) + \frac{1}{\gamma} \log \mathbb{E}_P \left[\mathrm{e}^{\gamma k C_T} \mid S\right] . \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

O valor da função exponencial no ponto $X^* - kC_T$:

$$\begin{aligned}
u(X^* - kC_T) &= \\
&= 1 - \exp\left\{-\gamma \left[I(c) - \frac{1}{\gamma} \log \varphi + \frac{1}{\gamma} \log \mathbb{E}_P \left[\mathrm{e}^{\gamma k C_T} \mid S\right] - kC_T\right]\right\} \\
&= 1 - \left\{\varphi \mathrm{e}^{-\gamma I(c)} \mathrm{e}^{\gamma k C_T} \mathrm{e}^{-\log \mathbb{E}_P\left[\mathrm{e}^{\gamma k C_T} \mid S\right]}\right\} \\
&= 1 - \left\{\frac{1}{\mathbb{E}_P [\mathrm{e}^{\gamma k C_T} \mid S]} \varphi \mathrm{e}^{-\gamma I(c)} \mathrm{e}^{\gamma k C_T}\right\}
\end{aligned}$$

Dado que $X^* \in \mathcal{B}_{\bar{\omega}}$ devemos ter satisfeita a restrição $\mathbb{E}_{P^*}[X^*] = \omega + \nu_{C_T}$, portanto:

$$\omega + \nu_{C_T} = \mathbb{E}_{P^*}[I(c\varphi)] + \frac{1}{\gamma}\mathbb{E}_{P^*}\left[\log \mathbb{E}_P\left[\mathrm{e}^{\gamma K C_T} \mid S\right]\right]$$

$$= \mathbb{E}_{P^*}[I(c)] + \mathbb{E}_{P^*}\left[-\frac{1}{\gamma}\log\varphi\right] + \frac{1}{\gamma}\mathbb{E}_{P^*}\left[\log \mathbb{E}_P\left[\mathrm{e}^{\gamma k C_T} \mid S\right]\right]$$

Como $\mathbb{E}_{P^*}[\log\varphi] = \mathbb{E}_P[\varphi\log\varphi]$ define a entropia relativa $H(P^* \mid P)$, conforme definição 1.27:

$$I(c) = \omega + \nu_{C_T} - \mathbb{E}_{P^*}\left[\frac{1}{\gamma}\log \mathbb{E}_P\left[\mathrm{e}^{\gamma k C_T} \mid S\right]\right] + \frac{1}{\gamma}H(P^* \mid P). \tag{4.9}$$

Assim,

$$I(c\varphi) = \omega + \nu_{C_T} - \mathbb{E}_{P^*}\left[\frac{1}{\gamma}\log \mathbb{E}_P\left[\mathrm{e}^{\gamma k C_T} \mid S\right]\right] + \frac{1}{\gamma}H(P^* \mid P) - \frac{1}{\gamma}\log\varphi \tag{4.10}$$

Maximizando a esperança da função de utilidade no ponto ótimo, temos:

$$\mathbb{E}_P[u(X^* - kC_T)] =$$

$$= 1 - \mathbb{E}_P\left[\frac{1}{\mathbb{E}_P[\mathrm{e}^{\gamma k C_T} \mid S]}\varphi \mathrm{e}^{-\gamma I(c)}\mathrm{e}^{\gamma k C_T}\right]$$

$$= 1 - \mathbb{E}_{P_S^*}\left[\mathbb{E}_{P^*}\left[\frac{1}{\mathbb{E}_P[\mathrm{e}^{\gamma k C_T} \mid S]}\mathrm{e}^{\gamma k C_T}|S\right]\mathrm{e}^{-\gamma I(c)}\right]$$

Como P^* preserva a medida histórica condicionada à S, segue:

$$= 1 - \mathbb{E}_{P_S^*}\left[\frac{1}{\mathbb{E}_P[\mathrm{e}^{\gamma k C_T} \mid S]}\mathbb{E}_{P^*}\left[\mathrm{e}^{\gamma k C_T} \mid S\right]\right]\mathrm{e}^{-\gamma I(c)}$$

$$= 1 - \mathrm{e}^{-\gamma I(c)} \tag{4.11}$$

Substituindo 4.9 em 4.11 o valor máximo da esperança da função de utilidade , ou seja, a solução do problema de otimização dado pela igualdade 4.6 será:

$$V^{C_T}(\omega + k\nu_{C_T}, k, 0; 1) = \sup_{X\in\mathcal{B}} \mathbb{E}_P(u(X - kC_T)) =$$

$$= 1 - \exp\left[-\gamma\left(\omega + \nu_{C_T} - \mathbb{E}_{P^*}\left[\frac{1}{\gamma}\log \mathbb{E}_P\left[\mathrm{e}^{\gamma k C_T} \mid S\right]\right] + \frac{1}{\gamma}H(P^* \mid P)\right)\right] \tag{4.12}$$

Para encontrarmos a solução do problema de indiferença definido em 4.5, temos, agora, que calcular:

$$V^0(\omega, 0, 0; 1),$$

cuja solução é igual a obtida em 4.12 tomando $k = 0$, portanto:

$$V^0(\omega, 0, 0; 1) = \sup_{X \in \mathcal{B}, k=0} \mathbb{E}_P(u(X)) =$$

$$= 1 - \exp\left[-\gamma\left(\omega - \mathbb{E}_{P^*}\left[\frac{1}{\gamma}\log\mathbb{E}_P\left[\mathrm{e}^{\gamma k C_T} \mid S\right]\right] + \frac{1}{\gamma}H(P^* \mid P)\right)\right]$$

substituindo: $k = 0$,

$$= 1 - \exp\left[-\gamma\left(\omega + \frac{1}{\gamma}H(P^* \mid P)\right)\right]$$

$$= 1 - \exp[-\gamma\omega - H(P^*|P)]$$

E finalmente, a solução para o problema de indiferença 4.5, será dada por:

$$V^{C_T}(\omega + \nu_{C_T}, k, 0; 1) = V^0(\omega, 0, 0; 1)$$

$$= 1 - \exp\left[-\gamma\left(\omega + \nu_{C_T} - \mathbb{E}_{P^*}\left[\frac{1}{\gamma}\log\mathbb{E}_P\left[\mathrm{e}^{\gamma k C_T} \mid S\right]\right] + \frac{1}{\gamma}H(P^* \mid P)\right)\right]$$

$$= 1 - \exp[-\gamma\omega - H(P^*|P)].$$

Para a igualdade acima valer, devemos ter:

$$\nu_{C_T} - \mathbb{E}_{P^*}\left[\frac{1}{\gamma}\log\mathbb{E}_P\left[\mathrm{e}^{\gamma k C_T} \mid S\right]\right] = 0$$

O preço do contrato ν_{C_T}, será dado por:

$$\nu_{C_T} = \mathbb{E}_{P^*}\left[\frac{1}{\gamma}\log\mathbb{E}_P\left[\mathrm{e}^{\gamma k C_T} \mid S\right]\right]. \tag{4.13}$$

Como enfatizado por Henderson (2007) e Musiela & Zariphopoulou (2004) e também na discussão sobre as propriedades do apreçamento por indiferença na Seção 3.3, observamos que o apreçamento dado pela fórmula (4.13) será tipicamente não linear. Por outro lado, veremos na Seção 4.3.2 que no limite que a aversão ao risco se anula recuperamos o apreçamento linear usando a medida martingal mínima.

Em especial, com vistas a definir o apreçamento multiperíodo, Musiela & Zariphopoulou (2004) interpreta a fórmula apresentada acima como um algoritmo de dois passos:

- Em um primeiro momento, calcula-se o denominado *payoff ajustado à preferência*, que leva em conta a aversão ao risco do agente.

  Nesta etapa os riscos não passíveis de *hedge* são identificados, isolados e apreçados.

$$\tilde{C}_T = \frac{1}{\gamma} \log \mathbb{E}_P \left[\mathrm{e}^{\gamma k C_T} \mid S \right].$$

- A segunda parte trata de apreçar a parte remanescente, ou seja, a parte passível de *hedge*, portanto, neste momento utiliza-se os princípios de apreçamento linear.

$$\nu_{C_T} = \mathcal{E}_{P^*} \left(C_T \right) = \mathbb{E}_{P^*} \left(\tilde{C}_T \right),$$

  com $\mathcal{E}$ definindo um funcional de preço.

4.3 Recuperação do Preço Neutro ao Risco

Veremos agora que o apreçamento por indiferença recupera o preço neutro ao risco em duas situações: quando o mercado for completo e no limite em que a aversão ao risco se anula. Neste último caso, recuperamos o apreçamento pela medida martingal mínima, a qual, no nosso caso corresponderá a medida de entropia mínima descrita no capítulo 1.

4.3.1 Recuperação do preço no mercado completo

Nesta subseção iremos considerar que o contrato contingente seja função apenas dos ativos negociáveis $\left(S^{(i)} \right)_{t \in \{0, T=1\}}$, $i = 1, \ldots n$ definidos em (Ω, P), ou seja:

$$C_T \left(S_T \right) \in L^2 \left(\Omega, P \right),$$

Neste caso, o *payoff* do contrato poderá ser replicado a partir de um portfólio $X = (X_t)_{t \in \{0, T=1\}}$ formado apenas pelos ativos negociáveis. Ou seja, todo o risco poderá ser replicado via instrumentos negociáveis no mercado.

A presença do ativo não negociável Y não irá influenciar o preço do contrato ν_{C_T}.

Portanto, neste caso, há de se esperar que o preço calculado por indiferença recupere o apreçamento clássico de mercados completos.

Isso significa que mesmo em um contexto de mercado incompleto, se nos restringirmos à negociações apenas da sua parte negociável, haverá um mercado aninhado ao mercado original o qual será completo.

De fato, se considerarmos da mesma forma que no caso geral, que o preço do contrato será obtido pela solução do problema de indiferença dado por 4.5, ou seja:

$$V^{C_T}\left(\omega + k\nu_{C_T}, k, 0; 1\right) = V^0\left(\omega, 0, 0; 1\right), \tag{4.14}$$

onde, $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$

Recordando que para o mercado em questão, temos:

$$P^*\left(Y \mid S\right) = P\left(Y \mid S\right),$$

com $P^* \approx P$.

O preço ν_{C_T}, no caso geral, de k unidades de um contrato contingente é dado por:

$$\nu_{C_T} = \mathbb{E}_{P^*}\left[\frac{1}{\gamma}\log \mathbb{E}_P\left[\mathrm{e}^{\gamma k C_T} \mid S\right]\right]$$

como C_T é função apenas dos ativos negociáveis:

$$\nu_{C_T} = \mathbb{E}_{P^*}\left[\frac{1}{\gamma}\log \mathrm{e}^{\gamma k C_T}\right]$$

$$= \mathbb{E}_{P^*}\left[\frac{1}{\gamma}\gamma k C_T\right]$$

portanto,

$$\nu_{C_T} = k\ \mathbb{E}_{P^*}\left[C_T\right]$$

Levando, então, como desejável, à recuperação do apreçamento linear de Black e Scholes, conforme visto na Seção 3.3.

4.3.2 Limite de anulamento da aversão ao risco

Vamos ver agora que, no limite em que a aversão ao risco se anula, obtemos um preço neutro ao risco dado pela escolha de uma medida martingal mínima.

Proposição 4.1. *Temos*

$$\lim_{\gamma\to 0} \nu_{C_T}(1,\gamma) = \mathbb{E}_{P^*}[C_T|S],$$

onde a medida $P^* \approx P$ satisfaz

$$P^*(Y|S) = P(Y|S).$$

Demonstração. Vamos calcular primeiro

$$\lim_{\gamma\to 0}\frac{1}{\gamma}\log \mathbb{E}_P\left[\mathrm{e}^{\gamma C_T} \mid S\right] = \lim_{\gamma\to 0}\frac{\mathbb{E}_P\left[\mathrm{e}^{\gamma C_T} C_T \mid S\right]}{\mathbb{E}_P\left[\mathrm{e}^{\gamma C_T} \mid S\right]} = \mathbb{E}_P\left[C_T \mid S\right].$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\lim_{\gamma \to 0} \nu_{C_T}(1, \gamma) &= \lim_{\gamma \to 0} \mathbb{E}_{P_S^*} \left[\frac{1}{\gamma} \log \mathbb{E}_P \left[\mathrm{e}^{\gamma C_T} \mid S \right] \right] \\
&= \mathbb{E}_{P_S^*} \left[\lim_{\gamma \to 0} \frac{1}{\gamma} \log \mathbb{E}_P \left[\mathrm{e}^{\gamma C_T} \mid S \right] \right] \\
&= \mathbb{E}_{P_S^*} \left[\mathbb{E}_P \left[C_T \mid S \right] \right] \\
&= \mathbb{E}_{P^*} \left[C_T \mid S \right].
\end{aligned}
$$

$\square$

4.4 Algoritmo de Apreçamento Multiperíodo

Nesta seção estamos interessados em desenvolver um funcional que permita calcular o preço do contrato contingente em uma dinâmica de tempo de vários períodos.

Agora, os preços dos ativos estarão definidos em um espaço de probabilidade filtrado $\left(\Omega, (\mathcal{F}_s)_{t \leqslant s \leqslant T}, P\right)$ com $t = 0, \cdots, T$.

Os $N+1$ ativos base para a economia serão representados por:

$$
\overline{S}_s = \left(S_s^{(0)}, S_s\right) = \left(S_s^{(0)}, S_s^{(1)}, \ldots, S_s^{(N)}\right), \quad s = t, \cdots, T.
$$

O ativo livre de risco correspondendo ao 0-ésimo ativo sendo $S_s^{(0)} \equiv 1, \forall s$, ou seja, a taxa livre de risco sera dada por: $r = 0$.

A riqueza inicial do investidor, no tempo t, será dada por ω sendo que, para o caso multiperíodo, iremos considerar que seus portfólio poderá ser rebalanceado em cada um dos intervalos de tempo $[s-1, s]$, com $s = t, t+1, \cdots, T-1, T$, portanto as estratégias de negociação serão definidas como o processo estocástico:

$$
\overline{\xi} = \left(\xi_s^0, \xi_s\right) = \left(\xi_s^0, \xi_s^1, \ldots, \xi_s^N\right),
$$

de forma que $(\xi_s^i)_{t \leqslant s \leqslant T}$ corresponda à estratégia assumida dentro do intervalo de tempo $[s-1, s]$.

Denotemos o conjunto referente a todas as possíveis estratégias, por:

$$
\zeta = \{ \bar{\xi} \mid \left(\xi_s^i\right)_{t \leqslant s \leqslant T} \in [s-1, s] \}
$$

O processo de riqueza no contexto de multiperíodo será definido como o processo $\mathcal{F}_s$-mensurável:

$$
X_s := \omega + \sum_{s=1}^{t} \bar{\xi}_s \cdot \triangle \bar{S}_s, \tag{4.15}
$$

com $\triangle \bar{S}_s = S_s - S_{s-1}$.

O ativo não negociável é representado pela variável aleatória Y_s, $s = t, \cdots, T$ e o contrato contingente com vencimento no tempo T por C_T. Vamos denotar $\mathcal{F}_s^S$ e $\mathcal{F}_s^Y$ como as filtrações geradas pelas variáveis aleatórias S_s e Y_s respectivamente, com $s = t, \cdots, T$ e $t = 0, \cdots, T$.

Definição 4.2. *Seja Z_s um processo $\mathcal{F}_s$-adaptado e sejam $0 \leq t \leq r \leq s \leq T$. Seguindo Musiela & Zariphopoulou (2004), vamos definir o funcional $\mathcal{E}_{P^*}^{(t,s)}(Z_r)$, como:*

1. *Se $s > r$:*
$$\mathcal{E}_{P^*}^{(t,s)}(Z_r) = \mathcal{E}_{P^*}^{(t,r)}(Z_r).$$
2. *Se $s = r$:*
   (a) *Para $s - t > 1$:*
$$\mathcal{E}_{P^*}^{(t,s)}(Z_s) = \mathcal{E}_{P^*}^{(t,s-1)}\left(\mathcal{E}_{P^*}^{(s-1,s)}(Z_s)\right),$$
   (b) *Para $s = t + 1$:*
$$\mathcal{E}_{P^*}^{(t,s)}(Z_s) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[\frac{1}{\gamma}\log\left(\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[\exp(\gamma Z_s)\left|\mathcal{F}_t \vee \mathcal{F}_s^S\right.\right]\right)|\mathcal{F}_t\right],$$
   (c) *Para $s = t$*
$$\mathcal{E}_{P^*}^{(s,s)}(Z_s) = Z_s.$$

Lema 4.1. *Dado o funcional $\mathcal{E}_{P^*}^{(t,T)}$, definido em 4.2, as seguintes propriedades serão satisfeitas:*

1. *$\mathcal{E}_{P^*}^{(t,s)}(Z_s)$ é um processo $\mathcal{F}_t$- adaptado para qualquer que seja $0 \leq t \leq s \leq T$.*
2. *Seja $k \in \mathbb{N}$. Então*
$$\mathcal{E}_{P^*}^{(t,t+k)}(Z_{t+k}) = \mathcal{E}_{P^*}^{(t,t+1)}\left(\mathcal{E}_{P^*}^{(t+1,t+2)}\left(\cdots\mathcal{E}_{P^*}^{(t+(k-1),t+k)}(Z_{t+k})\cdots\right)\right).$$
3. *Se $j, k \in \mathbb{N}$ com $j \leq k$, então*
$$\mathcal{E}_{P^*}^{(t,t+k)}(Z_{t+k}) = \mathcal{E}_{P^*}^{(t,t+j)}\left(\mathcal{E}_{P^*}^{(t+j,t+k)}(Z_{t+k})\right).$$
4. *$\mathcal{E}_{P^*}^{(t,s)}$ é um super-martingal.*

Demonstração.

1. De fato, da definição 4.2 , temos que para $s = t$:
$$\mathcal{E}_{P^*}^{(t,t)}(Z_t) = Z_t.$$
como Z_t é $\mathcal{F}_t$- adaptado, então, $\mathcal{E}_{P^*}^{(t,t)}(Z_t)$ também será.
2. Supondo que a afirmação seja verdadeira para $k-1 \in \mathbb{N}$, com $k \geq 2$. Pelo item 2.(a da definição 4.2 temos que para todo k:
$$\mathcal{E}_{P^*}^{(t,t+k)}(Z_{t+k}) = \mathcal{E}_{P^*}^{(t,t+(k-1))}\left(\mathcal{E}_{P^*}^{(t+(k-1),t+k)}(Z_{t+k})\right),$$
Logo, se vale para $k-1$, também, valerá para k.
3. Segue imediatamente do item anterior.

4. É suficiente mostrar que:

$$\mathbb{E}_{P^*}\left[\mathcal{E}_{P^*}^{(s,s)}\left(Z_s\right)|\mathcal{F}_{s-1}\right] \leq \mathcal{E}_{P^*}^{(s-1,s)}\left(Z_s\right).$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{P^*}^{(s-1,s)}\left(Z_s\right) &= \mathbb{E}_{P^*}\left[\frac{1}{\gamma}\log\left(\mathbb{E}_{P^*}\left[\exp\left(\gamma Z_s\right)|\mathcal{F}_{s-1}\vee\mathcal{F}_s^S\right]\right)|\mathcal{F}_{s-1}\right] \\
&\text{por Jessen:} \\
&\geq \mathbb{E}_{P^*}\left[\frac{1}{\gamma}\log\left(\exp\left(\gamma\mathbb{E}_{P^*}\left[Z_s|\mathcal{F}_{s-1}\vee\mathcal{F}_s^S\right]\right)\right)|\mathcal{F}_{s-1}\right] \\
&= \mathbb{E}_{P^*}\left[\mathbb{E}_{P^*}\left[Z_s|\mathcal{F}_{s-1}\vee\mathcal{F}_s^S\right]|\mathcal{F}_{s-1}\right] \\
&= \mathbb{E}_{P^*}\left[Z_s|\mathcal{F}_{s-1}\right] \\
&\text{pela definição 4.2:} \\
&= \mathbb{E}_{P^*}\left[\mathcal{E}_{P^*}^{(s,s)}\left(Z_s\right)|\mathcal{F}_{s-1}\right].
\end{aligned}$$

□

Teorema 4.3. *Seja $\mathbb{Q}$ uma medida martingal equivalente que satisfaça*

$$\mathbb{Q}\left[Y_{t+1}\left|\mathcal{F}_t\vee\mathcal{F}_{t+1}^S\right.\right] = \mathbb{P}\left[Y_{t+1}\left|\mathcal{F}_t\vee\mathcal{F}_{t+1}^S\right.\right].$$

Então

1. *$\nu_t\left(C_T\right)$ satisfaz a seguinte recursão:*

$$\begin{aligned}
\nu_t(C_T) &= \mathcal{E}_{P^*}^{(t,t+1)}\left(\nu_{t+1}(C_T)\right) \\
\nu_T(C_T) &= C_T.
\end{aligned}$$

2. $$\nu_t(C_T) = \mathcal{E}_{P^*}^{(t,T)}\left(C_T\right).$$

3. *Para $0 \leq t \leq s \leq T$:*
$$\nu_t(C_T) = \nu_t\left(\nu_s(C_T)\right).$$

Para provarmos o Teorema acima, precisamos do seguinte resultado:

Proposição 4.2. *Seja $G : \zeta \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $\zeta \subset \mathbb{R}^n$ tal que $G\left(\cdot, X\right)$ seja contínua com máximo global e que $G\left(\xi, \cdot\right)$ seja mensurável. Então:*

$$\sup_{\xi\in\zeta}\mathbb{E}_P\left[G\left(\xi, X\right)\right] = \mathbb{E}_P\left[\sup_{\xi\in\zeta}G\left(\xi, X\right)\right].$$

Demonstração. De fato, como:

$$\mathbb{E}_P\left[G\left(\xi,X\right)\right] \leqslant \mathbb{E}_P\left[\sup_{\xi\in\zeta} G\left(\xi,X\right)\right],$$

temos que

$$\sup_{\xi\in\zeta}\mathbb{E}_P\left[G\left(\xi,X\right)\right] \leqslant \mathbb{E}_P\left[\sup_{\xi\in\zeta} G\left(\xi,X\right)\right]. \tag{4.16}$$

Por outro lado, como $G(\cdot,X)$ tem máximo global, segue-se que:

$$\sup_{\xi\in\zeta} G\left(\xi,X\right) = G\left(\bar{\xi},X\right), \quad \bar{\xi}\in\zeta.$$

Logo,

$$\mathbb{E}_P\left[\sup_{\xi\in\zeta} G\left(\xi,X\right)\right] = \mathbb{E}_P\left[G\left(\bar{\xi},X\right)\right] \leqslant \sup_{\xi\in\zeta}\mathbb{E}_P\left[G\left(\xi,X\right)\right]. \tag{4.17}$$

Das equações 4.16 e 4.17, conclui-se:

$$\sup_{\xi\in\zeta}\mathbb{E}_P\left[G\left(\xi,X\right)\right] = \mathbb{E}_P\left[\sup_{\xi\in\zeta} G\left(\xi,X\right)\right].$$

□

Demonstração do Teorema 4.3. Lembrando que o preço de indiferença $\nu_t(C_T)$ é dado implicitamente por

$$V^0(X_t,0,t;T) = V^{C_T}(X_t+\nu_t(C_T),1,t;T).$$

1. Temos o seguinte:

$$V^0(X_t,0,t;T) = \sup_{\xi_{t+1},\ldots,\xi_T}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[1-\exp(-\gamma X_T)|\mathcal{F}_t\right]$$

$$= \sup_{\xi_{t+1}}\left[\sup_{\xi_{t+2},\ldots,\xi_T}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[1-\exp(-\gamma X_T)|\mathcal{F}_t\right]\right],$$

usando a propriedade de torre da esperança condicional, obtemos

$$V^0(X_t,0,t;T) = \sup_{\xi_{t+1}}\left[\sup_{\xi_{t+2},\ldots,\xi_T}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[1-\exp(-\gamma X_T)|\mathcal{F}_{t+1}\right]|\mathcal{F}_t\right]\right].$$

Para ξ_{t+1} fixo, seja

$$G(\xi,S) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[1-\exp(-\gamma X_T)|\mathcal{F}_{t+1}\right]$$

com X_T dado conforme Equação 4.15 e sendo $\xi = \{\xi_{t+2},\ldots,\xi_T\}$.

Pelo Teorema 3.2, $G(\cdot, S)$ terá máximo global. Portanto, usando a Proposição 4.2, temos:

$$V^0(X_t, 0, t; T) = \sup_{\xi_{t+1}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\sup_{\xi_{t+2},\ldots,\xi_T} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[1 - \exp(-\gamma X_T)|\mathcal{F}_{t+1}\right] |\mathcal{F}_t \right],$$

Lembrando que

$$V^0(X_{t+1}, 0, t+1; T) = \sup_{\xi_{t+2},\ldots,\xi_T} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[1 - \exp(-\gamma X_T)|\mathcal{F}_{t+1}\right],$$

podemos reescrever a expressão anterior como

$$V^0(X_t, 0, t; T) = \sup_{\xi_{t+1}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[V^0(X_{t+1}, 0, t+1; T)|\mathcal{F}_t\right].$$

Pela definição de apreçamento por indiferença, conforme Equação 3.3, teremos que a igualdade acima deverá ser equivalente a:

$$\sup_{\xi_{t+1}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[V^{C_T}(X_{t+1} + \nu_{t+1}(C_T), 1, t+1; T)|\mathcal{F}_t\right]$$

o que, por um argumento análogo ao visto no modelo de 2 períodos, implica que:

$$\sup_{\xi_{t+1}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[V^{C_T}(X_{t+1} + \nu_{t+1}(C_T), 1, t+1; T)|\mathcal{F}_t\right] = V^{C_T}(X_t + \mathcal{E}_{P^*}^{(t,t+1)} \left(\nu_{t+1}(C_T)\right), 1, t; T)$$

Portanto, temos

$$\nu_t(C_T) = \mathcal{E}_{P^*}^{(t,t+1)} \left(\nu_{t+1}(C_T)\right).$$

2. Temos pela relação acima, que a afirmativa é válida para $t+1$, ou seja:

$$\nu_t(C_T) = \mathcal{E}_{P^*}^{(t,t+1)} \left(\nu_{t+1}(C_T)\right),$$

mas da mesma relação temos que: $\nu_{t+1}(C_T) = \mathcal{E}_{P^*}^{(t+1,t+2)} \left(\nu_{t+2}(C_T)\right)$, logo:

$$\nu_t(C_T) = \mathcal{E}_{P^*}^{(t,t+1)} \left(\mathcal{E}_{P^*}^{(t+1,t+2)} \left(\nu_{t+2}(C_T)\right)\right)$$

pelo Lema 4.1 (3), podemos escrever:

$$\nu_t(C_T) = \mathcal{E}_{P^*}^{(t,t+2)} \left(\nu_{t+2}(C_T)\right),$$

o que mostra que a afirmativa também vale para $t+2$. Portanto, segue por indução que vale a afirmativa:

$$\nu_t(C_T) = \mathcal{E}_{P^*}^{(t,T)} \left(C_T\right).$$

3. Para a última afirmativa, note que temos naturalmente que

$$\nu_t\left(\nu_t(C_T)\right) = \nu_t(C_T), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Agora, suponha por indução que

$$\nu_{t+1}(C_T) = \nu_{t+1}(\nu_s(C_T)), \quad t+1 \leq s \leq T.$$

Daí, temos que

$$\begin{aligned}
\nu_t(C_T) &= \mathcal{E}_{P^*}^{(t,t+1)}\left(\nu_{t+1}(C_T)\right) && \text{por 1.} \\
&= \mathcal{E}_{P^*}^{(t,t+1)}\left(\nu_{t+1}(\nu_s(C_T))\right) && \text{pela hipótese de indução.} \\
&= \nu_t\left(\nu_s(C_T)\right) && \text{por 1.}
\end{aligned}$$

□

Capítulo 5

O algoritmo em ação

Este capítulo irá apresentar alguns exemplos numéricos do método de apreçamento descrito na seção 4.4. A implementação numérica desde método pode ser feita de várias maneiras, sendo que duas são naturais:(i) o uso de reticulados *(lattices)* em conjunto com o apreçamento via programação dinâmica; (ii) o uso do método de Monte Carlo, que consiste na utilização de métodos numéricos quando do cálculo do valor esperado. Neste trabalho, vamos nos restringir à primeira maneira.

5.1 Uma árvore para dois ativos

Vamos usar uma árvore binomial-binomial para modelar um mercado com dois ativos, sendo um deles negociável e outro não-negociável. Esta árvore foi derivada primeiramente por Kwok (2008) e rederivada em Grasselli (2011)—veja também Boyle (1988)—que no espírito de Cox et al. (1979) construiu uma árvore binomial para apreçar opções sob n ativos adjacentes de forma que a distribuição de probabilidade discreta aproximasse a distribuição lognormal multivariada. Os parâmetros são obtidos de forma que no limite, ou seja, para intervalos de tempo suficientemente pequenos, garanta-se que essa distribuição discreta converge para a distribuição contínua lognormal—veja por exemplo Nelson & Ramaswamy (1990).

Neste sentido iremos considerar um modelo definido no espaço filtrado $\left(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{0\leqslant t\leqslant T}\right)$. Iremos assumir o modelo composto por um ativo negociado X_t e um segundo ativo Y_t correlacionado ao primeiro cujo valor seja observável, no entanto, não negociável. A dinâmica dos ativos será representada pelos seguintes processos estocásticos (definido no apêndice A):

$$\mathrm{d}X_t = \mu_X X_t \,\mathrm{d}\, t + \sigma_X X_t \,\mathrm{d}W_t^1 \tag{5.1}$$

$$\mathrm{d}Y_t = \mu_Y Y_t \,\mathrm{d}\, t + \sigma_Y Y_t \,\mathrm{d}W_t^2 \tag{5.2}$$

Onde W_t^1 e W_t^2 representam movimentos Brownianos , definido no apêndice A, tais que $\langle \mathrm{d}W_t^1, \mathrm{d}W_t^2\rangle = \rho$, sendo a taxa livre de risco r.

O problema consiste em apreçar um contrato contingente C_T em $\mathcal{F}_T$ onde T é o horizonte de tempo.

Para tal, iremos calcular os preços utilizando o modelo discreto em que cada um dos ativos segue um processo binomial de forma que no limite a dinâmica em tempo discreto convirja para o modelo contínuo conforme desenvolvido em Grasselli (2011).

Seguindo o desenvolvido em Grasselli (2011) utiliza-se uma árvore binomial-binomial para modelar o mercado. Essa árvore foi derivada primeiramente por (ref. Boyle 1989/88) que no espírito de Cox, Ross e Rubinstein (1979) construiu uma árvore binomial para apreçar opções sob n ativos adjacentes de forma que a distribuição de probabilidade discreta aproximasse a distribuição lognormal multivariada. Os parâmetros são obtidos de forma que no limite, ou seja, para intervalos de tempo suficientemente pequenos, garanta-se que essa distribuição discreta converge para a distribuição contínua lognormal.

Mais especificamente no caso de Grasselli (2011) tal árvore foi utilizada no apreçamento de opções de reais considerando que o projeto terá um horizonte fixo de tempo e um mercado incompleto.

Iremos a seguir utilizar algumas propriedades das dinâmicas dos ativos em tempo contínuo, seguindo Shreve (2004) sem, no entanto, detalhá-las, por estarem fora do escopo deste trabalho.

Definindo o *market price of risk*:

$$\theta = -\frac{r - \mu_X}{\sigma_X}, \tag{5.3}$$

e utilizando o teorema de Girsanov, descrito no Apêndice A, teremos que, com respeito a uma medida apropriada, o processo $\mathrm{d}\tilde{W}_t^1$ dado por:

$$\mathrm{d}W_t^1 = \mathrm{d}\tilde{W}_t^1 + \frac{r - \mu_X}{\sigma_X}\mathrm{d}t, \tag{5.4}$$

também será um movimento Browniano padrão sob $\tilde{P}$.

Substituindo, 5.4 em 5.1:

$$\mathrm{d}X_t = rX_t \text{ d } t + \sigma_X X_t \text{ d}\tilde{W}_t^1.$$

Logo, a medida martingal mínima (MMM) será obtida tomando-se:

$$\mu_X^* = r;$$

Enquanto que μ_Y devera satisfazer:

$$\mu_Y^* = \mu_Y + \rho\sigma_Y\frac{r - \mu_X}{\sigma_X}$$

De fato, decompondo convenientemente o movimento Browniano $\mathrm{d}W_t^2$ em dois outros movimentos Brownianos independentes, podemos escrever $\mathrm{d}W_t^2$ (sob a medida P), como:

$$\mathrm{d}W_t^2 = \rho\mathrm{d}W_t^1 + \sqrt{1-\rho^2}\mathrm{d}W_t^3 \tag{5.5}$$

tal que, $\langle \mathrm{d}W_t^1, \mathrm{d}W_t^3 \rangle = 0$.

Substituindo 5.5 e 5.4 em 5.2, obtem-se:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}Y_t &= \mu_Y Y_t \text{ d}t + \sigma_Y Y_t \left(\rho \text{ d}W_t^1 + \sqrt{1-\rho^2} \text{ d}W_t^3\right) \\
&= \left(\mu_Y + \rho\sigma_Y\frac{r - \mu_X}{\sigma_X}\right) Y_t \text{ d}t + \sigma_Y Y_t \left(\rho \text{ d}\tilde{W}_t^1 + \sqrt{1-\rho^2} \text{ d}W_t^3\right).
\end{aligned}$$

No contexto de Opções Reais o uso da MMM quando $\rho = 0$ é equivalente a escolher uma medida Neutra ao Risco que não apreça o risco idiossincrático do projeto.

Para a construção da árvore no modelo discreto iremos considerar $X_t = \mathrm{e}^{S_t}$ e $Y_t = \mathrm{e}^{Z_t}$, sendo:

$$\mathrm{d}S_t = \nu_1 \mathrm{d}t + \sigma_X \mathrm{d}W_t^1,$$

$$\mathrm{d}Z_t = \nu_2 \mathrm{d}t + \sigma_Y \left(\rho \mathrm{d}W_t^1 + \sqrt{1-\rho^2}\mathrm{d}W_t^2 \right).$$

Apesar de não ser o escopo deste trabalho o estudo das dinâmicas em tempo contínuo iremos determinar ν_1 e ν_2 a partir da fórmula de Itô. A teoria sobre este conceito está amplamente discutida em Shreve (2004).

Usando a fórmula de Itô, e denotando $f(x) = \mathrm{e}^x$ temos:

$$\mathrm{d}(X_t) = \mathrm{d}(f(S_t)) = f_S\ \mathrm{d}S_t + \frac{1}{2} f_{SS}\ \langle \mathrm{d}S_t, \mathrm{d}S_t \rangle.$$

$$= \mathrm{e}^{S_t}\left[\nu_1 \mathrm{d}t + \sigma_1 \mathrm{d}W_t^1\right] + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{S_t}\sigma_X^2 \mathrm{d}t$$

$$= X_t \left(\nu_1 - \frac{\sigma_X^2}{2} \right) \mathrm{d}t + X_t \sigma_X \mathrm{d}W_t^1.$$

Da equação 5.1, temos que a forma diferencial acima para X_t somente será válida se satisfizer:

$$\nu_1 = \mu_X + \frac{\sigma_X^2}{2}$$

Pelos mesmos argumentos, teremos:

$$\nu_2 = \mu_Y + \frac{\sigma_Y^2}{2}$$

Conforme feito em Grasselli (2011), iremos considerar:

$$dt = \frac{T}{N}, \quad N \in \mathbb{Z}.$$

Definimos

$$U_X = \exp(\sigma_X \sqrt{dt}) \quad \text{e} \quad U_Y = \exp(\sigma_Y \sqrt{dt}),$$

com

$$D_X = \frac{1}{U_X} \quad \text{e} \quad D_Y = \frac{1}{U_Y}.$$

Neste caso, seguindo Boyle (1988), Kwok (2008), Grasselli (2011) vamos considerar a seguinte escolha para as probabilidades, que é feita igualando-se os momentos condicionais dos processos.

$$
\begin{aligned}
p_1 &= \frac{1}{4}\left(1+\sqrt{dt}(f_1+f_2)+\rho\right); \\
p_2 &= \frac{1}{4}\left(1+\sqrt{dt}(f_1-f_2)-\rho\right); \\
p_3 &= \frac{1}{4}\left(1+\sqrt{dt}(-f_1-f_2)+\rho\right); \\
p_4 &= \frac{1}{4}\left(1+\sqrt{dt}(-f_1+f_2)-\rho\right).
\end{aligned}
$$

onde, f_1 e f_2 são dadas por:

$$
\begin{aligned}
f_1 &= \frac{\mu_X-\sigma_X^2/2}{\sigma_S}; \\
f_2 &= \frac{\mu_Y-\sigma_Y^2/2}{\sigma_Y}.
\end{aligned}
$$

Um desenho esquemático da árvore em questão pode ser encontrado na Figura 5.1.

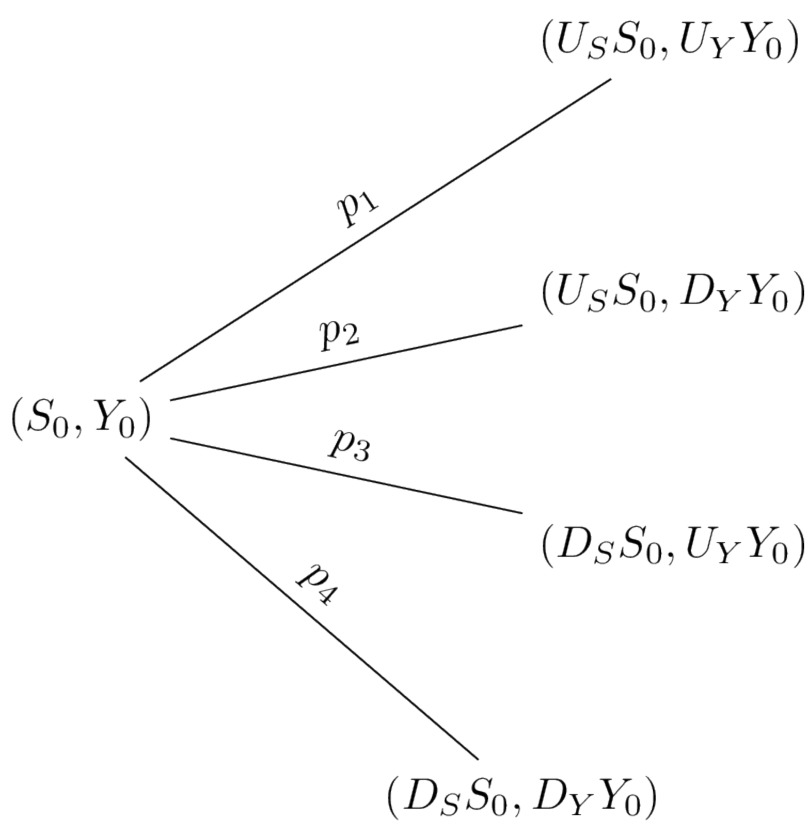


Figura 5.1: Representação da árvore para dois ativos.

5.2 Comparando apreçamentos por indiferença e neutro ao risco usando MMM

Vamos agora ilustrar as várias diferenças entre o apreçamento por indiferença e neutro ao risco usando a MMM.

Recuperação do preço binomial Começamos com um exemplo simples, confirmando que indiferença e apreçamento neutro ao risco coincidem no caso de mercados completos, como visto na seção 4.3. Para comprovar tal fato, foram realizadas simulações para preços de uma opção de compra no ativo X em que os preços no tempo inicial variando dentro de um intervalo de 1 (um) a 15 (quinze) com variações de 0.1, perfazendo portanto um total de 141 simulações de apreçamento por indiferença e comparando-se com o preço calculado pelo modelo de binomial.

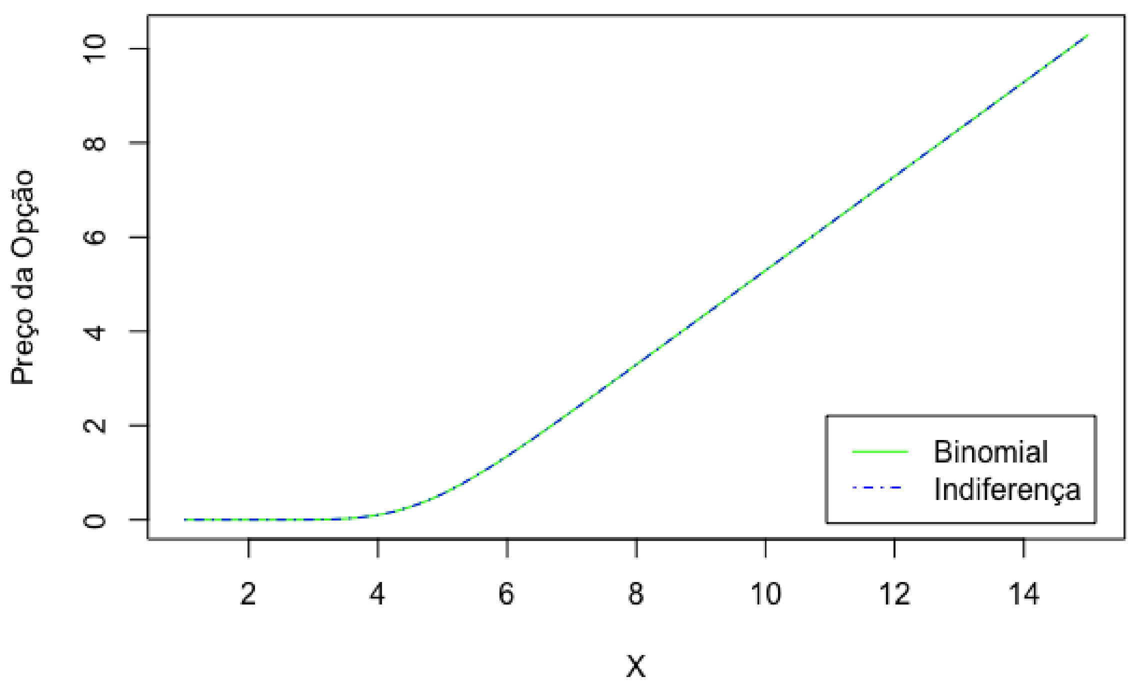


Figura 5.2: Modelo binomial e indiferença em mercados completos. Parâmetros: $K = 5$, $N = 64$, $r = 0.06$, $\mu_S = 0.09$, $\mu_Y = 0.06$, $\sigma_S = 0.2$, $\sigma_Y = 0.2$, $T = 1$. O preço não depende da escolha da correlação entre os ativos (ρ) ou do coeficiente de aversão ao risco (γ).

Portanto, a coincidência dos preços confirma que, quando o ativo é negociável, os argumentos de não arbitragem são suficientes para explicar o preço da opção. Nestes casos a preferência dos agentes ou mesmo suas probabilidades subjetivas não serão relevantes neste apreçamento.

Diferença entre preço de compra e venda no apreçamento por indiferença Contudo, o mesmo não acontece quando o ativo objeto tratar-se do ativo Y, ou seja, o ativo não negociável. Neste caso, mesmo o preço de venda e compra não serão os mesmos. O primeiro fica sempre acima do preço neutro ao risco, equanto que o segundo fica sempre abaixo.

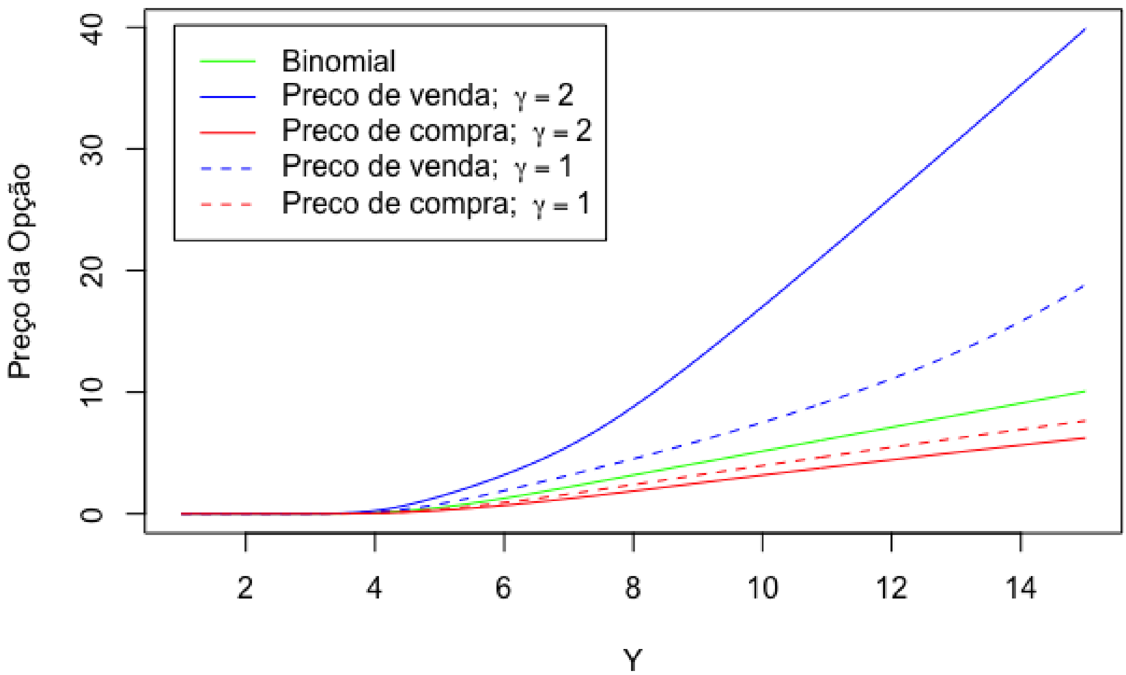
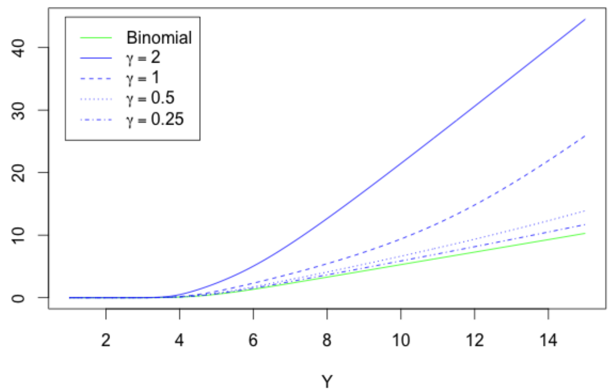


Figura 5.3: Modelo binomial e indiferença em mercados completos. Parâmetros: $K = 5$, $N = 64$, $r = 0.06$, $\mu_S = 0.09$, $\mu_Y = 0.06$, $\sigma_S = 0.2$, $\sigma_Y = 0.2$, $T = 1$, $\rho = 0.5$.

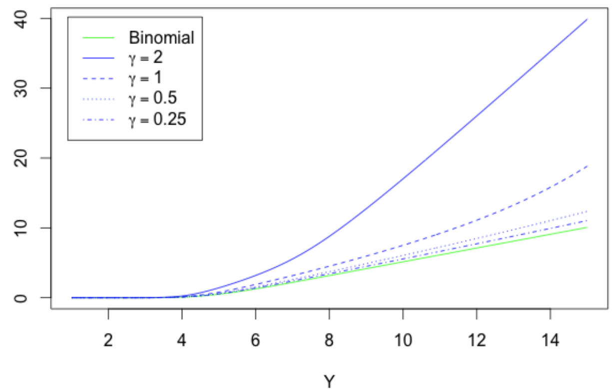
Comparação entre apreçamentos por indiferença e neutro ao risco usando MMM com volatilidades iguais A seguir, foram realizadas simulações de forma a calcular o preço de uma opção de compra cujo ativo objeto é o ativo não negociável Y variando o coeficiente de aversão ao risco do agente e o fator de correlação entre os ativos. O preço do ativo X no tempo inicial foi mantido constante e o preço do ativo não negociável variando dentro do intervalo de 1 (um) a 15 (quinze) com incrementos de 0.1. Estes resultados estão exibidos na figura 5.4.

Neste caso percebe-se que quando a correlação entre os ativos se aproxima de um, mas não é igual a um, o preço calculado pelo modelo de binomial sob o ativo X se torna bem próximo ao preço por indiferença. Tal fato corrobora a intuição muita utilizada como prática de mercado de que o preço calculado sob os argumentos de não arbitragem sob um ativo com correlação alta em relação ao ativo não negociável seria uma boa *proxy* para o preço do derivativo do mercado incompleto, portanto quanto maior a correlação mais a estratégia de *hedge* será perfeita.

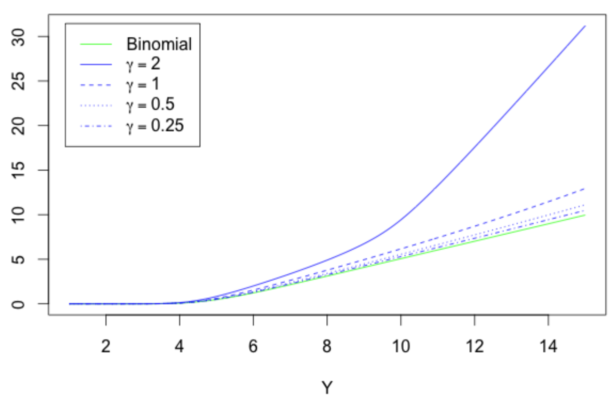
Para os caso em que a correlação é baixa percebe-se claramente a influência do grau de aversão ao risco do agente, ou seja, quanto mais averso ao risco maior será o preço dado por indiferença em relação ao preço neutro ao risco.



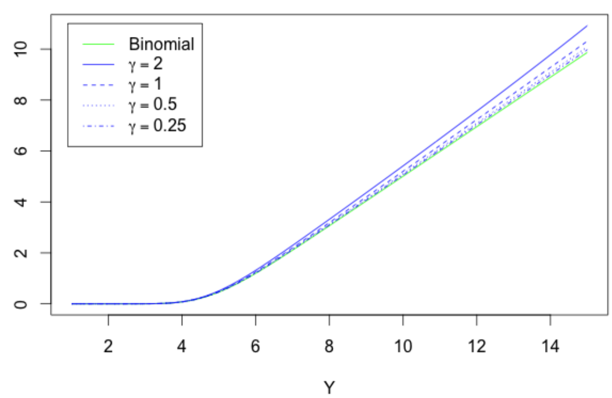
(a) $\rho = 0$



(b) $\rho = 0.5$



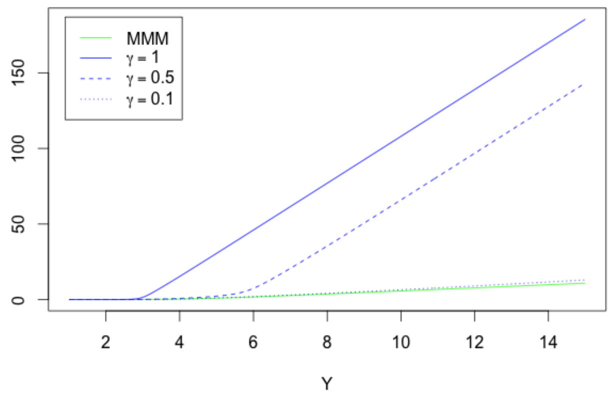
(c) $\rho = 0.75$



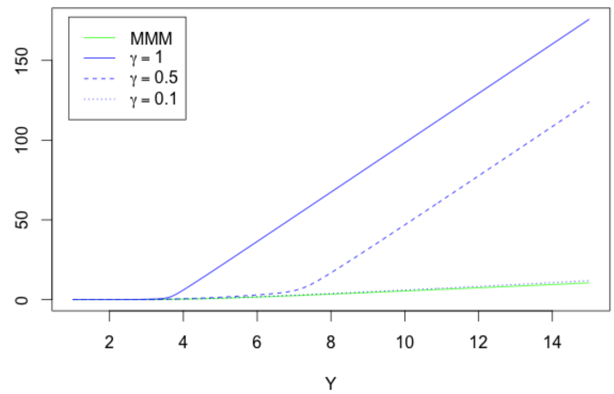
(d) $\rho = 0.95$

Figura 5.4: Modelo binomial e indiferença em mercados incompletos. Parâmetros: $K = 5$, $N = 64$, $r = 0.06$, $\mu_S = 0.09$, $\mu_Y = 0.06$, $\sigma_S = 0.2$, $\sigma_Y = 0.2$, $T = 1$. No caso do apreçamento por indiferença são exibidos somente os preços de venda.

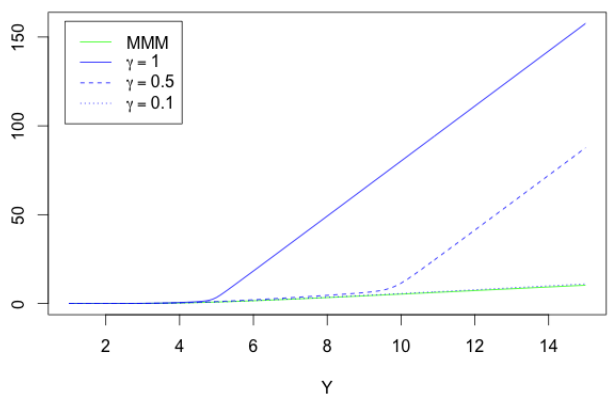
Comparação entre apreçamentos por indiferença e neutro ao risco usando MMM com volatilidades diferentes A figura 5.5 mostra que no caso em que o ativo negociado e o ativo não-negociado tenham volatilidades bem distintas, então mesmo quando forem muito correlacionados o preço no mercado incompleto pode divergir bastante do preço calculado pelo modelo binomial para o ativo não negociável. Isso irá ocorrer quando o grau de aversão ao risco for elevado.



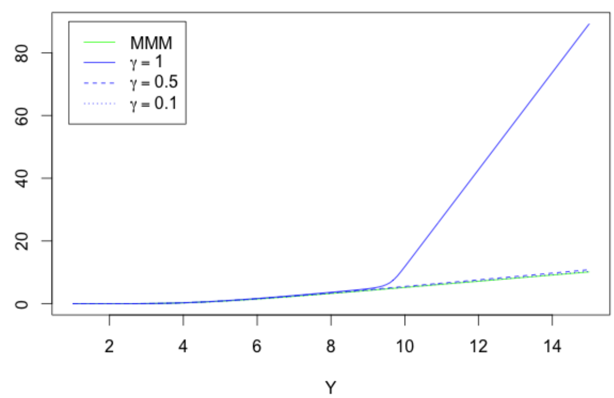
(a) $\rho = 0$



(b) $\rho = 0.5$



(c) $\rho = 0.75$



(d) $\rho = 0.95$

Figura 5.5: Modelo binomial e Indiferença em mercados incompletos. Parâmetros: $K = 5$, $N = 64$, $r = 0.06$, $\mu_S = 0.09$, $\mu_Y = 0.1$, $\sigma_S = 0.2$, $\sigma_Y = 0.35$, $T = 1$. No caso do apreçamento por indiferença são exibidos somente os preços de venda.

5.3 Extrapolação para Apreçamento Neutro ao Risco

Conforme observado na seção 4.3.2 o apreçamento por indiferença recupera o apreçamento neutro ao risco quando $\gamma \to 0$. Isso sugere que usando um procedimento de extrapolação numérica para $\gamma = 0$ obtemos um algoritmo alternativo para o apreçamento neutro ao risco com a medida martingal mínima.

Este limite foi implementado computacionalmente, variando o preço do ativo não negociável dentro do intervalo $[0, 15]$, calculando o preço por indiferença com coeficiente de aversão ao risco próximos de zero, isto é, $\gamma = 0.1$ e $\gamma = 0.01$. Daí, para cada conjunto de preços com um dado Y, construímos um *spline* cúbico e extrapolamos para $\gamma = 0$.

Os resultados desta implementação, podem ser observados na figura 5.6 ao plotar os resultados obtidos contra o preço dado pelo modelo binomial para a opção sobre Y utilizando-se a medida martingal miníma. Verifica-se então a consistência em relação aos preços calculados pela extrapolação dos preços por indiferença no limite de aversão ao risco nula.

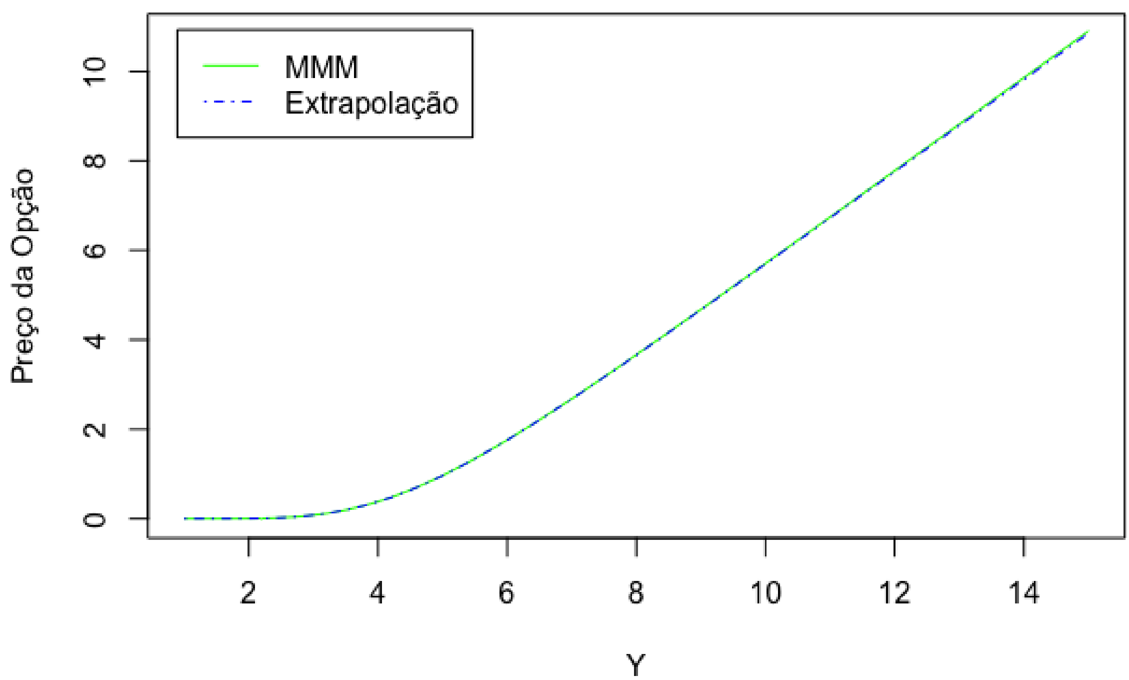


Figura 5.6: Extrapolação. Parâmetros: $K = 5$, $N = 64$, $r = 0.06$, $\mu_S = 0.09$, $\mu_Y = 0.1$, $\sigma_S = 0.2$, $\sigma_Y = 0.35$, $T = 1$.

5.4 Opções Americanas

Nesta seção vamos calcular apenas o preço de compra (bid) para opções americanas em mercados incompletos para ilustrar a aplicação do algoritmo aqui apresentado a problemas deste tipo. Esta escolha deve-se ao fato de que existe uma diferença fundamental entre os preços de compra e venda de uma opção americana. Um comprador tenta escolher a melhor data para o exercício da opção, dada a informação disponível até o momento — isso leva a um problema de tempo de parada ótimo. No caso do vendedor, o seu objetivo é se proteger contra todos os possíveis exercícios pelo comprador. Para uma discussão mais detalhada veja Föllmer & Schied (2004, Capítulo 6). Uma simplificação possível é supor que o comprador sempre exerce de forma ótima; neste caso, é possível decompor o problema do vendedor em dois: (a) calcular a política de exercício do comprador; (b) resolver uma opção bermudiana com os tempos de exercício dado pela solução anterior — veja Oberman & Zariphopoulou (2003).

O algoritmo usado aqui é uma variante do algoritmo recursivo clássico para opções americanas em árvores, cuja breve descrição é dada a seguir. Para uma discussão detalhada deste problema no contexto de apreçamento neutro ao risco em árvores binomiais veja Shreve (2012).

Tomando o tempo atual como $t = 0$ e o tempo de exercício como $t = T$, temos o seguinte algoritmo:

Algoritmo em tempo discreto para opções americanas

1. Em $t = T$, o valor da opção é dado pelo payoff.
2. Fazemos $t = t - 1$ e para todos os valores possíveis dos ativos calculamos:
   (a) o valor da opção europeia entre t e $t + 1$, calculada usando indiferença.
   (b) o valor da opção exercida.
3. O valor no tempo t, para cada valor possível dos ativos é o máximo entre os dois valores calculados acima.
4. Caso tenha exercido a opção, marca-se o nó em questão.
5. Iteramos 2–4 até alcançar $t = 0$.

As informações sobre os pontos onde a opção foi exercida podem ser pós-processadas para determinar a fronteira de exercício da opção.

Uma justificativa para aplicação deste procedimento no caso de uma opção americana sobre um ativo não-negociado pode ser encontrada em Grasselli (2011). Neste trabalho, o problema discreto é parametrizado para fornecer uma aproximação de um dado problema contínuo, que descrevemos com mais detalhes no apêndice B.

Recuperação do preço de mercado completo Na figura 5.7 a simulação retorna o resultado esperado em que não havendo necessidade de mensuração do risco idiossincrático o apreçamento usual de mercado completo é recuperado.

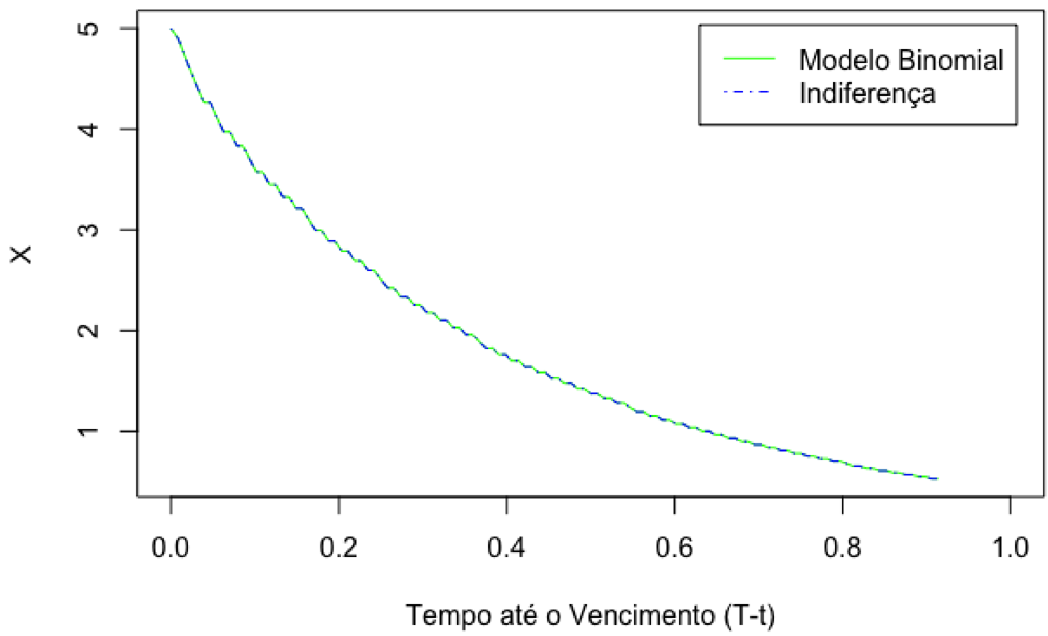
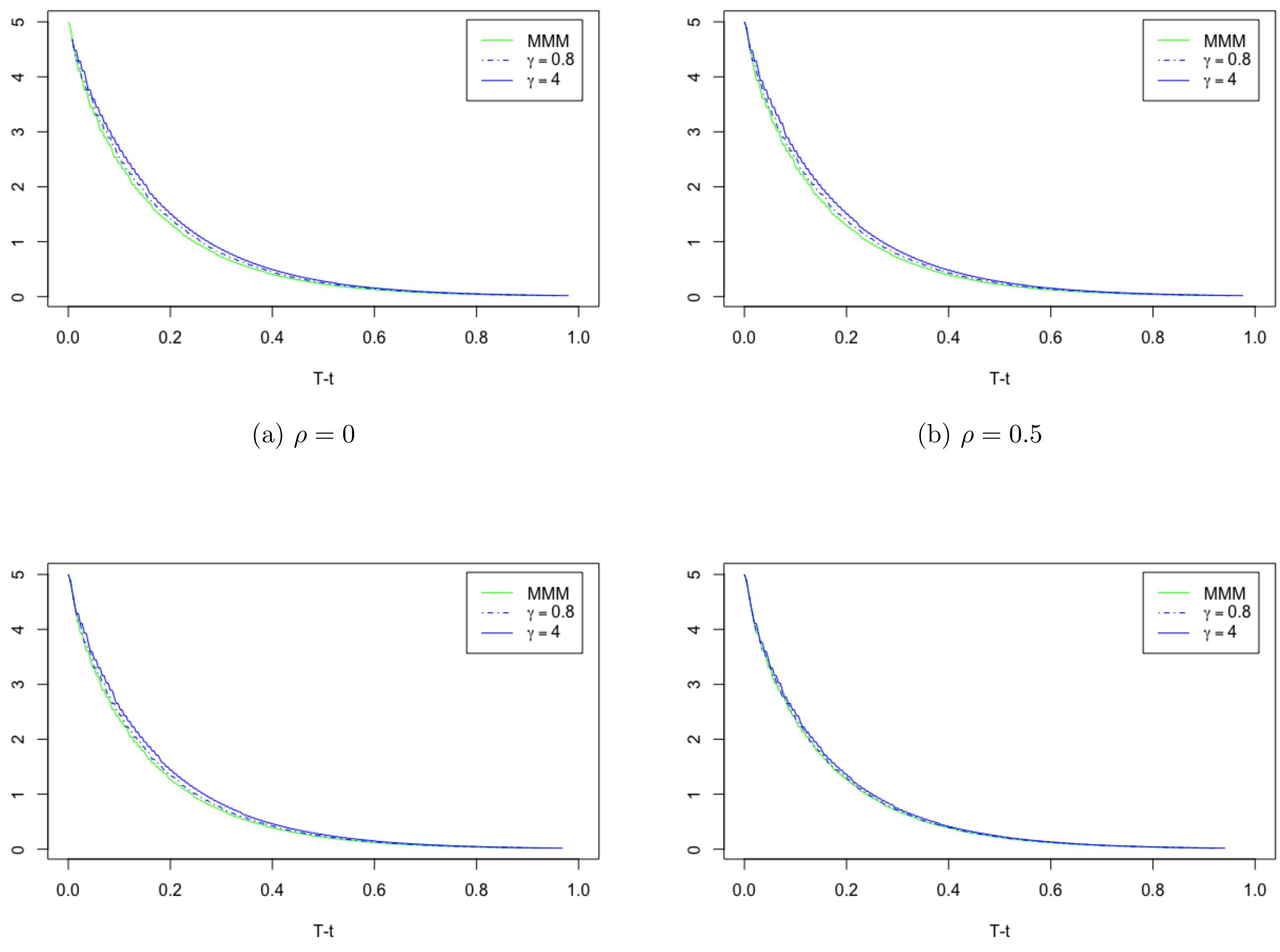


Figura 5.7: Fronteira de exercício para uma opção de venda americana no ativo negociado. Parâmetros: $K = 5$, $N = 128$, $r = 0.06$, $\mu_S = 0.09$, $\mu_Y = 0.1$, $\sigma_S = 0.2$, $\sigma_Y = 0.35$, $T = 1$.

Comparação entre o modelo binomial e indiferença. Preços de compra. Abaixo, as simulações demonstram claramente que mantendo ρ fixo e variando γ temos que o aumento de γ provoca um deslocamento da curva para cima mesmo que discreto, demonstrado, que uma aversão ao risco maior reflete uma maior preocupação do investidor em relação ao risco idiossincrático Além disso, quando o coeficiente de correlação entre o valor do projeto e o portfólio negociável é próximo de um, o valor da opção irá se aproximar mais do valor da opção no mercado completo, isto pois, quando maior o coeficiente de correlação mais o *hedge* a partir dos ativos negociáveis será considerado perfeito.

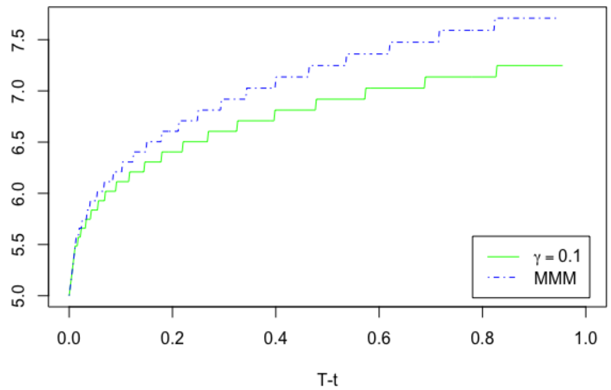


(a) $\rho = 0$ (b) $\rho = 0.5$

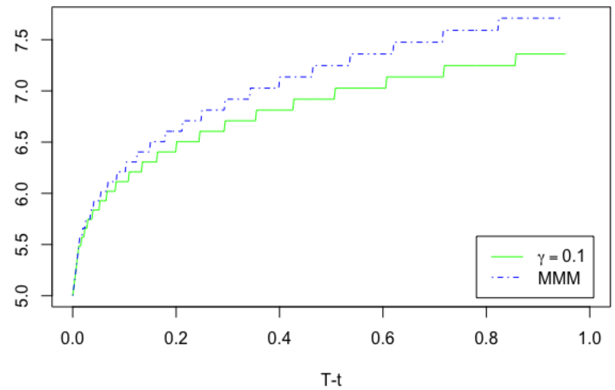
(c) $\rho = 0.75$ (d) $\rho = 0.95$

Figura 5.8: Fronteira de exercício para uma opção de venda americana no ativo não-negociado. Parâmetros: $K = 5$, $N = 256$, $r = 0.06$, $\mu_S = 0.09$, $\mu_Y = 0.1$, $\sigma_S = 0.2$, $\sigma_Y = 0.35$, $T = 1$. Preços de compra.

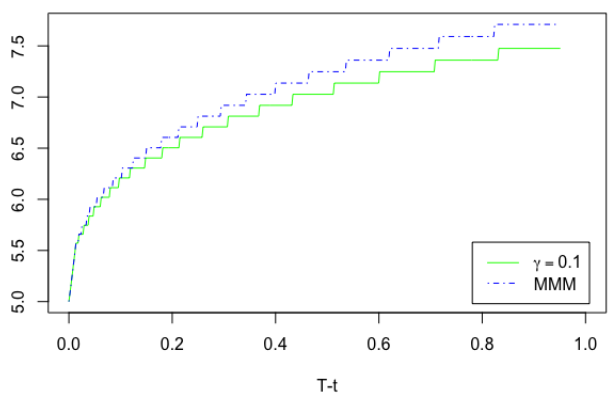
Opções de Compra. Preços de compra. A comparação da fronteira de exercício usando apreçamento neutro ao risco com o apreçamento por indiferença no caso de preço de compra para uma opção de compra sobre o ativo não negociado que paga dividendos. Note que o exercício dado pelo preço de venda se dá com um limiar mais baixo do que o caso neutro ao risco.



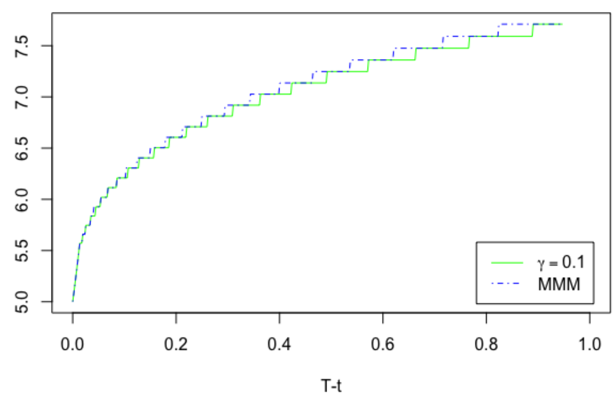
(a) $\rho = 0$



(b) $\rho = 0.5$



(c) $\rho = 0.75$



(d) $\rho = 0.95$

Figura 5.9: Fronteira de exercício para uma opção de compra americana no ativo não-negociado com dividendos. Parâmetros: $K = 5$, $N = 512$, $r = 0.06$, $\mu_S = 0.09$, $\mu_Y = 0.1$, $\sigma_S = 0.2$, $\sigma_Y = 0.35$, $T = 1$. Dividendo: $\delta = 0.1$. Preços de compra.

5.5 Opções de Margrabe

Conforme descrito em Aiube (2013), opção de Margrabe é uma opção de troca entre ativos, digamos S_t e Y_t.

O agente quer escolher na data $t < T$ o ativo que terá maior valor em T. Caso acredite que a diferença entre os valores dos ativos possa ser significativa em T, ele buscará alguma forma de se proteger da escolha que fará em t.

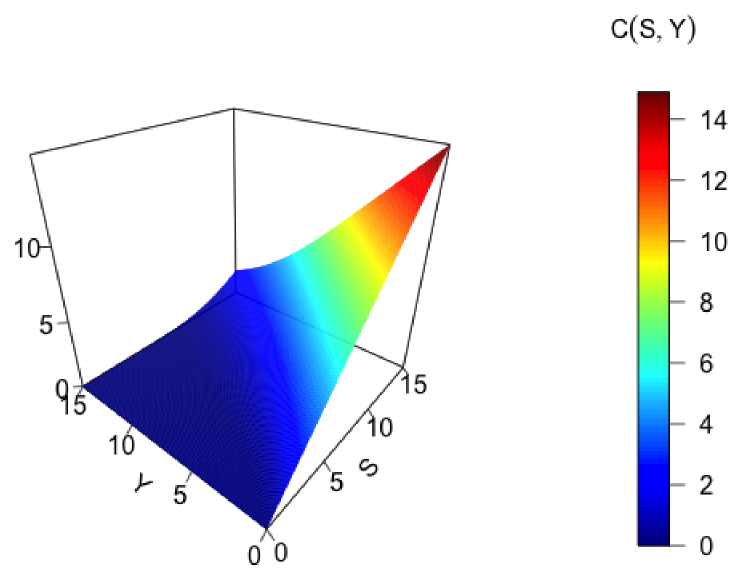
Para tal, seguirá a seguinte estratégia: supondo que opte por comprar o segundo ativo, ou seja, Y_t irá simultaneamente comprar uma opção de troca (*spread option*), com *strike* zero (K=0), ou seja, satisfazendo:

$$\max\left(S_T - Y_T, 0\right).$$

Assim, se ocorrer que $S_T > Y_T$, exercerá o seu direito e ficará com o segundo ativo. O custo da proteção será o preço da opção de troca que irá adquirir.

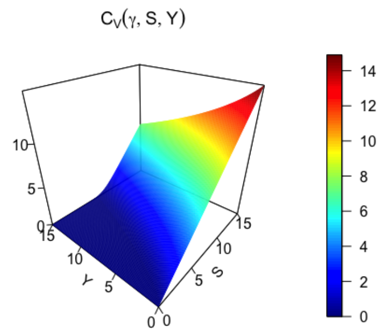
A seguir simulamos os preços de opções de Margrabe utilizando indiferença e o modelo binomial. Nestes exemplos, diferentemente do apresentado nas seções 5.2 a 5.4, o valor do contrato depende dos dois ativos S_t e Y_t, o que nos leva a uma análise bidimensional. Nas simulações é considerada, como nas seções anteriores, a medida martingal mínima descrita na seção 5.1.

As figuras 5.10 e 5.11 apresentam os preços calculados pelo modelo binomial e por indiferença, respectivamente. As simulações dos preços de indiferença são tanto de venda como de compra da opção, considerando diversos níveis de aversão ao risco.

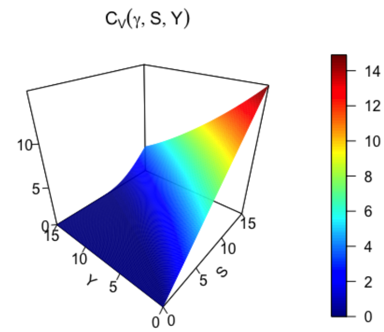


(a) Binomial

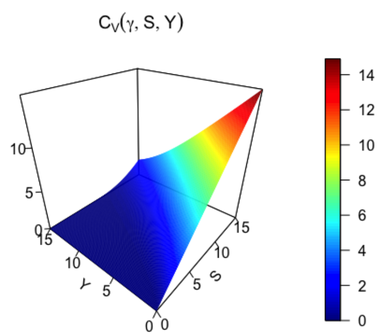
Figura 5.10: Preços da opção de Margrabe. Parâmetros: $K = 0$, $N = 16$, $r = 0.06$, $\mu_S = 0.09$, $\mu_Y = 0.1$, $\sigma_S = 0.2$, $\sigma_Y = 0.35$, $T = 1$ e $\rho = 0$.



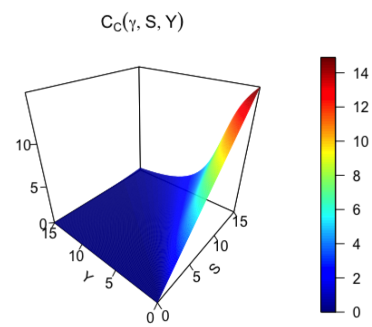
(a) Indiferença (venda) para $\gamma = 2$



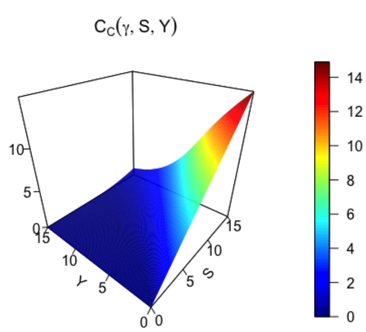
(b) Indiferença (venda) para $\gamma = 0.5$



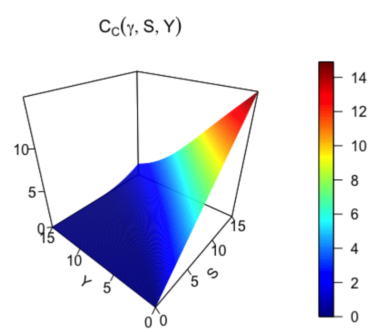
(c) Indiferença (venda) para $\gamma = 0.1$



(d) Indiferença (compra) para $\gamma = 2$



(e) Indiferença (compra) para $\gamma = 0.5$



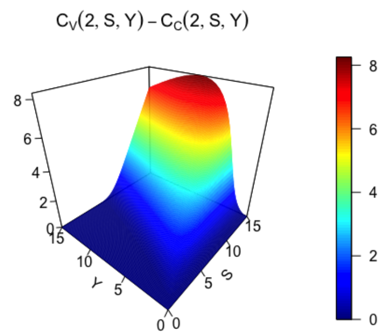
(f) Indiferença (compra) para $\gamma = 0.1$

Figura 5.11: Preços da opção de Margrabe. Parâmetros: $K = 0$, $N = 16$, $r = 0.06$, $\mu_S = 0.09$, $\mu_Y = 0.1$, $\sigma_S = 0.2$, $\sigma_Y = 0.35$, $T = 1$ e $\rho = 0$.

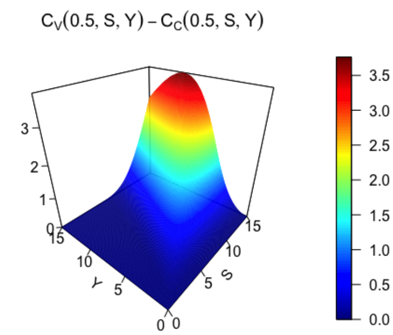
A seguir, figura 5.12, analisamos a diferença entre os preços de compra e venda de uma opção de Margrabe dado um certo nível de aversão ao risco γ.

Nesta simulação procuramos detectar o fato estilizado de que em mercados incompletos os agentes ofertam preços diferentes daqueles que estão dispostos a pagar por um contrato negociado sob as mesmas condições - *Bid and Ask Prices.*

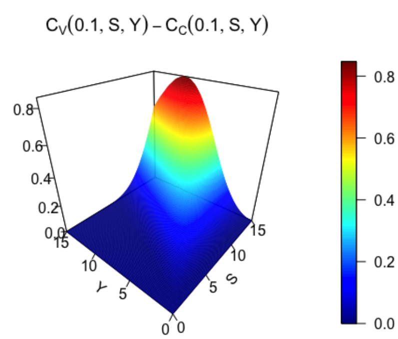
Em cada um dos gráficos percebe-se que quando os valores de S e Y sobem a diferença entre os preços de venda e compra se acentua. Tal diferença é mais acentuada quando $S > Y$ e quanto maior a aversão ao risco.



(a) $\gamma = 2$



(b) $\gamma = 0.5$



(c) $\gamma = 0.1$

Figura 5.12: Margrabe via indiferença - Diferença entre os preços de venda e compra, C_C:preço de compra; C_V:preço de venda; C preço neutro ao risco usando a MMM. Parâmetros: $K = 0$, $N = 16$, $r = 0.06$, $\mu_S = 0.09$, $\mu_Y = 0.1$, $\sigma_S = 0.2$, $\sigma_Y = 0.35$, $T = 1$ e $\rho = 0$.

Por outro lado, vamos comparar a diferença entre o preço de venda calculados por indiferença para os diversos níveis de aversão ao risco, bem como, a diferença dos preços de compra. Para os preços de venda, claramente os gráficos mostram que a medida que γ se aproxima de zero o preço converge para o modelo binomial. O mesmo acontece para o gráfico de compra.

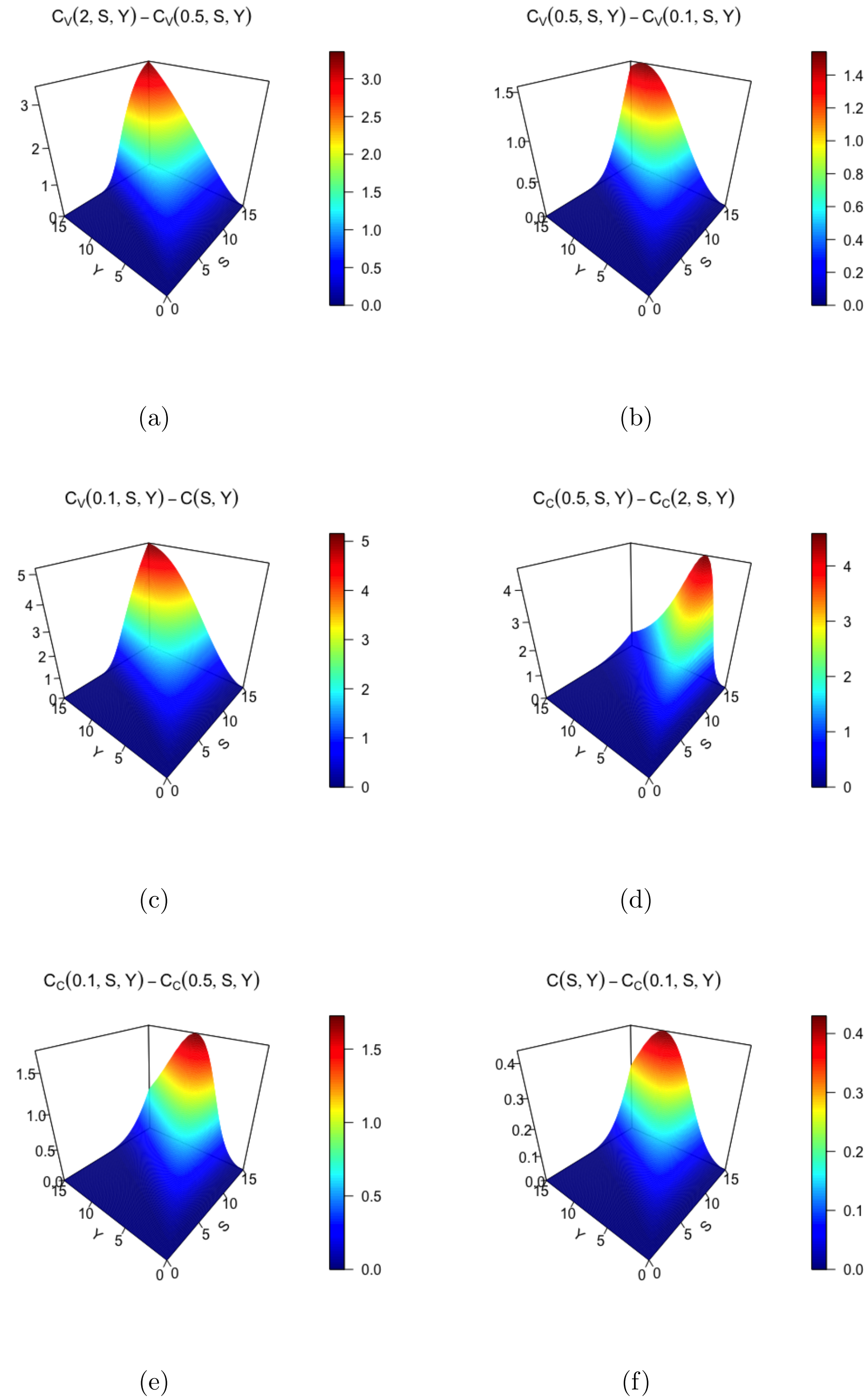
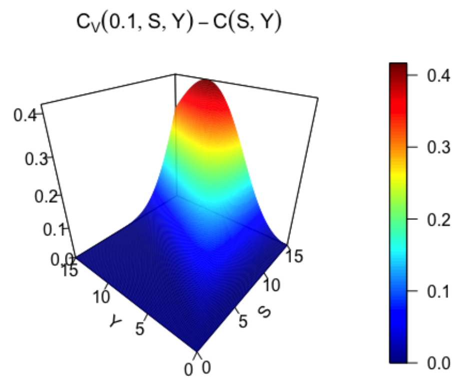
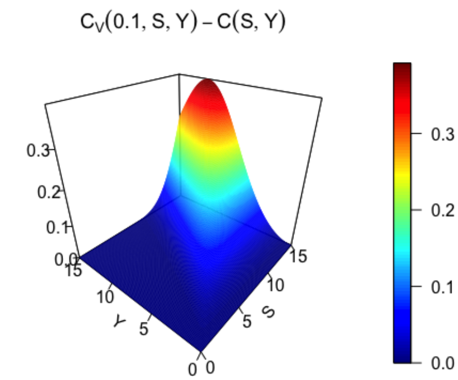


Figura 5.13: Margrabe via indiferença - C_C:preço de compra; C_V:preço de venda; C preço neutro ao risco usando a MMM. Parâmetros: $K = 0$, $N = 16$, $r = 0.06$, $\mu_S = 0.09$, $\mu_Y = 0.1$, $\sigma_S = 0.2$, $\sigma_Y = 0.35$, $T = 1$ e $\rho = 0$.

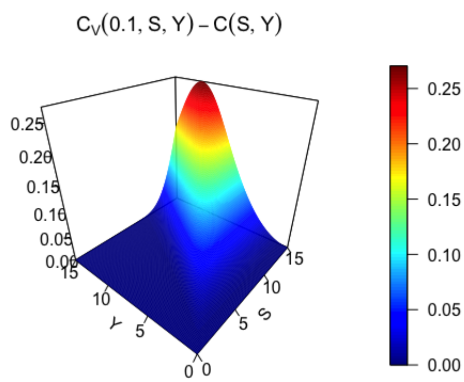
Para completar a análise foi feita nas Figuras 5.14 e 5.15 a comparação entre o preço binomial e o por indiferença de venda da opção de Margrabe, fixando-se o parâmetro de aversão ao risco e variando a correlação entre os ativos S_t e Y_t. A variação do ρ não demonstra variações qualitativas nos gráficos apresentados. No entanto, para $\gamma = 2$ observa-se maior diferença entre os preços quando comparado com $\gamma = 1$.



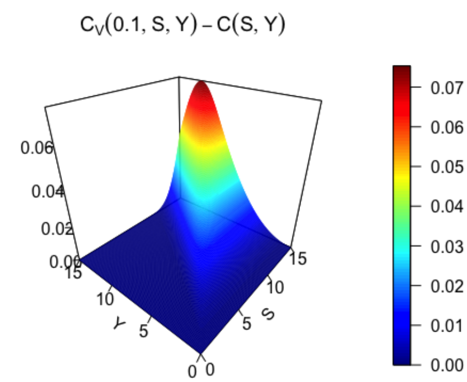
(a) $\rho = 0$



(b) $\rho = 0.5$

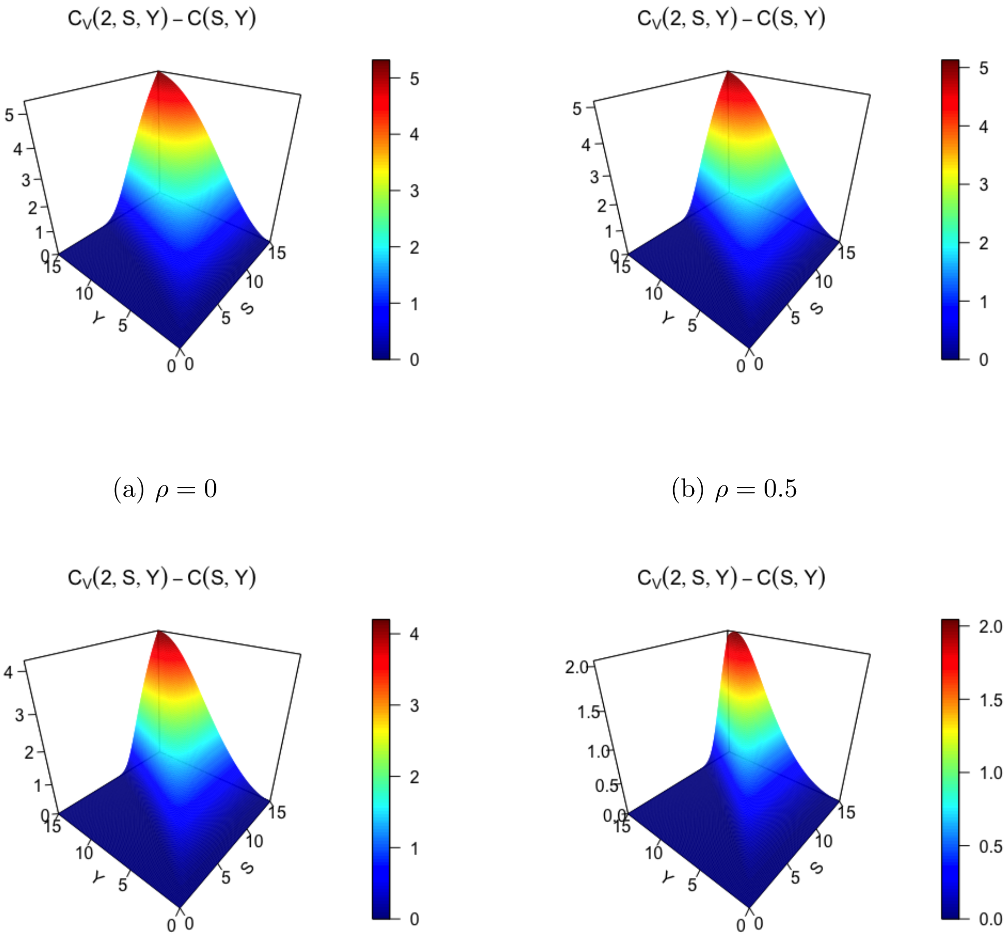


(c) $\rho = 0.75$



(d) $\rho = 0.95$

Figura 5.14: Comparação do preço da opção de Margrabe: diferença entre preço de venda por indiferença com $\gamma = 0.1$ e o preço neutro ao risco usando a MMM para diversos valores de ρ. Parâmetros: $K = 0$, $N = 64$, $r = 0.06$, $\mu_S = 0.09$, $\mu_Y = 0.1$, $\sigma_S = 0.2$, $\sigma_Y = 0.35$, $T = 1$.



(a) $\rho = 0$ (b) $\rho = 0.5$

(c) $\rho = 0.75$ (d) $\rho = 0.95$

Figura 5.15: Comparação do preço da opção de Margrabe: diferença entre preço de venda por indiferença com $\gamma = 2$ e o preço neutro ao risco usando a MMM para diversos valores de ρ. Parâmetros: $K = 0$, $N = 64$, $r = 0.06$, $\mu_S = 0.09$, $\mu_Y = 0.1$, $\sigma_S = 0.2$, $\sigma_Y = 0.35$, $T = 1$.

Capítulo 6

Conclusões

6.1 Discussão dos resultados apresentados

Neste trabalho apresentamos uma discussão sobre o problema de apreçamento em mercados incompletos com ênfase no apreçamento por indiferença.

Mercados incompletos com ausência de oportunidade de arbitragem apresentam uma característica comum: a existência de diversas (em geral infinitas) medidas martingais equivalentes. Neste cenário, é possível que a faixa de preços compatível com não-arbitragem seja bastante grande—um exemplo extremo pode ser visto em Hubalek & Schachermayer (2001). Desta forma, mesmo se quisermos mantermos o apreçamento via esperanças numa medida neutra ao risco é preciso algum critério para selecionar qual medida será usada. Embora não seja o nosso objetivo principal, apresentamos uma breve discussão sobre várias alternativas encontradas na literatura, incluindo aí o apreçamento por indiferença.

O apreçamento por indiferença é baseado em um ideia muito intuitiva: se conhecermos as preferências de um agente e se esta preferência for representável através de uma utilidade esperada então podemos apreçar um pagamento contingente da seguinte forma: (i) maximizamos a utilidade esperada do agente dada a sua riqueza atual e negociando os ativos disponíveis no mercado; (ii) maximizamos a utilidade esperada incluindo agora o pagamento contingente (que pode ser comprado ou vendido) e diminuímos (no caso de compra) ou acrescentamos (no caso de venda) um valor p na riqueza inicial do agente e mais uma vez maximizamos a utilidade esperada; (iii) o valor p que recupera a utilidade esperada sem o o pagamento contingente torna o agente *indiferente* as duas situações é denotado como o preço de indiferença do contrato contingente

O preço por indiferença tem várias características importantes:

1. Recupera o preço neutro-ao-risco no caso de mercados completos ou no caso do pagamento contingente ser replicável.

2. De forma geral o apreçamento é não-linear.

3. O apreçamento depende não só das características dos ativos, como da preferência de risco do agente (através da função de utilidade) e pode depender inclusive da riqueza inicial do agente.

4. Para um mesmo pagamento contingente temos dois preços por indiferença: o preço de compra e o preço de venda, sendo em geral o último maior ou igual ao primeiro—desta forma recuperamos o *bid-ask spread*.

Uma crítica usual ao apreçamento por indiferença é a aparente dificuldade em se identificar a função de indiferença e seus parâmetros adequados para modelar as preferências de risco de um dado agente. Neste sentido, adotamos o ponto de vista prático de que uma forma natural de identificar as preferências de um agente é através da escolha da distribuição de retorno dentre as várias possíveis. Do ponto de vista de utilidade esperada isso pode ser obtido a partir dos resultados de Bernard et al. (2013) que mostram, em particular, que a utilidade exponencial leva a uma distribuição normal de retornos. Esse resultado sugere que para agentes mais conservadores ou mesmo menos sofisticados a escolha de uma função de utilidade exponencial pode ser bastante adequada.

Neste trabalho, seguimos Musiela & Zariphopoulou (2004) e consideramos o que possivelmente pode ser pensado como a forma mais simples de incompletude de mercado: consideramos um mercado com ativos negociáveis e não-negociáveis e supomos que o sub-mercado composto pelos ativos negociáveis seja completo.

Neste sentido convém listarmos as semelhanças e diferenças entre os resultados discutidos aqui e os encontrados em Musiela & Zariphopoulou (2004):

1. Como em Musiela & Zariphopoulou (2004), adotamos um modelo em tempo discreto e adotamos uma utilidade exponencial.

2. Diferentemente de Musiela & Zariphopoulou (2004), admitimos que os preços dos ativos não-negociáveis sejam contínuos. Aqui convém notar que mercados completos em tempo discreto têm uma estrutura mais rígida e os preços correspondentes não pode ser supostos contínuos—veja o Teorema 1.25.

3. Permitimos a inclusão de múltiplos ativos negociáveis e não-neogicáveis—uma extensão neste sentido, mas considerando apenas preços discretos, pode ser encontrada em Elliott & van der Hoek (2009).

4. Analogamente a Musiela & Zariphopoulou (2004), mostramos que o funcional de apreçamento pode ser escrito como uma esperança não linear com propriedades de semi-grupo.

5. Convém observar que no contexto original de Musiela & Zariphopoulou (2004), todos os problemas de otimização estão em dimensão finita. Ao considerarmos a possibilidade dos ativos não-negociáveis terem preços contínuos passamos a ter um problema de otimização em dimensão infinita e dessa forma várias das demonstrações apresentadas aqui são significativamente diferentes das encontradas em Musiela & Zariphopoulou (2004).

Adicionalmente, apresentamos também uma implementação computacional em um mercado com dois ativos—um negociado e outro não-negociável. , Para isso, usamos uma árvore binomial 2-D seguindo Kwok (2008), Grasselli (2011)—veja também Boyle (1988). Embora esse exemplo não utilize os resultados aqui apresentados em sua generalidade, já nos permitem fazer vários estudos e experimentos sobre os preços por indiferença Dentre esses experimentos destacamos os seguintes:

1. O comportamento do preço por diferença em diversas situações, incluindo a diferença entre o preço de compra e venda e variação do preço dependendo da correlação e das volatilidades dos diversos ativos.

2. A obtenção de um preço neutro ao risco a partir da extrapolação para ausência de aversão ao risco. Neste caso, obtemos um apreçamento via Medida Martingal Mínima (MMM).

3. Aplicação ao cálculo de opções americanas—seguindo Grasselli (2011). Aqui tratamos tanto opções de compra quanto opções de venda.

4. Exemplos do apreçamento de opções de troca, também conhecidas como opções de Margrabe—veja Margrabe (1978) e Carmona & Durrleman (2003).

6.2 Aplicações e extensões

Possíveis Trabalhos Futuros O algoritmo aqui desenvolvido tem muitas aplicações potenciais, dentre as quais, destacamos:

1. Cálculo de opções reais via indiferença
2. Cálculo de opções com ativos não-negociados como opções sobre condições climáticas de forma geral.
3. Cálculo de opções sobre índices da economia ou mesmo sobre ratings.

Extensões Existem várias extensões possíveis do algoritmo aqui apresentado, dentre as quais destacamos:

1. Uso de modelos híbridos—discreto no preço para ativos negociáveis e contínuo no preço para ativos não-negociáveis, com a implementação correspondente.
2. Extensão para apreçamento via Montecarlo a partir do trabalho de Grasselli & Hurd (2002).
3. Relacionado ao item anterior, pode-se pensar também estudar a possibilidade de se usar o algoritmo aqui como uma variante do algoritmo de apreçamento por Hedge proposto em Potters et al. (2001).
4. Estudo mais detalhado do algoritmo para opções dependente do caminho.

Apêndice A

Fatos relevantes

Os conceitos aqui expostos, seguem Shreve (2004).

Definição A.1. *(Movimento Browniano) Seja* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *um espaço de probabilidade. Para cada* $\omega \in \Omega$ *suponha que exista uma função contínua* $W(t)$*, com* $t \geqslant 0$*, então,* $W(t)$ *será denominado um movimento browniano se:*

- $W(0) = 0$*,*
- *Os incrementos:*
$$W(t_1) - W(t_0), W(t_2) - W(t_1), \cdots, W(t_m) - W(t_{m-1}), \quad 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$$
correspondam à variáveis aleatórias independentes,
- *Os incrementos são normalmente distribuídos, com:*

$$\mathbb{E}\left[W(t_{i+1}) - W(t_i)\right] = 0,$$

$$\operatorname{Var}\left[W(t_{i+1}) - W(t_i)\right] = t_{i+1} - t_i.$$

Definição A.2. *(Processo de Itô) Seja* $W(t)$*,* $t \geq 0$ *um movimento Browniano e seja* $\mathcal{F}_t$ *a filtração gerada a partir de* $W(s)$*,* $s \leq t$*, para todo* $t \geq 0$*. Um processo de Itô será um processo estocástico dado pela forma:*

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \triangle(u)\,\mathrm{d}W(u) + \int_0^t \Theta(u)\,\mathrm{d}u,$$

onde $X(0)$ *é o valor inicial do processo e* $\triangle(u)$ *e* $\Theta(u)$ *processos estocásticos adaptados.*

Teorema A.3. *(Teorema de Girsanov) Seja* $W(t)$*, com* $0 \leq t \leq T$*, um movimento Browniano em um espaço de probabilidade* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *e seja* $\mathcal{F}_t$ *uma filtração gerada por esse movimento Browniano, para* $0 \leq t \leq T$*. Seja* $\Theta(t)$*, com* $0 \leq t \leq T$ *um processo adaptado. Definindo:*

$$Z(t) = \exp\left\{-\int_0^t \Theta(u)\mathrm{d}W(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \Theta^2(u)\mathrm{d}u\right\},$$

$$\tilde{W}(t) = W(t) + \int_0^t \Theta(u)\mathrm{d}u,$$

e assumindo que,

$$\mathbb{E}\int_0^t \Theta^2(u)Z^2\mathrm{d}u < \infty$$

Tomando $Z = Z(T)$. *Então* $\mathbb{E}Z = 1$ *e para a medida de probabilidade* $\tilde{P}$, *a qual satisfaz* $\frac{\mathrm{d}\tilde{P}}{\mathrm{d}P} = Z$, *o processo* $\tilde{W}(t)$, *com* $0 \leq t \leq T$, *será um movimento Browniano.*

A demonstração do Teorema pode ser encontrada em Shreve (2004).

Apêndice B

Opções americanas

O apreçamento de opções americanas para ativos objeto reais em um contexto de mercados incompletos foi abordado no trabalho de Grasselli (2011), o qual, aqui iremos resumir.

No trabalho foi desenvolvido o apreçamento específico de opções de reais cujo ativo subjacente corresponde a uma oportunidade de investimento em um dado projeto $\bar{V}_t$, não havendo uma correlação perfeita entre entre este e os demais ativos de mercado.

O problema de mensuração tanto do risco de mercado como do idiossincrático foi reduzido ao apreçamento por indiferença de uma opção americana em um contexto de mercado incompleto usando o conceito de tempos de parada.

Para implementar o resultado utilizou-se a árvore binomial no mesmo espírito que aqui estamos fazendo sob a justificativa que no limite o processo estocástico utilizado no modelo binomial converge para o processo correspondente em tempo contínuo.

O modelo descrito considera os seguintes ativos, sendo $W = (W_1, W_2)$ movimento browniano, $-1 < \rho < 1$ correlação e σ_1, σ_2 volatilidades, para $t_0 \leqslant t \leqslant T \leqslant \infty$:

1. Um numerário, correspondendo a uma conta remunerada a uma taxa livre de risco.

   $$B_t = \mathrm{e}^{r(t-t_0)} \quad r > 0,$$

   sendo r a taxa livre de risco considerada constante.

2. O ativo negociável descontado S_t com a seguinte dinâmica:

   $$\mathrm{d}S_t = (\mu_1 - r)\, S_t \mathrm{d}t + \sigma_1 S_t \mathrm{d}W_t^1,$$

   com μ_1 a taxa de retorno

3. O valor do projeto descontado, ou seja, $V_t = \frac{\bar{V}_t}{B_t}$.

   $$\mathrm{d}V_t = (\mu_2 - r)\, V_t \mathrm{d}t + \sigma_2 V_t \left(\rho \mathrm{d}W_t^1 + \sqrt{1-\rho^2}\mathrm{d}W_t^2\right).$$

4. O portfólio autofinaciável em termos do numerário, segue:

   $$X_t^\pi = \int_0^t \pi_s \frac{\mathrm{d}S_s}{S_s},$$

na forma diferencial:

$$\mathrm{d}X_t^{\pi} = \pi_t \left(\mu_1 - r\right) \mathrm{d}t + \pi_t \sigma_1 \mathrm{d}W_t^1.$$

onde π_t é o valor investido no ativo S_t.

5. O custo de oportunidade do investidor, o qual, representa o *strike* da opção é dado por:

$$I_t = \mathrm{e}^{\alpha(t-t_0)} I,$$

sendo $I\left(t_0\right) = I$ o custo inicial e a taxa $\alpha \geqslant 0$.

O problema descrito em Grasselli (2011) reflete a decisão em investir em um projeto $\bar{V}_t$ tendo um dispêndio correspondente a I_t esperando em compensação o retorno de um fluxo de caixa futuro envolvendo incerteza , cujo valor de mercado descontado no tempo t seja dado por V_t, que será representado pelo seguinte *payoff*:

$$C_\tau = \left(V_\tau - \mathrm{e}^{(\alpha - r)(\tau - T_0)} I\right)^+$$

onde, $\tau \in \mathfrak{T}\left[t_0, T\right]$ pertence ao conjunto de tempos de parada em $[t_0, T]$.

Considerando a função de utilidade exponencial como representativa das escolhas do investidor e seu coeficiente de aversão ao risco representado por $\gamma > 0$, o seguinte problema de otimização é resolvido:

$$u\left(t_0, x, v\right) = \sup_{\tau} \sup_{\pi \in \mathcal{A}_{[t,\tau]}} \mathbb{E}\left[-\mathrm{e}^{-\gamma\left(X_\tau^\pi + C_\tau\right)} | X_{t_0}^\pi = x, V_{t_0} = v\right], \tag{B.1}$$

com $\mathcal{A}_{[t,\tau]}$ representado o conjunto de todas as estratégias admissíveis.

O apreçamento por indiferença será determinado resolvendo:

$$u\left(t_0, x, v\right) = \sup_{\pi \in \mathcal{A}_{[t,\tau]}} \mathbb{E}\left[-\mathrm{e}^{-\gamma X_T^\pi} | X_{t_0}^\pi = x\right].$$

Referências Bibliográficas

Aiube, F. A. L. (2013), *Modelos Quantitativos em Finanças com enfoque em commodities*, Bookman, Porto Alegre.

Aliprantis, C. D. & Border, K. (2006), *Infinite dimensional analysis: a hitchhiker's guide*, Springer Science & Business Media.

Ansel, J.-P. & Stricker, C. (1992), 'Lois de martingale, densités et décomposition de föllmer schweizer', *Annales de l'institut Henri Poincaré (B) Probabilités et Statistiques* **28**(3), 375–392.

Bernard, C., Boyle, P. P. & Vanduffel, S. (2014), 'Explicit representation of cost-efficient strategies', *Finance* **35**(2), 5–55.

Bernard, C., Chen, J. S. & Vanduffel, S. (2013), 'Rationalizing investors choice', *arXiv preprint arXiv:1302.4679* .

Black, F. & Scholes, M. (1973), 'The pricing of options and corporate liabilities', *The journal of political economy* pp. 637–654.

Boyle, P. P. (1988), 'A lattice framework for option pricing with two state variables', *Journal of Financial and Quantitative Analysis* **23**(01), 1–12.

Carmona, R. & Durrleman, V. (2003), 'Pricing and hedging spread options', *Siam Review* **45**(4), 627–685.

Carmona, R., ed. (2009), *Indifference pricing: theory and applications*, Princeton University Press.

Cox, J. C., Ross, S. A. & Rubinstein, M. (1979), 'Option pricing: A simplified approach', *Journal of financial Economics* **7**(3), 229–263.

Davis, M. A. H. (1997), Option pricing in incomplete markets, *in* S. R. Pliska, ed., 'Mathematics of Derivative Securities', Cambridge University Press, pp. 216–226.

Elliott, R. J. & van der Hoek, J. (2009), Duality methods, *in* R. Carmona, ed., 'Indifference pricing: theory and applications', Princeton University Press, pp. 321–386.

Elton, E. J. & Gruber, M. J. (1974), 'The multi-period consumption investment problem and single period analysis', *Oxford Economic Papers* **26**(2), 289–301.

Föllmer, H. & Schied, A. (2004), *Stochastic finance. An introduction in discrete time*, Vol. 27, de Gruyter.

Follmer, H. & Schweizer, M. (1990), Hedging of contingent claims under incomplete information, *in* M. A. H. Davis & R. J. Elliott, eds, 'Applied Stochastic Analysis', Gordon and Breach, pp. 389–414.

Frittelli, M. (1995), 'Minimal entropy criterion for pricing in one period incomplete markets', Working Paper. University of Brescia, Italy.

Frittelli, M. (2000), 'The minimal entropy martingale measure and the valuation problem in incomplete markets', *Mathematical finance* **10**(1), 39–52.

Grasselli, M. (2011), 'Getting real with real options: A utility–based approach for finite–time investment in incomplete markets', *Journal of Business Finance & Accounting* **38**(5-6), 740–764.

Grasselli, M. & Hurd, T. (2002), 'A monte carlo method for exponential hedging of contingent claims', *arXiv preprint math/0211383* .

Harrison, J. M. & Pliska, S. R. (1981), 'Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading', *Stochastic processes and their applications* **11**(3), 215–260.

Henderson, V. (2007), 'Valuing the option to invest in an incomplete market', *Mathematics and Financial Economics* **1**(2), 103–128.

Henderson, V. & Hobson, D. (2009), Utility indiference pricing: An overview, *in* R. Carmona, ed., 'Indifference pricing: theory and applications', Princeton University Press, pp. 44–73.

Hubalek, F. & Schachermayer, W. (2001), 'The limitations of no-arbitrage arguments for real options', *International Journal of Theoretical and Applied Finance* **4**(02), 361–373.

Korn, R. & Korn, E. (2001), *Option pricing and portfolio optimization: modern methods of financial mathematics*, Vol. 31, American Mathematical Soc.

Kwok, Y.-K. (2008), *Mathematical models of financial derivatives*, Springer.

Margrabe, W. (1978), 'The value of an option to exchange one asset for another', *The journal of finance* **33**(1), 177–186.

Merton, R. C. (1973), 'Theory of rational option pricing', *The Bell Journal of economics and management science* pp. 141–183.

Merton, R. C. (1976), 'Option pricing when underlying stock returns are discontinuous', *Journal of financial economics* **3**(1), 125–144.

Musiela, M. & Zariphopoulou, T. (2004), 'A valuation algorithm for indifference prices in incomplete markets', *Finance and Stochastics* **8**(3), 399–414.

Nelson, D. B. & Ramaswamy, K. (1990), 'Simple binomial processes as diffusion approximations in financial models', *Review of Financial Studies* **3**(3), 393–430.

Oberman, A. & Zariphopoulou, T. (2003), 'Pricing early exercise contracts in incomplete markets', *Computational Management Science* **1**(1), 75–107.

Pliska, S. R. (1997), *Mathematics of derivative securities*, Vol. 15, Cambridge University Press.

Potters, M., Bouchaud, J.-P. & Sestovic, D. (2001), 'Hedged monte-carlo: low variance derivative pricing with objective probabilities', *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **289**(3), 517–525.

Shreve, S. (2012), *Stochastic calculus for finance I: the binomial asset pricing model*, Springer Science & Business Media.

Shreve, S. E. (2004), *Stochastic calculus for finance II: Continuous-time models*, Vol. 11, Springer.

Von Neumann, J. & Morgenstern, O. (1947), *Theory of games and economic behavior*, Princeton university press.