



Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

---

# Apreçamento de *Spread Options* no Mercado de *Commodities*

Autor: **Lucas Matias de Souza Barcellos**

Orientador: **Ariel Levy**

**Rio de Janeiro**  
**Maio de 2014**



Aos meus pais, Ricardo e Vera, e à minha irmã Laura.



## **Agradecimentos**

Agradeço a todos aqueles que me ajudaram e contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho. Ao professor Ariel Levy, pela dedicação em orientar meus passos. Ao professor Jorge Zubelli, pelo incentivo dado enquanto acompanhava de perto o desenvolvimento do projeto. Aos professores Vinícius Albani, Maria Nogueiras e Luca Mertens, pelas sugestões e pela receptividade com que me receberam quando os procurei para apresentar entraves ao prosseguimento do trabalho.

Gostaria de agradecer também aos colegas de curso, que me ajudaram tanto na conclusão das disciplinas do mestrado quanto na entrega do Projeto Final de Curso. Faço menção especial aos colegas Romeu Dellazeri, Diogo Gobira, Leandro Loriato e Alberto Marques.



## Resumo

Neste trabalho, realizou-se o apreçamento de *processing spread options* WTI  $\times$  BRENT. Para estimar os preços dessas *spread options*, o apreçamento das *commodities* envolvidas foi realizado utilizando o modelo de Schwartz-Smith, que leva em consideração dois fatores de influência: reversão à média dos preços no curto prazo e incerteza no nível de equilíbrio para o qual ocorre a reversão dos preços.

Esse modelo foi calibrado a partir de dados históricos, utilizando a técnica filtro de Kalman, mesma técnica utilizada por Schwartz & Smith (2000). Como base de dados, foram utilizadas observações semanais de preços de contratos futuros das *commodities* WTI e BRENT, com maturidades de 1, 5, 9, 13 e 17 meses, no período de 02/01/2009 a 09/08/2013.

O cálculo dos preços de *spread options* foi realizado utilizando o Método de Monte Carlo. Para isso, foi necessário estimar os preços dos contratos futuros de WTI e de BRENT subjacentes e considerar a correlação entre essas *commodities*.

Conclui-se que o método, suportado pela literatura, deve ser utilizado com cuidado, tendo em vista os erros encontrados. Deve-se salientar, no entanto, que esse método produziu, na maioria das vezes, erros aceitáveis, dadas as variações de preços das *commodities* WTI e BRENT observadas nos períodos analisados.

**Key words:** *commodities*, modelo de Schwartz-Smith, filtro de Kalman, *spread options*.



## Abstract

We compute the pricing of *processing spread options* between the WTI and the BRENT. In order to estimate such prices, we applied the Schwartz-Smith model to each of the commodities. The Schwartz-Smith model takes into account two factors: the mean reversion in the short-term prices and the uncertainty in the equilibrium level to which prices revert.

This model was calibrated using historical data and the Kalman filter technique, as done in Schwartz-Smith (2000). Two data sets were used, one for WTI and another for BRENT. In both of them, the data consist of weekly observations of prices for future contracts maturing in 1, 5, 9, 13 and 17 months in the period from 01/02/2009 to 08/09/2013.

Spread option prices were calculated using Monte Carlo method. Before doing this, it was necessary to estimate the prices of WTI and BRENT futures contracts involved in each option and consider the correlation between these commodities.

In conclusion the methodology used and supported by literature produced acceptable results given the variations of WTI and BRENT prices during the period under consideration. However, it should be used with care because of the disagreements found in some cases.

**Key words:** commodities, Schwartz-Smith model, Kalman filter, spread options.



# Sumário

<b>Índice</b>	<b>ix</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Revisão Bibliográfica</b>	<b>3</b>
1.1 Alternativas de Modelagem em <i>Commodities</i>	3
1.1.1 Modelo de Brennan e Schwartz	3
1.1.2 Modelo de Gibson e Schwartz	4
1.1.3 Modelo de Schwartz e Smith	4
1.2 Apreçamento de <i>Spread Options</i>	5
<b>2 O Modelo de Schwartz-Smith</b>	<b>7</b>
2.1 O Modelo de Curto Prazo/Longo Prazo	7
2.2 Processos Neutros ao Risco	8
2.2.1 Apreçamento de Contratos Futuros	9
2.2.2 Apreçamento de Opções Europeias sobre Contratos Futuros	10
2.3 Relação com o Modelo de Gibson-Schwartz	11
2.4 Estimando as Variáveis de Estado e os Parâmetros do Modelo	13
2.4.1 Filtro de Kalman	13
2.4.2 Estimando as Variáveis de Estado a partir dos Preços à Vista e dos Preços Futuros	14
2.4.3 Estimação de Parâmetros	14
2.4.4 Estimação Implícita de Variáveis de Estado e de Parâmetros	14
2.5 Resultados Empíricos	15
2.5.1 Estimação de Variáveis de Estado e de Parâmetros	15
<b>3 Metodologia</b>	<b>19</b>
3.1 Implementação do Modelo de Schwartz-Smith	19
3.1.1 Dados de Entrada	19
3.1.2 Implementação no Matlab	20
3.2 Previsão dos Fatores de Curto e de Longo Prazos	21
3.2.1 Método de Euler	22
3.2.2 Obtenção dos Brownianos Correlacionados	22
3.2.3 Previsão dos Fatores Utilizando o Método de Euler	24
3.3 Previsão dos Preços dos Contratos Futuros	24
3.4 Cálculo dos Preços das <i>Spread Options</i>	25
<b>4 Resultados</b>	<b>27</b>
4.1 Resultados da Calibração do Modelo de Schwartz-Smith	27

4.1.1	Período de 02/01/2009 a 20/06/2013 . . . . .	27
4.1.2	Período de 02/01/2009 a 12/07/2013 . . . . .	33
4.1.3	Período de 02/01/2009 a 09/08/2013 . . . . .	38
4.2	Preços dos Contratos Futuros e das <i>Spread Options</i> . . . . .	43
<b>5</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>45</b>
<b>A</b>	<b>Código Implementado no Matlab</b>	<b>49</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>61</b>

# Introdução

O mercado futuro e o mercado de opções de *commodities* estão entre os mercados com maior volume de movimentação financeira do mundo. As principais *commodities* que compõem este mercado são as de energia, como a eletricidade e o petróleo, as agrícolas, como a soja e o milho, e as metálicas, como o minério de ferro e o ouro. Dentre as mais negociadas, destacam-se as de energia.

A grande quantidade de negociação advém do fato de este mercado atender interesses de diversos segmentos da economia, tanto de quem compra e de quem vende *commodities*, quanto de especuladores. Produtores de petróleo, por exemplo, necessitam se proteger de uma possível queda de preço de seu produto, sendo conveniente firmar contratos *forward*, que fixam o preço de venda em uma determinada data futura. Empresas que são grandes consumidoras de energia, por sua vez, precisam se proteger de uma possível alta de preço dessa energia. Empresas de aviação, por exemplo, são grandes consumidoras de querosene, utilizado como combustível nos aviões, e também poderiam utilizar os contratos *forward* para fazer essa proteção. Especuladores do mercado futuro, que podem ser tanto pessoas físicas quanto bancos ou fundos de investimento, também ocupam uma significativa fatia desse mercado de futuros.

O mercado de opções é muito útil às empresas cujo lucro depende da diferença de preço entre duas *commodities*, como é o caso de refinarias de petróleo, em que o lucro depende da diferença entre o preço do petróleo cru e o do petróleo refinado, como a gasolina e o diesel. Neste caso, é conveniente firmar contratos de *processing spread options*, conhecidas também por *spread options*, tipo de opção em que o *payoff* é baseado na diferença (*spread*) de preço entre dois determinados ativos. Assim, a refinaria poderia firmar uma *spread option* de venda do tipo europeia, em que teria o direito de vender seu produto e comprar seu insumo, no vencimento, por um valor pré-fixado da diferença de preço entre o petróleo refinado e o petróleo bruto. Este procedimento serviria como uma proteção contra uma possível queda de preço de seus produtos em relação aos seus insumos.

Constata-se, ainda, que o interesse de se estudar derivativos de *commodities* vem crescendo nos últimos anos. De acordo com Aiube [1], os mercados de energia, principalmente o setor elétrico, passaram por um processo de desregulamentação desde meados dos anos 90, em diversos países. Essa desregulamentação gerou um aumento na volatilidade dos preços das *commodities*, fazendo com que fosse necessário que os agentes de mercado tomassem medidas de proteção e de gestão de risco. Com isso, o volume de contratos futuro, *forward* e de opções negociados aumentou. Nesse contexto, os modelos de apreamento de *commodities* possuem um papel importante, uma vez que possibilitam uma gestão de risco quantitativa.

Este trabalho tem como tema de estudo o apreamento de *spread options* de *commodities* energéticas a partir do apreamento destes ativos utilizando o modelo de Schwartz & Smith [9], que leva em consideração dois fatores de influência: reversão à média dos preços no curto prazo

e incerteza no nível de equilíbrio para o qual ocorre a reversão dos preços. Foram utilizadas as *commodities* de petróleo WTI e BRENT para compor as *spread options* a serem precificadas. O modelo de Schwartz & Smith [9] foi calibrado a partir de dados históricos, utilizando a técnica filtro de Kalman, e sua implementação foi feita em Matlab.

WTI e BRENT foram escolhidos por serem referências na cotação do petróleo. WTI significa *West Texas Intermediate*, nome que remete à região do Texas que concentra a exploração de petróleo dos Estados Unidos da América. Ele é negociado na bolsa de Nova Iorque e serve como referência no mercado norte-americano de derivados. Já a nomenclatura BRENT refere-se ao óleo produzido no mar do Norte, negociado na bolsa de Londres. Serve como referência para os mercados de derivados da Europa e da Ásia. Comparando esses dois petróleos, o WTI é menos denso e, portanto, mais fácil de ser refinado.

O objetivo deste trabalho é investigar a aderência dos resultados obtidos aos preços históricos e verificar a viabilidade de utilizar o modelo implementado futuramente. Serão feitos testes dentro da amostra de dados para verificar se os preços calculados para as *commodities* reproduzem bem os preços históricos. A mesma análise será feita ao comparar os preços calculados para as *spread options* com os preços praticados no passado.

# Capítulo 1

## Revisão Bibliográfica

### 1.1 Alternativas de Modelagem em *Commodities*

O apereçamento de contratos futuros de *commodities* pode ser feito a partir de vários modelos estabelecidos para o preço à vista. Cada modelo considera a existência de uma certa quantidade de fatores que interferem no preço à vista da *commodity*. A seguir, serão abordados alguns desses modelos.

#### 1.1.1 Modelo de Brennan e Schwartz

O artigo Brennan e Schwartz [2] considera que o preço à vista de uma *commodity* é regido por apenas um fator estocástico. De acordo com ele, o preço à vista  $S_t$  de uma *commodity* homogênea, retirada de uma determinada mina, é dado pelo processo geométrico Browniano

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dz , \quad (1.1.1)$$

onde  $dz$  é o incremento do processo do movimento Browniano padrão,  $\sigma$  é o desvio padrão instantâneo do preço à vista e  $\mu$  é a tendência de crescimento do preço.

Fernando Aiube [1] apresenta a Equação (1.1.1) já levando em consideração a existência do retorno de conveniência, também enfatizada no artigo de Brennan e Schwartz [2]. A Equação (1.1.1) é escrita como

$$dS_t = (\mu^* - y) S_t dt + \sigma S_t dz , \quad (1.1.2)$$

sendo  $\mu^*$  o retorno total esperado pelo proprietário da *commodity* e  $y$  o retorno de conveniência, definido como o benefício que possui o detentor da *commodity* física e que não é devido ao proprietário de um contrato futuro sobre a mesma *commodity* [1]. O proprietário da *commodity* pode escolher o melhor momento de vendê-la, aproveitando situações de escassez do produto no mercado, mas também deve arcar com o custo de estocagem  $c_e$  (ou custo de carregamento). Assim, muitas vezes, ao se referir ao retorno de conveniência, já se considera o retorno de conveniência líquido  $y$ , em que já está subtraído o custo de estocagem.

No modelo de Brennan e Schwartz [2], os preços crescem a uma taxa constante e a variação dos preços futuros cresce proporcionalmente ao tempo. Logo, se é verificado um aumento de preço em um determinado período de tempo, haverá uma previsão de um aumento proporcional nos preços futuros.

### 1.1.2 Modelo de Gibson e Schwartz

O modelo de Gibson e Schwartz [4] utiliza dois fatores estocásticos para descrever o comportamento do preço à vista de *commodities*, o que confere uma melhor aderência aos dados empíricos do que no modelo de Brennan e Schwartz [2].

Em Gibson e Schwartz [4], o modelo apresentado considera o retorno de conveniência como um fator estocástico e, por isso, também é conhecido como modelo de retorno de conveniência estocástico. Esse modelo assume que o logaritmo do preço à vista no tempo  $t$  ( $\ln(S_t)$ ) e o retorno de conveniência  $\delta_t$  são regidos pelas equações

$$d(\ln(S_t)) = (\mu - \delta_t - \frac{1}{2}\sigma_1^2)dt + \sigma_1 dz_1, \text{ e} \quad (1.1.3)$$

$$d\delta_t = \kappa(\alpha - \delta_t)dt + \sigma_2 dz_2, \quad (1.1.4)$$

onde  $dz_1$  e  $dz_2$  são incrementos correlacionados do processo de movimento Browniano padrão, com  $dz_1 dz_2 = \rho dt$ . O preço à vista  $S_t$  segue um processo geométrico Browniano e o retorno de conveniência  $\delta_t$  segue um processo de Ornstein-Uhlenbeck com nível de equilíbrio  $\alpha$  e taxa de reversão à média  $\kappa$ .

Observe que o retorno de conveniência também influencia no preço à vista, como pode ser visto pela Equação (1.1.3). Assim, os preços não crescem a uma taxa constante, como ocorre no modelo de Brennan e Schwartz [2].

### 1.1.3 Modelo de Schwartz e Smith

Em Schwartz e Smith [9], após analisar as limitações do modelo de Brennan e Schwartz [2], enfatiza-se o fato de que modelos que consideram a reversão à média dos preços são mais adequados para muitas *commodities*. Isso pode ser justificado pelo fato de que, quando os preços de uma determinada *commodity* estão acima do preço médio, produtores que possuem um alto custo entrarão no mercado e os preços tenderão a cair. Analogamente, se os preços estiverem abaixo de um nível de equilíbrio, tenderão a subir, uma vez que parte dos produtores irão sair do mercado.

Além da reversão à média, também há uma incerteza relacionada ao nível de equilíbrio para o qual os preços se reverterem. No artigo de Schwartz e Smith [9], é desenvolvido um modelo de apreçamento de *commodities* que leva em consideração esses dois fatores. Nesse modelo, assume-se que o nível de equilíbrio dos preços evolui segundo um movimento Browniano geométrico com uma tendência (*drift*) que reflete as expectativas de exaustão do estoque, o avanço tecnológico da produção e do descobrimento de *commodities*, a inflação, além de efeitos políticos e regulatórios. É esperado que os desvios de curto prazo, definidos pela diferença entre o preço à vista e o preço de equilíbrio, revertam-se a zero. Os desvios de curto prazo ocorrerão em razão de diversos fatores, como alterações climáticas e interrupções intermitentes no fornecimento de *commodities*.

Em Schwartz e Smith [9], os dois fatores do modelo são estimados com base nos preços dos contratos futuros. Mudanças nos preços dos contratos futuros de longo prazo fornecem informação sobre mudanças no nível de equilíbrio. Já mudanças na diferença entre os preços dos contratos futuros de curto prazo e os de longo prazo fornecem informação sobre os desvios de curto prazo. O modelo desenvolvido pelo artigo é conveniente na medida em que permite

que seja usada a técnica padrão filtro de Kalman para estimar as variáveis estacionárias em questão, conforme também foi feito em Schwartz [8].

O modelo de Schwartz e Smith, ou modelo de curto prazo/longo prazo, não considera explicitamente a presença do retorno de conveniência. Entretanto, este modelo é equivalente ao modelo de retorno de conveniência estocástico proposto por Gibson e Schwartz [4], na medida em que as variáveis de estado de cada modelo podem ser representadas como combinações lineares das variáveis de estado do outro, como será mostrado na Seção 2.3.

O modelo de Schwartz-Smith [9], no entanto, apresenta algumas vantagens em relação ao modelo de Gibson-Schwartz [4], a começar pelo fato de que considera dois fatores de influência de entendimento mais intuitivo, o que não é conferido ao retorno de conveniência. Além disso, o desvio estocástico de curto prazo e o nível de equilíbrio dos preços são fatores que possuem uma dinâmica mais "ortogonal", fazendo com que haja maior transparência nos resultados analíticos obtidos e com que a análise dos investimentos de longo prazo fique simplificada. Além disso, o artigo de Schwartz e Smith [9] fornece uma análise probabilística mais completa do modelo, além de tratar com mais profundidade o uso da técnica filtro de Kalman.

## 1.2 Apreçamento de *Spread Options*

O seminal artigo de Margrabe [7] (1978) apresentou o apreçamento de *spread options* a partir da formula de Black-Scholes-Merton. Posteriormente, em 2003, Carmona [3] publicou um estudo dos problemas teóricos e computacionais associados ao preço de *spread options*.

Até os dias de hoje, no entanto, existe certa dificuldade de se encontrar uma solução analítica para o apreçamento de *spread options* de *commodities*, uma vez que os preços destas possuem um comportamento diferente dos preços das ações. Uma alternativa para resolver esse problema é utilizar uma solução analítica, como o Método de Monte Carlo.

A base da simulação de Monte Carlo é a Lei Forte dos Grandes Números, que declara que a média aritmética de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas converge para a média da distribuição quase certamente. O cálculo do preço de uma opção é nada mais do que o cálculo da esperança condicional descontada, na medida martigal equivalente, do *payoff*  $B$ , de acordo com a equação

$$\mathbb{E}^*[e^{-rT}B] = e^{-rT} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n B_k \right), \quad (1.2.1)$$

onde  $n$  é o número de realizações independentes  $B_k$  com *payoff* final  $B$  (Korn e Korn [6]).

Este Capítulo tratou de introduzir o apreçamento de *spread options* e antes tratou de alternativas de modelagem em *commodities*. O Capítulo 2 faz um resumo do artigo de Schwartz e Smith [9], descrevendo, com mais detalhes, o modelo de curto prazo/longo prazo, a técnica filtro de Kalman e demais procedimentos utilizados para calibragem.



# Capítulo 2

## O Modelo de Schwartz-Smith

### 2.1 O Modelo de Curto Prazo/Longo Prazo

No modelo de Schwartz-Smith, o preço à vista da *commodity*  $S_t$  no tempo  $t$  é decomposto em dois fatores estocásticos, segundo a fórmula  $\ln(S_t) = \chi_t + \xi_t$ , onde  $\chi_t$  é o desvio dos preços no curto prazo e  $\xi_t$  é o nível de equilíbrio dos preços. Assume-se que  $\chi_t$  reverte para zero, seguindo o processo de Ornstein-Uhlenbeck

$$d\chi_t = -\kappa\chi_t dt + \sigma_\chi dz_\chi, \quad (2.1.1)$$

e que  $\xi_t$  segue um processo de movimento Browniano

$$d\xi_t = \mu_\xi dt + \sigma_\xi dz_\xi. \quad (2.1.2)$$

Aqui,  $dz_\chi$  e  $dz_\xi$  são incrementos correlacionados do processo do movimento Browniano padrão, com  $dz_\chi dz_\xi = \rho_{\chi\xi} dt$ . Enquanto não é esperado que desvios de curto prazo ( $\chi_t$ ) persistam, mudanças no nível de equilíbrio ( $\xi_t$ ) tendem a persistir. O coeficiente de reversão à média ( $\kappa$ ) descreve a taxa com que é esperado que os desvios de curto prazo desapareçam, podendo-se considerar  $-\ln(0,5)/\kappa$  como uma "meia-vida" desses desvios.

Schwartz e Smith [9] demonstram que  $\chi_t$  e  $\xi_t$  são ambas variáveis de estado normalmente distribuídas, com vetor de média e matriz de covariância dados por

$$\mathbb{E}[(\chi_t, \xi_t)] = [e^{-\kappa t} \chi_0, \xi_0 + \mu_\xi t], \text{ e} \quad (2.1.3a)$$

$$\text{Cov}[(\chi_t, \xi_t)] = \begin{bmatrix} (1 - e^{-2\kappa t}) \frac{\sigma_\chi^2}{2\kappa} & (1 - e^{-\kappa t}) \frac{\rho_{\chi\xi} \sigma_\chi \sigma_\xi}{\kappa} \\ (1 - e^{-\kappa t}) \frac{\rho_{\chi\xi} \sigma_\chi \sigma_\xi}{\kappa} & \sigma_\xi^2 t \end{bmatrix}. \quad (2.1.3b)$$

Assim, conhecendo-se  $\chi_0$  e  $\xi_0$ , temos que o logaritmo do preço à vista é normalmente distribuído, com média e variância dados por

$$\mathbb{E}[\ln(S_t)] = e^{-\kappa t} \chi_0 + \xi_0 + \mu_\xi t, \text{ e} \quad (2.1.4a)$$

$$\text{Var}[\ln(S_t)] = (1 - e^{-2\kappa t}) \frac{\sigma_\chi^2}{2\kappa} + \sigma_\xi^2 t + 2(1 - e^{-\kappa t}) \frac{\rho_{\chi\xi} \sigma_\chi \sigma_\xi}{\kappa}. \quad (2.1.4b)$$

O preço à vista possui, então, distribuição log-normal, sendo

$$\begin{aligned} \ln(\mathbb{E}[S_t]) &= \mathbb{E}[\ln(S_t)] + \frac{1}{2}\text{Var}[\ln(S_t)] \\ &= e^{-\kappa t}\chi_0 + \xi_0 + \mu_\xi t + \frac{1}{2} \left( (1 - e^{-2\kappa t})\frac{\sigma_\chi^2}{2\kappa} + \sigma_\xi^2 t + 2(1 - e^{-\kappa t})\frac{\rho_{\chi\xi}\sigma_\chi\sigma_\xi}{\kappa} \right). \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Para valores grandes de  $t$ , os termos  $e^{-\kappa t}$  e  $e^{-2\kappa t}$  se aproximam de zero e podemos escrever  $\ln(\mathbb{E}[S_t])$  como

$$\left( \xi_0 + \frac{\sigma_\chi^2}{4\kappa} + \frac{\rho_{\chi\xi}\sigma_\chi\sigma_\xi}{\kappa} \right) + (\mu_\xi + \frac{1}{2}\sigma_\xi^2)t. \quad (2.1.6)$$

## 2.2 Processos Neutros ao Risco

Schwartz e Smith [9] utilizam uma versão neutra ao risco do modelo para fazer o apreamento dos contratos futuros e das opções baseadas nesses contratos, além de outros investimentos relacionados a *commodities*. Os autores assumem que os processos estocásticos neutros ao risco são da forma

$$d\chi_t = (-\kappa\chi_t - \lambda_\chi)dt + \sigma_\chi dz_\chi^*, \quad e \quad (2.2.1a)$$

$$d\xi_t = (\mu_\xi - \lambda_\xi)dt + \sigma_\xi dz_\xi^*, \quad (2.2.1b)$$

onde  $dz_\chi^*$  e  $dz_\xi^*$  são incrementos correlacionados do processo do movimento Browniano padrão, com  $dz_\chi^* dz_\xi^* = \rho_{\chi\xi} dt$ . O processo neutro ao risco para o desvio de curto prazo ( $\chi_t$ ) é agora um processo de Ornstein-Uhlenbeck com reversão a  $-\lambda_\chi/\kappa$  (e não a zero como no processo real), e o processo neutro ao risco para o nível de equilíbrio nos preços ( $\xi_t$ ) continua sendo um movimento Browniano geométrico, mas com tendência de crescimento (*drift*)  $\mu_\xi^* \equiv \mu_\xi - \lambda_\xi$ .

Considerando que  $\chi_0$  e  $\xi_0$  seguem uma distribuição similar àquela dada pela Equação (2.1.3), sob condições de neutralidade ao risco,  $\chi_t$  e  $\xi_t$  serão normalmente distribuídos com vetor de média e matriz de covariância dados por

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^*[(\chi_t, \xi_t)] &= [e^{-\kappa t}\chi_0 - (1 - e^{-\kappa t})\lambda_\chi/\kappa, \xi_0 + \mu_\xi^* t] , e \\ \text{Cov}^*[(\chi_t, \xi_t)] &= \text{Cov}[(\chi_t, \xi_t)] . \end{aligned}$$

Sob condições de neutralidade ao risco, o logaritmo do preço à vista futuro,  $\ln(S_t) = \chi_t + \xi_t$ , é normalmente distribuído com

$$\mathbb{E}^*[\ln(S_t)] = e^{-\kappa t}\chi_0 + \xi_0 - (1 - e^{-\kappa t})\lambda_\chi/\kappa + \mu_\xi^* t , e \quad (2.2.2a)$$

$$\text{Var}^*[\ln(S_t)] = \text{Var}[\ln(S_t)] . \quad (2.2.2b)$$

Ao comparar as equações (2.1.4) e (2.2.2), conclui-se que o prêmio de risco reduz a esperança do logaritmo do preço à vista por  $(1 - e^{-\kappa t})\lambda_\chi/\kappa + \lambda_\xi t$ , expressão que depende do tempo, mas não sofre influência das variáveis de estado.

### 2.2.1 Apreçamento de Contratos Futuros

Seja  $F_{T,0}$  o preço atual do um contrato futuro com maturidade  $T$ . Na condição de neutralidade ao risco, os preços dos contratos futuros são iguais ao valor esperado dos preços à vista, descritos por processos neutros ao risco, no futuro. Além disso, assumindo taxas de juros determinísticas, independentes dos preços à vista, temos que os preços dos contratos *forward* são iguais aos dos contratos futuros. A partir da Equação (2.2.2), podemos escrever os preços futuros como

$$\begin{aligned} \ln(F_{T,0}) &= \ln(\mathbb{E}^*[S_T]) \\ &= \mathbb{E}^*[\ln(S_T)] + \frac{1}{2}\text{Var}^*[\ln(S_T)] \\ &= e^{-\kappa T}\chi_0 + \xi_0 + A(T), \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

onde  $A(T) = \mu_\xi^* T - (1 - e^{-\kappa T})\frac{\lambda_\chi}{\kappa} + \frac{1}{2} \left[ (1 - e^{-2\kappa T})\frac{\sigma_\chi^2}{2\kappa} + \sigma_\xi^2 T + 2(1 - e^{-\kappa T})\frac{\rho\chi\xi\sigma_\chi\sigma_\xi}{\kappa} \right]$ .

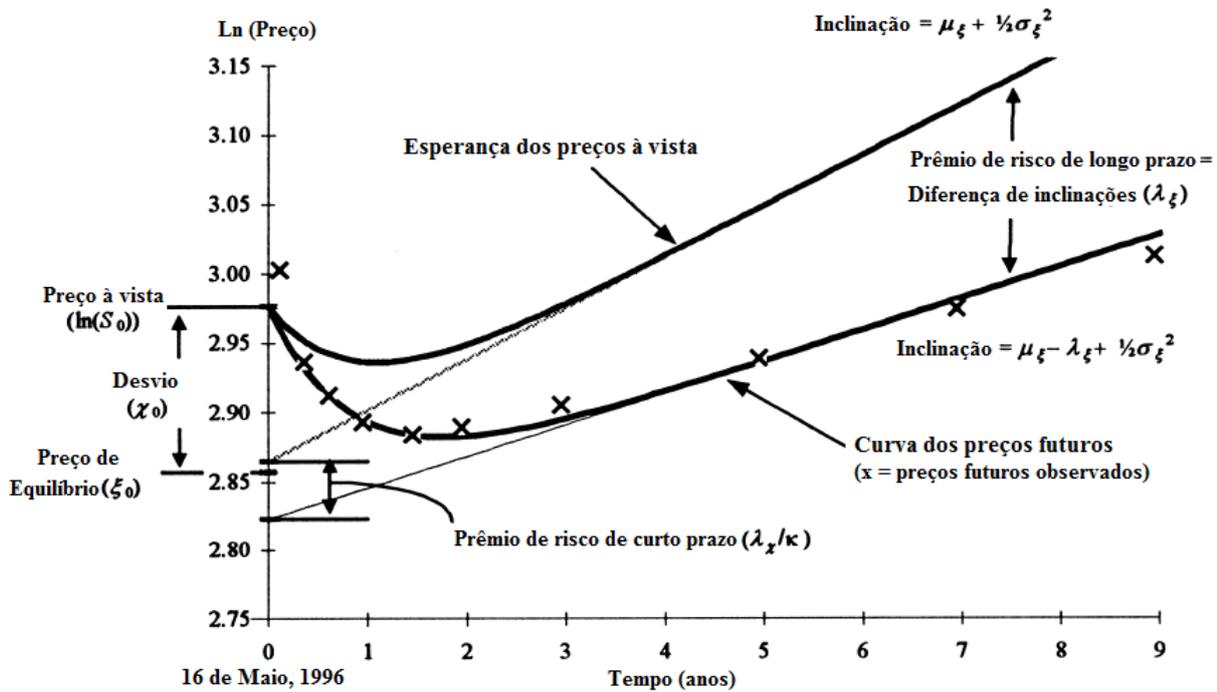


Figura 2.1: Preços futuros e esperança dos preços à vista (adaptado de Schwartz e Smith [9])

A relação entre os preços futuros e a esperança dos preços à vista é ilustrada na Figura 2.1, que mostra preços futuros e previsões feitas a apartir de 16 de maio de 1996. Nessa figura, os preços futuros reais estão marcados com x's, a curva da esperança dos preços à vista é definida pela Equação (2.1.5), a curva dos preços futuros é definida pela Equação (2.2.3). A reta que mostra a esperança dos preços à vista no longo prazo é definida pela Equação (2.1.6), enquanto a reta que mostra os preços futuros no longo prazo é definida pela Equação (2.2.3) para grandes valores de  $t$ . Com isso, observa-se que o prêmio de risco para os desvios de curto prazo subtrai  $\frac{\lambda_\chi}{\kappa}$  da reta que representa a esperança dos preços à vista no longo prazo, e que o prêmio de risco para o nível de equilíbrio reduz a inclinação desta mesma reta de  $\lambda_\xi$ . Mudanças no preço de equilíbrio no decorrer do tempo deslocam essas retas para cima e para baixo, mas as diferenças de intercepto e de inclinação permanecem constantes. Mudanças nos desvios de

curto prazo modificam a parte convexa tanto da curva da esperança dos preços à vista quanto da curva dos preços futuros, mas estas continuam coincidindo no tempo  $t = 0$ .

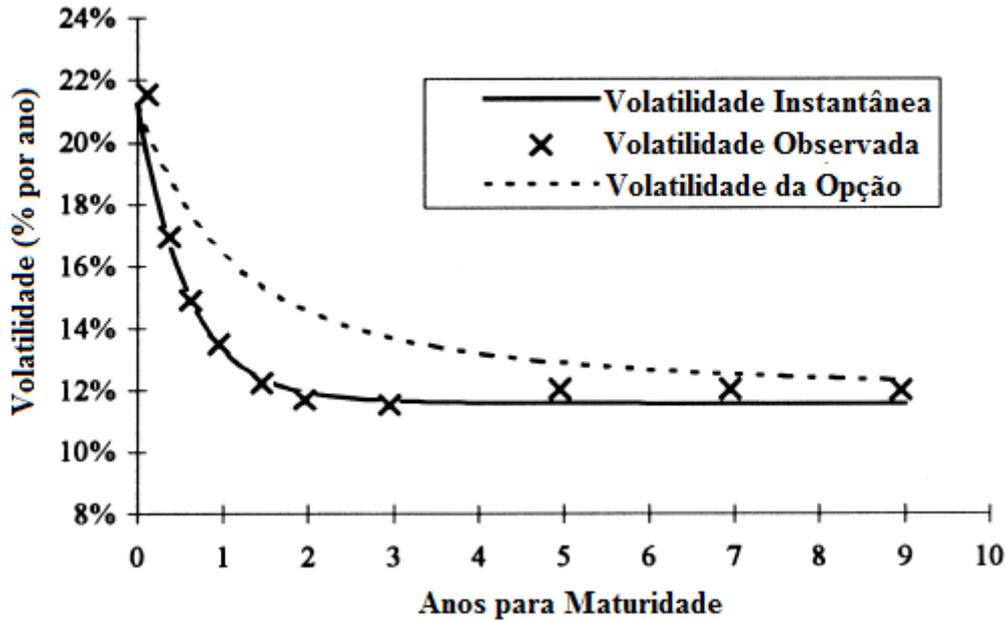


Figura 2.2: Volatilidades do modelo e empíricas (adaptado de Schwartz e Smith [9])

A variância instantânea de  $\ln(F_{T,0})$ , denominada por volatilidade (*volatility*), é dada pela derivada em relação ao tempo de  $\text{Var}^*[\ln(S_T)] = \text{Var}[\ln(S_T)]$ . Assim, derivando a Equação (2.1.4b), obtemos  $e^{-2\kappa T}\sigma_\chi^2 + \sigma_\xi^2 + 2e^{-\kappa T}\rho_{\chi\xi}\sigma_\chi\sigma_\xi$ . Logo, a volatilidade é independente das variáveis de estado. Para contratos futuros com maturidade  $T = 0$ , a volatilidade é igual à soma das volatilidades dos fatores de curto prazo e de longo prazo. Para grandes valores de  $t$ , a volatilidade instantânea se aproxima da volatilidade do nível do preço de equilíbrio. Essas relações entre volatilidades podem ser verificadas na Figura 2.2. Nessa figura, pode-se observar que o modelo se ajusta bem aos dados empíricos de volatilidade.

### 2.2.2 Apreçamento de Opções Europeias sobre Contratos Futuros

O valor de uma opção Européia sobre um contrato futuro é dado pela esperança do preço desse contrato usando o processo neutro ao risco, e fazendo o desconto a uma taxa livre de risco. A partir da Equação (2.2.3), temos que  $\ln(F_{T,t}) = e^{-\kappa(T-t)}\chi_t + \xi_t + A(T-t)$ . Dados  $\chi_0$  e  $\xi_0$ , e sabendo-se que  $\chi_t$  e  $\xi_t$  são normalmente distribuídos, em condições neutras ao risco, o processo  $\phi \equiv \ln(F_{T,t})$  também é normalmente distribuído com

$$\begin{aligned}\mu_\phi(t, T) &\equiv \mathbb{E}^*[\ln(F_{T,t})] \\ &= e^{-\kappa T}\chi_0 + \xi_0 + \mu_\xi^*t + A(T-t), \text{ e}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_\phi^2(t, T) &\equiv \text{Var}^*[\ln(F_{T,t})] \\ &= e^{-2\kappa(T-t)}(1 - e^{-2\kappa t})\frac{\sigma_\chi^2}{2\kappa} + \sigma_\xi^2 t + 2e^{-\kappa(T-t)}(1 - e^{-\kappa T})\frac{\rho_{\chi\xi}\sigma_\chi\sigma_\xi}{\kappa}.\end{aligned}$$

O valor de uma opção de compra Européia sobre um contrato futuro com maturidade  $T$ , *strike*  $K$ , e tempo  $t$ , até a opção expirar, é

$$e^{-rt}\mathbb{E}^*[\max(F_{T,t} - K, 0)] = e^{-rt}(F_{T,0}N(d) - KN(d - \sigma_\phi(t, T))) , \quad (2.2.4)$$

onde  $d = \frac{\ln(F/K)}{\sigma_\phi(t, T)} - \frac{1}{2}\sigma_\phi(t, T)$  e  $N(d)$  indica a probabilidade acumulada de uma distribuição normal padrão ( $P(Z < d)$ ).

De forma similar, o valor de uma opção Européia de venda com os mesmos parâmetros é

$$e^{-rt}\mathbb{E}^*[\max(K - F_{T,t}, 0)] = e^{-rt}(-F_{T,0}N(d) + KN(d - \sigma_\phi(t, T))) . \quad (2.2.5)$$

Essas fórmulas são análogas às fórmulas de Black-Scholes para opções Européias que não pagam dividendos, considerando o preço da ação igual a  $e^{-rt}F_{T,0}$  e a volatilidade anual igual a  $\sigma_\phi(t, T)/\sqrt{t}$ . A Figura 2.2 mostra a curva da volatilidade anual das opções, assumindo que estas expiram em  $T$ , mesmo instante em que os contratos futuros atingem sua maturidade. Pode-se observar que a volatilidade anual das opções é maior do que a volatilidade instantânea dos contratos futuros correspondentes. À medida que a maturidade aumenta, a volatilidade anual das opções se aproxima da volatilidade do nível de equilíbrio ( $\sigma_\xi$ ), uma vez que quase toda a incerteza sobre os preços à vista na maturidade é um resultado da incerteza sobre os preços de equilíbrio então em vigência.

## 2.3 Relação com o Modelo de Gibson-Schwartz

O modelo de Gibson-Schwartz, ou modelo de retorno de conveniência estocástico, assume que o retorno de conveniência  $\delta_t$  e o logaritmo do preço à vista no tempo  $t$  ( $\ln(S_t)$ ), denotado no artigo de Gibson e Schwartz [4] por  $X_t$ , são regidos pelas equações

$$dX_t = (\mu - \delta_t - \frac{1}{2}\sigma_1^2)dt + \sigma_1 dz_1 , e \quad (2.3.1)$$

$$d\delta_t = \kappa(\alpha - \delta_t)dt + \sigma_2 dz_2 , \quad (2.3.2)$$

onde  $dz_1$  e  $dz_2$  são incrementos correlacionados do processo de movimento Browniano padrão, com  $dz_1 dz_2 = \rho dt$ . O retorno de conveniência  $\delta_t$  segue um processo de Ornstein-Uhlenbeck com nível de equilíbrio  $\alpha$  e taxa de reversão à média  $\kappa$ . Além disso, o retorno de conveniência também influencia no preço à vista, como pode ser visto pela Equação (2.3.1).

As variáveis do modelo de curto prazo/longo prazo podem ser escritas em termos das variáveis do modelo de retorno de conveniência estocástico, de acordo com as equações

$$\chi_t = \frac{1}{\kappa}(\delta_t - \alpha) , e \quad (2.3.3)$$

$$\xi_t = X_t - \chi_t = X_t - \frac{1}{\kappa}(\delta_t - \alpha) . \quad (2.3.4)$$

Usando as Equações (2.3.2) e (2.3.3), demonstra-se que

$$\chi_t = -\kappa\chi_t dt + \frac{\sigma_2}{\kappa} dz_2 .$$

E, usando as Equações (2.3.4), (2.3.1) e (2.3.2), demonstra-se que

$$\xi_t = (\mu - \alpha - \frac{1}{2}\sigma_1^2)dt + \sigma_1 dz_1 - \frac{\sigma_2}{\kappa} dz_2 .$$

Comparando essas duas equações com as Equações (2.1.1) e (2.1.2), percebemos que os dois modelos são equivalentes se relacionamos seus parâmetros conforme se pode ver na Tabela 2.1.

Parâmetro do modelo de curto prazo/- longo prazo		Definição em termos do modelo de retorno de conveniência estocástico
Símbolo	Descrição	
$\kappa$	Coefficiente de reversão à média no curto prazo	$\kappa$
$\sigma_\chi$	Volatilidade de curto prazo	$\sigma_2/\kappa$
$dz_\chi$	Incrementos do processo de curto prazo	$dz_2$
$\mu_\xi$	Tendência do nível de equilíbrio	$(\mu - \alpha - \frac{1}{2}\sigma_1^2)$
$\sigma_\xi$	Volatilidade de equilíbrio	$(\sigma_1^2 + \sigma_2^2/\kappa^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2/\kappa)^{1/2}$
$dz_\xi$	Incrementos do processo de equilíbrio	$(\sigma_1 dz_1 - (\sigma_2/\kappa) dz_2)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2/\kappa^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2/\kappa)^{-1/2}$
$\rho_{\xi\chi}$	Correlação dos incrementos	$(\rho\sigma_1 - \sigma_2/\kappa)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2/\kappa^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2/\kappa)^{-1/2}$
$\lambda_\chi$	Prêmio de risco de curto prazo	$\lambda/\kappa$
$\lambda_\xi$	Prêmio de risco de equilíbrio	$\mu - r - \lambda/\kappa$

Tabela 2.1: Relação entre os parâmetros do modelo de curto prazo/longo prazo e o modelo de retorno de conveniência estocástico de Gibson-Schwartz [4]

O processo neutro ao risco do modelo de Gibson-Schwartz [4] é descrito pelas equações

$$dX_t = (r - \delta_t - \frac{1}{2}\sigma_1^2)dt + \sigma_1 dz_1^* , \text{ e}$$

$$d\delta_t = [\kappa(\alpha - \delta_t) - \lambda]dt + \sigma_2 dz_2^* ,$$

onde  $dz_1^*$  e  $dz_2^*$  são incrementos correlacionados do processo de movimento Browniano padrão, com  $dz_1^* dz_2^* = \rho dt$ , e  $r$  é a taxa livre de risco. Seguindo uma análise similar à feita para os processos reais, percebe-se que os valores de  $\lambda_\chi$  e  $\lambda_\xi$  mostrados na tabela dada pela Figura 2.1 fazem com que os dois modelos sejam equivalentes também na condição neutra ao risco.

Analisando a influência da taxa livre de risco  $r$  no modelo, observou-se que ela não é necessária para especificar a dinâmica do preço à vista, tanto no processo real quanto no processo neutro ao risco. O mesmo se observa no apreçamento de contratos futuros e *forward*. A taxa livre de risco, entretanto, é necessária para apreçar muitos derivativos (incluindo opções) e ativos reais usando tanto o modelo de retorno de conveniência estocástico quanto o modelo de curto prazo/longo prazo.

## 2.4 Estimando as Variáveis de Estado e os Parâmetros do Modelo

### 2.4.1 Filtro de Kalman

O filtro de Kalman é um procedimento recursivo para estimar computacionalmente variáveis de estado não observáveis, com base em observações que dependem dessas variáveis. Dada uma distribuição prévia do valor inicial das variáveis de estado e um modelo descrevendo a verossimilhança das observações como uma função dos valores verdadeiros, o filtro de Kalman gera uma distribuição posterior atualizada para as variáveis de estado de acordo com a regra de Bayes. Para formular o modelo de curto prazo/longo prazo para o uso do filtro de Kalman, o artigo de Schwartz e Smith [9] trabalha com intervalos de tempo discretos e define equações que descrevem a evolução das variáveis de estado e a relação entre os preços futuros observados e essas variáveis. Nesse caso, as variáveis de estado são o desvio de curto prazo ( $\chi_t$ ) e o nível de equilíbrio ( $\xi_t$ ), e as observações são os logaritmos dos preços dos contratos futuros disponíveis. Modelando essa relação em termos do filtro de Kalman, a evolução das variáveis de estado é descrita pela equação de transição (*transition equation*), derivada da Equação (2.1.3) e escrita como

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{c} + \mathbf{G}\mathbf{x}_{t-1} + \omega_t, t = 1, \dots, n_T, \quad (2.4.1)$$

onde:

$\mathbf{x}_t \equiv [\chi_t, \xi_t]$ , vetor  $2 \times 1$  de variáveis de estado;

$\mathbf{c} \equiv [0, \mu_\xi \Delta t]$ , vetor  $2 \times 1$ ;

$\mathbf{G} \equiv \begin{bmatrix} e^{-k\Delta t} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , matriz  $2 \times 2$ ;

$\omega_t$  é um vetor de perturbações não correlacionadas, normalmente distribuídas com  $\mathbb{E}[\omega_t] = 0$  e  $\text{Var}[\omega_t] = \mathbf{W} \equiv \text{Cov}[(\chi_{\Delta t}, \xi_{\Delta t})]$  (dada pela Equação (2.1.3b));

$\Delta t \equiv$  tamanho dos intervalos de tempo; e

$n_T \equiv$  o número de intervalos de tempo do conjunto de dados.

A equação de cálculo (*measurement equation*) descreve a relação entre as variáveis de estado e os preços observados. Da Equação (2.2.3), temos que

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{d}_t + \mathbf{F}'_t \mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t, t = 1, \dots, n_T, \quad (2.4.2)$$

onde:

$\mathbf{y}_t \equiv [\ln(F_{T_1}), \dots, \ln(F_{T_n})]$ , vetor  $n \times 1$  dos logaritmos dos preços futuros observados com maturidades  $T_1, T_2, \dots, T_n$ ;

$\mathbf{d}_t \equiv [A(T_1), \dots, A(T_n)]$ , vetor  $n \times 1$ ;

$\mathbf{F}_t \equiv [e^{-kT_1} \mathbf{1}, \dots, e^{-kT_n} \mathbf{1}]$ , matriz  $n \times 2$ ; e

$\mathbf{v}_t$ , vetor  $n \times 1$  com perturbações não correlacionadas, normalmente distribuídas com

$$\mathbb{E}[\mathbf{v}_t] = 0 \text{ e } \text{Cov}[\mathbf{v}_t] = V.$$

Tudo nessa formulação é derivado diretamente do modelo, com exceção da introdução dos erros de medida ( $\mathbf{v}_t$ ). Esses erros podem ser interpretados como uma representação dos erros dos preços reportados ou, alternativamente, como os erros relativos ao ajuste do modelo aos preços observados.

Dadas essas equações e um conjunto de preços futuros observados ( $\mathbf{y}_t, t = 1, \dots, n_T$ ), roda-se o filtro de Kalman recursivamente, começando com uma distribuição prévia das variáveis de estado ( $x_0 = [\chi_0, \xi_0]$ ). Assume-se que  $x_0$  é uma distribuição normal multivariada com média dada pelo vetor  $\mathbf{m}_0$  e matriz de covariância  $\mathbf{C}_0$ . Em cada período subsequente, usa-se a observação  $\mathbf{y}_t$ , e o vetor de média e a matriz de covariância do período anterior para calcular o vetor de média e a matriz de covariância posteriores para as variáveis de estado correntes. Usando a notação das Equações (2.4.1) e (2.4.2), a média e a covariância das variáveis de estado condicionadas a toda a informação disponível no tempo  $t$  são dadas por

$$\mathbb{E}[\chi_t, \xi_t] = \mathbf{m}_t \equiv \mathbf{a}_t + \mathbf{A}_t(\mathbf{y}_t - \mathbf{f}_t), \text{ e} \quad (2.4.3a)$$

$$\text{Var}[\chi_t, \xi_t] = \mathbf{C}_t \equiv \mathbf{R}_t - \mathbf{A}_t \mathbf{Q}_t \mathbf{A}'_t, \quad (2.4.3b)$$

onde  $\mathbf{a}_t \equiv \mathbf{c} + \mathbf{G}\mathbf{m}_{t-1}$  e  $\mathbf{R}_t \equiv \mathbf{G}_t \mathbf{C}_{t-1} \mathbf{G}'_t + \mathbf{W}$  são a média e a covariância de  $(\chi_t, \xi_t)$ , baseado no que é conhecido como período  $t-1$ . Similarmente,  $\mathbf{f}_t \equiv \mathbf{d}_t + \mathbf{F}'_t \mathbf{a}_t$  e  $\mathbf{Q}_t \equiv \mathbf{F}'_t \mathbf{R}_t \mathbf{F}_t + \mathbf{V}$  são a média e a covariância dos preços futuros no período  $t$ , dado o que é conhecido do período  $t-1$ . A matriz  $\mathbf{A}_t \equiv \mathbf{R}_t \mathbf{F}_t \mathbf{Q}_t^{-1}$  define uma correção para as variáveis de estado previstas ( $\mathbf{a}_t$ ) baseado na diferença entre os logaritmos dos preços observados no tempo  $t$  ( $\mathbf{y}_t$ ) e o vetor de preços estimados para o período  $t$  ( $\mathbf{f}_t$ ).

## 2.4.2 Estimando as Variáveis de Estado a partir dos Preços à Vista e dos Preços Futuros

Supondo que sejam observados apenas preços à vista em cada período, sempre haverá uma incerteza na estimação das variáveis de estado, uma vez que, dada uma mudança no preço à vista, é impossível dizer se essa mudança ocorreu em razão de uma mudança no desvio de curto prazo, ou de uma mudança no preço de equilíbrio, ou de uma combinação desses fatores. Se, ao invés de observar apenas preços à vista, forem observados preços de um vetor de contratos futuros com diferentes maturidades, haverá uma menor incerteza sobre as variáveis de estado.

## 2.4.3 Estimação de Parâmetros

O filtro de Kalman possibilita a estimação de variáveis de estado sobre o tempo, dadas algumas suposições particulares sobre os parâmetros do processo; todos os resultados probabilísticos anteriores assumiam que os parâmetros do processo eram conhecidos. O filtro de Kalman também possibilita que se calcule eficientemente a verossimilhança de um conjunto de observações, considerando um conjunto particular de parâmetros. Assim, pode-se identificar o conjunto de parâmetros que maximiza a função de verossimilhança.

## 2.4.4 Estimação Implícita de Variáveis de Estado e de Parâmetros

Em algumas aplicações, ao invés de utilizar preços futuros históricos e rodar o filtro de Kalman, pode ser mais fácil selecionar variáveis de estado para ajustar a curva dos preços

futuros em vigor. Por exemplo, dadas estimativas dos parâmetros do modelo, pode-se montar uma planilha que calcula preços futuros do modelo como função das variáveis de estado, usando a Equação (2.2.3), e então escolher valores para as variáveis de estado que minimizam os quadrados das diferenças entre os preços futuros observados e aqueles dados pelo modelo. Essa metodologia pode ser usada para estimar um desvio de curto prazo e um preço de equilíbrio, e traçar a curva dos preços futuros da Figura reffss2, ajustando-a aos valores observados marcados com Xs.

Métodos implícitos também podem ser usados para determinar alguns dos parâmetros do modelo, além das variáveis de estado. Essa metodologia pode ser usada para estimar parâmetros de volatilidade e traçar a curva de volatilidade das opções, ajustando-a aos dados observados, como na Figura 2.2.

Apesar de essas estimativas não serem idênticas às dadas pelo método da máxima verossimilhança, elas podem ser mais facilmente geradas e suficientes para muitas aplicações.

## 2.5 Resultados Empíricos

Schwartz e Smith [9] utilizam duas bases diferentes de dados para fazer estimações usando seu modelo. A primeira base de dados consiste de observações semanais de preços de contratos futuros de petróleo NYMEX, com maturidades de 1, 5, 9, 13 e 17 meses, de 02/01/90 a 17/02/95. A segunda consiste de preços históricos de contratos *forward* de petróleo, disponibilizados por Enron Capital & Trade Resources, de 15/01/93 a 16/05/96, com maturidades de 2, 5 e 8 meses, e de 1, 1,5, 2, 3, 5, 7 e 9 anos.

### 2.5.1 Estimação de Variáveis de Estado e de Parâmetros

A seguir, serão mostrados os resultados empíricos atingidos por Schwartz e Smith [9]. A Tabela 2.2 mostra resultados da estimação de parâmetros pela método da máxima verossimilhança para cada conjunto de dados. Analisando essa tabela, percebe-se que a tendência de longo prazo ( $\mu_\xi$ ) e o prêmio de risco de curto prazo ( $\lambda_\chi$ ) não foram estimados com muita acurácia. Essa indeterminação pode ser explicada graficamente pela Figura 2.1. Nela, os valores esperados dos preços à vista, representados pela curva superior, nunca podem ser observados diretamente e não se pode determinar a localização precisa dessa curva ou sua inclinação de longo prazo. Os prêmios de risco  $\lambda_\chi$  e  $\lambda_\xi$  descrevem a diferença entre os preços esperados e os preços futuros e, em razão dos preços esperados não serem observados, esses prêmios de risco não são bem estimados.

Na verdade, usando dados de contratos futuros, pode-se estimar precisamente o processo neutro ao risco dos preços à vista, mas não se pode estimar precisamente o processo real. Os dois parâmetros, os quais não se pode estimar com precisão, não afetam as distribuições neutras ao risco dos preços à vista e, portanto, não afetam a avaliação de ativos financeiros que dependem apenas dos preços à vista. Para estimar com precisão os prêmios de risco ( $\lambda_\chi$  e  $\lambda_\xi$ ) e os valores reais das variáveis de estado, seria necessário usar uma série de tempo mais longa ou incluir observações que dependem do preço do processo verdadeiro e não do processo neutro ao risco.

Parâmetro	Descrição	Dados futuros			Dados da Enron Capital		
			Estimativa	Erro padrão		Estimativa	Erro padrão
$\kappa$	Coefficiente de reversão à média no curto prazo		1,49	0,03		1,19	0,03
$\sigma_\chi$	Volatilidade de curto prazo		28,6%	1,0%		15,8%	0,9%
$\lambda_\chi$	Prêmio de risco de curto prazo		15,7%	14,4%		1,4%	8,2%
$\mu_\xi$	Tendência do nível de equilíbrio		-1,25%	7,28%		-3,86%	7,28%
$\sigma_\xi$	Volatilidade de equilíbrio		14,5%	0,5%		11,5%	0,6%
$\mu_\xi^*$	Tendência do nível de equilíbrio		1,15%	0,13%		1,61%	0,12%
$\rho_{\xi\chi}$	Correlação dos incrementos		0,300%	0,044%		0,189%	0,096%
	Desvios padrões do erro da equação de cálculo (Equação (2.4.2))	Maturidade do contrato			Maturidade do contrato		
$s_1$	"	1 mês	0,042	0,002	2 meses	0,027	0,001
$s_2$	"	5 meses	0,006	0,001	5 meses	0,006	0,001
$s_3$	"	9 meses	0,003	0,000	8 meses	0,000	
$s_4$	"	13 meses	0,000		12 meses	0,002	0,000
$s_5$	"	17 meses	0,004	0,000	18 meses	0,000	
$s_6$	"				2 anos	0,005	0,000
$s_7$	"				3 anos	0,014	0,003
$s_8$	"				5 anos	0,032	0,015
$s_9$	"				7 anos	0,043	0,036
$s_{10}$	"				9 anos	0,055	0,041

Tabela 2.2: Estimação dos parâmetros pelo método da máxima verossimilhança

A Figura 2.3 mostra os valores estimados para o preço de equilíbrio (dado por  $\exp(\xi_t)$ ) e para o preço à vista ( $\exp(\chi_t + \xi_t)$ ) para os dados dos contratos futuros de petróleo NYMEX. A análise dessa figura mostra que houve uma significativa reversão à média nos desvios de curto prazo: a "meia-vida" apresentada para esses desvios foi de aproximadamente 6 meses ( $= \ln(0,5)/\kappa$ ). Além disso, observa-se que os preços à vista são muito mais voláteis do que os preços de equilíbrio, refletindo em uma substancial volatilidade de curto prazo. Os preços à vista foram algumas vezes maiores e outras menores do que o nível do preço de equilíbrio, sendo que as maiores diferenças ocorreram durante a Guerra do Golfo, de agosto de 1990 a janeiro de 1991.

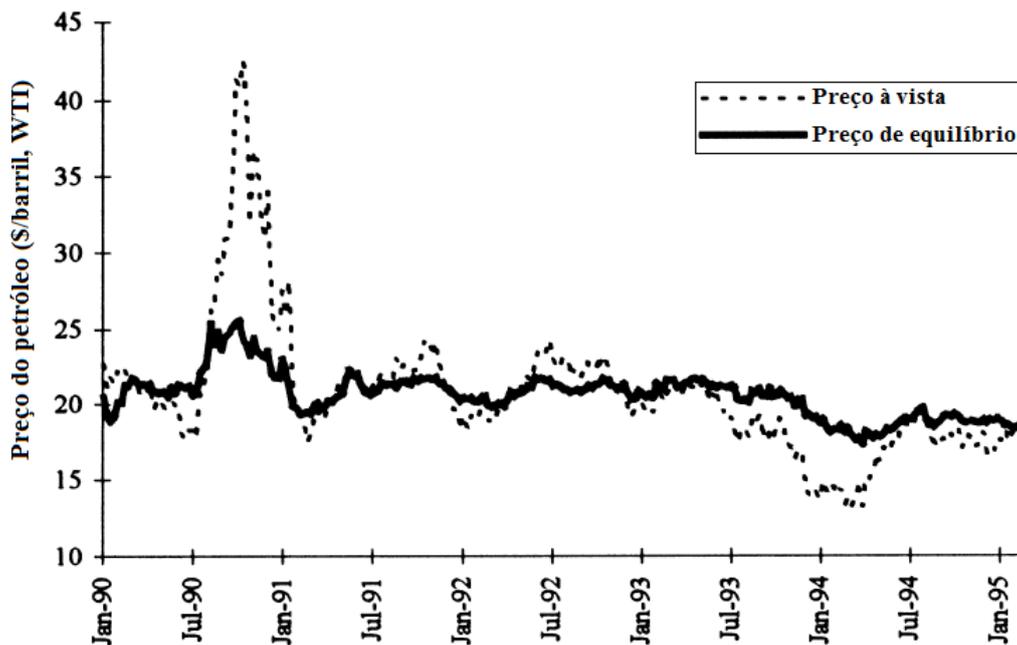


Figura 2.3: Estimação dos preços à vista e dos preços de equilíbrio para os dados dos contratos futuros de petróleo NYMEX

A Tabela 2.3 mostra os erros no ajuste do modelo aos preços futuros. De modo geral, o modelo se ajusta melhor aos contratos futuros de médio prazo, apresentando erros maiores nos casos de contratos de prazos muito pequenos ou muito grandes. Em ambos os conjuntos de dados, Schwartz e Smith [9] assumiram que alguns contratos futuros de médio prazo possuíam erro nulo, uma vez que assim se observou um melhor ajuste do modelo. Na Tabela 2.3, observa-se que os contratos em que se assumiu erro nulo foram os seguintes: contrato de maturidade igual a 13 meses para os dados relativos ao petróleo NYMEX; contratos de maturidades iguais a 8 e a 18 meses para os dados da Enron Capital.

Dados futuros				Dados da Enron Capital			
Maturidade do Contrato	Erro Médio	Desvio Padrão do Erro	Erro Médio Absoluto	Maturidade do Contrato	Erro Médio	Desvio Padrão do Erro	Erro Médio Absoluto
1 mês	-0,0053	0,0414	0,0314	2 meses	0,0104	0,0249	0,0207
2 meses	0,0005	0,0044	0,0035	5 meses	0,0017	0,0058	0,0049
9 meses	-0,0002	0,0025	0,0020	8 meses	0,0000	0,0000	0,0000
13 meses	0,0000	0,0000	0,0000	12 meses	-0,0006	0,0023	0,0019
17 meses	0,0000	0,0035	0,0028	18 meses	0,0000	0,0000	0,0000
				2 anos	0,0012	0,0047	0,0040
				3 anos	0,0040	0,0133	0,0121
				5 anos	0,0042	0,0320	0,0276
				7 anos	-0,0076	0,0429	0,0318
				9 anos	-0,0245	0,0493	0,0332

Tabela 2.3: Erros no ajuste do modelo ao logaritmo dos preços futuros

Este Capítulo fez um resumo do que foi apresentado no artigo de Schwartz e Smith [9]. Dessa forma, tratou da teoria do modelo de curto prazo/longo prazo e de como realizar sua calibragem utilizando a técnica filtro de Kalman e o método da máxima verossimilhança. Também apresentou alguns resultados empíricos atingidos pelos autores. O Capítulo 3 descreverá toda a metodologia utilizada neste trabalho, a começar pela implementação do modelo de Schwartz-Smith.

# Capítulo 3

## Metodologia

### 3.1 Implementação do Modelo de Schwartz-Smith

#### 3.1.1 Dados de Entrada

Primeiramente, para aplicar o modelo de Schwartz-Smith, foram utilizadas duas bases de dados que consistem de observações semanais de preços de contratos futuros das *commodities* WTI e BRENT, com maturidades de 1, 5, 9, 13 e 17 meses, no período de 02/01/2009 a 09/08/2013. Os dados da WTI foram retirados da Bloomberg e os dados da BRENT foram retirados do endereço eletrônico *www.quandl.com*. A fim de comparar os preços à vista calculados pelo modelo de Schwartz-Smith, foram utilizados os preços à vista dessas duas *commodities*, observados semanalmente durante o mesmo período, e extraídos do endereço eletrônico <http://www.eia.gov/petroleum/supply/weekly/>.

Os dados dos contratos futuros tiveram que ser tratados para que fossem utilizados como dados de entrada na implementação do modelo de Schwartz-Smith. Observando as regras que regem os dias de vencimento dos contratos futuros de WTI e BRENT, foi considerado que os vencimentos dessas *commodities* ocorrem nos dias 21 e 15 de cada mês respectivamente. A partir dessa consideração e ainda considerando que um mês possui 30 dias, foi feita uma interpolação linear de todos os dados. Para exemplificar essa interpolação, iremos utilizar o preço do contrato futuro de WTI no dia 02/01/2009, com maturidade de 1 mês, o qual corresponde a  $P_1 = 46,34$  dólares. O vencimento desse contrato ocorre no dia 21/01/2009, entretanto, para utilizar o modelo de Schwartz-Smith, deseja-se obter o valor do contrato que vence em 1 mês e não em  $V_1 = 19$  dias. Para isso, também é necessário utilizar o preço do contrato futuro de WTI do dia 02/01/2009, com maturidade de 2 meses, o qual corresponde a  $P_2 = 50,21$  dólares. Este contrato vence no dia 21/02/2009, ou seja, aproximadamente  $V_2 = (19+30) = 49$  dias após o dia 02/01/2009. Assim, o valor do contrato futuro interpolado  $V_1^{int}$ , que vence em 1 mês, ou seja, em 30 dias, é dado por

$$V_1^{int} = P_1 + \frac{P_2 - P_1}{V_2 - V_1}(30 - V_1) = 47,76 \text{ dólares.}$$

O mesmo procedimento foi repetido no tratamento dos demais dados. Para isso, foi utilizada a fórmula

$$V_n^{int} = P_n + \frac{P_{n+1} - P_n}{V_{n+1} - V_n}(30 - V_n) , \quad (3.1.1)$$

em que  $V_n^{int}$  é o valor do contrato futuro interpolado que vence em  $n$  meses;  $P_n$  é o preço do contrato futuro retirado da Bloomberg ou do endereço eletrônico *www.quandl.com*, com maturidade de  $n$  meses; e  $V_n$  é o número de dias ao vencimento do contrato futuro de preço  $P_n$ .

Observe que, dada a Equação (3.1.1), para calcular os preços interpolados dos contratos futuros com maturidades de 1, 5, 9, 13 e 17 meses, foi necessário obter, tanto da Bloomberg quanto do endereço eletrônico *www.quandl.com*, os valores dos contratos futuros com maturidades de 1, 2, 5, 6, 9, 10, 13, 14, 17 e 18 meses.

### 3.1.2 Implementação no Matlab

A implementação do modelo de Schwartz-Smith foi feita com base na tese de mestrado de Goodwin [5], que também implementou o artigo de Schwartz e Smith [9]. Da mesma forma que Goodwin, foram utilizados os seguintes parâmetros iniciais:  $\kappa = 2$ ;  $\sigma_\chi = 0,2$ ;  $\lambda_\chi = 0,2$ ,  $\mu_\xi = 0,02$ ,  $\sigma_\xi = 0,2$ ;  $\mu_\xi^* = 0,02$ ;  $\rho_{\chi\xi} = 0,02$ ;  $s = [s_1, s_2, s_3, s_4, s_5] = [0,01, 0, 0,01, 0, 0,01]$ , sendo  $s$  o vetor das variâncias das perturbações  $\mathbf{v}_t$  da Equação (2.4.2), conhecida como *measurement equation*. Observe que, nessa equação, assumimos que a matriz de covariância de  $\mathbf{v}_t$  é dada por

$$\text{Cov}[\mathbf{v}_t] = V = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_5 \end{bmatrix},$$

conforme recomenda o artigo de Schwartz-Smith [9].

Na implementação, os parâmetros foram organizados na forma de um vetor, dado por  $\theta = [\kappa, \sigma_\chi, \lambda_\chi, \mu_\xi, \sigma_\xi, \mu_\xi^*, \rho_{\chi\xi}, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5]$ .

Além disso, foram feitas as seguintes suposições:  $x_0 = [\chi_0, \xi_0]$  possui distribuição normal multivariada com média dada pelo vetor  $\mathbf{m}_0 = [0; 3, 1307]$  e matriz de covariância

$$\mathbf{C}_0 = \begin{bmatrix} 0,01 & 0,01 \\ 0,01 & 0,01 \end{bmatrix}.$$

Os valores de  $\mathbf{m}_0$  e de  $\mathbf{C}_0$  são os mesmos utilizados por Goodwin [5]. Aplicando-se a Equação (2.4.3) recursivas vezes, usa-se a observação  $\mathbf{y}_t$ , além de  $\mathbf{m}_{t-1}$  e  $\mathbf{C}_{t-1}$ , para calcular  $\mathbf{m}_t$  e  $\mathbf{C}_t$ .

Tomando como base o artigo de Schwartz-Smith [9] e o trabalho de Goodwin [5], os parâmetros foram estimados de forma que um ou uma dupla de contratos futuros foram associados a variâncias das perturbações da *measurement equation* (Equação (2.4.2)) iguais a zero. Dessa forma, as variâncias das perturbações da *measurement equation* restritas a zero são excluídas dos parâmetros a serem estimados. Esse procedimento é realizado para que melhores resultados fossem encontrados, conforme indicado em Schwartz-Smith [9]. Na implementação realizada, tanto para WTI quanto para BRENT, observou-se que melhores resultados foram obtidos zerando as variâncias das perturbações da *measurement equation* dos contratos futuros com maturidades iguais a 5 e a 13 meses. Ou seja, assumimos  $s_2 = 0$ ,  $s_4 = 0$ , e  $s = [s_1, 0, s_3, 0, s_5]$ .

Além de fazer a estimação para o modelo de dois fatores de Schwartz e Smith [9], que será denotado por SS, o mesmo procedimento é repetido para estimar os parâmetros fazendo duas outras considerações. Primeiro, considera-se que o preço à vista da *commodity* é influenciado

apenas pelo nível de equilíbrio dos preços  $\xi_t$ , que segue um processo de Ornstein-Uhlenbeck (OU). Depois, considera-se que o preço à vista da *commodity* é influenciado apenas pelo desvio dos preços no curto prazo  $\chi_t$ , que segue um movimento geométrico Browniano (GBM: *geometric Brownian motion*).

Para estimar os parâmetros do modelo GBM, zeramos as variáveis associadas ao modelo de Ornstein-Uhlenbeck. Procedemos de forma análoga para o modelo de Ornstein-Uhlenbeck. Em ambos os casos, e baseado no trabalho de Goodwin [5], não é necessário zerar variâncias de perturbações da *measurement equation*, procedimento adotado apenas na implementação do modelo de Schwartz-Smith.

Nos três casos considerados, é realizada a estimação dos parâmetros utilizando o Filtro de Kalman, conforme explicado na Seção 2.4.1, e a técnica de estimação pelo Método da Máxima Verossimilhança.

Ao final da utilização do Filtro de Kalman, através da Equação (2.4.3), obtém-se a média  $\mathbb{E}[\chi_t, \xi_t] = \mathbf{m}_t$  e a covariância  $\text{Var}[\chi_t, \xi_t] = \mathbf{C}_t$  das variáveis de estado condicionadas a toda a informação disponível no tempo  $t$ .

A função de verossimilhança  $L(\mathbf{v}_t|\theta)$  utilizada foi construída a partir do vetor de variáveis aleatórias  $\mathbf{v}_t = \mathbf{y}_t - \mathbf{f}_t$ , que possuem distribuição normal com média 0 e matriz de covariância  $\mathbf{Q}_t$ , conforme nomenclatura utilizada na Equação (2.4.3). Assim, o logaritmo neperiano da função de verossimilhança é dado por

$$\ln L(\mathbf{v}_t|\theta) = \sum_{t=1}^{nobs} \left[ -\left(\frac{N}{2}\right) \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln(\det \mathbf{Q}_t) - \frac{1}{2} \mathbf{v}'_t \mathbf{Q}_t^{-1} \mathbf{v}_t \right], \quad (3.1.2)$$

sendo *nobs* o número de observações e  $N$  o número de contratos futuros utilizados.

Utilizando a função de minimização *fmincon* do Matlab, obtemos os valores dos parâmetros  $\theta$  que maximizam a função de verossimilhança. Assim, conclui-se a calibragem dos modelos de Schwartz-Smith, de Ornstein-Uhlenbeck e do movimento geométrico Browniano.

O programa implementado foi rodado 3 vezes. Em cada uma delas, foi modificado apenas o último dia dos dados de entrada. Na primeira vez, foi utilizado o período de 02/01/2009 a 20/06/2013; na segunda, o período de 02/01/2009 a 12/07/2013; e, na terceira, o período de 02/01/2009 a 09/08/2013, que corresponde a toda base de dados.

## 3.2 Previsão dos Fatores de Curto e de Longo Prazos

A previsão dos fatores de curto prazo  $\chi_t$  e de longo prazo  $\xi_t$  é necessária para que se possa calcular os preços das *spread options*. Observe que uma *spread option*, entre duas *commodities* (WTI/BRENT), que vence em um determinado mês envolve os preços dos contratos futuros de WTI e de BRENT que vencem no mesmo mês. O contrato futuro de WTI vence próximo ao dia 21, o de BRENT próximo ao dia 15, e a *spread option* vence, em geral, um dia útil antes do vencimento do contrato futuro de BRENT.

Ao utilizar o dia 20/06/2013 como último dia dos dados de entrada, por exemplo, deseje-se calcular, neste dia, o preço da *spread option* que vence no dia 15/07/2013, que envolve a diferença de preço entre os contratos futuros de WTI e BRENT que vencem nos dias 22/07/2013

e 16/07/2013 respectivamente. Assim, para calcular o preço dessa *spread option*, é necessário obter os preços desses contratos futuros no dia de vencimento da opção, neste caso 15/07/2013, conforme será visto na Seção 3.4.

Da mesma forma que será mostrada na Seção 3.3, o logaritmo neperiano dos preços dos contratos futuros no tempo  $t$  e com maturidade  $T$  é dado por

$$\ln(F(T, t)) = e^{-\kappa(T-t)}\chi_t + \xi_t + A(T-t), \text{ onde}$$

$$A(T-t) = \mu_\xi^*(T-t) - (1 - e^{-\kappa(T-t)})\frac{\lambda_\chi}{\kappa} + \frac{1}{2} \left[ (1 - e^{-2\kappa(T-t)})\frac{\sigma_\chi^2}{2\kappa} + \sigma_\xi^2(T-t) + 2(1 - e^{-\kappa(T-t)})\frac{\rho_{\chi\xi}\sigma_\chi\sigma_\xi}{\kappa} \right].$$

Observe que o preço do contrato futuro no tempo  $t$  depende dos fatores de curto prazo  $\chi_t$  e de longo prazo  $\xi_t$  no tempo  $t$ . Ao utilizar o dia 20/06/2013 como último dia dos dados de entrada na calibragem do modelo de Schwartz-Smith, só são obtidos os valores de  $\chi_t$  e  $\xi_t$  para este dia. Entretanto, é necessário fazer a estimativa dos valores de  $\chi_t$  e  $\xi_t$  no dia 15/07/2013 para que possam ser estimados os preços dos contratos futuros nesta data e, então, calcular, para o dia 20/06/2013, o preço da *spread option* que vence em 15/07/2013.

Este trabalho também se propôs a calcular preços de *spread options* em mais duas datas. Ao utilizar o dia 12/07/2013 como último dia dos dados de entrada, deseja-se calcular, neste dia, o preço da *spread option* que vence no dia 15/07/2013. Similarmente, ao utilizar o dia 09/08/2013 como último dia dos dados de entrada, deseja-se calcular, neste dia, o preço da *spread option* que vence no dia 14/08/2013.

### 3.2.1 Método de Euler

Após implementação do modelo de Schwartz-Smith, foi implementado o método de Euler para, a partir do último dia dos dados de entrada, estimar os valores de  $\chi_t$  e de  $\xi_t$  das *commodities* WTI e BRENT para o dia de vencimento da *spread option* cujo valor será calculado. A partir das Equações (2.2.1a) e (2.2.1b), foram obtidas as fórmulas de Euler dadas por

$$\chi_{n+1} = \chi_n + (-\kappa\chi_n - \lambda_\chi)h + \sigma_\chi\Delta z_n, \text{ e} \quad (3.2.1)$$

$$\xi_{n+1} = \xi_n + (\mu_\xi - \lambda_\xi)h + \sigma_\xi\Delta z_n, \quad (3.2.2)$$

sendo  $\chi_0$  e  $\xi_0$  os valores de  $\mathbb{E}[\chi_t]$  e de  $\mathbb{E}[\xi_t]$  estimados para o último dia da base de dados utilizando o modelo de Schwartz-Smith. O valor de  $h$  corresponde a  $(t_{n+1} - t_n)$ , intervalo de tempo decorrido entre a determinação dos fatores  $\chi_n$  e  $\chi_{n+1}$  ou  $\xi_n$  e  $\xi_{n+1}$ . Observe que  $\Delta z_n$  possui distribuição normal com média 0 e variância  $t_{n+1} - t_n$ . Para fins de implementação,  $\Delta z_n$  foi substituído pela expressão equivalente  $(t_{n+1} - t_n)^{1/2}z$ , sendo  $z$  um browniano, variável aleatória de distribuição normal com média 0 e variância 1.

### 3.2.2 Obtenção dos Brownianos Correlacionados

Para cada iteração do método de Euler, devemos obter um vetor  $Z$  de 4 brownianos correlacionados, dois correspondentes aos fatores  $\chi_t$  e  $\xi_t$  de WTI, e dois correspondentes aos fatores  $\chi_t$  e  $\xi_t$  de BRENT. Para encontrar esse vetor  $Z$ , definimos a matriz de correlação  $\Sigma$  de dimensão  $4 \times 4$ , e aplicamos a decomposição de Cholesky

$$\Sigma = A^T A, \quad (3.2.3)$$

sendo  $A$  uma matriz de dimensão  $4 \times 4$  e

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{\chi^{WTI}\xi^{WTI}} & \rho_{\chi^{WTI}\chi^{BRENT}} & \rho_{\chi^{WTI}\xi^{BRENT}} \\ \rho_{\xi^{WTI}\chi^{WTI}} & 1 & \rho_{\xi^{WTI}\chi^{BRENT}} & \rho_{\xi^{WTI}\xi^{BRENT}} \\ \rho_{\chi^{BRENT}\chi^{WTI}} & \rho_{\chi^{BRENT}\xi^{WTI}} & 1 & \rho_{\chi^{BRENT}\xi^{BRENT}} \\ \rho_{\xi^{BRENT}\chi^{WTI}} & \rho_{\xi^{BRENT}\xi^{WTI}} & \rho_{\xi^{BRENT}\chi^{BRENT}} & 1 \end{bmatrix}.$$

Após gerar um vetor  $Y$  de 4 brownianos independentes, o vetor  $Z$  de brownianos correlacionados é dado por

$$Z = AY. \quad (3.2.4)$$

Observe que a matriz  $\Sigma$  é simétrica. Para determiná-la, são utilizadas as correlações  $\rho_{\chi^{WTI}\xi^{WTI}}$  e  $\rho_{\chi^{BRENT}\xi^{BRENT}}$  extraídas da calibragem do modelo de Schwartz-Smith feita para as duas *commodities*. Entretanto, ainda é preciso obter a correlação entre os brownianos de:  $\chi_t^{WTI}$  e  $\chi_t^{BRENT}$ ,  $\chi_t^{WTI}$  e  $\xi_t^{BRENT}$ ,  $\xi_t^{WTI}$  e  $\chi_t^{BRENT}$ ,  $\xi_t^{WTI}$  e  $\xi_t^{BRENT}$ . Para isso, foram feitos alguns cálculos a fim de obter os vetores dos brownianos associados a  $\chi_t$  e  $\xi_t$  referentes aos dados de entrada, para ambas as *commodities*, conforme mostrado abaixo. Primeiro, parte-se da equação

$$d(e^{\kappa t} \chi_t) = \kappa e^{\kappa t} dt \chi_t + e^{\kappa t} d\chi_t. \quad (3.2.5)$$

Substituindo a Equação (2.2.1a) na Equação (3.2.5), temos que

$$\begin{aligned} d(e^{\kappa t} \chi_t) &= e^{\kappa t} (\kappa \chi_t dt - \kappa \chi_t dt - \lambda_\chi dt + \sigma_\chi dz_\chi^*) \\ &= e^{\kappa t} (-\lambda_\chi dt + \sigma_\chi dz_\chi^*). \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Integrando a Equação (3.2.6) no intervalo de  $t$  a  $t + \Delta t$ , temos

$$e^{\kappa(t+\Delta t)} \chi_{t+\Delta t} - e^{\kappa t} \chi_t = -\lambda_\chi \int_t^{t+\Delta t} e^{\kappa s} ds + \sigma_\chi \int_t^{t+\Delta t} e^{\kappa s} dz_\chi^*. \quad (3.2.7)$$

Aproximando o cálculo de  $\int_t^{t+\Delta t} e^{\kappa s} dz_\chi^* = e^{\kappa t} \Delta z_\chi$ , temos que

$$e^{\kappa(t+\Delta t)} \chi_{t+\Delta t} - e^{\kappa t} \chi_t = -\lambda_\chi \frac{(e^{\kappa(t+\Delta t)} - e^{\kappa t})}{\kappa} + \sigma_\chi e^{\kappa t} \Delta z_\chi. \quad (3.2.8)$$

Reescrevendo a Equação (3.2.8) e isolando o termo  $\Delta z_\chi$ , temos que

$$\Delta z_\chi = \frac{1}{\sigma_\chi} \left[ e^{\kappa \Delta t} \chi_{t+\Delta t} - \chi_t + \frac{\lambda_\chi}{\kappa} (e^{\kappa \Delta t} - 1) \right]. \quad (3.2.9)$$

Com base nos resultados obtidos com a calibragem do modelo de Schwartz-Smith, é possível resolver a Equação (3.2.9) para WTI e para BRENT, considerando o intervalo de tempo de uma semana entre as observações, ou seja,  $\Delta t = 5/252$ . Visto que este trabalho utilizou uma base de dados com observações semanais, a escolha de  $\Delta t$  foi feita considerando que uma semana e um ano possuem, em média, 5 e 252 dias úteis respectivamente.

Utilizando a Equação (3.2.9), é possível calcular  $z_{\chi_{i+1}}$  a partir de  $z_{\chi_i}$ , uma vez que  $z_{\chi_{i+1}} = z_{\chi_i} + \Delta z_\chi$ . Assim, partindo-se de  $z_0 = 0$ , obtemos dois vetores  $Z_\chi$ , um para cada *commodity*, com dimensão igual ao número de observações dos contratos futuros utilizados como dados de entrada.

Em seguida, integra-se a Equação (2.2.1b) no intervalo de  $t$  a  $t + \Delta t$ , chegando-se à equação

$$\xi_{t+\Delta t} - \xi_t = (\mu_\xi - \lambda_\xi)\Delta t + \sigma_\xi \int_t^{t+\Delta t} dz_\xi^*. \quad (3.2.10)$$

Realizando o cálculo de  $\int_t^{t+\Delta t} dz_\xi^* = \Delta z_\xi$  e isolando o termo  $\Delta z_\xi$ , temos que

$$\Delta z_\xi = \frac{1}{\sigma_\xi} [\xi_{t+\Delta t} - \xi_t - (\mu_\xi - \lambda_\xi)\Delta t]. \quad (3.2.11)$$

Novamente, com base nos resultados obtidos com a calibragem do modelo de Schwartz-Smith, é possível resolver a Equação (3.2.11) para WTI e para BRENT, considerando o intervalo de tempo de uma semana entre as observações, ou seja,  $\Delta t = 5/252$ . Utilizando essa equação, é possível calcular  $z_{\xi_{i+1}}$  a partir de  $z_{\xi_i}$ , uma vez que  $z_{\xi_{i+1}} = z_{\xi_i} + \Delta z_\xi$ . Assim, partindo-se de  $z_0 = 0$ , obtemos dois vetores  $Z_\xi$ , um para cada *commodity*, com dimensão igual ao número de observações dos contratos futuros utilizados como dados de entrada.

De posse dos vetores dos brownianos históricos associados a  $\chi$  e a  $\xi$  das *commodities* WTI e BRENT, pode-se calcular as correlações entre esses vetores dois a dois e completar a matriz de correlação  $\Sigma$ . Assim, supõe-se que os brownianos dos fatores a serem estimados para a utilização do método de Euler serão correlacionados de forma semelhante ao que foi observado no passado.

### 3.2.3 Previsão dos Fatores Utilizando o Método de Euler

Utilizando as Equações (3.2.3) e (3.2.4), calcula-se o vetor  $Z$  de brownianos correlacionados de dimensão 4. Assim, o método de Euler será utilizado para, a partir do último dia dos dados de entrada, estimar os valores de  $\chi_t$  e de  $\xi_t$  das *commodities* WTI e BRENT para o dia em que vence a *spread option* cujo valor será estimado. O primeiro elemento de  $Z$  será utilizado na Equação (3.2.1), calculando-se o valor de  $\chi_t^{WTI}$ . O segundo elemento de  $Z$  será utilizado na Equação (3.2.2), calculando-se o valor de  $\xi_t^{WTI}$ . O terceiro elemento de  $Z$  será utilizado na Equação (3.2.1), calculando-se o valor de  $\chi_t^{BRENT}$ . O quarto elemento de  $Z$  será utilizado na Equação (3.2.2), calculando-se o valor de  $\xi_t^{BRENT}$ .

Ao utilizar o dia 20/06/2013 como último dia da base de dados, foram estimados os valores de  $\chi_t$  e de  $\xi_t$  das *commodities* WTI e BRENT para o dia 15/07/2013. Ao utilizar o dia 12/07/2013 como último dia da base de dados, esses fatores também foram estimados para o dia 15/07/2013. Ao utilizar o dia 09/08/2013 como último dia da base de dados, esses fatores foram estimados para o dia 14/08/2013.

## 3.3 Previsão dos Preços dos Contratos Futuros

Como já foi mencionado, ao utilizar o dia 20/06/2013 como último dia da base de dados, deseja-se estimar os valores dos contratos futuros das *commodities* WTI e BRENT para o dia 15/07/2013. Ao utilizar o dia 12/07/2013 como último dia da base de dados, deseja-se estimar os valores desses contratos futuros também para o dia 15/07/2013. Ao utilizar o dia 09/08/2013

como último dia da base de dados, deseja-se estimar os valores desses contratos futuros para o dia 14/08/2013.

Conforme mostrado por Aiube [1], o logaritmo neperiano dos preços dos contratos futuros no tempo  $t$  e com maturidade  $T$  é dado por

$$\ln(F(T, t)) = e^{-\kappa(T-t)}\chi_t + \xi_t + A(T-t), \text{ onde} \quad (3.3.1)$$

$$A(T-t) = \mu_{\xi}^*(T-t) - (1 - e^{-\kappa(T-t)})\frac{\lambda_{\chi}}{\kappa} + \frac{1}{2} \left[ (1 - e^{-2\kappa(T-t)})\frac{\sigma_{\chi}^2}{2\kappa} + \sigma_{\xi}^2(T-t) + 2(1 - e^{-\kappa(T-t)})\frac{\rho_{\chi\xi}\sigma_{\chi}\sigma_{\xi}}{\kappa} \right].$$

Observe que a Equação (3.3.1) é análoga à Equação (2.2.3), que considera  $t = 0$ . Utilizando a Equação (3.3.1), e os valores de  $\chi_t$  e  $\xi_t$  estimados para os dias 15/07/2013 (das duas formas) e 14/08/2013, são calculados os preços dos contratos futuros para esses mesmos dias. Para o dia 15/07/2013, foram calculados, das duas formas mencionadas, os preços dos contratos futuros de WTI e BRENT que vencem nos dias 22/07/2013 e 16/07/2013 respectivamente. Para o dia 14/08/2013, foram calculados os preços dos contratos futuros de WTI e BRENT que vencem nos dias 20/08/2013 e 15/08/2013 respectivamente.

### 3.4 Cálculo dos Preços das *Spread Options*

Em seguida, foi realizado o cálculo dos preços das *spread options*  $P_{T_{SO}}$ , conforme as seguintes especificações:

- Em 20/06/2013, a *spread option* calculada possui vencimento  $T_{SO}$  em 15/07/2013, e o cálculo de seu preço envolve os preços dos futuros de WTI e BRENT estimados para  $t = T_{SO}$ , neste caso 15/07/2013, que vencem nos dias 22/07/2013 e 16/07/2013 respectivamente.
- Em 12/07/2013, a *spread option* calculada possui vencimento  $T_{SO}$  em 15/07/2013, e o cálculo de seu preço envolve os preços dos futuros de WTI e BRENT estimados para  $t = T_{SO}$ , neste caso 15/07/2013, que vencem nos dias 22/07/2013 e 16/07/2013 respectivamente.
- Em 09/08/2013, a *spread option* calculada possui vencimento  $T_{SO}$  em 14/08/2013, e o cálculo de seu preço envolve os preços dos futuros de WTI e BRENT estimados para  $t = T_{SO}$ , neste caso 14/08/2013, que vencem nos dias 20/08/2013 e 15/08/2013 respectivamente.

Utilizando o Método de Monte Carlo, conforme Equação (1.2.1), para calcular a  $\mathbb{E}^*[(F^{WTI}(T_F, t = T_{SO}) - F^{BRENT}(T_F, t = T_{SO}) - K)^+]$ , verifica-se que os preços dessas *spread options*, considerando uma taxa de juros  $r$  e um *strike*  $K$ , são dados por

$$\begin{aligned} P_{T_{SO}} &= e^{-rT_{SO}} \mathbb{E}^* \left[ [F^{WTI}(T_F, t = T_{SO}) - F^{BRENT}(T_F, t = T_{SO}) - K]^+ \right] \\ &= e^{-rT_{SO}} \frac{1}{N_{sim}} \sum_{k=1}^{N_{sim}} [F^{WTI}(T_F, t = T_{SO}) - F^{BRENT}(T_F, t = T_{SO}) - K]^+, \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

sendo  $T_F$  a representação do vencimento do contrato futuro e  $N_{sim}$  o número de simulações de Monte Carlo.

Observe que, para cada vez que se for utilizar a Equação (3.4.1) para calcular o preço da *spread option*  $P_{T_{SO}}$ , é necessário calcular  $N_{sim}$  vezes os preços dos contratos futuros  $F^{WTI}(T_F, t = T_{SO})$  e  $F^{BRENT}(T_F, t = T_{SO})$  utilizando a Equação (3.3.1). E, para cada

vez que se utiliza esta Equação, é preciso estimar os valores de  $\chi_t$  e  $\xi_t$  a serem utilizados nela, conforme explicado nas Seções 3.2 e 3.3.

Levando em consideração todas as realizações que foram simuladas no Método de Monte Carlo, realizou-se uma média aritmética dos  $N_{sim}$  preços calculados para cada contrato futuro, e se chegou aos seguintes resultados:

- Preços dos futuros de WTI e BRENT no dia 15/07/2013, que vencem nos dias 22/07/2013 e 16/07/2013 respectivamente (partindo-se, no método de Euler, de  $\chi_0$  e  $\xi_0$  do dia 20/06/2013).
- Preços dos futuros de WTI e BRENT no dia 15/07/2013, que vencem nos dias 22/07/2013 e 16/07/2013 respectivamente (partindo-se, no método de Euler, de  $\chi_0$  e  $\xi_0$  do dia 12/07/2013).
- Preços dos futuros de WTI e BRENT no dia 14/08/2013, que vencem nos dias 20/08/2013 e 15/08/2013 respectivamente.

O Anexo A apresenta os códigos implementados em Matlab para que se pudesse obter o preço da *spread option* WTI  $\times$  BRENT para o dia 20/06/2013, conforme a metodologia explicada ao longo deste Capítulo. Os códigos utilizados para a obtenção dos preços das *spread options* WTI  $\times$  BRENT para os dias 12/07/2013 e 09/08/2013 são análogos aos mostrados nesse anexo.

# Capítulo 4

## Resultados

Neste Capítulo, são mostrados os resultados obtidos ao utilizar a metodologia descrita no Capítulo anterior. Primeiramente, na Seção 4.1, são apresentados os resultados da calibração do modelo de Schwartz-Smith. Em seguida, na Seção 4.2, são mostrados os resultados da estimação dos preços dos contratos futuros e das *spread options*.

### 4.1 Resultados da Calibração do Modelo de Schwartz-Smith

#### 4.1.1 Período de 02/01/2009 a 20/06/2013

Após realizar a calibragem do modelo de Schwartz-Smith para o período de 02/01/2009 a 20/06/2013, chegou-se aos parâmetros dados pelas Tabelas 4.1 e 4.2, em que constam os resultados referentes às *commodities* WTI e BRENT respectivamente. Essas tabelas também mostram os valores dos parâmetros estimados para os modelos de Movimento Geométrico Browniano e de Ornstein-Uhlenbeck.

Parâmetro	Descrição	Dados futuros			
			Estimativa SS	Estimativa GBM	Estimativa OU
$\kappa$	Coefficiente de reversão à média no curto prazo		0,4798	0,0001	0,2830
$\sigma_\chi$	Volatilidade de curto prazo		0,2803	0	0,4129
$\lambda_\chi$	Prêmio de risco de curto prazo		-0,5182	0	-0,1970
$\mu_\xi$	Tendência do nível de equilíbrio		0,1140	0,1250	0
$\sigma_\xi$	Volatilidade de equilíbrio		0,2443	0,2739	0
$\mu_\xi^*$	Tendência do nível de equilíbrio		-0,0980	-0,0113	0
$\rho_{\xi\chi}$	Correlação dos incrementos		-0,2532	0,1972	0,0351
	Desvios padrões do erro da <i>measurement equation</i>	Maturidade do contrato			
$s_1$	"	1 mês	0,0230	0,0592	0,0377
$s_2$	"	5 meses	0	0,0192	0,0105
$s_3$	"	9 meses	0,0023	0,0000	0,0000
$s_4$	"	13 meses	0	0,0164	0,0078
$s_5$	"	17 meses	0,0035	0,0317	0,0146

Tabela 4.1: Estimação dos parâmetros de WTI pelo método da máxima verossimilhança (período de 02/01/2009 a 20/06/2013)

Parâmetro	Descrição	Dados futuros			
			Estimativa SS	Estimativa GBM	Estimativa OU
$\kappa$	Coefficiente de reversão à média no curto prazo		0,5589	0,0001	0,2950
$\sigma_\chi$	Volatilidade de curto prazo		0,1982	0	0,3614
$\lambda_\chi$	Prêmio de risco de curto prazo		-0,5177	0	-0,2057
$\mu_\xi$	Tendência do nível de equilíbrio		-0,0280	0,1390	0
$\sigma_\xi$	Volatilidade de equilíbrio		0,2144	0,2615	0
$\mu_\xi^*$	Tendência do nível de equilíbrio		-0,0608	-0,0232	0
$\rho_{\xi\chi}$	Correlação dos incrementos		0,0991	0,1965	0,3917
	Desvios padrões do erro da <i>measurement equation</i>	Maturidade do contrato			
$s_1$	"	1 mês	0,0101	0,0580	0,0219
$s_2$	"	5 meses	0	0,0238	0,0080
$s_3$	"	9 meses	0,0013	0,0000	0,0000
$s_4$	"	13 meses	0	0,0196	0,0062
$s_5$	"	17 meses	0,0023	0,0365	0,0117

Tabela 4.2: Estimação dos parâmetros de BRENT pelo método da máxima verossimilhança (período de 02/01/2009 a 20/06/2013)

As Tabelas (4.3) e (4.4) mostram, para as *commodities* WTI e BRENT, respectivamente, os erros de ajuste dos modelos considerados em relação aos preços de contratos futuros utilizados como dados de entrada, considerando o período de 02/01/2009 a 20/06/2013. Analisando essas tabelas, pode-se observar que, de forma geral, o modelo de Schwartz-Smith apresentou erros de ajuste menores do que os modelos de Movimento Geométrico Browniano e de Ornstein-Uhlenbeck.

WTI	Schwartz-Smith			Movimento Geométrico Browniano			Ornstein-Uhlenbeck		
	Erro Médio	Desvio Padrão do Erro	Erro Médio Absoluto	Erro Médio	Desvio Padrão do Erro	Erro Médio Absoluto	Erro Médio	Desvio Padrão do Erro	Erro Médio Absoluto
1 mês	-0,0106	0,0205	0,0137	-0,0264	0,0531	0,0368	-0,0204	0,0318	0,0269
2 meses	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0042	0,0188	0,0140	-0,0028	0,0102	0,0083
9 meses	-0,0002	0,0023	0,0019	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
13 meses	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0024	0,0163	0,0131	-0,0012	0,0077	0,0060
17 meses	0,0005	0,0034	0,0028	-0,0092	0,0304	0,0254	-0,0047	0,0139	0,0113

Tabela 4.3: Erros no ajuste dos 3 modelos considerados em relação ao logaritmo dos preços futuros observados para a *commodity* WTI (período de 02/01/2009 a 20/06/2013)

BRENT	Schwartz-Smith			Movimento Geométrico Browniano			Ornstein-Uhlenbeck		
Maturidade do Contrato	Erro Médio	Desvio Padrão do Erro	Erro Médio Absoluto	Erro Médio	Desvio Padrão do Erro	Erro Médio Absoluto	Erro Médio	Desvio Padrão do Erro	Erro Médio Absoluto
1 mês	0,0004	0,0101	0,0055	-0,0092	0,0574	0,0470	-0,0047	0,0214	0,0168
2 meses	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0024	0,0237	0,0203	-0,0012	0,0080	0,0067
9 meses	-0,0002	0,0013	0,0010	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
13 meses	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0010	0,0196	0,0172	-0,0003	0,0062	0,0051
17 meses	-0,0002	0,0023	0,0018	-0,0053	0,0362	0,0325	-0,0026	0,0115	0,0097

Tabela 4.4: Erros no ajuste dos 3 modelos considerados em relação ao logaritmo dos preços futuros observados para a *commodity* BRENT (período de 02/01/2009 a 20/06/2013)

A Tabela 4.5 apresenta os valores do logaritmo neperiano da função de verossimilhança para os três modelos calibrados para a *commodity* WTI, considerando o período de 02/01/2009 a 20/06/2013. A Tabela 4.6 apresenta as mesmas informações, mas relativas à *commodity* BRENT. Analisando-se essas tabelas, observa-se que o modelo de Schwartz-Smith [9] foi o que apresentou maior valor da função de verossimilhança tanto para WTI quanto para BRENT. Assim, esse modelo produziu resultados que se ajustaram melhor aos dados históricos utilizados.

Modelos	Logaritmo da função de verossimilhança
Schwartz and Smith, 2000	3738,9
Movimento geométrico Browniano	2340,1
Ornstein-Uhlenbeck	2934,2

Tabela 4.5: Valores dos logaritmos neperianos das funções de verossimilhança dos três modelos utilizados para calcular o preço à vista de WTI (período de 02/01/2009 a 20/06/2013)

Modelos	Logaritmo da função de verossimilhança
Schwartz and Smith, 2000	4218,2
Movimento geométrico Browniano	2233,2
Ornstein-Uhlenbeck	3245,7

Tabela 4.6: Valores dos logaritmos neperianos das funções de verossimilhança dos três modelos utilizados para calcular o preço à vista de BRENT (período de 02/01/2009 a 20/06/2013)

As Figuras 4.1 e 4.2 mostram os gráficos dos preços à vista estimados em cada um dos modelos considerados, de 02/01/2009 a 20/06/2013, para as *commodities* WTI e BRENT respectivamente. Nesses gráficos, foram traçadas as curvas dos preços à vista observados nesse mesmo período, retirados do EIA, para que fossem feitas comparações entre os resultados estimados por cada modelo e os dados reais. Para traçar as curvas referentes ao processo de Ornstein-Uhlenbeck, atribuiu-se ao nível de equilíbrio um valor igual à média dos valores de  $\xi_t$  resultantes da estimação realizada utilizando filtro de Kalman, considerando o período de 02/01/2009 a 20/06/2013.

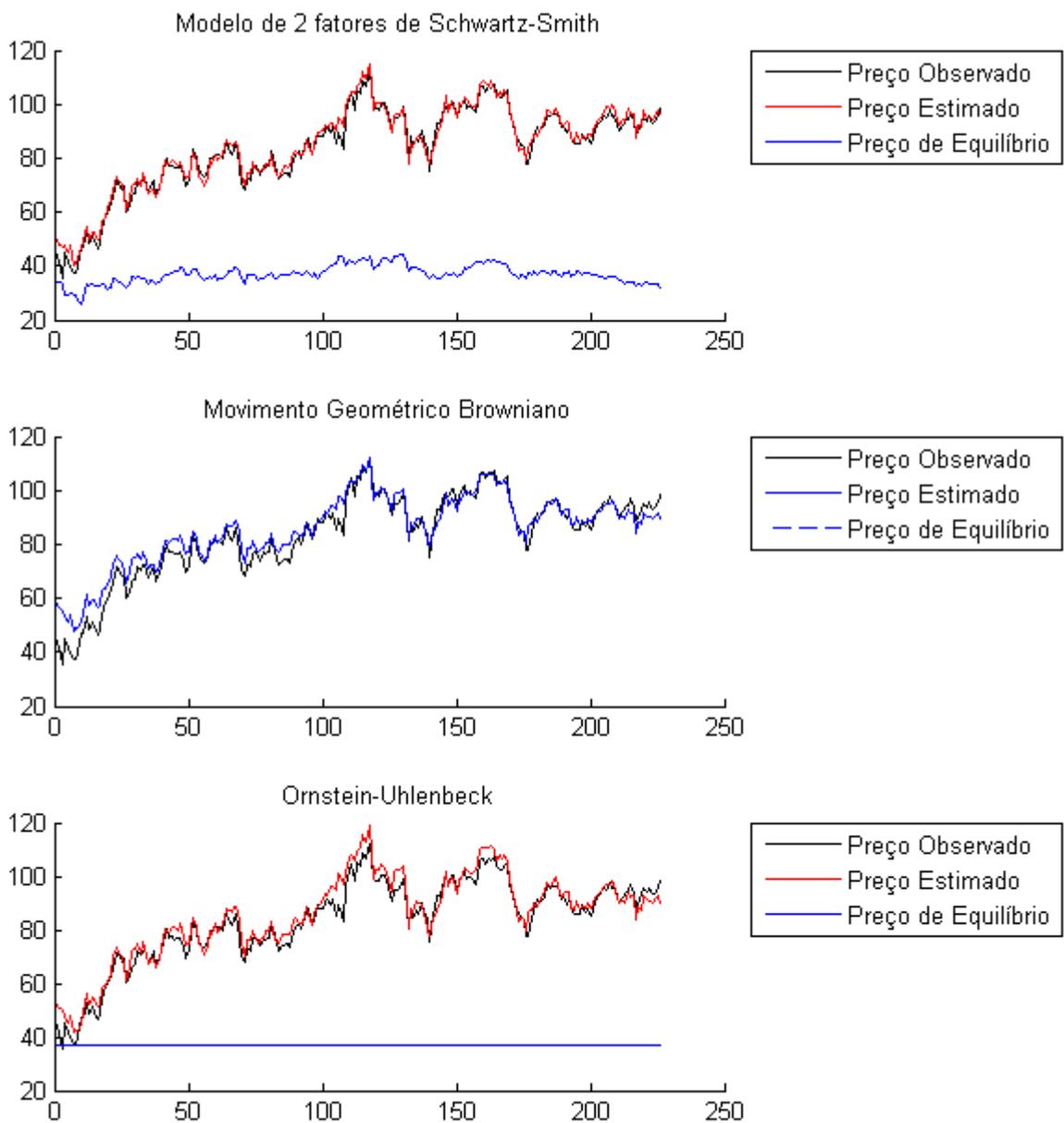


Figura 4.1: Gráficos com os resultados de cada um dos 3 modelos considerados para a *commodity* WTI (período de 02/01/2009 a 20/06/2013)

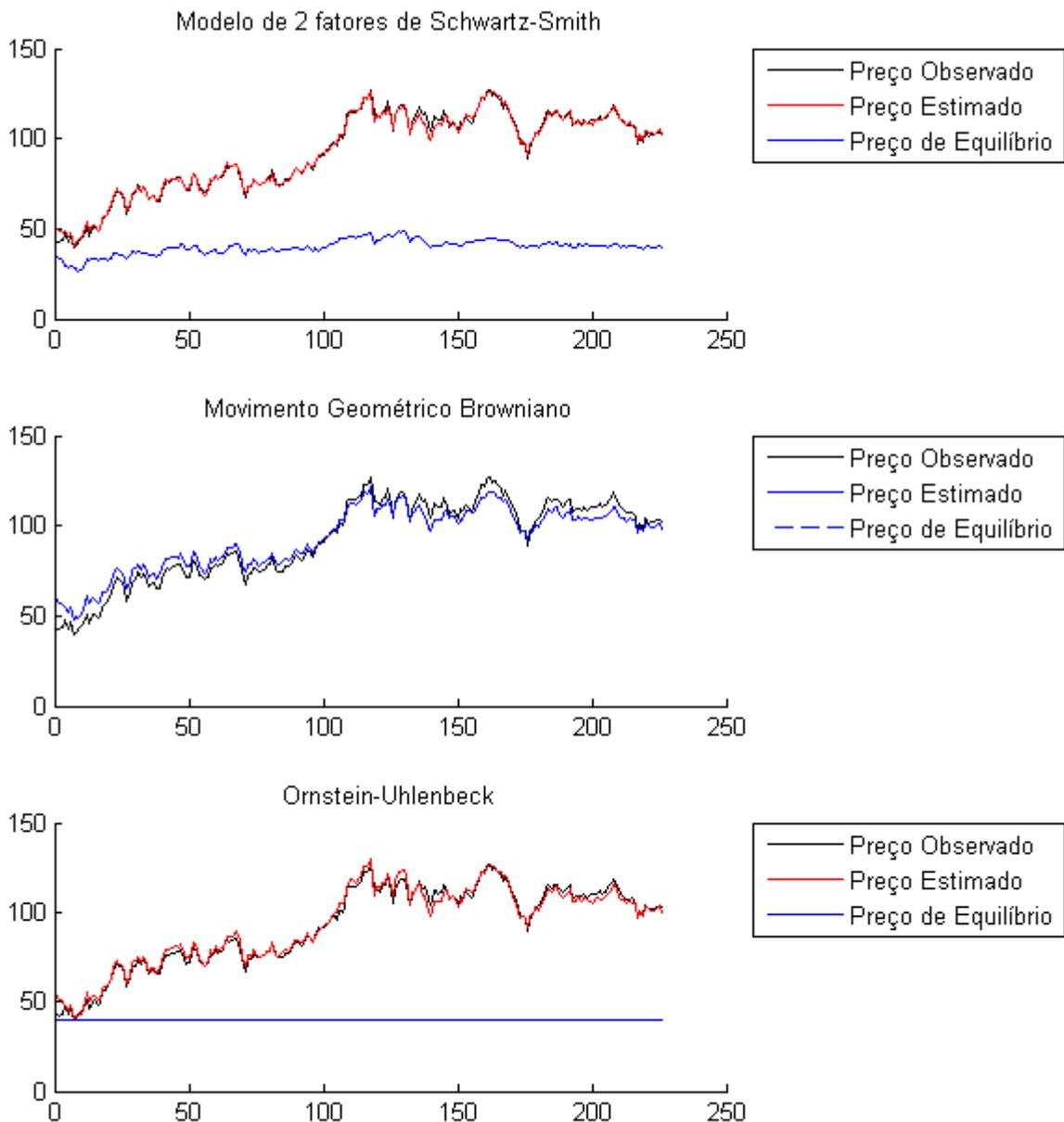


Figura 4.2: Gráficos com os resultados de cada um dos 3 modelos considerados para a *commodity* BRENT (período de 02/01/2009 a 20/06/2013)

Ao analisar as Figuras 4.1 e 4.2, observa-se que a curva do preço estimado se aproxima mais da curva do preço observado no gráfico referente ao modelo de dois parâmetros proposto por Schwartz e Smith [9]. Assim, ao considerar ambos os parâmetros, obtém-se uma estimação que se ajusta melhor aos dados históricos do que quando se utiliza modelos que consideram apenas um desses parâmetros.

## 4.1.2 Período de 02/01/2009 a 12/07/2013

Após realizar a calibragem do modelo de Schwartz-Smith para o período de 02/01/2009 a 12/07/2013, chegou-se aos parâmetros dados pelas Tabelas 4.7 e 4.8, em que constam os resultados referentes às *commodities* WTI e BRENT respectivamente. Essas tabelas também mostram os valores dos parâmetros estimados para os modelos de Movimento Geométrico Browniano e de Ornstein-Uhlenbeck.

Parâmetro	Descrição	Dados futuros			
			Estimativa SS	Estimativa GBM	Estimativa OU
$\kappa$	Coefficiente de reversão à média no curto prazo		0,5249	0	0,2861
$\sigma_\chi$	Volatilidade de curto prazo		0,2676	0	0,3948
$\lambda_\chi$	Prêmio de risco de curto prazo		-0,5313	0	-0,1970
$\mu_\xi$	Tendência do nível de equilíbrio		0,1003	0,1347	0
$\sigma_\xi$	Volatilidade de equilíbrio		0,2392	0,2724	0
$\mu_\xi^*$	Tendência do nível de equilíbrio		-0,0889	-0,0125	0
$\rho_{\xi\chi}$	Correlação dos incrementos		-0,1907	0,1968	-0,0525
	Desvios padrões do erro da <i>measurement equation</i>	Maturidade do contrato			
$s_1$	"	1 mês	0,0227	0,0602	0,0392
$s_2$	"	5 meses	0	0,0199	0,0115
$s_3$	"	9 meses	0,0024	0	0
$s_4$	"	13 meses	0	0,0164	0,0081
$s_5$	"	17 meses	0,0036	0,0319	0,0151

Tabela 4.7: Estimação dos parâmetros de WTI pelo método da máxima verossimilhança (período de 02/01/2009 a 12/07/2013)

Parâmetro	Descrição	Dados futuros			
			Estimativa SS	Estimativa GBM	Estimativa OU
$\kappa$	Coefficiente de reversão à média no curto prazo		0,5586	0,0001	0,2964
$\sigma_\chi$	Volatilidade de curto prazo		0,1996	0	0,3584
$\lambda_\chi$	Prêmio de risco de curto prazo		-0,5173	0	-0,2074
$\mu_\xi$	Tendência do nível de equilíbrio		-0,0284	0,1454	0
$\sigma_\xi$	Volatilidade de equilíbrio		0,2130	0,2599	0
$\mu_\xi^*$	Tendência do nível de equilíbrio		-0,0605	-0,0236	0
$\rho_{\xi\chi}$	Correlação dos incrementos		0,0954	0,1992	0,2604
	Desvios padrões do erro da <i>measurement equation</i>	Maturidade do contrato			
$s_1$	"	1 mês	0,0100	0,0580	0,0220
$s_2$	"	5 meses	0	0,0238	0,0081
$s_3$	"	9 meses	0,0013	0	0
$s_4$	"	13 meses	0	0,0196	0,0063
$s_5$	"	17 meses	0,0022	0,0365	0,0119

Tabela 4.8: Estimação dos parâmetros de BRENT pelo método da máxima verossimilhança (período de 02/01/2009 a 12/07/2013)

As Tabelas (4.9) e (4.10) mostram, para as *commodities* WTI e BRENT, respectivamente, os erros de ajuste dos modelos considerados em relação aos preços de contratos futuros utilizados como dados de entrada, considerando o período de 02/01/2009 a 12/07/2013. Analisando essas tabelas, pode-se observar que, de forma geral, o modelo de Schwartz-Smith apresentou erros de ajuste menores do que os modelos de Movimento Geométrico Browniano e de Ornstein-Uhlenbeck.

WTI	Schwartz-Smith			Movimento Geométrico Browniano			Ornstein-Uhlenbeck		
	Erro Médio	Desvio Padrão do Erro	Erro Médio Absoluto	Erro Médio	Desvio Padrão do Erro	Erro Médio Absoluto	Erro Médio	Desvio Padrão do Erro	Erro Médio Absoluto
1 mês	-0,0102	0,0203	0,0136	-0,0259	0,0545	0,0380	-0,0204	0,0336	0,0284
2 meses	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0041	0,0195	0,0145	-0,0028	0,0111	0,0089
9 meses	0,0001	0,0024	0,0020	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
13 meses	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0023	0,0165	0,0133	-0,0011	0,0081	0,0062
17 meses	0,0005	0,0036	0,0029	-0,0088	0,0308	0,0256	-0,0045	0,0144	0,0116

Tabela 4.9: Erros no ajuste dos 3 modelos considerados em relação ao logaritmo dos preços futuros observados para a *commodity* WTI (período de 02/01/2009 a 12/07/2013)

BRENT	Schwartz-Smith			Movimento Geométrico Browniano			Ornstein-Uhlenbeck		
	Erro Médio	Desvio Padrão do Erro	Erro Médio Absoluto	Erro Médio	Desvio Padrão do Erro	Erro Médio Absoluto	Erro Médio	Desvio Padrão do Erro	Erro Médio Absoluto
1 mês	0,0004	0,0101	0,0054	-0,0090	0,0574	0,0469	-0,0047	0,0215	0,0170
2 meses	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0023	0,0237	0,0203	-0,0012	0,0081	0,0068
9 meses	-0,0002	0,0013	0,0010	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
13 meses	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0010	0,0196	0,0172	-0,0003	0,0063	0,0051
17 meses	-0,0002	0,0022	0,0018	-0,0053	0,0362	0,0325	-0,0026	0,0117	0,0098

Tabela 4.10: Erros no ajuste dos 3 modelos considerados em relação ao logaritmo dos preços futuros observados para a *commodity* BRENT (período de 02/01/2009 a 12/07/2013)

A Tabela 4.11 apresenta os valores do logaritmo neperiano da função de verossimilhança para os três modelos calibrados para a *commodity* WTI, considerando o período de 02/01/2009 a 12/07/2013. A Tabela 4.12 apresenta as mesmas informações, mas relativas à *commodity* BRENT. Analisando-se essas tabelas, observa-se que o modelo de Schwartz-Smith [9] foi o que apresentou maior valor da função de verossimilhança tanto para WTI quanto para BRENT. Assim, esse modelo produziu resultados que se ajustaram melhor aos dados históricos utilizados.

Modelos	Logaritmo da função de verossimilhança
Schwartz and Smith, 2000	3771,2
Movimento geométrico Browniano	2356,0
Ornstein-Uhlenbeck	2942,2

Tabela 4.11: Valores dos logaritmos neperianos das funções de verossimilhança dos três modelos utilizados para calcular o preço à vista de WTI (período de 02/01/2009 a 12/07/2013)

Modelos	Logaritmo da função de verossimilhança
Schwartz and Smith, 2000	4278,4
Movimento geométrico Browniano	2264,1
Ornstein-Uhlenbeck	3278,7

Tabela 4.12: Valores dos logaritmos neperianos das funções de verossimilhança dos três modelos utilizados para calcular o preço à vista de BRENT (período de 02/01/2009 a 12/07/2013)

As Figuras 4.3 e 4.4 mostram os gráficos dos preços à vista estimados em cada um dos modelos considerados, de 02/01/2009 a 12/07/2013, para as *commodities* WTI e BRENT respectivamente. Nesses gráficos, foram traçadas as curvas dos preços à vista observados nesse mesmo período, retirados do EIA, para que fossem feitas comparações entre os resultados estimados por cada modelo e os dados reais. Para traçar as curvas referentes ao processo de Ornstein-Uhlenbeck, atribuiu-se ao nível de equilíbrio um valor igual à média dos valores de  $\xi_t$  resultantes da estimação realizada utilizando filtro de Kalman, considerando o período de 02/01/2009 a 12/07/2013.

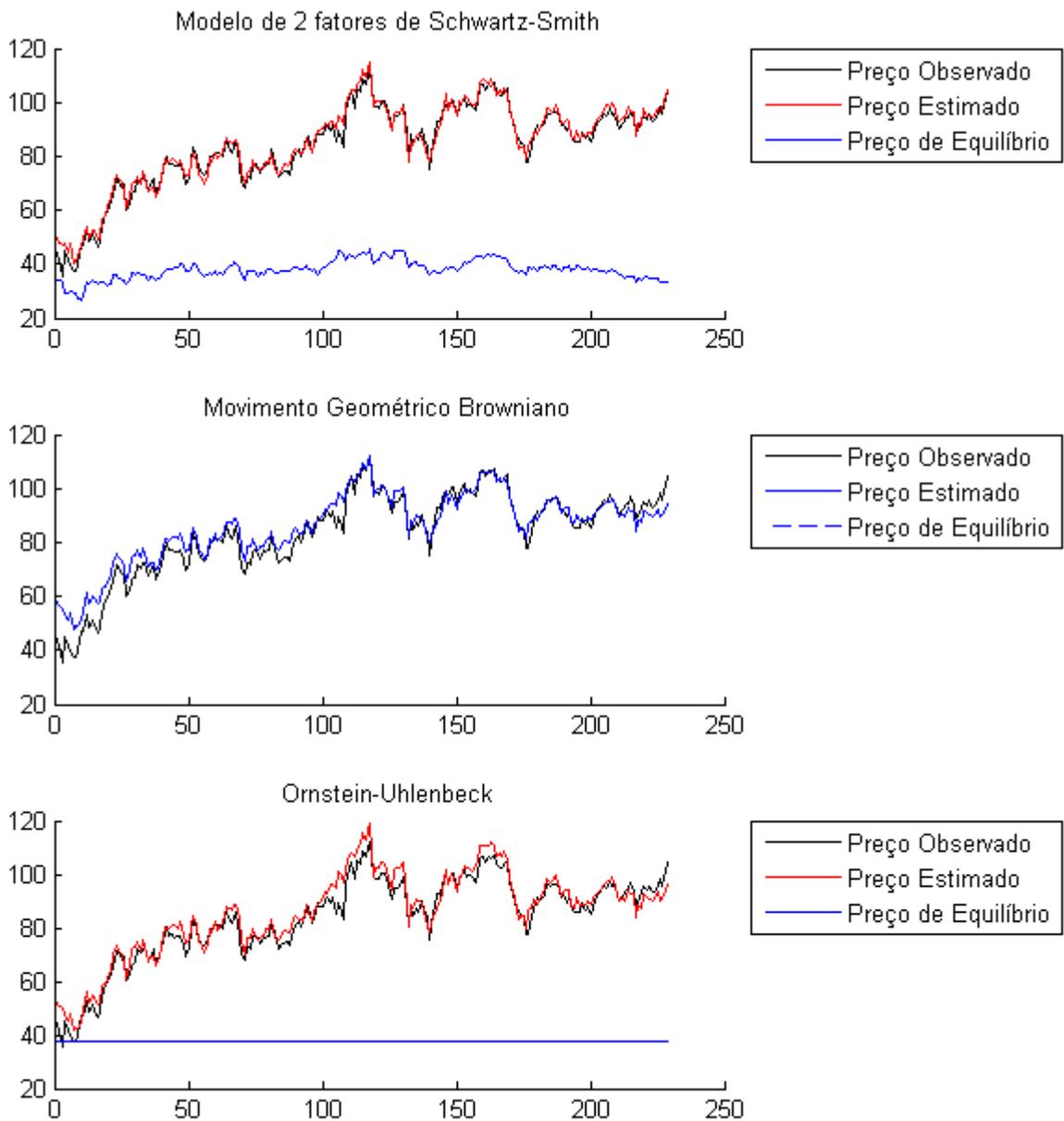


Figura 4.3: Gráficos com os resultados de cada um dos 3 modelos considerados para a *commodity* WTI (período de 02/01/2009 a 12/07/2013)

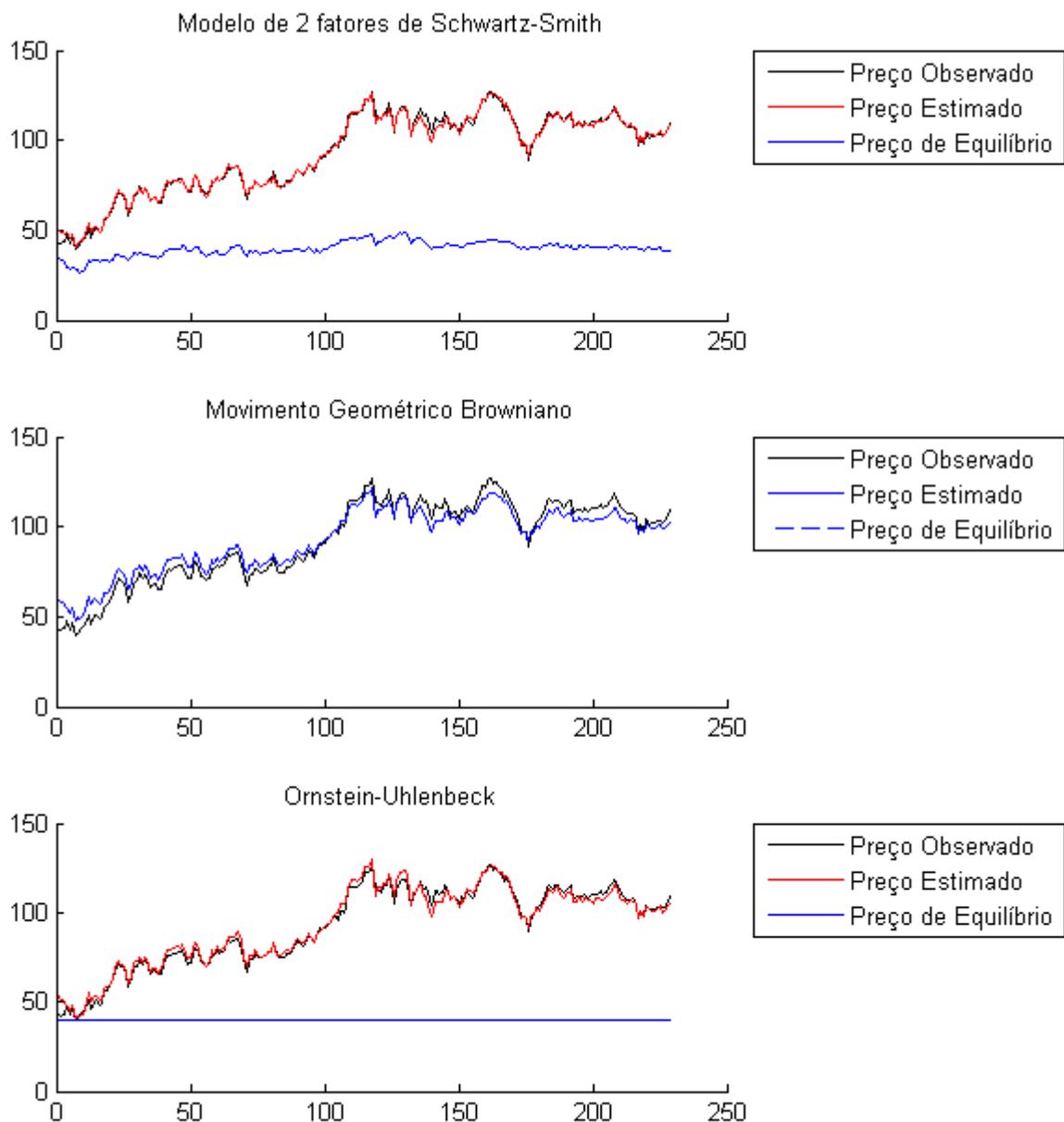


Figura 4.4: Gráficos com os resultados de cada um dos 3 modelos considerados para a *commodity* BRENT (período de 02/01/2009 a 12/07/2013)

Ao analisar as Figuras 4.3 e 4.4, observa-se que a curva do preço estimado se aproxima mais da curva do preço observado no gráfico referente ao modelo de dois parâmetros proposto por Schwartz e Smith [9]. Assim, ao considerar ambos os parâmetros, obtém-se uma estimação que se ajusta melhor aos dados históricos do que quando se utiliza modelos que consideram apenas um desses parâmetros.

### 4.1.3 Período de 02/01/2009 a 09/08/2013

Após realizar a calibragem do modelo de Schwartz-Smith para o período de 02/01/2009 a 09/08/2013, chegou-se aos parâmetros dados pelas Tabelas 4.13 e 4.14, em que constam os resultados referentes às *commodities* WTI e BRENT respectivamente. Essas tabelas também mostram os valores dos parâmetros estimados para os modelos de Movimento Geométrico Browniano e de Ornstein-Uhlenbeck.

Parâmetro	Descrição	Dados futuros			
			Estimativa SS	Estimativa GBM	Estimativa OU
$\kappa$	Coefficiente de reversão à média no curto prazo		0,5991	0,0001	0,2921
$\sigma_\chi$	Volatilidade de curto prazo		0,2526	0	0,3778
$\lambda_\chi$	Prêmio de risco de curto prazo		-0,5578	0	-0,1956
$\mu_\xi$	Tendência do nível de equilíbrio		0,0821	0,1320	0
$\sigma_\xi$	Volatilidade de equilíbrio		0,2354	0,2700	0
$\mu_\xi^*$	Tendência do nível de equilíbrio		-0,0780	-0,0142	0
$\rho_{\xi\chi}$	Correlação dos incrementos		-0,1189	0,1985	0,2932
	Desvios padrões do erro da <i>measurement equation</i>	Maturidade do contrato			
$s_1$	"	1 mês	0,0222	0,0621	0,0414
$s_2$	"	5 meses	0	0,0209	0,0127
$s_3$	"	9 meses	0,0025	0,0000	0,0000
$s_4$	"	13 meses	0	0,0171	0,0088
$s_5$	"	17 meses	0,0039	0,0324	0,0158

Tabela 4.13: Estimação dos parâmetros de WTI pelo método da máxima verossimilhança (período de 02/01/2009 a 09/08/2013)

Parâmetro	Descrição	Dados futuros			
			Estimativa SS	Estimativa GBM	Estimativa OU
$\kappa$	Coefficiente de reversão à média no curto prazo		0,5631	0,0001	0,2982
$\sigma_\chi$	Volatilidade de curto prazo		0,1985	0	0,3534
$\lambda_\chi$	Prêmio de risco de curto prazo		-0,5191	0	-0,2091
$\mu_\xi$	Tendência do nível de equilíbrio		-0,0238	0,1408	0
$\sigma_\xi$	Volatilidade de equilíbrio		0,2117	0,2577	0
$\mu_\xi^*$	Tendência do nível de equilíbrio		-0,0595	-0,0243	0
$\rho_{\xi\chi}$	Correlação dos incrementos		0,0917	0,1951	0,0354
	Desvios padrões do erro da <i>measurement equation</i>	Maturidade do contrato			
$s_1$	"	1 mês	0,0099	0,0580	0,0222
$s_2$	"	5 meses	0	0,0238	0,0083
$s_3$	"	9 meses	0,0013	0,0000	0,0000
$s_4$	"	13 meses	0	0,0196	0,0064
$s_5$	"	17 meses	0,0023	0,0365	0,0121

Tabela 4.14: Estimação dos parâmetros de BRENT pelo método da máxima verossimilhança (período de 02/01/2009 a 09/08/2013)

As Tabelas (4.15) e (4.16) mostram, para as *commodities* WTI e BRENT, respectivamente, os erros de ajuste dos modelos considerados em relação aos preços de contratos futuros utilizados como dados de entrada, considerando o período de 02/01/2009 a 09/08/2013. Analisando essas tabelas, pode-se observar que, de forma geral, o modelo de Schwartz-Smith apresentou erros de ajuste menores do que os modelos de Movimento Geométrico Browniano e de Ornstein-Uhlenbeck.

WTI	Schwartz-Smith			Movimento Geométrico Browniano			Ornstein-Uhlenbeck		
	Erro Médio	Desvio Padrão do Erro	Erro Médio Absoluto	Erro Médio	Desvio Padrão do Erro	Erro Médio Absoluto	Erro Médio	Desvio Padrão do Erro	Erro Médio Absoluto
1 mês	-0,0097	0,0200	0,0136	-0,0251	0,0570	0,0399	-0,0200	0,0363	0,0304
2 meses	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0039	0,0206	0,0153	-0,0028	0,0124	0,0098
9 meses	-0,0001	0,0025	0,0020	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
13 meses	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0021	0,0170	0,0131	-0,0010	0,0087	0,0066
17 meses	0,0005	0,0039	0,0031	-0,0082	0,0314	0,0261	-0,0043	0,0152	0,0120

Tabela 4.15: Erros no ajuste dos 3 modelos considerados em relação ao logaritmo dos preços futuros observados para a *commodity* WTI (período de 02/01/2009 a 09/08/2013)

BRENT	Schwartz-Smith			Movimento Geométrico Browniano			Ornstein-Uhlenbeck		
	Erro Médio	Desvio Padrão do Erro	Erro Médio Absoluto	Erro Médio	Desvio Padrão do Erro	Erro Médio Absoluto	Erro Médio	Desvio Padrão do Erro	Erro Médio Absoluto
1 mês	0,0004	0,0099	0,0054	-0,0088	0,0575	0,0469	-0,0046	0,0218	0,0172
2 meses	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0023	0,0238	0,0203	-0,0012	0,0082	0,0069
9 meses	-0,0002	0,0013	0,0010	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
13 meses	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0009	0,0196	0,0173	-0,0003	0,0064	0,0052
17 meses	-0,0002	0,0022	0,0018	-0,0050	0,0362	0,0326	-0,0026	0,0118	0,0099

Tabela 4.16: Erros no ajuste dos 3 modelos considerados em relação ao logaritmo dos preços futuros observados para a *commodity* BRENT (período de 02/01/2009 a 09/08/2013)

A Tabela 4.17 apresenta os valores do logaritmo neperiano da função de verossimilhança para os três modelos calibrados para a *commodity* WTI, considerando o período de 02/01/2009 a 09/08/2013. A Tabela 4.18 apresenta as mesmas informações, mas relativas à *commodity* BRENT. Analisando-se essas tabelas, observa-se que o modelo de Schwartz-Smith [9] foi o que apresentou maior valor da função de verossimilhança tanto para WTI quanto para BRENT. Assim, esse modelo produziu resultados que se ajustaram melhor aos dados históricos utilizados.

Modelos	Logaritmo da função de verossimilhança
Schwartz and Smith, 2000	3811,4
Movimento geométrico Browniano	2370,1
Ornstein-Uhlenbeck	2934,7

Tabela 4.17: Valores dos logaritmos neperianos das funções de verossimilhança dos três modelos utilizados para calcular o preço à vista de WTI (período de 02/01/2009 a 09/08/2013)

Modelos	Logaritmo da função de verossimilhança
Schwartz and Smith, 2000	4358,7
Movimento geométrico Browniano	2305,0
Ornstein-Uhlenbeck	3323,7

Tabela 4.18: Valores dos logaritmos neperianos das funções de verossimilhança dos três modelos utilizados para calcular o preço à vista de BRENT (período de 02/01/2009 a 09/08/2013)

As Figuras 4.5 e 4.6 mostram os gráficos dos preços à vista estimados em cada um dos modelos considerados, de 02/01/2009 a 09/08/2013, para as *commodities* WTI e BRENT respectivamente. Nesses gráficos, foram traçadas as curvas dos preços à vista observados nesse mesmo período, retirados do EIA, para que fossem feitas comparações entre os resultados estimados por cada modelo e os dados reais. Para traçar as curvas referentes ao processo de Ornstein-Uhlenbeck, atribuiu-se ao nível de equilíbrio um valor igual à média dos valores de  $\xi_t$  resultantes da estimação realizada utilizando filtro de Kalman, considerando o período de 02/01/2009 a 09/08/2013.

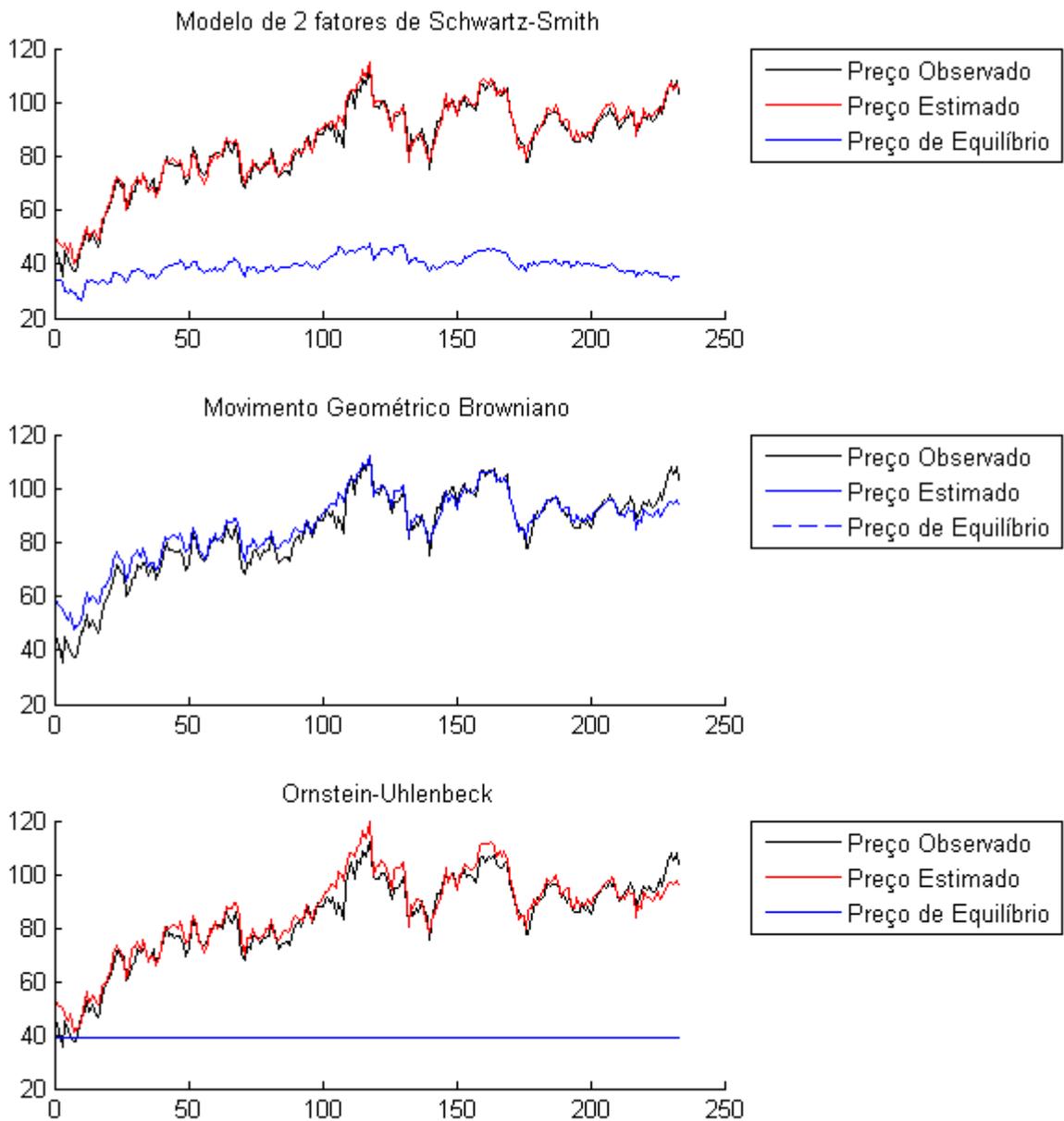


Figura 4.5: Gráficos com os resultados de cada um dos 3 modelos considerados para a *commodity* WTI (período de 02/01/2009 a 09/08/2013)

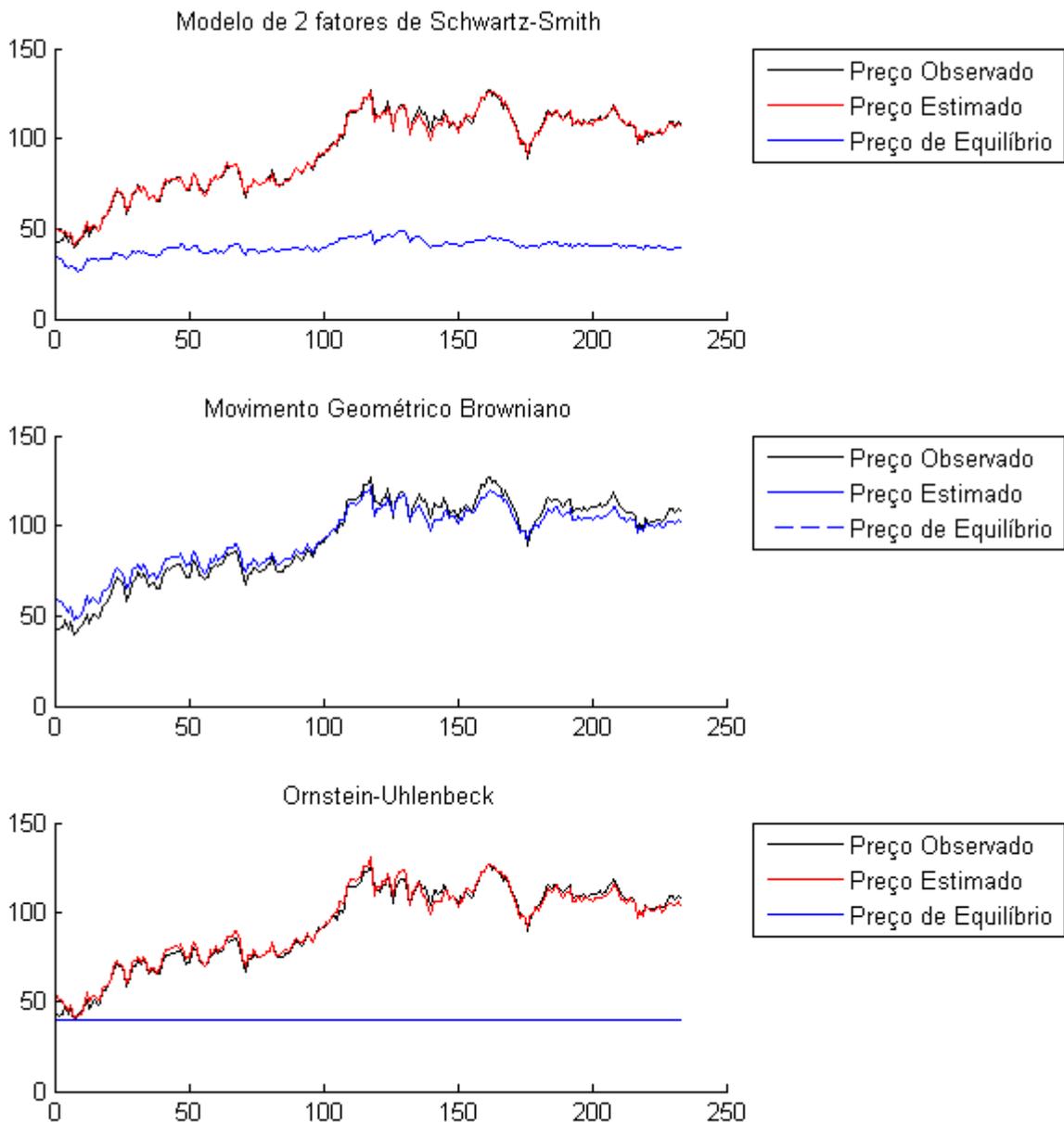


Figura 4.6: Gráficos com os resultados de cada um dos 3 modelos considerados para a *commodity* BRENT (período de 02/01/2009 a 09/08/2013)

Ao analisar as Figuras 4.5 e 4.6, observa-se que a curva do preço estimado se aproxima mais da curva do preço observado no gráfico referente ao modelo de dois parâmetros proposto por Schwartz e Smith [9]. Assim, ao considerar ambos os parâmetros, obtém-se uma estimativa que se ajusta melhor aos dados históricos do que quando se utiliza modelos que consideram apenas um desses parâmetros.

## 4.2 Preços dos Contratos Futuros e das *Spread Options*

Antes de mostrar os resultados encontrados para os preços dos contratos futuros de WTI e BRENT e para os preços das *spread options*  $WTI \times BRENT$ , é importante observar a posição histórica relativa dos preços dessas *commodities*. A Figura 4.7 mostra o gráfico dos preços do 1º contrato futuro de WTI e do 1º contrato futuro de BRENT nos dias úteis compreendidos no período de 02/01/2009 a 09/08/2013. Ao analisar esse gráfico, observa-se que a variação relativa entre esses preços foi significativa nesse período, sendo que os futuros de BRENT apresentaram um preço significativamente maior do que os futuros de WTI entre o final de 2010 e meados de 2013 aproximadamente.

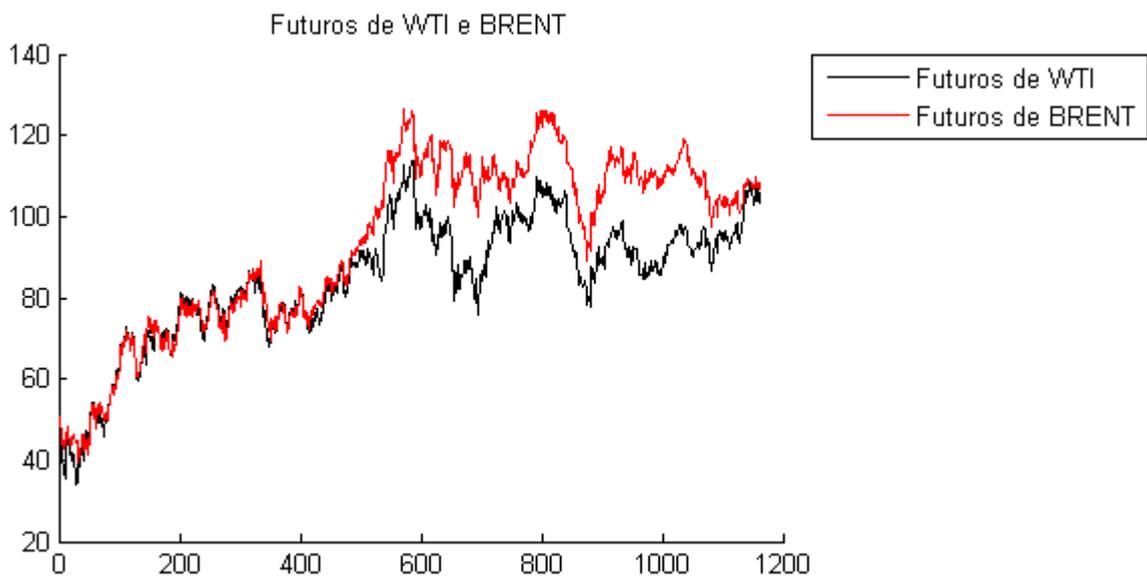


Figura 4.7: Gráfico dos preços do 1º contrato futuro de WTI e do 1º contrato futuro de BRENT nos dias úteis compreendidos no período de 02/01/2009 a 09/08/2013

A seguir, serão mostrados os resultados obtidos após seguir a metodologia indicada nas Seções 3.2, 3.3 e 3.4. Os preços dos contratos futuros, mostrados nas Tabelas 4.19 e 4.20, foram estimados conforme explicado no final da Seção 3.4, utilizando  $N_{sim} = 100000$ . Para calcular os preços das *spread options*, mostrados na Tabela 4.21, foram utilizados os seguintes parâmetros:  $N_{sim} = 100000$  simulações de Monte Carlo, uma taxa de juros  $r = 2\%a.a.$  e um *strike*  $K = -10$ .

Dia	Vencimento	Preço do contrato futuro de WTI
15/07/2013	22/07/2013	97,0145
15/07/2013	22/07/2013	104,6720
14/08/2013	20/08/2013	105,0916

Tabela 4.19: Preços estimados para os contratos futuros de WTI

Dia	Vencimento	Preço do contrato futuro de BRENT
15/07/2013	16/07/2013	102,1013
15/07/2013	16/07/2013	108,8094
14/08/2013	15/08/2013	107,0755

Tabela 4.20: Preços estimados para os contratos futuros de BRENT

Dia	Vencimento da <i>spread option</i>	Vencimento do futuro de WTI	Vencimento do futuro de BRENT	<i>Strike</i>	Preço da <i>spread option</i> WTI $\times$ BRENT
20/06/2013	15/07/2013	22/07/2013	16/07/2013	-10	8,0473
12/07/2013	15/07/2013	22/07/2013	16/07/2013	-10	5,9229
09/08/2013	14/08/2013	20/08/2013	15/08/2013	-10	8,1880

Tabela 4.21: Preços estimados para as *spread options* WTI  $\times$  BRENT

# Capítulo 5

## Considerações Finais

Para que fosse possível analisar os preços estimados para as *spread options*, mostrados na Tabela 4.21, foram utilizados os preços praticados pelo mercado, negociados na NYMEX. A Tabela 5.1 apresenta tanto os preços estimados quanto os negociados na NYMEX, fornecidos pela Reuters.

Dia	Vencimento da <i>spread option</i>	Vencimento do futuro de WTI	Vencimento do futuro de BRENT	Strike	Preço da <i>spread option</i> WTI $\times$ BRENT (estimado)	Preço da <i>spread option</i> WTI $\times$ BRENT (Reuters)
20/06/2013	15/07/2013	22/07/2013	16/07/2013	-10	8,0473	3,17
12/07/2013	15/07/2013	22/07/2013	16/07/2013	-10	5,9229	7,14
09/08/2013	14/08/2013	20/08/2013	15/08/2013	-10	8,1880	7,75

Tabela 5.1: Preços estimados e preços fornecidos pela Reuters para as *spread options* WTI  $\times$  BRENT

Para simplificar a notação, será utilizado o mesmo código adotado para Reuters para se referir às *spread options*. O código, denominado RIC (*Reuters Instrument Code*), BV1000H3N refere-se à opção de compra do *spread* WTI  $\times$  BRENT, denotado por BV, com *strike* igual a 1000 centésimos de dólar negativos, denotados pelo número 1000 e pela letra N. Nesse exemplo, a letra H e o número 3 referem-se ao mês e ao ano de vencimento da *spread option*, que, nesse caso, ocorre no dia 15/07/2013. Ao analisar o código BV1000I3N, verifica-se que a única diferença está no mês de vencimento da *spread option*, que, nesse caso, ocorre no dia 14/08/2013. A Tabela 5.2 apresenta o *Open Interest* registrado pela Reuters, os preços estimados e os praticados no mercado para as *spread options*, além dos erros relativos entre esses preços.

RIC	Dia	<i>Open Interest</i> (Reuters)	Preço da <i>spread option</i> WTI $\times$ BRENT (estimado)	Preço da <i>spread option</i> WTI $\times$ BRENT (Reuters)	Erro relativo entre o preço estimado e o fornecido pela Reuters
BV1000H3N	20/06/2013	1960	8,0473	3,17	153,86%
BV1000H3N	12/07/2013	1910	5,9229	7,14	-17,05%
BV1000I3N	09/08/2013	1280	8,1880	7,75	5,65%

Tabela 5.2: *Open Interest* registrado pela Reuters, preços estimados e praticados no mercado para as *spread options* WTI  $\times$  BRENT, e erros relativos entre esses preços

A análise da Tabela 5.2 pode, a princípio, levar à conclusão de que os preços estimados para as *spread options* não foram satisfatórios, uma vez que, ao compará-los com os preços de mercado fornecidos pela Reuters, foram apresentados erros relativos grandes. Entretanto, a Reuters não forneceu o número de negociações dessas *spread options*, apenas o *Open Interest*,

que revela o número de ordens de compra que não foram exercidas. Analisando os valores de *Open Interest* mostrados na Tabela 5.2, percebe-se que eles são relativamente baixos. Além disso, comparando os dados do número de negociações e de *Open Interest* de outras *spread options* negociadas na NYMEX, segundo a Reuters, verifica-se que, em geral, o número de negociações é bem inferior ao *Open Interest*, o que indica que o preços das *spread options* possivelmente estão fora do valor de mercado. Assim, devido à provável baixa liquidez, os preços praticados pelo mercado, mostrados na Tabela 5.2, podem não ter sido bem apreçados. Isso já faz com que os preços estimados para as *spread options* BV1000H3N em 12/07/2013 e BV1000I3N em 09/08/2013 sejam mais satisfatórios, uma vez que apresentaram erro relativo absoluto menor do que 20%.

Além disso, para analisar se a comparação feita pela Tabela 5.2 é realmente relevante, é importante observar os preços dos contratos futuros com maturidade em um mês mostrados na Tabela 5.3, bem como os valores de *spread* WTI  $\times$  BRENT também mostrados nessa tabela. Os dados da WTI foram retirados da Bloomberg e os dados da BRENT foram retirados do endereço eletrônico *www.quandl.com*. O código CL refere-se aos contratos futuros de WTI e o código CO refere-se aos contratos futuros de BRENT, cujos vencimentos são mostrados na Tabela 5.4.

Dia	CL1 (WTI)	CO1 (BRENT)	<i>spread</i> CL1-CO1 (WTI-BRENT)	<i>spread</i> CL1-CO1- <i>strike</i> (WTI-BRENT-(-10))
20/06/2013	95,4	102,15	-6,75	3,25
12/07/2013	105,95	108,81	-2,86	7,14
09/08/2013	105,97	108,22	-2,25	7,75

Tabela 5.3: Preços dos contratos futuros com maturidade em um mês (dados de WTI retirados da Bloomberg e dados de BRENT retirados de *www.quandl.com*)

Dia	Vencimento de CL1	Vencimento de CO1
20/06/2013	20/06/2013	16/07/2013
12/07/2013	22/07/2013	16/07/2013
09/08/2013	20/08/2013	15/08/2013

Tabela 5.4: Vencimento dos contratos futuros CL1 (WTI) e CO1(BRENT)

Analisando a última coluna da Tabela 5.3 e comparando-a com os preços das *spread options* fornecidos pela Reuters, mostrados na Tabela 5.2, verifica-se que eles são muito parecidos, sendo idênticos para BV1000H3N em 12/07/2013 e para BV1000I3N em 09/08/2013. Isso indica que, para se chegar aos preços praticados pelo mercado, foram levados muito em consideração os preços dos contratos futuros de WTI e de BRENT praticados no dia em que foi realizado o apreçamento da *spread option*, o que revela que se esperava que os preços desses contratos fossem permanecer praticamente inalterados até o vencimento da *spread option*. Observe que, para a *spread option* BV1000H3N em 20/06/2013, que possui vencimento em 15/07/2013, o contrato futuro de WTI a ser utilizado no cálculo dessa opção é aquele que vence no dia 22/07/2013. Em 20/06/2013, o vencimento de CL1 ocorre nesse mesmo dia e o vencimento de CL2 ocorre em 22/07/2013. A Tabela 5.5 apresenta as mesmas informações da Tabela 5.3, mas agora consirando apenas o dia 20/06/2013 e os contratos CL1 e CL2.

Dia	CL1	CL2	CO1	CL1-CO1	CL1-CO1-(-10)	CL2-CO1	CL2-CO1-(-10)
20/06/2013	95,4	95,14	102,15	-6,75	3,25	-7,01	2,99

Tabela 5.5: Preços dos contratos futuros e das diferenças entre eles para o dia 20/06/2013 (dados de WTI retirados da Bloomberg e dados de BRENT retirados de *www.quandl.com*)

Analisando a Tabela 5.5, verifica-se que o preço da *spread option* BV1000H3N em 20/06/2013 fornecido pela Reuters, que corresponde a 3,17 dólares, encontra-se entre os valores  $CL1-CO1-(-10)=3,25$  e  $CL2-CO1-(-10)=2,99$  encontrados para este dia.

Apesar de os preços das *spread options* fornecidos pela Reuters terem sido calculados considerando que os preços dos contratos futuros de WTI e de BRENT fossem permanecer praticamente inalterados até o vencimento dessas opções, isso não ocorreu na prática. Uma prova disso é a grande alta de preço que a *spread option* BV1000H3N apresentou entre os dias 20/06/2013 e 12/07/2103, cujos valores apresentados pela Reuters foram de 3,17 e 7,14 dólares respectivamente. Isso revela uma grande modificação no *spread* WTI  $\times$  BRENT entre os dias 20/06/2013 e 12/07/2103.

A fim de realizar uma última análise dos preços estimados para as *spread options*, esses preços foram calculados de uma outra forma, utilizando o modelo de Bachelier. Para isso, considerou-se que a diferença de preço entre o 1º contrato futuro de WTI e o 1º contrato futuro de BRENT possui uma distribuição que muito se assemelha à distribuição normal. Como base de dados, foram utilizadas as diferenças entre os preços dos contratos futuros de WTI e BRENT, interpolados, com maturidade de 1 mês, para os 60 dias úteis anteriores ao dia do vencimento de cada *spread option* calculada. Após estimar a volatilidade do período analisado, foi realizado o cálculo do preço da *spread option* desejada. A Tabela 5.6 apresenta os preços das *spread options* estimados neste projeto, os fornecidos pela Reuters e os calculados utilizando o modelo de Bachelier.

RIC	Dia	Preço da <i>spread option</i> WTI $\times$ BRENT (estimado)	Preço da <i>spread option</i> WTI $\times$ BRENT (Reuters)	Preço da <i>spread option</i> WTI $\times$ BRENT (Bachelier)
BV1000H3N	20/06/2013	8,0473	3,17	3,0529
BV1000H3N	12/07/2013	5,9229	7,14	7,6518
BV1000I3N	09/08/2013	8,1880	7,75	8,3427

Tabela 5.6: Preços das *spread options* WTI  $\times$  BRENT estimados neste projeto, fornecidos pela Reuters e calculados utilizando o modelo de Bachelier

A análise da Tabela 5.6 revela uma maior semelhança entre os preços das *spread options* fornecidos pela Reuters e os calculados utilizando o modelo de Bachelier, ao compará-los com os preços estimados neste projeto. Esse fato também pode levar à conclusão de que os preços estimados neste projeto não foram satisfatórios. Entretanto, deve-se salientar que o modelo de Bachelier não apresenta alta precisão, uma vez que trata o apreçamento das *spread options* de forma simples e considera um pequeno período de tempo, de 60 dias úteis, para realizar os cálculos. De acordo com a análise feita anteriormente, sabe-se, ainda, que os preços de *spread options* fornecidos pela Reuters possuem confiabilidade questionável.

Além de comparar os preços estimados das *spread options*, os fornecidos pela Reuters e os calculados pelo modelo de Bachelier, e verificar até que ponto essa comparação é válida, também é importante ressaltar os erros de apreçamento intrínsecos à metodologia utilizada ao longo desse

projeto. Primeiramente, a calibragem do modelo de Schwartz-Smith fornece, através dos fatores de curto e de longo prazos estimados, preços à vista um pouco diferentes daqueles extraídos do endereço eletrônico <http://www.eia.gov/petroleum/supply/weekly/>, conforme mostra a Tabela 5.7.

Dia	Estimado			EIA		
	$S_t^{WTI}$	$S_t^{BRENT}$	$S_t^{WTI} - S_t^{BRENT}$	$S_t^{WTI}$	$S_t^{BRENT}$	$S_t^{WTI} - S_t^{BRENT}$
20/06/2013	96,0698	102,2412	-6,17	94,89	102,72	-7,83
12/07/2013	104,8754	108,8541	-3,98	105,85	109,03	-3,18
09/08/2013	105,2371	107,1370	-1,91	106,04	108,49	-2,45

Tabela 5.7: Comparação entre os preços à vista ( $S_t$ ) estimados e os extraídos do endereço eletrônico <http://www.eia.gov/petroleum/supply/weekly/> para os dias 20/06/2013, 12/07/2013 e 09/08/2013

Observe que os fatores de curto e de longo prazos são utilizados ao longo da metodologia explicada na Seção 3.2 e suas imprecisões acarretam erros nos resultados finais. Os fatores de curto e de longo prazos encontrados para os dias 20/06/2013, 12/07/2013 e 09/08/2013, por exemplo, são utilizados como parâmetros iniciais do Método de Euler. Além disso, sabe-se que quanto maior for o valor de  $h$  utilizado nas Equações (3.2.1) e (3.2.2) ao se aplicar o Método de Euler, maiores são os erros conferidos aos resultados. Os erros desse método, apesar de pequenos, devem ser considerados.

Por fim, ainda se deve salientar que a calibragem do modelo de Schwartz-Smith utilizando Filtro de Kalman é feita com base em dados históricos. Neste projeto, os resultados dessa calibragem foram utilizados como parâmetros para que se pudesse realizar o apreçamento de *spread options*. Entretanto, para estimar os preços dessas opções, a preocupação deve ser com o comportamento futuro dos ativos subjacentes, até o dia de vencimento da opção considerada, e este comportamento pode ser diferente do que ocorreu no passado.

Considerando os diferentes aspectos apresentados nos resultados, o método, suportado pela literatura, deve ser utilizado com cuidado, tendo em vista os erros encontrados. Deve-se salientar, no entanto, que esse método produziu, na maioria das vezes, erros aceitáveis, dadas as variações de preços das *commodities* WTI e BRENT observadas nos períodos analisados.

Fica como sugestão, para trabalhos futuros, acrescentar, à metodologia utilizada, uma forma de aprimorar os parâmetros de Schwartz-Smith utilizados para fazer a estimativa dos preços dos contratos futuros e das *spread options*. Esse aprimoramento deve levar em consideração a expectativa que o mercado possui em relação ao comportamento futuro dos preços das *commodities* WTI e BRENT. Uma forma de fazer isso seria tentar utilizar preços de opções européias dessas *commodities*, e de suas volatilidades implícitas, para encontrar os parâmetros de Schwartz-Smith presentes nas Equações (2.2.4) e (2.2.5).

# Apêndice A

## Código Implementado no Matlab

Listing A.1: Implementação do Modelo de Schwartz-Smith e Cálculo do Preço da *Spread Option* para o Dia 20 de Junho de 2013

```
% Implementacao da dissertacao de mestrado Aprecamento de Spread Options no
% Mercado de Commodities (fev 2014 – IMPA)
% Autor: Lucas Matias de Souza Barcellos
% Orientador: Ariel Levy

% Para interromper o running, Ctrl + C

% Antes de rodar o programa, rodar as linhas abaixo e salvar como dataWTI.mat
% e dataBRENT.mat
% ss2000OilDataWTI = xlsread('C:\Users\Lucas\IMPA\TCC\Copias do Dropbox\
    Bacellos_9 de dez\software\Programas\MatLab\Programa do Lucas\Programa com
    dados diarios\WTI e BRENT\dataWTI.xls');
% ss2000OilDataBRENT = xlsread('C:\Users\Lucas\IMPA\TCC\Copias do Dropbox\
    Bacellos_9 de dez\software\Programas\MatLab\Programa do Lucas\Programa com
    dados diarios\WTI e BRENT\dataBRENT.xlsx');

clc; clear; format short;

% Implementacao do modelo de curto prazo/longo prazo, proposto por Schwartz and
    Smith (2000)
% OBS: feita com base na implementacao da dissertacao de mestrado de D. Goodwin
    (2013):
% (http://www.lunduniversity.lu.se/o.o.i.s?id=24965&postid=3809118)

for commodity = 1:2

if commodity == 1
    load dataWTI; % Coluna 1: ln dos precos a vista. Outras colunas: ln dos
        precos futuros
else
    load dataBRENT;
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Dados de entrada
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

if commodity == 1
```

```

dataWTI = ss2000OilDataWTI;
data = dataWTI;
else
dataBRENT = ss2000OilDataBRENT;
data = dataBRENT;
end

Num_Contracts = 5;
matur = [1/12,5/12,9/12,13/12,17/12];
frequency = 5; % considera apenas os dados de cada 5 linhas da matriz data
dt = 5/252;
start_obs = 1; % primeira linha a ser considerada dos dados (matriz data)
obs: 1 corresponde a 2 jan 2009
end_obs = (size(data,1)-10*frequency); % ultima linha a ser considerada dos
dados (matriz data) obs: size(data,1) corresponde a 3 set 2013

locked_parameters = [2;4]; % zeramos as variancias das perturbacoes da
measurement equation dos contratos
% futuros com maturidades de 5 e 13 meses.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Valores iniciais dos parametros
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
k = 2; % OBS: Esses valores devem ser
modificados manualmente para que se encontre um Global Maximum Log-
Likelihood Score
sigmax = 0.2;
lambdax = 0.2;
mu = 0.02;
sigmae = 0.2;
rnmua = 0.02;
pxe = 0.2;
s_guess = 0.01;
initial_statevector = [0;3.1307]; % Valor inicial do vetor das
variaveis de estado m(t)=E[xt;et]
initial_dist = [0.01,0.01;0.01,0.01]; % Valor inicial da matriz de
covariancia das variaveis de estado C(t)=cov[xt,et]

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Ajustando a matriz data aos dados de entrada
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
data_SelectedPeriod = data(start_obs:end_obs,1:end);
num_obs = size(data_SelectedPeriod,1);
if frequency ~= 1
new_num_obs = floor((num_obs-1)/frequency)+1;
data_SelectedPeriod_SelectedFrequency = zeros(new_num_obs,size(
data_SelectedPeriod,2));
data_SelectedPeriod_SelectedFrequency(1,:) = data_SelectedPeriod(1,:);
for t = 1:(new_num_obs-1)
data_SelectedPeriod_SelectedFrequency(t+1,:) = data_SelectedPeriod((t*
frequency)+1,:);
end
else
data_SelectedPeriod_SelectedFrequency = data_SelectedPeriod;
end

% St = vetor com ln dos precos a vista (spot prices)

```

```

St = data_SelectedPeriod_SelectedFrequency(1:end,1);
y = data_SelectedPeriod_SelectedFrequency(1:end,2:Num_Contracts+1);

% y uma matriz {nobs x N}, N = numero de contratos futuros, nobs = numero
% de observacoes
nobs = size(y,1);
N = size(y,2);
num_locked_parameters = size(locked_parameters,1);

if commodity == 1
    St_WTI = exp(St);
else
    St_BRENT = exp(St);
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Otimizacao dos parametros com o filtro de Kalman e a tecnica MLE
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Criando vetores e matrizes onde as variaveis serao inseridas

% Pela notacao do artigo, temos:
% att = mt; vtt = yt - ft; vt = yt - f(t-1); dFtt_1 = det(Qt)
% vFv = vt'*inv(Qt)*vt; Ptt_1 = Rt; Ftt_1 = Qt; Ptt = C(t-1)

global save_att save_vtt save_vt save_dFtt_1 save_vFv save_Ptt_1 save_Ftt_1
save_Ptt
lnL_scores = zeros(3,1);
boundary = Inf;

% Estimando parametros para o modelo de dois fatores de S&S, e para os dois
% modelos de referencia (o modelo GBM e o modelo de Ornstein-Uhlenbeck).
for model = 1:3 % [1 = Modelo de S&S, 2 = Modelo GBM, 3 = Modelo de Ornstein-
    Uhlenbeck]
    if model == 1 % Modelo de S&S
        if sum(locked_parameters) == 0

            psi = zeros(7+N,1);
            psi(1:7,1) = [k, sigmax, lambdax, mu, sigmae, rnm, pxe]';
            psi(8:end,1) = s_guess;

            lb = zeros(7+N,1);
            lb(1:7,1) = [0, 0, -boundary, -boundary, 0, -boundary, -1]';
            lb(8:end,1) = 0.0000001;

            ub = zeros(7+N,1);
            ub(1:7,1) = [boundary, boundary, boundary, boundary, boundary,
                boundary, 1]';
            ub(8:end,1) = boundary;
        else
            psi = zeros(7+N-num_locked_parameters,1);
            psi(1:7,1) = [k, sigmax, lambdax, mu, sigmae, rnm, pxe]';
            psi(8:end,1) = s_guess;

            lb = zeros(7+N-num_locked_parameters,1);
            lb(1:7,1) = [0, 0, -boundary, -boundary, 0, -boundary, -1]';
            lb(8:end,1) = 0.0000001;
        end
    end
end

```

```

        ub = zeros(7+N-num_locked_parameters,1);
        ub(1:7,1) = [boundary, boundary, boundary, boundary, boundary,
                    boundary, 1]';
        ub(8:end,1) = boundary;
    end
    a0 = initial_statevector; % no artigo, denotamos por m0
    P0 = initial_dist;      % no artigo, denotamos por C0
end
if model == 2 % Modelo GBM
    locked_parameters(1:end,1) = 0;

    psi = zeros(7+N,1);
    psi(1:7,1) = [k, sigmax, lambdax, mu, sigmae, rnm, pxe]';
    psi(8:end,1) = s_guess;

    lb = zeros(7+N,1);
    lb(1:7,1) = [0, 0, 0, -boundary, 0, -boundary, -1]';
    lb(8:end,1) = 0;

    ub = zeros(7+N,1);
    ub(1:7,1) = [0.0001, 0, 0, boundary, boundary, boundary, 1]';
    ub(8:end,1) = boundary;

    a0 = [0; initial_statevector(1) + initial_statevector(2)];
    P0 = [0,0;0, initial_dist(2,2)];
end
if model == 3 % Modelo de Ornstein-Uhlenbeck
    locked_parameters(1:end,1) = 0;

    psi = zeros(7+N,1);
    psi(1:7,1) = [k, sigmax, lambdax, mu, sigmae, rnm, pxe]';
    psi(8:end,1) = s_guess;

    lb = zeros(7+N,1);
    lb(1:7,1) = [0, 0, -boundary, 0, 0, 0, -1]';
    lb(8:end,1) = 0;

    ub = zeros(7+N,1);
    ub(1:7,1) = [5, boundary, boundary, 0, 0, 0, 1]';
    ub(8:end,1) = boundary;

    if commodity == 1
        a0 = [initial_statevector(1,1); mean(ss_attWTI(1:end,2))];
    else
        a0 = [initial_statevector(1,1); mean(ss_attBRENT(1:end,2))];
    end
    P0 = [initial_dist(1,1), 0; 0, 0];
end

% Rodando a estimacao dos parametros
options = optimset('Algorithm','interior-point','Display','off'); % utiliza
interior-point como metodo de otimizacao em fmincon (alem de interior
point, existem outros algoritmos como active-set; ver help optimcon)
MaxlnL_Kalman = @(psi) Estimacao_Kalman(y, psi, matur, dt, a0, P0, N, nobs,
locked_parameters);
[psi_optimized, log_L, exitflag, output, lambda, grad, hessian] = fmincon(
MaxlnL_Kalman, psi, [], [], [], [], lb, ub, [], options);

```

```

% Salvando os valores dos parametros estimados (table 2: psi_estimate)
% Valor da maxima verossimilhanca (table 4: log-likelihood scores for model
  comparison):
lnL_scores(model,1) = -log_L;

if model == 1

    if commodity == 1
        ss_attWTI = save_att;
    else
        ss_attBRENT = save_att;
    end

    ss_vtt = save_vtt;
    ss_vt = save_vt;
    ss_dFtt_1 = save_dFtt_1;
    ss_vFv = save_vFv;
    ss_Ptt_1 = save_Ptt_1;
    ss_Ftt_1 = save_Ftt_1;
    ss_Ptt = save_Ptt;

    if sum(locked_parameters) == 0
        ss_psi_estimate = [psi_optimized(1:7,1);sqrt(psi_optimized(8:end,1)
        )];
    else
        prel_ss_psi_estimate = zeros(size(psi,1)+size(locked_parameters,1)
        ,1);
        j = 1;
        for i = 1:size(prel_ss_psi_estimate,1)
            if all(abs(i-(locked_parameters+7))) == 1
                prel_ss_psi_estimate(i,1) = psi_optimized(j,1);
                j = j+1;
            else
                prel_ss_psi_estimate(i,1) = 0;
            end
        end
        ss_psi_estimate = [prel_ss_psi_estimate(1:7,1);sqrt(
        prel_ss_psi_estimate(8:end,1))];
    end
end

if model == 2
    gbm_att = save_att;
    gbm_vtt = save_vtt;
    gbm_psi_estimate = [psi_optimized(1:7,1);sqrt(psi_optimized(8:end,1))];
end
if model == 3
    ou_att = save_att;
    ou_vtt = save_vtt;
    ou_psi_estimate = [psi_optimized(1:7,1);sqrt(psi_optimized(8:end,1))];
end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Outputs chaves para avaliar o ajuste do modelo de SS

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Output
ss_psi_estimate
gbm_psi_estimate
ou_psi_estimate

% table 3: Erros do ajuste do modelo em relacao ao ln dos precos futuros:

% ajuste do modelo de S&S
ss_Mean_Error = mean(ss_vtt)';
ss_Std_of_Error = std(ss_vtt)';
ss_MAE = mean(abs(ss_vtt))' % MAE = mean absolute error

% ajuste do modelo GBM
GBM_Mean_Error = mean(gbm_vtt)';
GBM_Std_of_Error = std(gbm_vtt)';
GBM_MAE = mean(abs(gbm_vtt))';

% ajuste do modelo de OU
OU_Mean_Error = mean(ou_vtt)';
OU_Std_of_Error = std(ou_vtt)';
OU_MAE = mean(abs(ou_vtt))';

% Performance
lnL_scores

if commodity == 1
    St_WTI_estimada = exp(ss_attWTI(:,1)+ss_attWTI(:,2));
else
    St_BRENT_estimada = exp(ss_attBRENT(:,1)+ss_attBRENT(:,2));
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Gerando graficos
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
figure(commodity);
set(figure(commodity), 'Position', [100 100 700 1000])
% [posicao horizontal na tela, posicao vertical na tela, largura da fig, altura
da fig]

subplot(3,1,1);
hold on
plot(exp(St), 'k', 'linewidth', 1);
if commodity == 1
    plot(exp(ss_attWTI(:,1)+ss_attWTI(:,2)), 'r', 'linewidth', 1);
    plot(exp(ss_attWTI(:,2)), 'b', 'linewidth', 1);
else
    plot(exp(ss_attBRENT(:,1)+ss_attBRENT(:,2)), 'r', 'linewidth', 1);
    plot(exp(ss_attBRENT(:,2)), 'b', 'linewidth', 1);
end
h = legend('Preco_Observado', 'Preco_Estimado', 'Preco_de_Equilibrio', 'Location', 'NorthEastOutside');
title('Modelo_de_2_fatores_de_Schwartz-Smith')
hold off

subplot(3,1,2);
hold on

```

```

plot(exp(St), 'k', 'linewidth', 1);
plot(exp(gbm_att(:,1)+gbm_att(:,2)), 'b', 'linewidth', 1);
plot(exp(gbm_att(:,2)), '—b', 'linewidth', 1);
h = legend('Preco_Observado', 'Preco_Estimado', 'Preco_de_Equilibrio', 'Location', 'NorthEastOutside');
title('Movimento_Geometrico_Browniano')
hold off

subplot(3,1,3);
hold on
plot(exp(St), 'k', 'linewidth', 1);
plot(exp(ou_att(:,1)+ou_att(:,2)), 'r', 'linewidth', 1);
plot(exp(ou_att(:,2)), 'b', 'linewidth', 1);
h = legend('Preco_Observado', 'Preco_Estimado', 'Preco_de_Equilibrio', 'Location', 'NorthEastOutside');
title('Ornstein-Uhlenbeck')
hold off

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Calculo da matriz Sigma e de x0WTI, e0WTI, x0BRENT e e0BRENT
% OBJETIVO: Calculo das variaveis de SS 'x' e 'e' via metodo de Euler para
% o dia de vencimento da spread option considerada: 15/07
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

if commodity == 1
    kWTI = ss_psi_estimate(1);
    sigmaxWTI = ss_psi_estimate(2);
    lambdaxWTI = ss_psi_estimate(3);
    muWTI = ss_psi_estimate(4);
    sigmaeWTI = ss_psi_estimate(5);
    rnmWTI = ss_psi_estimate(6);
    % rnm = mu - lambdae
    lambdaeWTI = mu - rnm;
    pxeWTI = ss_psi_estimate(7);

    ZxWTI = zeros(nobs,1);
    for l = 1:(nobs-1)
        ZxWTI(l+1) = ZxWTI(l) + (1/sigmaxWTI)*(exp(kWTI*dt)*ss_attWTI(l+1,1) - ss_attWTI(l,1) + (lambdaxWTI/kWTI)*(exp(kWTI*dt)-1));
    end

    ZeWTI = zeros(nobs,1);
    for l = 1:(nobs-1)
        ZeWTI(l+1) = ZeWTI(l) + (1/sigmaeWTI)*(ss_attWTI(l+1,2) - ss_attWTI(l,2) - (muWTI - lambdaeWTI)*dt);
    end

else
    kBRENT = ss_psi_estimate(1);
    sigmaxBRENT = ss_psi_estimate(2);
    lambdaxBRENT = ss_psi_estimate(3);
    muBRENT = ss_psi_estimate(4);
    sigmaeBRENT = ss_psi_estimate(5);
    rnmBRENT = ss_psi_estimate(6);
    % rnm = mu - lambdae
    lambdaeBRENT = mu - rnm;
    pxeBRENT = ss_psi_estimate(7);

```

```

ZxBRENT = zeros(nobs,1);
for l = 1:(nobs-1)
    ZxBRENT(l+1) = ZxBRENT(l) + (1/sigmaxBRENT)*( exp(kBRENT*dt)*
        ss_attBRENT(l+1,1) - ss_attBRENT(l,1) + (lambdaxBRENT/kBRENT)*(
        exp(kBRENT*dt)-1 ) );
end

ZeBRENT = zeros(nobs,1);
for l = 1:(nobs-1)
    ZeBRENT(l+1) = ZeBRENT(l) + (1/sigmaeBRENT)*( ss_attBRENT(l+1,2) -
        ss_attBRENT(l,2) - (muBRENT - lambdaeBRENT)*dt );
end

end

if commodity == 2

%   Sigma = [1 corr2(ZxWTI,ZeWTI) corr2(ZxWTI,ZxBRENT) corr2(ZxWTI,ZeBRENT)
%   ;...
%           corr2(ZeWTI,ZxWTI) 1 corr2(ZeWTI,ZxBRENT) corr2(ZeWTI,ZeBRENT);...
%           corr2(ZxBRENT,ZxWTI) corr2(ZxBRENT,ZeWTI) 1 corr2(ZxBRENT,ZeBRENT)
%   ;...
%           corr2(ZeBRENT,ZxWTI) corr2(ZeBRENT,ZeWTI) corr2(ZeBRENT,ZxBRENT)
%   1];

Sigma = [1 pxeWTI corr2(ZxWTI,ZxBRENT) corr2(ZxWTI,ZeBRENT);...
pxeWTI 1 corr2(ZeWTI,ZxBRENT) corr2(ZeWTI,ZeBRENT);...
corr2(ZxBRENT,ZxWTI) corr2(ZxBRENT,ZeWTI) 1 pxeBRENT;...
corr2(ZeBRENT,ZxWTI) corr2(ZeBRENT,ZeWTI) pxeBRENT 1];

x0WTI = ss_attWTI(size(ss_attWTI,1),1);
e0WTI = ss_attWTI(size(ss_attWTI,1),2);

x0BRENT = ss_attBRENT(size(ss_attBRENT,1),1);
e0BRENT = ss_attBRENT(size(ss_attBRENT,1),2);
end

end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Calculo do preco da spread option
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Calculo do preco da spread option em 20/06/2013, com vencimento em
% 15/07, para os futuros precificados em 15/07, que vencem nos dias:
% 22/07 (WTI) e 16/07 (BRENT);

% Para o dia 15/07/2013: 16 dias uteis apos 20/06/2013
dt = [16/252]; % tempo ao vencimento das spread options
N = 1; % numeros de vencimentos da spread option
Tvenc = [16/252]; % Vencimentos das spread options
K = -10; rate = 0.02; Nsim = 100000;
[price_saida_spread_option,saidaWTI,saidaBRENT] = spread_option_Call_Monte_Carlo
(kWTI,sigmaxWTI,lambdaxWTI,...
muWTI,lambdaeWTI,sigmaeWTI,pxeWTI,rnmuWTI,Sigma,x0WTI,e0WTI,kBRENT,
sigmaxBRENT,lambdaxBRENT,...

```

```
muBRENT, lambdaeBRENT, sigmaeBRENT, pxeBRENT, rnmueBRENT, x0BRENT, e0BRENT, dt, N, K,
rate, Nsim, Tvinc);
```

Listing A.2: Função Auxiliar - Estimação por Filtro de Kalman

```
function log_L = Estimacao_Kalman(y, psi, matur, dt, a0, P0, N, nobs,
    locked_parameters)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Extraindo de psi os valores iniciais dos parametros
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
k = psi(1,1);
sigmax = psi(2,1);
lambdax = psi(3,1);
mu = psi(4,1);
sigmae = psi(5,1);
rnmue = psi(6,1);
pxe = psi(7,1);

if sum(locked_parameters) == 0
    k = psi(1,1);
    sigmax = psi(2,1);
    lambdax = psi(3,1);
    mu = psi(4,1);
    sigmae = psi(5,1);
    rnmue = psi(6,1);
    pxe = psi(7,1);

    s = zeros(1, size(psi,1)-7);
    for i = 1:size(s,2)
        s(1, i) = psi(i+7,1);
    end
end

if sum(locked_parameters) ~= 0
    s = zeros(1, size(psi,1)-7+size(locked_parameters,1));
    j = 1;
    for i = 1:size(s,2)
        if all(abs(i-(locked_parameters))) == 1 % if i == locked_parameters
            s(1, i) = psi(7+j,1);
            j = j+1;
        end
    end
end

end

% No exemplo do artigo, usando as duas variaveis de estado, o codigo acima
% dara: s = [0.01, 0.01, 0.01, 0, 0.01], pois locked_parameters = 4.

% m = numero de variaveis de estado (numero de linhas de a0 = m0)
% neste caso, m = 2
m = size(a0,1);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% TRANSITION EQUATION
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Notacao de S&S: x(t)=c+G*x(t-1)+w(t)          w~N(0,W)      Equation (14)
% Notacao utilizada: a(t)=c+T*a(t-1)+R(t)*n(t)   n~N(0,Q)
```

```

% c eh um vetor {m x 1}
% T eh uma matriz {m x m}
c=[0;mu*dt];
T=[exp(-k*dt),0;0,1];

% Definindo Q = var[n(t)] and R
xx=(1-exp(-2*k*dt))*(sigmax)^2/(2*k);
xy=(1-exp(-k*dt))*pxe*sigmax*sigmae/k;
yx=(1-exp(-k*dt))*pxe*sigmax*sigmae/k;
yy=(sigmae)^2*dt;
Q=[xx,xy;yx,yy];
R=eye(size(Q,1));

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% MEASUREMENT EQUATION
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Notacao de S&S: y(t)=d(t)+F(t)'x(t)+v(t)      v~N(0,V) Equation (15)
% Notacao utilizada: y(t)=d(t)+Z(t)a(t)+e(t)      e~N(0,H)

% d eh um vetor {N x 1}
% Z eh uma matriz {N x m}
for i=1:N
    p1=(1-exp(-2*k*matur(i)))*(sigmax)^2/(2*k);
    p2=(sigmae)^2*matur(i);
    p3=2*(1-exp(-k*matur(i)))*pxe*sigmax*sigmae/k;
    d(i,1)=rnmu*matur(i)-(1-exp(-k*matur(i)))*lambdax/k+.5*(p1+p2+p3);
    Z(i,1)=exp(-k*matur(i));
    Z(i,2)=1;
end

% Measurement errors Var-Cov Matrix: Cov[e(t)]=H
H=diag(s);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Rodando o filtro de Kalman
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Criando vetores e matrizes onde as variaveis serao inseridas
global save_vt save_att save_dFtt_1 save_vFv save_vtt save_Ptt_1 save_Ftt_1
save_Ptt

save_ytt_1 = zeros(nobs,N);
save_vtt = zeros(nobs,N);
save_vt = zeros(nobs,N);
save_att_1 = zeros(nobs,m);
save_att = zeros(nobs,m);
save_Ptt_1 = zeros(nobs,m*m);
save_Ptt = zeros(nobs,m*m);
save_Ftt_1 = zeros(nobs,N*N);
save_dFtt_1 = zeros(nobs,1);
save_vFv = zeros(nobs,1);
%save_log_Lt = zeros(nobs,1);

Ptt = P0;
att = a0;

% Rodando o filtro de Kalman para t = 1,...,nobs

```

```

for t = 1:nobs
    Ptt_1 = T*Ptt*T'+R*Q*R';
    Ftt_1 = Z*Ptt_1*Z'+H;
    dFtt_1 = det(Ftt_1);

    %Ptt_1_test = [Ptt_1(1,1) 0; 0 Ptt_1(2,2)];
    %Ftt_1_test = Z*Ptt_1_test*Z'+H;
    %dFtt_1_test = det(Ftt_1_test);

    att_1 = T*att + c;
    yt = y(t,:)';
    ytt_1 = Z*att_1+d;
    vt = yt-ytt_1;

    att = att_1 + Ptt_1*Z'*inv(Ftt_1)*(vt);
    Ptt = Ptt_1 - Ptt_1*Z'*inv(Ftt_1)*Z*Ptt_1;

    ytt = Z*att+d;
    vtt = yt-ytt;

    % save_ytt_1(t,:) = ytt_1';
    save_vtt(t,:) = vtt';
    save_vt(t,:) = (vt)';
    % save_att_1(t,:) = att_1';
    save_att(t,:) = att';
    save_Ptt_1(t,:) = [Ptt_1(1,1), Ptt_1(1,2), Ptt_1(2,1), Ptt_1(2,2)];
    save_Ptt(t,:) = [Ptt(1,1), Ptt(1,2), Ptt(2,1), Ptt(2,2)];
    % save_Ftt_1(t,:) = [Ftt_1(1,1), Ftt_1(1,2), Ftt_1(1,3), Ftt_1(1,4),
        Ftt_1(1,5), Ftt_1(2,1), Ftt_1(2,2), Ftt_1(2,3), Ftt_1(2,4), Ftt_1
        (2,5), Ftt_1(3,1), Ftt_1(3,2), Ftt_1(3,3), Ftt_1(3,4), Ftt_1(3,5),
        Ftt_1(4,1), Ftt_1(4,2), Ftt_1(4,3), Ftt_1(4,4), Ftt_1(5,5), Ftt_1
        (5,1), Ftt_1(5,2), Ftt_1(5,3), Ftt_1(5,4), Ftt_1(5,5)];

    %save_dFtt_1(t,:)= dFtt_1_test;
    %save_vFv(t,:) = vt'*inv(Ftt_1_test)*vt;
    save_dFtt_1(t,:) = dFtt_1;
    save_vFv(t,:) = vt'*inv(Ftt_1)*vt;

end

logL = -(N*nobs/2)*log(2*pi) -0.5*sum(log(save_dFtt_1)) -0.5*sum(save_vFv);
log_L = -logL;

```

Listing A.3: Função Auxiliar - Método de Euler

```

function [x, e] = SS_Sim_Euler(k, sigmax, lambdax, mu, lambdae, sigmae, z, x0, e0, N, dt)

x = zeros(N, 1);
e = zeros(N, 1);

w1 = z(1,:)';
w2 = z(2,:)';

x(1) = x0 + (-k*x0 - lambdax)*dt(1) + sigmax*sqrt(dt(1))*w1(1);
e(1) = e0 + (mu-lambdae)*dt(1) + sigmae*sqrt(dt(1))*w2(1);

for t = 2:N

```

```

x(t) = x(t-1) + (-k*x(t-1) - lambdax)*dt(t) + sigmax*sqrt(dt(t))*w1(t);
e(t) = e(t-1) + (mu-lambdae)*dt(t) + sigmae*sqrt(dt(t))*w2(t);

end

end

```

Listing A.4: Função Auxiliar - Cálculo dos Preços dos Contratos Futuros

```

function lnF = ln_F_t_T (t, matur, x, e, k, sigmax, lambdax, rmu, sigmae, pxe)

lnF = exp(-k*matur)*x(t) + e(t) + rmu*matur - (1-exp(-k*matur))*lambdax/k ...
      + (1/2)*( (1-exp(-2*k*matur))*(sigmax^2)/(2*k) + (sigmae^2)*matur +
      2*(1-exp(-k*matur))*pxe*sigmax*sigmae/k );

end

```

Listing A.5: Função Auxiliar - Cálculo do Preço da *Spread Option* para o Dia 20 de Junho de 2013

```

function [price, saidaWTI, saidaBRENT] = spread_option_Call_Monte_Carlo(kWTI,
    sigmaxWTI, lambdaxWTI, ...
    muWTI, lambdaeWTI, sigmaeWTI, pxeWTI, rmuWTI, Sigma, x0WTI, e0WTI, kBRENT,
    sigmaxBRENT, lambdaxBRENT, ...
    muBRENT, lambdaeBRENT, sigmaeBRENT, pxeBRENT, rmuBRENT, x0BRENT, e0BRENT, dt, N, K,
    rate, Nsim, T venc)

price = zeros(N,1);
saidaWTI = zeros(N,1);
saidaBRENT = zeros(N,1);

payoff = zeros(Nsim,N);
data_saidaWTI = zeros(Nsim,N);
data_saidaBRENT = zeros(Nsim,N);
spread_saida_WTI_BRENT = zeros(Nsim,N);

for i = 1:Nsim

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Calculo das variaveis de SS 'x' e 'e' via metodo de Euler para
% o dia de vencimento da spread option considerada: 15/07
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

A = chol(Sigma);
% y eh a matriz composta por N vetores 4x1 de brownianos independentes
y = randn(4,N); % Matriz 4xN, em que N eh o numero de dias uteis
% y = [randn(N, 1) randn(N, 1) randn(N, 1) randn(N, 1)]'; % Matriz 4xN, em
% que N eh o numero de dias uteis
% z eh a matriz composta por N vetores 4x1 de brownianos correlacionados
z = A*y; % Matriz 4xN

[xWTI, eWTI] = SS_Sim_Euler(kWTI, sigmaxWTI, lambdaxWTI, muWTI, lambdaeWTI,
    sigmaeWTI, z(1:2,:), x0WTI, e0WTI, N, dt);

[xBRENT, eBRENT] = SS_Sim_Euler(kBRENT, sigmaxBRENT, lambdaxBRENT, muBRENT,
    lambdaeBRENT, sigmaeBRENT, z(3:4,:), x0BRENT, e0BRENT, N, dt);

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Calculo dos precos dos contratos futuros a partir das variaveis de SS 'x'
% e 'e'
% calculadas para o dia de vencimento da spread option considerada:
% 15/07/2013
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% data_saidaWTI(:,1): preco do contrato futuro no dia 15/07 com
% vencimento em 22/07 (5 dias uteis ao vencimento)
matur = [5/252]; % numero de dias uteis ao vencimento
for t = 1:N
    data_saidaWTI(i,t) = exp(ln_F_t_T (t, matur(t), xWTI, eWTI, kWTI, sigmaxWTI,
        lambdaxWTI, rmmuWTI, sigmaeWTI, pxeWTI));
end

% data_saidaBRENT(:,1): preco do contrato futuro no dia 15/07 com
% vencimento em 16/07 (1 dia util ao vencimento)
matur = [1/252]; % numero de dias uteis ao vencimento
for t = 1:N
    data_saidaBRENT(i,t) = exp(ln_F_t_T (t, matur(t), xBRENT, eBRENT, kBRENT,
        sigmaxBRENT, lambdaxBRENT, rmmuBRENT, sigmaeBRENT, pxeBRENT));
end

for k = 1:N
    spread_saida_WTI_BRENT(i,k) = data_saidaWTI(i,k) - data_saidaBRENT(i,k);
    spread_saida_WTI_BRENT_diak = spread_saida_WTI_BRENT(i,k);
    payoff(i,k) = max( spread_saida_WTI_BRENT_diak - K, 0);
end

end

for k = 1:N
    saidaWTI(k) = mean(data_saidaWTI(:,k));
    saidaBRENT(k) = mean(data_saidaBRENT(:,k));
    price(k) = exp(-rate*Tvenc(k))*mean(payoff(:,k));
end

end

```



# Referências Bibliográficas

- [1] F. Aiube, *Modelos quantitativos em finanças com enfoque em commodities*, Porto Alegre: Bookman, 2013.
- [2] Michael J Brennan and Eduardo S Schwartz, *Evaluating natural resource investments*, Journal of business (1985), 135–157.
- [3] R. Carmona and V. Durrleman, *Pricing and hedging spread options*, Siam Review **45** (2003), no. 4, 627–685.
- [4] Rajna Gibson and Eduardo S Schwartz, *Stochastic convenience yield and the pricing of oil contingent claims*, The Journal of Finance **45** (1990), no. 3, 959–976.
- [5] D. Goodwin, *Schwartz-smith two-factor model in the copper market: before and after the new market dynamics*, Master's thesis, School of Economics and Management, 2013.
- [6] R. Korn and E. Korn, *Option pricing and portfolio optimization*, Rhode Island: American Mathematical Society, 2000.
- [7] W. Margrabe, *The value of an option to exchange one asset for another*, Journal of Finance **33** (1978), no. 1, 177–186.
- [8] E. Schwartz, *The stochastic behavior of commodity prices: implications for valuation and hedging*, Journal of Finance **52** (1997), no. 3, 923–973.
- [9] E. Schwartz and J. Smith, *Short-term variations and long-term dynamics in commodity prices*, Management Science **46** (2000), no. 7, 893–911.