Método Matricial para Determinação da Área do Triângulo e das Equações da Reta e do Plano

ORIVALDO NAZARENO MONTEIRO DE ATAIDE

15 de janeiro de 2017

Resumo

Este artigo aborda uma maneira de se determinar a equação da reta, no plano ou no espaço, quando forem conhecidas as coordenadas cartesianas de dois de seus pontos. Além disso, aborda uma forma de se encontrar a equação do plano quando forem dados três pontos desse plano. E por fim, aborda um método de se calcular a área de um triângulo, no plano ou no espaço, conhecidas as coordenadas cartesianas de seus vértices.

1 Introdução

Apresentamos um método para se determinar a equação da reta e a equação do plano, mediante a disposição dos valores das coordenadas cartesianas de pontos pertencentes a essas equações em matrizes específicas.

Para a formação dessa estrutura matricial, definimos matriz vinculante e matriz equivalente, definições essas criadas pelo autor deste trabalho; e, para a determinação de tais equações, foram descobertos pelo autor teoremas que se relacionam a tais matrizes.

Além disso, essas definições e teoremas permitiram a descoberta de um procedimento matemático para o cálculo da área de um triângulo, seja ele do espaço bidimensional, seja do espaço tridimensional.

A existência desse procedimento, consequentemente, sugere a continuação dos estudos sobre o tema aqui proposto para, quem sabe, futuras descobertas de outras maneiras de se determinar as áreas de outras figuras geométricas.

2 Matriz Vinculante e Matriz Equivalente

Definição 2.1. (Matriz Vinculante). Seja $A_j = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^n$, com $i, j \in \mathbb{N}$ e $1 \leq i \leq n$, e tomemos M um conjunto com p elementos de $\mathbb{R}^n$: $M = \{A_1, A_2, A_3, \cdots, A_p\}$. Sendo $X = (x_i)$ um ponto qualquer em $\mathbb{R}^n$, definimos matriz vinculante V como aquela cujos elementos são formados pelas coordenadas dos elementos de M e de X, de acordo com a seguinte lei de formação:

$$v_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, \text{ se } 1 \leq j \leq p; \\ x_i, \text{ se } j = p+1; \\ a_{i\alpha} - a_{i(\alpha+1)}, \text{ se } 1 \leq \alpha \leq (p-1) \text{ e } (p+2) \leq j \leq 2p. \end{cases}$$

Nesse sentido, a matriz vinculante V é formada de tal modo que as coordenadas de $A_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31}, \cdots, a_{n1})$ ocupem a primeira coluna; as coordenadas de $A_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32}, \cdots, a_{n2})$, a segunda coluna; as de $A_3 = (a_{13}, a_{23}, a_{33}, \cdots, a_{n3})$, a terceira coluna; e assim sucessivamente até as coordenadas de $A_p = (a_{1p}, a_{2p}, a_{3p}, \cdots, a_{np})$ ocuparem a p-ésima coluna; então, as coordenadas de $X = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ ocupam a $(p+1)$-ésima coluna; as de $A_1 - A_2$, a $(p+2)$-ésima coluna; as de $A_2 - A_3$, a $(p+3)$-ésima coluna e assim sucessivamente para as demais diferenças entre os elementos de uma coluna e os elementos da coluna imediatamente a sua direita. Assim, temos:

$$V = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1(p-1)} & a_{1p} & x_1 & a_{11} - a_{12} & a_{12} - a_{13} & \cdots & a_{1(p-1)} - a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2(p-1)} & a_{2p} & x_2 & a_{21} - a_{22} & a_{22} - a_{23} & \cdots & a_{2(p-1)} - a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{i(p-1)} & a_{ip} & x_i & a_{i1} - a_{i2} & a_{i2} - a_{i3} & \cdots & a_{i(p-1)} - a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n(p-1)} & a_{np} & x_n & a_{n1} - a_{n2} & a_{n2} - a_{n3} & \cdots & a_{n(p-1)} - a_{np} \end{bmatrix}.$$

Definição 2.2. (Matriz Equivalente). Definimos a matriz equivalente $\tilde{V} = (\tilde{v}_{ij})$ como uma matriz cujos elementos são obtidos a partir dos elementos de uma matriz vinculante $V = (v_{ij})$, mediante a multiplicação de todos os elementos de uma mesma linha da matriz vinculante por uma mesma constante real.

$$\tilde{V} = [\tilde{v}_{ij}] = [k_i v_{ij}] =\sim V.$$

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} k_1 a_{11} & k_1 a_{12} & \cdots & k_1 a_{1(p-1)} & k_1 a_{1p} & k_1 x_1 & k_1(a_{11} - a_{12}) & \cdots & k_1(a_{1(p-1)} - a_{1p}) \\ k_2 a_{21} & k_2 a_{22} & \cdots & k_2 a_{2(p-1)} & k_2 a_{2p} & k_2 x_2 & k_2(a_{21} - a_{22}) & \cdots & k_2(a_{2(p-1)} - a_{2p}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ k_i a_{i1} & k_i a_{i2} & \cdots & k_i a_{i(p-1)} & k_i a_{ip} & k_i x_i & k_i(a_{i1} - a_{i2}) & \cdots & k_i(a_{i(p-1)} - a_{ip}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_n a_{n1} & k_n a_{n2} & \cdots & k_n a_{n(p-1)} & k_n a_{np} & k_n x_n & k_n(a_{n1} - a_{n2}) & \cdots & k_n(a_{n(p-1)} - a_{np}) \end{bmatrix}.$$

3 Equação Geral da Reta

Definição 3.1. Sejam $A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ e $B = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ pontos em $\mathbb{R}^n$. Seja ainda r a reta que passa por A e B. Seja $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ um ponto qualquer de r. A equação geral da reta r é dada por

$$r : k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_n x_n = k_0,$$

em que $k_i \in \mathbb{R}$ e $i \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.1. Dados $A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ e $B = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ dois pontos em $\mathbb{R}^n$ e sendo $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ um ponto qualquer desse espaço. Seja

$$V = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & x_1 & a_1 - b_1 \\ a_2 & b_2 & x_2 & a_2 - b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & x_n & a_n - b_n \end{bmatrix}$$

a matriz vinculante dos pontos A, B e X; e seja

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} k_1 a_1 & k_1 b_1 & k_1 x_1 & k_1(a_1 - b_1) \\ k_2 a_2 & k_2 b_2 & k_2 x_2 & k_2(a_2 - b_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_n a_n & k_n b_n & k_n x_n & k_n(a_n - b_n) \end{bmatrix}$$

uma matriz equivalente da matriz vinculante V, gerada a partir de V mediante a multiplicação de cada linha desta pelos elementos do conjunto de constantes reais não nulas $K = \{k_1, k_2, \cdots, k_n\}$. Se

$$\sum_{i=1}^{n} k_i(a_i - b_i) = 0,$$

então

$$\sum_{i=1}^{n} k_i x_i = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i = \sum_{i=1}^{n} k_i b_i.$$

Demonstração. Sendo r a reta que passa por A e B, então o vetor $\overrightarrow{BA} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, \cdots, a_n - b_n \rangle$ é paralelo à reta r. Assim, r tem como equações paramétricas o seguinte sistema de equações lineares:

$$S : \begin{cases} x_1 = b_1 + t(a_1 - b_1) \\ x_2 = b_2 + t(a_2 - b_2) \\ \qquad \vdots \\ x_n = b_n + t(a_n - b_n) \end{cases}.$$

Agora, escolhemos um conjunto de constantes reais não nulas $K = \{k_1, k_2, \cdots, k_n\}$ tais que

$$\sum_{i=1}^{n} k_i(a_i - b_i) = 0. \tag{1}$$

Multiplicando-se a primeira linha de S por k_1; a segunda linha de S, por k_2; e assim por diante, até a n-ésima linha de S, por k_n, obtemos um sistema equivalente de S:

$$\sim S : \begin{cases} k_1 x_1 = k_1 b_1 + t k_1(a_1 - b_1) \\ k_2 x_2 = k_2 b_2 + t k_2(a_2 - b_2) \\ \qquad \vdots \\ k_n x_n = k_n b_n + t k_n(a_n - b_n) \end{cases}.$$

Somando-se membro a membro as n equações de $\sim S$, temos:

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_n x_n = k_1 b_1 + k_2 b_2 + \cdots + k_n b_n + t[k_1(a_1 - b_1) + k_2(a_2 - b_2) + \cdots + k_n(a_n - b_n)]. \tag{2}$$

Usando-se a representação por somatórios, a equação (2) torna-se:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i x_i = \sum_{i=1}^{n} k_i b_i + t \left[\sum_{i=1}^{n} k_i(a_i - b_i) \right]. \tag{3}$$

Das equações (1) e (3), concluímos que:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i x_i = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i. \tag{4}$$

Além disso, da equação (1), encontramos:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i(a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i - \sum_{i=1}^{n} k_i b_i = 0,$$

de modo que

$$\sum_{i=1}^{n} k_i a_i = \sum_{i=1}^{n} k_i b_i. \tag{5}$$

Da equação (4) e da equação (5), finalmente, temos:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i x_i = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i = \sum_{i=1}^{n} k_i b_i,$$

o que conclui a demonstração do teorema. □

Teorema 3.2 (Equação geral da reta determinada por dois pontos)**.** Dados $A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ e $B = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ dois pontos em $\mathbb{R}^n$ e sendo r uma reta que passa por esses dois pontos. Seja $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ em $\mathbb{R}^n$ um ponto qualquer de r. Seja V a matriz vinculante dos pontos A, B e X:

$$V = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & x_1 & a_1 - b_1 \\ a_2 & b_2 & x_2 & a_2 - b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & x_n & a_n - b_n \end{bmatrix}.$$

Então, podemos obter uma matriz equivalente $\tilde{V}$,

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & x_1 & a_1 - b_1 \\ a_2 & b_2 & x_2 & a_2 - b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -k_0 & -k_0 & k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_nx_n & 0 \end{bmatrix},$$

que permita determinar a equação geral da reta $r : k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_nx_n = k_0$, para $k_i \in \mathbb{R}$ e $i \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Seja

$$V = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & x_1 & a_1 - b_1 \\ a_2 & b_2 & x_2 & a_2 - b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & x_n & a_n - b_n \end{bmatrix}$$

a matriz vinculante dos pontos $A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $B = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ e $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$. Usaremos o conjunto $K = \{k_1, k_2, \cdots, k_n\}$ para obtermos uma matriz equivalente a V: multiplicamos a primeira linha por k_1; a segunda, por k_2; e assim por diante, até a n-ésima linha, por k_n. Em seguida, somamos as $(n-1)$ primeiras linhas na n-ésima linha dessa matriz. Assim, temos como matriz equivalente a V:

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & x_1 & a_1 - b_1 \\ a_2 & b_2 & x_2 & a_2 - b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} k_i a_i & \sum_{i=1}^{n} k_i b_i & \sum_{i=1}^{n} k_i x_i & \sum_{i=1}^{n} k_i(a_i - b_i) \end{bmatrix}.$$

Do Teorema 3.1 sabemos que, se ocorrer

$$\sum_{i=1}^{n} k_i(a_i - b_i) = 0,$$

então

$$\sum_{i=1}^{n} k_i x_i = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i = \sum_{i=1}^{n} k_i b_i.$$

Tomando-se

$$\sum_{i=1}^{n} k_i a_i = \sum_{i=1}^{n} k_i b_i = k_0,$$

vem:

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & x_1 & a_1 - b_1 \\ a_2 & b_2 & x_2 & a_2 - b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_0 & k_0 & k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_nx_n & 0 \end{bmatrix}.$$

Ainda do Teorema 3.1, temos:

$$k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_nx_n = k_0,$$

que é exatamente a equação geral da reta r. □

Exemplo 1. Determine a equação da reta que passa nos pontos $(1, 2)$ e $(-1, 1)$.

Solução:

Escrevendo-se a matriz vinculante dos pontos dados, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & x & 2 \\ 2 & 1 & y & 1 \end{pmatrix}.$$

Em seguida, devemos obter uma matriz equivalente na qual a soma dos elementos da quarta coluna seja nula. Para tanto, devemos multiplicar todos os elementos da segunda linha da matriz vinculante por -2 e, em seguida, somar a primeira linha com essa nova segunda linha, substituindo o resultado nessa linha. Daí, vem a seguinte matriz equivalente:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & x & 2 \\ -3 & -3 & x - 2y & 0 \end{pmatrix}.$$

Do Teorema 3.1, na página 2, temos:

$$x - 2y = -3,$$

que é a equação da reta solicitada.

Exemplo 2. Determine a equação da reta que passa nos pontos $(1, 2, -1)$ e $(-1, 1, 2)$.

Solução:

Escrevendo-se a matriz vinculante dos pontos dados, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & x & 2 \\ 2 & 1 & y & 1 \\ -1 & 2 & z & -3 \end{pmatrix}.$$

Como a soma dos elementos da quarta coluna dessa matriz tem soma nula, obtemos uma matriz equivalente somando-se as duas primeiras linhas na terceira:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & x & 2 \\ 2 & 1 & y & 1 \\ 2 & 2 & x+y+z & 0 \end{pmatrix}.$$

Agora, podemos aplicar o Teorema 3.1, na página 2. Assim, temos como equação da reta:

$$x + y + z = 2.$$

4 Equação do Plano

Definição 4.1. Sejam $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ e $C = (c_1, c_2, c_3)$ pontos em $\mathbb{R}^n$. Seja α o plano que passa por A, B e C. Seja ainda $X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^n$ um ponto qualquer de α. A equação do plano α é dada por:

$$\alpha : k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 = k_0,$$

em que k_i é uma constante real, com $i \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Teorema 4.1. Dados $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ e $C = (c_1, c_2, c_3)$ três pontos em $\mathbb{R}^n$ e seja α um plano desse espaço e que contém esses três pontos. Para um ponto $X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^n$ qualquer de α, seja

$$V = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & x_1 & a_1 - b_1 & b_1 - c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & x_2 & a_2 - b_2 & b_2 - c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & x_3 & a_3 - b_3 & b_3 - c_3 \end{bmatrix}$$

a matriz vinculante dos pontos A, B, C e X; e seja

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} k_1a_1 & k_1b_1 & k_1c_1 & k_1x_1 & k_1(a_1 - b_1) & k_1(b_1 - c_1) \\ k_2a_2 & k_2b_2 & k_2c_2 & k_2x_2 & k_2(a_2 - b_2) & k_2(b_2 - c_2) \\ k_3a_3 & k_3b_3 & k_3c_3 & k_3x_3 & k_3(a_3 - b_3) & k_3(b_3 - c_3) \end{bmatrix}$$

uma matriz equivalente da matriz vinculante V, gerada a partir de V mediante a multiplicação de cada linha desta pelos elementos do conjunto de constantes reais não nulas $K = \{k_1, k_2, k_3\}$. Se

$$\sum_{i=1}^{3} k_i(a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{3} k_i(b_i - c_i) = 0,$$

então

$$\sum_{i=1}^{3} k_ix_i = \sum_{i=1}^{3} k_ia_i = \sum_{i=1}^{3} k_ib_i = \sum_{i=1}^{3} k_ic_i.$$

Demonstração. Sendo α o plano que contém os pontos A, B e C, tomemos $X \in \alpha$ e consideremos r_1, r_2 e r_3 três retas que contêm o ponto X e são, respectivamente, paralelas às retas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{CA}$. Por conseguinte, as retas r_1, r_2 e r_3 são, respectivamente, paralelas aos vetores $\overrightarrow{AB} = \langle b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3 \rangle$, $\overrightarrow{BC} = \langle c_1 - b_1, c_2 - b_2, c_3 - b_3 \rangle$ e $\overrightarrow{CA} = \langle a_1 - c_1, a_2 - c_2, a_3 - c_3 \rangle$. Nesse sentido, se X está nas três retas, então as equações paramétricas das retas r_1, r_2 e r_3 são os seguintes sistemas de equações lineares:

$$S_1 : \begin{cases} x_1 = a_1 + t_1(b_1 - a_1) \\ x_2 = a_2 + t_1(b_2 - a_2) \\ x_3 = a_3 + t_1(b_3 - a_3) \end{cases}, \quad S_2 : \begin{cases} x_1 = b_1 + t_2(c_1 - b_1) \\ x_2 = b_2 + t_2(c_2 - b_2) \\ x_3 = b_3 + t_2(c_3 - b_3) \end{cases}, \quad S_3 : \begin{cases} x_1 = c_1 + t_3(a_1 - c_1) \\ x_2 = c_2 + t_3(a_2 - c_2) \\ x_3 = c_3 + t_3(a_3 - c_3) \end{cases},$$

em que t_1, t_2 e t_3 são, respectivamente, os parâmetros das retas r_1, r_2 e r_3. Escolhemos um conjunto de constantes reais não nulas $K = \{k_1, k_2, k_3\}$ tais que

$$\sum_{i=1}^{3} k_i(b_i - a_i) = 0; \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{3} k_i(c_i - b_i) = 0. \tag{7}$$

Desse modo, o sistema de equações lineares S_1 tem como equivalente o seguinte sistema:

$$\sim S_1 : \begin{cases} k_1x_1 = k_1a_1 + t_1k_1(b_1 - a_1) \\ k_2x_2 = k_2a_2 + t_1k_2(b_2 - a_2) \\ k_3x_3 = k_3a_3 + t_1k_3(b_3 - a_3) \end{cases}.$$

Somando-se membro a membro as 3 equações de $\sim S_1$, temos:

$$\sum_{i=1}^{3} k_i x_i = \sum_{i=1}^{3} k_i a_i + t_1 \left[\sum_{i=1}^{3} k_i(b_i - a_i) \right]. \tag{8}$$

Da equação (6) e da equação (8), vem:

$$\sum_{i=1}^{3} k_i x_i = \sum_{i=1}^{3} k_i a_i. \tag{9}$$

Além disso, da equação (6), vem:

$$\sum_{i=1}^{3} k_i b_i = \sum_{i=1}^{3} k_i a_i; \tag{10}$$

e da equação (7), vem:

$$\sum_{i=1}^{3} k_i c_i = \sum_{i=1}^{3} k_i b_i. \tag{11}$$

Assim, das equações (9), (10) e (11), finalmente, temos:

$$\sum_{i=1}^{3} k_i x_i = \sum_{i=1}^{3} k_i a_i = \sum_{i=1}^{3} k_i b_i = \sum_{i=1}^{3} k_i c_i,$$

caso ocorram simultaneamente (6) e (7). $\square$

Com efeito, a matriz vinculante dos pontos A, B, C e X

$$V = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & x_1 & a_1 - b_1 & b_1 - c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & x_2 & a_2 - b_2 & b_2 - c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & x_3 & a_3 - b_3 & b_3 - c_3 \end{bmatrix}$$

representa as coordenadas de três pontos do espaço nas três primeiras colunas e, respectivamente, as coordenadas de um ponto qualquer do plano que contém esses três pontos (não alinhados) e as coordenadas de dois vetores paralelos a esse plano.

Teorema 4.2 (Equação do plano determinado por três pontos)**.** Dados $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ e $C = (c_1, c_2, c_3)$ três pontos em $\mathbb{R}^n$ e sendo α o plano que contém esses pontos. Seja $X = (x, y, z)$ em $\mathbb{R}^n$ um ponto qualquer de α. Seja V a matriz vinculante dos pontos A, B, C e X:

$$V = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & x & a_1 - b_1 & b_1 - c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & y & a_2 - b_2 & b_2 - c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & z & a_3 - b_3 & b_3 - c_3 \end{bmatrix}.$$

Então, podemos obter uma matriz equivalente $\tilde{V}$,

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & x & a_1 - b_1 & b_1 - c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & y & a_2 - b_2 & b_2 - c_2 \\ d & d & d & ax + by + cz & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

que permita determinar a equação do plano $\alpha : ax + by + cz = d$, para $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Seja

$$V = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & x_1 & a_1 - b_1 & b_1 - c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & x_2 & a_2 - b_2 & b_2 - c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & x_3 & a_3 - b_3 & b_3 - c_3 \end{bmatrix}$$

a matriz vinculante dos pontos $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ e $X = (x_1, x_2, x_3)$. Usando-se o conjunto $K = \{k_1, k_2, k_3\}$ para obter uma matriz equivalente a V, multiplicando-se a primeira linha por k_1; a segunda por, k_2; e terceira, por k_3. E, em seguida, somamos as duas primeiras linhas com a terceira linha dessa matriz. Assim, temos a seguinte matriz equivalente a V:

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & x_1 & a_1 - b_1 & b_1 - c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & x_2 & a_2 - b_2 & b_2 - c_2 \\ \sum_{i=1}^{3} k_i a_i & \sum_{i=1}^{3} k_i b_i & \sum_{i=1}^{3} k_i c_i & \sum_{i=1}^{3} k_i x_i & \sum_{i=1}^{3} k_i (a_i - b_i) & \sum_{i=1}^{3} k_i (b_i - c_i) \end{bmatrix}.$$

Do Teorema 4.1 sabemos que, se ocorrer

$$\sum_{i=1}^{3} k_i (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{3} k_i (b_i - c_i) = 0,$$

então

$$\sum_{i=1}^{3} k_i x_i = \sum_{i=1}^{3} k_i a_i = \sum_{i=1}^{3} k_i b_i = \sum_{i=1}^{3} k_i c_i.$$

Tomando-se

$$\sum_{i=1}^{3} k_i a_i = \sum_{i=1}^{3} k_i b_i = \sum_{i=1}^{3} k_i c_i = d,$$

$$x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, k_1 = a, k_2 = b, k_3 = c,$$

vem:

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & x & a_1 - b_1 & b_1 - c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & y & a_2 - b_2 & b_2 - c_2 \\ d & d & d & ax + by + cz & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ainda do Teorema 4.1, temos:

$$ax + by + cz = d,$$

que é exatamente a equação do plano α. $\square$

Exemplo 3. Determine a equação do plano que contém os pontos $(1, 8, 2)$, $(1, 6, 6)$ e $(1, 4, 8)$.

Solução:

Como não há obrigatoriedade de se ter uma ordem para os pontos ao formarmos a matriz vinculante, começaremos com os pontos na ordem em que foram dados. Assim, sendo $X = (x, y, z)$ um ponto qualquer do plano solicitado e V a matriz vinculante dos pontos dados e do ponto X, vem:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & x & 0 & 0 \\ 8 & 6 & 4 & y & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 8 & z & -4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Como a primeira linha da matriz vinculante V atende ao Teorema 4.2, a equação geral do plano é: $x = 1$.

Exemplo 4. Encontre a equação do plano que contém os pontos $(6, 1, -1)$, $(5, -10, 1)$ e $(4, -21, 2)$.

Solução:

Sendo $X = (x, y, z)$ um ponto qualquer do plano que contém os pontos dados, formemos a matriz vinculante V:

$$V = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 & x & 1 & 1 \\ 1 & -10 & -21 & y & 11 & 11 \\ -1 & 1 & 2 & z & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Nosso objetivo inicial é obtermos uma matriz equivalente a V e que atenda ao Teorema 4.2. Para tanto, inicialmente, faremos com que os elementos que estão nas segunda e terceira linhas da quinta coluna dessa matriz sejam nulos. Para que isso aconteça, multiplicaremos a primeira linha de V por -11 e, em seguida, somaremos a resultado na segunda linha de V. Dessa forma, obtemos a seguinte matriz equivalente:

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 & x & 1 & 1 \\ -65 & -65 & -65 & -11x + y & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & z & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Como a matriz obtida já atende ao Teorema 4.2, por sua segunda linha, a equação do plano solicitado é:

$$-11x + y = -65.$$

Exemplo 5. Dados os pontos $(-2, 16, 5)$, $(3, 12, 1)$ e $(4, -42, 3)$, encontre a equação do plano que contém esses três pontos.

Solução:

Sendo $X = (x, y, z)$ um ponto qualquer do plano que contém os pontos dados, formemos a matriz vinculante V:

$$V = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 & x & -5 & -1 \\ 16 & 12 & -42 & y & 4 & 54 \\ 5 & 1 & 3 & z & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Nosso objetivo inicial é obtermos uma matriz equivalente a V e que atenda ao Teorema 4.2. Para tanto, inicialmente, faremos com que o elemento que ocupa a segunda linha e quinta coluna seja nulo, o mesmo valendo para o que ocupa a terceira linha dessa coluna. Para que isso aconteça, multiplicaremos a terceira linha de V por -1 e, em seguida, somaremos a resultado na segunda linha de V; multiplicando a terceira por 5 e a primeira por 4 e depois somando e substituindo na terceira linha. Dessa forma, obtemos a seguinte matriz equivalente:

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 & x & -5 & -1 \\ 11 & 11 & -45 & y - z & 0 & 56 \\ 17 & 17 & 31 & 4x + 5z & 0 & -14 \end{bmatrix}.$$

Agora o nosso objetivo é anular o elemento dessa matriz que está na terceira linha e sexta coluna e, para isso, multiplicamos a terceira linha por 4 e, depois, somamos a esta a segunda linha, obtendo-se uma nova matriz equivalente:

$$\tilde{V'} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 & x & -5 & -1 \\ 11 & 11 & -45 & y - z & 0 & 56 \\ 79 & 79 & 79 & 16x + y + 19z & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como a matriz obtida atende ao Teorema 4.2, por sua terceira linha, a equação do plano é:

$$16x + y + 19z = 79.$$

5 Área de um Triângulo

Nesta seção, apresentaremos a área de um triângulo em função de determinantes de matrizes de segunda ordem.

5.1 Área de um Triângulo no Plano

Sejam $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ e $C = (c_1, c_2)$ os vértices de um triângulo em $\mathbb{R}^2$ e seja S a área desse triângulo. A área S em função das coordenadas desses pontos é dada por:

$$S = \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} \right\|.$$

Considerando que, dadas uma matriz quadrada M e sua transposta M^t,

$$detM = detM^t,$$

vem:

$$S = \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right\|.$$

Trocando-se duas filas de lugar em um determinante, o valor desse determinante não se altera. Desse modo, trocando-se de lugar a primeira e a terceira linhas do determinante, temos:

$$S = \frac{1}{2}\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{array} \right\|.$$

A seguir, trocamos de lugar a segunda e a terceira linhas do determinante:

$$S = \frac{1}{2}\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array} \right\|.$$

E depois, trocando-se de lugar a primeira e a segunda colunas do determinante, vem:

$$S = \frac{1}{2}\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \end{array} \right\|.$$

Aplicando-se a Regra de Chió, vem:

$$S = \frac{1}{2}\left\| \begin{array}{cc} a_1 - b_1 & c_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 & c_2 - b_2 \end{array} \right\|.$$

Multiplicando-se a segunda coluna do determinante por -1 e esse determinante também por -1, o resultado não se altera; assim, temos:

$$S = \frac{1}{2}\left|(-1)\left| \begin{array}{cc} a_1 - b_1 & b_1 - c_1 \\ a_2 - b_2 & b_2 - c_2 \end{array} \right|\right|.$$

Como a área S é o módulo do determinante, modulando-se, temos:

$$S = \frac{1}{2}\left\| \begin{array}{cc} a_1 - b_1 & b_1 - c_1 \\ a_2 - b_2 & b_2 - c_2 \end{array} \right\|.$$

Usando-se o conceito de matriz vinculante para os pontos A, B e C, poderemos encontrar esse determinante facilmente usando-se as quarta e quinta colunas dessa matriz. Assim, sendo V a matriz vinculante dos pontos A, B e C e S a área desse triângulo. Então, tendo-se

$$V = \left[\begin{array}{ccccc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 - b_1 & b_1 - c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 - b_2 & b_2 - c_2 \end{array} \right],$$

encontramos

$$S = \frac{1}{2}\left\| \begin{array}{cc} a_1 - b_1 & b_1 - c_1 \\ a_2 - b_2 & b_2 - c_2 \end{array} \right\|.$$

Exemplo 6. Determine a área do triângulo cujos vértices são os pontos $(6, 3)$, $(4, -1)$ e $(1, -6)$.

Solução:

Construindo a matriz vinculante das coordenadas dos vértices dados, temos:

$$\left[\begin{array}{ccccc} 6 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -6 & 4 & 5 \end{array} \right].$$

Seja S a área solicitada. Então, o valor de S é dado por:

$$S = \frac{1}{2}\left|10 - 12\right| = 1.$$

Exemplo 7. Determine a área do triângulo cujos vértices são os pontos $(4,-5)$, $(-4,-3)$ e $(7,2)$.

Solução:

Construindo a matriz vinculante das coordenadas dos vértices dados, temos:

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & 7 & 8 & -11 \\ -5 & -3 & 2 & -2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Seja S a área solicitada. Então, o valor de S é dado por:

$$S = \frac{1}{2}\left|-40-22\right| = 31.$$

5.2 Área de um Triângulo no Espaço

Sejam $A=(a_1,a_2,a_3)$, $B=(b_1,b_2,b_3)$ e $C=(c_1,c_2,c_3)$ os vértices de um triângulo em $\mathbb{R}^3$ e seja S a área desse triângulo. $\overrightarrow{AB}=\langle b_1-a_1, b_2-a_2, b_3-a_3\rangle$ e $\overrightarrow{BC}=\langle c_1-b_1, c_2-b_2, c_3-b_3\rangle$. A área S em função das coordenadas desses pontos é dada por:

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}\right| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_1-b_1 & c_2-b_2 & c_3-b_3 \end{matrix}\right\|.$$

O valor do produto vetorial é dado por:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_2-b_2 & c_3-b_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} b_1-a_1 & b_3-a_3 \\ c_1-b_1 & c_3-b_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} b_1-a_1 & b_2-a_2 \\ c_1-b_1 & c_2-b_2 \end{vmatrix}\vec{k}.$$

Considerando que, dadas uma matriz quadrada M e sua transposta M^t,

$$detM = detM^t,$$

vem:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} b_2-a_2 & c_2-b_2 \\ b_3-a_3 & c_3-b_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} b_1-a_1 & c_1-b_1 \\ b_3-a_3 & c_3-b_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} b_1-a_1 & c_1-b_1 \\ b_2-a_2 & c_2-b_2 \end{vmatrix}\vec{k}.$$

Multiplicando-se a primeira e a segunda linhas de um determinante de segunda ordem por -1, seu valor não se altera:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} a_2-b_2 & b_2-c_2 \\ a_3-b_3 & b_3-c_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_1-b_1 & b_1-c_1 \\ a_3-b_3 & b_3-c_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_1-b_1 & b_1-c_1 \\ a_2-b_2 & b_2-c_2 \end{vmatrix}\vec{k}.$$

Sendo a, b e c as coordenadas de um produto vetorial

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC} = a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}, \tag{12}$$

então o valor de sua norma é dado por:

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}. \tag{13}$$

Assim, a área de um triângulo no espaço, em função de determinantes de segunda ordem, é dada por:

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\begin{vmatrix} a_2 - b_2 & b_2 - c_2 \\ a_3 - b_3 & b_3 - c_3 \end{vmatrix}\right)^2 + \left(\begin{vmatrix} a_1 - b_1 & b_1 - c_1 \\ a_3 - b_3 & b_3 - c_3 \end{vmatrix}\right)^2 + \left(\begin{vmatrix} a_1 - b_1 & b_1 - c_1 \\ a_2 - b_2 & b_2 - c_2 \end{vmatrix}\right)^2}.$$

Usando-se o conceito de matriz vinculante para os pontos A, B e C, poderemos encontrar esses determinantes facilmente usando-se as quarta e quinta colunas dessa matriz:

$$V = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 - b_1 & b_1 - c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 - b_2 & b_2 - c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 - b_3 & b_3 - c_3 \end{bmatrix}.$$

Para tanto, repetimos os primeiros elementos dessas colunas abaixo dos últimos e, em seguida, multiplicamos os elementos no sentido das setas do esquema E_1:

$$\begin{tikzcd}
a_1 - b_1 \arrow[dr] & b_1 - c_1 \arrow[dl] \\
a_2 - b_2 \arrow[dr] & b_2 - c_2 \arrow[dl] \\
a_3 - b_3 \arrow[dr] & b_3 - c_3 \arrow[dl] \\
a_1 - b_1 & b_1 - c_1
\end{tikzcd}$$

O esquema E_1 nos permite montar a equação (14), que é uma igualdade de duas matrizes: a do primeiro-membro da equação corresponde a uma matriz coluna de três elementos, os quais são determinantes de matrizes de segunda ordem; enquanto a do segundo-membro, corresponde a uma matriz coluna, cujos elementos são as componentes do produto vetorial da equação (12).

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_1 - b_1 & b_1 - c_1 \\ a_2 - b_2 & b_2 - c_2 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_2 - b_2 & b_2 - c_2 \\ a_3 - b_3 & b_3 - c_3 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_3 - b_3 & b_3 - c_3 \\ a_1 - b_1 & b_1 - c_1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ a \\ b \end{bmatrix} \tag{14}$$

Em seguida, calculamos os determinantes das matrizes de segunda ordem da equação (14) para obtermos os valores das componentes vetoriais da equação (12) e, finalmente, encontrarmos o valor da norma da equação (13).

Exemplo 8. Determine a área do triângulo cujos vértices são os pontos $(5, 1, 6)$, $(4, -2, 2)$ e $(2, -7, -4)$.

Solução:

Escrevendo-se a matriz vinculante dos vértices do triângulo, temos:

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -7 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & -4 & 4 & 6 \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Seja S a área solicitada. Então,

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{(1\cdot 5 - 3\cdot 2)^2 + (3\cdot 6 - 4\cdot 5)^2 + (4\cdot 2 - 1\cdot 6)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1+4+4} = \frac{3}{2}.$$

Exemplo 9. Determine a área do triângulo cujos vértices são os pontos $(6, 4, 9)$, $(5, 6, 8)$ e $(8, 1, 2)$.

Solução:

Montando-se a matriz vinculante dos vértices do triângulo, vem:

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 & 8 & 1 & -3 \\ 4 & 6 & 1 & -2 & 5 \\ 9 & 8 & 2 & 1 & 6 \\ & & & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Seja S a área solicitada. Então,

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{(5-6)^2 + (-12-5)^2 + (-3-6)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{371}.$$

Referências

[1] ROGAWSKI, Jon. *Cálculo*. Vol. 2. Porto Alegre: Bookman, 2009. p. 603 e p. 655-718.

[2] APOSTOL, Tom Mike. *Calculus, One-Variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra*. Vol. 1. 2nd Edition. New York, Santa Barbara, London, Sydney, Toronto: John Wiley e Sons, Inc.; 1967.

[3] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise*. vol. 1. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, IMPA, 2006.

[4] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise*. vol. 2. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, IMPA, 2005.

[5] LIMA, Elon Lages. *Análise Real*. vol. 2. Rio de Janeiro: Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2004.

[6] LIMA, Elon Lages. *Análise no Espaço R^n*. Rio de Janeiro: Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2004.

[7] LIMA, Elon Lages. *Geometria analítica e álgebra linear*. Rio de Janeiro: IMPA, 2001.

[8] AVRITZER, Dan. *Geometria analítica e álgebra linear: uma visão geométrica*. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2009.

[9] SANTOS, Reginaldo J. *Um Curso de Geometria Analítica e Álgebra Linear*. Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2002.