

# Método Matricial para Determinação da Área do Triângulo e das Equações da Reta e do Plano

ORIVALDO NAZARENO MONTEIRO DE ATAIDE

16 de janeiro de 2017

## Resumo

Este artigo aborda uma maneira de se determinar a equação da reta, no plano ou no espaço, quando forem conhecidas as coordenadas cartesianas de dois de seus pontos. Além disso, aborda uma forma de se encontrar a equação do plano quando forem dados três pontos desse plano. E por fim, aborda um método de se calcular a área de um triângulo, no plano ou no espaço, conhecidas as coordenadas cartesianas de seus vértices.

## 1 Introdução

Apresentamos um método para se determinar a equação da reta e a equação do plano, mediante a disposição dos valores das coordenadas cartesianas de pontos pertencentes a essas equações em matrizes específicas.

Para a formação dessa estrutura matricial, definimos matriz vinculante e matriz equivalente, definições essas criadas pelo autor deste trabalho; e, para a determinação de tais equações, foram descobertos pelo autor teoremas que se relacionam a tais matrizes.

Além disso, essas definições e teoremas permitiram a descoberta de um procedimento matemático para o cálculo da área de um triângulo, seja ele do espaço bidimensional, seja do espaço tridimensional.

A existência desse procedimento, conseqüentemente, sugere a continuação dos estudos sobre o tema aqui proposto para, quem sabe, futuras descobertas de outras maneiras de se determinar as áreas de outras figuras geométricas.

## 2 Matriz Vinculante e Matriz Equivalente

**Definição 2.1.** (Matriz Vinculante). Seja  $A_j = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^n$ , com  $i, j \in \mathbb{N}$  e  $1 \leq i \leq n$ , e tomemos  $M$  um conjunto com  $p$  elementos de  $\mathbb{R}^n$ :  $M = \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_p\}$ . Sendo  $X = (x_i)$  um ponto qualquer em  $\mathbb{R}^n$ , definimos matriz vinculante  $V$  como aquela cujos elementos são formados pelas coordenadas dos elementos de  $M$  e de  $X$ , de acordo com a seguinte lei de formação:

$$v_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{se } 1 \leq j \leq p; \\ x_i, & \text{se } j = p + 1; \\ a_{i\alpha} - a_{i(\alpha+1)}, & \text{se } 1 \leq \alpha \leq (p - 1) \text{ e } (p + 2) \leq j \leq 2p. \end{cases}$$

Nesse sentido, a matriz vinculante  $V$  é formada de tal modo que as coordenadas de  $A_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31}, \dots, a_{n1})$  ocupem a primeira coluna; as coordenadas de  $A_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32}, \dots, a_{n2})$ , a segunda coluna; as de  $A_3 = (a_{13}, a_{23}, a_{33}, \dots, a_{n3})$ , a terceira coluna; e assim sucessivamente até as coordenadas de  $A_p = (a_{1p}, a_{2p}, a_{3p}, \dots, a_{np})$  ocuparem a  $p$ -ésima coluna; então, as coordenadas de  $X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  ocupam a  $(p+1)$ -ésima coluna; as de  $A_1 - A_2$ , a  $(p+2)$ -ésima coluna; as de  $A_2 - A_3$ , a  $(p+3)$ -ésima coluna e assim sucessivamente para as demais diferenças entre os elementos de uma coluna e os elementos da coluna imediatamente a sua direita. Assim, temos:

$$V = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1(p-1)} & a_{1p} & x_1 & a_{11} - a_{12} & a_{12} - a_{13} & \cdots & a_{1(p-1)} - a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2(p-1)} & a_{2p} & x_2 & a_{21} - a_{22} & a_{22} - a_{23} & \cdots & a_{2(p-1)} - a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{i(p-1)} & a_{ip} & x_i & a_{i1} - a_{i2} & a_{i2} - a_{i3} & \cdots & a_{i(p-1)} - a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n(p-1)} & a_{np} & x_n & a_{n1} - a_{n2} & a_{n2} - a_{n3} & \cdots & a_{n(p-1)} - a_{np} \end{bmatrix}.$$

**Definição 2.2.** (Matriz Equivalente). Definimos a matriz equivalente  $\tilde{V} = (\tilde{v}_{ij})$  como uma matriz cujos elementos são obtidos a partir dos elementos de uma matriz vinculante  $V = (v_{ij})$ , mediante a multiplicação de todos os elementos de uma mesma linha da matriz vinculante por uma mesma constante real.

$$\tilde{V} = [\tilde{v}_{ij}] = [k_i v_{ij}] = \sim V.$$

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} k_1 a_{11} & k_1 a_{12} & \cdots & k_1 a_{1(p-1)} & k_1 a_{1p} & k_1 x_1 & k_1 (a_{11} - a_{12}) & \cdots & k_1 (a_{1(p-1)} - a_{1p}) \\ k_2 a_{21} & k_2 a_{22} & \cdots & k_2 a_{2(p-1)} & k_2 a_{2p} & k_2 x_2 & k_2 (a_{21} - a_{22}) & \cdots & k_2 (a_{2(p-1)} - a_{2p}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_i a_{i1} & k_i a_{i2} & \cdots & k_i a_{i(p-1)} & k_i a_{ip} & k_i x_i & k_i (a_{i1} - a_{i2}) & \cdots & k_i (a_{i(p-1)} - a_{ip}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_n a_{n1} & k_n a_{n2} & \cdots & k_n a_{n(p-1)} & k_n a_{np} & k_n x_n & k_n (a_{n1} - a_{n2}) & \cdots & k_n (a_{n(p-1)} - a_{np}) \end{bmatrix}.$$

### 3 Equação Geral da Retra

**Definição 3.1.** Sejam  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  e  $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  pontos em  $\mathbb{R}^n$ . Seja ainda  $r$  a reta que passa por  $A$  e  $B$ . Seja  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  um ponto qualquer de  $r$ . A equação geral da reta  $r$  é dada por

$$r : k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_n x_n = k_0,$$

em que  $k_i \in \mathbb{R}$  e  $i \in \mathbb{N}$ .

**Teorema 3.1.** Dados  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  e  $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  dois pontos em  $\mathbb{R}^n$  e sendo  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  um ponto qualquer desse espaço. Seja

$$V = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & x_1 & a_1 - b_1 \\ a_2 & b_2 & x_2 & a_2 - b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & x_n & a_n - b_n \end{bmatrix}$$

a matriz vinculante dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $X$ ; e seja

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} k_1 a_1 & k_1 b_1 & k_1 x_1 & k_1(a_1 - b_1) \\ k_2 a_2 & k_2 b_2 & k_2 x_2 & k_2(a_2 - b_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_n a_n & k_n b_n & k_n x_n & k_n(a_n - b_n) \end{bmatrix}$$

uma matriz equivalente da matriz vinculante  $V$ , gerada a partir de  $V$  mediante a multiplicação de cada linha desta pelos elementos do conjunto de constantes reais não nulas  $K = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ . Se

$$\sum_{i=1}^n k_i(a_i - b_i) = 0,$$

então

$$\sum_{i=1}^n k_i x_i = \sum_{i=1}^n k_i a_i = \sum_{i=1}^n k_i b_i.$$

*Demonstração.* Sendo  $r$  a reta que passa por  $A$  e  $B$ , então o vetor  $\overrightarrow{BA} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n \rangle$  é paralelo à reta  $r$ . Assim,  $r$  tem como equações paramétricas o seguinte sistema de equações lineares:

$$S : \begin{cases} x_1 = b_1 + t(a_1 - b_1) \\ x_2 = b_2 + t(a_2 - b_2) \\ \vdots \\ x_n = b_n + t(a_n - b_n) \end{cases}.$$

Agora, escolhemos um conjunto de constantes reais não nulas  $K = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$  tais que

$$\sum_{i=1}^n k_i(a_i - b_i) = 0. \quad (1)$$

Multiplicando-se a primeira linha de  $S$  por  $k_1$ ; a segunda linha de  $S$ , por  $k_2$ ; e assim por diante, até a  $n$ -ésima linha de  $S$ , por  $k_n$ , obtemos um sistema equivalente de  $S$ :

$$\sim S : \begin{cases} k_1 x_1 = k_1 b_1 + t k_1(a_1 - b_1) \\ k_2 x_2 = k_2 b_2 + t k_2(a_2 - b_2) \\ \vdots \\ k_n x_n = k_n b_n + t k_n(a_n - b_n) \end{cases}.$$

Somando-se membro a membro as  $n$  equações de  $\sim S$ , temos:

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_n x_n = k_1 b_1 + k_2 b_2 + \dots + k_n b_n + t[k_1(a_1 - b_1) + k_2(a_2 - b_2) + \dots + k_n(a_n - b_n)]. \quad (2)$$

Usando-se a representação por somatórios, a equação (2) torna-se:

$$\sum_{i=1}^n k_i x_i = \sum_{i=1}^n k_i b_i + t \left[ \sum_{i=1}^n k_i(a_i - b_i) \right]. \quad (3)$$

Das equações (1) e (3), concluímos que:

$$\sum_{i=1}^n k_i x_i = \sum_{i=1}^n k_i a_i. \quad (4)$$

Além disso, da equação (1), encontramos:

$$\sum_{i=1}^n k_i(a_i - b_i) = \sum_{i=1}^n k_i a_i - \sum_{i=1}^n k_i b_i = 0,$$

de modo que

$$\sum_{i=1}^n k_i a_i = \sum_{i=1}^n k_i b_i. \quad (5)$$

Da equação (4) e da equação (5), finalmente, temos:

$$\sum_{i=1}^n k_i x_i = \sum_{i=1}^n k_i a_i = \sum_{i=1}^n k_i b_i,$$

o que conclui a demonstração do teorema.  $\square$

**Teorema 3.2** (Equação geral da reta determinada por dois pontos). Dados  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  e  $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  dois pontos em  $\mathbb{R}^n$  e sendo  $r$  uma reta que passa por esses dois pontos. Seja  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  em  $\mathbb{R}^n$  um ponto qualquer de  $r$ . Seja  $V$  a matriz vinculante dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $X$ :

$$V = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & x_1 & a_1 - b_1 \\ a_2 & b_2 & x_2 & a_2 - b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & x_n & a_n - b_n \end{bmatrix}.$$

Então, podemos obter uma matriz equivalente  $\tilde{V}$ ,

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & x_1 & a_1 - b_1 \\ a_2 & b_2 & x_2 & a_2 - b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -k_0 & -k_0 & k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_n x_n & 0 \end{bmatrix},$$

que permita determinar a equação geral da reta  $r : k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_n x_n = k_0$ , para  $k_i \in \mathbb{R}$  e  $i \in \mathbb{N}$ .

*Demonstração.* Seja

$$V = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & x_1 & a_1 - b_1 \\ a_2 & b_2 & x_2 & a_2 - b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & x_n & a_n - b_n \end{bmatrix}$$

a matriz vinculante dos pontos  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  e  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Usaremos o conjunto  $K = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$  para obtermos uma matriz equivalente a  $V$ : multiplicamos a primeira linha por  $k_1$ ; a segunda, por  $k_2$ ; e assim por diante, até a  $n$ -ésima linha, por  $k_n$ . Em seguida, somamos as  $(n - 1)$  primeiras linhas na  $n$ -ésima linha dessa matriz. Assim, temos como matriz equivalente a  $V$ :

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & x_1 & a_1 - b_1 \\ a_2 & b_2 & x_2 & a_2 - b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n k_i a_i & \sum_{i=1}^n k_i b_i & \sum_{i=1}^n k_i x_i & \sum_{i=1}^n k_i (a_i - b_i) \end{bmatrix}.$$

Do Teorema 3.1 sabemos que, se ocorrer

$$\sum_{i=1}^n k_i(a_i - b_i) = 0,$$

então

$$\sum_{i=1}^n k_i x_i = \sum_{i=1}^n k_i a_i = \sum_{i=1}^n k_i b_i.$$

Tomando-se

$$\sum_{i=1}^n k_i a_i = \sum_{i=1}^n k_i b_i = k_0,$$

vem:

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & x_1 & a_1 - b_1 \\ a_2 & b_2 & x_2 & a_2 - b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_0 & k_0 & k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_n x_n & 0 \end{bmatrix}.$$

Ainda do Teorema 3.1, temos:

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_n x_n = k_0,$$

que é exatamente a equação geral da reta  $r$ . □

**Exemplo 1.** Determine a equação da reta que passa nos pontos  $(1, 2)$  e  $(-1, 1)$ .

Solução:

Escrevendo-se a matriz vinculante dos pontos dados, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & x & 2 \\ 2 & 1 & y & 1 \end{pmatrix}.$$

Em seguida, devemos obter uma matriz equivalente na qual a soma dos elementos da quarta coluna seja nula. Para tanto, devemos multiplicar todos os elementos da segunda linha da matriz vinculante por  $-2$  e, em seguida, somar a primeira linha com essa nova segunda linha, substituindo o resultado nessa linha. Daí, vem a seguinte matriz equivalente:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & x & 2 \\ -3 & -3 & x - 2y & 0 \end{pmatrix}.$$

Do Teorema 3.1, na página 2, temos:

$$x - 2y = -3,$$

que é a equação da reta solicitada.

**Exemplo 2.** Determine a equação da reta que passa nos pontos  $(1, 2, -1)$  e  $(-1, 1, 2)$ .

Solução:

Escrevendo-se a matriz vinculante dos pontos dados, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & x & 2 \\ 2 & 1 & y & 1 \\ -1 & 2 & z & -3 \end{pmatrix}.$$

Como a soma dos elementos da quarta coluna dessa matriz tem soma nula, obtemos uma matriz equivalente somando-se as duas primeiras linhas na terceira:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & x & 2 \\ 2 & 1 & y & 1 \\ 2 & 2 & x+y+z & 0 \end{pmatrix}.$$

Agora, podemos aplicar o Teorema 3.1, na página 2. Assim, temos como equação da reta:

$$x + y + z = 2.$$

## 4 Equação do Plano

**Definição 4.1.** Sejam  $A = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $B = (b_1, b_2, b_3)$  e  $C = (c_1, c_2, c_3)$  pontos em  $\mathbb{R}^n$ . Seja  $\alpha$  o plano que passa por  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Seja ainda  $X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^n$  um ponto qualquer de  $\alpha$ . A equação do plano  $\alpha$  é dada por:

$$\alpha : k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 = k_0,$$

em que  $k_i$  é uma constante real, com  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ .

**Teorema 4.1.** Dados  $A = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $B = (b_1, b_2, b_3)$  e  $C = (c_1, c_2, c_3)$  três pontos em  $\mathbb{R}^n$  e seja  $\alpha$  um plano desse espaço e que contém esses três pontos. Para um ponto  $X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^n$  qualquer de  $\alpha$ , seja

$$V = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & x_1 & a_1 - b_1 & b_1 - c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & x_2 & a_2 - b_2 & b_2 - c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & x_3 & a_3 - b_3 & b_3 - c_3 \end{bmatrix}$$

a matriz vinculante dos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $X$ ; e seja

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} k_1a_1 & k_1b_1 & k_1c_1 & k_1x_1 & k_1(a_1 - b_1) & k_1(b_1 - c_1) \\ k_2a_2 & k_2b_2 & k_2c_2 & k_2x_2 & k_2(a_2 - b_2) & k_2(b_2 - c_2) \\ k_3a_3 & k_3b_3 & k_3c_3 & k_3x_3 & k_3(a_3 - b_3) & k_3(b_3 - c_3) \end{bmatrix}$$

uma matriz equivalente da matriz vinculante  $V$ , gerada a partir de  $V$  mediante a multiplicação de cada linha desta pelos elementos do conjunto de constantes reais não nulas  $K = \{k_1, k_2, k_3\}$ . Se

$$\sum_{i=1}^3 k_i(a_i - b_i) = \sum_{i=1}^3 k_i(b_i - c_i) = 0,$$

então

$$\sum_{i=1}^3 k_ix_i = \sum_{i=1}^3 k_ia_i = \sum_{i=1}^3 k_ib_i = \sum_{i=1}^3 k_ic_i.$$

*Demonstração.* Sendo  $\alpha$  o plano que contém os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , tomemos  $X \in \alpha$  e consideremos  $r_1$ ,  $r_2$  e  $r_3$  três retas que contém o ponto  $X$  e são, respectivamente, paralelas às retas  $\overleftrightarrow{AB}$ ,  $\overleftrightarrow{BC}$  e  $\overleftrightarrow{CA}$ . Por conseguinte, as retas  $r_1$ ,  $r_2$  e  $r_3$  são, respectivamente, paralelas aos vetores  $\overrightarrow{AB} = \langle b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3 \rangle$ ,  $\overrightarrow{BC} = \langle c_1 - b_1, c_2 - b_2, c_3 - b_3 \rangle$  e  $\overrightarrow{CA} = \langle a_1 - c_1, a_2 - c_2, a_3 - c_3 \rangle$ . Nesse sentido, se  $X$  está nas três retas, então as equações paramétricas das retas  $r_1$ ,  $r_2$  e  $r_3$  são os seguintes sistemas de equações lineares:

$$S_1 : \begin{cases} x_1 = a_1 + t_1(b_1 - a_1) \\ x_2 = a_2 + t_1(b_2 - a_2) \\ x_3 = a_3 + t_1(b_3 - a_3) \end{cases}, \quad S_2 : \begin{cases} x_1 = b_1 + t_2(c_1 - b_1) \\ x_2 = b_2 + t_2(c_2 - b_2) \\ x_3 = b_3 + t_2(c_3 - b_3) \end{cases}, \quad S_3 : \begin{cases} x_1 = c_1 + t_3(a_1 - c_1) \\ x_2 = c_2 + t_3(a_2 - c_2) \\ x_3 = c_3 + t_3(a_3 - c_3) \end{cases},$$

em que  $t_1$ ,  $t_2$  e  $t_3$  são, respectivamente, os parâmetros das retas  $r_1$ ,  $r_2$  e  $r_3$ . Escolhemos um conjunto de constantes reais não nulas  $K = \{k_1, k_2, k_3\}$  tais que

$$\sum_{i=1}^3 k_i(b_i - a_i) = 0; \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^3 k_i(c_i - b_i) = 0. \tag{7}$$

Desse modo, o sistema de equações lineares  $S_1$  tem como equivalente o seguinte sistema:

$$\sim S_1 : \begin{cases} k_1 x_1 = k_1 a_1 + t_1 k_1 (b_1 - a_1) \\ k_2 x_2 = k_2 a_2 + t_1 k_2 (b_2 - a_2) \\ k_3 x_3 = k_3 a_3 + t_1 k_3 (b_3 - a_3) \end{cases}.$$

Somando-se membro a membro as 3 equações de  $\sim S_1$ , temos:

$$\sum_{i=1}^3 k_i x_i = \sum_{i=1}^3 k_i a_i + t_1 \left[ \sum_{i=1}^3 k_i (b_i - a_i) \right]. \tag{8}$$

Da equação (6) e da equação (8), vem:

$$\sum_{i=1}^3 k_i x_i = \sum_{i=1}^3 k_i a_i. \tag{9}$$

Além disso, da equação (6), vem:

$$\sum_{i=1}^3 k_i b_i = \sum_{i=1}^3 k_i a_i; \tag{10}$$

e da equação (7), vem:

$$\sum_{i=1}^3 k_i c_i = \sum_{i=1}^3 k_i b_i. \tag{11}$$

Assim, das equações (9), (10) e (11), finalmente, temos:

$$\sum_{i=1}^3 k_i x_i = \sum_{i=1}^3 k_i a_i = \sum_{i=1}^3 k_i b_i = \sum_{i=1}^3 k_i c_i,$$

caso ocorram simultaneamente (6) e (7). □

Com efeito, a matriz vinculante dos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $X$

$$V = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & x_1 & a_1 - b_1 & b_1 - c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & x_2 & a_2 - b_2 & b_2 - c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & x_3 & a_3 - b_3 & b_3 - c_3 \end{bmatrix}$$

representa as coordenadas de três pontos do espaço nas três primeiras colunas e, respectivamente, as coordenadas de um ponto qualquer do plano que contém esses três pontos (não alinhados) e as coordenadas de dois vetores paralelos a esse plano.

**Teorema 4.2** (Equação do plano determinado por três pontos). Dados  $A = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $B = (b_1, b_2, b_3)$  e  $C = (c_1, c_2, c_3)$  três pontos em  $\mathbb{R}^n$  e sendo  $\alpha$  o plano que contém esses pontos. Seja  $X = (x, y, z)$  em  $\mathbb{R}^n$  um ponto qualquer de  $\alpha$ . Seja  $V$  a matriz vinculante dos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $X$ :

$$V = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & x & a_1 - b_1 & b_1 - c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & y & a_2 - b_2 & b_2 - c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & z & a_3 - b_3 & b_3 - c_3 \end{bmatrix}.$$

Então, podemos obter uma matriz equivalente  $\tilde{V}$ ,

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & x & a_1 - b_1 & b_1 - c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & y & a_2 - b_2 & b_2 - c_2 \\ d & d & d & ax + by + cz & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

que permita determinar a equação do plano  $\alpha : ax + by + cz = d$ , para  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .

*Demonstração.* Seja

$$V = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & x_1 & a_1 - b_1 & b_1 - c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & x_2 & a_2 - b_2 & b_2 - c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & x_3 & a_3 - b_3 & b_3 - c_3 \end{bmatrix}$$

a matriz vinculante dos pontos  $A = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $B = (b_1, b_2, b_3)$  e  $X = (x_1, x_2, x_3)$ . Usando-se o conjunto  $K = \{k_1, k_2, k_3\}$  para obter uma matriz equivalente a  $V$ , multiplicando-se a primeira linha por  $k_1$ ; a segunda por,  $k_2$ ; e terceira, por  $k_3$ . E, em seguida, somamos as duas primeiras linhas com a terceira linha dessa matriz. Assim, temos a seguinte matriz equivalente a  $V$ :

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & x_1 & a_1 - b_1 & b_1 - c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & x_2 & a_2 - b_2 & b_2 - c_2 \\ \sum_{i=1}^3 k_i a_i & \sum_{i=1}^3 k_i b_i & \sum_{i=1}^3 k_i c_i & \sum_{i=1}^3 k_i x_i & \sum_{i=1}^3 k_i (a_i - b_i) & \sum_{i=1}^3 k_i (b_i - c_i) \end{bmatrix}.$$

Do Teorema 4.1 sabemos que, se ocorrer

$$\sum_{i=1}^3 k_i (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^3 k_i (b_i - c_i) = 0,$$

então

$$\sum_{i=1}^3 k_i x_i = \sum_{i=1}^3 k_i a_i = \sum_{i=1}^3 k_i b_i = \sum_{i=1}^3 k_i c_i.$$

Tomando-se

$$\sum_{i=1}^3 k_i a_i = \sum_{i=1}^3 k_i b_i = \sum_{i=1}^3 k_i c_i = d,$$



$$x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, k_1 = a, k_2 = b, k_3 = c,$$

vem:

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & x & a_1 - b_1 & b_1 - c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & y & a_2 - b_2 & b_2 - c_2 \\ d & d & d & ax + by + cz & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ainda do Teorema 4.1, temos:

$$ax + by + cz = d,$$

que é exatamente a equação do plano  $\alpha$ . □

**Exemplo 3.** Determine a equação do plano que contém os pontos  $(1, 8, 2)$ ,  $(1, 6, 6)$  e  $(1, 4, 8)$ .

Solução:

Como não há obrigatoriedade de se ter uma ordem para os pontos ao formarmos a matriz vinculante, começaremos com os pontos na ordem em que foram dados. Assim, sendo  $X = (x, y, z)$  um ponto qualquer do plano solicitado e  $V$  a matriz vinculante dos pontos dados e do ponto  $X$ , vem:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & x & 0 & 0 \\ 8 & 6 & 4 & y & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 8 & z & -4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Como a primeira linha da matriz vinculante  $V$  atende ao Teorema 4.2, a equação geral do plano é:  $x = 1$ .

**Exemplo 4.** Encontre a equação do plano que contém os pontos  $(6, 1, -1)$ ,  $(5, -10, 1)$  e  $(4, -21, 2)$ .

Solução:

Seendo  $X = (x, y, z)$  um ponto qualquer do plano que contém os pontos dados, formemos a matriz vinculante  $V$ :

$$V = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 & x & 1 & 1 \\ 1 & -10 & -21 & y & 11 & 11 \\ -1 & 1 & 2 & z & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Nosso objetivo inicial é obtermos uma matriz equivalente a  $V$  e que atenda ao Teorema 4.2. Para tanto, inicialmente, faremos com que os elementos que estão nas segunda e terceira linhas da quinta coluna dessa matriz sejam nulos. Para que isso aconteça, multiplicaremos a primeira linha de  $V$  por  $-11$  e, em seguida, somaremos a resultado na segunda linha de  $V$ . Dessa forma, obtemos a seguinte matriz equivalente:

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 & x & 1 & 1 \\ -65 & -65 & -65 & -11x + y & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & z & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Como a matriz obtida já atende ao Teorema 4.2, por sua segunda linha, a equação do plano solicitado é:

$$-11x + y = -65.$$

**Exemplo 5.** Dados os pontos  $(-2, 16, 5)$ ,  $(3, 12, 1)$  e  $(4, -42, 3)$ , encontre a equação do plano que contém esses três pontos.

Solução:

Seja  $X = (x, y, z)$  um ponto qualquer do plano que contém os pontos dados, formemos a matriz vinculante  $V$ :

$$V = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 & x & -5 & -1 \\ 16 & 12 & -42 & y & 4 & 54 \\ 5 & 1 & 3 & z & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Nosso objetivo inicial é obtermos uma matriz equivalente a  $V$  e que atenda ao Teorema 4.2. Para tanto, inicialmente, faremos com que o elemento que ocupa a segunda linha e quinta coluna seja nulo, o mesmo valendo para o que ocupa a terceira linha dessa coluna. Para que isso aconteça, multiplicaremos a terceira linha de  $V$  por  $-1$  e, em seguida, somaremos a resultado na segunda linha de  $V$ ; multiplicando a terceira por  $5$  e a primeira por  $4$  e depois somando e substituindo na terceira linha. Dessa forma, obtemos a seguinte matriz equivalente:

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 & x & -5 & -1 \\ 11 & 11 & -45 & y - z & 0 & 56 \\ 17 & 17 & 31 & 4x + 5z & 0 & -14 \end{bmatrix}.$$

Agora o nosso objetivo é anular o elemento dessa matriz que está na terceira linha e sexta coluna e, para isso, multiplicamos a terceira linha por  $4$  e, depois, somamos a esta a segunda linha, obtendo-se uma nova matriz equivalente:

$$\tilde{V}' = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 & x & -5 & -1 \\ 11 & 11 & -45 & y - z & 0 & 56 \\ 79 & 79 & 79 & 16x + y + 19z & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como a matriz obtida atende ao Teorema 4.2, por sua terceira linha, a equação do plano é:

$$16x + y + 19z = 79.$$

## 5 Área de um Triângulo

Nesta seção, apresentaremos a área de um triângulo em função de determinantes de matrizes de segunda ordem.

### 5.1 Área de um Triângulo no Plano

Sejam  $A = (a_1, a_2)$ ,  $B = (b_1, b_2)$  e  $C = (c_1, c_2)$  os vértices de um triângulo em  $\mathbb{R}^2$  e seja  $S$  a área desse triângulo. A área  $S$  em função das coordenadas desses pontos é dada por:

$$S = \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} \right\|.$$

Considerando que, dadas uma matriz quadrada  $M$  e sua transposta  $M^t$ ,

$$\det M = \det M^t,$$

vem:

$$S = \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right\|.$$

Trocando-se duas filas de lugar em um determinante, o valor desse determinante não se altera. Desse modo, trocando-se de lugar a primeira e a terceira linhas do determinante, temos:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}.$$

A seguir, trocamos de lugar a segunda e a terceira linhas do determinante:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

E depois, trocando-se de lugar a primeira e a segunda colunas do determinante, vem:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Aplicando-se a Regra de Chió, vem:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 - b_1 & c_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 & c_2 - b_2 \end{vmatrix}.$$

Multiplicando-se a segunda coluna do determinante por  $-1$  e esse determinante também por  $-1$ , o resultado não se altera; assim, temos:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} (-1) & a_1 - b_1 & b_1 - c_1 \\ (-1) & a_2 - b_2 & b_2 - c_2 \end{vmatrix}.$$

Como a área  $S$  é o módulo do determinante, modulando-se, temos:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 - b_1 & b_1 - c_1 \\ a_2 - b_2 & b_2 - c_2 \end{vmatrix}.$$

Usando-se o conceito de matriz vinculante para os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , poderemos encontrar esse determinante facilmente usando-se as quarta e quinta colunas dessa matriz. Assim, sendo  $V$  a matriz vinculante dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  e  $S$  a área desse triângulo. Então, tendo-se

$$V = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 - b_1 & b_1 - c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 - b_2 & b_2 - c_2 \end{bmatrix},$$

encontramos

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 - b_1 & b_1 - c_1 \\ a_2 - b_2 & b_2 - c_2 \end{vmatrix}.$$

**Exemplo 6.** Determine a área do triângulo cujos vértices são os pontos  $(6, 3)$ ,  $(4, -1)$  e  $(1, -6)$ .

Solução:

Construindo a matriz vinculante das coordenadas dos vértices dados, temos:

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -6 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Seja  $S$  a área solicitada. Então, o valor de  $S$  é dado por:

$$S = \frac{1}{2} |10 - 12| = 1.$$

**Exemplo 7.** Determine a área do triângulo cujos vértices são os pontos  $(4, -5)$ ,  $(-4, -3)$  e  $(7, 2)$ .

Solução:

Construindo a matriz vinculante das coordenadas dos vértices dados, temos:

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & 7 & 8 & -11 \\ -5 & -3 & 2 & -2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Seja  $S$  a área solicitada. Então, o valor de  $S$  é dado por:

$$S = \frac{1}{2} |-40 - 22| = 31.$$

## 5.2 Área de um Triângulo no Espaço

Sejam  $A = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $B = (b_1, b_2, b_3)$  e  $C = (c_1, c_2, c_3)$  os vértices de um triângulo em  $\mathbb{R}^3$  e seja  $S$  a área desse triângulo.  $\overrightarrow{AB} = \langle b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3 \rangle$  e  $\overrightarrow{BC} = \langle c_1 - b_1, c_2 - b_2, c_3 - b_3 \rangle$ . A área  $S$  em função das coordenadas desses pontos é dada por:

$$S = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} \right| = \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - b_1 & c_2 - b_2 & c_3 - b_3 \end{array} \right\|.$$

O valor do produto vetorial é dado por:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_2 - b_2 & c_3 - b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_3 - a_3 \\ c_1 - b_1 & c_3 - b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - b_1 & c_2 - b_2 \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Considerando que, dadas uma matriz quadrada  $M$  e sua transposta  $M^t$ ,

$$\det M = \det M^t,$$

vem:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} b_2 - a_2 & c_2 - b_2 \\ b_3 - a_3 & c_3 - b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - b_1 \\ b_3 - a_3 & c_3 - b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - b_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - b_2 \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Multiplicando-se a primeira e a segunda linhas de um determinante de segunda ordem por  $-1$ , seu valor não se altera:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} a_2 - b_2 & b_2 - c_2 \\ a_3 - b_3 & b_3 - c_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 - b_1 & b_1 - c_1 \\ a_3 - b_3 & b_3 - c_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 - b_1 & b_1 - c_1 \\ a_2 - b_2 & b_2 - c_2 \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Sendo  $a$ ,  $b$  e  $c$  as coordenadas de um produto vetorial

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}, \tag{12}$$

então o valor de sua norma é dado por:

$$\left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} \right| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \tag{13}$$

Assim, a área de um triângulo no espaço, em função de determinantes de segunda ordem, é dada por:

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{\left( \begin{vmatrix} a_2 - b_2 & b_2 - c_2 \\ a_3 - b_3 & b_3 - c_3 \end{vmatrix} \right)^2 + \left( \begin{vmatrix} a_1 - b_1 & b_1 - c_1 \\ a_3 - b_3 & b_3 - c_3 \end{vmatrix} \right)^2 + \left( \begin{vmatrix} a_1 - b_1 & b_1 - c_1 \\ a_2 - b_2 & b_2 - c_2 \end{vmatrix} \right)^2}.$$

Usando-se o conceito de matriz vinculante para os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , poderemos encontrar esses determinantes facilmente usando-se as quarta e quinta colunas dessa matriz:

$$V = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 - b_1 & b_1 - c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 - b_2 & b_2 - c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 - b_3 & b_3 - c_3 \end{bmatrix}.$$

Para tanto, repetimos os primeiros elementos dessas colunas abaixo dos últimos e, em seguida, multiplicamos os elementos no sentido das setas do esquema  $E_1$ :

$$\begin{array}{ccc} a_1 - b_1 & & b_1 - c_1 \\ & \searrow & \swarrow \\ a_2 - b_2 & & b_2 - c_2 \\ & \searrow & \swarrow \\ a_3 - b_3 & & b_3 - c_3 \\ & \searrow & \swarrow \\ a_1 - b_1 & & b_1 - c_1 \end{array}$$

O esquema  $E_1$  nos permite montar a equação (14), que é uma igualdade de duas matrizes: a do primeiro-membro da equação corresponde a uma matriz coluna de três elementos, os quais são determinantes de matrizes de segunda ordem; enquanto a do segundo-membro, corresponde a uma matriz coluna, cujos elementos são as componentes do produto vetorial da equação (12).

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_1 - b_1 & b_1 - c_1 \\ a_2 - b_2 & b_2 - c_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_2 - b_2 & b_2 - c_2 \\ a_3 - b_3 & b_3 - c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 - b_3 & b_3 - c_3 \\ a_1 - b_1 & b_1 - c_1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ a \\ b \end{bmatrix} \quad (14)$$

Em seguida, calculamos os determinantes das matrizes de segunda ordem da equação (14) para obtermos os valores das componentes vetoriais da equação (12) e, finalmente, encontrarmos o valor da norma da equação (13).

**Exemplo 8.** Determine a área do triângulo cujos vértices são os pontos  $(5, 1, 6)$ ,  $(4, -2, 2)$  e  $(2, -7, -4)$ .

Solução:

Escrevendo-se a matriz vinculante dos vértices do triângulo, temos:

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -7 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & -4 & 4 & 6 \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Seja  $S$  a área solicitada. Então,

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{(1 \cdot 5 - 3 \cdot 2)^2 + (3 \cdot 6 - 4 \cdot 5)^2 + (4 \cdot 2 - 1 \cdot 6)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4 + 4} = \frac{3}{2}.$$

**Exemplo 9.** Determine a área do triângulo cujos vértices são os pontos  $(6, 4, 9)$ ,  $(5, 6, 8)$  e  $(8, 1, 2)$ .

Solução:

Montando-se a matriz vinculante dos vértices do triângulo, vem:

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 & 8 & 1 & -3 \\ 4 & 6 & 1 & -2 & 5 \\ 9 & 8 & 2 & 1 & 6 \\ & & & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Seja  $S$  a área solicitada. Então,

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{(5 - 6)^2 + (-12 - 5)^2 + (-3 - 6)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{371}.$$

## Referências

- [1] ROGAWSKI, Jon. *Cálculo*. Vol. 2. Porto Alegre: Bookman, 2009. p. 603 e p. 655-718.
- [2] APOSTOL, Tom Mike. *Calculus, One-Variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra*. Vol. 1. 2nd Edition. New York, Santa Barbara, London, Sydney, Toronto: John Wiley e Sons, Inc.; 1967.
- [3] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise*. vol. 1. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, IMPA, 2006.
- [4] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise*. vol. 2. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, IMPA, 2005.
- [5] LIMA, Elon Lages. *Análise Real*. vol. 2. Rio de Janeiro: Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2004.
- [6] LIMA, Elon Lages. *Análise no Espaço  $R^n$* . Rio de Janeiro: Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2004.
- [7] LIMA, Elon Lages. *Geometria analítica e álgebra linear*. Rio de Janeiro: IMPA, 2001.
- [8] AVRITZER, Dan. *Geometria analítica e álgebra linear: uma visão geométrica*. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2009.
- [9] SANTOS, Reginaldo J. *Um Curso de Geometria Analítica e Álgebra Linear*. Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2002.