



Impa Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

---

# Avaliação do Modelo de Alocação de Carteira de Black-Litterman

Autor: **Francesca Munia Machado**

Orientador: **Jorge Passamani Zubelli**

Rio de Janeiro  
Agosto de 2015



Para meus pais.



## **Agradecimentos**

Agradeço, em especial, à minha família e às minhas grandes amigas de Brasília por me apoiarem inúmeras vezes e por compreenderem minha ausência durante o período de estudos.

Agradeço ao meu orientador Jorge Zubelli pelo excelente trabalho realizado como coordenador do curso de mestrado e pelo apoio dado na elaboração deste trabalho. Agradeço também a Xu Yang, Claudio Flores e Rafael Lavrado pelas valiosas contribuições a esta pesquisa.

Agradeço aos meus colegas do IMPA Gabriela, Louise, Douglas, Bruno, Rafael e Leandro pelo companherismo ao longo dessa jornada.

Por fim, agradeço ao Leandro Crema pelo apoio, principalmente, na etapa final do curso, e a todos os demais colegas do BNDES, em especial aos queridos Jorge Luiz e Carlos Vinícios, que me acompanharam nesta jornada e por diversas vezes me apoiaram e incentivaram a concluí-la com sucesso.



## Resumo

O processo de alocação de ativos foi abordado, pela primeira vez, como um problema matemático por Markowitz [28], que criou o modelo conhecido como Média-Variância (MV). Sua abordagem considera que os investidores, no processo de escolha da carteira ótima, se preocupam com apenas dois fatores: o risco e o retorno da carteira de ativos. O modelo propõe encontrar a carteira ótima por meio da maximização dos retornos esperados sujeito a um determinado nível de risco. Apesar de sua relevância em estudos sobre o assunto, o modelo apresentou fragilidades quando usado na prática, como a obtenção de carteiras concentradas em um número restrito de ativos, resultados pouco intuitivos, que desconsideram a opinião do tomador de decisão sobre o desempenho dos ativos no futuro, e alta sensibilidade aos dados de entrada.

Como uma alternativa para o modelo MV, Black e Litterman [6] propuseram uma nova abordagem que utiliza métodos da estatística de Bayes para combinar o equilíbrio do mercado no longo prazo, derivado do CAPM (Capital Asset Pricing Model), com as visões dos investidores sobre os retornos futuros. Similarmente ao modelo de média-variância, a abordagem de Black-Litterman (BL) também otimiza os retornos sujeitos a uma matriz de risco, entretanto apresenta duas diferenças substanciais. A primeira é a proposta de se partir de uma carteira no equilíbrio de longo prazo para encontrar a distribuição *a priori* dos retornos. A segunda é a possibilidade de se incorporar ao modelo visões sobre o comportamento dos ativos, obtendo a distribuição *a posteriori*.

Nesse contexto, o principal objetivo do modelo BL é introduzir um método de alocação de carteira que fornece resultados intuitivos e sem as inconsistências observadas na abordagem de Markowitz. Com isso, o modelo apresenta as vantagens de incluir as expectativas e opiniões subjetivas dos tomadores de decisões e a obtenção de uma carteira pouco dependente das informações do passado. A inovação proposta tornou o modelo uma ferramenta de apoio à tomada de decisão por analistas de mercado, provendo uma maior credibilidade e estabilidade aos resultados.

Apesar da importante contribuição do modelo BL para a teoria de alocação de carteiras, a sua eficácia ainda é pouco conhecida. Entre as questões discutidas sobre o assunto está comparação do modelo BL com o modelo MV, de forma a verificar se as inconsistências desta abordagem são corrigidas pela abordagem BL. Outra discussão relevante é quanto ao desempenho das carteiras obtidas com a aplicação do modelo BL utilizando dados de ativos reais.

Adicionalmente, um ponto importante na aplicação do modelo de Black-Litterman é a estimação da visão do investidor, uma vez que se trata de um parâmetro subjetivo, que depende da análise do tomador de decisões com relação aos ativos. Uma proposta estudada neste trabalho é a determinação das visões por meio de modelos de séries temporais, como os modelos ARMA

e GARCH. Esta abordagem pode ser mais vantajosa uma vez que oferece uma metodologia sólida para a seleção das visões a serem imputadas no processo de implementação do modelo.

Dessa forma, o presente estudo tem como objetivo apresentar o modelo de Black-Litterman, aplicá-lo a um estudo de caso e avaliá-lo por um determinado período de tempo, utilizando os dados do mercado de ações brasileiro. Para isso, foram selecionados 15 ativos altamente negociados no mercado de ações brasileiro, que compõe parte do índice Bovespa (IBOVESPA). Espera-se que os resultados desta pesquisa tragam informações relevantes sobre o desempenho do modelo Black-Litterman em relação ao modelo de média-variância e sobre a eficácia dos modelos de série temporais ARMA - GARCH na obtenção de visões do investidor para a aplicação do modelo BL.

**Palavras-Chave:** Alocação de Carteira, Black-Litterman, Markowitz, Séries Temporais, GARCH, Risco e Incerteza.



## Abstract

The problem of asset allocation was first theorized as a mathematical problem by Markowitz [28], with his Mean-Variance model (MV). His approach assumed that only two factors mattered to investors: risk and return of assets. The main idea of the model is to create a portfolio by maximizing the expected returns subject to a given risk level. Despite its prominence in financial studies, the model presents some problems when put into practice, such as poorly diversified portfolios, counterintuitive results, disregarding the opinion of the decision maker on the performance of the assets in the future and high sensitivity to the variables.

As an alternative to the Mean-Variance model, Black and Litterman [6] proposed a new approach which uses Bayesian statistical methods to match the long-term market balance - derived from the CAPM ( Capital Asset Pricing Model) - with investor's views about future returns. While similar to the Mean-Variance model, the Black-Litterman model (BL) optimizes the returns subject to a risk matrix, but with two significant contributions. The first one is the idea of the BL model to set a neutral starting point in portfolio optimization process. The second is the possibility to incorporate investor's opinions about asset returns to the model.

The main purpose of the Black-Litterman approach is to introduce a portfolio allocation model that gives intuitive and stable results, overcoming the problems observed in the Markowitz approach. Additionally, the BL model has the advantage of including expectations and subjective expert opinions, creating a portfolio that does not purely depend on past information.

These innovations have made the model a support tool for decision-making by market analysts, hoping for greater credibility and stability of the results. Consequently, there have been a number of new studies about the Black-Litterman model.

Despite the important contribution of the BL model to portfolio theory, their effectiveness in the world of finance is still not well known. Two of the most important outstanding questions are if the use of Black-Litterman really solves the problems of the Markowitz model, as well as if the results obtained from running the model are consistent with observations in the real world.

Another major question is to determine how the investor's view could be estimated considering that such parameters are subjective and depend on the investor's analysis of assets. A possible method to determine such views is to calibrate time series models, such as ARMA and GARCH. This approach may be more advantageous since it offers a robust methodology for the view selection.

This study aims to test the Black-Litterman model with a case study using 15 highly traded assets which are part of São Paulo Stock Exchange index (Ibovespa) as variables. It is

expected that the results of this study will provide information about the performance of the Black-Litterman model verses the Mean-Variance model. Also, we will test the effectiveness of time-series models ARMA and GARCH in obtaining investor's views for the application of the BL model.

**Key words:** Asset Allocation, Black-Litterman, Markowitz, Times Series, GARCH, Risk and Uncertainty.





# Sumário

<b>Índice</b>	<b>x</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Objetivos	2
1.2 Estrutura do Trabalho	3
<b>2 Modelos de Otimização de Carteira</b>	<b>5</b>
2.1 Notações e Convenções Adotadas	5
2.2 Moderna Teoria de Carteiras	7
2.2.1 Modelo Média-Variância	7
2.2.2 Críticas ao Modelo Média-Variância	10
2.2.3 A Lógica do CAPM	11
2.3 Modelo de Black-Litterman	12
2.3.1 Uma Breve Descrição do Teorema de Bayes	13
2.3.2 Distribuição <i>a Priori</i> dos Retornos dos Ativos	14
2.3.3 Visão dos Investidores	16
2.3.4 Distribuição <i>a Posteriori</i> : A Fórmula de Black-Litterman	18
2.3.5 Alocação de Ativos	19
2.4 Aplicações e Extensões do Modelo de Black-Litterman	20
<b>3 Modelos de Séries Temporais</b>	<b>23</b>
3.1 Conceitos sobre Séries Temporais	24
3.2 Fatos Estilizados de Séries Financeiras	26
3.3 Modelos Lineares	27
3.3.1 Notação dos Operadores	27
3.3.2 Modelos Autorregressivos	27
3.3.3 Modelos de Médias Móveis	28
3.3.4 Modelos Autorregressivos e de Médias Móveis - ARMA	28
3.3.5 Identificação de um Processo ARMA	29
3.4 Modelos Não Lineares	31
3.4.1 Modelo Autorregressivo com Heteroscedasticidade Condicional	31
3.4.2 Modelo GARCH	32
3.4.3 Identificação de um modelo GARCH	34
3.5 Modelos de Séries Temporais e Visão dos Investidores	34
<b>4 Exemplo com uma Carteira do Mercado Brasileiro</b>	<b>37</b>
4.1 Descrição dos Dados de Mercado	37
4.2 Aplicação do Modelo de Média-Variância	40
4.3 Aplicação do Modelo de Black-Litterman	41

4.3.1	Distribuição <i>a Priori</i> . . . . .	41
4.3.2	Visão Hipotética dos Investidores . . . . .	43
4.4	Resultados . . . . .	44
4.4.1	Comparação entre Carteiras Geradas pelo Modelo de Média-Variância . . . . .	44
4.4.2	Análise da Sensibilidade do Fator de Confiança das Visões no Modelo de Black-Litterman . . . . .	46
4.4.3	Comparação entre Carteiras Geradas pelo Modelo de Black-Litterman com Diferentes Amostras . . . . .	48
4.4.4	Avaliação de Desempenho das Carteiras Ótimas . . . . .	50
<b>5</b>	<b>Black-Litterman com Visões Derivadas do GARCH</b> . . . . .	<b>55</b>
5.1	Identificação do Modelo . . . . .	55
5.1.1	Teste de Estacionariedade das Séries . . . . .	56
5.1.2	FAC e FACP das Séries de Retornos e Ajuste do Modelo . . . . .	63
5.2	Visões GARCH aplicadas ao Modelo de Black-Litterman . . . . .	64
<b>6</b>	<b>Considerações Finais</b> . . . . .	<b>67</b>
<b>A</b>	<b>FAC e FACP dos Retornos e Quadrado dos Retornos</b> . . . . .	<b>69</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b> . . . . .	<b>69</b>

# Lista de Figuras

2.1	Fronteira Eficiente . . . . .	8
2.2	Solução Geométrica do Modelo de Markowitz . . . . .	9
2.3	Fronteira Eficiente com Ativo Livre de Risco . . . . .	12
2.4	Derivação dos Retornos <i>a posteriori</i> : Modelo de Black-Litterman . . . . .	19
4.1	Box Plot dos Retornos Diários dos Ativos . . . . .	39
4.2	Fronteira Eficiente: Modelo de Média-Variância com Amostras Distintas . . . . .	45
4.3	Fronteira Eficiente: Modelo de Black-Litterman sem Incorporação das Visões. . . . .	47
4.4	Fronteira Eficiente: Modelo de Black-Litterman com Diferentes Valores de $c$ . . . . .	47
4.5	Fronteira Eficiente sem as Visões: Comparação entre Diferentes Amostras . . . . .	49
4.6	Fronteira Eficiente <i>a posteriori</i> : Comparação entre Diferentes Amostras . . . . .	50
5.1	Séries do Ativo ABEV3 . . . . .	57
5.2	Séries do Ativo BBAS3 . . . . .	57
5.3	Séries do Ativo BBDC4 . . . . .	57
5.4	Séries do Ativo BRFS3 . . . . .	57
5.5	Séries do Ativo CCRO3 . . . . .	57
5.6	Séries do Ativo CMIG4 . . . . .	57
5.7	Séries do Ativo EMBR3 . . . . .	58
5.8	Séries do Ativo ITSA4 . . . . .	58
5.9	Séries do Ativo ITUB4 . . . . .	58
5.10	Séries do Ativo PCAR4 . . . . .	58
5.11	Séries do Ativo PETR3 . . . . .	58
5.12	Séries do Ativo PETR4 . . . . .	58
5.13	Séries do Ativo UGPA3 . . . . .	59
5.14	Séries do Ativo VALE3 . . . . .	59
5.15	Séries do Ativo VALE5 . . . . .	59
5.16	Gráfico de Dispersão ABEV3 . . . . .	59
5.17	Gráfico de Dispersão BBAS3 . . . . .	59
5.18	Gráfico de Dispersão BBDC4 . . . . .	60
5.19	Gráfico de Dispersão BRFS3 . . . . .	60
5.20	Gráfico de Dispersão CCRO3 . . . . .	60
5.21	Gráfico de Dispersão CMIG4 . . . . .	60
5.22	Gráfico de Dispersão EMBR3 . . . . .	60
5.23	Gráfico de Dispersão ITSA4 . . . . .	60
5.24	Gráfico de Dispersão ITUB4 . . . . .	61
5.25	Gráfico de Dispersão PCAR4 . . . . .	61
5.26	Gráfico de Dispersão PETR3 . . . . .	61
5.27	Gráfico de Dispersão PETR4 . . . . .	61

5.28	Gráfico de Dispersão UGPA3 . . . . .	61
5.29	Gráfico de Dispersão VALE3 . . . . .	61
5.30	Gráfico de Dispersão VALE5 . . . . .	62
5.31	Calibração dos Processos ARMA(p,q)-GARCH(1,1) . . . . .	65
5.32	Retorno Esperado, Desvio-Padrão e Índice de Sharpe de Carteiras geradas por visões GARCH . . . . .	66
A.1	Amostra 1: FAC e FACP ABEV3, BBAS3, BBDC4 e BRFS3 . . . . .	70
A.2	Amostra 1: FAC e FACP CCRO3, CMIG4, EMBR3 e ITSA4 . . . . .	71
A.3	Amostra 1: FAC e FACP ITUB4, PCAR4, PETR3, PETR4 . . . . .	72
A.4	Amostra 1: FAC e FACP UGPA3, VALE3 e VALE5 . . . . .	73
A.5	Amostra 2: FAC e FACP ABEV3, BBAS3, BBDC4 e BRFS3 . . . . .	74
A.6	Amostra 2: FAC e FACP CCRO3, CMIG4, EMBR3 e ITSA4 . . . . .	75
A.7	Amostra 2: FAC e FACP ITUB4, PCAR4, PETR3, PETR4 . . . . .	76
A.8	Amostra 2: FAC e FACP UGPA3, VALE3 e VALE5 . . . . .	77
A.9	Amostra 3: FAC e FACP ABEV3, BBAS3, BBDC4 e BRFS3 . . . . .	78
A.10	Amostra 3: FAC e FACP CCRO3, CMIG4, EMBR3 e ITSA4 . . . . .	79
A.11	Amostra 3: FAC e FACP ITUB4, PCAR4, PETR3, PETR4 . . . . .	80
A.12	Amostra 3: FAC e FACP UGPA3, VALE3 e VALE5 . . . . .	81
A.13	Amostra 4: FAC e FACP ABEV3, BBAS3, BBDC4 e BRFS3 . . . . .	82
A.14	Amostra 4: FAC e FACP CCRO3, CMIG4, EMBR3 e ITSA4 . . . . .	83
A.15	Amostra 4: FAC e FACP ITUB4, PCAR4, PETR3, PETR4 . . . . .	84
A.16	Amostra 4: FAC e FACP UGPA3, VALE3 e VALE5 . . . . .	85



# Lista de Tabelas

4.1	Tabela Resumo - Retornos Diários dos Ativos . . . . .	39
4.2	Matriz de Covariância dos Retornos Diários (valores em $10^{-4}$ ) . . . . .	40
4.3	Participação dos Ativos - Carteira de Mercado . . . . .	42
4.4	Retorno Esperado e Desvio-Padrão <i>a Priori</i> . . . . .	43
4.5	Índice de Sharpe dos Retornos Diários das Carteiras geradas com Quatro Amostras de Dados . . . . .	52
5.1	Estatísticas dos Testes de Estacionariedade ADF e KPSS . . . . .	63



# Capítulo 1

## Introdução

A escolha da carteira ótima de ativos para investimentos é um problema tão antigo quanto o próprio mercado de ações. Entretanto, foi a partir da publicação do modelo de Markowitz [28] que essa questão se tornou um problema matemático, dando início à abordagem da Moderna Teoria de Carteiras.

Markowitz forneceu uma base conceitual para a análise de carteiras de investimentos considerando que os investidores observam apenas dois fatores: o risco e os retornos esperados de sua carteira. Essa metodologia também é conhecida como modelo Média-Variância (MV). Nesse sentido, o modelo propõe um processo de otimização a partir do qual se obtém uma fronteira de carteiras, chamada de fronteira eficiente. A fronteira eficiente, em linhas gerais, é definida como o conjunto de carteiras, dentre todas as combinações possíveis, que apresentam o maior nível de retorno para cada nível de risco. É nessa fronteira que o investidor racional escolheria sua carteira ótima de ativos, de acordo com suas preferências.

Apesar de atrativo pela sua simplicidade, o modelo apresenta uma série de problemas ao ser adotado na prática. Entre as críticas apontadas, podemos citar:

1. Obtenção de carteiras pouco diversificadas, com concentração em um número restrito de ativos;
2. Resultados pouco intuitivos e que desconsideram a opinião do tomador de decisões sobre o desempenho dos ativos no futuro; e
3. Alta sensibilidade das carteiras obtidas aos dados de entrada do modelo.

Como uma alternativa ao modelo de Markowitz, de forma a reduzir as inconsistências identificadas, Black e Litterman [6] propuseram um método de estimação da distribuição dos retornos dos ativos da carteira, a partir da qual o investidor otimiza seus ganhos diante do risco apresentado. O modelo de Black-Litterman utiliza métodos da estatística *bayesiana* para combinar o equilíbrio de longo prazo do mercado, derivado do modelo CAPM (*Capital Asset Pricing Model*), com a visão dos investidores para se modelar o retorno da carteira. Sua implementação pode ser dividida em quatro etapas subsequentes:

1. Partindo do pressuposto que o mercado se encontra em equilíbrio, estima-se a distribuição dos retornos nessa condição, chamada de distribuição *a priori*, utilizando para isso o conceito de equilíbrio do CAPM;

2. Determina-se a expectativa do investidor em relação ao desempenho de um ou mais ativos, chamada de visão dos investidores, podendo essa expectativa ser relativa (desempenho de um ativo em relação a outro) ou absoluta (desempenho de um ou mais ativos em relação ao mercado); e
3. Incorpora-se a visão dos investidores à distribuição *a priori* para estimação da distribuição *a posteriori* dos retornos dos ativos;
4. Similarmente ao modelo de Markowitz, o investidor efetua o processo de otimização, mas dessa vez considerando o vetor de retornos e a matriz de covariâncias estimadas na distribuição *a posteriori*.

Além de reduzir as inconsistências do modelo de Markowitz, o modelo de Black-Litterman possui a vantagem de incluir as expectativas e opiniões subjetivas de especialistas, gerando uma carteira que não depende puramente de informações passadas.

Além disso, conforme destaca Walters [39], o modelo fez duas contribuições importantes ao problema de alocação de carteira. Primeiramente, a abordagem fornece, de maneira intuitiva, um ponto de partida, baseado no equilíbrio de mercado, para a estimação dos retornos dos ativos. De fato, He e Litterman [20] apontam que a ausência de um ponto de partida natural para os retornos esperados, como ocorre no modelo de Markowitz, podem gerar carteiras pouco intuitivas. A segunda contribuição consiste na forma clara em que o modelo possibilita a especificação da visão dos investidores sobre os retornos dos ativos e a combinação dessas visões com as informações obtidas *a priori*.

Dessa forma, o modelo se tornou uma ferramenta de apoio à tomada de decisões por parte dos analistas de mercado, propondo maior credibilidade e estabilidade aos resultados, o que fez surgir uma série de novos estudos e aplicações.

Entre os estudos relacionados ao Modelo de Black-Litterman, podemos destacar:

- Aplicações utilizando diferentes distribuições de probabilidade dos retornos, como abordado por Giacometti et al. [19] ,
- Metodologias de determinação das visões dos investidores, como estudado por Beach e Orlov [4], que aplicaram o modelo utilizando previsões de retornos derivadas do modelo GARCH (Modelos Generalizados Autoregressivos de Heterocedasticidade Condicional)
- Análise de sensibilidade e de métodos de calibração das variáveis do modelo, como feito por Walters [40] e Allaj [3].

## 1.1 Objetivos

Apesar da importante contribuição do Modelo de Black-Litterman para a teoria de escolha de carteiras, sua eficácia ainda é pouco conhecida. Entre as questões mais relevantes sobre o assunto está verificar se a aplicação do modelo realmente soluciona os problemas do modelo de Markowitz e qual é o desempenho dos resultados obtidos utilizando observações do mundo real.

Outro ponto de discussão é a forma de determinação das visões dos investidores para aplicação do modelo. Conforme já tratado, a visão é um parâmetro subjetivo, que depende da análise do investidor com relação aos ativos. A inclusão das visões subjetivas é vantajosa no sentido de incorporar ao modelo as opiniões do analista sobre os retornos futuros. Entretanto, elas podem ser determinadas por modelos de séries temporais, como os modelos ARMA e GARCH. Essa abordagem pode ser mais vantajosa uma vez que propõe uma metodologia robusta para a escolha das visões.

Nesse sentido, este trabalho tem como objetivo apresentar o modelo de Black-Litterman, aplicá-lo a um caso prático e avaliá-lo por determinado período de tempo, utilizando dados do mercado de ações brasileiro.

A meta principal é responder as seguintes perguntas:

1. Como as carteiras geradas pelo modelo de Black-Litterman se comportam em comparação às carteiras geradas pelo Modelo Média-Variância?
2. Como os resultados do Modelo de Black-Litterman se comportam em relação ao grau de confiança das visões incorporado ao modelo?
3. Como podemos determinar a visão dos investidores utilizando modelos de séries temporais? Essa aplicação é vantajosa na prática?

Primeiramente, utilizamos os dados do mercado de ações brasileiro para aplicar as abordagens de Média-Variância e de Black-Litterman. O objetivo é concluir, com base nos dados coletados, se os modelos geram carteiras estáveis e intuitivas, como proposto pelos autores. Nesse contexto, faremos ainda uma comparação entre as carteiras ótimas geradas pelas duas abordagens, de forma a concluir qual carteira teria melhor desempenho. Essa avaliação de performance será efetuada por *backtesting*, que, resumidamente, consiste em testar as carteiras a um conjunto de dados observados por determinado período de tempo.

Uma vez que obtivermos os resultados, poderemos apresentar conclusões sobre a eficácia do modelo de Black-Litterman considerando os dados implementados, possibilitando assim sua maior utilização na prática de tomadas de decisões quanto à alocação de ativos em uma carteira.

Posteriormente, testaremos o modelo de Black-Litterman utilizando visões derivadas da calibragem do modelo GARCH. A partir daí verificaremos se as carteiras geradas com essas visões apresentam desempenho superior à carteira sem as visões. Com isso, podemos concluir se tal forma de determinação das visões dos investidores seria eficiente no caso do exemplo apresentado.

## 1.2 Estrutura do Trabalho

Este trabalho está organizado em cinco capítulos, contando com esta introdução. A seguir apresentamos uma breve descrição dos demais capítulos.

1. No Capítulo 2, são tratados o modelo otimização de carteira de Markowitz, o modelo CAPM e o modelo de Black-Litterman, com a representação teórica de cada abordagem. Ao final, é apresentada uma revisão bibliográfica do Modelo de Black-Litterman, descrevendo, resumidamente, os trabalhos acerca do assunto encontrados na literatura acadêmica e utilizados como insumo para o presente estudo.
2. O Capítulo 3 consiste no *background* sobre séries temporais, com foco em séries financeiras. São descritos os fatos estilizados das séries de retornos financeiros e modelos de previsão em séries temporais. São abordados principalmente os modelos ARMA e GARCH. No mesmo capítulo, apresenta-se como esses modelos podem ser utilizados na determinação das visões implementadas no Modelo de Black-Litterman;
3. No Capítulo 4, é discutido o estudo de caso com a utilização do modelo com ativos do mercado brasileiro. São analisados os dados coletados e os resultados obtidos com a aplicação dos modelos de Média-Variância e de Black-Litterman. No mesmo capítulo, avaliamos o desempenho das carteiras comparando os dois modelos.
4. No Capítulo 5, o modelo GARCH é aplicado às séries de dados coletadas como forma de estimação das visões para o Modelo de Black-Litterman. Posteriormente, comparamos as carteiras obtidas com e sem essas visões, de forma a verificar se esse tipo de modelagem acrescenta uma melhor performance ao modelo no exemplo escolhido.
5. Por fim, no Capítulo 5, apresentamos as conclusões do trabalho.

# Capítulo 2

## Modelos de Otimização de Carteira

Este capítulo é dedicado à descrição de alguns modelos de otimização de carteira. O objetivo é descrever, discutir e exemplificar modelos que propõem uma carteira ótima de investimentos a partir de determinadas suposições sobre os investidores e sobre o mercado. Nos restringimos ao detalhamento do modelo de Média-Variância [28], do *Capital Asset Price Model* (CAPM) de Sharpe [36] e Lintner [25] e do modelo de Black-Litterman [6]. Um aprofundamento sobre o assunto pode ser consultado nos trabalhos de Chapados [11], Hansen e Yacine [1] e Meucci [30].

### 2.1 Notações e Convenções Adotadas

Antes de abordarmos os modelos de otimização de carteira, faremos algumas considerações. Vamos supor um mercado de  $N$  ativos, incluindo ações, títulos, moedas, entre outros, sendo que cada ativo é representado pelo subíndice  $i$  ou  $j$ , com  $i, j \in [1, N]$ . Nesse contexto, usaremos as seguintes notações e definições:

1.  $P_i^t$  é preço do ativo  $i$  no tempo  $t$ ;
2.  $R_i^t$  é retorno do ativo  $i$  no tempo  $t$ , calculado a partir de seus preços da forma

$$R_i^t = \frac{P_i^t - P_i^{t-1}}{P_i^{t-1}}; \quad (2.1)$$

3.  $\mu_i$  e  $\sigma_{i,i}$  são, respectivamente, a média e a variância dos retornos do ativo  $i$ ;
4.  $\sigma_{i,j}$  é a covariância entre os retornos do ativo  $i$  e os retornos do ativo  $j$ ;
5.  $w_i$  é o peso do ativo  $i$  na carteira. O peso de todos os ativos em uma determinada carteira é representado pelo vetor

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

6. O vetor  $\mu$  é formado pelas médias dos  $N$  ativos, representado por

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_N \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

7. A matriz  $\Sigma$  é a covariância dos  $N$  ativos. Sua representação é dada por

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} & \cdots & \sigma_{1,N} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_{2,2} & \cdots & \sigma_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N,1} & \sigma_{N,2} & \cdots & \sigma_{N,N} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

8.  $R$  é o retorno do portfólio formado pelos  $N$  ativos, calculado por

$$R = \sum_{i=1}^N w_i R_i. \quad (2.5)$$

9.  $E[R]$  e  $\sigma$  são, respectivamente, a média e a variância da carteira, calculadas da seguinte forma

$$E[R] = \sum_{i=1}^N w_i \mu_i = w' \mu; \quad (2.6)$$

$$\sigma^2 = Var[R] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_{i,j} = w' \Sigma w; \quad (2.7)$$

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1. \quad (2.8)$$



## 2.2 Moderna Teoria de Carteiras

### 2.2.1 Modelo Média-Variância

Uma vez feitas tais considerações, apresentaremos a abordagem de Markowitz [28], também chamada de Modelo Média-Variância. Trata-se de um modelo amplamente conhecido no mundo acadêmico e prático, que fornece ao investidor uma determinada carteira ótima para investimento. A abordagem de Markowitz surgiu a partir da crítica à ideia predominante na época de que os investidores escolhem a alocação de suas carteiras apenas maximizando o retorno esperado descontado das carteiras disponíveis.

Em seu modelo, Markowitz verifica que o investidor considera o retorno esperado como algo desejável e a variância do retorno como algo indesejável, ou seja, supõe-se que o investidor racional é avesso ao risco e que tal risco é indicado pela variância dos retornos. Observa-se também que, dado o conjunto de possíveis carteiras formadas por determinados ativos, a carteira de máximo retorno não é aquela que possui risco mínimo, de forma que os investidores deverão dispensar altos retornos em prol de uma carteira de menor risco ou dispensar riscos inferiores caso almejem maiores retornos esperados.

Utilizando essa ideia, o investidor pode buscar a carteira de menor risco dado um retorno esperado  $R_p$ , resolvendo o seguinte problema de minimização

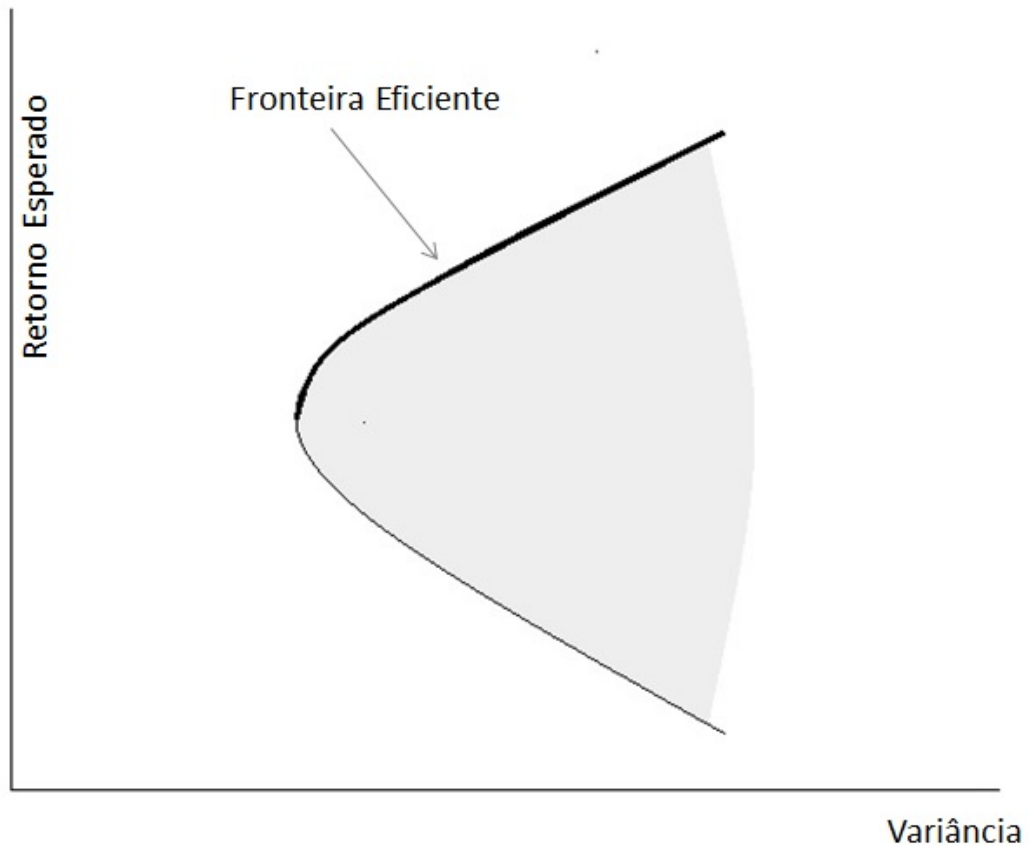
$$\begin{aligned} \min_w \quad & w' \Sigma w \\ \text{sujeito a} \quad & w' \mu = R_p \\ & \sum_{i=1}^N w_i = 1 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Resolvendo o problema pelo método dos multiplicadores de Lagrange, encontramos os seguintes pesos para a carteira ótima:

$$w^* = (\lambda \Sigma)^{-1} E[R] \tag{2.10}$$

O fator  $\lambda$  é o multiplicador de Lagrange. Trata-se de uma medida que fornece o incremento no risco da carteira que o investidor estaria disposto a aceitar em face a um aumento marginal no retorno. Intuitivamente, o multiplicador de Lagrange representa a aversão ao risco do investidor. Escolhendo diferentes valores de  $R_p$ , podemos representar no espaço Variância  $\times$  Retorno Esperado a combinação de todas as carteiras geradas pela solução acima, que terá o formato de uma hipérbole. A fronteira superior desta hipérbole, ou seja, o conjunto de carteiras na linha da hipérbole em que, para cada valor de risco, possui o maior retorno esperado, será chamada de fronteira eficiente. É na fronteira eficiente que o investidor deverá escolher a carteira ótima.

A Figura 2.1 apresenta no eixo Variância  $\times$  Retorno Esperado a representação da fronteira eficiente.



**Figura 2.1:** Fronteira Eficiente

Observa-se na Figura 2.1 que a linha que delimita o espaço de possíveis combinações consiste nas carteiras de menor risco dado um retorno esperado. Verifica-se também que as carteiras que formam o limite inferior da hipérbole não podem ser consideradas eficientes, uma vez que existem carteiras de igual risco e de maior retorno esperado. O mesmo ocorre com as carteiras localizadas na parte cinza da Figura 2.1, no interior da hipérbole.

O *trade-off* entre retorno esperado e risco é visível na Figura 2.1. Observa-se que, na fronteira eficiente, carteiras de menor variância possuem retornos esperados menores e carteiras de maior variância apresentem retornos esperados superiores.

### Exemplo: Solução geométrica com 3 ativos

O exemplo a seguir foi apresentado por Markowitz, no trabalho em que descreve seu modelo. Considera-se que existem 3 ativos no mercado: ativo 1, ativo 2 e ativo 3. Dado que a soma dos pesos dos ativos em uma carteira é 1, podemos representar o peso do ativo 3 como

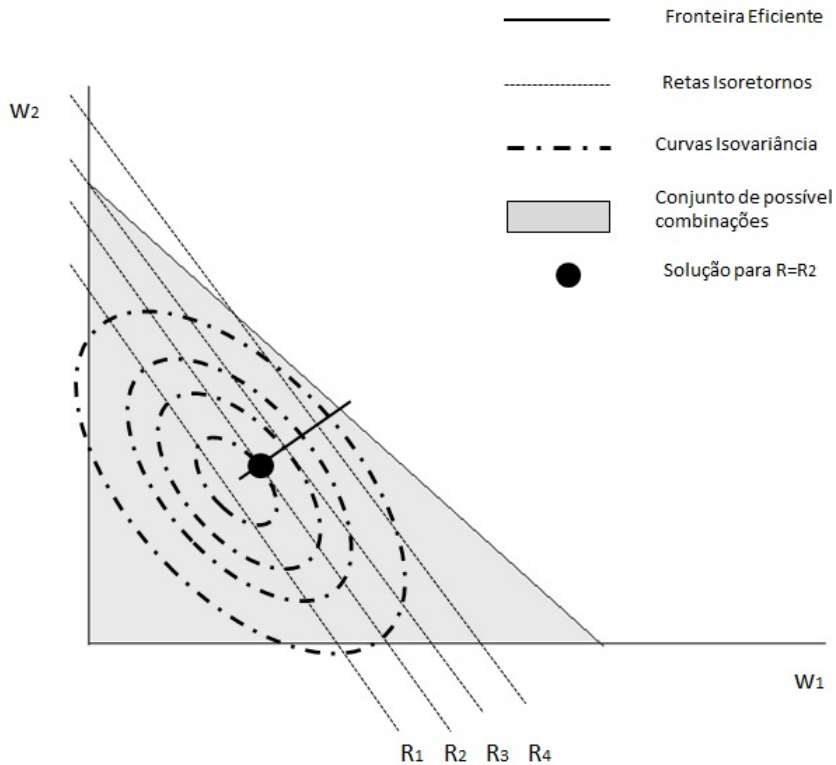
$$w_3 = 1 - w_1 - w_2 \tag{2.11}$$

O retorno esperado  $\mu$  e a variância  $\sigma^2$  de uma carteira formada por esse ativos são dados por

$$\mu = w_1(\mu_1 - \mu_3) + w_2(\mu_2 - \mu_3) + \mu_3 \tag{2.12}$$

$$\sigma^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + (1 - w_1 - w_2)^2\sigma_3^2 \tag{2.13}$$

Observa-se que tanto o retorno esperado quanto a variância da carteira são funções de  $w_1$  e  $w_2$ . Dessa forma, no espaço dados por  $w_1$  e  $w_2$  é possível representar o conjunto de carteiras possíveis, as retas de isoretorno, definidas como as combinações de  $w_1$  e  $w_2$  que apresentam o mesmo retorno esperado, e as elipses de isovariância, formada pelas combinações de  $w_1$  e  $w_2$  que apresentam a mesma variância. A Figura 2.2 retrata essas curvas no espaço  $w_1 \times w_2$ .



**Figura 2.2:** Solução Geométrica do Modelo de Markowitz

Um efeito decorrente do inclusão da variância no problema do investidor é a diversificação de ativos na carteira ótima. Esse fenômeno decorre da constatação de que os preços dos ativos financeiros não se movem exatamente da mesma forma. De fato, a ausência de correlação perfeitamente positiva entre ativos torna a diversificação da carteira vantajosa do ponto de vista

de seu risco. Isso pode ser observado quando se observa a Equação (2.7), que, considerando  $\rho_{i,j}$  a correlação entre o ativo  $i$  e o ativo  $j$ , pode ser reescrita como

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^N w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N w_i w_j \rho_{i,j} \sigma_i \sigma_j. \quad (2.14)$$

Nota-se que quanto menor o valor da correlação entre os ativos, menor é o valor do segundo componente da Equação (2.14) e, conseqüentemente, menor o valor da variância da carteira.

### 2.2.2 Críticas ao Modelo Média-Variância

Conforme já citado, o Modelo Média-Variância apresenta algumas restrições. Jobson e Korkie [22] apontaram três importantes aspectos nos quais o modelo pode falhar:

1. Não propõe uma forma segura de se estimar a média e a variância dos retornos;
2. Não prevê de forma segura a média e a variância do retorno da carteira ótima; e
3. Outras carteiras obtidas de maneira mais simples, como, por exemplo, atribuir o mesmo peso a todos os ativos, demonstram ter desempenho superior às geradas pelo modelo.

Já Jorion [23], na mesma linha do terceiro aspecto acima, verificou que a carteira de mínima variância global pode performar melhor que a carteira obtida pelo modelo de Markowitz tradicional. Michaud [32] também apresenta uma série de críticas ao modelo, entre as quais podemos citar:

1. Utilização da média amostral como estimativa do retorno esperado;
2. Unicidade da solução ótima para um dado nível de risco;
3. O modelo maximizaria um erro de estimação, tendo em vista que o risco e retorno estão sujeitos a serem estimados incorretamente.

Fabozzi, Focardi e Kolm [16] também destacam que, com a lógica do modelo de Média-Variância, ativos com valor esperado alto e desvio-padrão baixo podem ter um peso na carteira sobrestimado, ao mesmo tempo que ativos com menor valor esperado e maior variância podem ser subestimados na carteira. Por isso, erros de estimativas nos retornos esperados e nas variâncias geram erros nas carteiras ótimas.

Outra restrição apontada por Fabozzi, Focardi e Kolm é o fato de o modelo, em sua forma clássica, exigir a estimação dos parâmetros de todos os ativos disponíveis no mercado. Na prática, esse fator é pouco utilizado, tendo em vista o custo de se produzir boas estimativas de uma grande quantidade de dados a serem implementados.

As críticas não demonstram que o modelo de Média-Variância é uma abordagem a ser descartada, mas apontam que sua utilização requer uma série de restrições. Um dos modelos apresentados na literatura, que teve o intuito de solucionar as questões é o Black-Litterman (BL), conforme será apresentado ainda neste capítulo.

### 2.2.3 A Lógica do CAPM

A descrição teórica do modelo CAPM apresentada neste trabalho foi baseada no artigo de Fama e French [17].

O Capital Asset Price Model (CAPM) de Sharpe [36] e Lintner [25] foi construído a partir do Modelo Média-Variância adicionando duas hipóteses importantes. A primeira é a de que, no tempo  $t - 1$ , o investidor assume uma determinada distribuição para os retornos entre os períodos  $t - 1$  a  $t$ , sendo esta distribuição verdadeira. A segunda consiste em assumir a existência de uma taxa livre de risco  $R_f$ , na qual os investidores podem aplicar seus recursos ou tomar recursos emprestados, sem restrições.

Formalmente, dado uma carteira  $g$  e supondo uma carteira  $p$  com  $w_f$  aplicados na taxa livre de risco e  $w_g = 1 - w_f$  aplicados na carteira  $g$ , temos que o retorno esperado e o desvio-padrão da carteira são dados por

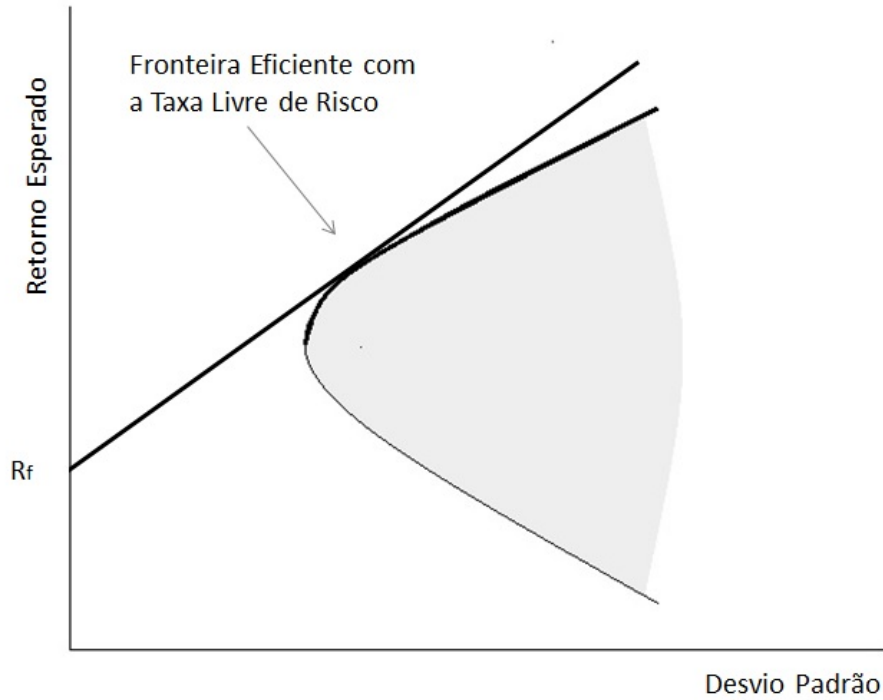
$$E(R_p) = w_f R_f + (1 - w_f)E[R_g], \quad (2.15)$$

$$\sigma_p = (1 - w_f)\sigma_g. \quad (2.16)$$

Juntando as Equações (2.15) e (2.16), obtemos a seguinte relação linear entre o retorno esperado da carteira e seu risco

$$E(R_p) = R_f + \left(\frac{E(R_g) - R_f}{\sigma_g}\right)\sigma_p. \quad (2.17)$$

A nova fronteira eficiente, após a inclusão da taxa livre de risco, será a reta que tangencia a fronteira eficiente sem o ativo sem risco, como mostra a Figura 2.3.



**Figura 2.3:** Fronteira Eficiente com Ativo Livre de Risco

Pelo modelo CAPM, em uma situação de equilíbrio, existe uma relação linear entre o excesso de retorno de um investimento no ativo  $i$  e o excesso de retorno do mercado, representada pelo  $\beta_i$ :

$$E[R_i] - R_f = \beta_i(E[R_m] - R_f) \quad (2.18)$$

$$\beta_i = \frac{\text{cov}(R_i, R_m)}{\sigma_m^2} \quad (2.19)$$

onde  $R_f$  é o retorno do ativo livre de risco e  $E(R_m)$  é o retorno esperada da carteira de mercado.

## 2.3 Modelo de Black-Litterman

Para a descrição da abordagem de Black-Litterman nos baseamos em três trabalhos: Idzorek [21], He e Litterman [20] e Walters [39]. Utilizamos também o artigo original de publicação do modelo, de Black e Litterman [6].

Podem ser encontradas na literatura duas abordagens teóricas para o modelo: o modelo de referência original, apresentado por Black e Litterman [6] e He e Litterman [20] e o modelo

alternativo, apresentado por Meucci [31]. Descreveremos o modelo original. Detalhes sobre o modelo alternativo são citados ao longo do texto.

Uma das críticas apontadas por Black e Litterman [6] ao modelo de Média Variância é o fato deste não fornecer ao investidor um método de determinar um ponto de partida em relação aos retornos dos ativos, o que seria um importante dado de entrada na tomada de decisões uma vez que possibilita a obtenção de carteiras mais intuitivas e condizentes com a realidade. Nesse sentido, a principal diferença entre o modelo de Black-Litterman e o modelo Markowitz é que, enquanto este gera uma carteira de equilíbrio a partir de um processo de otimização considerando a média e a variância históricas dos ativos, aquele parte de uma carteira em equilíbrio de longo prazo, a partir da qual, utilizando a abordagem do CAPM, obtém-se uma distribuição inicial dos retornos dos ativos.

Este equilíbrio de longo prazo está sujeito a modificações a todo instante, tendo em vista que os investidores possuem suas próprias visões de curto prazo. Essas visões de curto prazo são incorporadas no modelo de BL de forma que as informações do equilíbrio de longo prazo com a visão de curto prazo do investidor gerem um conjunto de retornos esperados a partir do qual são fornecidos os pesos da carteira ótima.

O desenvolvimento do modelo pode ser dividido em quatro etapas. Primeiramente, são encontradas as distribuições *a priori* dos retornos dos ativos, a partir do equilíbrio de mercado. Em segundo, são determinadas as visões dos investidores em relação a todos ou a parte dos ativos analisados. O terceiro passo é a incorporação das visões na distribuição *a priori* para se obter a distribuição *a posterior* dos retornos. Por fim, usando o mesmo processo de minimização do modelo Média-Variância, encontra-se a carteira ótima de investimento. Cada etapa será detalhada a seguir. Em um primeiro momento, apresentaremos brevemente o Teorema de Bayes. Posteriormente, as etapas do modelo de Black-Litterman serão discutidas.

### 2.3.1 Uma Breve Descrição do Teorema de Bayes

O Teorema de Bayes foi discutido inicialmente por Richard Price, em 1763, após apresentação do trabalho escrito por Thomas Bayes, no qual se discutia estimação de probabilidades condicionais.

Probabilidade condicional é definida como a chance de ocorrência de determinado evento dado que outro evento aconteceu. A principal fórmula apresentada no paper ficou conhecida como Lei de Bayes ou Teorema de Bayes e consiste na relação

$$P(A | B) = \frac{P(B | A)P(A)}{P(B)} \quad (2.20)$$

$P(A | B)$ : Probabilidade condicional de A, dado B. Também conhecida como distribuição *a posteriori*.

$P(B | A)$ : probabilidade de B dado A.

$P(A)$ : probabilidade de ocorrência do evento A. Chamada de distribuição *a priori*.

$P(B)$ : probabilidade de ocorrência do evento B.

Intuitivamente, isso significa dizer que, em um primeiro momento, calculamos a probabilidade de A, sendo essa uma informação *a priori*. Posteriormente, determinamos a probabilidade de B dado A e a probabilidade de B, e utilizando a fórmula, encontramos a probabilidade de A dado B, que se trata de uma informação *a posteriori*.

A aplicação do Teorema de Bayes ao modelo de Black-Litterman será detalhada nas seções a seguir.

### 2.3.2 Distribuição *a Priori* dos Retornos dos Ativos

O modelo original assume, em um primeiro momento, que os retornos dos ativos seguem uma distribuição normal com médias  $\mu$  e matriz de covariância  $\Sigma$ :

$$R \sim N(\mu, \Sigma) \quad (2.21)$$

O investidor não conhece os valores das médias dos retornos, de forma que pode considerá-los como variáveis aleatórias. Dessa forma, é necessário determinar um método para estimar essas médias, o qual é apresentado no modelo BL.

Nesse contexto, o ponto de partida do modelo BL é considerar uma carteira de mercado como a situação de equilíbrio de longo prazo. Utilizando a lógica semelhante à do modelo de Markowitz, pode-se encontrar os retornos esperados de longo prazo a partir de um processo chamado de otimização reversa. A otimização reversa decorre basicamente da suposição de que o seguinte problema de maximização é resolvido

$$\max_w [w' \Pi - \frac{\lambda w' \Sigma w}{2}]. \quad (2.22)$$

A solução do Problema (2.22) é representada por

$$w = (\lambda \Sigma)^{-1} \Pi. \quad (2.23)$$

sendo  $\lambda$  o coeficiente de aversão ao risco de todos os investidores,  $\Sigma$  a matriz de covariância estimada e  $\Pi$  os retornos implícitos do equilíbrio de mercado no longo prazo.

A partir da Equação (2.23), podemos estimar os retornos implícitos do equilíbrio de longo prazo  $\Pi$  resolvendo

$$\Pi = (\lambda \Sigma) w. \quad (2.24)$$



Intuitivamente, o processo de otimização reversa deriva do fato de que uma vez que o investidor conhece a carteira de equilíbrio de mercado, os retornos esperados podem ser calculados, dados que eles estão implícitos nos pesos dos ativos nessa carteira.

Nota-se que o Problema (2.22) é semelhante ao Problema (2.9). As Equações (2.23) e (2.24) foram obtidas a partir da solução do processo de otimização. A fórmula de cálculo do coeficiente  $\lambda$  pode ser obtida a partir da equação do CAPM, conforme demonstrado a seguir.

$$E[R_i] - R_f = \beta_i(E[R_m] - R_f),$$

$$\Pi = \beta_i(E[R_m] - R_f),$$

$$\Pi = \frac{\text{cov}(R_i, R_m)}{\sigma_m^2}(E[R_m] - R_f),$$

$$\Pi = \frac{(E[R_m] - R_f)}{\sigma_m^2} \text{cov}(R_i, R_m) = \lambda \Sigma w;$$

$$\lambda = \frac{E[R_m] - R_f}{\sigma_m^2}. \quad (2.25)$$

A partir do processo apresentado acima, podemos encontrar uma estimativa para as variáveis aleatórias  $\mu$ , que possuem distribuição normal com esperança *a priori* igual a  $\Pi$ . Resumidamente, temos:

$$\mu = \Pi + \epsilon \quad (2.26)$$

$$\mu \sim N(\Pi, \Sigma_{\Pi}) \quad (2.27)$$

A matriz  $\Sigma_{\Pi}$ , que representa a variância do fator aleatório  $\epsilon$ , é obtida como uma proporção da variância  $\Sigma$ . Com isso, temos

$$\Sigma_{\Pi} = \tau \Sigma. \quad (2.28)$$

A determinação do coeficiente  $\tau$  é um assunto discutido na literatura, não tendo ainda uma fórmula consolidada. Intuitivamente, ele significa a incerteza do investidor em relação à distribuição *a priori* obtida pelo CAPM. Mais detalhes sobre a estimação deste coeficiente são discutidos na Seção 2.4.

### 2.3.3 Visão dos Investidores

A visão, por definição, é um posicionamento de investidor em relação ao desempenho futuro de determinado ativo. No Modelo de Black-Litterman, considera-se a visão do investidor em relação aos retornos dos ativos analisados.

A visão pode ser definida como relativa, quando se compara o desempenho esperado de um ativo em relação a outro ativo, ou absoluta, quando se compara o desempenho esperado de determinado ativo da carteira com algum ativo referência ou com toda a carteira. Um fator intuitivo da visão do investidor é a sua incerteza. Infere-se que, ainda que o investidor tenha conhecimento do mercado, nunca haverá total certeza de que sua visão está correta. O grau de incerteza da visão também é incorporada ao modelo, conforme será mostrado adiante.

Cumprido destacar que, no modelo em questão, não existe obrigatoriedade na determinação das visões sobre os retornos dos ativos. Isso significa que o investidor pode ter visão sobre apenas um ativo, sobre alguns ativos ou até mesmo sobre todos os ativos. Dessa forma, o investidor não é obrigado a incluir no modelo visões consideradas pouco confiáveis sobre determinados ativos, o que possibilita uma maior qualidade nos resultados obtidos. Além disso, o investidor pode optar por incorporar ao modelo apenas visões absolutas ou apenas visões relativas, ou ambas.

Formalmente,  $k$  visões no modelo de Black-Litterman são representadas por um vetor  $Q$ ,  $k$ -dimensional dado por

$$Q = P\mu + z; \quad (2.29)$$

sendo

$$z \sim N(0, \Omega) \quad (2.30)$$

onde

- $P$  é uma matriz  $k \times N$ ;
- $\mu$  é o vetor  $N \times 1$  de retornos esperados, que, conforme visto na Seção 2.3.2, são variáveis aleatórias; e
- $\Omega$  é uma matriz  $k \times k$  que expressa a confiabilidade da visão dos investidores.

De forma a incorporar a incerteza da visão de curto prazo do investidor, inclui-se uma variável não-observável  $z$  de distribuição normal com média zero e variância  $\Omega$ . Destaca-se que a variável  $z$  não é explícita no modelo, apenas sua variância  $\Omega$ .

A determinação da matriz  $\Omega$  é um assunto a ser discutido tendo em vista que não existe uma fórmula única e correta para calcular a incerteza da visão do investidor, sendo o parâmetro um fator subjetivo no modelo. Destaca-se que, conforme será verificado adiante na fórmula de Black-Litterman, a magnitude de  $\Omega$  afeta diretamente os resultados obtidos com a aplicação do modelo. Isso ocorre porque a metodologia intuitiva de Black-Litterman permite que uma maior

incerteza na visão do investidor forneça resultados mais próximo do equilíbrio de mercado, ou seja, da distribuição *a priori*. Por outro lado, uma vez que o investidor define sua opinião como altamente confiável, sua matriz de visões modificará de maneira relevante os resultados do modelo *a posteriori* em comparação à distribuição *a priori*.

Um proposta relevante encontrada na literatura está no trabalho de Meucci [29], em que a determinação de  $\Omega$  é relacionada à matriz de covariância do retorno dos ativos, dada por  $\Sigma$ . O cálculo de  $\Omega$  é feito pela fórmula

$$\Omega = \frac{1}{c} P \Sigma P'. \quad (2.31)$$

O nível de confiança das visão do investidor é atribuído ao coeficiente  $c \in (0, \infty)$ . Atribuir a  $c$  o valor igual a um significa que a visão estabelecida tem uma variabilidade igual ao dos retornos dos ativos. Um valor alto de  $c$  implica que a visão é muito confiável, enquanto um valor baixo indica pouca confiabilidade na opinião do investidor.

A proposta de Meucci [29] não consiste em uma solução para a questão da subjetividade de  $\Omega$ , mas se trata de uma conveniência para a calibração do parâmetro ao relacionar a variância das visões à variância do mercado e atribuir um parâmetro único para a confiabilidade da opinião dos investidores.

O exemplo a seguir apresenta um melhor detalhamento de como as visões são representadas no modelo.

### Exemplo de Visão do Investidor no Modelo BL

Supondo que exista três ativos no mercado: ativo 1, ativo 2 e ativo 3. Supondo também que o investidor tenha as seguintes visões:

- O ativo 1 terá um retorno 0,5% superior ao ativo 2;
- O ativo 3 terá um retorno de 2,0%.

Nota-se que a primeira visão é uma visão relativa, tendo em vista que ocorre a comparação entre dois ativos, enquanto a segunda visão, referente ao ativo 3, é uma visão absoluta. A representação das visões do exemplo na Equação (2.29) é

$$\begin{bmatrix} 0,5\% \\ 2,0\% \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix}.$$

A primeira linha da matriz  $P$  representa a visão relativa e a segunda linha a visão absoluta. Destaca-se, como mostra o exemplo, que os valores das linhas da matriz  $P$  devem somar zero quando se tratar de visões relativas e devem somar um quando se tratar de visões absolutas.

### 2.3.4 Distribuição *a Posteriori*: A Fórmula de Black-Litterman

Uma vez determinados a distribuição *a priori* dos retornos dos ativos e os parâmetros referentes à opinião do investidor, o modelo BL propõe uma forma de incorporar as matrizes de visões ao equilíbrio inicialmente obtido. A abordagem está relacionada à ótica bayesiana de probabilidades condicionais, tratada na Seção 2.3.1. O resultado dessa incorporação é a Fórmula de Black-Litterman, que fornece uma nova distribuição dos retornos dos ativos, chamada de distribuição *a Posteriori*, a ser utilizada no processo de escolha da carteira ótima de ativos.

Antes de apresentarmos a Fórmula de Black-Litterman, retomaremos a Equação (2.20), que expressa o Teorema de Bayes:

$$P(A | B) = \frac{P(B | A)P(A)}{P(B)}$$

A relação entre a Equação (2.20) e os parâmetros já apresentados do modelo de Black-Litterman é:

- O fator  $P(A)$  é representado pela distribuição *a priori* dos retornos, que, conforme já tratado, segue a seguinte distribuição

$$P(A) \sim N(\Pi, \tau\Sigma).$$

- O fator  $P(B | A)$  é representado no modelo pela visão do investidor. Sua condicionalidade se deve ao fato de o modelo considerar que o investidor define sua visão dado as informações *a priori* obtidas inicialmente. Sua distribuição é

$$P(B | A) \sim N(P\mu, \Omega).$$

Aplicando o Teorema de Bayes, chega-se à distribuição *a posteriori* dos retornos:

$$P(A | B) \sim N([\tau\Sigma]^{-1} + P^T\Omega^{-1}P)^{-1}[\tau\Sigma]^{-1}\Pi + P^T[\Omega^{-1}Q], [\tau\Sigma]^{-1} + P^T\Omega^{-1}P)^{-1} \quad (2.32)$$

Lembrando que, conforme visto no início desta seção, até o momento estimamos a distribuição de  $\mu$ , representada aqui por  $P(A | B)$ . Dessa forma, retomando a relação entre  $\mu$  e  $R$ , temos a esperança e a variância estimadas dos retornos são:

$$\mu_{BL} = E[R] = [\tau\Sigma]^{-1} + P^T\Omega^{-1}P)^{-1}[\tau\Sigma]^{-1}\Pi + P^T\Omega^{-1}Q \quad (2.33)$$

$$\Sigma_{BL} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P]^{-1} \quad (2.34)$$

A Figura 2.4, adaptada do trabalho de Idzorek [21], resume como o Modelo de Black-Litterman incorpora as visões para se derivar a distribuição dos retornos.

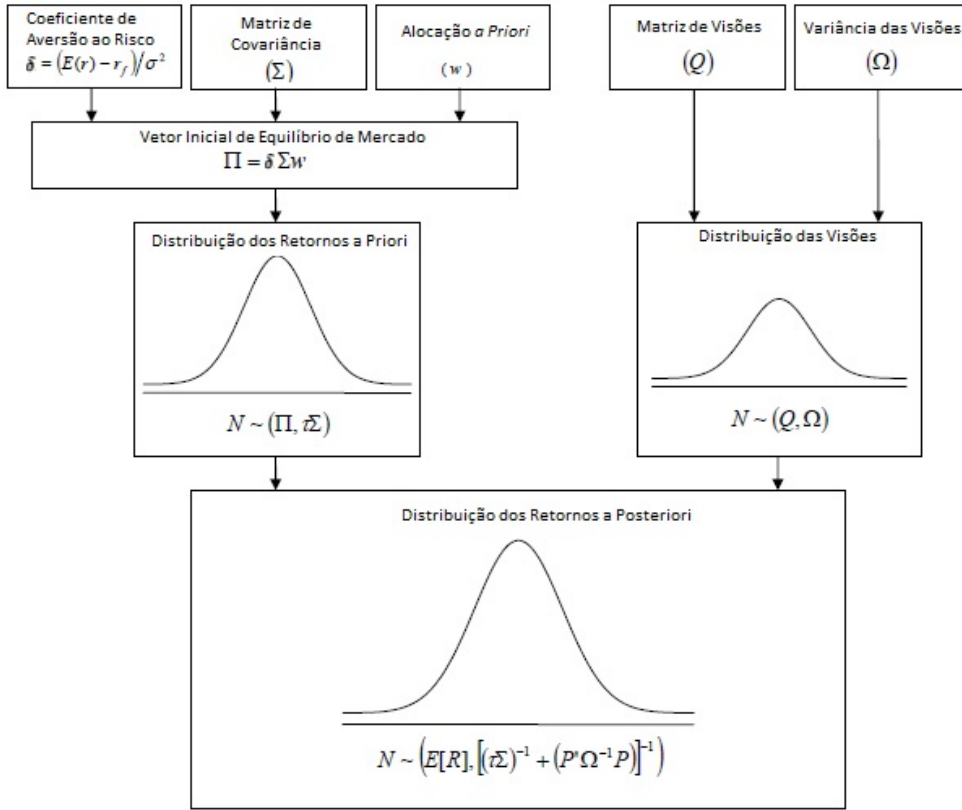


Figura 2.4: Derivação dos Retornos *a posteriori*: Modelo de Black-Litterman

### 2.3.5 Alocação de Ativos

Uma vez que se obteve a distribuição *a posteriori* dos retornos dos ativos, adotamos a mesma técnica de otimização do modelo Média-Variância para encontrarmos a alocação ótima, representada por  $w_{BL}$ .

$$\begin{aligned} \min_{w_{BL}} \quad & w'_{BL}\Sigma_{BL}w_{BL} - \lambda w'_{BL}\mu_{BL} \\ \text{sujeito a} \quad & \sum_{i=1}^N w_{BL} = 1 \end{aligned} \quad (2.35)$$

Resolvendo o problema, chegaremos aos pesos

$$w_{BL}^* = (\lambda \Sigma_{BL})^{-1} \mu_{BL}. \quad (2.36)$$

Nota-se que, substituindo a Equação (2.33) na Equação (2.36), os pesos da carteira ótima podem ser escritos como

$$w_{BL}^* = (\lambda \Sigma_{BL})^{-1} [(\tau \Sigma)^{-1} + P^T \Omega^{-1} P]^{-1} [(\tau \Sigma)^{-1} \Pi + P^T \Omega^{-1} Q] \quad (2.37)$$

## 2.4 Aplicações e Extensões do Modelo de Black-Litterman

O modelo de Black-Litterman foi apresentado inicialmente por Fisher Black e Robert Litterman, em 1990, como um relatório interno do grupo financeiro de investimentos Goldman Sachs. Desde então, o modelo foi objeto de importantes aplicações e extensões e, por isso, existe uma vasta quantidade de publicações sobre o assunto na literatura.

Bevan e Winkelmann [5] resumiram sua experiência prática com o modelo no Goldman Sachs após aplicá-lo por um período de três anos (1995, 1996 e 1997). Os autores consideraram como o equilíbrio de mercado a carteira ponderada em capitalização do Goldman Sachs em índices de títulos de 13 países. Como *proxy* das visões, foram utilizadas as previsões de economistas da instituição. Os resultados indicaram que as carteiras tiveram uma performance superior à carteira *benchmark* nos três anos analisados.

He e Litterman [20] buscaram apresentar o modelo do ponto de vista intuitivo, aplicando-o ao índice de ações de sete países de diferentes continentes. Os autores assumiram que os ativos da Alemanha teriam um desempenho 5% superior aos ativos dos demais países europeus em um ano. Além disso, verificaram que mudanças nos dados utilizados alteram significativamente os resultados das carteiras derivadas da otimização por Média-Variância, enquanto as carteiras derivadas pelo modelo de Black-Litterman mantiveram-se estáveis e intuitivas.

O modelo foi discutido também por Satchell e Scowcroft [35], Idozrek [21] e Fabozzi, Focardi e Kolm [16]. Os autores apresentam detalhes de como o modelo deve ser aplicado, utilizando exemplos práticos e explicando, intuitivamente e matematicamente, cada passo da aplicação. Adicionalmente, Idozrek [21] apresenta uma extensão do modelo, incluindo um método para determinar o nível de confiança implícito das visões para especificar a matriz de covariâncias das visões  $\Omega$ . Para isso o autor aplica a fórmula de Black-Litterman para uma visão com 100% de certeza para determinar o nível de confiança implícito. O resultado é combinado com um nível de confiança especificado pelo investidor de forma a encontrar o valor de cada elemento da matriz  $\Omega$ .

Extensões do modelo utilizando diferentes distribuições de probabilidade dos log-retornos dos ativos também foram estudadas. Giacometti et al. [19] argumentam que, apesar de pesquisadores e práticos assumirem que os log-retornos possuem distribuição gaussiana multivariada, existe uma série de estudos empíricos provando o contrário. Partindo da carteira derivada

do índice S&P500, os autores aplicam o modelo utilizando distribuições gaussianas, *t-student* simétricas e  $\alpha$ -stable.

Adicionalmente, consideraram-se três medidas de riscos distintas. São elas: a variância, o valor em risco (*value-at-risk*) e o valor em risco condicional (*conditional value-at-risk*). Concluiu-se que (1) a distribuição  $\alpha$ -estável mostrou-se a mais apropriada e (2) a combinação de  $\alpha$ -stable com a utilização de medida de dispersão (no caso, a variância) como medida de risco apresentou melhor desempenho. Seguindo a linha de Giacometti et al. [19], Meucci [29] utilizou a *copula opinion pooling* para mercados com distribuições não-normais.

Yang [42] comparou o modelo de Black-Litterman original a uma extensão do modelo, que considera como medida de risco no processo de otimização o CVaR (Conditional Value-at-Risk), seguindo a abordagem de Meucci [31]. Adicionou-se a hipótese de que as distribuições dos retornos é assimétrica. A base de dados utilizada foi o mercado de ativos brasileiro. Foram obtidas fronteiras eficientes considerando distribuições de retornos histórica, normal e *skew normal*. No caso estudado, concluiu-se que, tendo em vista a assimetria da distribuição dos retornos, ajustar os dados à distribuição *skew normal* foi uma etapa importante. Além disso, o modelo original e o modelo alternativo apresentaram resultados diferentes. Verificou-se que a abordagem alternativa é afetada pelo comportamento assimétrico da distribuição dos ativos, uma vez que se utiliza o CVaR.

Outra discussão relevante sobre o assunto refere-se à estimação do parâmetro  $\tau$ , que indica a incerteza do investidor em relação aos parâmetros estimados *a priori*. Existe uma série de maneiras de calibrar o parâmetro. Walters [40] fez um estudo detalhado sobre o assunto, apresentando três abordagens sobre o modelo de Black-Litterman: a abordagem canônica (modelo original) que requer a uma calibração do fator  $\tau$ , impactando também na matriz de covariância; o modelo híbrido, que considera  $\tau$  igual a 1; e o modelo alternativo, que não requer calibração do parâmetro. Complementarmente, o autor recomenda três métodos de estimação do fator  $\tau$ , a saber:

- estimar o parâmetro a partir do erro padrão da matriz de covariância;
- usar intervalos de confiança;
- analisar a incerteza do investidor da mesma forma em que se expressa na carteira inicial.

Destaca-se, por fim, entre os estudos sobre o modelo de Black-Litterman, as discussões sobre implementação das visões geradas por modelos de séries temporais, que serão abordadas com mais detalhes no Capítulo 3.

Com relação à utilização do modelo com ativos do mercado brasileiro, verificou-se que existem poucos estudos publicados. Destaca-se o trabalho de Yang [42], já citado nesta seção, que desenvolveu um estudo sobre o modelo utilizando dados do mercado de ativos brasileiro. Outro trabalho de destaque é o de Lobarinhas [27], que aplicou o modelo BL a uma carteira de títulos do Tesouro Nacional.





# Capítulo 3

## Modelos de Séries Temporais

Definem-se séries temporais como o conjunto de observações de determinada variável em um período ordenado de tempo. Em finanças, os exemplos mais estudados de séries temporais são as séries de preços e de retornos de ativos financeiros. O interesse em séries temporais financeiras se concentra basicamente em estudar dois fatores. O primeiro é a análise e modelagem da série temporal, identificando características específicas sobre as séries e buscando possíveis relações com outras séries. O segundo consiste em formular modelos de previsão de valores futuros das séries a partir das observações históricas.

Outro fator relevante referente a séries financeiras é a volatilidade da variável estudada. Existem diversos conceitos de volatilidade. Intuitivamente, volatilidade é entendida como a intensidade da dispersão, ao longo do tempo, dos valores de determinada série de retornos de ativos. É utilizada frequentemente para mensurar o risco do ativo financeiro. Trata-se de um fator de papel fundamental no processo de alocação de ativos, na precificação de opções e gestão dos riscos de carteira. Uma vez que não é observável, a volatilidade deve ser estimada.

A partir dos diversos interesses referentes a séries temporais, foram desenvolvidos uma série de modelos de previsão de retornos e estimação de volatilidade. Os modelos de séries temporais são divididos em duas classes: modelos paramétricos, para os quais o número de parâmetros envolvidos é finito, e modelos não-paramétricos, que envolvem um número infinito de parâmetros. Focaremos nosso estudo nos modelos paramétricos, como os modelos autorregressivos e de médias móveis (ARMA), modelos autorregressivos de heterocedasticidade condicional (ARCH) e modelos generalizados autoregressivos de heterocedasticidade condicional (GARCH).

Este capítulo é dedicado à descrição de três classes de modelos de séries temporais: os modelos ARMA, ARCH e GARCH. Previamente, introduziremos alguns conceitos utilizados sobre séries temporais e sobre séries financeiras e apresentaremos os chamados fatos estilizados dessas séries. Em seguida, descreveremos brevemente cada um dos modelos. Por fim, discutiremos como os modelos podem ser utilizados na determinação das visões do modelo de Black-Litterman.

### 3.1 Conceitos sobre Séries Temporais

Nesta seção apresentaremos alguns conceitos utilizados em séries temporais. As definições foram obtidas no trabalho de Francq e Zakoian [18] e Morettin e Tolo [33]. Para isso, vamos considerar uma sequência de variáveis aleatórias  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  definida no mesmo espaço probabilístico.

#### Definição 1. *Estacionariedade Estrita*

Um processo  $(X_t)$  é dito estritamente estacionário se os vetores  $(X_1, \dots, X_k)'$  e  $(X_{1+h}, \dots, X_{k+h})'$  possuem a mesma distribuição conjunta para qualquer  $k \in \mathbb{N}$  e qualquer  $h \in \mathbb{Z}$ , ou seja,

$$F(X_1, \dots, X_k) = F(X_{1+h}, \dots, X_{k+h}) \quad (3.1)$$

Em outras palavras, estacionariedade estrita significa que a distribuição conjunta de uma série é invariante a um deslocamento no tempo.

#### Definição 2. *Estacionariedade Fraca ou de Segunda Ordem*

O processo  $(X_t)$  é dito fracamente estacionário se:

1.  $E(X_t) = \mu$ , sendo  $\mu$  uma constante,
2.  $E(X_t^2) < \infty$ ,
3.  $Cov(X_t, X_{t+l}) = \gamma_l$ , com  $l \in \mathbb{Z}$ , sendo que  $\gamma_l$  depende apenas de  $l$  e não de  $t$ .

Estacionariedade fraca equivale a dizer que tanto a média quanto a covariância da série são invariantes a um deslocamento no tempo. Destaca-se que  $\gamma_l = Cov(X_t, X_{t+l})$  é chamado de autocovariância com lag  $l$  de  $X_t$ .

#### Definição 3. *Processo Gaussiano*

O processo  $(X_t)$  é dito Gaussiano se os vetores  $(X_1, \dots, X_k)'$  tem distribuição normal  $k$ -variada para qualquer  $k \in \mathbb{N}$ .

Se um processo for Gaussiano, ele pode ser determinado apenas pelas suas médias e covariâncias.

#### Definição 4. *Função de Autocorrelação (FAC)*

Considere uma série fracamente estacionária  $X_t$ . O coeficiente de correlação entre  $X_t$  e  $X_{t-l}$  é chamado de autocorrelação no lag  $l$  de  $X_t$  e é denotado por  $\rho_l$ , que sob a hipótese de estacionariedade fraca é função apenas de  $l$ . Definimos:

$$\frac{Cov(X_t, X_{t-l})}{\sqrt{Var(X_t)Var(X_{t-l})}} = \frac{Cov(X_t, X_{t-l})}{Var(X_t)} = \frac{\rho_l}{\rho_0} \quad (3.2)$$

**Definição 5. Função de Autocorrelação Parcial (FACP)**

Seja  $P_k$  uma matriz de autocorrelações e  $v_k$  o vetor de autocorrelações, representados por

$$P_k = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{k-2} \\ \vdots & & & & \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$v_k = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_k \end{pmatrix}.$$

Seja  $P_k^*$  a matriz  $P_k$  com a última coluna substituída pelo vetor de autocorrelações  $v_k$ , define-se como função de autocorrelação parcial a função

$$\phi_{kk} = \frac{|P_k^*|}{|P_k|} \quad (3.3)$$

**Definição 6. Ruído Branco Fraco**

O processo  $\epsilon_t$  é chamado de ruído branco fraco se, para uma constante positiva  $\sigma^2$ :

1.  $E(\epsilon_t) = 0$
2.  $E(\epsilon_t^2) = \sigma^2$
3.  $Cov(\epsilon_t, \epsilon_{t+h}) = 0$ , para todo  $t, h \in \mathbb{Z}, h \neq 0$ .

Nota-se que o Ruído Branco é um exemplo de um processo fracamente estacionário.

**Definição 7. Ruído Branco Forte**

Um série temporal  $\epsilon_t$  é chamada de ruído branco forte se, para uma constante positiva  $\sigma^2$ :

1.  $E(\epsilon_t) = 0$
2.  $E(\epsilon_t^2) = \sigma^2$
3.  $\epsilon_t$  e  $\epsilon_{t+h}$  são independentes e identicamente distribuídas, para todo  $t, h \in \mathbb{Z}, h \neq 0$ .

## 3.2 Fatos Estilizados de Séries Financeiras

Conforme [12], estudos empíricos sobre diferentes séries financeiras identificaram propriedades estatísticas em comum entre essas séries. Essas propriedades são chamadas de fatos estilizados. Francq e Zakoian [18] descreveram sete fatos estilizados e Aydemir e Xiao [41] enumeraram cinco fatos estilizados relacionados a volatilidade. A seguir descrevemos alguns desses fatos, em sua maior parte relacionados a retornos diários de ativos, com base no trabalho desses autores.

1. **Série de Preços não Estacionária:** verifica-se que séries de preços de ativos são geralmente passeios aleatórios sem intercepto enquanto séries de preços de retornos se comportam como processos fracamente estacionários.
2. **Ausência de Autocorrelação na variação da série de preços:** baixa autocorrelação na variação das séries de preços, aproximando-as de um ruído branco.
3. **Presença de Autocorrelação no Quadrados dos Retornos:** a série de quadrados dos retornos de determinado ativo geralmente são autocorrelacionadas.
4. **Caudas Pesadas:** a distribuição das séries financeiras apresentam caudas mais pesadas quando comparadas a uma distribuição normal, o que significa uma excesso de curtose.
5. **Clusters de Volatilidade:** observam-se que movimentos altos nos retornos dos ativos são seguidos por mais movimentos nos retornos. Esse é um indicativo da persistências de choques nos retornos.
6. **Efeitos de Alavanca (*Leverage Effects*):** correlação negativa ente o retorno de um ativo e alterações na sua volatilidade, ou seja, um aumento no preço de um ativo é geralmente acompanhado com uma redução em sua volatilidade e vice-versa.
7. **Memória Longa:** persistência da volatilidade e evidências de comportamento próximo à raiz unitária no processo de variância condicional, especialmente em dados de alta frequência.
8. **Co-movimentos na volatilidade:** ao observar séries temporais em diferentes mercados, verifica-se que o movimento de uma série normalmente é acompanhamento pelo movimento de outra série.
9. **Sazonalidade:** observa-se que séries financeiros sofrem o chamado efeito calendário. Ou seja, essas séries apresentam um determinado comportamento de acordo com o período do ano, dia da semana, em virtude de fatores recorrentes nesses períodos e que afetam os retornos dos ativos.

## 3.3 Modelos Lineares

### 3.3.1 Notação dos Operadores

Para descrevermos os modelos estudados neste capítulo, vamos inicialmente definir os operadores utilizados na manipulação desses modelos:

1. operador de translação no passado (B):  $BX_t = X_{t-1}$ ;  $B^m X_t = X_{t-m}$
2. operador translação para o futuro (F):  $FX_t = X_{t+1}$ ;  $F^m X_t = X_{t+m}$
3. operador diferença ( $\Delta$ ):  $\Delta X_t = X_t - X_{t-1} = (1 - B)X_t$
4. operador soma (S):  $SX_T = Z_t + Z_{t-1} + \dots = (1 + B + B^2 + \dots)X_t = (1 - B)^{-1}X_t$

### 3.3.2 Modelos Autorregressivos

**Definição 8.** *Define-se um modelo autorregressivo de ordem  $p$ , denotado por  $AR(p)$ , como*

$$X_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \dots + \alpha_p X_{t-p} + \epsilon_t, \quad (3.4)$$

sendo  $\epsilon_t$  uma série de ruído branco de média zero e variância  $\sigma_\epsilon^2$ .

O operador autorregressivo de ordem  $p$  pode ser definido como

$$\alpha(B) = 1 - \alpha_1 B - \alpha_2 B^2 + \dots - \alpha_p B^p \quad (3.5)$$

então,

$$\alpha(B)X_t = \alpha_0 + \epsilon_t \quad (3.6)$$

onde  $\alpha(Z) = 1 - \alpha_1 Z - \alpha_2 Z^2 + \dots - \alpha_p Z^p$ .

#### Exemplo: AR(1)

O exemplo mais comum é o modelo autorregressivo de ordem 1, representado por

$$X_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \epsilon_t. \quad (3.7)$$

Calculando a esperança e variância condicional do processo, temos

$$E[X_t | X_{t-1}] = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} \quad (3.8)$$

$$var[X_t | X_{t-1}] = \sigma_\epsilon^2. \quad (3.9)$$

A esperança e a variância não condicional podem ser calculadas como

$$E[X_t] = E[E[X_t | X_{t-1}]] = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}. \quad (3.10)$$

$$var[X_t] = var[X_t - \mu] = var[\alpha_1(X_{t-1} - \mu) + \epsilon_t] = \alpha_1^2 var[X_{t-1}] + \sigma_\epsilon^2. \quad (3.11)$$

Para o processo ser fracamente estacionário, deve ocorrer  $E[X_t] = E[X_{t-1}]$  e  $var[X_t] = var[X_{t-1}]$ , ou seja,

$$\mu = E[X_t] = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} \quad (3.12)$$

$$var[X_t] = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1 - \alpha_1^2}. \quad (3.13)$$

Isso significa que em um AR(1) fracamente estacionário devemos ter  $|\alpha_1| < 1$

De maneira geral, a média e a variância não condicionais de um processo AR(p) fracamente estacionário são dadas por

$$\mu = E[X_t] = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_p} \quad (3.14)$$

$$var[X_t] = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1 - \alpha_1^2 - \dots - \alpha_p^2}. \quad (3.15)$$

Dessa forma, uma condição necessária para que o processo AR(p) seja estacionário é que  $|\alpha_1 + \dots + \alpha_p| < 1$

### 3.3.3 Modelos de Médias Móveis

**Definição 9.** *Define-se o processo de médias móveis de ordem q, denotado por MA(q), como*

$$X_t = \beta_0 + \epsilon_t - \sum_{j=1}^q \beta_j \epsilon_{t-j} \quad (3.16)$$

em que  $\beta_0$  é uma constante e  $\epsilon_t$  uma série de ruído branco de média zero e variância  $\sigma_\epsilon^2$ .

O operador  $\beta(B)$  de médias móveis de ordem q é obtido com a seguinte manipulação

$$X_t = \beta_0 + (1 - \beta_1 B - \beta_2 B^2 - \dots - \beta_q B^q) \epsilon_t = \beta_0 + \beta(B) \epsilon_t. \quad (3.17)$$

#### Exemplo: MA(1)

O exemplo mais simples de um processo de médias móveis é o MA(1)

$$X_t = \beta_0 + \epsilon_t - \beta_1 \epsilon_{t-1} \quad (3.18)$$

A esperança e variância não condicionais do processo são, respectivamente,  $E[X_t] = \beta_0$  e  $var[X_t] = \sigma_\epsilon^2(1 + \beta_1^2)$ . Nota-se que o processo é sempre estacionário.

### 3.3.4 Modelos Autorregressivos e de Médias Móveis - ARMA

De maneira geral, utiliza-se o processo ARMA para fazer previsões de séries fracamente estacionárias.

**Definição 10.** Um processo ARMA( $p, q$ ) é representado por

$$X_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i} + \epsilon_t - \sum_{j=1}^q \beta_j \epsilon_{t-j}. \quad (3.19)$$

onde  $\alpha_j$  e  $\beta_j$  são constantes reais,  $\alpha_p \neq 0$  e  $\beta_q \neq 0$  e  $\epsilon_t$  são variáveis aleatórias não correlacionadas, de média zero, mesma variância  $\sigma^2$ , sendo, portanto, ruídos brancos.

Sendo  $\alpha(B)$  e  $\beta(B)$  operadores auto-regressivos e de médias móveis, respectivamente, podemos representar o processo da maneira

$$\alpha(B)X_t = \alpha_0 + \beta(B)\epsilon_t \quad (3.20)$$

Nota-se que processo ARMA(0,  $q$ ) é equivalente a um processo de médias móveis de ordem  $q$ , denotado por MA( $q$ ). Similarmente, o processo ARMA( $p, 0$ ) é um processo autorregressivo de ordem  $p$ , denotado por AR( $p$ ).

Uma condição necessária para que o processo ARMA( $p, q$ ) seja estacionário é a mesma abordada no processo AR( $P$ ), ou seja, o processo é estacionário se  $|\alpha_1 + \dots + \alpha_p| < 1$ .

Aydemir e Xiao [41] citam três vantagens desses modelos. Primeiramente, existe um vasto arcabouço teórico disponível para equações lineares e, tendo em vista os estudos disponíveis referentes a modelos gaussianos, a teoria sobre inferência estatística também é bem desenvolvida. Em segundo lugar, do ponto de vista computacional, é fácil modelar um processo ARMA, pois existe uma série de pacotes estatísticos disponíveis para tanto. Em terceiro, esse tipo de modelos apresentou relativo êxito no que diz respeito à análise e previsão de dados.

### Exemplo: ARMA(1,1)

O processo ARMA(1,1) é representado por

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \epsilon_t - \beta_1 \epsilon_{t-1} \quad (3.21)$$

Substituindo sequencialmente  $X_{t-1}$ ,  $X_{t-2}$ , ... na Equação (3.21), chegamos à forma

$$X_t = \psi(B)\epsilon_t \quad (3.22)$$

onde  $\psi_j = \alpha^{j-1}(\alpha - \beta)$ ,  $j \geq 1$ . Do mesmo modo, o processo pode ser escrito como

$$\phi(B)X_t = \epsilon_t \quad (3.23)$$

onde  $\phi_j = \beta^{j-1}(\alpha - \beta)$ ,  $j \geq 1$ .

### 3.3.5 Identificação de um Processo ARMA

Segundo Box e Jenkins [9], o primeiro passo para o ajuste de um modelo ARMA( $p, q$ ) é a identificação do valor dos parâmetros  $p$  e  $q$ . Para isso, sugere-se verificar se a série é estacionária.

Conforme já relatado neste capítulo, um processo AR(1) é estacionário quando  $|\alpha_1| < 1$ . Nesse sentido, uma forma de verificar a estacionariedade de uma série é considerar que ela se ajusta a um modelo AR(1) e testar as seguintes hipóteses em relação ao coeficiente  $\alpha_1$ :

- $H_0 : \alpha_1 = 1$
- $H_1 : \alpha_1 \neq 1$

Rejeitar a hipótese nula significa concluir que a série é estacionária. A estatística teste mais utilizada no problema acima é a de Dickey-Fuller

$$DF = \frac{\alpha'_1 - 1}{\sigma'_{\alpha_1} \sqrt{\sum_{t=1}^T x_{t-1}^2}}, \quad (3.24)$$

em que

$$\alpha'_1 = \frac{\sum_{t=1}^T x_{t-1}x_t}{\sum_{t=1}^T x_{t-1}^2} \quad (3.25)$$

$$\sigma'_{\alpha_1} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^T (x_t - \alpha'_1 x_{t-1})^2}{T - 1}}. \quad (3.26)$$

Existem outros testes aplicáveis na literatura, como o teste de Dickey-Fuller Aumentado (ADF). Para mais detalhes, ver Dickey e Fuller [13] e Tsay [38].

Complementarmente, a estacionariedade de uma série de retornos financeiro pode ser verificada na prática por meio de testes de invariantes de mercado, conforme proposto por Meucci [30], que será mais detalhada no Capítulo 5.

Caso se conclua que a série não é estacionária, o procedimento padrão é de obter as diferenças da série até que ela se torne estacionária.

Uma vez identificada a série estacionária, Morettin e Tolo [33] propõe a determinação do tipo e das ordens do processo resultante por meio da análise das autocorrelações (FAC) e autocorrelações parciais (FACP) estimadas a partir da amostra. A identificação da ordem de processos AR( $p$ ), MA( $q$ ) e ARMA( $p,q$ ) de forma que:

- um processo AR( $p$ ) tem FAC que decai de acordo com exponenciais e/ou senóides amortecidas, infinitas, e FACP tal que  $(\phi)_{kk} \neq 0$ , para  $k \leq p$  e  $(\phi)_{kk} = 0$ , para  $k > p$ , sendo  $(\phi)_{kk}$  o valor da função de autocorrelação parcial;
- um processo MA( $q$ ) tem FAC finita, no sentido que ela apresenta um corte após o lag  $q$  e FACP que se comporta de maneira similar à FAC de um processo AR( $p$ );
- um processo ARMA( $p,q$ ) tem FAC infinita em extensão, a qual decai de acordo com exponenciais e/ou senóides amortecidas após o lag  $q - p$  e FACP que se comporta como a FACP de um modelo MA puro;

Dada a complexidade da FAC e FACP de processos ARMA, recomenda-se ajustar modelos de baixa ordem e compará-los utilizando critérios como o Critério de Informação de Akaike (AIC) ou o Critério Bayesiano (BIC). Os dois critérios consistem basicamente em calcular o



valor de AIC e/ou BIC para diferentes ordens de ARMA( $p,q$ ) e selecionar o de menor valor, sendo

$$AIC = N \ln((\sigma'_\epsilon)^2) + 2(p + q + 2), \quad (3.27)$$

$$BIC = -2 \ln((\sigma'_{p,q})^2) + (p + q) \frac{\ln N}{N}. \quad (3.28)$$

Vale destacar que  $\sigma_\epsilon'^2$  é o estimador de máxima verossimilhança de  $\sigma_\epsilon^2$ ,  $N$  é o número de observações da série,  $\sigma_{p,q}'^2$  é o estimador de máxima verossimilhança da variância residual do modelo testado.

## 3.4 Modelos Não Lineares

Apesar de suas vantagens, os modelos gaussianos lineares são limitados uma vez que não capturam alguns fatos estilizados descritos na Subseção 3.2, principalmente aqueles relacionados à volatilidade. Um exemplo refere-se ao fato dos modelos ARMA considerarem a variância condicional constante.

Nesse contexto, Francq e Zakoian [18] definem um fenômeno chamado heterocedasticidade condicional, que remete ao fato estilizado de que retornos absolutos altos tendem a ser seguidos por mais retornos absolutos altos. Isso significa que

$$Var(X_t | H^l(0, S, H^{1+\varepsilon}(D))_{t-1}, H^l(0, S, H^{1+\varepsilon}(D))_{t-2}, \dots) \neq constante. \quad (3.29)$$

Os indícios de mudanças na volatilidade das séries incentivaram a formulação de novos modelos, como os modelos ARCH e GARCH.

### 3.4.1 Modelo Autorregressivo com Heteroscedasticidade Condicional

O Modelo Autorregressivo com Heteroscedasticidade Condicional (ARCH) foi introduzido por Engle [14]. A ideia do modelo é a de que o retorno  $X_t$  é não correlacionado serialmente, mas a volatilidade depende de retornos passados. Define-se o modelo ARCH( $r$ ) como

$$X_t = (\sigma_t)^{\frac{1}{2}} \epsilon_t, \quad (3.30)$$

$$\sigma_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \dots + \alpha_r X_{t-r}^2, \quad (3.31)$$

onde  $\sigma_t$  é uma sequência não negativa de variáveis aleatórias,  $\epsilon_t$  é uma sequência de variáveis aleatórias independente e identicamente distribuídas de média zero e variância um, e  $\alpha_t$  é um conjunto de parâmetros com  $\alpha_0 > 0$  e  $\alpha_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ .

#### Exemplo: ARCH(1)

Consideremos o caso mais simples: ARCH(1). O modelo é

$$X_t = (\sigma_t)^{\frac{1}{2}} \epsilon_t, \quad (3.32)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2, \quad (3.33)$$

sendo  $\alpha_0 > 0$  e  $\alpha_1 \geq 0$ .

Calculemos a média, a variância e a autocovariância incondicional. Sendo  $\mathcal{F}_{t-1}$  a informação disponível até o instante  $t - 1$ , temos que:

1.  $E[X_t] = E[E(X_t | \mathcal{F}_{t-1})] = 0$ ;
2.  $Var[X_t] = E(X^2) - E(X_t)^2 = EE(X^2 | \mathcal{F}_{t-1}) = E(\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2) = \alpha_0 + \alpha_1 E(X_{t-1}^2)$ . Se  $x_t$  for fracamente estacionário, então  $Var(X_{t-1}) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}$ ;
3.  $Cov[X_{t+k}, X_t] = E[X_{t+k}X_t] = E[E(X_{t+k}X_t | \mathcal{F}_{t+k-1})] = E[X_t E(X_{t+k} | \mathcal{F}_{t+k-1})] = E[X_t E(\sigma_{t+k}^{\frac{1}{2}} \epsilon_{t+k} | \mathcal{F}_{t+k-1})] = 0$ .

Uma desvantagem do modelo é que os retornos negativos e positivos são tratados de maneira similar. Verifica-se que, na prática, a volatilidade reage de maneira diferente entre retornos positivos e negativos. O fato de considerarmos retornos ao quadrado também é um ponto negativo do modelo, tendo em vista que retornos grandes e isolados acabam por conduzir a previsões superestimadas.

### 3.4.2 Modelo GARCH

O modelo GARCH - modelo autoregressivo de heterocedasticidade condicional generalizado -, proposto por Bollerslev [7], é uma extensão do ARCH. O GARCH(r,s) propõe que a variância está relacionada não somente ao quadrado dos valores dos retornos passados, mas também às variâncias passadas, seguindo o processo

$$X_t = \sigma_t^{\frac{1}{2}} \epsilon_t, \quad (3.34)$$

$$\sigma_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \dots + \alpha_r X_{t-r}^2 + \phi_1 \sigma_{t-1} + \dots + \phi_s \sigma_{t-s}, \quad (3.35)$$

onde  $\sigma_t$  é uma sequência não negativa de variáveis aleatórias,  $\epsilon_t$  é uma sequência de variáveis aleatórias independente e identicamente distribuídas de média zero e variância um, e  $\alpha_t$  é um conjunto de parâmetros com  $\alpha_0 > 0$  e  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\phi_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^u (\alpha_i + \phi_i) < 1$ ,  $q = \max(r, s)$ .

Chamando  $v_t = X_t^2 - \sigma_t$  e substituindo nas Equações (3.39) e (3.40), temos que

$$X_t^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \phi_1) X_{t-1}^2 + \dots + (\alpha_q + \phi_q) X_{t-q}^2 + v_t + \phi_1 v_{t-1} + \dots + \phi_s v_{t-s}. \quad (3.36)$$

Segue que o processo  $X_t^2$  se comporta como um modelo ARMA(p,q).

Para a identificação da ordem do modelo GARCH, recomenda-se testar inicialmente modelos de ordens baixas. escolhendo o melhor a partir dos critérios de AIC ou BIC. No caso de séries de retorno financeiros, é comum o ajuste ao modelo GARCH(1,1), descrito a seguir.

### Exemplo: GARCH(1,1)

O exemplo mais comum, muito utilizado em séries financeiras, é o GARCH (1,1), expresso por

$$X_t = \sigma_t^{\frac{1}{2}} \epsilon_t, \quad (3.37)$$

$$\sigma_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \phi_1 \sigma_{t-1}, \quad (3.38)$$

com  $\alpha_0 > 0$  e  $\alpha_1 \geq 0$ ,  $\phi_1 \leq 1$ ,  $\alpha_1 + \phi_1 < 1$ .

Existe na literatura uma série de extensoes dos modelos ARCH e GARCH. A seguir descreveremos brevemente duas dessas extensoes para o caso GARCH(1,1), o eGARCH e o GARCH-M.

### Exponential GARCH (EGARCH)

Trata-se de uma alternativa proposta por Nelson [34] para incluir a assimetria de efeitos gerados por retornos positivos e negativos. Um modelo EGARCH(1,1)  dado por

$$X_t = \sigma_t^{\frac{1}{2}} \epsilon_t, \quad (3.39)$$

$$\ln \sigma_t = \alpha_0 + \alpha_1 g(\epsilon_{t-1}) + \phi_1 \sigma_{t-1}, \quad (3.40)$$

$$g(\epsilon_t) = \epsilon_t + \gamma | \epsilon_t | - E(| \epsilon_t |), \quad (3.41)$$

onde  $\epsilon_t$  é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas de média zero e variância um, e  $g$  é a chamada de curva de impacto da informação, dada por

$$g(\epsilon_t) = \epsilon_t + \gamma | \epsilon_t | - E(| \epsilon_t |), \quad (3.42)$$

sendo  $\alpha_0$  e  $\gamma$  parâmetros reais.

Podemos representar  $g$  como

$$g(\epsilon_t) = (+\gamma)\epsilon_t - (| \epsilon_t |), \text{ se } \epsilon_t \geq 0, \quad (3.43)$$

ou

$$g(\epsilon_t) = (-\gamma)\epsilon_t - (| \epsilon_t |), \text{ se } \epsilon_t < 0. \quad (3.44)$$

Com essa representação, podemos verificar que o modelo captura que a volatilidade responde de maneira mais rápida aos choques negativos nos retornos.

### GARCH in Mean (GARCH-M)

A ideia por trás do modelo *GARCH in the Mean* (GARCH-M) é a de que o retorno de um ativo depende de sua volatilidade. Um GARCH(1,1)-M é representado como

$$r_t = \mu + c\sigma_t + X_t, \quad (3.45)$$

$$X_t = \sigma_t^{\frac{1}{2}} \epsilon_t, \quad (3.46)$$

$$\sigma_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \phi_1 \sigma_{t-1}, \quad (3.47)$$

onde  $c$  e  $\mu$  são constantes.

### 3.4.3 Identificação de um modelo GARCH

A identificação do modelo é o processo de determinação dos parâmetros  $r$  e  $s$  de acordo com algum critério estabelecido. Podemos enumerar três etapas para a identificação de um modelo ARCH ou GARCH:

1. Verificar se a série em estudo é estacionária.
2. Ajustar modelo ARMA para remover a correlação serial na série. No caso, teremos

$$\alpha(B)X_t = \beta_0 + \beta(B)\epsilon_t, \quad (3.48)$$

sendo  $\epsilon_t$  um ARCH( $r$ ) ou GARCH( $r,s$ ). Assim, teremos que  $X_t$  ou é uma série não correlacionada ou é o resíduo da aplicação do modelo ARMA à série original.

De fato, Francq e Zakoian [18] argumentam que, caso seja detectada autocorrelação serial, a série deverá ser ajustada a um modelo ARMA( $p,q$ ) antes que o modelo GARCH( $r,s$ ) seja aplicado a seus resíduos.

3. Verificar se a série possui heterocedasticidade condicional examinando  $X_t^2$ . Isso pode ser feito utilizando o teste de Box-Pierce-Ljung à série de  $X_t^2$  e/ou avaliando a FAC e FACP dessa mesma série (ver Box e Pierce [10] e Box e Ljung [26]). Essa verificação pode ser feita também analisando os *plots* das FAC e FACP dos quadrados das observações da série.

## 3.5 Modelos de Séries Temporais e Visão dos Investidores

Os modelos de séries temporais discutidos neste capítulo são utilizados na prática para realizar previsões sobre os retornos e as volatilidades dos retornos de ativos financeiros. Por esse motivo, os modelos tornam-se uma ferramenta adicional para implementação do modelo de Black-Litterman, uma vez que as previsões obtidas podem ser utilizadas como *proxy* das visões de curto prazo dos investidores. Essa abordagem pode ser relativamente superior à simples

definição de visões subjetivas tendo em vista que os modelos de séries temporais sistematizam as previsões sobre as volatilidades e os retornos.

Uma abordagem semelhante é encontrada em Beach e Orlov [4]. Os autores testaram carteiras geradas por Black-Litterman para uma carteira global de ativos. As visões incorporadas no modelo foram as previsões obtidas a partir de um modelo híbrido formado por Exponencial GARCH e ARCH-in-Mean. Os resultados foram comparados com a carteira de mercado, sem as visões. Concluiu-se que o desempenho da carteira com as visões superou o desempenho da carteira de mercado.

Seguindo uma linha semelhante, Lobarinhas [27] aplicou o modelo de Black-Litterman a uma carteira de títulos do Tesouro Nacional brasileiro. As visões do modelo foram obtidas ajustando os dados ao modelo GARCH Ortogonal. O autor comparou a carteira obtida com a carteira de mercado, sem as visões. O resultado das visões obtidas pelo modelo GARCH foi positivo.

Em continuidade às discussões já existentes na literatura, no Capítulo 5 deste trabalho, utilizaremos o modelo GARCH para gerar visões sobre os retornos e as variâncias de ações negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo. Essas visões também serão incorporadas no modelo de Black-Litterman de forma a verificar se a modelagem da volatilidade pode ser agregada ao modelo de otimização de carteira.



# Capítulo 4

## Exemplo com uma Carteira do Mercado Brasileiro

O objetivo deste capítulo é a aplicação do modelo de Black-Litterman a uma carteira formada por alguns ativos do mercado de ações brasileiro. Primeiramente, é feita uma descrição dos dados observados. Em segundo lugar, é feita uma análise dos log-retornos dos ativos, obtidos a partir desses dados, de forma a verificar se se tratam de invariantes de mercado. Por fim, na terceira seção apresentaremos os resultados da aplicação do modelo aos dados observados.

Antes de iniciarmos a descrição dos dados e apresentação dos resultados, cabe destacar alguns parâmetros a serem estimados no processo de aplicação do modelo ao mercado brasileiro de ações:

- Escolher a composição da carteira de equilíbrio *a priori* no mercado brasileiro;
- Estimar o coeficiente  $\tau$ , que determina a covariância da distribuição dos retornos, juntamente com a matriz  $\Sigma$ , que representa a covariância dos retornos passados;
- Determinar quais as visões dos investidores em relação ao retorno dos ativos para a aplicação do modelo;
- Estimar o parâmetro  $c$ , que representa a confiança das visões dos investidores.

Essas questões também serão tratadas ao longo do texto deste capítulo e, quando oportuno, apresentaremos para cada caso quais soluções foram escolhidas.

### 4.1 Descrição dos Dados de Mercado

O presente trabalho foi realizado com base na simulação do modelo utilizando dados históricos de ativos negociados no mercado de ações brasileiro. Para implementação do modelo, foram selecionados quinze ativos negociados na Bolsa de Valores de São Paulo (BMF&BOVESPA): ABEV3, BBAS3, BBDC4, BRFS3, CCRO3, CMIG4, EMBR3, ITSA4, ITUB4, PCAR4, PETR3, PETR4, UGPA3, VALE3 e VALE5. Todos esses ativos tem grande volume de negociação diária e significativa participação no índice BOVESPA (Ibovespa).

O Ibovespa é o resultado de uma carteira teórica de ativos escolhidos de acordo com os critérios de negociação estabelecidos em sua metodologia. Trata-se do mais importante indicador do desempenho médio das cotações dos ativos de maior negociabilidade e representatividade do mercado de ações brasileiro.

O índice é frequentemente no mercado e em trabalhos acadêmicos. Por esse motivo, podemos considerar o Ibovespa a melhor *proxy* para representar o equilíbrio de mercado.

Por seu alto volume de transação na Bolsa, é razoável considerarmos que os ativos são de fácil negociação, o que significa que os investidores podem comprá-los ou vendê-los em qualquer quantidade e a qualquer momento.

Os ativos selecionados tem juntos em torno de 64% de participação no Ibovespa. Apesar de não representar a totalidade do índice, eles representam uma boa proxy para a determinação do equilíbrio de mercado.

Foram obtidas as séries de preços diários de cada ativo entre os dias 20/10/2004 e 03/09/2014, em um total de 2.440 observações. Todos os dados foram coletados da *Bloomberg*, cujo banco de dados é altamente conhecido e utilizado no mercado financeiro. Os preços dos ativos da base de dados já incorporam as correções necessárias devido à emissão de dividendos aos acionistas. O período em análise inclui eventos como a Crise de 2008, a Crise da Dívida na Zona do Euro e outros fatores que atingiram a economia brasileira, incluindo instabilidades políticas.

A escolha por observações diárias se deve a maior quantidade de informações disponíveis sobre os ativos e sobre o mercado e a melhor capacidade de capturar essas informações quando os dados são obtidos nessa frequência.

A partir das séries de preços dos ativos, calculamos o retorno diário no período. Para isso, utilizamos a fórmula dos log-retornos

$$R_t = \log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \quad (4.1)$$

Para fins de seleção da amostra *in-sample*, foram considerados os dados entre os períodos de 20/10/2004 a 02/09/2013, totalizando 2.193 observações de preços. A data de corte foi escolhida em virtude de uma alteração na metodologia de cálculo da composição do Ibovespa, que teve validade a partir de 02/09/2013. Adotou-se a taxa livre de risco igual a zero.

A Tabela 4.1 apresenta as estatísticas características dos ativos escolhidos, incluindo seu setor de atuação, sua participação no Ibovespa e suas principais estatísticas, considerando apenas os dados *in-sample*. A Figura 4.1 mostra o *box plot* dos retornos de cada ativo. Verifica-se a existência de assimetria nos ativos analisados. A maior assimetria positiva é a do ativo UGPA4, que apresenta também o maior valor máximo.

A presença de assimetria nos retornos pode ser tratada considerando que estes seguem distribuições assimétricas, como, por exemplo, a *skew normal*. Entretanto, como forma de simplificação, neste trabalho vamos considerar que os retornos seguem distribuição normal.



Ativo	Empresa	Setor	Média	Mediana	Desvio Padrão	Assimetria	Curtose	Máximo	Mínimo
ABEV3	Ambev	Bebidas	0.09%	0.04%	1.64%	0.15	3.49	10.91%	-11.97%
BBAS3	Banco do Brasil	Interms Financs	0.04%	0.00%	2.23%	0.23	4.65	18.83%	-16.68%
BBDC4	Bradesco	Interms Financs	0.06%	0.00%	2.03%	0.49	5.53	19.98%	-12.21%
BRFS3	BRF S.A.	Alimentos	0.09%	0.03%	2.12%	0.20	2.88	16.91%	-10.68%
CCRO3	CCR SA	Transporte	0.09%	0.03%	1.98%	0.17	4.83	17.92%	-12.91%
CMIG4	CEMIG	Energia Elétrica	0.03%	0.04%	2.63%	-0.94	9.44	10.94%	-21.96%
EMBR3	Embraer	Mat Transporte	0.02%	0.00%	2.42%	0.08	3.81	14.55%	-13.25%
ITSA4	Itaú SA	Interms Financs	0.06%	0.00%	1.69%	0.51	6.89	22.42%	-12.26%
ITUB4	Itaú Unibanco	Interms Financs	0.05%	0.00%	1.77%	0.52	6.12	21.00%	-12.94%
PCAR4	Pão de Açucar	Comércio	0.05%	0.02%	2.04%	0.30	2.82	14.17%	-9.01%
PETR3	Petrobrás	Petróleo, Gás e Biocomb.	0.01%	0.09%	1.72%	0.02	4.24	14.11%	-14.91%
PETR4	Petrobrás	Petróleo, Gás e Biocomb.	0.02%	0.10%	1.65%	-0.12	4.06	13.25%	-14.80%
UGPA3	Ultrapar	Holdings	0.08%	0.00%	1.91%	1.07	18.15	27.10%	-9.36%
VALE3	Vale	Mineração	0.04%	0.04%	2.18%	-0.16	4.85	13.56%	-20.55%
VALE5	Vale	Mineração	0.04%	0.09%	2.11%	-0.14	4.03	12.57%	-16.44%

Tabela 4.1: Tabela Resumo - Retornos Diários dos Ativos

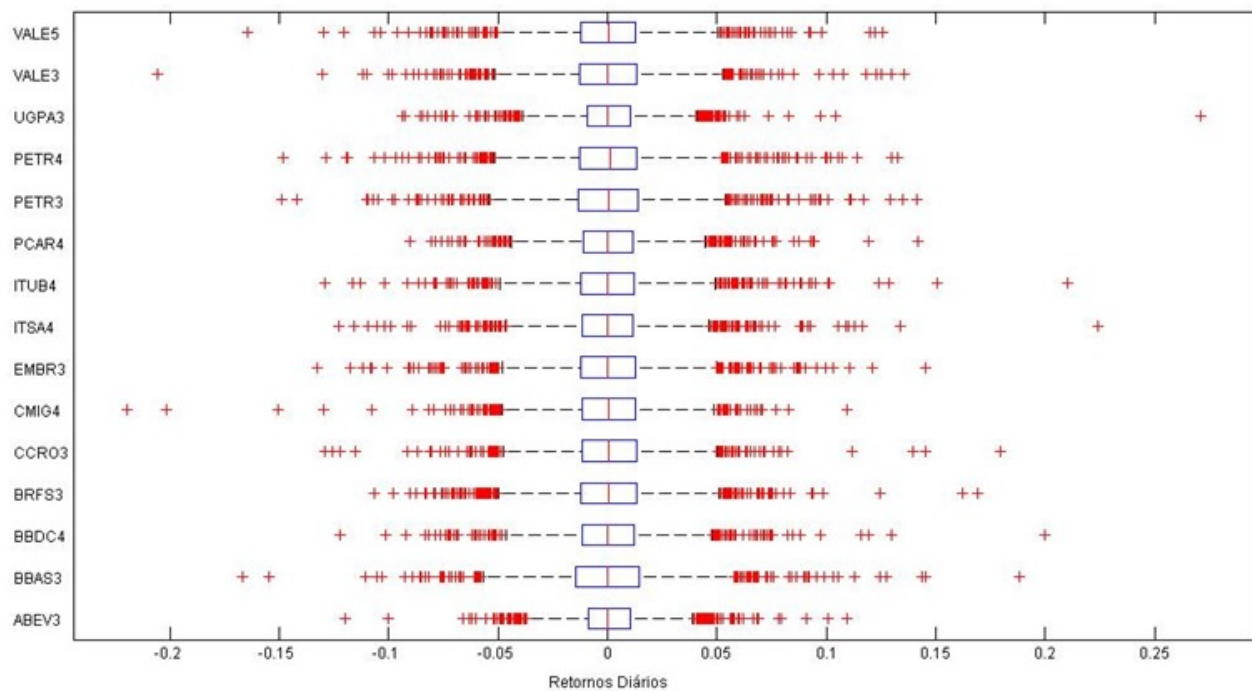


Figura 4.1: Box Plot dos Retornos Diários dos Ativos

Para representação da carteira de mercado, obtivemos a série de cotações do Ibovespa para o período de 20/10/2004 a 02/09/2013. Estimamos a matriz de covariância (Tabela 4.2) entre os ativos como sendo a covariância dos log-retornos da amostra de preços selecionada.

ABEV3	BBAS3	BBDC4	BRFS3	CCRO3	CMIG4	EMBR3	ITSA4	ITUB4	PCAR4	PETR3	PETRA	UGPA3	VALE3	VALE5
3.22	1.86	1.94	1.46	1.24	1.43	1.20	1.94	1.98	1.41	1.55	1.49	1.14	1.95	1.89
	6.73	3.81	2.54	2.22	2.19	2.00	4.02	4.07	2.26	2.94	2.92	1.83	3.43	3.40
		4.95	2.28	2.02	2.18	2.11	4.34	4.58	2.27	3.11	3.03	1.76	3.47	3.36
			6.20	1.86	1.61	1.57	2.51	2.52	1.73	2.01	2.02	1.48	2.36	2.35
				5.29	1.61	1.43	2.14	2.06	1.62	1.75	1.77	1.40	2.01	2.02
					4.97	1.30	2.25	2.28	1.65	1.90	1.90	1.37	2.08	2.10
						5.63	2.11	2.20	1.47	1.93	1.82	1.14	2.20	2.13
							5.48	5.18	2.36	3.20	3.12	1.93	3.52	3.41
								5.61	2.40	3.31	3.20	1.89	3.68	3.57
									4.44	1.99	2.01	1.35	2.20	2.14
										5.98	5.51	1.66	4.25	4.04
											5.46	1.67	4.07	3.91
												3.86	1.89	1.82
													6.28	5.78
														5.64

**Tabela 4.2:** Matriz de Covariância dos Retornos Diários (valores em  $10^{-4}$ )

## 4.2 Aplicação do Modelo de Média-Variância

Vamos aplicar nossa amostra de dados ao Modelo de Média-Variância de Markowitz, descrito no Capítulo 2. O objetivo é analisar os resultados obtidos com o modelo e como esses resultados reagem a mudanças das amostras de dados.

A partir do dados *in-sample*, foram geradas quatro amostras. A primeira é composta por todos os dados *in-sample* coletados. Posteriormente, foram retirados os 200 primeiros dados dessa amostra completa. Esse procedimento foi realizado mais duas vezes, de forma a chegarmos em quatro amostras distintas de diferentes tamanhos:

- Amostra 1: 20/10/2004 a 02/09/2013;
- Amostra 2: 10/08/2005 a 02/09/2013;
- Amostra 3: 01/06/2006 a 02/09/2013; e
- Amostra 4: 26/03/2007 a 02/09/2013.

Para cada amostra, foram estimadas uma matriz de retornos esperados e uma matriz de covariância entre os ativos. A partir dessas estimativas, efetuamos a minimização do risco sob a restrição de diferentes valores de retorno esperado. Com isso, geramos 50 carteiras, formando uma aproximação da fronteira eficiente a partir do modelo. Os resultados serão apresentados na Seção 4.4.

## 4.3 Aplicação do Modelo de Black-Litterman

Assim como na descrição do modelo, o processo de geração dos pesos da carteira ótima pela abordagem de Black-Litterman foi dividido em quatro etapas. Na primeira etapa, encontramos a distribuição a priori a partir do equilíbrio de mercado. Na segunda etapa, abordamos as visões dos investidores do mercado. Na terceira etapa, foram incorporadas essas visões e obtidas a distribuição *a posteriori*. Por fim, estimamos a carteira ótima de equilíbrio com base na distribuição *a posteriori*. Nesta seção, descreveremos alguns procedimentos utilizados na implementação da primeira e da segunda etapas. Com relação às outras duas, utilizamos exatamente o método descrito no Capítulo 2, não sendo necessário maior detalhamento.

### 4.3.1 Distribuição *a Priori*

Conforme detalhado no Capítulo 2 deste trabalho, o ponto de partida do modelo de Black-Litterman é o equilíbrio de mercado, a partir do qual se obtém a distribuição *a priori* dos retornos dos ativos pelo processo de otimização reversa.

Nesse contexto, para encontrar a distribuição *a priori* do retorno dos ativos, tivemos de estimar os seguintes parâmetros:

- O vetor de pesos  $w_{priori}$  dos ativos no equilíbrio de mercado de longo prazo;
- O coeficiente de aversão ao risco do mercado  $\lambda$  calculado como

$$\lambda = \frac{E[R_m] - R_f}{\sigma_m^2}; \quad (4.2)$$

- A matriz de covariâncias  $\Sigma$  dos retornos dos ativos.

Neste exemplo, o equilíbrio de mercado será dado pela composição de 15 ativos da carteira do Ibovespa. Como não selecionamos todos os ativos que compõe o Índice, efetuamos uma readequação dos pesos, obedecendo a relevância em sua composição, de forma que a soma desses pesos seja igual a 1. Dessa forma, os pesos da carteira de equilíbrio de mercado, no exemplo estudado, possui a configuração da Tabela 4.3.

Ativo	Empresa	Participação a Priori %
ABEV3	Ambev	6.40%
BBAS3	Banco do Brasil	4.02%
BBDC4	Bradesco	11.29%
BRFS3	BRF S.A.	5.05%
CCRO3	CCR SA	2.99%
CMIG4	CEMIG	1.98%
EMBR3	Embraer	2.60%
ITSA4	Itaú SA	4.68%
ITUB4	Itaú Unibanco	12.87%
PCAR4	Pão de Açúcar	2.75%
PETR3	Petrobrás	8.67%
PETR4	Petrobrás	13.59%
UGPA3	Ultrapar	2.65%
VALE3	Vale	8.72%
VALE5	Vale	11.73%

**Tabela 4.3:** Participação dos Ativos - Carteira de Mercado

A aversão ao risco do mercado  $\lambda$  foi definida aplicando os dados históricos dos log-retornos do Ibovespa à Equação (4.2). O coeficiente de aversão ao risco do mercado obtido é igual a 1,10.

Como covariância dos retornos  $\Sigma$ , utilizamos a matriz de covariância das séries de retornos dos ativos, já apresentadas na Seção 4.1.

Uma vez que definimos  $\lambda$ ,  $w$  e  $\Sigma$ , pelo processo de otimização inversa, calculamos o retorno esperado aplicando a fórmula

$$\Pi = \lambda \Sigma \omega \quad (4.3)$$

O cálculo do desvio-padrão da distribuição dos retornos requer a estimação do fator  $\tau$ , que indica a incerteza do investidor em relação à sua estimativa *a priori* dos retornos. Conforme já discutido, a calibração desse fator foi estudada por Walters [40], que a aborda de três maneiras distintas. A primeira considera  $\tau = 0,05$ , conforme proposto por He e Litterman [20]. A segunda propõe-se  $\tau = 1$ , como feito por Satchell e Scowcroft [35]. A terceira, proposta por Meucci [29], considera o valor de  $\tau$  como inverso do tamanho da amostra. Por conveniência, utilizamos neste trabalho a proposta de Meucci.

Os valores *a priori* da esperança e do desvio padrão dos retornos dos ativos obtidos a partir da amostra *in-sample* com o modelo são apresentados na Tabela 4.4.

Ativo	Empresa	Retornos A Priori	Desvio Padrão A Priori
ABEV3	Ambev	0,020%	0,038%
BBAS3	Banco do Brasil	0,036%	0,055%
BBDC4	Bradesco	0,037%	0,048%
BRFS3	BRF S.A.	0,026%	0,053%
CCRO3	CCR SA	0,022%	0,049%
CMIG4	CEMIG	0,022%	0,048%
EMBR3	Embraer	0,022%	0,051%
ITSA4	Itaú SA	0,039%	0,050%
ITUB4	Itaú Unibanco	0,040%	0,051%
PCAR4	Pão de Açúcar	0,023%	0,045%
PETR3	Petrobrás	0,040%	0,052%
PETR4	Petrobrás	0,038%	0,050%
UGPA3	Ultrapar	0,019%	0,042%
VALE3	Vale	0,042%	0,054%
VALE5	Vale	0,041%	0,051%

**Tabela 4.4:** Retorno Esperado e Desvio-Padrão *a Priori*

O mesmo procedimento foi adotado nas outras três amostras, conforme efetuado com o Modelo Média-Variância. A partir dos parâmetros da distribuição *a priori* obtivemos a fronteira de portfólios eficientes. Os gráficos e resultados são apresentados na Seção 4.4.

### 4.3.2 Visão Hipotética dos Investidores

A determinação da matriz de visões dos investidores é um desafio na aplicação do modelo de Black-Litterman tendo em vista sua subjetividade e incerteza. A incorporação das visões ao modelo, se por um lado é positiva no sentido de considerar a opinião de especialistas em relação ao mercado, por outro pode influenciar negativamente os resultados caso estejam demasiadamente distantes do que realmente irá ocorrer.

Consideramos como a visão do investidor a média dos retornos *out-of-sample* de cinco ativos: ABEV3, BBDC4, CCRO3, CMIG4 e PCAR4. O objetivo aqui não é escolher visões totalmente corretas, entretanto, iremos supor que o investidor possui visões confiáveis e coerentes. Com isso, buscamos reduzir a influência que o erro nas visões tem nos resultados do modelo. Em nosso exemplo, todas as visões são absolutas.

Optamos por não considerar visões sobre todos os ativos, o que, de certa forma, poderia dificultar a análise dos resultados. Dessa forma, escolhemos utilizar a visão do investidor em relação a somente cinco ativos como uma forma de simplificar o modelo e possibilitar uma melhor análise do efeito dessas visões nas carteiras *a posteriori*, quando comparadas às carteiras *a priori*.

As visões utilizadas foram as seguintes:

- O retorno do ativo ABEV3 será de 0,03%;
- O retorno do ativo BBDC4 será de 0,05%;
- O retorno do ativo CCRO3 será de 0,03%;
- O retorno do ativo CMIG4 será de -0,04%; e
- O retorno do ativo PCAR4 será de 0,08%;

As mesmas visões foram consideradas na implementação das quatro amostras de dados.

Matricialmente, representamos esse conjunto de visões nos termos da Equação (2.29):

$$\begin{bmatrix} 0,03\% \\ 0,05\% \\ 0,03\% \\ -0,04\% \\ 0,08\% \end{bmatrix} = P\mu + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{bmatrix}$$

Outro parâmetro a ser estimado é matriz de covariância das visões  $\Omega$ . Conforme já abordamos, Meucci [29] apresenta a seguinte proposta de determinação de  $\Omega$ :

$$\Omega = \frac{1}{c} P\Sigma P' \quad (4.4)$$

onde  $c \in (0, \infty)$  representa o nível de confiança da visão apresentada, de forma que, quanto maior o valor de  $c$ , maior a confiabilidade.

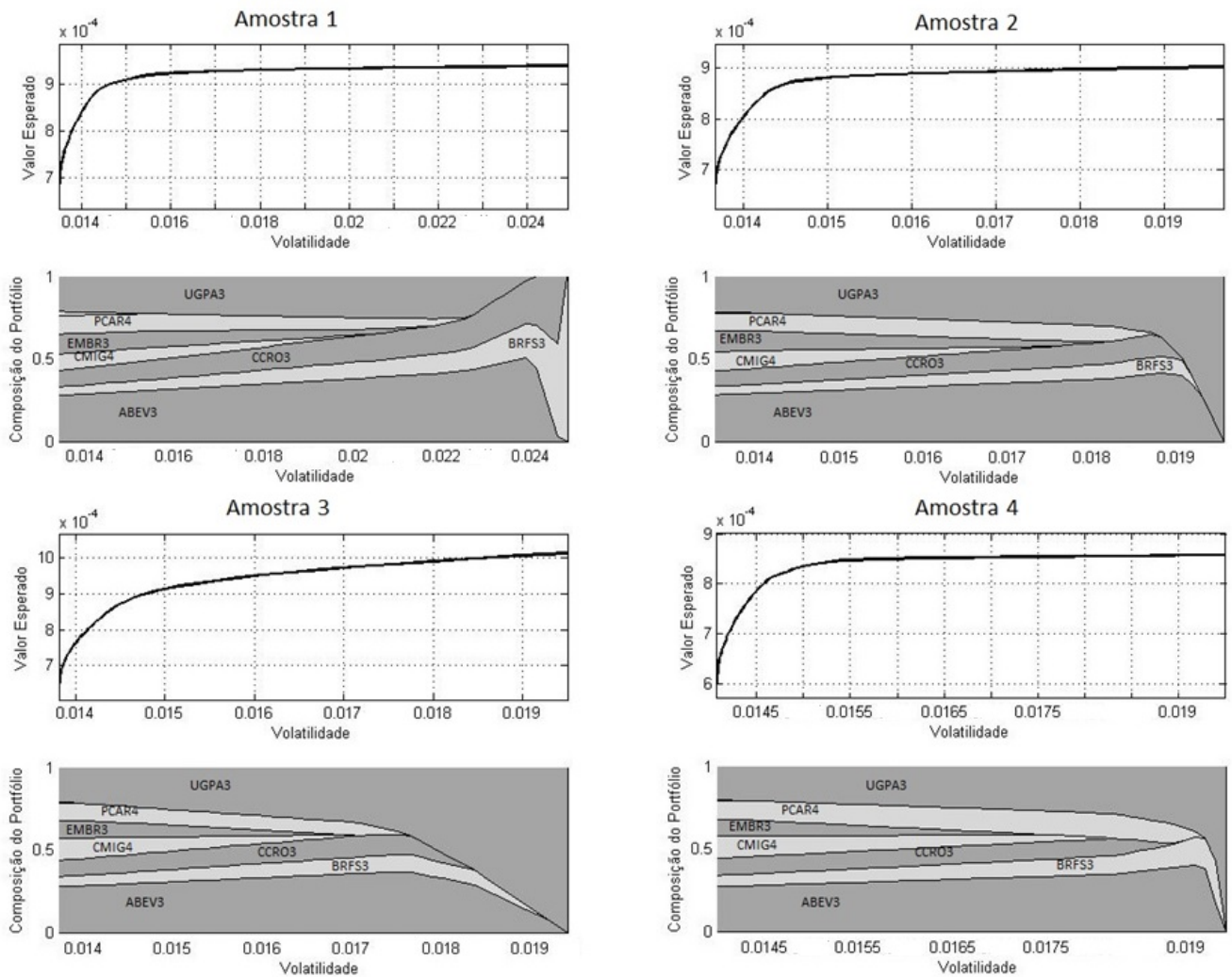
No exemplo, como tomamos as visões como as médias dos retornos efetivamente observados, poderíamos utilizar o coeficiente  $c$  alto, tendo em vista que tais visões são confiáveis. Todavia, no caso prático, isso não teria tanta utilidade, uma vez que investidor desconhece os retornos futuros. Dessa forma, vamos avaliar nossos resultados utilizando valores distintos para  $c$ , à qual atribuímos os seguintes valores: 1, 20, 100 e 200.

## 4.4 Resultados

### 4.4.1 Comparação entre Carteiras Geradas pelo Modelo de Média-Variância

As fronteiras de carteiras eficientes geradas pelo Modelo de Média-Variância considerando as quatro amostras de dados são apresentadas na Figura 4.2.

A fronteira eficiente foi representada por dois gráficos. O primeiro representa o *plot* das carteiras eficientes no eixo Desvio-Padrão  $\times$  Retorno Esperado. O segundo, representado no



**Figura 4.2:** Fronteira Eficiente: Modelo de Média-Variância com Amostras Distintas

eixo Volatilidade  $\times$  Composição da Carteira, permite a visualização da composição das carteiras da fronteira eficiente, ordenadas de forma crescente de volatilidade.

No exemplo, observa-se uma consequência intuitiva do Modelo de Média-Variância: comparando-se a composição da carteira em relação aos diferentes valores de volatilidade, nota-se que as carteiras de menor desvio-padrão são as mais diversificadas, sendo formadas em todos os casos pelos sete ativos, enquanto, um risco maior implica em uma carteira mais concentrada, sendo formada por apenas um ou dois ativos.

Por outro lado, com o exemplo é possível apresentar duas fraquezas do Modelo de Média Variância: a concentração das carteiras em poucos ativos e alta sensibilidade em relação aos dados de entrada.

Observa-se que, em todos os casos, a fronteira eficiente é formada por apenas sete no universo de quinze ativos: ABEV3, BRFS3, CCRO3, CMIG4, EMBR3, PCAR4 e UGPA4. Independente do risco ao qual o investidor esteja disposto a se submeter ou ao retorno esperado que se esteja buscando, a carteira ótima fornecida pelo modelo será concentrada nesses sete ativos. Isso ratifica a tese de concentração de carteira gerada pelo Modelo de Média-Variância, considerado

uma das limitações do modelo por ser um resultado pouco intuitivo.

Além disso, a alta sensibilidade do modelo aos dados de entrada pode ser analisada ao considerar as quatro amostras. É fácil verificar que a retirada de 200 observações, que representa aproximadamente 10% da amostra, interfere nos resultados, principalmente nas carteiras de maior risco.

Verifica-se que, considerando a Amostra 1, as carteiras de maior risco geradas pelo modelo são compostas por quatro ativos: ABEV3, BRFS3, CCRO3 e UGPA3. Entretanto, a participação do ativo UGPA3 se reduz à medida que o risco aumenta, de forma que os pesos dos ativos BRFS3 e CCRO3 ficam mais significativos.

Por outro lado, nas demais amostras, essa tendência não se verifica. A participação do UGPA3 aumenta, considerando os resultados obtidos com as amostras 2, 3 e 4, juntamente com o risco da carteira eficiente. Já a participação dos ativos ABEV3, BRFS3 e CCRO3 diminuem com essas amostras.

Observa-se também, pelos gráficos no espaço Volatilidade  $\times$  Valor Esperado, que fixando o valor do retorno a ser obtido o modelo fornece carteiras totalmente diferentes ao incorporar amostras de dados distintas. Como exemplo, suponhamos que o investidor fixe um retorno esperado igual a 0,09%. Observa-se que as amostras 1 e 3 geram carteiras formadas pelos sete ativos. Entretanto, as amostras 2 e 4 fornecem carteiras de maior risco e mais concentradas para esse nível de retorno esperado.

Esses fatores contribuem para o argumento de alta sensibilidade em relação aos dados do modelo e corroboram aos argumentos de que a abordagem de Markowitz gera resultados pouco intuitivos e instáveis.

#### 4.4.2 Análise da Sensibilidade do Fator de Confiança das Visões no Modelo de Black-Litterman

Antes de apresentarmos os resultados das diferentes amostras utilizando o Modelo de Black-Litterman, faremos uma breve discussão sobre os efeitos do fator de confiança das visões no modelo.

A confiança das visões escolhidas são representadas pelo coeficiente  $c$  na Equação (4.4). Conforme já abordamos, foram escolhidos quatro valores para  $c$  de forma a verificar sua influência nos resultados do modelo.

As Figuras 4.3 e 4.4 apresentam, respectivamente, a fronteira eficiente sem a incorporação das visões e a fronteira eficiente obtida com os resultados *a posteriori* utilizando a mesma amostra para os quatro diferentes graus de confiança dos investidores. Em todos os casos, foram utilizados os dados da Amostra 1.



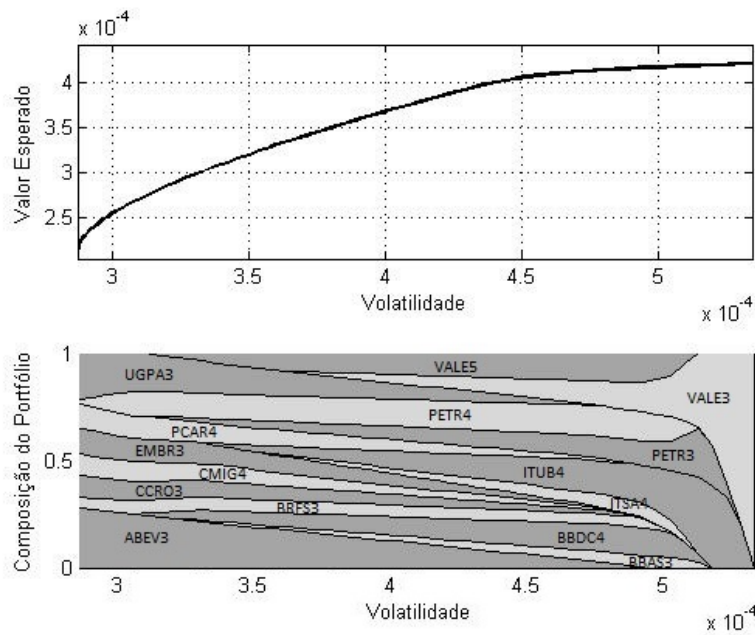


Figura 4.3: Fronteira Eficiente: Modelo de Black-Litterman sem Incorporação das Visões.

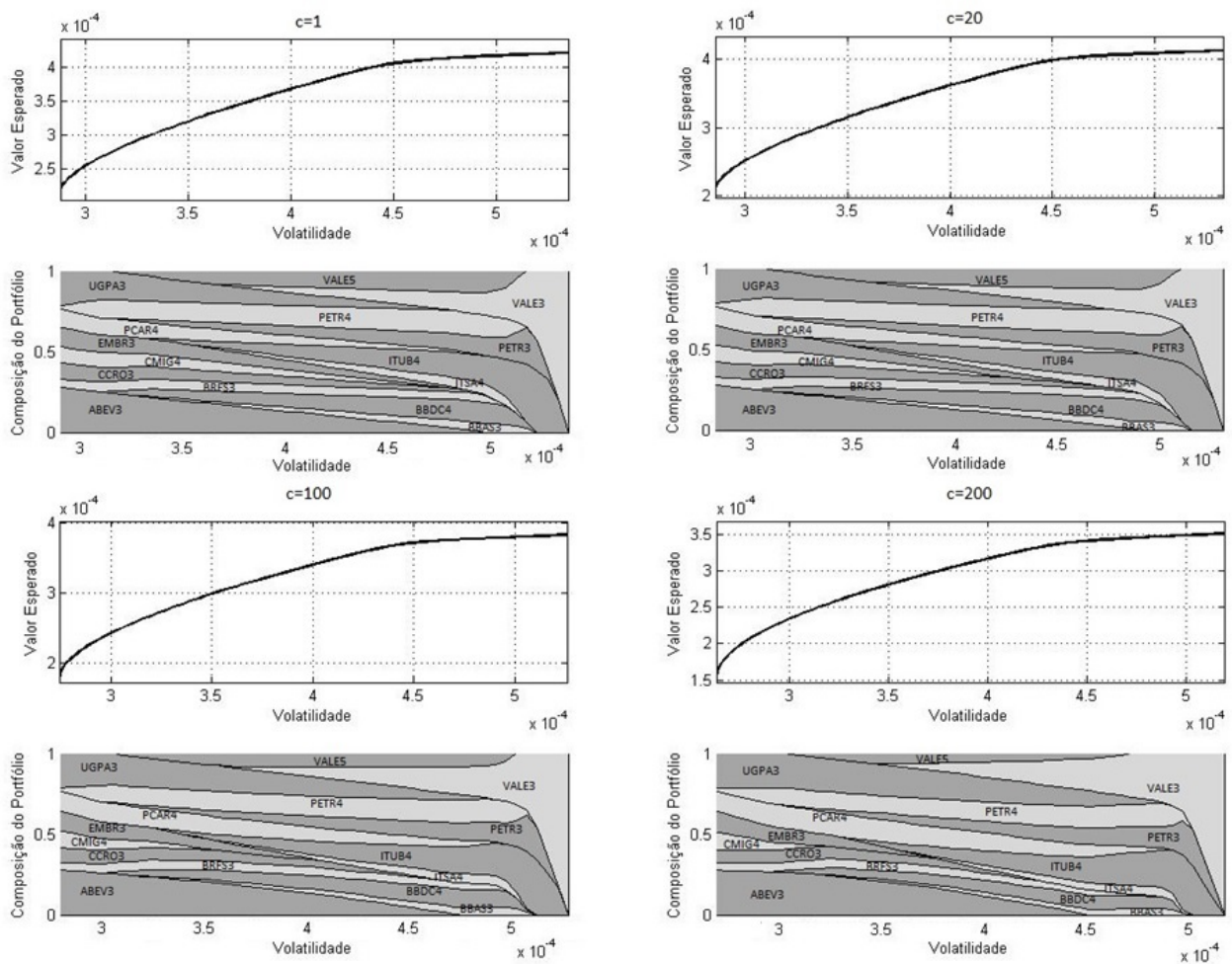


Figura 4.4: Fronteira Eficiente: Modelo de Black-Litterman com Diferentes Valores de  $c$ .

Nota-se que, quando consideramos uma menor confiança na visão do investidor, que é o caso de  $c = 1$ , os resultados *a posteriori* são semelhantes aos resultados *a priori*. Essa é uma característica muito intuitiva do modelo, tendo em vista que uma visão pouco confiável será menos incorporada aos resultados do modelo.

Aumentando o valor de  $c$ , observa-se que as carteiras que compõe a fronteira eficiente sofrem alterações. Avaliando a participação dos ativos cujas visões dos investidores foram consideradas, verifica-se que:

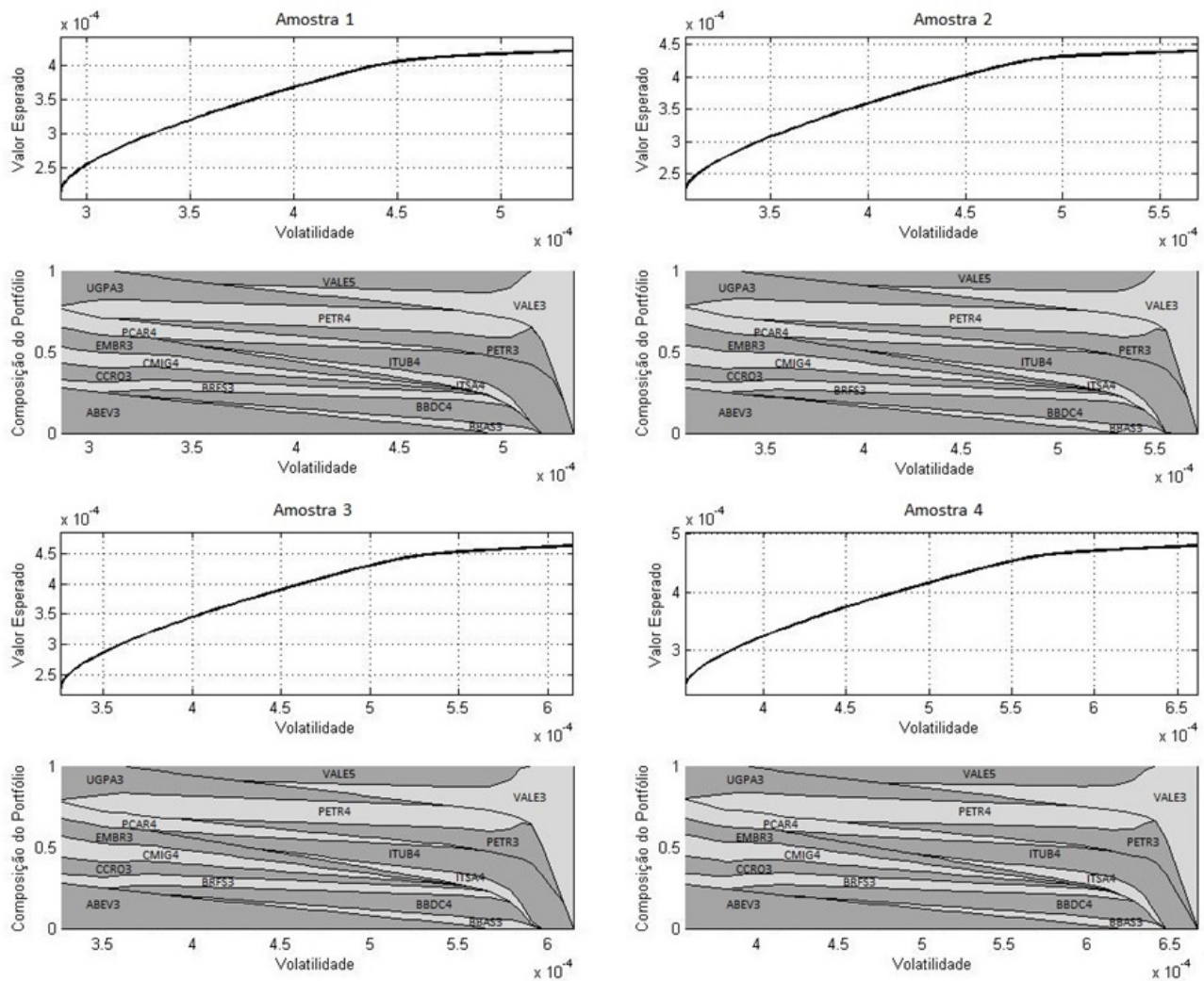
- A ABEV3 teve sua participação reduzida nas carteiras de maior risco. Enquanto no modelo sem visões, o ativo tem participação em carteiras de volatilidade até 0,05%, sua participação se reduz com a incorporação das visões, chegando a ter peso nulo nas carteiras de volatilidade a partir de 0,045%, considerando  $c=200$ ;
- O ativo BBDC4 teve sua participação reduzida na fronteira eficiente com a incorporação das visões. Essa redução se tornou mais significativa à medida que a confiança das visões aumentou;
- O ativo CCRO3 teve um comportamento semelhante ao ativo ABEV3, de forma que sua participação reduziu-se em carteiras eficientes de maior volatilidade. Enquanto na fronteira eficiente *a priori*, o ativo tinha maior participação considerando a volatilidade próxima a 0,05%, com a incorporação das visões e o aumento da confiança, sua participação diminuiu de forma que se tornou nula em carteiras com volatilidade a partir de 0,043%, considerando  $c=200$ ;
- De maneira semelhante aos ativos ABEV3 e CCRO3, o ativo CMIG4 teve sua participação reduzida na fronteira eficiente. Considerando o maior grau de confiança nas visões utilizado, sua participação é nula em carteiras com volatilidade superior a 0,0325%;
- Por fim, o ativo PCAR4 passou a ter um peso maior nas fronteiras eficientes com as visões incorporadas, quando se compara à fronteira obtida com os resultados *a priori*. Esse comportamento se deve ao fato de a visão sobre o ativo constatar que seu retorno médio será superior ao retorno estimado com a distribuição *a priori*.

Com base na análise efetuada acima, podemos inferir que o grau de confiança pode alterar significantemente o resultado ao incorporar em diferentes intensidade as visões do investidor. A variação dos resultados foram observadas, principalmente, nas carteiras de maior volatilidade.

#### 4.4.3 Comparação entre Carteiras Geradas pelo Modelo de Black-Litterman com Diferentes Amostras

Apresentaremos nesta seção o modelo de Black-Litterman considerando as diferentes amostras da base de dados. Para melhor visualizarmos os efeitos da alteração da amostra no modelo, utilizaremos o maior grau de confiança entre os testados, sendo  $c$  igual a 200.

A Figura 4.5 apresenta os resultados sem a incorporação das visões obtidos com as quatro diferentes amostras.

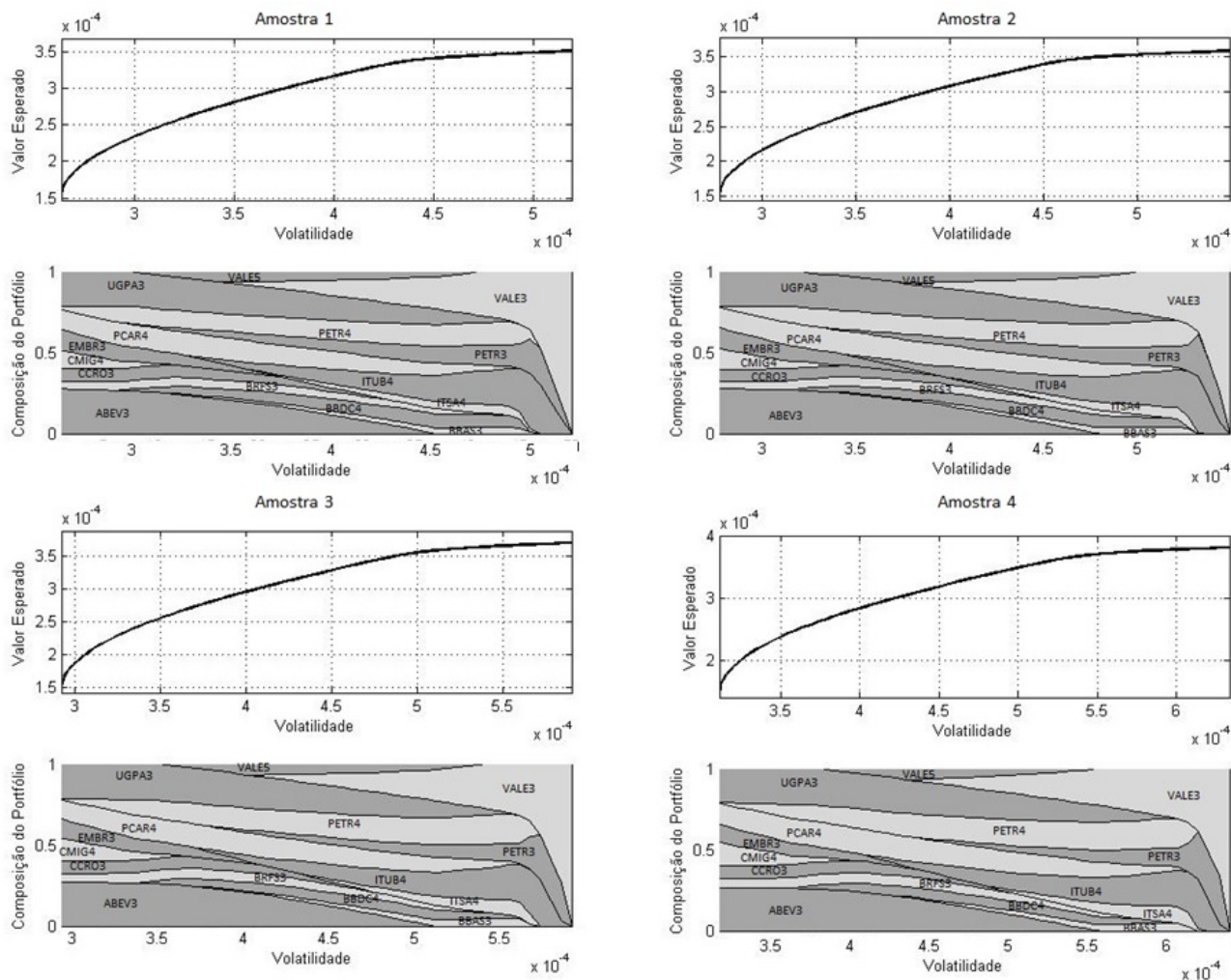


**Figura 4.5:** Fronteira Eficiente sem as Visões: Comparação entre Diferentes Amostras

Observa-se, a partir dos gráficos gerados, que a fronteira eficiente obtida da distribuição *a priori* do Modelo de Black-Litterman, diferentemente dos resultados observados no Modelo de Média-Variância, apresenta carteiras mais diversificadas. Verifica-se que todos os ativos selecionados fazem parte da fronteira.

Comparando os resultados *a priori* obtidos com os diferentes conjuntos de dados, verifica-se poucas diferenças na composição da fronteira eficiente. Ainda que existam distintas composições, principalmente nas carteiras de maior volatilidade, a composição das mesmas são semelhantes e compostas pelos mesmos ativos.

A Figura 4.6 apresenta os resultados após a incorporação das visões, obtidos com as quatro diferentes amostras.



**Figura 4.6:** Fronteira Eficiente *a posteriori*: Comparação entre Diferentes Amostras

De forma semelhante aos resultados *a posteriori* verifica-se que:

- graficamente, existem poucas variações nas carteiras das fronteiras eficientes ao alterarmos a amostra de dados;
- as carteiras geradas a partir do modelo de Black-Litterman apresentam-se mais diversificadas quando comparadas às carteiras geradas pelo Modelo de Média-Variância.

Os resultados obtidos nessa seção exemplificam duas importantes contribuições do Modelo de Black-Litterman: a baixa sensibilidade dos resultados em relação aos dados de entrada, característica que o torna um modelo estável, e a obtenção de resultados intuitivos com carteiras mais diversificadas.

#### 4.4.4 Avaliação de Desempenho das Carteiras Ótimas

Uma vez observadas as contribuições do Modelo de Black-Litterman aplicado ao mercado de ações brasileiro, cumpre responder a seguinte questão: o Modelo de Black-Litterman apresenta melhor performance que o Modelo de Média-Variância?

Trata-se de uma questão de difícil conclusão, tendo em vista que ambos os modelos, ainda que possuam suas vantagens, ainda que em diferentes graus, depende de fatores externos como a base de dados utilizada, os ativos escolhidos, as visões dos investidores, entre outros.

Neste trabalho, nosso objetivo não é concluir qual o melhor modelo a ser utilizado. Nos restringiremos apenas a verificar qual abordagem apresentou um melhor desempenho estritamente no exemplo analisado. Para isso, foram obtidas carteiras considerando modelos: o Modelo de Média-Variância tradicional, o Modelo de Média-Variância com as visões, o Modelo de Black-Litterman sem as visões e o Modelo de Black-Litterman com as visões. No caso do Modelo de Black-Litterman, considerou-se que o grau de confiança das visões  $c$  é igual a 200.

Para encontrarmos a carteira do Modelo de Média-Variância com as visões, simplesmente substituímos na matriz de retorno esperado as mesmas visões utilizadas no Modelo de Black-Litterman. Isto posto, avaliaremos o desempenho das carteiras ótimas geradas pelos modelos com as quatro amostras *in-sample* utilizando também os log-retornos observados na amostra *out-of-sample*.

Existe uma série de indicadores na literatura que permite que seja feita a avaliação da performance de uma carteira de investimentos. Entre elas podemos citar estatísticas simples como a média dos retornos ou a volatilidade da carteira. A mais utilizada é baseada justamente no Modelo CAPM. Trata-se do Índice de Sharpe - IS, criado por William F. Sharpe [37] e dado pela equação

$$IS = \frac{E(R_t) - R_f}{\sigma_t} \quad (4.5)$$

Uma carteira de melhor desempenho é aquela que apresenta uma maior Índice de Sharpe. Isso decorre da preferência em se obter uma carteira com maior retorno por unidade de risco.

Observamos que se trata da mesma equação utilizada no Modelo Média-Variância considerando a taxa livre de risco. Dessa forma, para encontrar a carteira ótima com base nesse modelo, maximiza-se o Índice de Sharpe das carteiras que compõem a fronteira eficiente.

De forma a simplificar a avaliação da performance, utilizamos as seguintes premissas:

1. O intervalo de tempo a ser avaliado é de quatro meses, ou seja, será verificado o desempenho da carteira utilizando os retornos diários observados entre os períodos de 03/09/2013 a 30/12/2013 (amostra *out-of-sample*);
2. O investidor não muda suas visões a cada nova observação. Ou seja, durante todo o período de análise, o investidor mantém a mesma matriz de visões apresentada na Seção 4.3.2;

3. Consequentemente, as carteiras obtidas a partir da amostra de dados até o dia 02/09/2013 são mantidas durante todo o período analisado, ainda que novas observações sejam incluídas na amostra, impossibilitando que investidor mude sua posição.

Os resultados, considerando os log-retornos dos ativos no período (amostra *out-of-sample*), são apresentados na Tabela 4.5.

Amostra de Dados	MV	MV com Visões	BL Priori	BL com Visões	Carteira de Mercado
20-out-2004 a 02-set-2013	0.0087	0.0103	0.0195	0.0465	0.0202
10-ago-2005 a 02-set-2013	0.0236	0.0111	0.0197	0.0491	0.0202
01-jun-2006 a 02-set-2013	0.0191	0.0114	0.0199	0.0518	0.0202
26-mar-2007 a 02-set-2013	0.0207	0.0050	0.0200	0.0540	0.0202

**Tabela 4.5:** Índice de Sharpe dos Retornos Diários das Carteiras geradas com Quatro Amostras de Dados

Os valores da Tabela 4.5 nos levam a concluir que no exemplo analisado:

- A Carteira de Mercado apresentou desempenho superior às carteiras geradas pelo Modelo de Média-Variância com as visões e às carteiras *a priori* do Modelo de Black-Litterman. Comparando a Carteira de Mercado às carteiras do Modelo de Média-Variância sem visões, não foi possível tirar uma conclusão, tendo em vista que esta apresentou desempenho superior quando aplicada às amostras 2 e 3 e inferior quando aplicada às demais amostras.
- Com relação às carteiras geradas pelo Modelo de Black-Litterman após a incorporação das visões, observa-se que esta teve desempenho superior às demais carteiras. Esse resultado verifica-se porque a visão do investidor é confiável e encontra-se próxima aos retornos que realmente aconteceram.
- A incorporação das visões ao Modelo de Média-Variância não apresentou bons resultados quando comparados às carteiras obtidas sem as visões. Verifica-se que apenas no caso da amostra 1, a carteira com as visões apresentou melhor desempenho.
- Comparando os desempenhos das carteiras sem as visões geradas pelo Modelo de Média-Variância e de Black-Litterman, observa-se que, apesar de o Modelo de Black-Litterman ter um desempenho inferior em duas amostras (amostra 2 e amostra 4), seu Índice de Sharpe é estável considerando a variação da amostra.

Concluimos com os resultados observados que, no exemplo em tela, a performance do Modelo de Black-Litterman está associado às visões incorporadas a ele. Ou seja, considerando que as visões do investidor são confiáveis e que elas se aproximam da realidade, a abordagem trará bons resultados. Essas visões são, entretanto, subjetivas e sujeitas a falhas, o que pode comprometer o desempenho do modelo. Por isso, conforme se esperava, não se pode concluir que o Modelo de Black-Litterman sempre fornecerá carteiras de desempenho superior à carteira de mercado ou às carteiras geradas pelo Modelo de Média-Variância.

Além disso, o fato de o modelo de Média-Variância ser mais sensível aos dados de entrada dificulta a comparação entre os modelos, uma vez que as carteiras geradas pelo modelo MV a partir de determinada amostra de dados podem apresentar resultados muito superiores às geradas a partir de uma amostra distinta, como podemos observar na Tabela 4.5.

Dessa forma, observa-se uma importante vantagem da abordagem de Black-Litterman: tanto antes quanto após a incorporação das visões, os desempenhos das carteiras se mantiveram relativamente estável com a variação da amostra. Verifica-se que os Índices de Sharpe mantiveram-se próximos. Antes da incorporação das visões, o índice variou entre 0,0195 e 0,002. Após implementadas as visões dos investidores, essa variação foi 0.0465 e 0.0540. Por outro lado, no caso do Modelo de Média-Variância, o IS chegou a variar, em função da amostra, de 0.0087 a 0.0236 pontos percentuais, sem as visões, e de 0.0050 a 0.0114, com as visões.





# Capítulo 5

## Black-Litterman com Visões Derivadas do GARCH

Conforme discutido nos Capítulos 2 e 4 deste trabalho, o Modelo de Black-Litterman apresenta uma série de vantagens em relação ao modelo de Média-Variância, tais como a resultados estáveis e o fornecimento de soluções intuitivas.

Observamos ainda, no Capítulo 4, que as visões do investidor em relação ao retorno dos ativos desempenham um importante papel nos resultados do Modelo de Black-Litterman. Dessa forma, um dos desafios enfrentados ao aplicá-lo é a forma de determinação das visões incorporadas. Tendo em vista a subjetividade e os diferentes graus de confiança da matriz de visões, surgem propostas quanto à escolha dessas visões, entre as quais inclui-se as previsões geradas por modelos de séries temporais.

Neste capítulo, aplicaremos os mesmos dados utilizados no Capítulo 4 ao Modelo de Black-Litterman. Entretanto, no presente capítulo, calibraremos para cada série o modelo GARCH(1,1) e, a partir das previsões de retornos e variâncias do modelo gerado, serão determinadas as visões absolutas dos investidores sobre cada ativo. Nosso objetivo é verificar o desempenho da carteira ótima constituída a partir desses parâmetros e concluir se a utilização do modelo GARCH se mostra adequado à carteira em estudo.

A escolha do GARCH(1,1) se deve basicamente ao fato de ser o modelo mais utilizado na prática para previsão da volatilidade de séries de retornos financeiros. Sua popularidade se deve principalmente à simplicidade e à relativa facilidade de estimação.

O capítulo foi dividido em apenas duas seções. Na primeira, realizamos o ajuste do modelo para cada série selecionada. Na segunda seção, aplicaremos as previsões dos modelos calibrados ao Modelo de Black-Litterman e apresentaremos os resultados encontrados. Cumpre lembrar que todos os resultados deste capítulo foram gerados utilizando os *softwares R e MATLAB*.

### 5.1 Identificação do Modelo

Conforme tratado no Capítulo 3, a identificação do modelo GARCH pode ser feita em três etapas, descritas a seguir:

1. Verificar se as séries são estacionárias. Caso não sejam, obter as diferenças das séries até que elas se tornem estacionárias.
2. Identificar as ordens do processo resultante do Item 1 através da análise das autocorrelações (FAC) e autocorrelações parciais (FACP) estimadas a partir da amostra. Analisar também as autocorrelações e autocorrelações parciais dos quadrados dos retornos, de forma a verificar indícios da presença de heterocedasticidade condicional. A presença de autocorrelações significativas entre os retornos ao quadrado indicam a possibilidade de *clusters* de volatilidade.
3. Calibrar o modelo ARMA + GARCH(1,1), escolhendo a ordem por meio de um ou mais critério de informação e seleção de modelo.

O Item 2 acima permite a identificação da ordem do processo AR(p), MA(q) ou ARMA(p,q) de forma que:

- um processo AR(p) tenha FAC que decaia de acordo com exponenciais e/ou senóides amortecidas, infinitas, e FACP que  $(\phi)_{kk} \neq 0$ , para  $k \leq p$  e  $(\phi)_{kk} = 0$ , para  $k > p$ , sendo  $(\phi)_{kk}$  o valor da função de autocorrelação parcial;
- um processo MA(q) tenha FAC finita, no sentido que ela apresente um corte após o *lag*  $q$  e FACP que se comporta de maneira similar à FAC de um processo AR(p);
- um processo ARMA(p,q) tenha FAC infinita em extensão, a qual decai de acordo com exponenciais e/ou senóides amortecidas após o *lag*  $q - p$  e FACP que se comporte como a FACP de um modelo MA puro.

Dada a complexidade da FAC e FACP de processos ARMA, recomenda-se ajustar modelos de baixa ordem e compará-los utilizando o Critério de Informação de Akaike [2].

### 5.1.1 Teste de Estacionariedade das Séries

Uma das formas de se verificar a existência de estacionariedade fraca é testando se as variáveis escolhidas são invariantes de mercado.

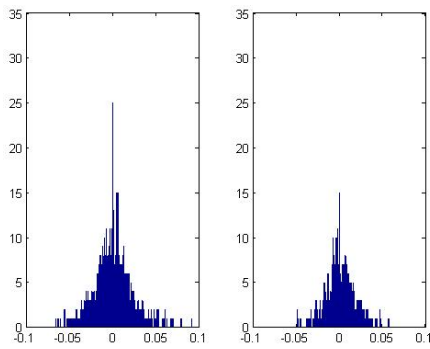
Definem-se como invariantes de mercado variáveis aleatórias que podem ser modeladas como independentes e identicamente distribuídas.

**Definição 11.** *Considerando um tempo de partida  $t$  e um intervalo de tempo igual a  $\tau$ , uma variável aleatória  $X_t$  é dita invariante de mercado no ponto de partida  $t$  e no intervalo de estimação  $\tau$  se ela é independente e identicamente distribuída e se uma realização  $x_t$  de  $X_t$  é disponibilizada no tempo  $t$ .*

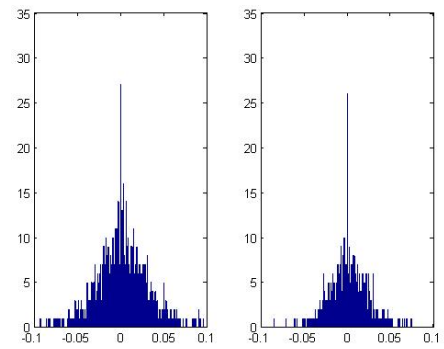
A seguir, verificaremos se os retornos obtidos para cada ativo podem ser considerados invariantes de mercado. De forma detectar a existência de invariância em  $R_t$ , utilizaremos dois testes qualitativos propostos por Meucci [30].

O primeiro teste consiste em dividir cada série de log-retornos em duas partes de mesmo tamanho e plotar o histograma de cada parte. A semelhança entre o formato dos dois histogramas indicará se a série é invariante ou não.

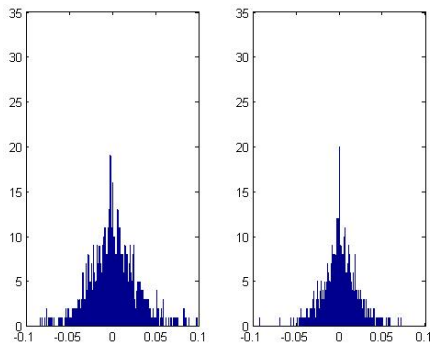
Os histogramas das séries divididas são apresentados nas Figuras 5.1 a 5.15.



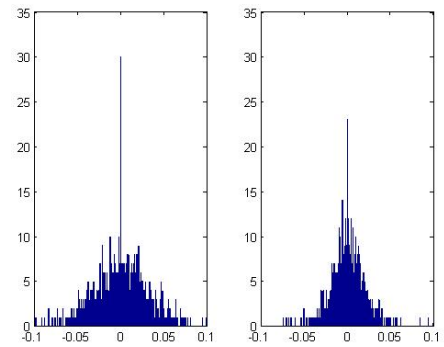
**Figura 5.1:** Séries do Ativo ABEV3



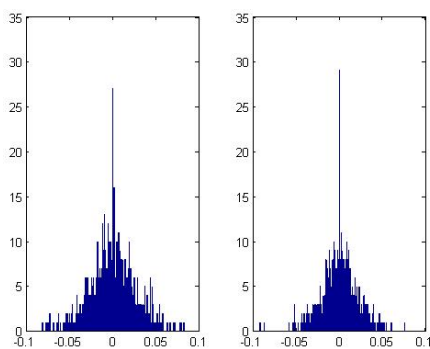
**Figura 5.2:** Séries do Ativo BBAS3



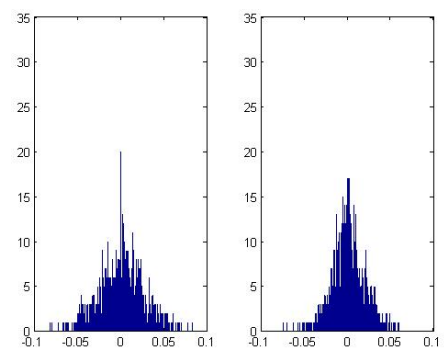
**Figura 5.3:** Séries do Ativo BBDC4



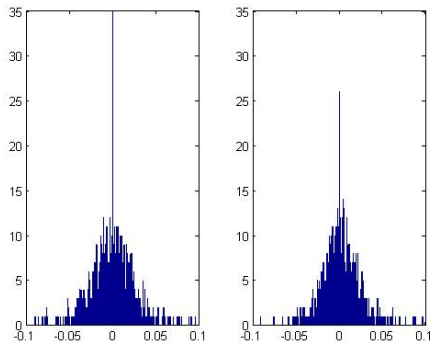
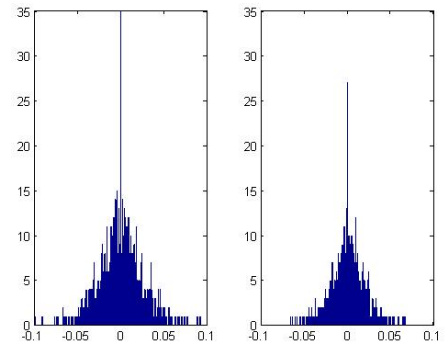
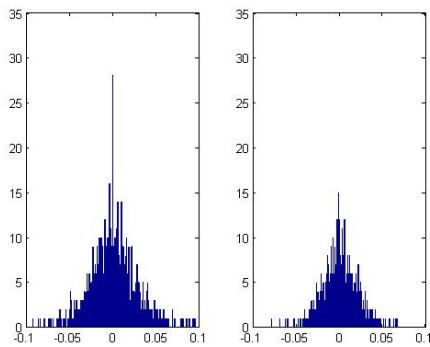
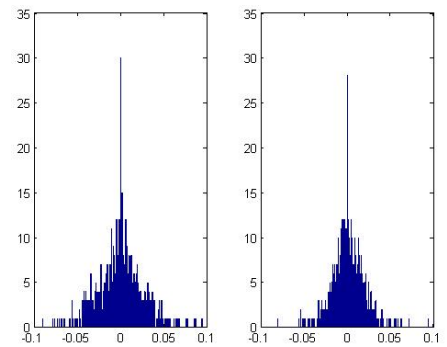
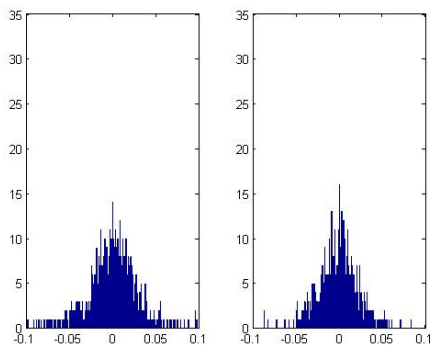
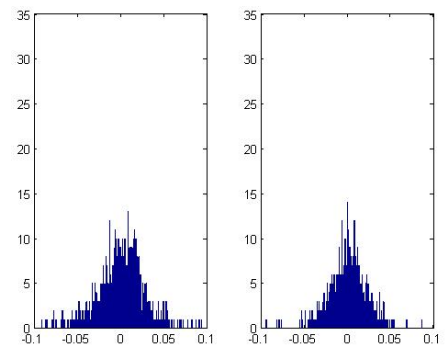
**Figura 5.4:** Séries do Ativo BRFS3

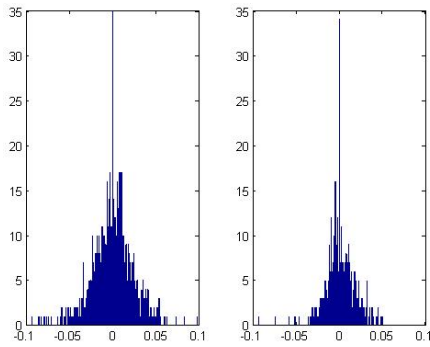


**Figura 5.5:** Séries do Ativo CCRO3

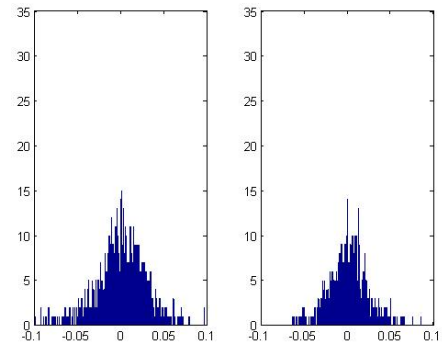


**Figura 5.6:** Séries do Ativo CMIG4

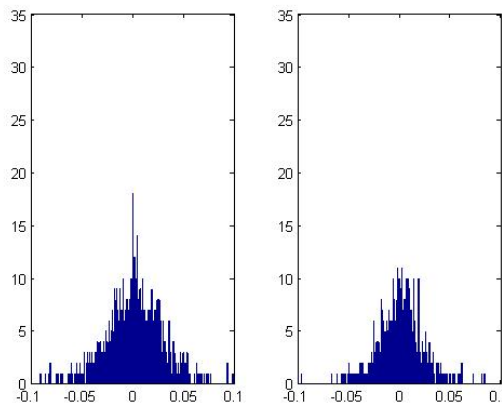
**Figura 5.7:** Séries do Ativo EMBR3**Figura 5.8:** Séries do Ativo ITSA4**Figura 5.9:** Séries do Ativo ITUB4**Figura 5.10:** Séries do Ativo PCAR4**Figura 5.11:** Séries do Ativo PETR3**Figura 5.12:** Séries do Ativo PETR4



**Figura 5.13:** Séries do Ativo UGPA3



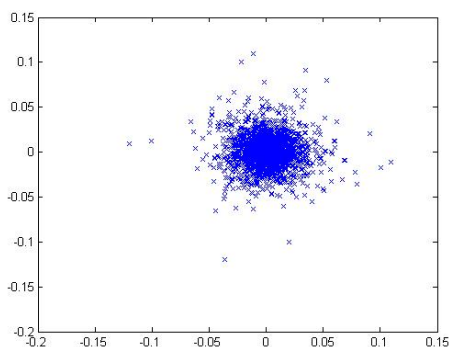
**Figura 5.14:** Séries do Ativo VALE3



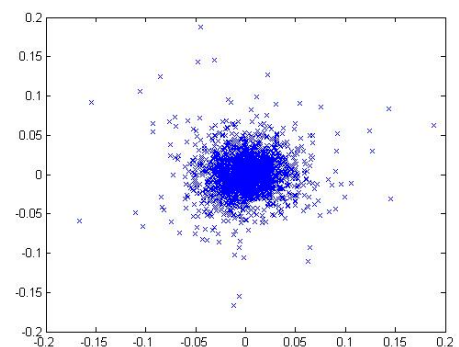
**Figura 5.15:** Séries do Ativo VALE5

Em cada caso, nota-se que os histogramas não são idênticos, o que é esperado tendo em vista que cada parte de cada ativo são diferentes entre si. Mas existe semelhanças no formato dos gráficos do mesmo ativo, o que indica a possibilidade de se tratarem de invariantes de mercado.

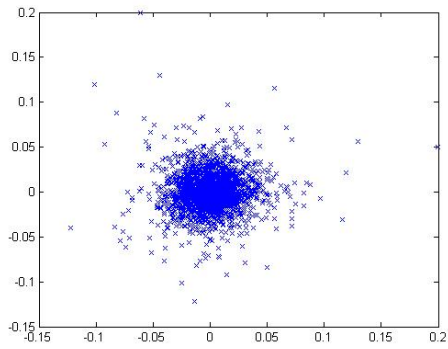
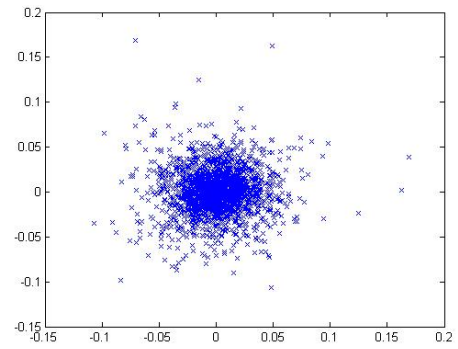
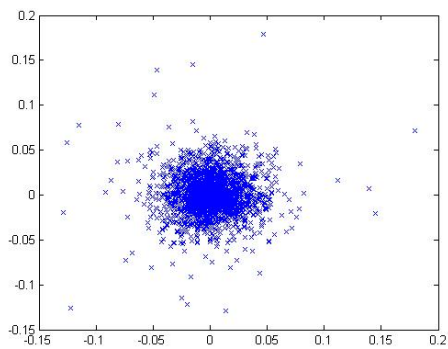
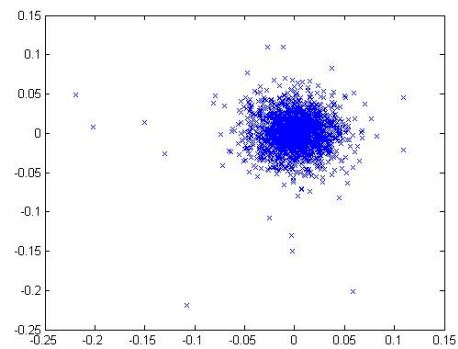
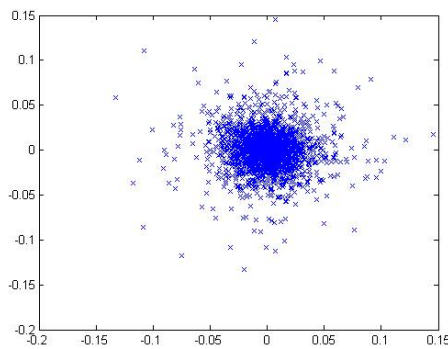
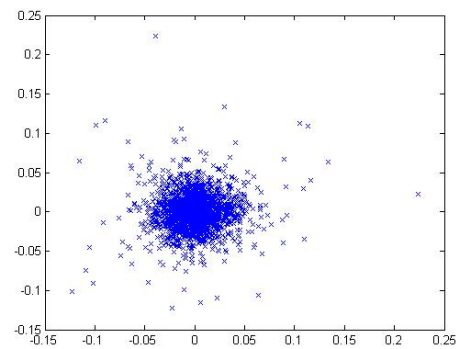
O segundo teste consiste em avaliar o gráfico de dispersão da série (*scatter-plot*) em função da defasagem. Espera-se que, em dados invariantes, o gráfico apresente um formato de nuvem arredondada e simétrica. Esse teste também foi feito para as séries em análise, seguem abaixo os resultados:

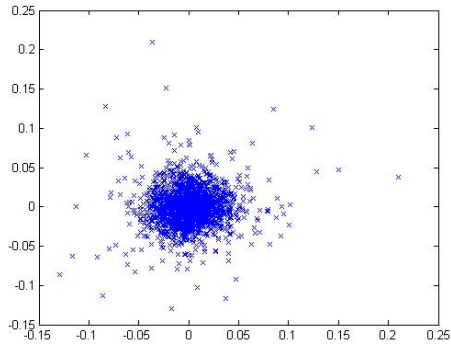


**Figura 5.16:** Gráfico de Dispersão ABEV3

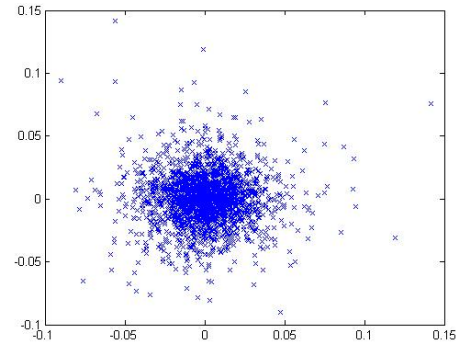


**Figura 5.17:** Gráfico de Dispersão BBAS3

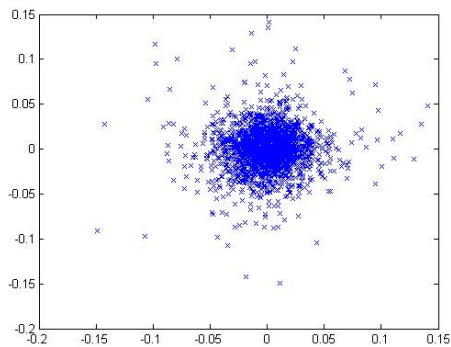
**Figura 5.18:** Gráfico de Dispersão BBDC4**Figura 5.19:** Gráfico de Dispersão BRFS3**Figura 5.20:** Gráfico de Dispersão CCRO3**Figura 5.21:** Gráfico de Dispersão CMIG4**Figura 5.22:** Gráfico de Dispersão EMBR3**Figura 5.23:** Gráfico de Dispersão ITSA4



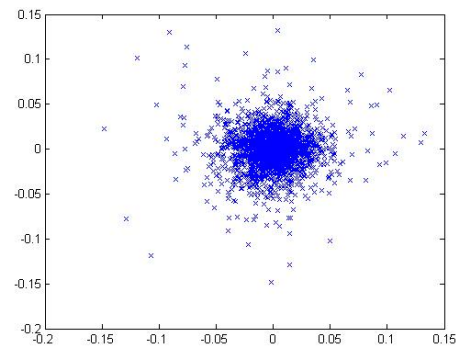
**Figura 5.24:** Gráfico de Dispersão ITUB4



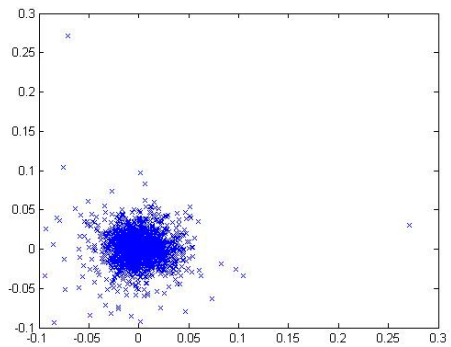
**Figura 5.25:** Gráfico de Dispersão PCAR4



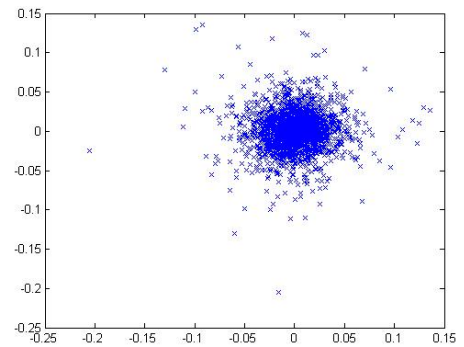
**Figura 5.26:** Gráfico de Dispersão PETR3



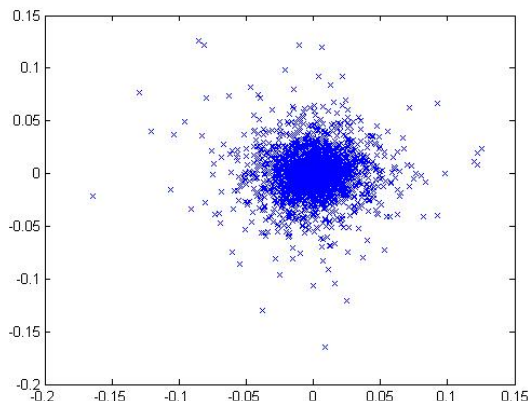
**Figura 5.27:** Gráfico de Dispersão PETR4



**Figura 5.28:** Gráfico de Dispersão UGPA3



**Figura 5.29:** Gráfico de Dispersão VALE3



**Figura 5.30:** Gráfico de Dispersão VALE5

Verifica-se que as (*scatter plots*) de cada série apresentam formato de nuvem, conforme determina o teste. Dessa forma, considerando os dois testes realizados, concluímos que as variáveis podem ser consideradas invariantes de mercado.

Complementarmente, testaremos a estacionariedade das séries usando o Teste de Dickey-Fuller Aumentado (ADF) e o teste Kwiatkowski–Phillips–Schmidt–Shin (KPSS) (veja [24] para mais detalhes). No primeiro, testaremos a hipótese nula de existência de raiz unitária nas séries contra a hipótese alternativa de inexistência de raiz unitária. Já no teste KPSS as hipóteses se invertem, ou seja, a hipótese nula é de que a série é estacionária.

Os testes foram realizados utilizando pacote "tseries" do R. O número de *lags* considerados no teste é o número *default* proposto pelo pacote, ou seja,  $lag = \text{truncar}(N - 1)^{\frac{1}{3}}$ . O valor crítico da estatística teste para rejeitarmos a hipótese nula a um nível de 95% de significância, considerando uma amostra superior a 500, é de 2.86, no teste ADF, e 0.463, no KPSS. A Tabela 5.1 apresenta o valor das estatísticas de cada teste para cada uma das séries de ativos.

Comparando os valores obtidos com os testes e os valores críticos, rejeitamos a hipótese nula de existência de raiz unitária do teste ADF e não rejeitamos a hipótese de estacionariedade do teste KPSS a um nível de significância de 95%. Concluímos, a partir dos testes realizados, que as séries são estacionárias.



Ativo	ADF	KPSS
ABEV3	-14.06	0.055
BBAS3	-13.29	0.175
BBDC4	-12.86	0.337
BRFS3	-14.51	0.034
CCRO3	-13.76	0.133
CMIG4	-13.51	0.110
EMBR3	-13.05	0.111
ITSA4	-14.11	0.251
ITUB4	-14.03	0.170
PCAR4	-13.27	0.091
PETR3	-13.51	0.395
PETR4	-13.42	0.324
UGPA3	-14.28	0.106
VALE3	-13.72	0.270
VALE5	-13.59	0.294

**Tabela 5.1:** Estatísticas dos Testes de Estacionariedade ADF e KPSS

### 5.1.2 FAC e FACP das Séries de Retornos e Ajuste do Modelo

Neste capítulo, aplicaremos o modelo de Black-Litterman utilizando novamente as quatro amostra de dados, obtidas pelas retiradas sucessivas dos 200 primeiros dados da amostra inicial completa. No Apêndice A, apresentamos as Funções de Autocorrelação (FAC) e Funções de Autocorrelação Parcial (FACP) de cada uma das séries de retornos, com cada amostra utilizada. Nota-se que, em todos os casos, existe correlação entre os retornos em diferentes *lags*, indicando que se pode aplicar o modelo ARMA. Analisamos as FAC e FACP dos retornos ao quadrado, observando dependência significativa em diferentes *lags*, entretanto sem um padrão definido.

Dessa forma, será preciso ajustar cada série no modelo ARMA( $p,q$ ). Utilizaremos os valores de  $p$  e  $q$  entre 0 e 3, para que possamos obter um número reduzido de parâmetros. A escolha do modelo será feita utilizando o Critério de Informação de Akaike (AIC) [2].

Adicionalmente, verificamos a existência de heterocedasticidade condicional. Para isso, aplicamos o teste de Ljung-Box novamente, mas desta vez às séries dos retornos ao quadrado. Dessa forma, testamos a hipótese nula de que estas séries são independentemente distribuídas contra a hipótese de correlação entre os quadrados dos retornos. Em todos os casos, rejeitamos a hipótese nula ao nível de significância de 95%.

De fato, ao plotarmos as FAC e FACP dos retornos ao quadrado, apresentadas no Apêndice A deste trabalho, observamos dependência significativa em diferentes *lags*, entretanto sem um padrão definido. Esse é um indício de que mudanças positivas nos retornos são geralmente seguidas por mudanças positivas, enquanto variações negativas são seguidas por variações negativas. Ou seja, observa-se a presença dos *clusters* de volatilidades nos retornos dos ativos estudados, sendo adequado neste caso o ajuste do modelo GARCH(1,1).

Lembramos que o modelo GARCH(1,1) é ajustado às séries de resíduos estimados e não às séries de retornos, tendo em vista que a estas foi ajustado o modelo ARMA.

Devemos destacar ainda que, entre os ativos escolhidos, seis são altamente correlacionados, dois a dois. São eles: ITSA4 e ITUB4, que apresentaram um coeficiente de correlação 98,4%, PETR3 e PETR4, que apresentaram um coeficiente de correlação dos preços de 98,8%, e VALE3 e VALE5, cujo coeficiente de correlação dos preços é 98,7%. É importante destacar a importância de se utilizar todos os ativos, de forma a utilizar a base de dados de percentual significativo do IBOVESPA. Apesar da autocorrelação histórica ser significativa, optou-se por calibrar o modelo univariado para todos os ativos.

A Figura 5.31 apresenta os valores e as estatísticas dos coeficientes estimados nos modelos com a Amostra 1. O processo semelhante foi realizado utilizando como dados as amostras 2, 3 e 4. Os processos foram ajustados no *software* R com o pacote *rugarch*.

## 5.2 Visões GARCH aplicadas ao Modelo de Black-Litterman

A partir dos parâmetros calibrados na seção anterior, foram realizadas as previsões dos retornos e das variâncias para o período referente a 03/09/2013 a 30/12/2013. Para cada ativo, foi gerada uma série de 81 retornos previstos e 81 desvios-padrão. Essas previsões foram utilizadas, respectivamente, como *proxy* do vetor de visões  $q$  e do vetor de variâncias das visões  $\Omega$  do Modelo de Black-Litterman. As previsões foram aplicadas utilizando as quatro amostras de dados.

Diferentemente da abordagem dada no Capítulo 4, em que as visões eram fixas e a carteira ótima não se alterava no período analisado, neste exemplo, o vetor de visões e matriz de variância são atualizados diariamente com base nas previsões obtidas e, conseqüentemente, a cada dia o modelo de Black-Litterman fornece pesos da carteira ótima distintos, com base nas visões incorporadas.

Outra diferença em relação ao exemplo do Capítulo 4 é a comparação do desempenho da carteira. No presente capítulo, o objetivo não é comparar o desempenho da carteira gerada pelo Modelo de Média-Variância com o Modelo de Black-Litterman. A questão a ser discutida agora é se a utilização de visões GARCH agregam um melhor desempenho ao Modelo de Black-Litterman considerando os ativos selecionados. Para isso, comparamos os Índices de Sharpe das carteiras ótimas obtidas sem as visões, considerando a distribuição *a priori* dos retornos, com as carteiras geradas após a incorporação das visões ARMA-GARCH, considerando a distribuição *a posteriori*. Foram aplicados quatro níveis de confiança às visões, representado pelo fator  $c$ .

A Figura 5.32 apresenta os Índices de Sharpe utilizando os quatro níveis de confiança.

Pelos resultados obtidos, chegamos às seguintes conclusões sobre a incorporação de visões GARCH ao modelo de Black-Litterman:

- Avaliando apenas os retornos das carteiras, observa-se que os resultados obtidos com as amostras 1 e 2 após a incorporação das visões foram superiores aos resultados da carteira de mercado e das carteiras sem as visões, independentemente do grau de confiança  $c$ .

Parâmetro	ABEV3			BBAS3			BBDC4		
	Estimativa	Erro-Padrão	Estatística t	Estimativa	Erro-Padrão	Estatística t	Estimativa	Erro-Padrão	Estatística t
mu	0.001243	0.000305	4.0736	0.000836	0.000405	2.0637	0.000774	0.000397	1.9514
AR(1)	1.609004	0.067306	23.9059	1.144133	0.143998	7.9455	-	-	-
AR(2)	-0.899495	0.053655	-16.7645	-0.565295	0.138554	-4.08	-	-	-
MA(1)	-1.636653	0.06682	-24.4934	-1.092346	0.153778	-7.1034	-	-	-
MA(2)	0.908455	0.057389	15.8297	0.469852	0.149334	3.1463	-	-	-
omega	0.000007	0.000001	6.5712	0.000017	0.000005	3.2479	0.000011	0.000001	10.6718
ARCH(1)	0.064413	0.006368	10.1154	0.093494	0.013949	6.7024	0.069976	0.004963	14.0986
GARCH(1)	0.910127	0.007813	116.4826	0.879593	0.014933	58.9018	0.904827	0.008217	110.1169

Parâmetro	BRFS3			CCRO3			CMIG4		
	Estimativa	Erro-Padrão	Estatística t	Estimativa	Erro-Padrão	Estatística t	Estimativa	Erro-Padrão	Estatística t
mu	0.001301	0.000434	2.9971	0.001068	0.000426	2.5082	0.000452	0.000271	1.668
AR(1)	-	-	-	-	-	-	0.862962	0.037116	23.2506
MA(1)	-	-	-	-	-	-	-0.908965	0.029344	-30.9757
omega	0.000005	0.000003	1.3062	0.000008	0.000002	3.6435	0.000025	0.000006	3.8472
ARCH(1)	0.053893	0.011538	4.671	0.054188	0.006875	7.8821	0.131258	0.018508	7.0918
GARCH(1)	0.939123	0.013902	67.5508	0.930822	0.008127	114.5371	0.82565	0.025141	32.8408

Parâmetro	EMBR3			ITSA4			ITUB4		
	Estimativa	Erro-Padrão	Estatística t	Estimativa	Erro-Padrão	Estatística t	Estimativa	Erro-Padrão	Estatística t
mu	0.000455	0.000441	1.0297	0.001035	0.000399	2.5939	0.000896	0.000407	2.2027
omega	0.000012	0.000001	17.3815	0.000009	0.000003	3.2884	0.000009	0.000002	4.3328
ARCH(1)	0.053381	0.003897	13.6996	0.072475	0.005229	13.8594	0.066522	0.005037	13.2073
GARCH(1)	0.923472	0.0062	148.9463	0.910234	0.00826	110.1938	0.915138	0.008028	113.9944

Parâmetro	PCAR4			PETR3			PETR4		
	Estimativa	Erro-Padrão	Estatística t	Estimativa	Erro-Padrão	Estatística t	Estimativa	Erro-Padrão	Estatística t
mu	0.000918	0.000411	2.2329	0.000391	0.000435	0.8993	0.000428	0.000411	1.042
omega	0.00001	0.000001	18.2119	0.00001	0.000002	6.6754	0.000013	0.000002	8.7173
ARCH(1)	0.042484	0.003129	13.5754	0.062488	0.004653	13.4305	0.081	0.005246	15.4393
GARCH(1)	0.934277	0.005216	179.1166	0.919354	0.007568	121.4751	0.89202	0.009113	97.8794

Parâmetro	UGPA3			VALE3			VALE5		
	Estimativa	Erro-Padrão	Estatística t	Estimativa	Erro-Padrão	Estatística t	Estimativa	Erro-Padrão	Estatística t
mu	0.001014	0.000241	4.1999	0.000854	0.000444	1.9227	0.001039	0.00042	2.4718
AR(1)	0.852476	0.053027	16.0763	-	-	-	-	-	-
MA(1)	-0.899511	0.043512	-20.6726	-	-	-	-	-	-
omega	0.000021	0.000007	3.0654	0.000009	0.000002	3.9146	0.000011	0.000002	6.337
ARCH(1)	0.113498	0.020476	5.543	0.061047	0.004784	12.762	0.074904	0.005726	13.0824
GARCH(1)	0.827477	0.036007	22.9812	0.922988	0.008082	114.1986	0.904386	0.009022	100.2383

Figura 5.31: Calibração dos Processos ARMA(p,q)-GARCH(1,1)

- Os resultados com as amostras 3 e 4 com as visões foram superiores do ponto de vista do retorno apenas considerando os níveis de confiança mais baixos. Para  $c$  igual a 100, 200 e 400, as carteiras ótimas apresentaram retornos mais baixo. Por outro lado, para os níveis de confiança mais altos, as volatilidades das carteiras com as visões, medida pelo desvio-padrão, foram inferiores.

		Sem visões	c=1	c=20	c=100	c=200	c=400
20-out-2004 a 02/set-2013	Retorno Esperado	0.0202%	0.0226%	0.0228%	0.0234%	0.0239%	0.0243%
	Desvio-Padrão	1.036%	1.118%	1.074%	1.004%	0.978%	0.960%
	Índice de Sharpe	0.0195	0.0203	0.0212	0.0233	0.0244	0.0253
10-ago-2005 a 02/set-2013	Retorno Esperado	0.0204%	0.0227%	0.0239%	0.0235%	0.0218%	0.0216%
	Desvio-Padrão	1.038%	1.117%	1.072%	1.006%	0.992%	0.993%
	Índice de Sharpe	0.0197	0.0204	0.0223	0.0234	0.0220	0.0218
01-jun-2006 a 02/set-2013	Retorno Esperado	0.0207%	0.0226%	0.0215%	0.0200%	0.0196%	0.0194%
	Desvio-Padrão	1.041%	1.117%	1.064%	0.988%	0.964%	0.949%
	Índice de Sharpe	0.0199	0.0202	0.0202	0.0203	0.0203	0.0204
26-mar-2007 a 02/set-2013	Retorno Esperado	0.0208%	0.0226%	0.0214%	0.0199%	0.0195%	0.0193%
	Desvio-Padrão	1.042%	1.120%	1.060%	0.980%	0.960%	0.950%
	Índice de Sharpe	0.0200	0.0202	0.0202	0.0203	0.0204	0.0204
Carteira de Mercado	Retorno Esperado	0.0226%					
	Desvio-Padrão	1.121%					
	Índice de Sharpe	0.0202					

**Figura 5.32:** Retorno Esperado, Desvio-Padrão e Índice de Sharpe de Carteiras geradas por visões GARCH

- De maneira geral, analisando o Índice de Sharpe como medida de performance, verificou-se que a incorporação das visões GARCH foi positiva. Isso porque, em todos os casos, a incorporação das visões geraram carteiras com Índices de Sharpe superiores quando comparados aos índices das carteiras sem visões e com o índice da carteira de mercado.

Vimos no Capítulo 4 que a escolha de visões confiáveis e próximas à realidade fornece, naturalmente, um melhor desempenho à carteira gerada por Black-Litterman. A ideia de usar o modelo GARCH é propor uma metodologia para escolha das visões do modelo de Black-Litterman.

Dessa forma, não se pode afirmar que a incorporação das visões GARCH sempre fornecerão carteiras de desempenho superior, uma vez que sua implementação depende de uma série de fatores tais como: a escolha do melhor modelo de séries temporais para determinado conjunto de dados; as hipóteses assumidas sobre as distribuições dos retornos; as características intrínsecas do mercado analisado, que pode sofrer choques não capturados nos modelos disponíveis na literatura.

Todavia, conclui-se que, utilizando os ativos escolhidos e calibrando o GARCH(1,1) às amostras de dados, observa-se que a incorporação das visões geraram carteiras de melhor desempenho do ponto de vista da razão retorno e risco.

# Capítulo 6

## Considerações Finais

O Modelo de Black-Litterman foi proposto como uma alternativa ao modelo de Markowitz no que se refere ao processo de escolha de carteiras ótimas de investimentos. Seu objetivo é corrigir problemas identificados no modelo tradicional de média-variância, tais como resultados concentrados em um pequeno número de ativos, carteiras pouco intuitivas e alta sensibilidade aos dados de entrada. Para isso, o modelo propõe um método em que o investidor parte de uma carteira de equilíbrio de longo prazo e incorpora suas visões de curto prazo, gerando uma nova carteira intuitiva e diversificada.

Este trabalho discute duas questões relevantes sobre o modelo de Black-Litterman. A primeira se refere ao desempenho das carteiras obtidas pelo modelo BL em comparação ao modelo de Média-Variância, considerando os seguintes aspectos: sensibilidade dos resultados, efetividade do ponto de vista intuitivo e desempenho das carteiras por um período analisado. A segunda questão tratada neste trabalho é relativa às possibilidades de se modelar as visões dos investidores para a utilização da abordagem de Black-Litterman. Para analisarmos as duas questões, simulamos a aplicação do modelo às séries de retorno de 15 ativos do mercado de ações brasileiros.

Aplicamos aos dados o modelo de Média-Variância e o modelo de Black-Litterman com quatro amostras de dados. Comparando os resultados obtidos, verificamos que a abordagem de Black-Litterman de fato fornece resultados estáveis em relação aos dados de entrada, intuitivos e diversificados. Além disso, as carteiras geradas por Black-Litterman apresentaram, de maneira geral, um desempenho superior às carteiras geradas por Markowitz, considerando o mesmo conjunto de visões.

No Capítulo 4 e 5, discutimos a proposta de utilizar as previsões obtidas a partir da calibração do modelo ARMA-GARCH(1,1) como *proxy* da visão do investidor incorporada ao modelo Black-Litterman. A partir do mesmo conjunto de dados, calibramos o modelo GARCH para cada série de retorno e estimamos a previsão de retornos e variâncias para 81 dias. O teste também foi aplicado às quatro amostras.

As carteiras geradas com tais visões foram testadas com os retornos *outsample* de 81 dias, apresentando, no caso das quatro amostras de dados, desempenho superior aos das carteiras sem as visões. Dessa forma, encontramos indícios de que as previsões do modelo ARMA-GARCH(1,1) são satisfatórias quando se aplica o modelo de Black-Litterman, em linha com a

conclusão de Beach e Orlov [4].

A principal contribuição do presente trabalho é a utilização de dados do mercado de ativos brasileiro para avaliar o modelo de Black-Litterman. Verificou-se que são poucos os estudos que aplicam o modelo ao mercado financeiro do Brasil. Entre os trabalhos encontrados na literatura com essa abordagem, podemos destacar as contribuições de Yang e Lobarinhas [27]

Cumprir destacar que as conclusões aqui obtidas não devem se limitar ao escopo deste trabalho. Existe uma série de diferentes abordagens que podem ser aplicadas de forma a melhorar tais conclusões.

Para fins deste estudo, optamos por fazer uma série de simplificações. Um delas é considerar que os retornos dos ativos seguem uma distribuição normal. Tal suposição, apesar de vantajosa do ponto de vista prático, geralmente não está em linha com as observações dos ativos negociados nos mercados. Dessa forma, uma possível melhoria seria considerar outras distribuições de probabilidade dos retornos.

Outra simplificação, à qual cabe extensão, refere-se à escolha e ao método de calibragem do modelo ARMA-GARCH. No presente trabalho, o modelo foi calibrado para cada ativo examinado, um a um. Entretanto, tal abordagem muitas vezes pode ser trabalhosa do ponto de vista prático tendo em vista a quantidade de ativos disponíveis. Além disso, essa simplificação desconsidera a possibilidade de se modelar a matriz de covariância entre os ativos, o que é uma desvantagem tendo em vista que alguns ativos escolhidos são fortemente correlacionados.

Uma alternativa para futuras pesquisas seria a utilização de modelos GARCH multivariados. Tratam-se de extensões do modelo GARCH univariado capazes de estimar a matriz de covariância, incorporando agrupamentos de volatilidade e impactos assimétricos na matriz. Entre os modelos dessa natureza podemos citar o VECH, proposto por Bollerslev, Engle e Wooldridge [8], e o BEKK, sugerido por Engle e Kroner [15].

A desvantagem desses modelos multivariados é sua complexidade na implementação. Nesse sentido, outra alternativa é a utilização do GARCH Ortogonal, conforme abordado por Lobarinhas [27]. A ideia é poder gerar a matriz de covariâncias a partir de poucas volatilidades univariadas, sendo mais simples do ponto de vista computacional.

Entre outras sugestões de futuras pesquisas, sugere-se aplicar ao mercado brasileiro outros modelos de previsão de retornos e de volatilidade, como extensões do modelo GARCH, modelos de volatilidade estocástica ou modelos de previsão que incluem *jumps* de volatilidade. Propõe-se ainda testar diferentes abordagens para períodos mais longos de tempo ou ainda aplicar aos retornos do ano de 2014, quando o IBOVSPA sofreu forte reações a fatores externos.

## Apêndice A

### FAC e FACP dos Retornos e Quadrado dos Retornos

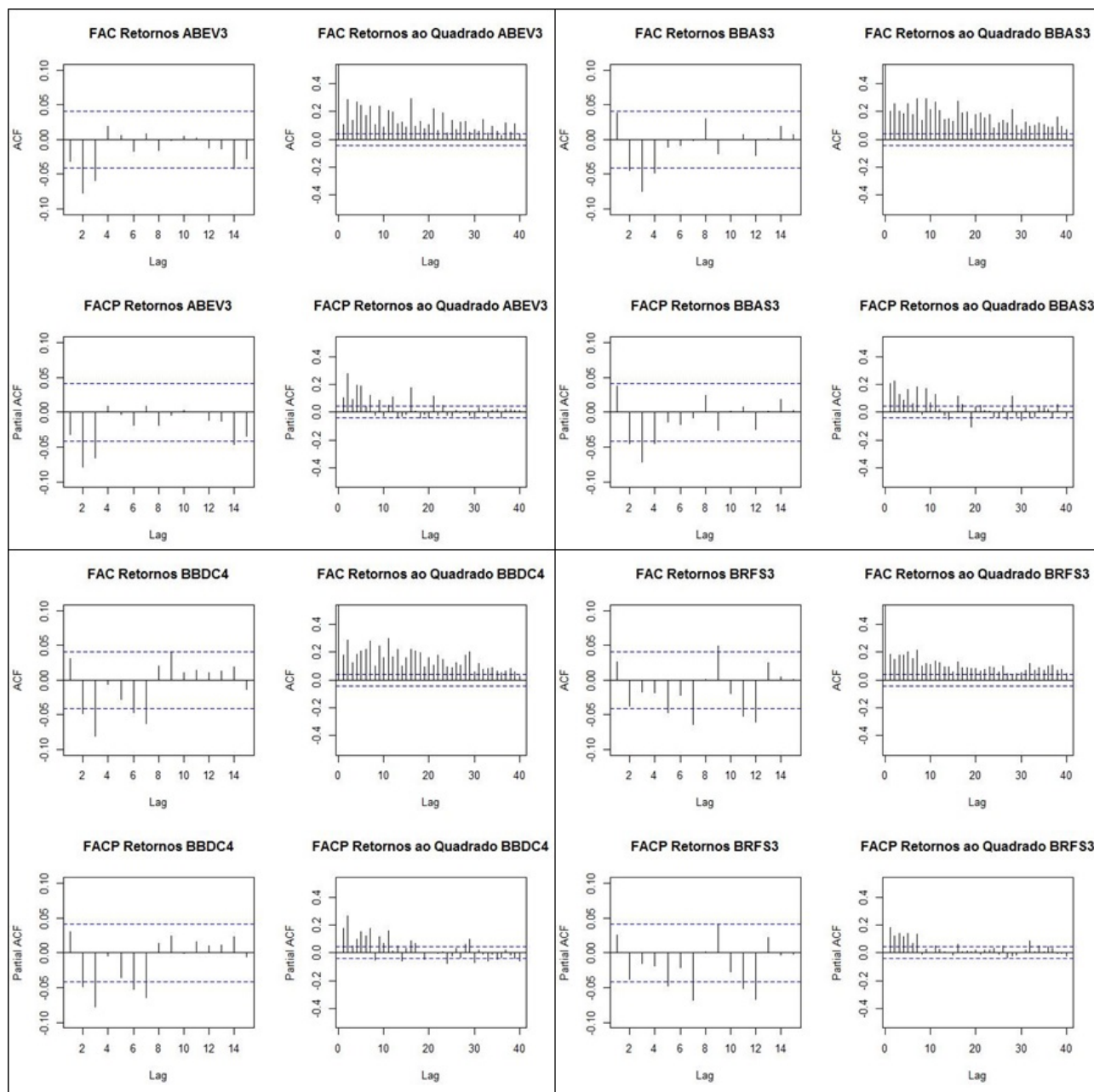


Figura A.1: Amostra 1: FAC e FACP ABEV3, BBAS3, BBDC4 e BRFS3



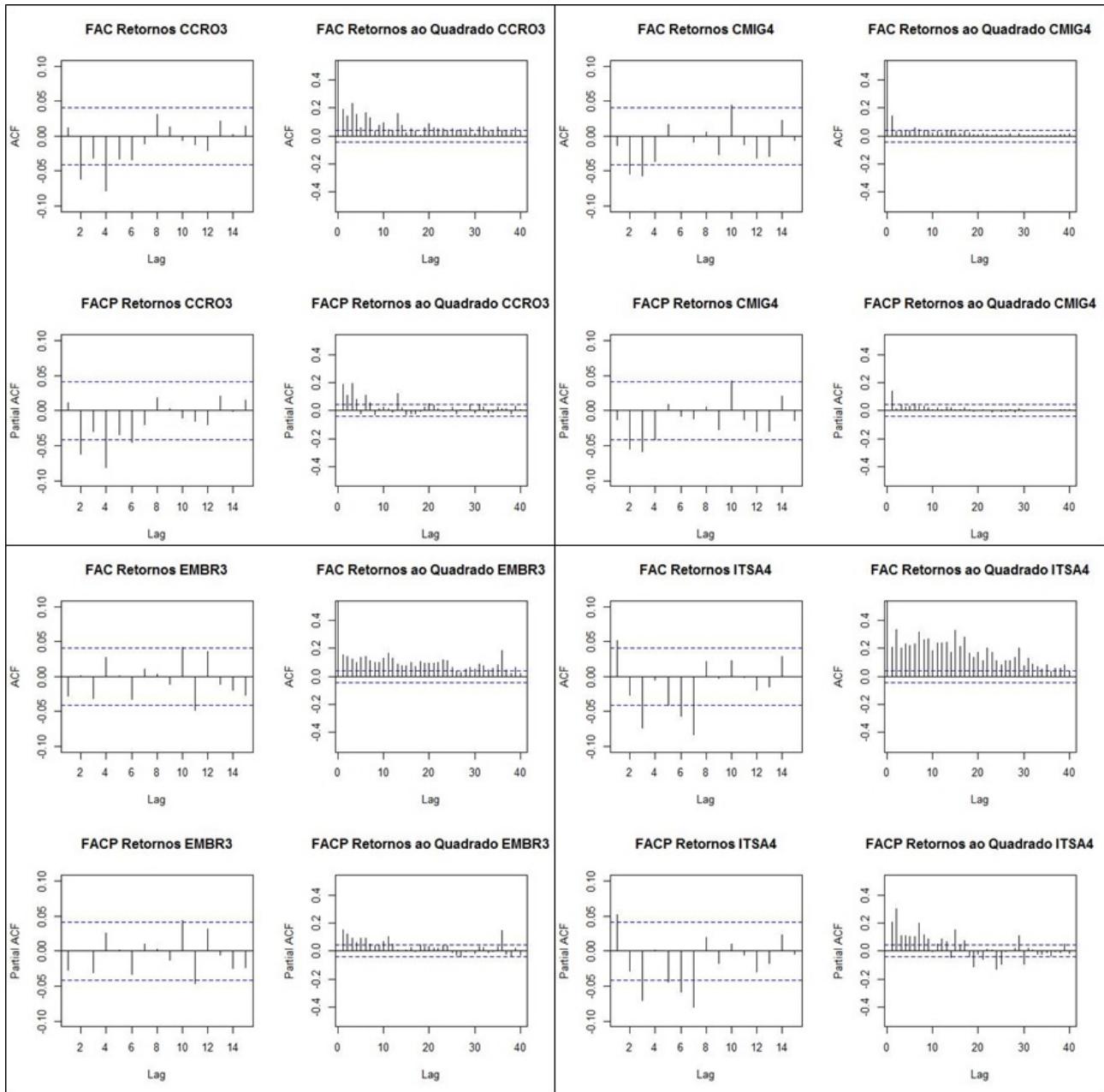


Figura A.2: Amostra 1: FAC e FACP CCRO3, CMIG4, EMBR3 e ITSA4

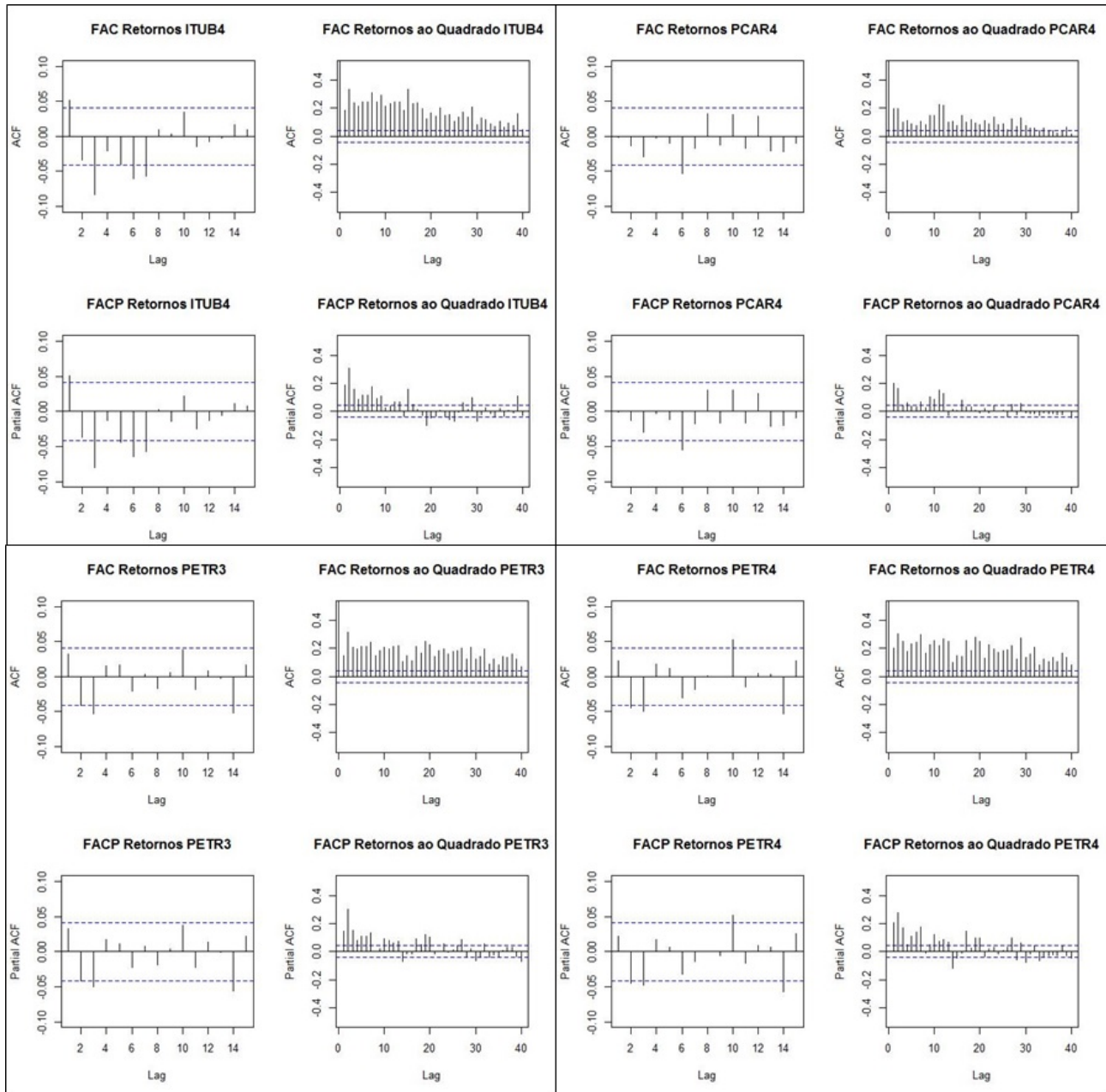


Figura A.3: Amostra 1: FAC e FACP ITUB4, PCAR4, PETR3, PETR4

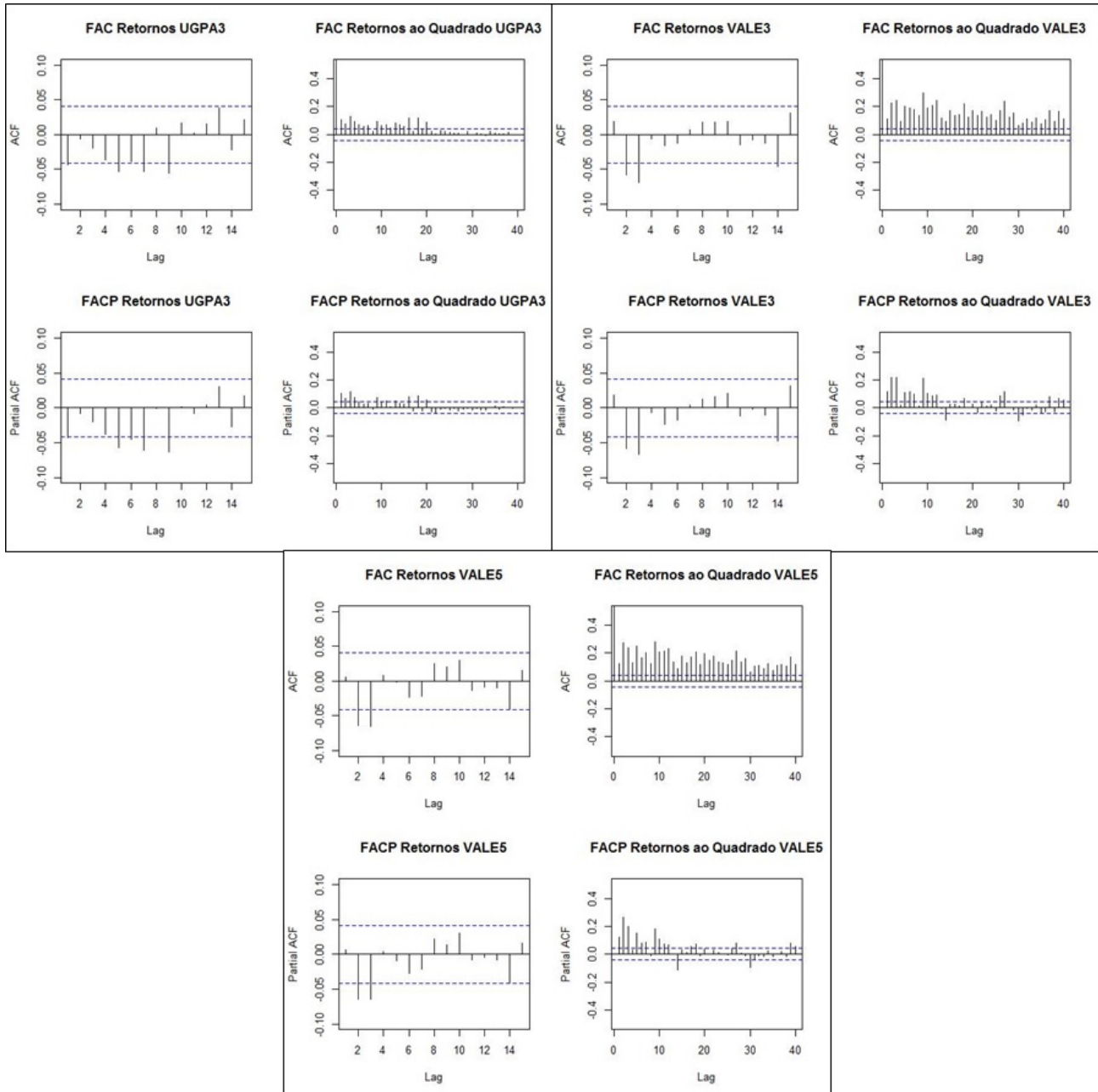


Figura A.4: Amostra 1: FAC e FACP UGPA3, VALE3 e VALE5

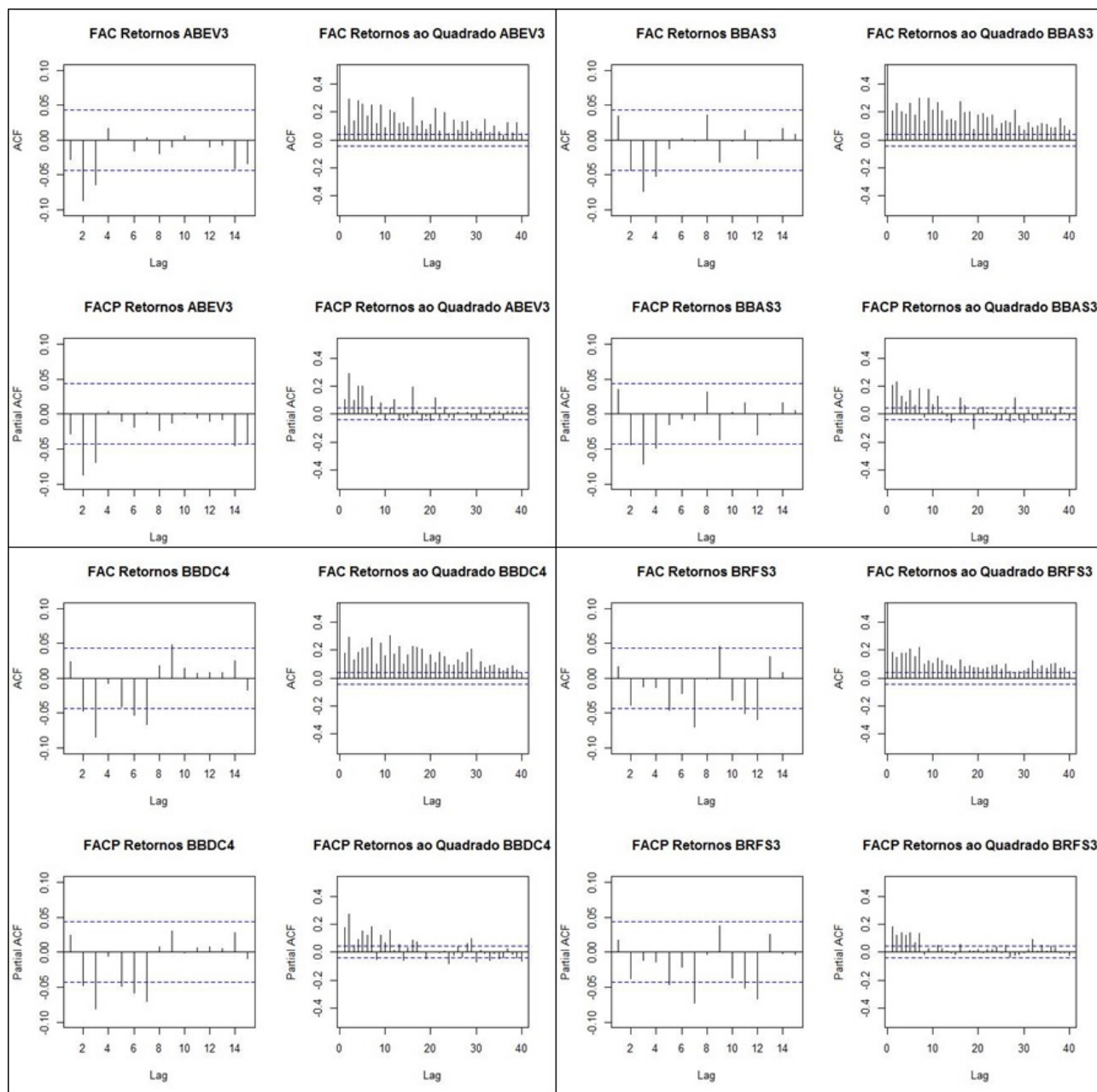


Figura A.5: Amostra 2: FAC e FACP ABEV3, BBAS3, BBDC4 e BRFS3

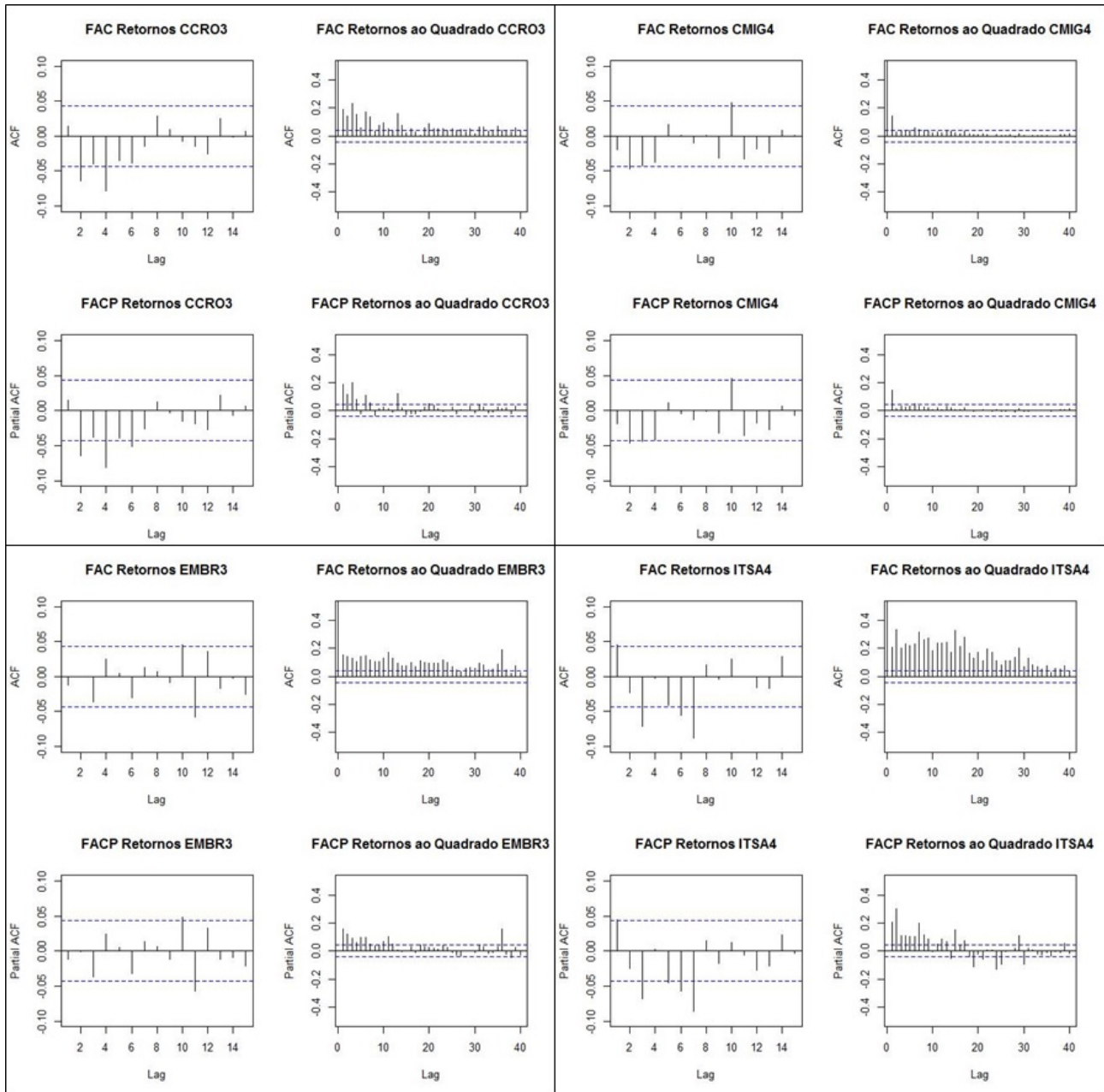


Figura A.6: Amostra 2: FAC e FACP CCRO3, CMIG4, EMBR3 e ITSA4

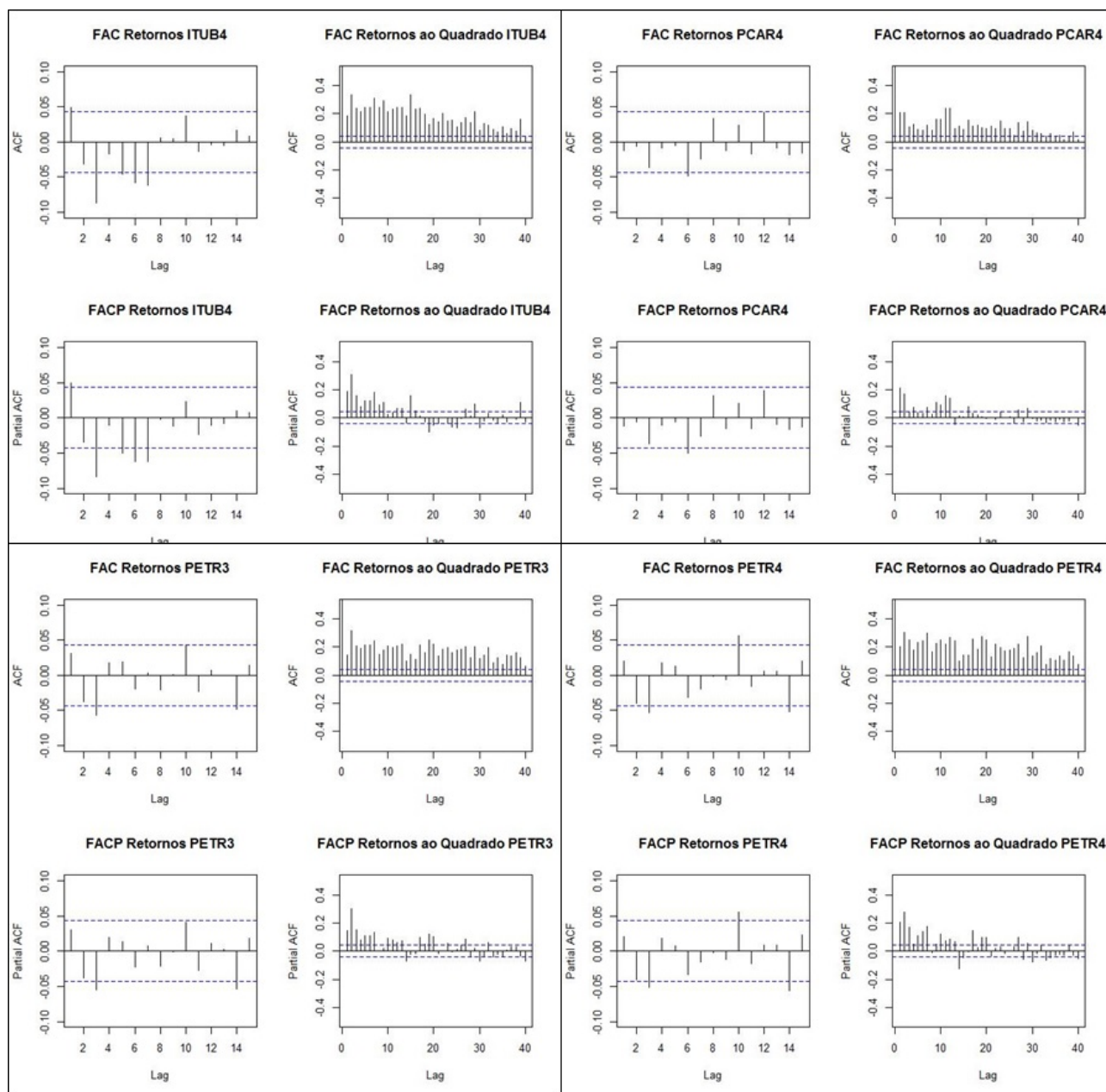


Figura A.7: Amostra 2: FAC e FACP ITUB4, PCAR4, PETR3, PETR4

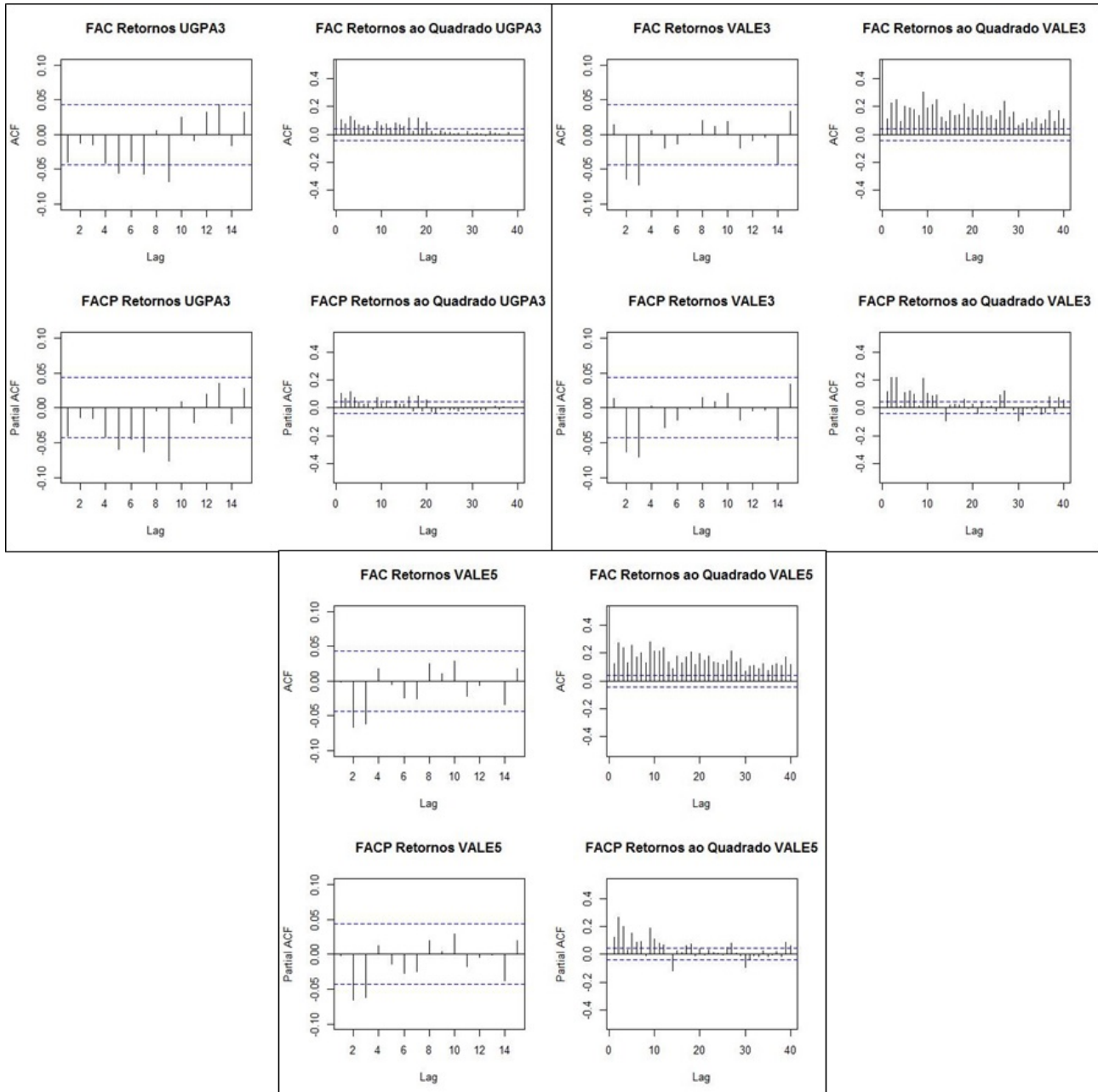


Figura A.8: Amostra 2: FAC e FACP UGPA3, VALE3 e VALE5

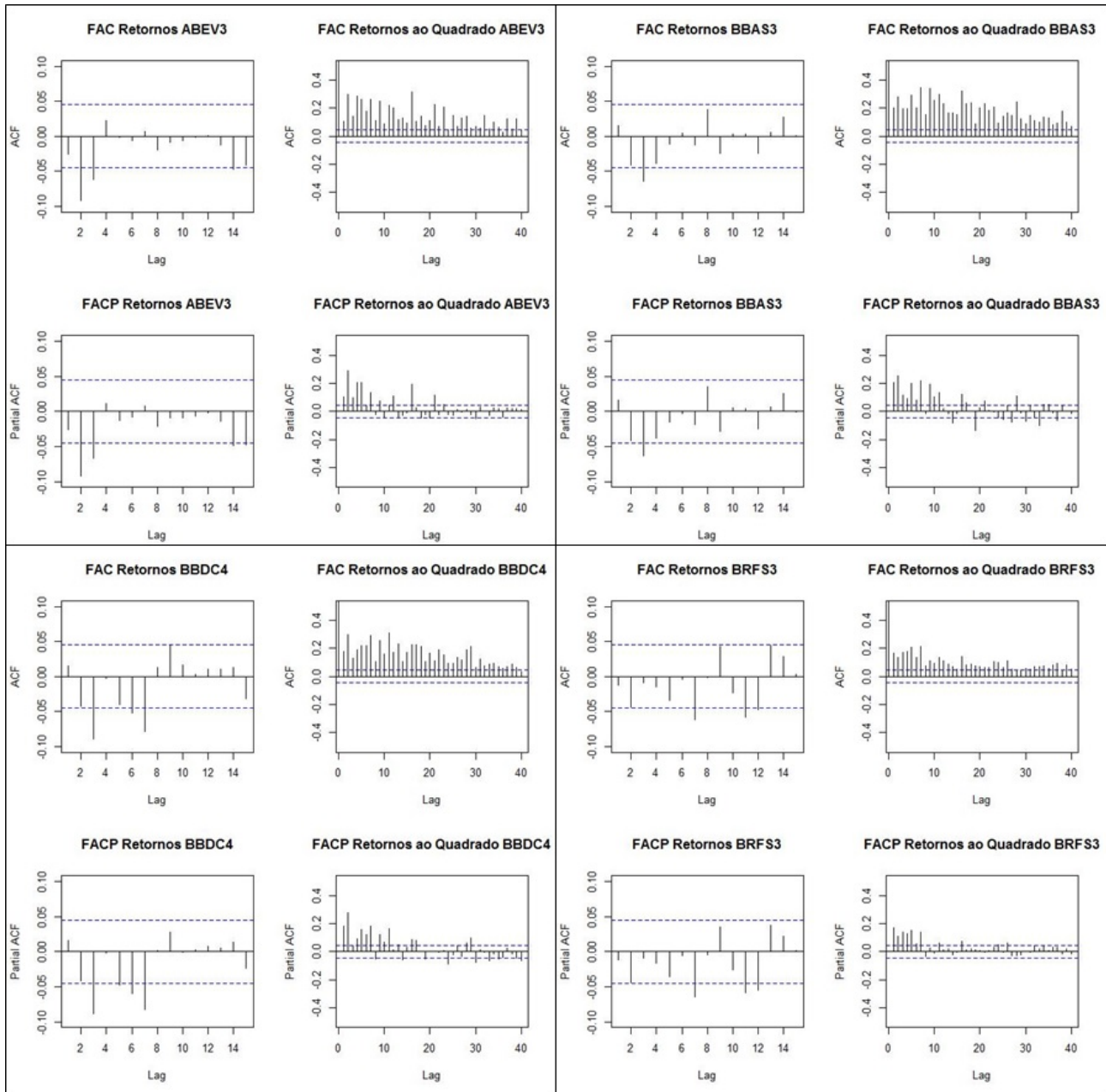


Figura A.9: Amostra 3: FAC e FACP ABEV3, BBAS3, BBDC4 e BRFS3



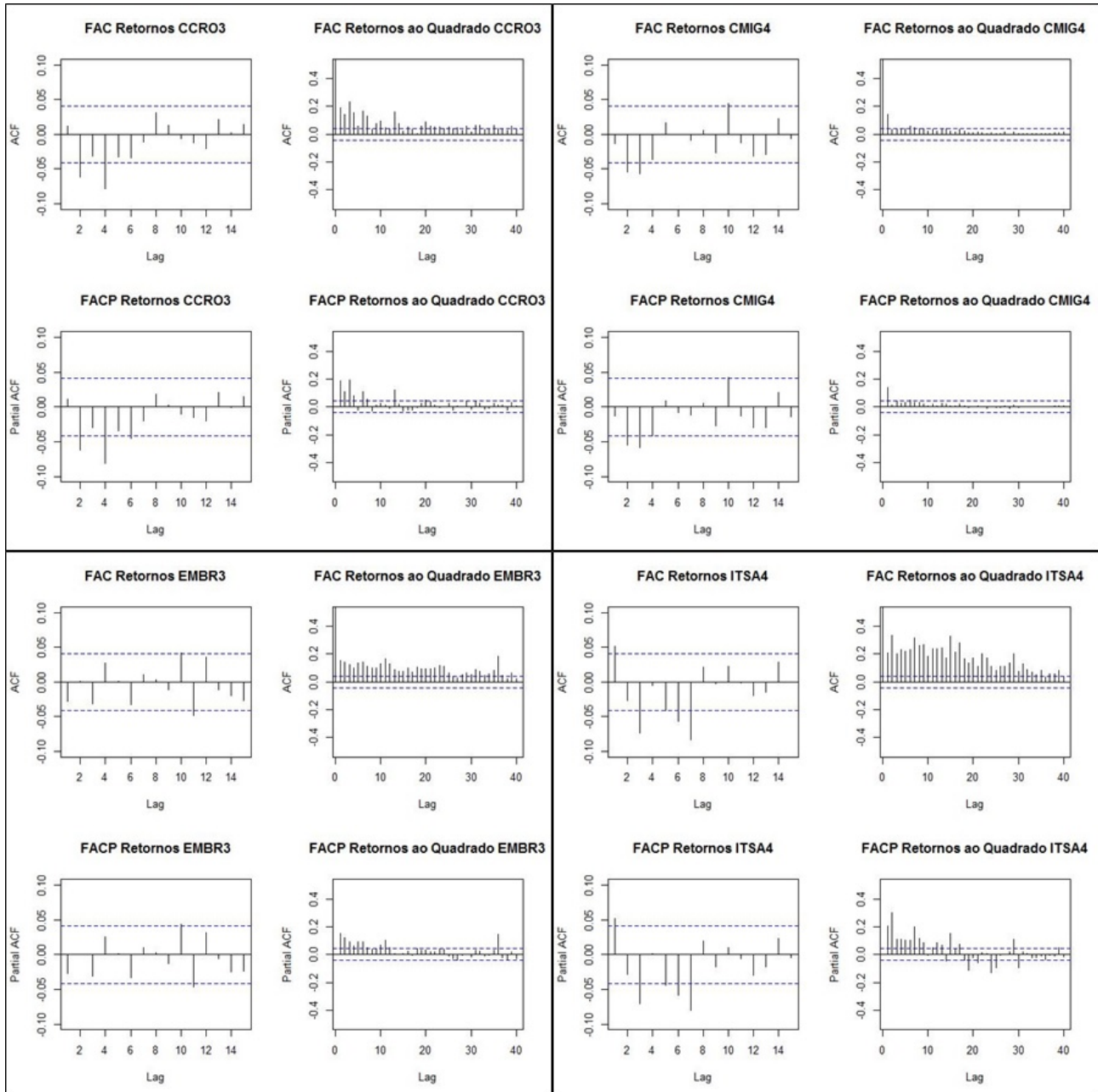


Figura A.10: Amostra 3: FAC e FACP CCRO3, CMIG4, EMBR3 e ITSA4

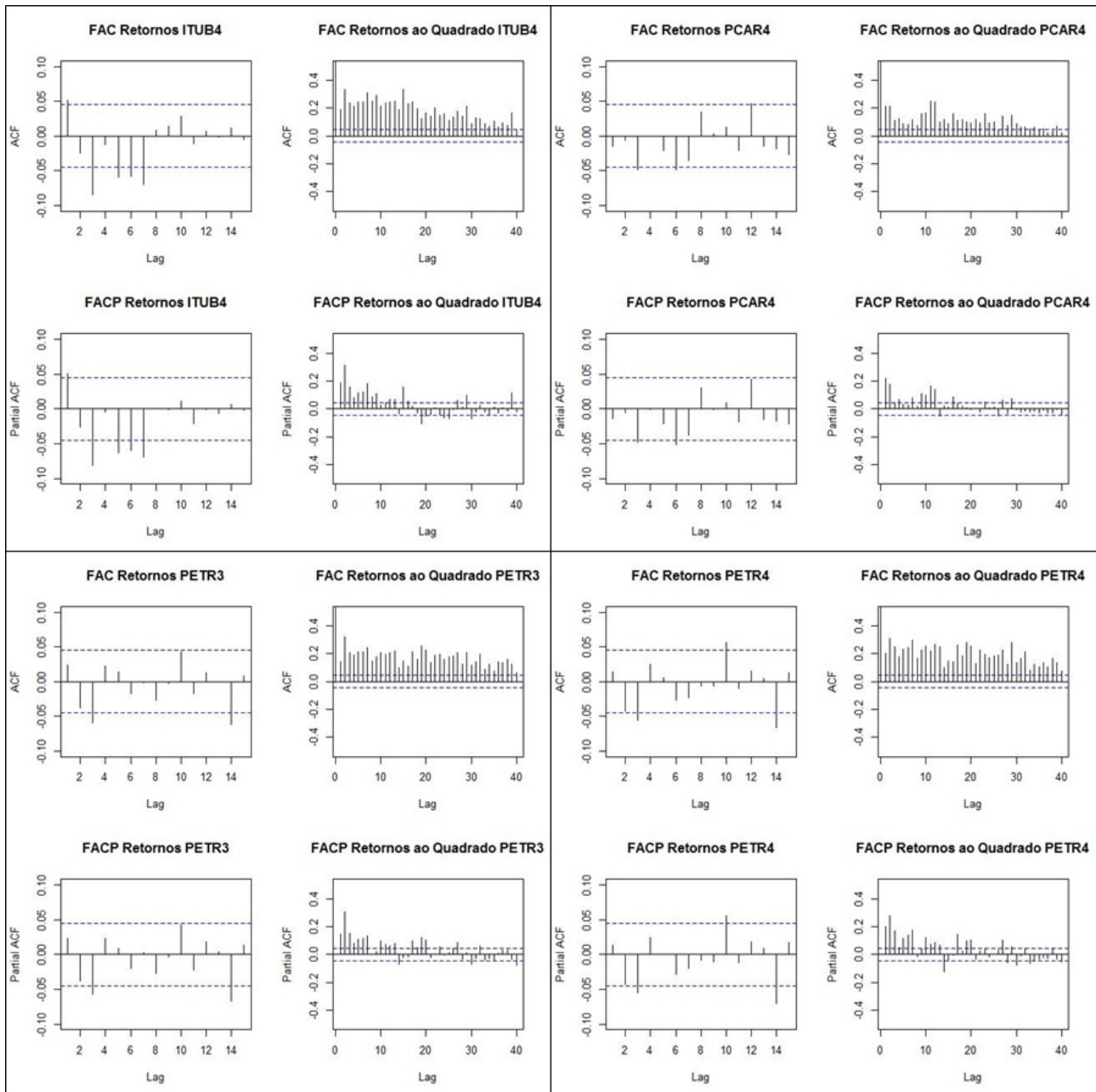


Figura A.11: Amostra 3: FAC e FACP ITUB4, PCAR4, PETR3, PETR4

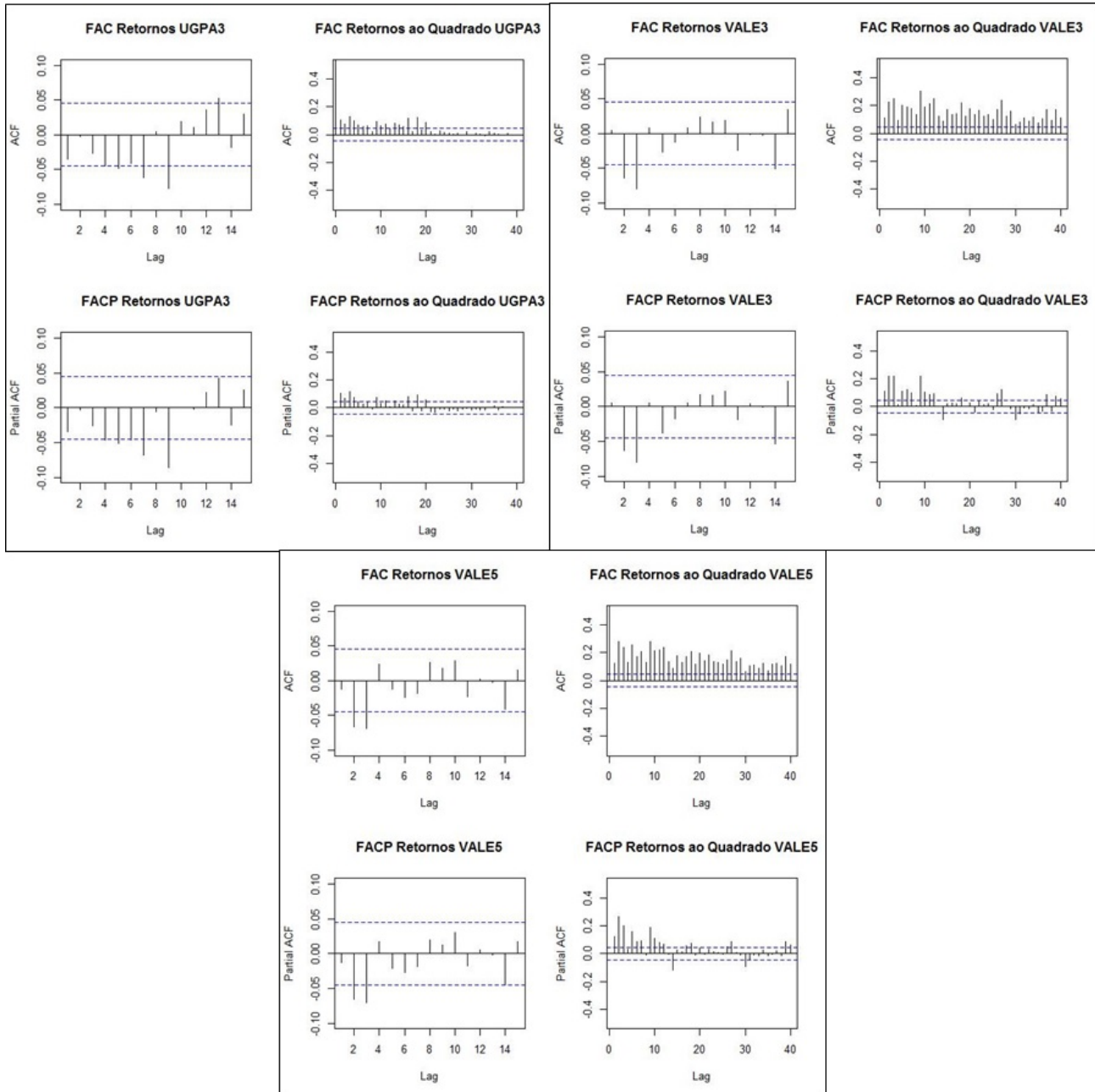


Figura A.12: Amostra 3: FAC e FACP UGPA3, VALE3 e VALE5

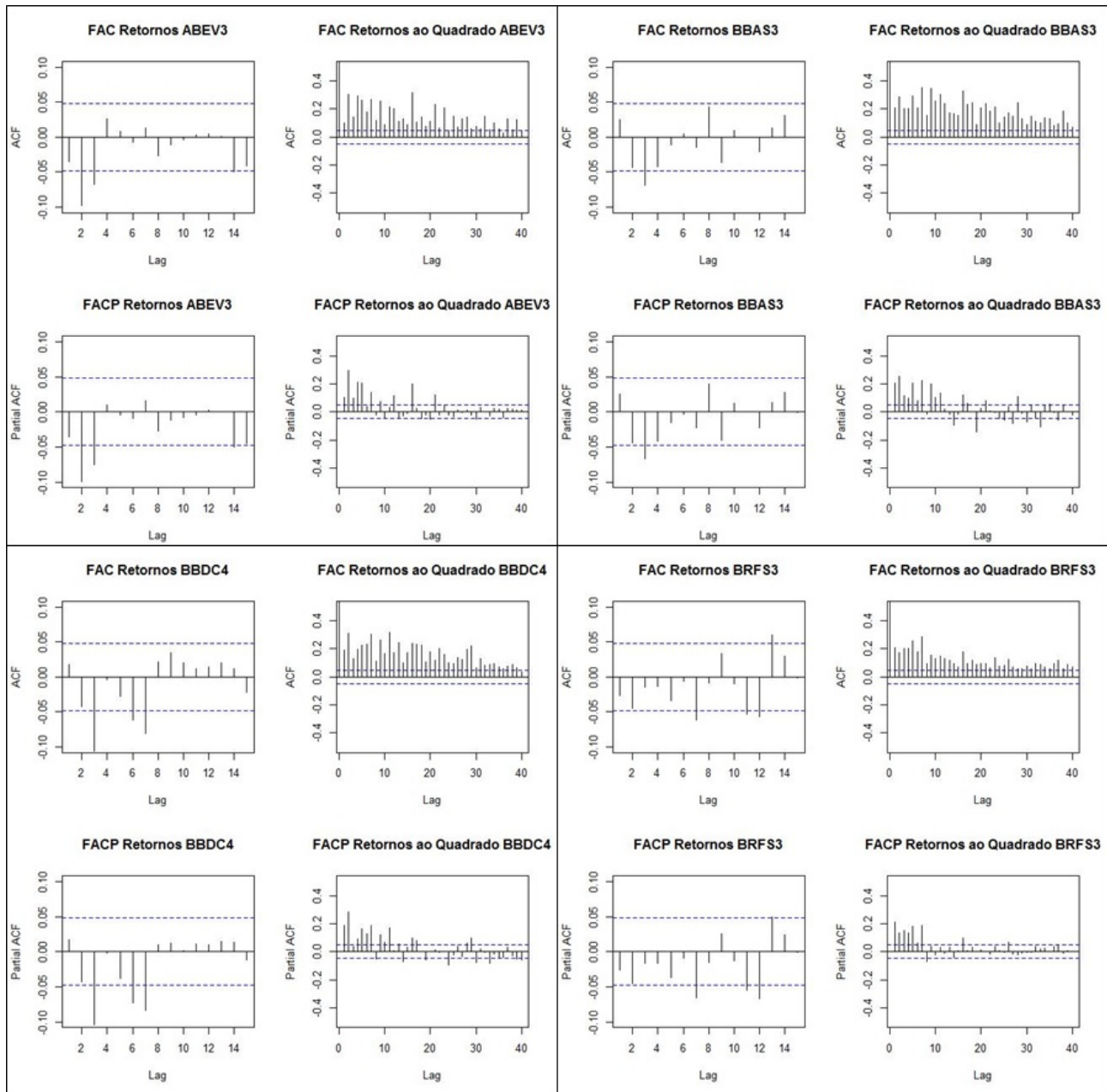
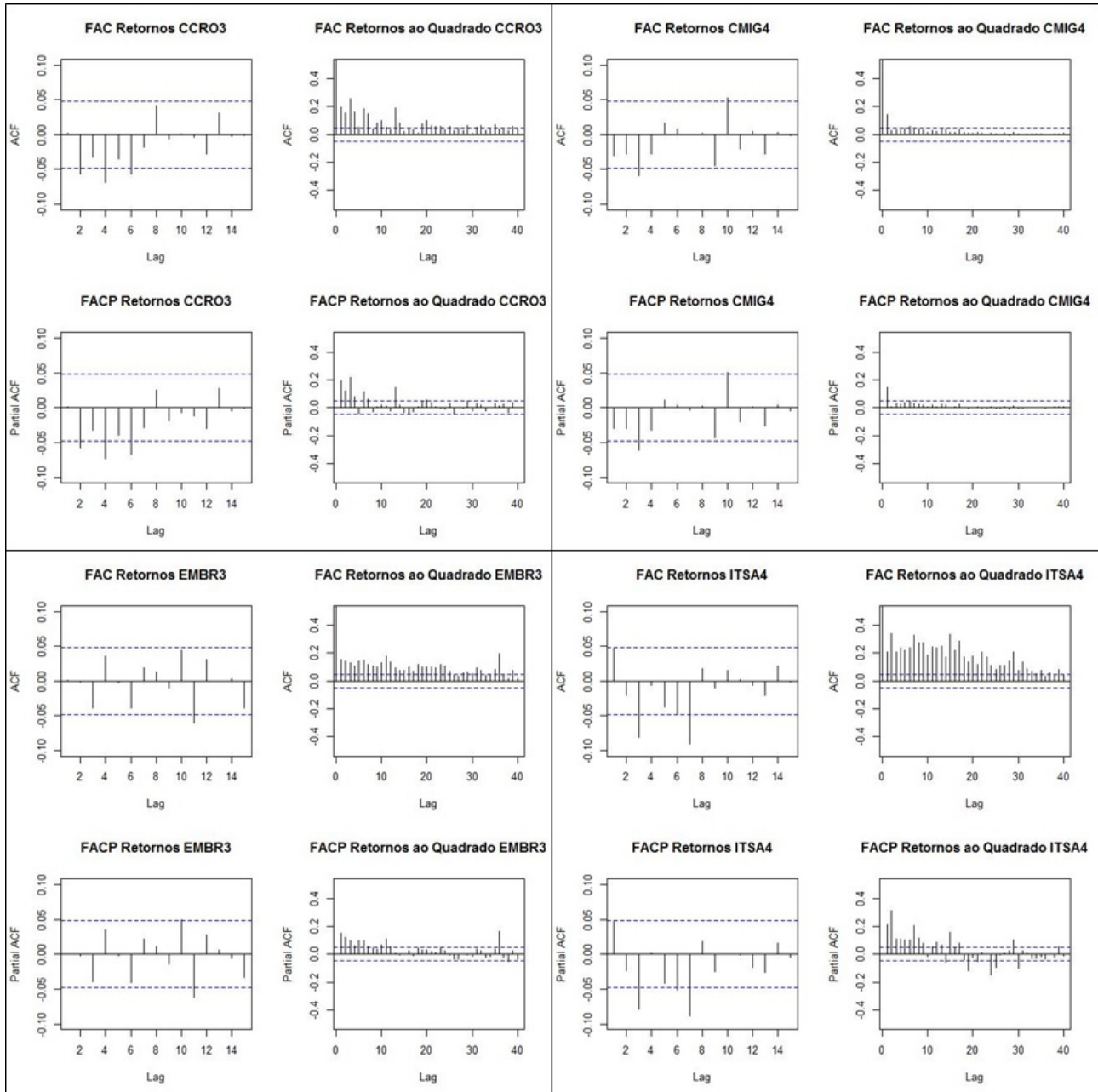


Figura A.13: Amostra 4: FAC e FACP ABEV3, BBAS3, BBDC4 e BRFS3



**Figura A.14:** Amostra 4: FAC e FACP CCRO3, CMIG4, EMBR3 e ITSA4

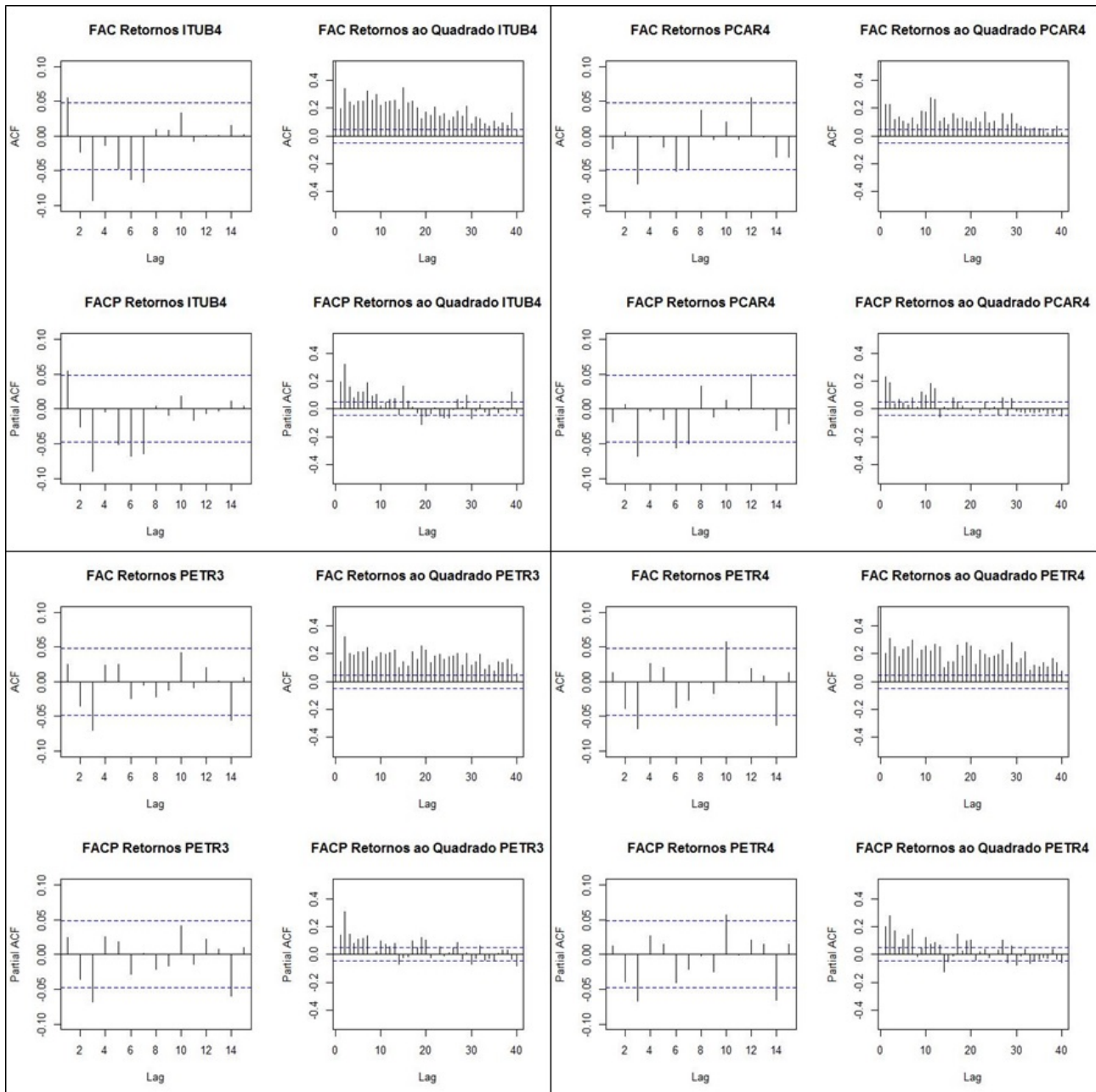


Figura A.15: Amostra 4: FAC e FACP ITUB4, PCAR4, PETR3, PETR4

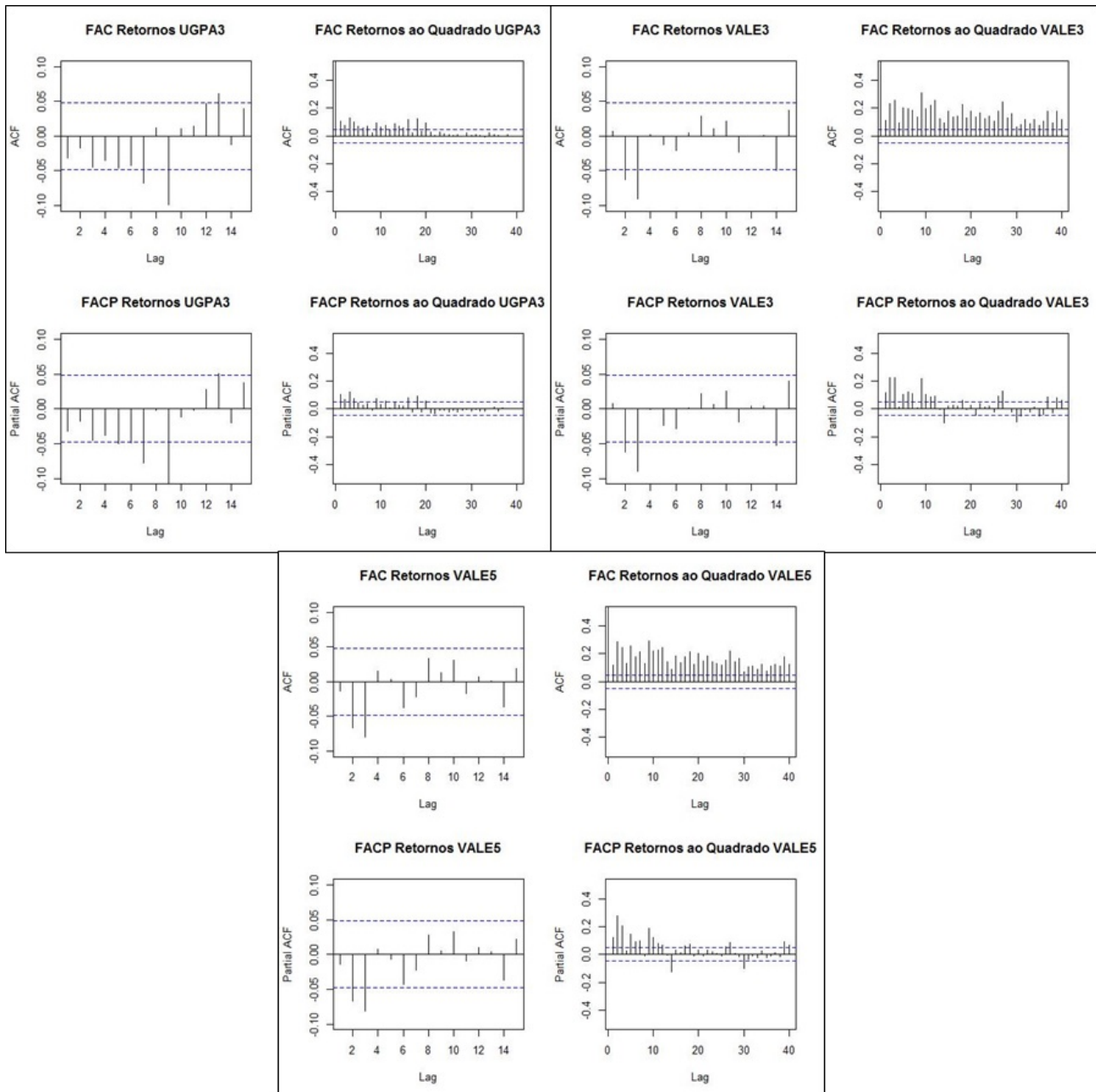


Figura A.16: Amostra 4: FAC e FACP UGPA3, VALE3 e VALE5





# Referências Bibliográficas

- [1] AÏT-SAHALIA, Y., AND HANSEN, L. P. *Handbook of Financial Econometrics, Vol 1: Tools and Techniques*, vol. 1. Elsevier, 2009.
- [2] AKAIKE, H. A new look at the statistical model identification. *Automatic Control, IEEE Transactions on* 19, 6 (1974), 716–723.
- [3] ALLAJ, E. The Black-Litterman Model: a consistent estimation of the parameter Tau. *Financial Markets and Portfolio Management* 27, 2 (2013), 217–251.
- [4] BEACH, S. L., AND ORLOV, A. G. An application of the Black–Litterman Model with EGARCH-M-derived views for international portfolio management. *Financial Markets and Portfolio Management* 21, 2 (2007), 147–166.
- [5] BEVAN, A., AND WINKELMANN, K. Using the Black-Litterman Global Asset Allocation Model: three years of practical experience. *Fixed Income Research* (1998).
- [6] BLACK, F., AND LITTERMAN, R. Global portfolio optimization. *Financial Analysts Journal* (1992), 28–43.
- [7] BOLLERSLEV, T. Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics* 31, 3 (1986), 307–327.
- [8] BOLLERSLEV, T., ENGLE, R. F., AND WOOLDRIDGE, J. M. A capital asset pricing model with time-varying covariances. *The Journal of Political Economy* (1988), 116–131.
- [9] BOX, G. E., AND JENKINS, G. M. *Time Series Analysis: Forecasting and Control, revised ed.* Holden-Day, 1976.
- [10] BOX, G. E., AND PIERCE, D. A. Distribution of Residual Autocorrelations in Autoregressive-integrated Moving Average Time Series Models. *Journal of the American Statistical Association* 65, 332 (1970), 1509–1526.
- [11] CHAPADOS, N. *Portfolio choice problems: An introductory survey of single and multiperiod models*, vol. 3. Springer Science & Business Media, 2011.
- [12] CONT, R. Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance* (2001), 223–236.
- [13] DICKEY, D. A., AND FULLER, W. A. Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series with a Unit Root. *Econometrica: Journal of the Econometric Society* (1981), 1057–1072.

- [14] ENGLE, R. F. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica: Journal of the Econometric Society* (1982), 987–1007.
- [15] ENGLE, R. F., AND KRONER, K. F. Multivariate Simultaneous Generalized ARCH. *Econometric Theory* 11, 01 (1995), 122–150.
- [16] FABOZZI, F. J., FOCARDI, S. M., AND KOLM, P. N. Incorporating trading strategies in the Black-Litterman framework. *The Journal of Trading* 1, 2 (2006), 28–37.
- [17] FAMA, E. F., AND FRENCH, K. R. The Capital Asset Pricing Model: Theory and Evidence (2003). *CRSP Working paper* (2003).
- [18] FRANCO, C., AND ZAKOIAN, J.-M. *GARCH Models: Structure, Statistical Inference and Financial Applications*. John Wiley & Sons, 2011.
- [19] GIACOMETTI, R., BERTOCCHI, M., RACHEV, S. T., AND FABOZZI, F. J. Stable distributions in the Black–Litterman approach to asset allocation. *Quantitative Finance* 7, 4 (2007), 423–433.
- [20] HE, G., AND LITTERMAN, R. The intuition behind Black-Litterman Model portfolios. *Available at SSRN 334304* (2002).
- [21] IDZOREK, T. M. A step-by-step guide to the Black-Litterman Model. *Forecasting expected returns in the financial markets* (2002), 17.
- [22] JOBSON, J. D., AND KORKIE, R. M. Putting Markowitz Theory to Work. *The Journal of Portfolio Management* 7, 4 (1981), 70–74.
- [23] JORION, P. Bayesian and CAPM Estimators of the Means: Implications for Portfolio Selection. *Journal of Banking & Finance* 15, 3 (1991), 717–727.
- [24] KWIATKOWSKI, D., PHILLIPS, P. C., SCHMIDT, P., AND SHIN, Y. Testing the Null Hypothesis of Stationarity Against the Alternative of a Unit Root: How sure are we that economic time series have a unit root? *Journal of econometrics* 54, 1 (1992), 159–178.
- [25] LINTNER, J. The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. *The review of economics and statistics* (1965), 13–37.
- [26] LJUNG, G. M., AND BOX, G. E. On a Measure of Lack of fit in Time Series Models. *Biometrika* 65, 2 (1978), 297–303.
- [27] LOBARINHAS, R. B. *Modelos Black-Litterman e GARCH Ortogonal para uma Carteira de Títulos do Tesouro Nacional*. PhD thesis, Universidade de São Paulo, 2012.
- [28] MARKOWITZ, H. Portfolio selection\*. *The journal of finance* 7, 1 (1952), 77–91.
- [29] MEUCCI, A. Beyond Black-Litterman: Views on non-normal markets. *Available at SSRN 848407* (2005).
- [30] MEUCCI, A. *Risk and asset allocation*. Springer, 2009.
- [31] MEUCCI, A. The Black-Litterman Approach: Original Model and Extensions. *Encyclopedia of Quantitative Finance* (2010).

- [32] MICHAUD, R. O. The Markowitz Optimization Enigma: Is Optimized Optimal? *Financial Analysts Journal* 45, 1 (1989), 31–42.
- [33] MORETTIN, P. A., AND TOLOI, C. *Análise de Séries Temporais*. Blucher, 2006.
- [34] NELSON, D. B. Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach. *Econometrica: Journal of the Econometric Society* (1991), 347–370.
- [35] SATCHELL, S., AND SCOWCROFT, A. A demystification of the Black–Litterman Model: managing quantitative and traditional portfolio construction. *Journal of Asset Management* 1, 2 (2000), 138–150.
- [36] SHARPE, W. F. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk\*. *The journal of finance* 19, 3 (1964), 425–442.
- [37] SHARPE, W. F. The sharpe ratio. *The journal of portfolio management* 21, 1 (1994), 49–58.
- [38] TSAY, R. S. *Analysis of Financial Time Series*, vol. 543. John Wiley & Sons, 2005.
- [39] WALTERS, C., ET AL. The Black-Litterman Model in detail. *The Black-Litterman Model in Detail (June 20, 2014)* (2014).
- [40] WALTERS, J. The Factor Tau in the Black-Litterman Model. *Available at SSRN 1701467* (2013).
- [41] XIAO, L., AND AYDEMIR, A. Volatility Modelling and forecasting in finance. *Forecasting volatility in the financial markets* (2007).
- [42] YANG, X. Some Extensions of the Black-Litterman Model. *Instituto de Matemática Pura e Aplicada* (2014).