



Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

Precificação de Derivativos Exóticos no Mercado de Petróleo

Autor: **Diogo Barboza Gobira**

Orientador: Maria Rodríguez Nogueiras

Coorientador: Jorge Passamani Zubelli

Rio de Janeiro
Fevereiro, 2014

Dedico este trabalho aos meus pais, maiores incentivadores da continuidade dos meus estudos.

Agradecimentos

Agradeço à minha esposa, Débora, cujo apoio e compreensão foram fundamentais para esta conquista. Também agradeço aos meus colegas de turma, que contribuíram para tornar o curso mais enriquecedor do ponto de vista prático, e ao BNDES, pelo apoio financeiro. Finalmente, agradeço ao Professor Zubelli e à minha orientadora, Professora Maria Nogueiras, pela proposição do tema e pelos valiosos aconselhamentos teóricos e práticos, sem os quais este trabalho teria muito menos valor.

Abstract

We study the pricing of exotic options in the oil and its derivatives markets. We begin with a data exploratory analysis, revisiting statistical properties and stylized facts related to the volatilities and correlations. Subsidized by this analysis results, we present some of the main commodity forward models and a wide range of deterministic volatility structures, as well as its calibration methods, for which we ran tests with real market data. To improve the performance of such models in pricing the volatility smile, we reformulate the Heston stochastic volatility model to cope with one or multiple forward curves together, allowing its use for the pricing of multi-commodity based contracts. We calibrate and test such models for the oil, gasoline and natural gas markets, proving their superiority against deterministic volatility models. To support the tasks of exotic options and OTC contracts pricing, we also revisit, from a theoretical and practical points of view, tools and issues such as Monte Carlo simulation, numerical solutions to SDEs and american exercise. Finally, through a battery of numerical simulations, we show how the presented models can be used to price typical exotic options occurring in the commodities markets, such as calendar spread options, crack spread options and asian options.

Keywords: commodities, forward models, stochastic volatility, exotic options

Resumo

Estudamos a precificação de opções exóticas nos mercados de petróleo e de seus derivados. Iniciamos com uma análise exploratória dos dados, revisitando suas propriedades estatísticas e fatos estilizados relacionados às volatilidades e correlações. Subsidiados pelos resultados de tal análise, apresentamos alguns dos principais modelos *forward* para *commodities* e um vasto conjunto de estruturas determinísticas de volatilidades, bem como os respectivos métodos de calibragem, para os quais executamos testes com dados reais. Para melhorar o desempenho de tais modelos na precificação do *smile* de volatilidade, reformulamos o modelo de volatilidade estocástica de Heston para lidar com uma ou múltiplas curvas *forward*, permitindo sua utilização na precificação de contratos definidos sobre múltiplas *commodities*. Calibramos e testamos tais modelos a partir de dados reais dos mercados de petróleo, gasolina e gás, e comprovamos a sua superioridade frente aos modelos de volatilidade determinística. Para subsidiar a precificação de opções exóticas e contratos OTC, revisitamos dos pontos de vista teórico e prático assuntos como simulação de Monte Carlo, soluções numéricas para SDEs e exercício americano. Finalmente, por meio de uma bateria de simulações numéricas, mostramos como os modelos podem ser utilizados na precificação de opções exóticas que tipicamente ocorrem nos mercados de *commodities*, como as *calendar spread options*, *crack spread options* e as opções asiáticas.

Palavras-chave: *commodities*, modelos *forward*, volatilidade estocástica, opções exóticas

Sumário

1	Introdução	3
1.1	Motivação	3
1.2	Estrutura do Trabalho	4
1.3	Introdução às <i>Commodities</i>	5
1.4	Opções no Mercado de <i>Commodities</i>	7
2	Análise Exploratória dos Dados	9
2.1	Reparametrização Temporal e Interpolação	9
2.2	Anatomia das Curvas de Futuros	11
2.3	Propriedades Estatísticas	13
2.4	O Efeito Samuelson	15
2.5	Sazonalidade da Volatilidade	16
2.6	Correlações entre Diferentes Vencimentos	16
3	Modelagem de Preços	21
3.1	Contratos <i>Forward</i> e Futuros	21
3.2	Retorno de Conveniência	24
3.3	Modelo de Black Para Opções sobre Futuros	25
3.4	Modelagem de Preços à Vista	26
3.4.1	Modelo de 1 Fator	26
3.4.2	Modelo de 1 Fator com Reversão à Média	27
3.4.3	Modelos de 2 e 3 Fatores	28
3.5	Modelagem da Curva <i>Forward</i>	29
3.5.1	Modelo <i>Forward</i> de 1 Fator	30
3.5.2	Modelo de N Fatores	30
3.5.3	Modelo de N Fatores com Volatilidade Estocástica	33
4	Calibragem do Modelo de N Fatores	41
4.1	Calibragem a Dados Históricos	41
4.1.1	Calibragem via PCA	42
4.1.2	Testes para Opções <i>Plain-Vanilla</i>	44
4.2	Calibragem Implícita das Volatilidades	46
4.2.1	Volatilidade Implícita	46
4.2.2	Técnicas de Calibragem	47
4.2.3	Testes para Opções ATM	55
5	Calibragem do Modelo de Volatilidade Estocástica	57
5.1	Formulação do Problema	57
5.2	Testes para Uma <i>Commodity</i>	58

5.3	Testes para Duas <i>Commodities</i>	63
6	Framework para Opções Exóticas	71
6.1	Método de Monte Carlo	71
6.2	Simulação Numérica de SDEs	72
6.3	Opções com Exercício Americano	76
6.4	Algumas Opções Exóticas	78
6.4.1	<i>Average Price Options</i>	78
6.4.2	<i>Floating Average Price Options</i>	79
6.4.3	<i>Calendar Spread Options</i>	80
6.4.4	<i>Crack Spread Options</i>	80
7	Conclusões	85
A	Códigos em R	89

Capítulo 1

Introdução

“Nesta região a perturbação que o óleo e a terra causam nas pessoas já se tornou uma espécie de epidemia (...) Ela atinge todas as classes e idades e condições de homens, que não mais falam, olham ou agem como há seis meses. Terra, arrendamentos, contratos, opções, escrituras, lucros e todo tipo de conversa é a única coisa que eles podem compreender. Encontramos caras estranhas a cada esquina, a metade dos nossos habitantes pode mais facilmente ser encontrada em Nova Iorque ou na Filadélfia do que em casa (...) O tribunal está em recesso; o bar desmoralizado; o círculo social se rompeu; o templo foi abandonado; e todos os nossos hábitos, ideias e associações de meio século viraram de pernas para o ar na precipitada corrida para as riquezas. Alguns homens pobres enriqueceram, alguns ricos enriqueceram mais ainda; alguns pobres e alguns ricos perdem tudo que investem. E assim vamos nós (...) Cedo ou tarde, a grande bolha explodirá.”

Este trecho, publicado em 1856 por um jornalista da cidade de Titusville – Pennsylvania [Yer91], mostra que, desde os primórdios de sua utilização na sociedade moderna, o petróleo foi sinônimo de riscos. Embora atualmente a exploração, a produção e o refino do petróleo sejam disciplinas amplamente dominadas, não se pode dizer que empreender na “indústria do hidrocarboneto” tornou-se uma atividade monótona, muito menos livre de riscos. Muito pelo contrário. Nos últimos 150 anos, nosso estilo de vida tornou-se indissociável desta *commodity*, e tal dependência tem sido o pano de fundo de grandes acontecimentos. Logo, compreender os riscos financeiros associados ao comércio do petróleo de seus derivados, bem como se proteger deles, continuam sendo missões de grande relevância para as empresas e para os países.

1.1 Motivação

Os mercados de *commodities* energéticas vêm sofrendo mudanças bruscas, como a desregulamentação do mercado de gás natural e de eletricidade e a crescente demanda por energia por parte da China para viabilizar o seu voraz crescimento econômico. Além disso, crises políticas, econômicas, conflitos territoriais, descobertas de novas fontes energéticas, como o *shale gas*, ou novas grandes reservas de fontes tradicionais, como o pré-sal brasileiro, se combinam para tornar os mercados mais líquidos e mais voláteis. Diante desta realidade, cada vez mais o setor produtivo necessita proteger-se de flutuações bruscas nos preços.

Assim, amplia-se o espaço para agentes do mercado financeiro. Os bancos e fundos de *hedge*

entram no mercado oferecendo uma grande gama instrumentos de cobertura de riscos, tipicamente opções, que permitem o setor produtivo se proteger contra os riscos de flutuação de preços dos seus produtos, materias primas, processos produtivos ou logísticos. Para os bancos, tais contratos são vistos como instrumentos de especulação ou de otimização e diversificação de portfólio, dado que tais instituições não possuem nenhuma exposição “natural” aos preços de bens como trigo, suco de laranja ou eletricidade. Neste contexto, as *commodities* e seus derivativos representam uma nova classe de ativos com propriedades bastante interessantes para os gestores. À medida que contratos cada vez mais complexos passam a ser negociados, maiores os desafios para precificá-los de forma justa, o que naturalmente introduz no mercado oportunidades de negócios para um terceiro grupo, os arbitradores (*arbitrageurs*), que buscam oportunidades usando ferramentas matemáticas e computacionais cada vez mais poderosas.

A despeito da “idade avançada” dos mercados à vista e futuro de *commodities*, a modelagem de preços de tais objetos bem como dos derivativos sobre eles definidos é ainda são temas bastante recentes e desafiadores do ponto de vista matemático. Além disso, alguns dos principais *softwares* matemáticos de mercado ainda não apresentam soluções completas e robustas para tratamento destes problemas, embora muitos dos blocos fundamentais necessários certamente já estejam implementados em várias linguagens de programação.

Do ponto de vista comercial, o tema é também bastante atraente, uma vez que bons softwares – que tratem do problema como um todo, desde a obtenção e “massageamento” dos dados, muitas vezes incompletos e errôneos, passando por sua utilização para calibragem de modelos de preços e alcançando finalmente seu uso para uma precificação justa e confiável dos contratos – podem assumir valores de mercado bastante expressivos, compatíveis com os volumes de recursos financeiros que eles se propõem a manipular.

Diante destes fatos, os problemas de modelagem de preços dos contratos futuros, bem como da modelagem de preço dos derivativos sobre estes definidos são bastante motivadores.

1.2 Estrutura do Trabalho

Neste trabalho abordamos o problema da calibragem de modelos de preços para as curvas de contratos futuros no mercado de *commodities* de energia, em especial para o caso do petróleo e de seus derivados. Ainda no Capítulo 1, apresentamos a definição do termo *commodity*, ressaltando algumas das principais características observadas em seus processos de preços. Dada a natureza indispensável das *commodities* para a sociedade e o vasto conjunto de incertezas às quais seus mercados estão sujeitos, enfatizamos o desenvolvimento dos mercados futuros e dos instrumentos financeiros definidos sobre esta classe de bens.

Para ganhar inspirações mais matemáticas acerca do problema, no Capítulo 2 executamos uma análise exploratória dos dados envolvidos. Apresentamos os dados utilizados e os mecanismos de tratamento destes para que possam então ser usados na modelagem. Neste Capítulo, também apresentamos algumas das principais propriedades estatísticas das *commodities*, com ênfase no comportamento das volatilidades e correlações associadas aos contratos futuros.

No Capítulo 3, apresentamos as definições básicas de contratos *forward*, contratos futuros, e a hipótese sob a qual estes são equivalentes. Apresentamos também a fórmula de Black para

opções sobre futuros, ressaltando sua relevância nos mercados. Baseando-nos na relação de convergência entre os preços à vista e futuros, introduzimos os modelos para preços à vista (modelos *spot*) como uma alternativa para a modelagem de preços dos contratos futuros, discutindo algumas de suas principais desvantagens do ponto de vista da precificação de opções. Para contornar tais limitações, apresentamos os modelos para a curva *forward*, em particular os modelos de N fatores com volatilidade determinística de Cotazar-Schwarz e uma adaptação do modelo de volatilidade estocástica de Heston para curvas *forward*.

Na sequência, abordamos no Capítulo 4 o problema de calibragem dos modelos para a curva *forward*. Iniciamos pela calibragem do modelo de volatilidade determinística, os quais calibramos a partir de dados históricos e de forma implícita a partir opções quotadas em mercado. Focamos nossa atenção na segunda estratégia, para a qual sugerimos uma série de estruturas de volatilidade, justificadas pelos resultados da análise conduzida no Capítulo 2. Para cada uma das estruturas, argumentamos sobre a sua adequação à modelagem de cada uma das *commodities* analisadas, e apresentamos os métodos de calibragem necessários. Para algumas das estruturas de volatilidade propostas, executamos o processo de calibragem e executamos testes de precificação usando dados reais de mercado.

Para contornar a limitação dos modelos de volatilidade determinística na precificação do *smile* de volatilidade, no Capítulo 5 calibramos e testamos o modelo de volatilidade estocástica apresentado no Capítulo 3. Fazemos isso para uma *commodity* individualmente, e para duas *commodities* em conjunto, objetivando testar a adequação do modelo para a precificação de derivativos exóticos definidos sobre mais de uma *commodity*.

No Capítulo 6, completamos a “caixa de ferramentas” necessária utilizar os modelos de preços calibrados na precificação de derivativos mais complexos. Abordamos questões como a simulação numérica de equações diferenciais estocásticas, simulação de Monte Carlo, geração de números aleatórios correlacionados e algumas técnicas para a precificação de opções exóticas de exercício americano, bastante comuns nos mercados de *commodities* de energia. Também no Capítulo 6, ilustramos o uso do modelo de volatilidade estocástica na precificação de opções exóticas como *calendar spread options*, *average price options* e *crack spread options*. Finalmente, apresentamos nossas conclusões e sugestões de trabalhos futuros no Capítulo 7.

Além disso, ao longo do trabalho, destacamos em espécies de caixas de texto algumas notas técnicas sobre temas que julgamos importantes para a implementação dos modelos apresentados, como manipulação de datas; regras de expiração dos contratos; pacotes de software; escolha de soluções iniciais, critérios de regularização e tratamento de erro em problemas de otimização; entre outros. Motivados por questões meramente estéticas, optamos por não apresentar tais notas no Sumário do trabalho, mas sim ao longo do texto de acordo com o contexto. Para os leitores que desejarem ir direto as notas, um *full-scan* do trabalho será necessário. Neste caso, sinceramente esperamos que tal inconveniente seja superado pela utilidade das informações apresentadas.

1.3 Introdução às *Commodities*

O termo *commodity* geralmente é empregado para descrever uma classe de bens cuja demanda pode ser atendida sem diferenciação qualitativa. Para exemplificar o conceito, são *commodities*

agrícolas o arroz, o milho e o trigo; são *commodities* metálicas o ouro, a prata, o cobre e o alumínio; são *commodities* energéticas o petróleo, o óleo combustível, a gasolina, o gás natural, gasolina de aviação e a eletricidade.

Uma primeira característica comum que podemos extrapolar a partir de tais exemplos é a tangibilidade dos ativos, sendo esta a primeira diferença relevante entre as *commodities* e as ações ou *bonds*, tendo importante desdobramentos matemáticos do ponto de vista de modelagem de preços. Neste contexto, a tangibilidade implica em necessidade de armazenamento, e essa tem custos, os quais são referenciados como custo de carregamento (*cost-of-carry*). Além disso, em uma transação comercial física, que necessite ser concluída com a entrega de milhões de barris de petróleo, uma das partes precisa arcar com os custos de frete. Por outro lado, é possível que o detentor se beneficie da posse antecipada de *commodities* que somente lhe se serão necessárias no futuro distante. Tais vantagens podem ser obtidas, por exemplo, transacionando a *commodity* em cenários de oscilação de preço no curto prazo. A diferença entre as vantagens da posse da *commodity* e o custo de carregamento é chamada retorno de conveniência (*convenience yield*), podendo ser positiva ou negativa, dependendo do estado do mercado, dos níveis e custos de estocagem etc.

As *commodities* também se diferenciam pelo seu processo de formação de preços, que se dá, em termos gerais, pelas leis de oferta e demanda, ao contrário das ações, valoradas com base na análise de variáveis como fluxos de caixa esperados, estrutura de capital da empresa, indicadores de desempenho, entre outras. Além disso, dada a sua natureza indispensável, a demanda por *commodities* geralmente é inelástica aos preços. Em contrapartida, enquanto os preços das ações aumentam em média ao longo do tempo para remunerar o risco corrido pelo investidor, os preços das *commodities* podem até se alterar bruscamente, por exemplo, em virtude de eventos geopolíticos ou climáticos, mas tendem retomar um nível padrão no longo prazo. Este fenômeno, conhecido como reversão à média, é exemplificado em [Gem11] para um grande conjunto de *commodities* energéticas, metálicas e agrícolas.

Outro traço marcante de algumas *commodities* é a existência de sazonalidade na demanda. No caso do gás natural, a temperatura é um dos fatores preponderantes no aumento ou diminuição da demanda. Já no caso das *commodities* agrícolas, são os ciclos de plantio e de colheita quem impactam a oferta, e conseqüentemente os preços. Os efeitos da sazonalidade nos preços das *commodities* são usualmente referenciados como *time-effect*. Embora tal flutuação de preços seja esperada pelos consumidores, a sua amplitude e duração são incertas.

As incertezas com relação ao futuro e a natureza indispensável das *commodities* criaram um ambiente favorável ao desenvolvimento dos mercados futuros, como forma de complementar o mercado à vista. Porém, rapidamente os papéis se inverteram. Atualmente, a maior parte das negociações de *commodities* ocorre nos mercados futuros. Tal inversão é bastante natural, uma vez que tais mercados permitem a participação de outros agentes além dos produtores e consumidores. Em especial, agentes do setor financeiro, que oferecem serviços adicionais – tipicamente opções e outros derivativos – úteis para fins de proteção (*hedge*) por parte das empresas, ou para fins de especulação por parte dos mais diversos agentes. De fato, a maior parte opções relacionadas a *commodities* possuem os contratos futuros como subjacente, e não os contratos à vista. Isso deve-se ao fato de que os emissores das opções precisam se proteger mantendo em carteira um portfólio cujo valor seja compatível com as obrigações assumidas. Para alcançar este objetivo, tal portfólio deve conter o ativo subjacente à opção emitida, o que torna

os contratos futuros a escolha natural para definição destes instrumentos financeiros. Além disso, apenas uma pequena quantidade das transações realizadas são finalizadas com a entrega física das *commodities*; a maior parte das transações é liquidada de forma meramente financeira.

A expiração dos contratos futuros ocorre mensalmente e em dias padronizados, muito embora as regras nem sempre sejam tão simples de serem implementadas na prática. Tipicamente, há negociação futura de preços para horizontes de pelo menos 12 meses. Os preços futuros traduzem as expectativas oferta e demanda da *commodity* nestes diversos instantes de tempo, representando uma valiosa informação para os participantes do mercado, como enfatizado por Grossman em [Gro], para quem os mercados futuros servem como um ambiente de troca de informações, onde são reveladas para os negociantes desinformados as expectativas dos informados, característica esta que ele denominou como papel informacional dos mercados futuros.

Para não negligenciar esta ideia, neste trabalho concentraremos esforços na calibragem de modelos para a curva de futuros, escolha que será justificada matematicamente no Capítulo 3.

1.4 Opções no Mercado de *Commodities*

No bojo do desenvolvimento dos mercados futuros de *commodities* e da possibilidade da participação outros atores além dos produtores e consumidores, observou-se uma explosão na quantidade de instrumentos financeiros oferecidos, dentre os quais se destacam as *spread options*. Uma opção deste tipo é contrato contingenciado cujo *payoff* é definido com base na diferença de preços entre duas ou mais *commodities*, ou na diferença de preço entre uma mesma *commodity* em instantes distintos de tempo. Apesar de sua vasta utilização para fins especulatórios, originalmente foram criadas para permitir aos participantes do mercado se protegerem dos riscos inerentes às peculiaridades dos movimentos de preços das *commodities*. Listamos abaixo exemplos de *spread options* presentes no mercado de petróleo, bem como suas utilidades para fins de cobertura de risco.

Crack Spread Options

Estas opções são definidas com base na diferença de preço entre uma *commodities* e outras geradas a partir do processamento da primeira. Por exemplo, petróleo bruto e gasolina. Uma opção deste tipo pode ser usada como proteção contra flutuação de custos de refino, ou até mesmo ser interpretada como uma opção real relacionada a construção de uma refinaria.

Location Spread Options

Como mencionamos, uma transação no mercado de *commodities* pode implicar em uma entrega física em uma localidade diferente de onde o contrato foi firmado. Neste cenário, a parte responsável pelo transporte da *commodity* pode ficar vulnerável ao preço do frete. Uma *location spread option*, cujo valor é definido com base na diferença de preço de uma mesma *commodity* em lugares distintos, pode ser usada para fazer hedge de tais flutuações de preço de transporte.

Calendar Spread Options

Este tipo de opção tem seu *payoff* baseado na diferença de preço de uma mesma *commodity* em diferentes instantes futuros de tempo, podendo portanto ser usada como um instrumento de proteção contra flutuações sazonais mais bruscas.

Quality Spread Options

A despeito de sua classificação como *commodity*, existem centenas de tipos de petróleo ao redor do mundo, sendo estes diferenciados em termos de uma medida chamada grau API. Maior o grau API, melhor a qualidade do petróleo e o seu grau de aproveitamento na produção de derivados mais nobres. Os custos do processo de refino dependem da qualidade do petróleo disponível, e em grande parte das situações as refinarias operam processando uma mistura de diferentes tipos de petróleo. Embora seja possível adaptar as refinarias para operar com diferentes misturas, há custos envolvidos em tal operação. Para ajudar a calcular-los, seria possível usar as chamadas *quality spread options*, definidas sobre a diferença de preços entre diferentes tipos de uma mesma *commodity*.

Average Price Options

Uma outra categoria de opções que ocorre comumente no universo das *commodities* são as opções do tipo asiáticas, que possuem o seu *payoff* baseado em uma na média de preços ao longo de um determinado período. Tais contratos, também conhecidos como *average price options* são usados como instrumento de proteção que permitem as empresas “travarem” os seus custos com um determinado insumo em um determinado valor ou intervalo de valores.

Contratos OTC

Além da grande quantidade de instrumentos padronizados negociados em bolsa, no mercado de *commodities* são bastantes comuns os chamados derivativos de balcão, conhecidos em inglês por contratos OTC (*over-the-counter*), nos quais os mais diferentes *payoffs* e regras de opcionalidade de exercício são estabelecidas entre as partes, implicando em desafios de precificação cada vez maiores. A sigla OTC remete-se ao fato de que para tais contratos, os volumes de negociação bem como as suas características detalhadas não são facilmente rastreadas e contabilizadas, como ocorre com os contratos padronizados.

Capítulo 2

Análise Exploratória dos Dados

Neste Capítulo, apresentaremos uma análise exploratória de algumas das principais propriedades dos dados de preços e retornos no mercado de *commodities* de energia. O objetivo da investigação é o de ganhar maior familiaridade com as propriedades sobre os preços, retornos, volatilidade e correlações, o que será importante na calibragem dos modelos propostos mais adiante.

O estudo será conduzido usando séries históricas de preços à vista e de contratos futuros para três *commodities*: o petróleo WTI, o gás natural Henry Hub e a gasolina RBOB. Tais séries de preços são identificadas por códigos cujos prefixos são, respectivamente, CL, NG e RB. A série de preço CL01, por exemplo, diz respeito aos contratos futuros de vencimento mais próximo, enquanto a série CL02 diz respeito aos contratos futuros que vencem um mês após o contrato CL01, e assim sucessivamente.

Os dados utilizados nas análises em preços diários de fechamento relativos ao período de janeiro do ano 2000 até agosto do ano de 2013 para o caso das séries CL e NG, enquanto para a série RB o intervalo de dados se inicia apenas em 2007. Para cada observação diária estão disponíveis os preços dos primeiros 24 contratos futuros, o que ao longo do trabalho chamaremos de vértices.

2.1 Reparametrização Temporal e Interpolação

A maior parte da análise exploratória dos dados que será apresentada nesta Seção irá se basear em cálculos sobre os retornos logarítmicos dos contratos futuros, sendo para isso necessário organizarmos os dados de uma forma adequada. Para alcançar este objetivo, um primeiro aspecto dos dados que necessita ser analisado e tratado diz respeito às datas de expiração dos contratos.

Se estamos no dia 10 de janeiro de 2013, CL01 representa o contrato futuro que expira em 25 de janeiro deste mesmo ano. Já o contrato CL02 irá expirar em 25 de fevereiro, e assim sucessivamente. No entanto, quando estivermos em 26 de janeiro, CL01 passará a ser o contrato que, até o dia 25, era denotado como CL02, o CL02 passará a ser o que era denotado como CL03, e assim sucessivamente. Este processo é tipicamente conhecido como rolagem.

Assim, a cada dia um determinado contrato representa um instrumento que irá expirar após

um intervalo de tempo variável. Embora sejam estes contratos os negociados na prática, ao calcular os retornos de tais séries sem considerar a rolagem, estaríamos objetos semanticamente distintos. Para contornar este problema, a abordagem mais utilizada na literatura é a transformação das séries para o domínio do tempo até o vencimento, que será descrita adiante.

Consideremos um conjunto de N contratos futuros com datas de vencimento fixas em $T_1 < T_2 < T_3 < \dots < T_N$, e suponhamos que para cada dia t possuímos os preços de tais contratos. Agora, para cada dia t , definimos os tempos até o vencimento como $\tau_1 = T_1 - t, \tau_2 = T_2 - t, \dots, \tau_N = T_N - t$. Com esta reparametrização temporal, os preços dos contratos futuros passam a ser expressos como $F(t, \tau_1), F(t, \tau_2), \dots, F(t, \tau_N)$.

Ao aplicar este procedimento para os preços históricos diários, é fácil notar que para um dado dia t teremos um conjunto de vértices $\tau_1 = T_1 - t, \tau_2 = T_2 - t, \dots, \tau_N = T_N - t$ que não coincide com o conjuntos de vértices gerado pela mesma reparametrização temporal aplicada no dia seguinte, uma vez que as datas de vencimento dos contratos para os quais temos os preços históricos são fixas.

Neste ponto, faz-se o que Carmona e Durrleman denominam “massageamento” dos dados em [CD03], por meio da interpolação da curva de preços futuros, permitindo na sequência a reamostragem em vértices comuns. A principal preocupação que surge quando necessitamos executar a interpolação de preços é a de garantir a não introdução de oportunidades de arbitragem na curva de preços. Para o caso dos contratos futuros de *commodities*, tal objetivo pode ser alcançado através de uma interpolação linear entre cada um dos preços disponíveis para o dia.

Manipulação de Datas

Manipular datas e horários no contexto de finanças nem sempre é uma tarefa simples, principalmente quando precisamos fazer distinção entre dias úteis e dia corridos, fuso horário etc. Embora um rigoroso tratamento de datas possa ser dispensável para algumas aplicações, para cálculo de *payoffs* de opções, diferenças de dois ou três dias na contagem podem implicar erros significativos. No âmbito deste trabalho, optamos pela utilização da convenção em dias úteis, e para a manipulação das datas usamos o pacote *timeDate* do R, o qual oferece a opção de definição do calendário utilizado, localização geográfica, além de uma vasta gama de métodos para cálculos com datas, como o *businessDaysBetween*, que permite a subtração de datas em dias úteis para o cálculo dos tempos até o vencimento.

Dados os preços de dois contratos futuros consecutivos com prazos de vencimento consecutivos τ_i e τ_j , O procedimento consiste basicamente em gerar uma reta entre os pontos $(\tau_i, F(t, \tau_i))$ e $(\tau_j, F(t, \tau_j))$. Este precisa ser feito parte a parte para garantir a consistência da curva de preços interpolada com os preços dos contratos reais. Após realizarmos a interpolação em todos os intervalos formados pelos contratos sucessivos, podemos reamostrar os dados e selecionar em cada observação diária um conjunto de vértices comuns, para enfim organizá-los em uma matriz onde cada coluna é formada pelas observações diárias dos vértices de interesse.

$$\begin{bmatrix} F(t, \tau_1) & F(t, \tau_2) & \dots & F(t, \tau_N) \\ F(t+1, \tau_1) & F(t+1, \tau_2) & \dots & F(t+1, \tau_N) \\ F(t+2, \tau_1) & F(t+2, \tau_2) & \dots & F(t+2, \tau_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F(t+M, \tau_1) & F(t+M, \tau_2) & \dots & F(t+M, \tau_N) \end{bmatrix}.$$

A partir desta matriz é produzida um outra, composta coluna a coluna pelo invariante de mercado associado ao contrato futuro, que no caso das *commodities* que avaliaremos serão sempre os retornos logarítmicos dos contratos de prazo até a expiração comum. Esta nova matriz é dada por

$$\begin{bmatrix} f(t+1, \tau_1) & f(t+1, \tau_2) & \cdots & f(t+1, \tau_N) \\ f(t+2, \tau_1) & f(t+2, \tau_2) & \cdots & f(t+2, \tau_N) \\ f(t+3, \tau_1) & f(t+3, \tau_2) & \cdots & f(t+3, \tau_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f(t+M, \tau_1) & f(t+M, \tau_2) & \cdots & f(t+M, \tau_N) \end{bmatrix},$$

onde $f(t, \tau_i)$ é definido como

$$f(t, \tau_i) = \log(F(t, \tau_i)) - \log(F(t-1, \tau_i)), \text{ para } i = 1, 2, \dots, N.$$

2.2 Anatomia das Curvas de Futuros

As Figuras 2.1, 2.2 e 2.3 ilustram a anatomia geral das curvas de futuros com horizonte de 24 meses para o petróleo, gás natural e gasolina. Para cada uma dessas *commodities*, são apresentados exemplos de curvas de futuros para datas selecionadas randomicamente.

O primeiro aspecto que deve ser notado é que, em alguns casos, as curvas são crescentes, ou seja, o preço do contrato futuro de vencimento mais próximo é inferior ao preço do contrato de vencimento mais longo, cenário conhecido no mercado como *contango*. Em outras ocasiões, a situação é oposta, e então diz-se que a curva está em *backwardation*. Para o petróleo e para o gás, a curva se mostrou em maior parte das vezes em *backwardation*, enquanto que a curva da gasolina se manteve na maior parte do tempo em *contango*, como mostrado na Tabela 2.1.

	Contango	Backward	Shifts
Petróleo WTI	1405 (41.03%)	2019 (58.97%)	2.51%
Gás Henry Hub	2358 (69.13%)	1053 (30.87%)	2.99%
Gasolina RBOB	420 (25.06%)	1256 (74.94%)	4.77%

Tabela 2.1: *Backward vs. Contango*

Além disso, a curva da gasolina foi a que mais se alternou entre esses dois cenários, o que ocorreu em quase 5% dos dias analisados, como pode ser visto na Figura 2.4, que apresenta uma contagem acumulada de mudanças de cenário. No entanto, uma estabilização em *backwardation* tem sido observada no fim do período analisado.

Já o petróleo historicamente tem apresentado períodos de baixa alternância, com estabilização tipicamente *backwardation*, seguidos de períodos de alternância alta. Analisando mais de perto o comportamento da curva de futuros para esta *commodity*, podemos fazer alguns paralelos

⁰Os invariantes são variáveis de mercado que podem ser modeladas como realizações de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. No contexto de finanças, é fortemente desejável que os invariantes de mercado escolhidos sejam homogêneos no tempo, ou seja, que suas distribuições não dependam do tempo. Uma consistente introdução ao tema invariantes de mercado e exemplos de como encontrá-los pode ser vista em [Meu05].

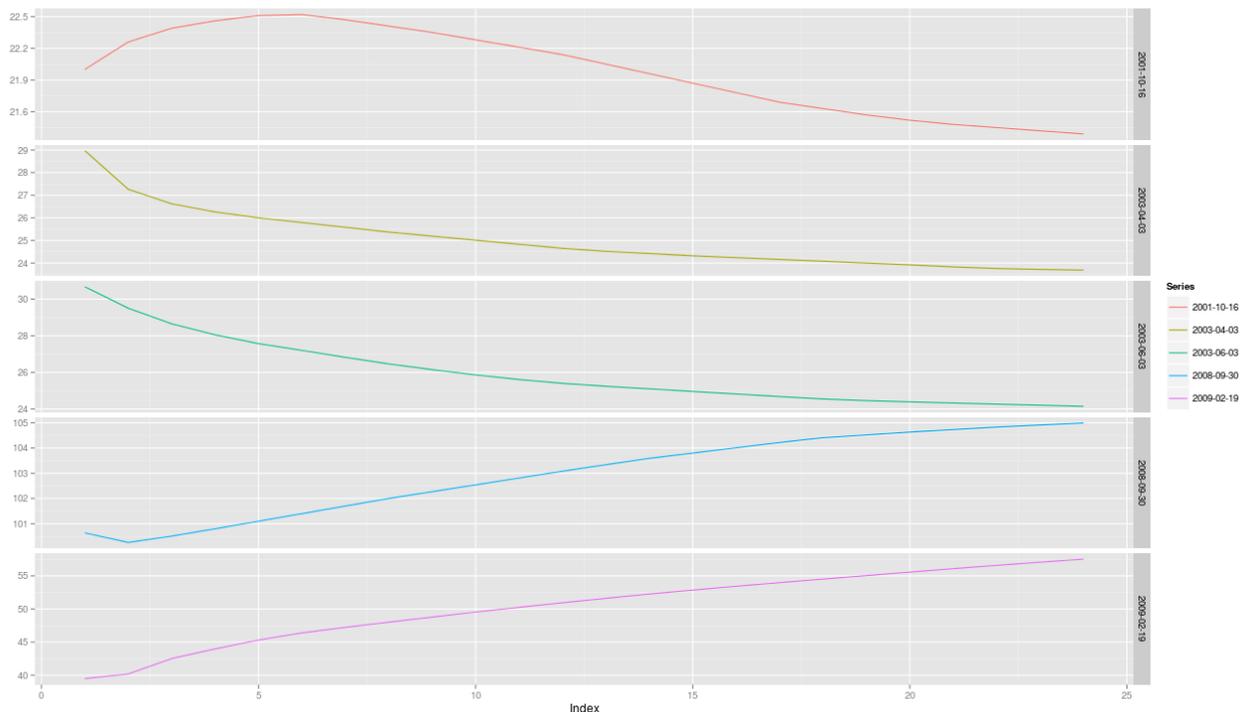


Figura 2.1: Curvas de Futuros - Petróleo WTI

com acontecimentos econômicos e geopolíticos importantes. Na Figura 2.5, o nível zero indica que a curva de preços estava em *backwardation*, e o nível um indica o contrário. Por volta do fim de 2011, podemos ver que a curva passou a estar em *contango*, muito provavelmente pela expectativa de aumento de preços em virtude das tensões entre Estados Unidos e Oriente Médio causadas pelos ataques terroristas de 11 de setembro de 2001. No entanto, essa expectativa durou por pouco tempo. Já por volta do final de 2008, a curva passou a se apresentar em *contango* novamente, cenário que durou até o início de 2011, quando a curva voltou a mostrar maior alternância. Este comportamento aparenta estar relacionado com a crise, uma vez que a demanda por petróleo entrou em declínio em virtude da diminuição da atividade econômica, em especial nos países desenvolvidos. Assim, refletindo as expectativas de término da crise em algum momento e a conseqüente retomada da demanda por petróleo, a curva passou a se mostrar em *contango* sistematicamente.

O segundo aspecto que deve ser notado é a existência de um forte traço de sazonalidade nos preços do gás natural e da gasolina. Para o gás, o formato da curva reflete as expectativas quanto ao aumento ou diminuição dos preços em virtude, respectivamente, do início e do fim do inverno no hemisfério Norte, períodos em que a demanda se altera substancialmente.

Já para a gasolina, o pico de preços ocorre no verão e não no inverno, o que pode ser explicado por alguns fatores como o aumento da demanda decorrente do período de férias no hemisfério norte e a limitação da capacidade de produção das refinarias em virtude de manutenções, usualmente programadas para os meses que antecedem o verão, comprimindo a oferta no início desta estação.

No entanto, o fator determinante para o comportamento sazonal dos preços da gasolina não está na demanda, mas sim no *Reformulated Gasoline Program* (RFG), iniciado pelo governo americano em 1995 como o objetivo de reduzir a poluição. Entre as regras estabelecidas por

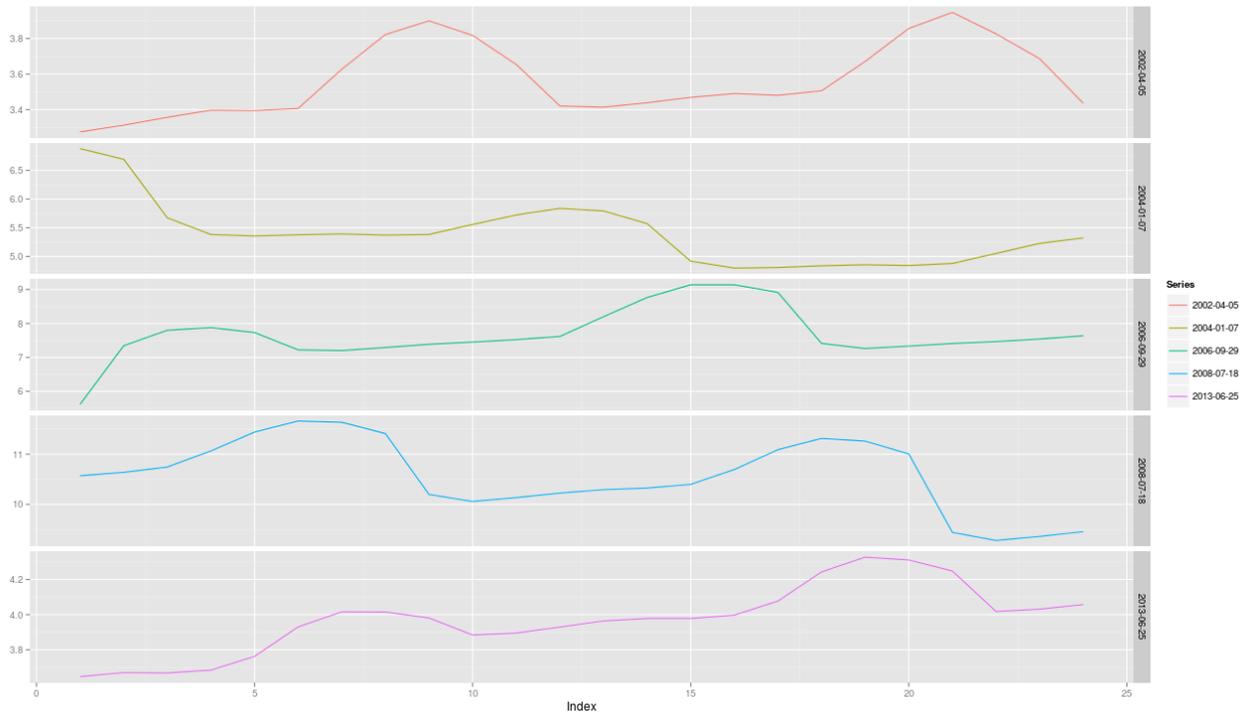


Figura 2.2: Curvas de Futuros - Gás Henry Hub

esse programa está o uso de diferentes aditivos na produção da gasolina que é vendida durante o verão, a chamada *summer-grade fuel*, tornando-a mais limpa, mas também mais cara que a *winter-grade fuel*, vendida durante o inverno. As regras de composição das gasolinas de verão e inverno não se mantêm fixas desde o início do programa, sendo redefinidas periodicamente pelo governo. Assim, os preços dos contratos futuros carregam, dentre outras incertezas, o impacto nos preços que tais regras de composição podem trazer.

Embora produzam sazonalidade na curva de preços da gasolina, o fato de as regras se modificarem em datas conhecidas induz um comportamento sazonal nos preços futuros da gasolina bastante diferente do ocasionado pela mudança do clima nos preços futuros do gás. Assim, observamos na curva de preços da gasolina subidas e descidas de preços mais bruscas e períodos mais longos de estabilização dos preços, fatos que não são observados na curva de preços do gás dado que as transições climáticas ocorrem de forma mais suave, com início e fim mais incertos.

2.3 Propriedades Estatísticas

Prosseguimos com nossa análise explorando os quatro primeiros momentos estatísticos dos retornos logarítmicos de 12 contratos futuros de petróleo. Na Tabela 2.2, a coluna $(T - t)$ indica o tempo até o vencimento em dias. Como podemos ver, em todos os casos a média é praticamente zero, enquanto o desvio padrão diário varia entre 1.54% e 2.36%, o que em termos anualizados equivale entre 24% e 37%. Para fins de comparação, a volatilidade histórica anualizada do índice IBOVESPA no dia 7 de novembro era de cerca de 20%, conforme publicado no site da BMF Bovespa. Assim, a alta volatilidade em comparação às ações é um primeiro traço marcante do mercado de *commodities* de energia.

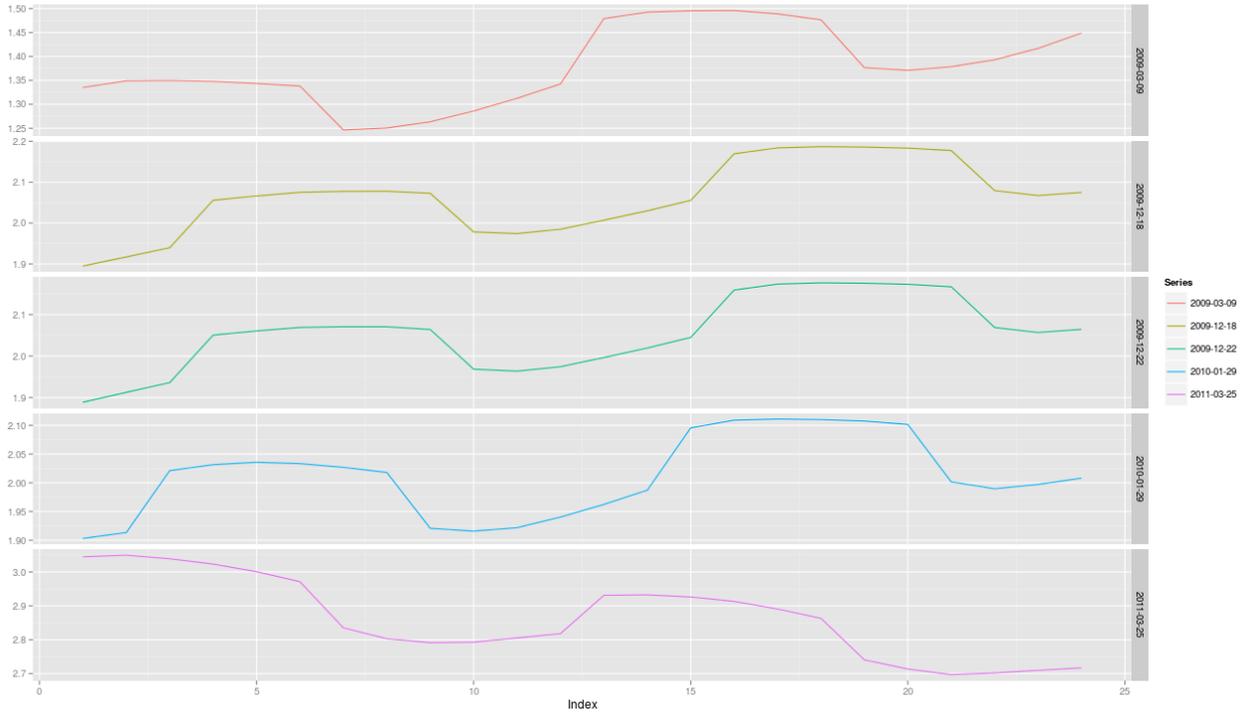


Figura 2.3: Curvas de Futuros - Gasolina RBOB

Podemos ver também que a distribuição dos retornos apresenta algum nível de assimetria, com uma concentração de massa a esquerda da média. No entanto, o nível de curtose é relativamente próximo a três, o que ajuda a corroborar o uso de um modelo log-normal para os preços dessa *commodity*, muito embora testes estatísticos mais elaborados contrariem tal hipótese.

Quando olhamos para as mesmas estatísticas computadas para os retornos do gás natural, as altas volatilidades observadas no mercado de *commodities* de energia tornam-se mais evidentes. Para o gás natural, a volatilidade histórica anualizada alcançou o nível de 54%. A assimetria oscila entre positiva para vencimentos mais próximos e negativa para vencimentos mais longos. Já os níveis de curtose são quase sempre maiores que 3, mostrando que a distribuição dos retornos para esta *commodities* possui bastante massa nas caudas.

$(T - t)$	Petróleo WTI				Gás Henry Hub				Gasolina RBOB			
	Média	Desvio	Assimetria	Curtose	Média	Desvio	Assimetria	Curtose	Média	Desvio	Assimetria	Curtose
20	0.0004	0.0236	-0.2368	4.0643	0.0001	0.0345	0.0739	5.5200	0.0003	0.0242	-0.0387	3.1723
60	0.0004	0.0212	-0.2544	2.7429	0.0002	0.0297	0.0325	4.9075	0.0003	0.0223	0.0367	3.9262
100	0.0004	0.0197	-0.2602	2.7753	0.0002	0.0250	0.0558	3.9058	0.0002	0.0207	-0.2252	3.0189
140	0.0004	0.0188	-0.2558	2.8366	0.0001	0.0226	0.1543	3.9718	0.0003	0.0203	-0.3356	3.8061
180	0.0004	0.0180	-0.2429	2.8259	0.0001	0.0210	-0.0143	2.8625	0.0003	0.0206	-0.3542	4.4729
220	0.0005	0.0174	-0.2395	2.8277	0.0001	0.0197	-0.1054	6.8724	0.0003	0.0198	-0.2001	3.6097
260	0.0005	0.0169	-0.2452	2.8556	0.0001	0.0196	-0.2195	14.5016	0.0003	0.0195	-0.2323	3.8807
300	0.0005	0.0165	-0.2569	2.9026	0.0001	0.0173	-0.0054	7.0827	0.0002	0.0187	-0.1709	3.1516
340	0.0005	0.0162	-0.2632	2.9359	0.0002	0.0168	-0.4707	16.1812	0.0002	0.0188	-0.0037	3.6155
380	0.0005	0.0158	-0.2647	2.9491	0.0002	0.0155	-0.3111	4.2967	0.0002	0.0184	-0.1978	2.8492
420	0.0005	0.0156	-0.2621	2.9366	0.0001	0.0166	-0.1687	10.0326	0.0002	0.0185	-0.2661	3.0805
460	0.0005	0.0154	-0.2599	2.9307	0.0001	0.0157	-0.0795	13.5736	0.0003	0.0184	-0.2295	2.9876

Tabela 2.2: Propriedades Estatísticas: WTI, RBOB e Henry Hub

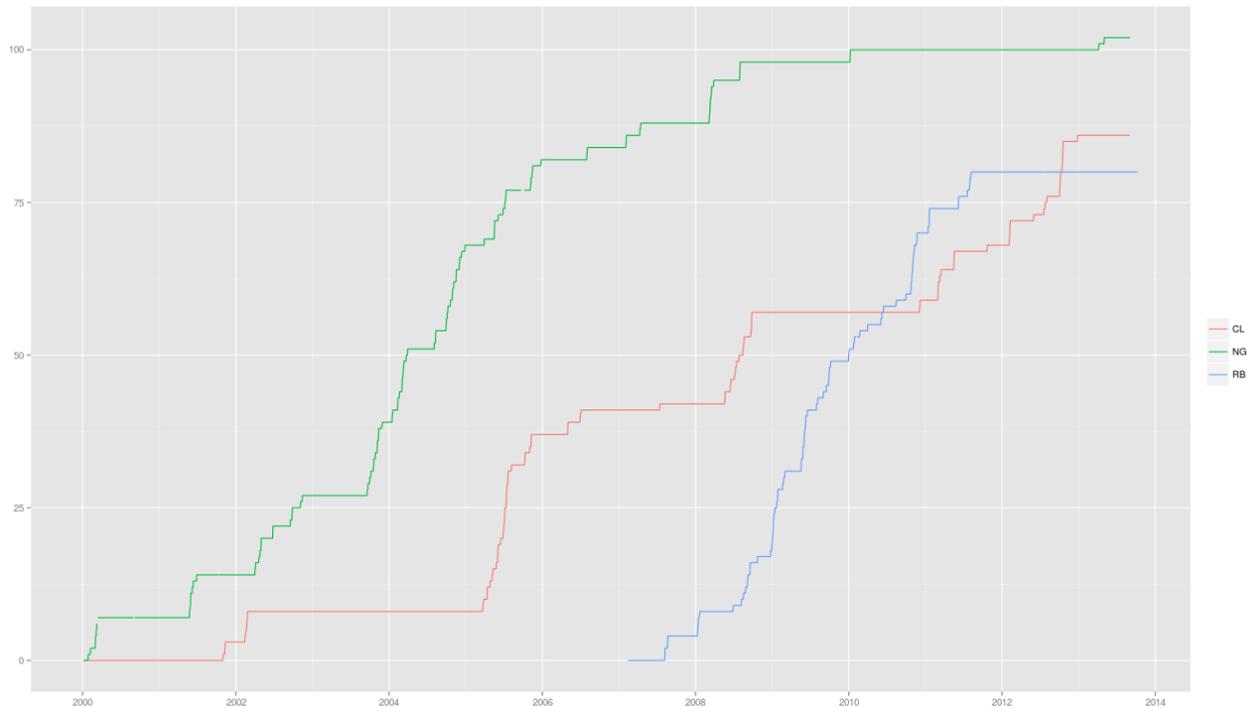


Figura 2.4: Contagem Acumulada de Mudanças entre Contango e Backwardation

2.4 O Efeito Samuelson

Os altos níveis de volatilidade apresentados pelos preços das *commodities* de energia indicam que, no processo de modelagem da curva de contratos futuros, esta variável merece atenção especial. Assim, evoluímos nossa investigação observando um importante fato estilizado acerca da estrutura de volatilidade dos contratos futuros. Fazemos isso plotando a volatilidade dos contratos futuros de petróleo, gás e gasolina como uma função do tempo até o vencimento, o que é mostrado na Figura 2.6.

Podemos perceber que a volatilidade decai com o aumento do prazo para vencimento, fenômeno que é conhecido como Efeito Samuelson. As volatilidades do petróleo e da gasolina são bastante próximas para contratos de vencimentos curtos, mas no longo prazo a gasolina se mostra mais volátil. Já o gás natural apresenta volatilidade anualizada bastante superior ao petróleo e ao gás para vencimentos curtos, porém no longo prazo a volatilidade dos contratos acima de dez meses se manteve entre as volatilidades do petróleo e da gasolina.

Assim, o Efeito Samuelson se mostrou mais preponderante para o gás natural e para o petróleo, enquanto que para a gasolina o decaimento da volatilidade para contratos mais longos foi mais suave. No entanto, em todos os casos a volatilidade parece convergir para um patamar constante, muito embora tenhamos centrado nossa análise nos contratos de vencimento até 24 meses. Esta relação de decaimento da volatilidade será importante para justificar os modelos para os preços à vista e para a curva de futuros, o que será feito no Capítulo 3.

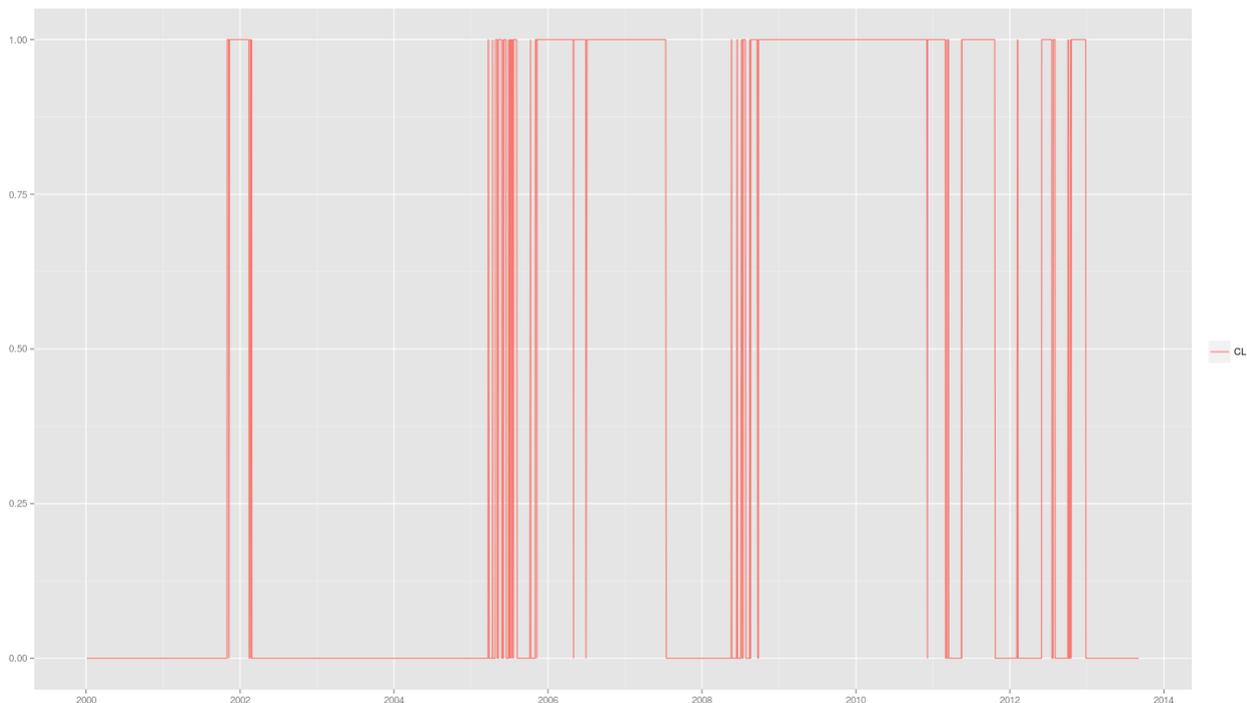


Figura 2.5: Petróleo WTI - Contango x Backwardation

2.5 Sazonalidade da Volatilidade

Evoluindo um estágio na análise da volatilidade dos preços dos contratos futuros, podemos verificar que esta também está sujeita a efeitos sazonais no caso de *commodities* como o gás natural e gasolina, assim como os seus preços. Para ilustrar esse fato, plotamos na Figura 2.7 o desvio padrão dos preços do gás em uma janela deslizante de 30 dias, como forma de representar a evolução da volatilidade ao longo do tempo. A linha em vermelho representa a volatilidade média, enquanto a linha preta mostra a volatilidade computada na janela deslizante. É possível notar que os picos de volatilidade são recorrentes, mostrando que a volatilidade histórica apresenta traços sazonais.

Se ao invés de olharmos para a volatilidade histórica olharmos para a volatilidade implícita de Black, ainda podemos observar a existência de traços sazonais na volatilidade do gás natural. Para exemplificar esta fato, plotamos na Figura 2.8 as volatilidades implícitas de Black para os primeiros 24 contratos futuros usando dados relativos a dez dias do mês de agosto de 2013. Quando realizarmos a calibragem dos modelos de preços de forma implícita, este fato estilizado será levado em consideração para justificarmos as estruturas de volatilidade propostas.

2.6 Correlações entre Diferentes Vencimentos

Como estaremos interessados em modelar a curva de contratos futuros como um todo, torna-se necessário analisar como os preços dos contratos de diferentes vencimentos se comportam mediante os choques de mercado. Para ter uma ideia geral da distribuição das correlações para cada uma das *commodities* avaliadas, plotamos densidade de correlações entre os 24 primeiros contratos, o que é mostrado na Figura 2.9.

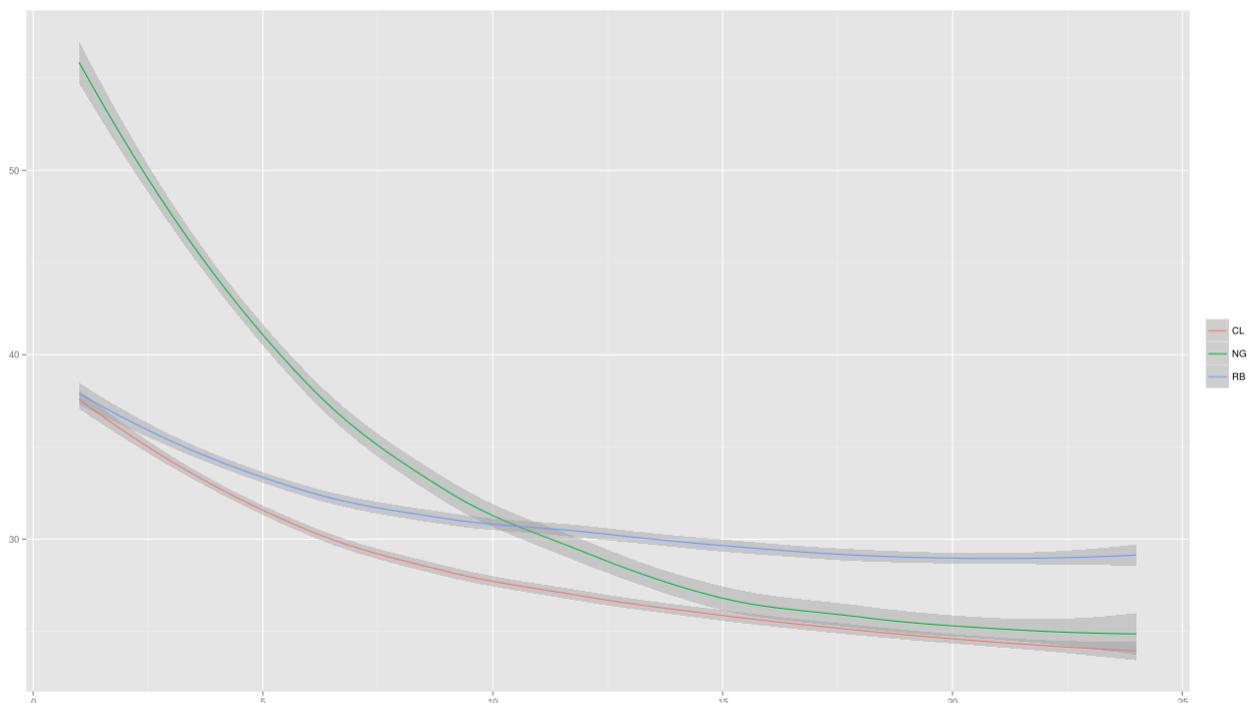


Figura 2.6: Efeito Samuelson - CL, NG e RB

Como podemos ver, para o caso do Petróleo a correlação é bastante alta entre os contratos neste intervalo de vencimentos, com a maior parte da massa concentrada em valores superiores a 90%, com média de 96%. Já para o caso da gasolina, a média foi de 91%, enquanto que para o gás as correlações são bastante dispersas e com média bastante inferior, na casa de 73%.

Para analisar em mais detalhes tais estruturas de correlações, nas Figuras 2.10, 2.11 e 2.12 plotamos *heatmaps* baseados na matrizes de correlação histórica entre os retornos logarítmicos dos primeiros 24 contratos futuros para o petróleo, gás e gasolina, respectivamente.

A partir dos *heatmaps*, podemos ver que os contratos futuros de petróleo são altamente correlacionados, com níveis mais baixos de correlação apenas entre contratos com vencimento muito distantes entre si. Mesmo assim, os níveis mínimos não são muito inferiores a 80%. Já para o caso da gasolina e do gás, as diagonais superiores e inferiores em azul mais escuro indicam alto nível de correlação entre os contratos com defasagem de 12 meses, o que é coerente com a sazonalidade das forças que determinam a subida ou queda dos preços destas *commodities*. Se tivéssemos um horizonte maior de dados, provavelmente este padrão tenderia a se repetir, formando novas diagonais em azul para contratos com defasagem múltipla de 12 meses. No entanto, para o caso do gás, a correlação entre contratos de vencimentos mais distantes alcançou níveis abaixo de 60%, valor bastante inferior aos 76% observados para a gasolina.

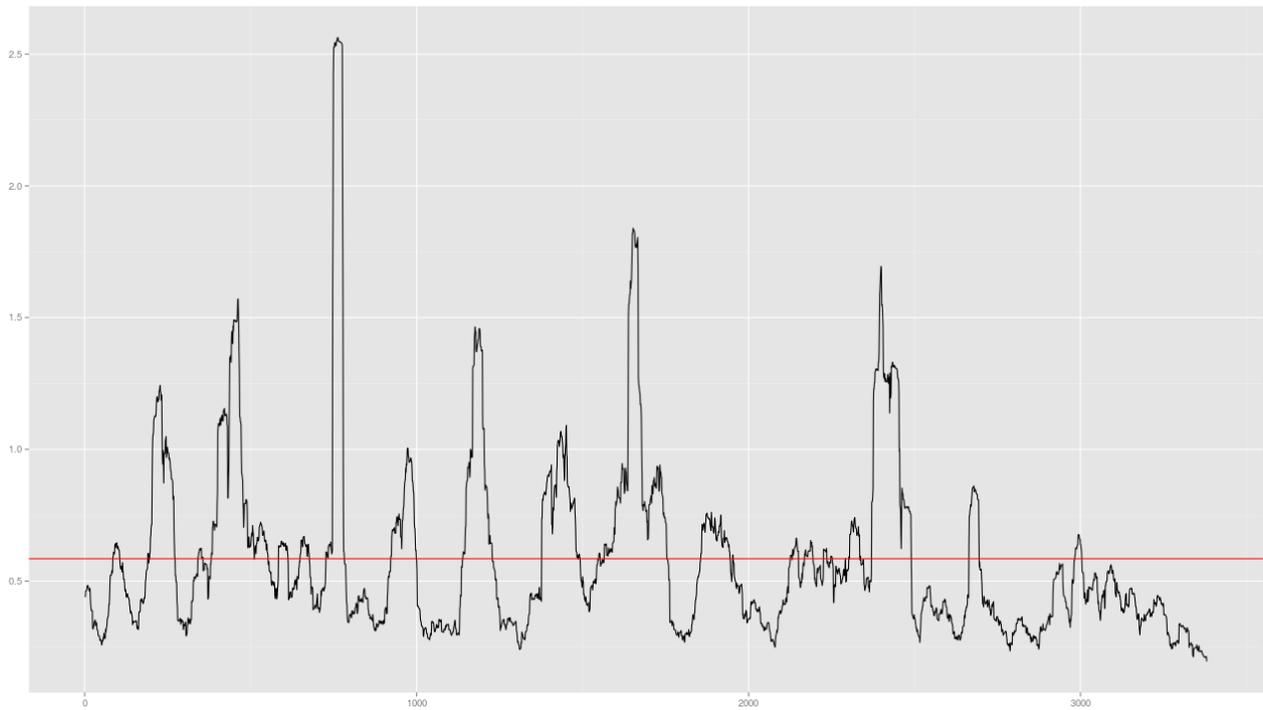


Figura 2.7: Sazonalidade da Volatilidade - Gás Natural

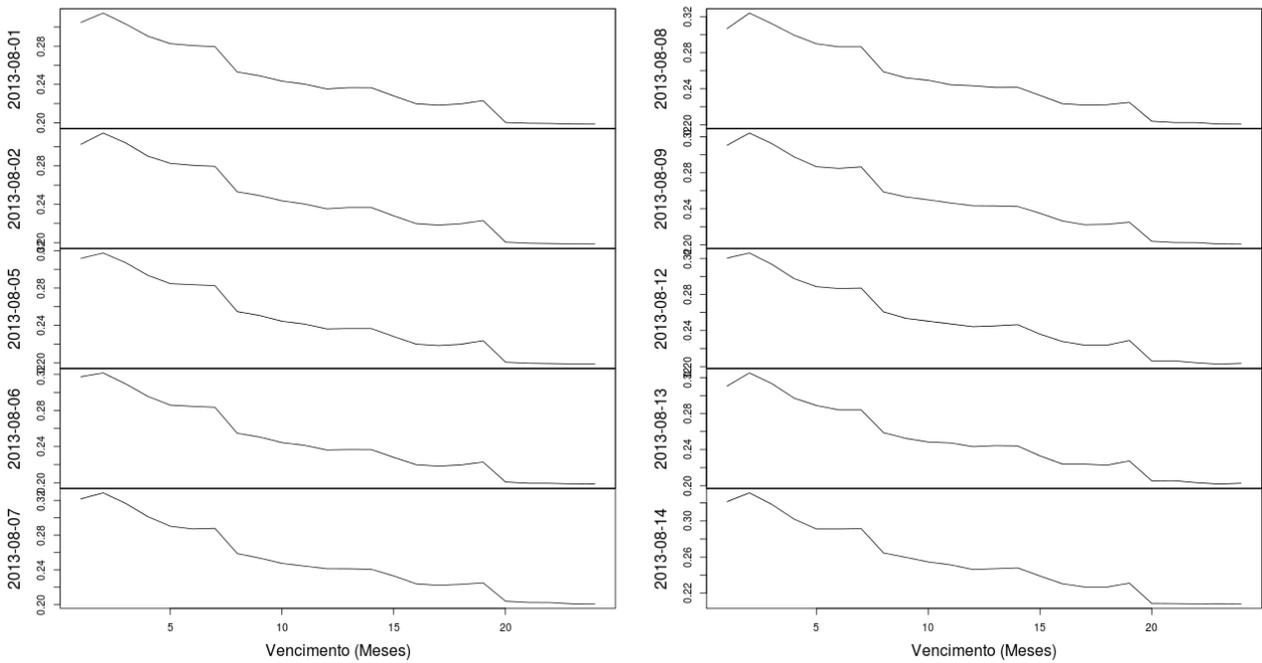


Figura 2.8: Volatilidade Implícita - Gás Henry Hub

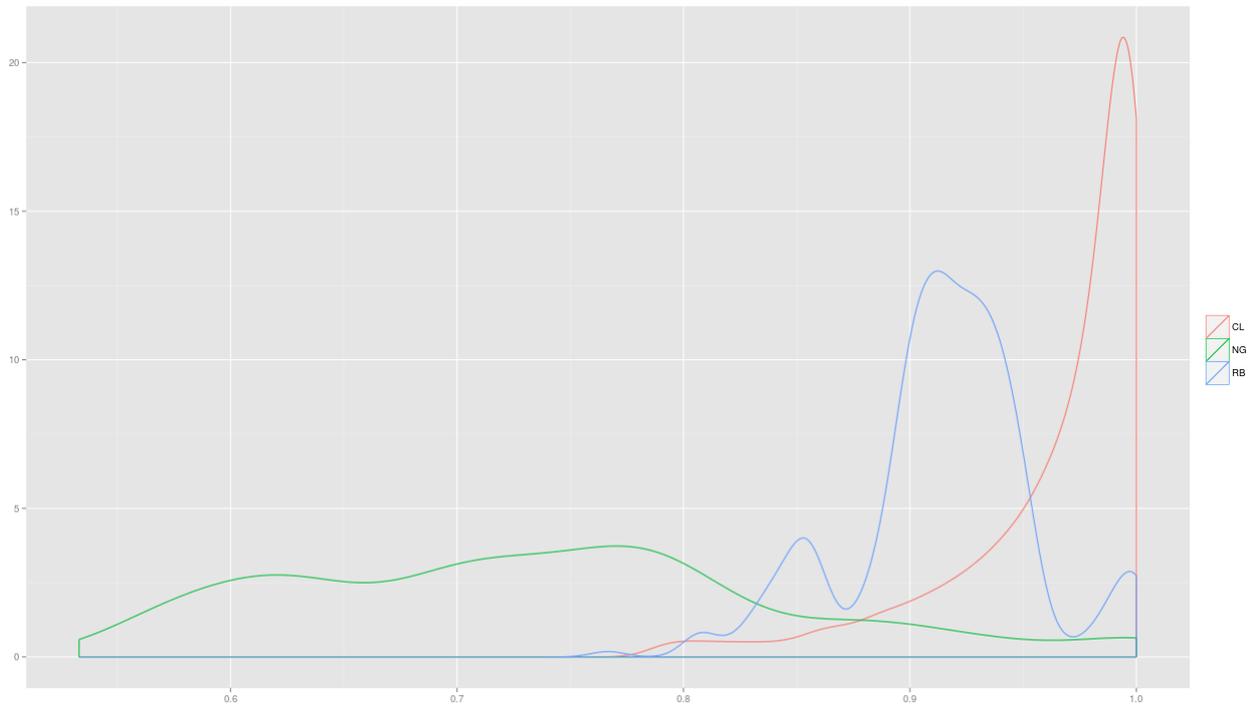


Figura 2.9: Densidade de Correlação entre os 24 Primeiros Contratos

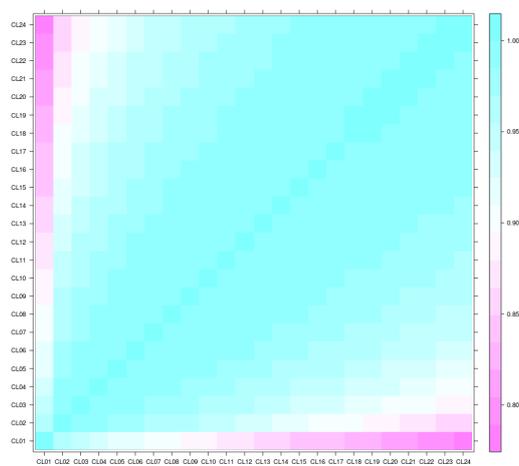


Figura 2.10: Heatmap de Correlações - Petróleo WTI

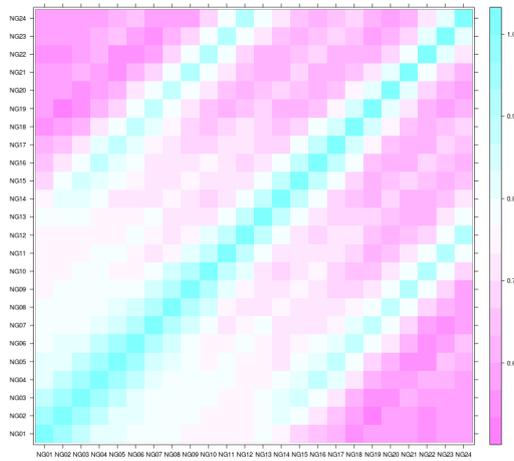


Figura 2.11: Heatmap de Correlações - Gás Henry Hub

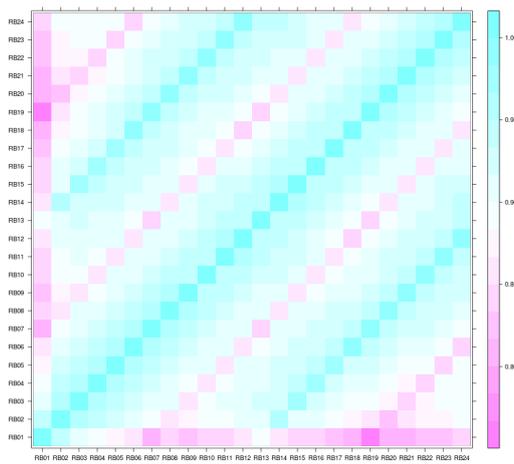


Figura 2.12: Heatmap de Correlações - Gasolina RBOB

Capítulo 3

Modelagem de Preços

No universo das *commodities*, boa parte das negociações ocorre nos mercados futuros, especialmente no caso opções. Isso é natural, á medida que ao emitir uma opção, o emissor precisa se proteger negociando o ativo subjacente, o que torna os contratos futuros a escolha mais adequada. Assim, iniciamos este Capítulo, apresentando as noções de contratos *forward* e contratos futuros, bem como a hipótese sob a qual estes são equivalentes. Como o nosso objetivo final é o de precificar opções sobre contratos futuros, na sequência apresentamos o modelo de Black, bem como a sua fórmula para precificação de opções *plain-vanilla*, que estão para os mercados de *commodities* assim como o modelo e a fórmula de Black-Scholes estão para o mercado de ações. Para modelar a curva de preços dos contratos futuros, prosseguimos apresentando duas classes de ferramentas: os modelos para os preços à vista e os modelos para as curvas *forward*. Finalizamos o Capítulo propondo uma adaptação do modelo de volatilidade estocástica de Heston, com o objetivo criar modelos para a curva *forward* que precifiquem melhor o *smile* de volatilidade.

3.1 Contratos *Forward* e Futuros

Para introduzirmos as noções de contratos *forward* e futuros, definimos $S(t)$, o processo de preços de um ativo arriscado, $R(t)$, o processo de taxa de juros, com $0 \leq t \leq T^*$. O instante T^* é escolhido de forma que todos os *bonds* e as opções definidas sobre o ativo arriscado expirem em datas iguais ou anteriores a T^* . Definimos também o processo de desconto

$$D(t) = e^{-\int_0^t R(u)du} .$$

e recordamos que, sob uma medida neutra ao risco \mathbb{Q} , o preço em t de um *zero-coupon bond* que paga 1 no instante T é dado por

$$B(t, T) = \frac{1}{D(t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [D(T) \mid \mathcal{F}_t], \quad 0 \leq t \leq T \leq T^* .$$

Contratos *Forward*

Um contrato *forward* é um acordo no qual uma das partes se compromete a pagar uma quantia K em um instante T , onde $0 \leq T \leq T^*$ por um ativo cujo preço no instante t é $S(t)$. O preço *forward* (T -*forward price*) $\text{For}(t, T)$ deste ativo no instante t , onde $0 \leq t \leq T \leq T^*$, é o valor de K que faz com que o preço livre de arbitragem do contrato *forward* em t seja zero. Como

$$\begin{aligned} \text{For}(t, T) &= \frac{1}{D(t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [D(T)(S(T) - K) \mid \mathcal{F}_t] \\ &= \frac{1}{D(t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [D(T)S(T) \mid \mathcal{F}_t] - \frac{K}{D(t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [D(T) \mid \mathcal{F}_t] \\ &= S(t) - KB(t, T), \end{aligned}$$

então a condição para que $\text{For}(t, T) = 0$ é

$$\text{For}(t, T) = \frac{S(t)}{B(t, T)}, \quad 0 \leq t \leq T \leq T^*.$$

Contratos Futuros

Ao entrar em um contrato *forward*, as partes podem estar preocupadas com o risco de *default*, visto que se o preço do ativo subir mais rápido do que a taxa de juros, o contrato assume valor positivo, e caso contrário, o contrato assume valor negativo. Para diminuir o risco de *default*, são introduzidos os contratos futuros $\text{Fut}(t, T)$, que funcionam da seguinte forma. Se o investidor possui uma posição comprada entre os tempos t_k e t_{k+1} , então no tempo t_{k+1} ele irá receber um pagamento de

$$\text{Fut}(t_{k+1}, T) - \text{Fut}(t_k, T).$$

Estes ajustes intermediários ao longo da vida do contrato são chamados de marcação à margem (*marking to margin*). O processo estocástico $\text{Fut}(t, T)$ deve ser construído de modo que seja \mathcal{F}_t -mensurável para cada t e garantindo que $\text{Fut}(T, T) = S(T)$. Assim, a soma dos pagamentos recebidos por um investidor com uma posição comprada entre os instantes zero e T será dado por

$$\sum_{i=1}^n (\text{Fut}(t_i, T) - \text{Fut}(t_{i-1}, T)) = \text{Fut}(T, T) - \text{Fut}(0, T) = S(T) - \text{Fut}(0, T).$$

Além disso, o processo de preço dos contratos futuros é escolhido de forma que a cada instante de tempo t_k o valor do pagamento a ser recebido no instante t_{k+1} , e por consequência em todos os instantes de tempo após t_k , seja zero. O objetivo desta regra é garantir que, a cada instante, um investidor pode entrar ou sair do contrato sem ter que desembolsar nada além do que já foi desembolsado até o momento. Para formalizar esta regra, supomos que a taxa

de juros é constante dia a dia, então o processo de desconto será tal que $D(0) = 1$ e, para $k = 0, 1, \dots, n - 1$,

$$D(t_{k+1}) = \exp \left\{ - \int_0^{t_{k+1}} R(u) du \right\} = \exp \left\{ - \sum_{j=0}^{t_k} R(t_j)(t_{j+1} - t_j) \right\} ,$$

de modo que a possibilidade de entrar ou sair do contrato sem ter que desembolsar mais nada pode ser expressa como

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{D(t_k)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [D(t_{k+1})(\text{Fut}(t_{k+1}, T) - \text{Fut}(t_k, T)) \mid \mathcal{F}_{t_k}] \\ &= \frac{D(t_{k+1})}{D(t_k)} \{ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\text{Fut}(t_{k+1}, T) \mid \mathcal{F}_{t_k}] - \text{Fut}(t_k, T) \} . \end{aligned}$$

Logo, $\text{Fut}(t_k, T)$ deve ser um martingal de tempo discreto sob a medida \mathbb{Q} ,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\text{Fut}(t_{k+1}, T) \mid \mathcal{F}_{t_k}] = \text{Fut}(t_k, T), \quad k = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Como também exigimos que $\text{Fut}(T, T)$ seja igual a $S(T)$, então os preços futuros podem ser expressos como

$$\text{Fut}(t_k, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [S(T) \mid \mathcal{F}_{t_k}], \quad k = 0, 1, \dots, n .$$

Abandonando a hipótese da existência de uma taxa de juros $R(t)$ contínua por partes e assumimos apenas que ela é um processo estocástico adaptado a \mathcal{F}_t , somos levados a seguinte a seguinte definição para o caso contínuo

$$\text{Fut}(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [S(T) \mid \mathcal{F}_t], \quad 0 \leq t \leq T .$$

Equivalência entre *Forward* e Futuros

Nos mercados de *commodities*, as opções são definidas sobre os contratos futuros, e não sobre contratos *forward*, visto que os preços do segundo não observáveis no mercado, bem como não existe uma padronização dos contratos. Assim, para precificar tais opções, devemos possuir um modelo para a curva de contratos futuros. No entanto, sob a hipótese de taxa de juros constante r , temos que

$$\text{For}(t, T) = \frac{S(t)}{B(t, T)} = S(t)e^{r(T-t)} \text{ e}$$

$$\text{Fut}(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [S(T) \mid \mathcal{F}_t] = e^{rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [e^{-rT} S(T) \mid \mathcal{F}_t] = e^{rT} e^{-rt} S(t) = S(t)e^{r(T-t)} ,$$

de modo que os preços *forward* e futuro são iguais. Neste trabalho, assumimos esta hipótese pela simples intuição de que, no mercado de *commodities* de energia, ainda que trabalhássemos com a hipótese de uma taxa de juros estocástica, o preços das opções seriam pouco sensíveis a esta variável em comparação à volatilidade dos contratos futuros, onde concentraremos nossos esforços de calibragem. Obviamente, esta premissa não seria adequada se estivéssemos interessados em precificar opções definidas sobre *commodities* e taxas de juros. Assim, adiante no trabalho, usaremos os termos *forward* e futuro de forma intercambiável de modo a facilitar a compreensão do texto, e denotaremos os preços dos contratos futuros por $F(t, T)$.

3.2 Retorno de Conveniência

Analisando os exemplos das curvas de preços para os contratos futuros de petróleo, por exemplo, vemos que em algumas ocasiões a curva está em crescimento, de modo que os preços do primeiro contrato futuro é maior que o preço à vista, assim como os preços dos contratos de vencimentos mais longos são maiores que os preços dos contratos de vencimento mais próximos. Caso a curva de preços exibisse sempre esta mesma anatomia, a seguinte equação poderia expressar bem a relação entre o preços à vista e os preços *forward*

$$F(t, T) = S(t)e^{r(T-t)} ,$$

onde r é a taxa de juros positiva livre de risco. No entanto, sabemos que o detentor da *commodity* necessita arcar com alguns custos, como os de armazenamento, transporte, entre outros, que conjuntamente são conhecidos como custo de carregamento. Assim, uma relação mais adequada entre os preços à vista e *forward* seria dada por

$$F(t, T) = S(t)e^{(r+w)(T-t)} ,$$

onde w representa o custo de carregamento. Voltando a analisar exemplos de curvas de contratos futuros, vemos que em muitos casos ela se comporta de modo decrescente, ou até mesmo alterna entre crescente e decrescente de acordo com o prazo para vencimento dos contratos. Isso sugere a existência de uma força na direção contrária, o que dá lugar à relação

$$F(t, T) = S(t)e^{(r+w-c)(T-t)} ,$$

onde c é o chamado retorno de conveniência. Assim, quando a soma de r e w supera c , a curva está em *contango*, e no caso contrário a curva está em *backwardation*. É comum que a representação

$$F(t, T) = S(t)e^{(r-\delta)(T-t)} , \tag{3.2.1}$$

onde δ representa o retorno de conveniência líquido, ou seja, a diferença entre as obrigações e vantagens associadas à posse da *commodity*. Nos modelos que serão apresentados na sequência, o termo retorno de conveniência deve ser interpretado dessa forma.

3.3 Modelo de Black Para Opções sobre Futuros

O modelo de Black para opções sobre futuros foi apresentado em [Bla76] com a motivação original de estender o modelo de Black-Scholes [BS73] para o caso de opções sobre contratos futuros de *commodities*. As duas principais diferenças do modelo apresentado foram um ajuste no *drift* e a volatilidade como uma função no tempo. Sob a medida livre de risco, a hipótese da existência de um termo de *drift* equivalente a taxa livre de risco falha para o caso dos contratos futuros, uma vez que o custo para se entrar em um contrato futuro é zero, a menos dos depósitos de margem. Segundo o modelo de Black, os preços dos contratos futuros obedece a seguinte equação diferencial estocástica.

$$\frac{dF(t, T)}{F(t, T)} = \sigma(t, T)dW_t^{\mathbb{Q}^T} . \quad (3.3.1)$$

Ou seja, os preços dos contratos futuros são martingais na medida livre de risco \mathbb{Q}^T , neste contexto também chamada medida *forward*. Esta formulação pode ser interpretada como uma versão do modelo de Black-Scholes [BS73] na qual o dividendo (no contexto das *commodities*, o retorno de conveniência) é contínuo e constante com valor equivalente a taxa de juros livre risco, de modo a se anularem produzindo um *drift* nulo.

Além disso, uma importante mudança proposta por Black foi a possibilidade de a volatilidade ser uma função determinística do tempo, uma vez que a hipótese de volatilidade constante não era coerente com o fato de os contratos de vencimento mais longos serem menos voláteis do que os contratos de vencimento mais próximo, o chamado Efeito Samuelson.

No caso particular em que a volatilidade é uma função do tempo ao vencimento $T - t$, Black mostrou que o preço de uma *call* européia definida com vencimento em $T_0 < T$ e *strike* K , sobre o contrato futuro de vencimento em T , em um mercado cuja taxa livre de risco é r é dada por

$$C(t) = e^{r(T_0-t)}(F(t, T)\Phi(d_+) - K\Phi(d_-)) \quad (3.3.2)$$

onde os termos d_+ e d_- são dados por

$$d_{\pm} = \frac{\ln(F(t, T)/K) \pm 0.5\beta^2(T_0 - t)}{\beta\sqrt{T_0 - t}}$$

e β é a chamada volatilidade de Black, ou volatilidade integrada, obedecendo a relação

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{T_0 - t} \int_t^{T_0} \sigma^2(u) du} . \quad (3.3.3)$$

A simplicidade do modelo de Black e sua grande similaridade com o modelo de Black-Scholes tornaram o modelo de Black a referência não somente para o mercado de futuros de *commodities*, mas também para os mercados de taxas de juros, conseqüentemente se tornando a referência para a precificação de derivativos *plain-vanilla* de taxa de juros. Além disso, em muitos casos

é comum que o mercado faça referência e quote não somente os preços, mas as volatilidades implícitas de Black, o que pode ser mais simples ou intuitivo para os negociantes em algumas situações.

3.4 Modelagem de Preços à Vista

Quando o tempo se aproxima do prazo de vencimento do contrato futuro, o preço do contrato futuro converge para o preço à vista¹

$$\lim_{t \rightarrow T} F(t, T) = S(T)e^{(r-\delta)(T-T)} = S(T) .$$

Diante desta relação de convergência, surge uma primeira abordagem para a modelagem dos preços dos contratos futuros, que consiste na modelagem do preço à vista para, a partir deste, gerar toda a curva de preços futuros. Tais modelos serão o nosso objeto de estudo na sequência.

3.4.1 Modelo de 1 Fator

A representação mais simples e conhecida para os preços à vista de *commodities* é dada pelo movimento browniano geométrico

$$dS(t) = S(t)((r - \delta)dt + \sigma dW^{\mathbb{Q}}(t)) , \quad (3.4.1)$$

onde \mathbb{Q} é a medida livre de risco. Nesta equação, r e δ representam a taxa de juros livre de risco e o retorno de conveniência, que pode ser interpretado como o dividendo líquido devidos ao detentor da *commodity*. Substituindo a relação (3.2.1) em (3.4.1), temos que

$$dF(t, T) = F(t, T)\sigma dW^{\mathbb{Q}}(t) . \quad (3.4.2)$$

Assim, os preços dos contratos *forward* são martingais na medida livre de risco, tendo valor esperado zero, já que este é o investimento inicial necessário para entrar em um contrato deste tipo. Nesta modelagem, as opções de compra européias podem ser precificadas usando uma ligeira adaptação da fórmula de Black-Scholes, observando que neste caso o *drift* vale zero. Assim, sob a hipótese de taxa de juros e volatilidade constantes, o valor de uma opção de compra européia de strike K e expiração em T sobre um contrato *forward* de vencimento em T^* é dado por

$$c(t, T, T^*) = e^{-r(T-t)}[F(t, T^*)\Phi(h) - K\Phi(h - \sigma\sqrt{T-t})] .$$

onde Φ é a função de densidade acumulada de uma variável aleatória normal padrão, e

¹Isso é válido para o caso das *commodities* com as quais lidaremos neste trabalho, petróleo, gás natural e gasolina, todas elas armazenáveis. Para o caso da eletricidade, a relação não é válida, e como sugerido por Geman em [Gem11], o preço futuro deve ser visto como a soma do preço à vista e um prêmio de risco $\pi(t, T)$, ao invés de ser visto como a soma do preço à vista e o custo de carregamento.

$$h = \frac{\ln(F(t, T^*)/K) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} .$$

3.4.2 Modelo de 1 Fator com Reversão à Média

Argumentando que os preços das *commodities* possuem uma dinâmica mais próxima de um processo de reversão à média que de um movimento browniano geométrico, em [Sch97] Schwartz propôs a seguinte modelagem para os preços à vista

$$dS(t) = \alpha(\mu - \lambda - \ln(S(t)))S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) ,$$

onde α é a taxa de reversão à média de longo prazo μ , σ é a volatilidade dos preços à vista e λ é o chamado preço de mercado do risco (*market price of risk*). Fazendo a transformação $X = \ln(S)$ e usando o lema de Itô, temos que os logaritmos dos preços à vista são dados por uma equação de Ornstein-Uhlenbeck na forma

$$dX(t) = \alpha(\hat{\mu} - X(t))dt + \sigma dW(t) ,$$

onde $\hat{\mu} = \mu - \lambda - \sigma^2/(2\alpha)$. Nesta modelagem, pode ser verificado que

$$F(t, T^*) = \exp \left\{ e^{-\alpha(T^*-t)} \ln(S(t)) + (1 + e^{-\alpha(T^*-t)}) \left(\mu - \lambda - \frac{\sigma^2}{2\alpha} \right) + \frac{\sigma^2}{4\alpha} (1 - e^{-2\alpha(T^*-t)}) \right\} ,$$

e usando o lema de Itô alcançamos a seguinte representação para a volatilidade dos contratos *forward*

$$\sigma_F(t, T^*) = \sigma e^{-\alpha(T^*-t)} .$$

Como mostrado em [CS11], nesta formulação o valor de uma opção de compra européia de strike K e expiração em T sobre um contrato *forward* de vencimento em T^* é dado por

$$c(t, T, T^*) = e^{-r(T-t)} [F(t, T^*)\Phi(h) - K\Phi(h - \sigma\sqrt{w})] .$$

onde h e w são dados por

$$h = \frac{\ln(F(t, T^*)/K) + \frac{1}{2}w}{\sqrt{w}} e$$

$$w^2 = \int_t^T \sigma^2 e^{-2\alpha(T^*-u)} du = \frac{\sigma^2}{2\alpha} (e^{-2\alpha(T^*-T)} - e^{-2\alpha(T^*-t)})$$

O modelo de um fator de Schwartz preserva, portanto, boa tratabilidade analítica, sendo ainda mais realista que o modelo geométrico browniano à medida que reflete o decaimento da volatilidade dos contratos de vencimento mais longos. No entanto, tal modelo se mostra inadequado

se estivermos interessados em contratos de vencimento muito longos, visto que nesses casos a volatilidade induzida para os contratos futuros tenderá a zero, o que certamente não é uma representação realista.

3.4.3 Modelos de 2 e 3 Fatores

Na tentativa de criar modelos para os preços à vista que induzam uma estrutura de volatilidade mais coerente para os contratos *forward*, são propostos modelos com mais fatores estocásticos, dentre os quais destaca-se o modelo de retorno de conveniência estocástico de Gibson e Schwartz, introduzido em [GS90],

$$\begin{aligned} dS(t) &= S(t)((r - \delta(t))dt + \sigma dW_s) \\ d\delta(t) &= \alpha_\delta(\hat{\delta} - \delta(t))dt + \sigma_\delta dW_\delta \\ dW_s \cdot dW_\delta &= \rho_{s\delta} . \end{aligned}$$

Neste modelo, α_δ e $\hat{\delta}$ são a taxa de reversão à média e a média de longo prazo do retorno de conveniência, enquanto σ_δ é a volatilidade desta variável. A estrutura de volatilidade induzida para os contratos futuros é

$$\sigma_F(t, T^*) = \sqrt{\sigma^2 + \sigma_\delta^2 H_\delta^2(t, T^*) - 2\sigma\sigma_\delta\rho_{s\delta}H_\delta(t, T^*)} ,$$

onde

$$H_\delta(t, T^*) = \frac{1 - e^{-\alpha_\delta(T^*-t)}}{\alpha_\delta} ,$$

de onde decorre que

$$\lim_{T^* \rightarrow +\infty} \sigma_F(t, T^*) = \sqrt{\sigma^2 + \frac{\sigma_\delta^2}{\alpha_\delta^2} - \frac{2\sigma\sigma_\delta\rho_{s\delta}}{\alpha_\delta}} ,$$

corrigindo assim a limitação do modelo de um fator de Schwartz. Agora, a volatilidade dos contratos *forward* de vencimento muito longos não decai a zero, mas converge para um valor que depende das volatilidades do preço e do retorno de conveniência, bem como da correlação entre as fontes de incerteza que atuam sobre estas variáveis.

Movendo adiante na modelagem dos preços à vista, observarmos que a premissa de taxas de juros determinísticas pode não ser suficientemente adequada, em especial se o objetivo for a precificação de contratos *forward* de vencimento muito longo ou de derivativos que possuam taxas de juros como subjacente, em conjunto com a *commodity*. Assim, o seguinte modelo de três fatores é proposto em [Sch97]:

$$\begin{aligned}
dS(t) &= S(t)((r(t) - \delta)dt + \sigma dW_s) \\
d\delta(t) &= \alpha_\delta(\hat{\delta} - \delta(t))dt + \sigma_\delta dW_\delta \\
dr(t) &= \alpha_r(\hat{r} - r(t))dt + \sigma_r dW_r \\
dW_s \cdot dW_\delta &= \rho_{s\delta} \\
dW_s \cdot dW_r &= \rho_{sr} \\
dW_r \cdot dW_\delta &= \rho_{r\delta}.
\end{aligned}$$

Agora, assim como o retorno de conveniência, a taxa de juros é modelada como um processo de reversão à média. Nesta formulação, a volatilidade induzida para os contratos *forward* é semelhante ao obtido no modelo de 2 fatores, porém conta com mais alguns termos que fazem com que o comportamento assintótico da volatilidade dependa também da volatilidade da taxa de juros e das correlações entre as três fontes de incerteza agora presentes:

$$\lim_{T^* \rightarrow +\infty} \sigma_F(t, T^*) = \sqrt{\sigma^2 + \frac{\sigma_\delta^2}{\alpha_\delta^2} + \frac{\sigma_r^2}{\alpha_r^2} - \frac{2\sigma\sigma_\delta\rho_{s\delta}}{\alpha_\delta} + \frac{2\sigma\sigma_r\rho_{sr}}{\alpha_r} - \frac{2\sigma_\delta\sigma_r\rho_{\delta r}}{\alpha_r\alpha_\delta}}.$$

3.5 Modelagem da Curva *Forward*

Os modelos para os preços à vista apresentados possuem uma boa tratabilidade analítica, sendo possível inclusive exibir fórmulas fechadas para o preço de opções europeias até mesmo para o modelo de 3 fatores, como pode ser visto em [CS11] e [Sch97]. No entanto, esta família de modelos apresenta algumas desvantagens, a começar pelo fato de o retorno de conveniência, um importante traço da dinâmica de preço das *commodities*, não ser diretamente observável no mercado.

Além disso, como estamos interessados nos preços dos contratos futuros, pois sobre estes é definida a maior parte das opções existentes no mercado de *commodities*, é interessante que o modelo seja diretamente compatível com os preços observados no mercado na data corrente. No entanto, ao modelar os preços à vista, os preços dos contratos futuros precisarão ser obtidos a partir de uma função endógena aplicada sobre o modelo, e não necessariamente cumpriram o requisito de consistência com o observado no mercado. Do ponto de vista de precificação de derivativos definidos sobre contratos futuros, isto é, no mínimo, um inconveniente.

Para contorná-lo, uma abordagem alternativa consiste no uso dos chamados modelos *forward*. Tais modelos fazem uso de toda a informação contida na estrutura a termo, tanto no que diz respeito aos preços dos contratos, quanto no que se refere a correlação entre os contratos de diferentes vencimentos.

Nas próximas seções, apresentaremos uma sequência de modelos *forward*, relacionando-os com os modelos para preços à vista quando oportuno. Nosso objetivo é mostrar que há certa dualidade entre os dois tipos de modelos, sendo possível mostrar este paralelo fazendo escolhas adequadas para a estrutura de volatilidade dos contratos *forward*.

3.5.1 Modelo *Forward* de 1 Fator

Uma primeira abordagem para a modelagem da curva *forward* consiste em capturar dois aspectos. O primeiro deles é que, dado que o investimento inicial para entrar em um contrato *forward* é zero, então, para evitar arbitragem, na medida livre de risco tais contratos devem ser martingais. O segundo a consistência com o Efeito Samuelson, ou seja, menores volatilidades para contratos de vencimentos mais longos. Estes dois fatos dão lugar à seguinte representação

$$\frac{dF(t, T)}{F(t, T)} = \sigma e^{-\alpha(T-t)} dW^{\mathbb{Q}}(t); \quad t \in [0, T], T \in [t, T^*].$$

No entanto, esta representação possui a mesma limitação que o modelo de um fator para preços à vista de Schwartz, visto que não representa bem a volatilidade de contratos de vencimentos muito longos. Abstraindo de uma forma específica para a volatilidade, é proposto então um modelo genérico de um fator na forma

$$\frac{dF(t, T)}{F(t, T)} = \sigma(T - t) dW^{\mathbb{Q}}(t); \quad t \in [0, T], T \in [t, T^*],$$

onde a função $\sigma(T - t)$ deve ser capaz de capturar toda a complexidade da estrutura de volatilidade dos contratos futuros de diferentes vencimentos. No entanto, esta formulação ainda não é adequada a dinâmica de evolução da curva *forward*, visto que a existência de uma única fonte de incerteza induz uma correlação perfeita entre os preços dos contratos de diferentes vencimentos, o que é incompatível com os resultados apresentados na Seção 2.6. Para contornar esta limitação do modelo de um fator, precisamos adicionar mais graus de liberdade ao modelo, permitindo uma representação na qual os preços estejam sujeitos a mais de fontes de incerteza.

3.5.2 Modelo de N Fatores

Para dar conta da real complexidade da estrutura de volatilidade dos preços dos contratos *forward* de diferentes vencimentos e da correlação entre estes, em [GE94] Cortazar e Schwartz propõem que

$$\frac{dF(t, T)}{F(t, T)} = \sum_{i=1}^N \sigma_i(T - t) dW_i^{\mathbb{Q}}(t); \quad t \in [0, T], T \in [t, T^*],$$

onde agora temos N fontes de incertezas, cada uma associada a uma estrutura de volatilidade dependente apenas do tempo para vencimento. Os principais objetos de modelagem são a quantidade de fontes de incerteza N e as funções $\sigma_i(t, T)$. Escolher N consiste em analisar a relação entre a precisão e a simplicidade do modelo – o que computacionalmente se traduzirá em eficiência – enquanto conhecer $\sigma_i(t, T)$ significa compreender como os diferentes pontos da curva *forward* se movem conjuntamente – em escala e sentido – mediante os choques de mercado.

Olhando mais de perto o modelo (4.1), devemos notar que, a despeito de sua representação altamente simplificada, ele consiste na verdade em um sistema infinito de equações diferenciais estocásticas, uma vez que o tempo de vencimento T varia continuamente, assim como o tempo

da estrutura a termo t . Porém, na prática estamos interessados em um conjunto finito de tempos de vencimento, em particular os quais representem ativos existentes no mercado, de forma que quando formos calibrar o modelo e usá-lo, adotaremos a versão discretizada

$$\frac{dF(t, T_i)}{F(t, T_i)} = \sum_{i=1}^N \sigma_i(T_i - t) dW_i^{\mathbb{Q}}(t); \quad t \in [0, T_i], T \in [T_1, T_2, \dots, T_N].$$

Antes de partirmos para a calibragem deste modelo, justificaremos a nossa escolha mostrando como esta formulação endereça as limitações dos modelos para preços à vista.

Consistência com a Curva *Forward*

Resolvendo a Equação (4.1), temos:

$$F(t, T) = F(0, T) \exp \left[\sum_{i=1}^N \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^t \sigma_i^2(s, T) ds + \int_0^t \sigma_i(s, T) dW_i(s) \right\} \right].$$

Tomando o limite quando t converge para zero, observamos a consistência direta do modelo com os preços observados na curva de mercado:

$$\lim_{t \rightarrow 0} F(t, T) = F(0, T) \exp \left[\sum_{i=1}^N \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^0 \sigma_i^2(s, T) ds + \int_0^0 \sigma_i(s, T) dW_i(s) \right\} \right] = F(0, T).$$

Recuperando o Preço à Vista

Para recuperar o preço à vista a partir do modelo de N fatores, basta usarmos a relação de convergência entre este e os preços *forward* fazendo $t = 0$ e $T = t$ para obtermos

$$S(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\lim_{T \rightarrow t} F(t, T) \right] = F(0, t) \exp \left[\sum_{i=1}^N \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^t \sigma_i(s, t) ds + \int_0^t \sigma_i(s, t) dW_i(s) \right\} \right] \quad (3.5.1)$$

Retorno de Conveniência e Taxa de Juros

Derivando o preço à vista dado em (3.5.1), obtemos

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu(t) dt + \sum_{i=1}^N \sigma_i(t, t) dW_i(t), \quad (3.5.2)$$

onde $\mu(t)$ é dado por

$$\mu(t) = \frac{\partial \ln F(0, t)}{\partial t} - \sum_{j=1}^N \left\{ \int_0^t \sigma_j(u, t) \frac{\partial \sigma_j(u, t)}{\partial t} du + \int_0^t \frac{\partial \sigma_j(u, t)}{\partial t} dW_j(t) \right\}, \quad (3.5.3)$$

modelando implicitamente a diferença entre uma taxa de juros determinística e o retorno de conveniência apenas em função das volatilidades e das fontes de incerteza do modelo original, sem a necessidade de parâmetros próprios. Esta formulação é interessante pela simplicidade, mas também pela coerência com o fato de o retorno de conveniência não ser diretamente observável, de modo que sua modelagem de forma implícita soa mais naturalmente.

Relação com Modelos de Preços à Vista

Para encerrar as justificativas do uso dos modelos para a curva *forward*, e não de modelos para os preços à vista como artifício para geração da curva *forward*, na sequência ilustramos um exemplo de dualidade entre as duas famílias de modelos mediante a escolha adequada das estruturas de volatilidade. Escolhendo $N = 1$ e $\sigma_1(t, T) = \sigma e^{-\alpha(T-t)}$ e substituindo em (3.5.4), temos

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = [\mu(t) - \alpha \ln(S(t))] dt + \sigma dW(t), \quad (3.5.4)$$

onde

$$\mu(t) = \frac{\partial \ln F(0, t)}{\partial t} + \alpha \ln F(0, t) + \frac{\sigma^2}{4} (1 - e^{-2\alpha t})$$

correspondendo portanto a um modelo de um fator de Schwartz com reversão à média, porém com um *drift* dependente do tempo.

Consistência com o Modelo de Black

O modelo de Black para contratos *forward* [Bla76], está para a precificação de derivativos definidos sobre contratos futuros assim como o modelo de Black-Scholes está para a precificação de derivativos sobre ações, sendo portanto vastamente utilizado pelos analistas de mercado para precificar opções *plain-vanilla*. Assim, quando buscamos criar um modelo de preços para opções *plain-vanilla* definidas sobre contratos futuros, uma característica desejável é a consistência com o modelo de Black, de modo a permitir a sua calibragem implícitamente, usando as informações contidas nos preços das opções.

O modelo 4.1 cumpre com este requisito, de modo que a fórmula de Black para opções sobre futuros pode ser usada mediante a escolha

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{(T^* - t)} \sum_{i=1}^N \int_t^{T^*} \sigma^2(u, T) du}$$

para a volatilidade β , mostrada em 3.3.3. Aqui, $T^* \leq T$ é a data de expiração da opção definida sobre o contrato futuro de vencimento em T . Além disso, neste caso exigimos apenas que o modelo seja representado em função de movimentos brownianos independentes, o que sempre pode ser alcançado a partir de transformações apropriadas dos dados usados na calibragem.

3.5.3 Modelo de N Fatores com Volatilidade Estocástica

O Efeito *Smile*

Enfatizamos em 3.5.2 que entre as principais vantagens do modelo de N fatores com volatilidade determinística está a sua consistência com a fórmula de Black para opções sobre futuros, uma vez que tal fórmula está para os contratos futuros de *commodities* e taxas de juros como a fórmula de Black-Scholes está para as ações. No entanto, tais fórmulas são conhecidas por apresentar resultados enviesados, à medida que são construídas sobre a premissa de que os retornos dos ativos são normalmente distribuídos, com média e variância conhecidos. Para contornar os problemas inerentes a estas premissas, sem perder a tratabilidade analítica oferecida pela hipótese de normalidade, uma abordagem natural seria generalizar o modelo de Black e Scholes eliminando a exigência de média e a variância constantes.

Para o modelo de Black, a preocupação se concentra na variância, visto que por definição o termo de *drift* é zero. Em [Bla76], Black ofereceu uma resposta parcial para esta questão, permitindo que a volatilidade fosse modelada como uma função do tempo até o vencimento, hipótese mais realista e que ainda preserva a possibilidade de expressarmos os preços das opções *plain-vanilla* através de uma fórmula fechada, o que é sempre desejável do ponto de vista prático.

Nesta modelagem, como mostrado em 3.3, tais preços são função da volatilidade integrada até a expiração da opção, permitindo que opções com vencimentos em datas distintas possuam volatilidades implícitas distintas. No entanto, as volatilidades implícitas das opções com vencimento em uma mesma data são iguais, o que não é coerente com o chamado Efeito *Smile*, que representa o fato de que o mercado atribui volatilidades distintas para opções de *strikes* distintos, como mostrado na Figura 3.1, que deixa claro o nome dado a este fato estilizado.

Para criar um modelo capaz de precificar bem as opções em um mercado onde este fenômeno é observado, podemos, por exemplo, modelar os preços das opções também como função do *strike*, caminho trilhado por Dupire em seu modelo de volatilidade local apresentado em [Dup94]. Outra estratégia é dar mais liberdade a distribuição de probabilidade dos retornos dos ativos subjacentes, de modo que esta possa variar de acordo com o “estado do mundo”, o que pode ser alcançado, por exemplo, a partir do uso de modelos de saltos (*jump-diffusion models*), modelos de parâmetros incertos (ver [BM06]), ou, como optamos neste trabalho, de modelos de volatilidade estocástica.

O Modelo de Heston

O objetivo chave dos modelos de volatilidade estocástica é permitir que os retornos dos ativos assumam uma família de distribuições mais ampla, preservando no entanto parte da tratabili-

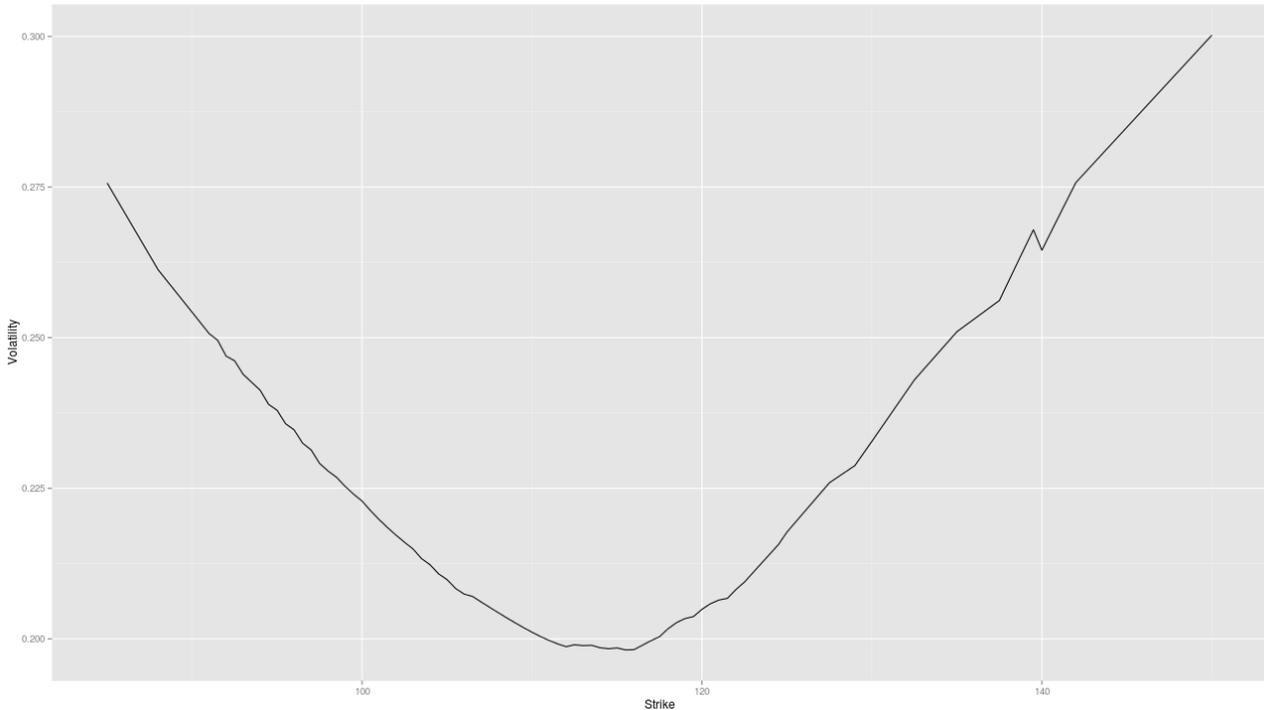


Figura 3.1: Smile de Volatilidade

dade analítica dos modelos lognormais. Além disso, alguns modelos assumem a existência de uma correlação entre os preços e o volatilidade, hipótese bastante realista para os mercados de *commodities*, que usualmente exibe o chamado efeito de alavancagem inversa (*inverse leverage-effect*). Este fenômeno pode ser notado na Figura 3.1, na qual há um ligeira assimetria, fruto de o mercado atribuir volatilidades maiores para *strikes* maiores.

Entre os modelos de volatilidade estocástica, neste trabalho optamos pela utilização do modelo de Heston [Hes93], cuja principal virtude é oferecer uma solução fechada para o preço das opções de compra européias quando o preço dos ativo arriscado está correlacionado com a sua volatilidade. Esta característica é de extrema importância do ponto de vista computacional, em especial nos casos em que desejamos calibrar o modelo de forma implícita a partir das opções quotadas no mercado.

Seguindo os passos de Heston em [Hes93], iniciamos a apresentação do modelo assumindo que o preço do ativo arriscado obedece o seguinte processo difusivo

$$dS(t) = \mu S dt + \sqrt{v(t)} S(t) dW_1(t) .$$

Na sequência, se considerarmos que a volatilidade (desvio padrão) seguir um processo de reversão à media de Ornstein-Uhlenbeck

$$d\sqrt{v(t)} = -\beta\sqrt{v(t)}dt + \delta dW_2(t) ,$$

então por meio do Lema de Itô é possível mostrar que a variância $v(t)$ segue o processo

$$dv(t) = (\delta^2 - 2\beta v(t))dt + 2\delta\sqrt{v(t)}dW_2(t) ,$$

que pode ser reescrito com um processo de reversão à média CIR, introduzido pela primeira vez por Cox, Ingersoll e Ross em [CIR85]

$$dv(t) = \kappa(\theta - v(t))dt + \sigma\sqrt{v(t)}dW_2(t) ,$$

onde $W_1(t)$ e $W_2(t)$ estão correlacionados por uma constante $\rho \in [-1, 1]$. Adicionalmente, supomos a existência de uma taxa de juros r constante. Neste estágio, devemos notar que as premissas assumidas são insuficientes para precificarmos os contratos contingenciados de forma única, visto que estamos em um modelo com duas fontes de incerteza ($W_1(t)$ e $W_2(t)$), porém apenas um ativo negociável². Em termos técnicos, estamos sob um mercado incompleto, de modo que para nos movermos da medida física para uma medida martingal equivalente sob a qual os processos \tilde{W}_1 e \tilde{W}_2 são movimentos brownianos, devemos fazer uma escolha para Λ , o chamado preço de mercado do risco da volatilidade, expresso em (3.5.5).

$$\begin{aligned} d\tilde{W}_1(t) &= dW_1(t) + (\mu - r)/\sqrt{v(t)}dt \\ d\tilde{W}_2(t) &= dW_2(t) + \Lambda(S(t), v(t), t)dt \end{aligned} \tag{3.5.5}$$

Heston assume que o preço de mercado do risco da volatilidade é diretamente proporcional a volatilidade por uma constante κ e define o termo $\lambda(S(t), v(t), t)$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} \Lambda(S(t), v(t), t) &= \kappa\sqrt{v(t)} \\ \Lambda(S(t), v(t), t)\sigma\sqrt{v(t)} &= \kappa\sigma v(t) \\ &= \lambda(S(t), v(t), t) . \end{aligned}$$

Sob estas considerações, Heston mostra que, em na medida neutra ao risco temos

$$\begin{aligned} dS(t) &= rS(t)dt + \sqrt{v(t)}S(t)d\tilde{W}_1(t) \\ dv(t) &= \kappa^*(\theta^* - v(t))dt + \sigma\sqrt{v(t)}d\tilde{W}_2(t) \\ d\tilde{W}_1(t)d\tilde{W}_2(t) &= \rho dt , \end{aligned} \tag{3.5.6}$$

onde

$$\kappa^* = \kappa + \lambda \text{ e } \theta^* = \frac{\kappa\theta}{\kappa + \lambda} ,$$

²Aqui partimos da premissa de que a volatilidade não é um ativo negociável. No entanto, é importante notar que cada vez é mais comum a negociação de índices de volatilidade, como o VIX (SP500), OIV (WTI), GIV (Ouro) e SIV (Soja). Isso elimina a implicação de incompletude do mercado, caso consideremos que os preços são funções de tais índices, que são diretamente observáveis e negociáveis.

o que é um resultado notável ao passo que, sob a medida neutra ao risco, o termo $\lambda(S(t), v(t), t)$ não aparece diretamente. Além disso, como veremos na sequência, nesta formulação é possível encontrar uma fórmula fechada para o preço das opções de compra européias, permitindo que o modelo seja calibrado de forma de forma implícita. Logo, se o objetivo do modelo for a precificação de opções, quando o calibrarmos não precisamos nos preocupar com $\Lambda(S(t), v(t), t)$, visto que este não é dos parâmetros do modelo. Assim, como reforçado em [Moo05], as implicações da incompletude do mercado e existência de diferentes medidas martingais equivalente dependentes da escolha de $\Lambda(S(t), v(t), t)$ são eliminadas no contexto da precificação de opções.

Fórmula de Heston

A fórmula de Heston para opções de compra européias é

$$\begin{aligned} C(t) &= e^{-r(T-t)} \tilde{\mathbb{E}} [(S_T - K)^+] \\ &= S(t)P_1(x, v, t) - Ke^{-r(T-t)}P_2(x, v, t), \end{aligned} \quad (3.5.7)$$

onde para $j = 1, 2$, $x = \ln(S_t)$, $\tau = (T - t)$

$$\begin{aligned} P_j(x, v_t, T, K) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{(-i\phi \ln(K))} f_j(x, v_t, T, \phi)}{i\phi} \right) d\phi \\ f_j(\phi, x, v_t) &= \exp(C_j(\tau, \phi), D_j(\tau, \phi)v_0 + i\phi x) \\ C_j(\tau, \phi) &= r i \phi \tau + \frac{a}{\sigma^2} \left[(b_j - \rho \sigma i \phi + d_j) \tau - 2 \ln \left(\frac{1 - g_j e^{d_j \tau}}{1 - g_j} \right) \right] \\ D_j(\tau, \phi) &= \frac{b_j - \rho \sigma i \phi + d_j}{\sigma^2} \left(\frac{1 - e^{d_j \tau}}{1 - g_j e^{d_j \tau}} \right) \\ d_j &= \sqrt{(\rho \sigma i \phi - b_j)^2 - \sigma^2 (2u_j i \phi - \phi^2)} \\ g_j &= \frac{b_j - \rho \sigma i \phi + d_j}{b_j - \rho \sigma i \phi - d_j}, \end{aligned}$$

com

$$u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = -\frac{1}{2}, a = \kappa^* \theta^*, b_1 = \kappa^* + \rho \sigma, b_2 = \kappa^*$$

O leitor interessado nos detalhes da derivação desta solução deve recorrer a [Hes93] ou a [Gat06], onde as equações diferenciais parciais que dão origem a fórmula de Heston são derivadas a partir da construção de um portfólio replicante composto pelo ativo arriscado, a opção de interesse, e mais uma opção, cujo objetivo é permitir a cobertura dos riscos associados a volatilidade.

Computação da Fórmula de Heston

Existem basicamente duas classes de métodos para computar a fórmula de Heston: integração numérica e transformada de Fourier. Neste trabalho, optamos pelo uso da função `callHestoncf` do pacote `NMOF` do R. Tal função é baseada em métodos de integração numérica de quadratura adaptativa. Durante as implementações, esta escolha se mostrou adequada no quesito desempenho, e portanto não investigamos um possível aumento de eficiência pelo uso de métodos baseados em transformada de Fourier. No entanto, como mostrado em [Moo05], os métodos baseados em FFT (*Fast Fourier Transform*) pode até 2000 vezes mais rápidos que os métodos de integração numérica tradicionais! Logo, se uma organização necessita frequentemente calibrar e executar uma grande quantidade de modelos de Heston para diversos valores de *strikes*, a utilização de FFT pode ser crucial. Para o leitor interessado em mais detalhes sobre como esta tecnologia pode ser empregada na precificação de opções, recomendamos [Sch10].

Interpretação dos Parâmetros

Agora, nos concentramos na interpretação dos parâmetros do modelo de Heston e como eles influenciam a distribuição dos retornos. O termo θ^* deve ser interpretado como a média de longo prazo para a variância, enquanto que κ^* é a volatilidade de reversão à média, e está intimamente relacionado com o nível de clusterização da volatilidade. Um aumento de θ^* irá aumentar o preço das opções, ao passo que o valor de κ^* irá determinar a importância relativa da variância corrente no preço das opções. Não é demais notar que, no longo prazo, sob o modelo de Heston os retornos terão distribuição normal com variância igual a θ^* , e portanto seus resultados serão semelhante aos produzidos pelo modelo de Black-Scholes. O parâmetro de correlação ρ afeta a assimetria da distribuição dos retornos. Uma correlação positiva resulta em aumento da variância à medida que o preço do ativo sobe, e uma correlação negativa resulta no efeito contrário, permitindo ao modelo capturar os efeitos de alavancagem inversa e direta, respectivamente. Finalmente, temos o parâmetro σ , a volatilidade da volatilidade. Quando σ vale zero, a volatilidade é determinística, e os retornos possuem distribuição normal. Caso contrário, σ aumenta a curtose da distribuição. Assim, o modelo de Heston permite a reprodução de uma grande variedade de efeitos sobre a distribuição dos retornos quando comparado ao modelo de Black-Scholes, preservando a existência de uma fórmula fechada para os preços das opções de compra européias³.

Heston para Futuros de Uma *Commodity*

Como estamos interessados em modelar não somente um ativo arriscado, mas toda a curva de contratos futuros, nesta Seção concentramos nossos esforços em adaptar o modelo de Heston para este objetivo. Partiremos diretamente da versão neutra ao risco (3.5.6), uma vez nosso objetivo final é a precificação de contratos contingenciados. Além disso, justificaremos o modelo proposto de maneira relativamente informal, uma vez as ideias nas quais se baseiam a adaptação são basicamente as mesmas utilizadas na formulação do modelo de volatilidade de N fatores com volatilidade determinística apresentado em 3.5.2.

Iniciamos observando que, visto que estamos modelando contratos futuros, o termo de *drift* da Equação dos preços (3.5.6) deve ser zero, uma vez que esta é a única forma de garantir a ausência de arbitragem no modelo. Em seguida, adicionamos mais fontes de incerteza ao modelo

³O preço das opções de venda européias podem ser obtidos a partir da relação de paridade *put-call*, visto que esta é derivada a partir de argumentos de ausência de arbitragem, independente do modelo utilizado.

como forma de reconhecer a complexidade da dinâmica da curva de contratos futuros. Assim, cada os preços de cada um dos contratos futuros $\{F(t, T_k)\}_{k=1}^M$ pode ser modelado como

$$\begin{aligned} dF(t, T_k) &= \alpha_k \sqrt{v(t)} F(t, T_k) \sum_{j=1}^N a_{kj} dZ_t^j \\ dv(t) &= \kappa^* (\theta^* - v(t)) dt + \sigma \sqrt{v(t)} dW_t^v \\ dZ_t^j dW_t^v &= \rho_j dt, \text{ para } j = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (3.5.8)$$

onde $\{Z_t^j\}_{j=1}^N$ são brownianos independentes. Nesta formulação, $F(0, T_k)$ é dado pelos preços observados no mercado, e $v(0) = 1$.

Neste estágio, fazemos algumas considerações sobre os parâmetros do modelo. Como os parâmetros da equação da volatilidade são os mesmos para todos os contratos futuros, usamos os parâmetros α_k como fatores de escala, permitindo que contratos de vencimentos distintos possuam volatilidades instantâneas distintas, como observado no mercado. Para θ^* , optamos por não utilizar um artifício semelhante dada a interpretação financeira de tal parâmetro. Se partirmos da premissa de que o valor de θ^* é determinado por fatores estruturais de risco, podemos buscar pistas sobre o seu comportamento recorrendo à análise histórica, em particular aos resultados da análise de componentes principais, como realizaremos adiante na Seção 4.1.1. Como veremos, a priori não há motivos para permitir que este parâmetro varie de acordo com o vencimento do contrato futuro, ao passo que a primeira componente principal, relacionada aos fatores de risco estruturais, parece ser estável ao longo do tempo. Seguimos o mesmo raciocínio para o parâmetro κ^* . Ao fazer tais escolhas, buscamos portanto uma modelagem parsimoniosa, que comporte a complexidade da dinâmica da curva de futuros, a flexibilidade probabilística que oferecida pelo modelo de volatilidade de Heston, sem que para isso tenhamos que aumentar a quantidade de parâmetros excessivamente.

Agora, introduzimos definimos o movimento browniano

$$dW_t^k = \sum_{j=1}^N a_{kj} dZ_t^j,$$

para o qual é válida a relação

$$dW_t^k dW_t^v = \sum_{j=1}^N a_{kj} dZ_t^j dW_t^v = \sum_{j=1}^N a_{kj} \rho_j dt.$$

Fazemos a mudança de variável $Y_k(t) = \alpha_k^2 v(t)$ para expressar o modelo como

$$\begin{aligned} dF(t, T_k) &= \sqrt{Y_k(t)} F(t, T_k) dW_t^k \\ dY_k(t) &= \kappa^* (\theta^* \alpha_k^2 - Y_k(t)) dt + \sigma \alpha_k \sqrt{Y_k(t)} dW_t^V \\ dW_t^k dW_t^V &= \sum_{j=1}^N a_{kj} \rho_j dt, \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

que pode ser facilmente interpretado como um modelo de Heston para cada um dos M contratos futuros. Na terceira equação do modelo, os coeficientes a_{kj} determinam como os contratos de

diferentes vencimentos se relacionam com a volatilidade e, por transitividade, entre si. Assim, a quantidade N e os valores de a_{kj} podem ser escolhidos como as correlações entre os retornos dos contratos, caso em que teremos $N = M$ (*full-matrix*), ou a partir da análise de componentes principais, caso em que $N < M$ e os termos a_{kj} são tomados como os autovetores obtidos na análise.

Heston para Futuros de Duas ou Mais *Commodities*

Nos mercados de *commodities* são bastante comuns os contratos contingenciados definidos sobre os preços futuros de múltiplas *commodities*. Para precificar tais contratos, precisamos compreender como as curvas de preços envolvidas evoluem conjuntamente.

Assumimos que cada uma das *commodities* é regida por um sistema da forma (3.5.9), observando que, aada a interpretação financeira dos parâmetros κ^* , θ^* , α_k e σ , assumimos que seus respectivos valores devem ser próprios para cada uma das *commodities*. Os modelos de cada uma das *commodities* são conectados a partir dos coeficientes a_{kj} , que agora devem ser estimados conjuntamente. Na modelagem de duas *commodities* A e B , por exemplo, estamos interessados em compreender não somente como os preços dos contratos de diferentes vencimentos da *commodity* A se relacionam, mas também como estes se relacionam com os contratos de diferentes vencimentos de B .

Quando lidamos com este tipo de modelagem, uma importante consideração prática é a seguinte. Suponhamos que estamos modelando x curvas de futuros, cada uma composta por M contratos. Então, uma abordagem *full-matrix* para a escolha dos termos a_{kj} implicará na necessidade de determinarmos $x(3 + 2M)$ parâmetros. No caso prático das *crack spread options* envolvendo petróleo, gasolina e óleo combustível, para calibrar as curvas para os 24 primeiros vencimentos de cada uma das *commodities* precisaríamos determinar um total de $3(3+48) = 153$ parâmetros, o que evidencia a necessidade de, nestes casos, adotarmos a análise de componentes principais na determinação dos coeficientes a_{kj} .

Capítulo 4

Calibragem do Modelo de N Fatores

4.1 Calibragem a Dados Históricos

A abordagem típica para calibragem de curvas de futuros com base em dados históricos baseia-se no uso da análise de componentes principais (PCA). Nesta Seção, utilizaremos esse mecanismo de acordo com o apresentado por Clewlow e Strickland em [CS11]. Escolhemos esta referência por conta de sua rica exemplificação do uso de PCA para *commodities* de energia, tanto para calibragem quanto para precificação.

Começamos o processo usando o lema de Itô em (3.5.2) para obtermos

$$d(\ln(F(t, T))) = \sum_{i=1}^N \left\{ -\frac{1}{2} \sigma_i^2(t, T) dt + \sigma_i(t, T) dW_i(t) \right\} ,$$

que em uma versão discretizada pode ser escrita como

$$\Delta \ln(F(t, t + \tau_j)) = \sum_{i=1}^N \left\{ -\frac{1}{2} \sigma_i^2(t, t + \tau_j) \Delta t + \sigma_i(t, t + \tau_j) \Delta W_i \right\} ,$$

onde τ_j é o tempo até o vencimento em dias e Δt é um dia para os dados com os quais trabalharemos. Como interpolamos a curva de contratos futuros e reamostramos os preços diariamente, temos τ_j de um até a quantidade de dias do contrato de vencimento mais distante disponível para a calibragem, de modo que $F(t, t + \tau_j)$ representa, portanto, o preço de um contrato (potencialmente fictício) com vencimento em τ_j dias.

O modelo implica que os logarítimos dos retornos dos contratos futuros possuem distribuição normal conjunta, de maneira que podemos obter a matriz de covariância amostral com base nos dados históricos fazendo

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M (f_{ik} - \bar{f}_i)(f_{jk} - \bar{f}_j) ,$$

onde M é o número de amostras diárias disponíveis e os termos f_{ik} e f_{jk} são definidos como

$$f_{ik} = \ln(F(t_k, t_k + \tau_i)) - \ln(F(t_k - \Delta t, t_k - \Delta t + \tau_i)) ,$$

onde \bar{f}_i e \bar{f}_j são simplesmente as médias amostrais dos logaritmos dos retornos diários dos contratos com vencimentos em τ_i e τ_j dias. De posse de todos os termos $\hat{\sigma}_{ij}$, temos portanto a matriz de covariância Σ , que pode ser decomposta como $\Sigma = V\Lambda V^T$, onde

$$V = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1N} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2N} \\ v_{31} & v_{32} & \cdots & v_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{N1} & v_{N2} & \cdots & v_{NN} \end{bmatrix} \text{ e } \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_N \end{bmatrix} .$$

Os termos de Λ são os autovalores de Σ de forma que $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_N$, e as colunas de V são os autovetores correspondentes. Esta representação, quando aplicada sobre uma matriz de covariância de dados com distribuição normal conjunta, como é o caso, garante a independência dos autovetores, e os autovalores podem ser interpretados como a variância associada à transformação linear representada pelo seu respectivo autovetor, o que é explicado em detalhes [Jol86]. Dadas estas interpretações, somos levados à seguinte representação para o modelo de N fatores

$$\frac{dF(t, t + \tau_j)}{F(t, t + \tau_j)} = \sum_{i=1}^N \sigma_i(t, t + \tau_j) dW_i^{\mathbb{Q}}(t) = \sum_{i=1}^N v_{ij} \sqrt{\lambda_i} dW_i^{\mathbb{Q}}(t) \approx \sum_{i=1}^D v_{ij} \sqrt{\lambda_i} dW_i^{\mathbb{Q}}(t) ,$$

onde D deve ser o tanto menor que N quanto possível, desde que preserve a capacidade do modelo de capturar a maior parte da variância dos dados. Como a variância é dada pelos autovalores, então D pode ser selecionado como o menor inteiro tal que a quantia

$$\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^D \lambda_i^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^N \lambda_i^2}}$$

seja maior que 95%, por exemplo. Portanto, ao escolher D estamos analisando uma espécie de *tradeoff* entre precisão e eficiência, à medida que menores valores para D reduzem a dimensionalidade do modelo, o que se reflete em menor custo computacional.

Devemos notar que, agora, estamos diante de um sistema composto por j equações diferenciais estocásticas – e não mais infinitas como no modelo original – que estão acopladas entre si por meio das D fontes de incerteza e das correlações entre os j contratos de diferentes vencimentos, expressas pelos autovetores.

4.1.1 Calibragem via PCA

Nesta Seção, apresentamos os resultados da análise PCA para petróleo, gás natural e gasolina. A Tabela 4.1 exhibe a variância acumulada pelas dez primeiras componentes principais para

cada um dos casos. Para o petróleo, a primeira componente já foi suficiente para capturar cerca de 96% da variância, permitindo grande redução de dimensionalidade do modelo, enquanto que para a gasolina foram necessárias as quatro primeiras componentes alcançar este mesmo nível. Já para o gás natural, tal nível de variância somente pôde ser com ajuda de sete componentes.

	Variância Acumulada									
	PC.1	PC.2	PC.3	PC.4	PC.5	PC.6	PC.7	PC.8	PC.9	PC.10
Petróleo WTI	0.960	0.992	0.997	0.999	0.999	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
Gasolina RBOB	0.890	0.925	0.951	0.966	0.974	0.982	0.987	0.992	0.995	0.997
Gás Henry Hub	0.746	0.818	0.866	0.907	0.932	0.952	0.969	0.975	0.981	0.984

Tabela 4.1: Variância Acumulada

Para tentar interpretar comparativamente os resultados obtidos para o petróleo e para a gasolina, fazemos uma breve digressão. A principal matéria-prima da gasolina é o petróleo, de modo que as incertezas que atuam sobre o preço do petróleo se refletem nos preços da gasolina. No entanto, o processo de fabricação da gasolina está exposto a uma série de outros riscos aos quais o petróleo não está, em particular aos relacionados ao custo dos demais insumos necessários ao processo de refino. Além disso, frente a novos acontecimentos geopolíticos e a novas perspectivas econômicas, as refinarias reajustam seu planejamento de produção, aumentando a produção de certos derivados e diminuindo a de outros, introduzindo alterações na oferta e, por consequência, nos preços. Com efeito, se pensarmos as componentes principais fontes independentes de incerteza, faz sentido que a gasolina dependa de mais componentes do que o petróleo para capturar um determinado nível de variância.

Para testar a robustez dos resultados, reaplicamos o mesmo procedimento em uma janela deslizante de tempo e plotamos os resultados na Figura 4.1. De modo geral, os resultados são estáveis, muito embora tenhamos observado um aumento da importância relativa da primeira componente para o petróleo e para o gás. Já para a gasolina, a primeira componente perdeu importância nos últimos anos analisados.

Agora, movemos nossa atenção para a análise do formato dos três primeiros autovetores obtidos a partir da aplicação do PCA para cada uma das *commodities* em questão, o que é apresentado na Figura 4.2. O primeiro autovetor possui formato comum para as três *commodities*, e pode ser interpretado como um fator de nível (*shifting*), movendo toda a curva de futuros em uma única direção. Logo, o fato de a primeira componente do petróleo e do gás ter ganhado importância nos últimos anos implica que os choques nesses mercados tem sido de caráter estrutural¹, impactando toda a curva, e não somente contratos de determinados vencimentos.

Já a segunda componente tipicamente é interpretada como um fator de inclinação (*steepness*), sendo responsável por mover os preços dos contratos de vencimento curto e os contratos de

¹Para entender o que queremos dizer com o termo estrutural, fazemos uma breve retrospectiva das mudanças recentes observadas no mercado de *commodities*, em particular de energia. A partir de 2003 o preço do barril do petróleo saiu de US\$30 até alcançar cerca de US\$147 em 2008, em virtude de um complexo conjunto de fatores, como declínio das reservas, aumento da demanda por parte dos países em desenvolvimento e o advento do chamado *Commodity Futures Modernization Act of 2000*, uma lei federal americana que oficialmente assegurou a desregulamentação do mercado de derivativos estruturados. Há, inclusive, evidências de que este último acontecimento tenha contribuído com uma mudança no panorama do mercado financeiro como um todo, e não somente o de *commodities*, tendo sido determinante para a ocorrência da crise de 2008 (ver [Sto11]).

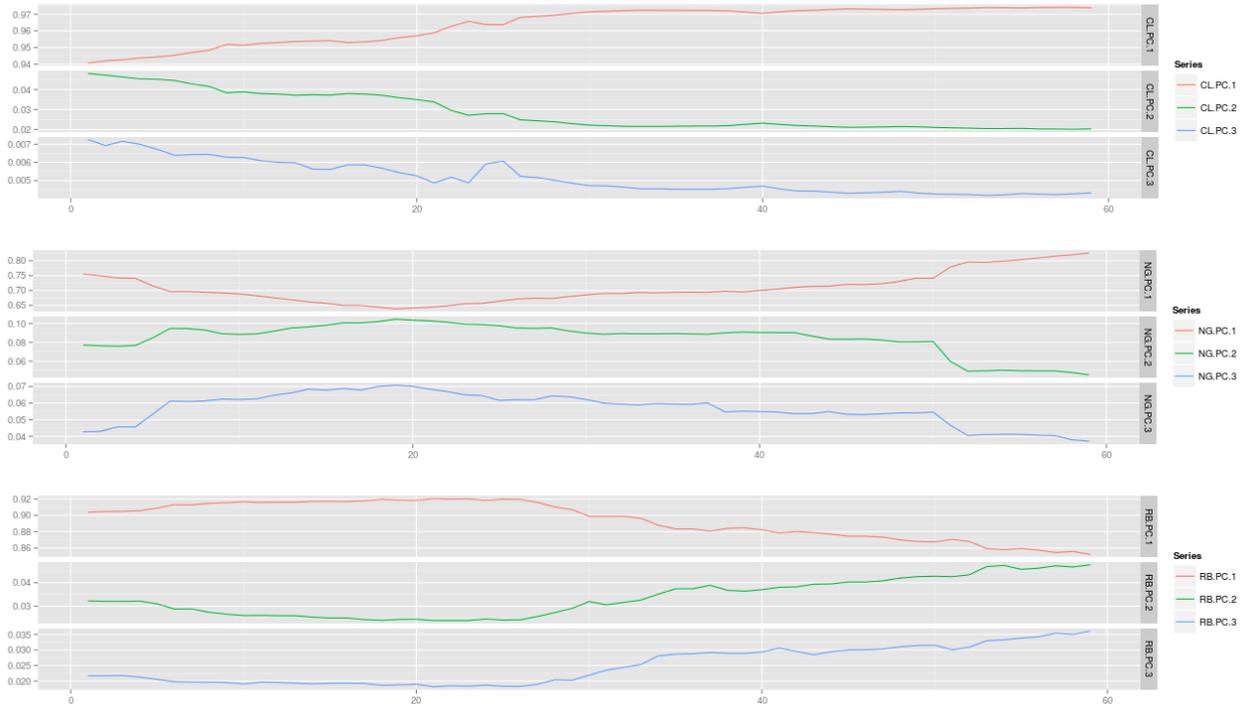


Figura 4.1: PCA - Variância Acumulada

vencimento longo em direções opostas. Este padrão pode ser notado observando os diferentes níveis e sinais dos extremos dos autovetores. No entanto, para o caso do gás e da gasolina, a segunda componente é afetada pela sazonalidade dos preços. Em particular, no caso da gasolina os efeitos da sazonalidade se mostram bem claros e coerentes com a frequência com a qual os preços se alteram ao longo do ano.

Por fim, a terceira componente captura uma espécie de fator de curvatura (*bending*), movendo os contratos de vencimento curto e longo em direção oposta aos contratos de vencimento intermediário. Assim, a semelhança em escala e forma entre a segunda e a terceira componente para o caso da gasolina é coerente com o comportamento da estrutura a termo da gasolina. Já para o caso do gás, as formas da segunda e da terceira componentes se mostram menos suaves e de interpretação mais complexa, o que é bastante coerente com a estrutura de correlações mais fraca entre os contratos de diferentes vencimentos, como apresentado na Seção 2.6.

4.1.2 Testes para Opções *Plain-Vanilla*

De posse do modelo de N fatores devidamente calibrado, podemos usá-lo para precificar diferentes contratos contingenciados. Para confiarmos no modelo, ele deve ser capaz de, minimamente, precificar bem os contratos mais simples e líquidos, como as *calls* e *puts* europeias e, no caso do mercado de *commodities* de energia, também as *calls* e *puts* americanas. Assim, iniciamos a análise da adequação do modelo de N fatores calibrado a dados históricos precificando tais opções.

Para o caso do gás natural, usamos os preços de mercado das *calls* europeias sobre os primeiros 22 contratos futuros. Para o caso do petróleo, as opções mais líquidas são as americanas. As-

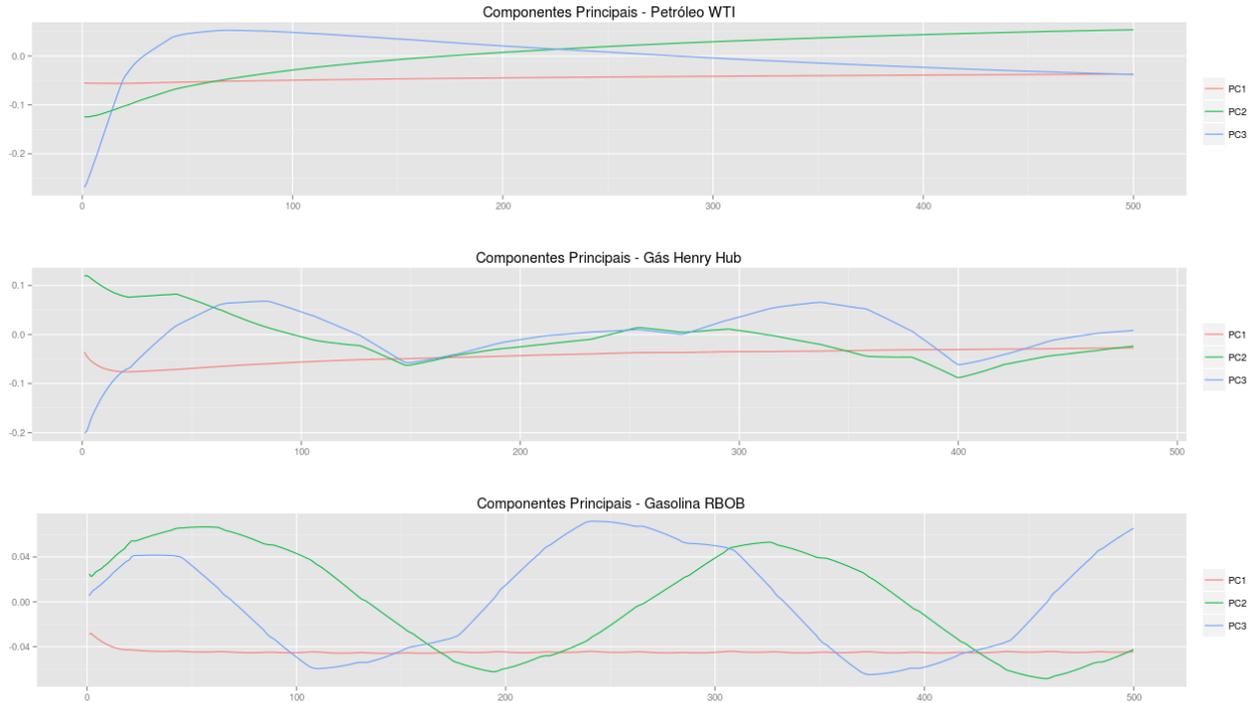


Figura 4.2: PCA - Três Primeiras Componentes

sim, para uniformizar o procedimento de comparação, extraímos a volatilidade implícita a partir dos preços de tais opções e calculamos o valor correspondente da call europeia. Em ambos os casos, a precificação é realizada através do Método de Monte Carlo sobre uma discretização de Milstein para a SDE associada.

A Tabela 4.2 apresenta os resultados do modelo frente aos valores observados no mercado no dia 01/08/2013 para o petróleo e para o gás natural. Em ambos os casos, as opções escolhidas foram as de *strike* mais próximo ao valor corrente do respectivo contrato futuro. O tempo até o vencimento é dado em anos, todos os preços são dados em dólares, enquanto a coluna “Abs.Err” apresenta o erro absoluto percentual.

O erro na precificação das opções foi de no mínimo 60% para o petróleo e para o gás de no mínimo de 30%, resultados muito distante de satisfatórios para fins práticos. Para refinar os resultados do modelo calibrado a dados históricos, duas estratégias que surgiriam naturalmente seriam aumentar o horizonte de dados utilizados na estimação ou aumentar a frequência das observações utilizadas. No entanto, há fortes evidências empíricas de que a variância não é estacionária, de modo que aumentar o horizonte de dados poderia piorar os resultados, enquanto que em muitos casos não há disponibilidade de dados com frequência superior a um dia, inviabilizando a implementação da segunda estratégia.

Finalmente, como reforçado em [MR06], como a fórmula de precificação das opções é não linear no desvio padrão, uma estimativa não enviesada do desvio padrão não implicará em uma estimativa não enviesada para o preço da opção. Desta forma, a volatilidade histórica se mostra um mau *proxy* para a estimação da volatilidade futura, da qual o preço das opções são função.

De todo modo, não se pode perder de vista que em algumas situações a volatilidade histórica do ativo ou até mesmo a volatilidade histórica de um ativo semelhante podem ser as únicas

#	Petróleo WTI					Gás Henry Hub				
	Tau	K	Mkt	Model	Abs.Err	Tau	K	Mkt	Model	Abs.Err
1	0.04	108.00	1.82	3.51	92.52	0.08	3.40	0.15	0.19	31.04
2	0.13	107.00	3.15	5.76	82.91	0.15	3.40	0.21	0.30	41.97
3	0.21	105.50	3.94	6.98	77.37	0.24	3.50	0.25	0.36	42.60
4	0.29	103.50	4.74	8.06	69.88	0.32	3.70	0.27	0.41	49.31
5	0.37	102.00	5.09	8.49	66.90	0.40	3.80	0.30	0.44	49.54
6	0.45	100.50	5.48	8.82	61.16	0.48	3.80	0.33	0.49	50.78
7	0.70	97.00	6.49	11.03	70.03	0.56	3.75	0.35	0.50	40.74
8	0.79	97.00	6.32	10.58	67.35	0.64	3.70	0.33	0.52	54.72
9	0.87	97.00	6.02	10.54	75.13	0.73	3.80	0.31	0.51	64.43
10	0.96	97.00	5.82	10.34	77.60	0.81	3.80	0.34	0.53	54.98
11	1.04	95.00	6.71	11.04	64.60	0.90	3.80	0.37	0.57	55.30
12	1.13	93.00	7.57	12.36	63.27	0.98	3.85	0.37	0.56	53.80
13	1.21	93.00	7.39	12.07	63.45	1.07	3.85	0.38	0.58	51.64
14	1.29	93.00	7.21	12.07	67.42	1.15	3.85	0.41	0.60	45.71
15	1.37	100.00	3.97	9.18	131.05	1.24	3.95	0.41	0.62	51.91
16	1.44	100.00	3.85	9.66	150.88	1.31	4.10	0.43	0.66	53.69
17	1.53	100.00	3.77	9.07	140.56	1.40	4.20	0.44	0.70	59.61
18	1.61	100.00	3.68	9.53	158.88	1.48	4.15	0.47	0.69	46.71
19	1.70	100.00	3.62	9.69	167.85	1.55	4.10	0.48	0.66	36.91
20	1.78	90.00	7.76	12.90	66.24	1.64	3.90	0.43	0.68	57.07
21	1.87	100.00	3.69	9.43	155.46	1.73	4.00	0.40	0.66	63.43
22	1.95	100.00	3.62	9.22	155.05	1.81	4.00	0.43	0.68	58.96

Tabela 4.2: Calibragem a Dados Históricos: WTI e Henry Hub

informações disponíveis no mercado, conferindo valor à estratégia de calibragem dos modelos de preços a dados históricos.

4.2 Calibragem Implícita das Volatilidades

4.2.1 Volatilidade Implícita

Alternativamente, para contornar os pobres resultados produzidos pelos modelos quando calibrados a dados históricos, podemos inferir o consenso do mercado acerca da volatilidade de um ativo futura analisando os preços das opções definidas sobre este.

A ideia chave desta abordagem consiste no fato de a fórmula de precificação das *calls* (respectivamente *puts*) *plain-vanilla* nos modelos de Black-Scholes para ações, assim como no modelo de Black para futuros é uma função estritamente crescente (respectivamente, decrescente) da volatilidade do ativo subjacente, e todos os demais fatores determinante dos preços são conhecidos: o preço atual do ativo subjacente, a taxa de juros livre de risco, o *strike* e o tempo de vencimento.

Desta forma, para o caso das *calls* europeias definidas sobre contratos futuros, podemos calcular a chamada volatilidade implícita como sendo aquela que faz com que o preço produzido pela fórmula (3.3.2) seja equivalente ao preço observado no mercado. Denominamos a volatilidade obtida através deste procedimento por volatilidade implícita baseada no mercado de Black, ou simplesmente volatilidade de Black.

O procedimento pode ser aplicado usando *calls* ou *puts*, pois em virtude de sua paridade os resultados obtidos deveriam ser os mesmos em um mercado eficiente. No entanto, em algumas situações as opções de um determinado tipo podem ser mais líquidas do que outras, e neste caso é preferível que as mais líquidas sejam utilizadas no cálculo.

Não é demais mencionar que somente faz sentido usarmos este raciocínio se estivermos interessados em precificar opções diferentes das utilizadas no cálculo das volatilidades implícitas, como opções de exercício americano, opções asiáticas, entre outras. Assim, neste contexto, dizemos que as opções *plain-vanilla* “quotam a volatilidade” do ativo subjacente. De fato, muitos serviços de informações financeiras e bolsas de valores divulgam, além dos preços, as volatilidades implícitas de Black-Scholes para as ações e de Black para os futuros de *commodities* e para taxas de juros, bem como muitos participantes do mercado preferem referenciá-las no lugar dos preços.

4.2.2 Técnicas de Calibragem

A volatilidade implícita de Black corresponde a volatilidade integrada, conforme definido em (3.3.3). A menos que estejamos interessados apenas na precificação de opções cujos valores dependam apenas da distribuição final dos preços dos ativos subjacentes, além de determinarmos as volatilidades integradas de Black, precisamos recuperar a estrutura de volatilidade que deu origem a estas. Da análise histórica, podemos sugerir algumas características para tal estrutura, como o decaimento da volatilidade para contratos mais longos, e a existência de sazonalidade para algumas *commodities*.

Como buscamos a elaboração de modelos para precificar um vasto conjunto de opções, definidas sobre uma ou mais *commodities*, de vencimentos iguais ou distintos, devemos ser capazes de modelar a estrutura de volatilidade das curvas de futuros como um todo, e não de cada contrato isoladamente. Além disso, estamos interessados em precificar contratos com a possibilidade de exercício antecipado, como as *calls* e *puts* americanas, além de contratos baseados em médias de preços, como as opções asiáticas. Como o *payoff* de tais contratos depende da trajetória de preços, por consequência depende da evolução da volatilidade no tempo, justifica-se uma melhor compreensão da dinâmica desta variável. Para alcançar isso, a primeira etapa é compreender como podemos construir modelos compatíveis com os preços das opções *plain-vanilla* ou, equivalentemente, com as volatilidades de Black. Tal compatibilidade baseia-se na seguinte ideia.

Consideremos um conjunto contratos futuros $\{F(t, T_k)\}_{k=1}^M$ e um conjunto de opções *plain-vanilla* $\{C_k\}_{k=1}^M$ definidas sobre os respectivos contratos futuros e com expiração nas datas $\{T_k^*\}_{k=1}^M$, com $T_k^* \leq T_k$ para todo k de 1 até M . Consideremos também $\{\sigma_{Black}^k\}_{k=1}^M$ as volatilidades implícitas de Black para cada uma das opções respectivamente. Então, para todo k de 1 até M o modelo para a estrutura de volatilidade calibrada σ deve satisfazer a relação

$$(\sigma_{Black}^k)^2(T_k^* - t) = \int_t^{T_k^*} \sigma^2(u) du . \quad (4.2.1)$$

Na sequência, apresentaremos um conjunto de técnicas e modelos de calibragem que podem ser adotados para os mercados futuros de *commodities*.

Regras de Expiração

É bastante comum na literatura a premissa de que as opções possuem vencimento na mesma data do contrato futuro subjacente, o que certamente facilita a modelagem do problema e simplifica as fórmulas. No entanto, no mercado de *commodities* as opções tipicamente expiram alguns dias antes do contrato futuro, e por isso enfatizamos a relação $T_k^* \leq T_k$ e escrevemos as restrições de Black em função de T_k^* e não de T_k . A menos que estejam disponíveis para a calibragem as datas exatas de vencimento dos contratos futuros e das opções, e não apenas a indicação do mês e ano de vencimento, conhecer em detalhes as regras de vencimento bem como operar sobre elas pode ser uma tarefa bastante massante. Para fins de exemplificação de quão complexas podem ser as regras de vencimento, para futuros de WTI, como definido no livro de regras da CME, as negociações se encerram no terceiro dia útil anterior ao vigésimo quinto dia calendário do mês precedente ao mês de entrega, enquanto que para a gasolina RBOB, as negociações dos futuros se encerram no último dia útil do mês precedente ao mês de entrega. Em ambos os casos, as opções correspondentes expiram três dias úteis antes da expiração dos contratos. Assim, ao calibrar aos modelos, em particular para a precificação de derivativos exóticos definidos sobre mais de uma *commodity*, pode ser interessante dispensar atenção ao entendimento e implementação das regras de expiração, evitando que os erros inerentes às simplificações tomem proporções indesejadas. Em nossas implementações, por precaução fizemos tais tratamentos.

Bootstrapping

No âmbito do problema de calibragem das estruturas de volatilidades para de modo que esta seja compatível com as volatilidades implícitas de Black, uma ideia que pode ser utilizada consiste no seguinte. Observemos que a segunda da M condições expressas em (4.2.1) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} (\sigma_{Black}^2)^2(T_2^* - t) &= \int_t^{T_2^*} \sigma^2(u) du \\ (\sigma_{Black}^2)^2(T_2^* - t) &= \int_t^{T_1^*} \sigma^2(u) du + \int_{T_1^*}^{T_2^*} \sigma^2(u) du \\ (\sigma_{Black}^2)^2(T_2^* - t) - (\sigma_{Black}^1)^2(T_1^* - t) &= \int_{T_1^*}^{T_2^*} \sigma^2(u) du \end{aligned}$$

Se considerarmos uma estrutura de volatilidade constante por partes nos intervalos $[T_k, T_{k+1}]$ e denotarmos estas volatilidades por σ_k , fazendo ainda $t = 0$ sem perda de generalidade, teremos

$$\begin{aligned} (\sigma_{Black}^1)^2(T_1^*) &= (T_1^* - 0)\sigma_1^2 \\ (\sigma_{Black}^2)^2T_2^* - (\sigma_{Black}^1)^2T_1^* &= (T_2^* - T_1^*)\sigma_2^2 \\ (\sigma_{Black}^3)^2T_3^* - (\sigma_{Black}^2)^2T_2^* - (\sigma_{Black}^1)^2T_1^* &= (T_3^* - T_2^*)\sigma_3^2 \end{aligned}$$

e assim sucessivamente. De posse de tais equações, podemos resolvê-las para obter as volatilidades constantes por partes σ_k que conjuntamente compõem uma dinâmica compatível com os preços das opções utilizadas na calibragem. Este método de calibragem é conhecido como *bootstrapping*, sendo especialmente popular nos mercados de futuros de taxas de juros. Uma das suas principais vantagens é a eficiência, visto que o processo consiste basicamente na sucessiva resolução de equações simples, podendo ser implementado em linguagens de programação genéricas e até mesmo em planilhas eletrônicas.

Tempo	σ_1	σ_2	σ_3	\cdots	\cdots	σ_M
$0 < t \leq T_1$	η_1	η_2	η_3	\cdots	\cdots	η_M
$T_1 < t \leq T_2$	*	η_2	η_3	\cdots	\cdots	η_M
$T_2 < t \leq T_3$	*	*	η_3	\cdots	\cdots	η_M
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$T_{M-1} < t \leq T_M$	*	*	*	\cdots	\cdots	η_M

Tabela 4.3: Volatilidade Constante por Contrato Futuro

No entanto, para que o método seja aplicável, é necessário que o lado esquerdo das equações seja sempre positivo, o que muitas vezes não é respeitado no mercado de *commodities* de energia. Em particular, o método pode falhar nos casos em que a sazonalidade da volatilidade é mais marcante, como nos casos do gás natural e da gasolina.

No entanto, não se pode perder de vista a praticidade do método e sua facilidade de implementação, pois em alguns casos a configuração do mercado pode ser compatível com esta técnica de calibragem.

Volatilidade Constante por Contrato Futuro

A abordagem mais simples e prática para a calibragem das volatilidade consiste em uma estrutura na qual cada contrato futuro está associado a uma volatilidade constante, independentes entre si, conforme mostrado na Tabela 4.3. O símbolo * indica que, para o respectivo contrato futuro, a volatilidade não está definida, uma vez que o contrato já expirou. Nesta configuração, a calibragem consiste simplesmente em fazer $\eta_k = \sigma_{Black}^k$.

Se o objetivo for precificar opções de exercício europeu cujo *payoff* dependa apenas do preço final de um único ativo subjacente, esta abordagem certamente é a mais simples e eficiente de todas. Devemos enfatizar que, neste caso, não estamos propriamente calibrando uma estrutura de volatilidades para a curva de contratos futuros, mas sim calibrando volatilidades individuais para cada contrato futuro.

A representação exposta na Tabela 4.3, a rigor, é redundante para esta configuração, visto que os valores das volatilidades são os mesmos para cada *forward* em cada intervalo de tempo entre os vencimentos. No entanto, apresentamos a ideia neste formato para permitir a comparação com as demais configurações que serão apresentadas adiante.

Volatilidade Constante por Partes por Contrato Futuro

Embora útil na precificação de uma determinada classe de contratos e facilmente implementável, a abordagem de volatilidade constante apresentada em 4.2.2 é pouco realista e de certa forma inadequada para a precificação de contratos de *payoffs* dependentes da trajetória de preços ou de exercício americano. Em particular, para contratos de vencimento muito distantes, os erros induzidos pela hipótese de uma volatilidade constante ao longo do tempo podem se acentuar.

Diante disso, uma abordagem natural para tornar o modelo mais flexível consiste na ideia

Tempo	σ_1	σ_2	σ_3	\cdots	\cdots	σ_M
$0 < t \leq T_1$	$\eta_{1,1}$	$\eta_{2,1}$	$\eta_{3,1}$	\cdots	\cdots	$\eta_{M,1}$
$T_1 < t \leq T_2$	*	$\eta_{2,2}$	$\eta_{3,2}$	\cdots	\cdots	$\eta_{M,2}$
$T_2 < t \leq T_3$	*	*	$\eta_{3,3}$	\cdots	\cdots	$\eta_{M,3}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$T_{M-1} < t \leq T_M$	*	*	*	\cdots	\cdots	$\eta_{M,M}$

Tabela 4.4: Volatilidade Constante por Partes por Contrato Futuro

de que cada contrato *forward* possui uma estrutura de volatilidade constante nos intervalos $[T_k, T_{k+1}]$, conforme a Tabela 4.4.

Nesta configuração, também não há relação entre as estruturas de volatilidade de cada um dos contratos, sendo estas calibradas em separado resolvendo problemas na forma

$$(\sigma_{Black}^k)^2 T_k = \int_0^{T_k} \sigma_k^2(u) du = \sum_{i=1}^k \int_{T_{i-1}}^{T_i} \eta_{k,i}^2 du = \Delta t \sum_{i=1}^k \eta_{k,i}^2 ,$$

derivados das M condições expressas em (4.2.1). Se $T_k = k\Delta t$, o problema pode ser reescrito como

$$(\sigma_{Black}^k)^2 k = \sum_{i=1}^k \eta_{k,i}^2 .$$

Para $k = 1$, temos uma solução única para $\eta_{1,1}$. No caso $k = 2$, o problema consiste em encontrar as raízes do polinômio de segunda ordem nas variáveis $\eta_{2,1}$ e $\eta_{2,2}$

$$p(\eta_{2,1}, \eta_{2,2}) = \frac{\eta_{2,1}^2 + \eta_{2,2}^2}{2} - (\sigma_{Black}^2)^2 .$$

Assim, como temos $M(M+1)/2$ graus de liberdade frente a M restrições, perdemos a unicidade da solução. Além disso, a menos que adicionemos algumas restrições ao problema, não há garantias de que a solução produzida guarde alguma relação com a estrutura de volatilidade observada no mercado. Uma forma de reconciliar o modelo com o mercado consiste, por exemplo, em formular a calibragem como um problema de minimização da função objetivo (4.2.2), de forma similar ao proposto em [PS09].

$$p_0 \sum_{k=1}^M \left[(\sigma_{Black}^k)^2 - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \eta_{k,i}^2 \right]^2 + p_1 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^{M-1} [\max\{\eta_{i,j+1} - \eta_{i,j}, 0\}]^2 \quad (4.2.2)$$

O primeiro termo na função representa o erro do modelo em relação à volatilidade de Black, e o segundo consiste em um critério de penalização que aumenta o valor da função objetivo à medida que a configuração das volatilidades constantes por partes se afastam do Efeito Samuelson. Os termos p_0 e p_1 são os pesos de cada um dos critérios, não sendo objeto de calibragem. Devem ser escolhidos de acordo com as características desejadas para o modelo.

Tempo	σ_1	σ_2	σ_3	\cdots	\cdots	σ_M
$0 < t \leq T_1$	η_1	η_2	η_3	\cdots	\cdots	η_M
$T_1 < t \leq T_2$	*	η_1	η_2	\cdots	\cdots	η_{M-1}
$T_2 < t \leq T_3$	*	*	η_1	\cdots	\cdots	η_{M-2}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$T_{M-1} < t \leq T_M$	*	*	*	\cdots	\cdots	η_1

Tabela 4.5: Volatilidade como Função do Tempo até o Vencimento

Para o Petróleo, por exemplo, podemos escolher valores de p_1 mais altos, penalizando partidas muito significativas do Efeito Samuelson. Já para o gás natural, cuja sazonalidade da volatilidade é mais notável, devemos escolher valores menores para p_1 em relação a p_0 , dando mais flexibilidade à estrutura de volatilidades. Outros critérios de penalização para tornar a solução mais suave e compatível com o observado no mercado são apresentados em [PS09].

Pacotes de Otimização e Solução Inicial

Minimizar (4.2.2) consiste em um problema de mínimos quadrados não linear, de modo que a sua resolução depende da escolha de algoritmos de otimização adequados. No MATLAB, pode ser utilizada a função *lsqnonlin*, enquanto que no R podem ser usados alguns dos algoritmos implementados no pacote *nloptr*. Além disso, como a função objetivo não é convexa, não há solução única para o problema, e a solução local encontrada pelo algoritmo é sensível à solução inicial informada. Na ausência de um palpite melhor, a volatilidade histórica pode ser utilizada como solução inicial, ou então a volatilidade histórica corrigida por algum fator para aumentá-la ou diminuí-la de acordo com o atual cenário de mercado.

Volatilidade como Função do Tempo até o Vencimento

Uma estrutura mais simples para as volatilidades dos contratos futuros consiste no exposto na Tabela 4.5. Aqui, a estrutura a termo inicial da volatilidade permanece constante à medida que o tempo passa, o que é equivalente a dizer que a volatilidade é função do tempo até o vencimento, mas não do tempo calendário.

Uma das principais vantagens desta configuração é que ela pode ser calibrada de forma eficiente através do processo de *bootstrapping*, bastando executar o seguinte algoritmo

$$\eta_1 = \sigma_{Black}^1$$

$$\eta_k = \sqrt{k(\sigma_{Black}^k)^2 - (k-1)(\sigma_{Black}^{k-1})^2}.$$

Infelizmente, nem sempre a situação de mercado é compatível com esta formulação. Isso ocorre pois é necessário que o termo dentro da raiz quadrada seja não negativo sempre. Em especial, o processo falha sistematicamente para casos em que há uma forte componente sazonal na volatilidade de Black, como é o caso do gás natural. Os resultados da tentativa de calibragem para esta *commodity* são mostrados na Tabela 4.6, onde o símbolo * indica que o processo falhou. Os dados são referentes aos 22 dias úteis do mês de Agosto de 2013.

O processo falhou para quase todos os dias analisados, com exceção dos últimos dois dias de Agosto, nos quais a volatilidade implícita se mostrava em claro declínio para vencimentos mais

	η_1	η_2	η_3	η_4	η_5	η_6	η_7	η_8	η_9	η_{10}	η_{11}	η_{12}
2013-08-01	0.3048	0.3241	0.2791	0.2482	0.2490	0.2703	0.2729	*	0.1452	0.2107	0.1769	*
2013-08-02	0.3024	0.3255	0.2825	0.2440	0.2505	0.2703	0.2729	*	*	*	*	*
2013-08-05	0.3175	0.2966	0.2642	0.2562	0.2790	0.2776	*	*	*	*	*	*
2013-08-06	0.3216	0.2969	0.2658	0.2547	0.2792	0.2783	*	*	*	*	*	*
2013-08-07	0.3218	0.3354	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
2013-08-08	0.3068	0.3406	0.2430	0.2435	0.2866	*	*	*	*	*	*	*
2013-08-09	0.3105	0.3372	0.2877	0.2481	0.2380	0.2857	*	*	*	*	*	*
2013-08-12	0.3203	0.3317	0.2867	0.2436	0.2499	0.2759	0.2901	*	*	*	*	*
2013-08-13	0.3106	0.3391	0.2884	0.2422	0.2243	0.2839	*	0.2184	*	*	*	*
2013-08-14	0.3215	0.3406	0.2912	0.2467	0.2426	0.2911	0.2940	*	0.2166	*	*	*
2013-08-15	0.3064	0.3494	0.2908	0.2542	0.2426	0.2911	0.2869	*	0.1426	0.2273	0.1809	*
2013-08-16	0.2936	0.3501	0.2950	0.2542	0.2523	0.2876	0.2863	*	0.1034	0.1889	*	*
2013-08-19	0.3099	0.3455	0.2935	0.2475	0.2475	0.2875	0.2867	*	0.2137	0.2032	0.2369	0.1900
2013-08-20	0.3093	0.3404	0.2906	0.2536	0.2530	0.2873	0.2865	*	0.2158	0.2042	0.2254	0.1903
2013-08-21	0.3042	0.3410	0.2900	0.2476	0.2589	0.2895	0.2787	*	0.2034	0.2145	0.2242	0.1740
2013-08-22	0.3046	0.3224	0.2950	0.2496	0.2547	0.2894	0.2867	*	0.2156	0.2163	0.2267	0.1573
2013-08-23	0.3044	0.3080	0.2948	0.2473	0.2615	0.2865	0.2842	*	0.2120	0.2133	0.2235	0.1800
2013-08-26	0.3049	0.3213	0.2897	0.2449	0.2526	0.2750	0.2745	*	0.2214	0.1868	0.2553	0.2110
2013-08-27	0.4342	0.0788	0.2998	0.2478	0.2517	0.2648	0.2746	*	0.2204	0.2123	0.2349	0.2103
2013-08-28	0.4342	0.0445	0.2944	0.2488	0.2627	0.2672	0.2674	*	0.2199	0.2236	0.2217	0.2105
2013-08-29	0.3012	0.2968	0.2618	0.2687	0.2829	0.2762	0.0553	0.2083	0.2261	0.2254	0.1999	0.2565
2013-08-30	0.2977	0.2994	0.2613	0.2704	0.2826	0.2762	0.0560	0.2079	0.2261	0.2257	0.2004	0.2565

Tabela 4.6: Calibragem via *Bootstrapping* para Gás Natural Henry Hub

longos, sem efeitos sazonais relevantes. Ao repetirmos teste semelhante para o petróleo WTI, os resultados foram melhores, falhando em 13 dos 22 dias no instante 12 meses, como exposto na Tabela 4.7. Analisando as volatilidades implícitas para esta *commodity* na Figura 4.3, podemos explicar este resultado. Nos dias em que o procedimento falhou, o mercado parecia estar precificando as opções com este vencimento usando a volatilidade implícita corrente. Ou seja, o mercado parecia estar projetando uma espécie de efeito sazonal para a volatilidade desta *commodity*.

	η_1	η_2	η_3	η_4	η_5	η_6	η_7	η_8	η_9	η_{10}	η_{11}	η_{12}
2013-08-01	0.2090	0.2053	0.2108	0.2125	0.1853	0.1892	0.1821	0.1864	0.1750	0.1597	*	*
2013-08-02	0.1998	0.2068	0.2053	0.2083	0.1860	0.1782	0.1866	0.1694	0.1884	0.1540	0.1671	*
2013-08-05	0.2114	0.2028	0.2115	0.2080	0.1834	0.1720	0.1806	0.1765	0.1806	0.1634	0.1737	*
2013-08-06	0.2037	0.2028	0.2166	0.2105	0.1795	0.1851	0.1763	0.1638	0.1695	0.1797	0.1520	*
2013-08-07	0.2039	0.2034	0.2136	0.2065	0.1838	0.1793	0.1701	0.1611	0.1515	0.1725	0.1568	*
2013-08-08	0.2045	0.2132	0.2171	0.2106	0.1774	0.1801	0.1809	0.1669	0.0726	0.1650	0.1873	*
2013-08-09	0.2092	0.2159	0.2095	0.2114	0.1808	0.1804	0.1791	0.1502	0.1642	0.1589	0.1520	*
2013-08-12	0.2244	0.2034	0.2105	0.2130	0.1892	0.1728	0.1768	0.1648	0.1726	0.1572	0.1583	*
2013-08-13	0.2074	0.2213	0.2214	0.2125	0.1805	0.1831	0.1786	0.1597	0.1987	0.1250	0.1188	*
2013-08-14	0.1684	0.2507	0.2243	0.2219	0.1922	0.1776	0.1883	0.1624	0.1504	0.1826	0.1252	*
2013-08-15	0.2479	0.1725	0.2322	0.2201	0.1938	0.1799	0.1946	0.1650	0.1587	0.1754	0.1166	*
2013-08-16	0.2479	0.1613	0.2361	0.2238	0.1859	0.1849	0.1810	0.1581	0.1726	0.1650	0.1425	0.1598
2013-08-19	0.2077	0.2234	0.2188	0.1993	0.1836	0.1959	0.1759	0.1578	0.1661	0.1790	0.1310	0.1889
2013-08-20	0.2180	0.2296	0.2224	0.2003	0.1901	0.1943	0.1649	0.1862	0.1632	0.1496	0.1478	0.1811
2013-08-21	0.2216	0.2325	0.2301	0.2054	0.1956	0.1879	0.1751	0.1902	0.1569	0.1776	0.0177	*
2013-08-22	0.2102	0.2263	0.2357	0.2038	0.1970	0.2008	0.1314	0.1745	0.1404	0.1874	0.1296	*
2013-08-23	0.2038	0.2247	0.2292	0.2054	0.2090	0.1931	0.1841	0.1826	0.1632	0.1381	0.1506	0.1707
2013-08-26	0.2073	0.2236	0.2303	0.2124	0.1960	0.2070	0.1703	0.1886	0.1618	0.1403	0.1635	0.1583
2013-08-27	0.2403	0.2314	0.2254	0.2096	0.1972	0.2089	0.1616	0.1994	0.1713	0.1115	0.1782	0.1324
2013-08-28	0.2735	0.2436	0.2332	0.2071	0.2035	0.2084	0.1770	0.2055	0.1618	0.1278	0.1801	0.1357
2013-08-29	0.2487	0.2484	0.2374	0.2231	0.1918	0.2149	0.1913	0.1842	0.1751	0.1467	0.1625	0.1663
2013-08-30	0.2589	0.2421	0.2358	0.2203	0.2028	0.2023	0.1908	0.1868	0.1752	0.1450	0.1592	0.1690

Tabela 4.7: Calibragem via *Bootstrapping* para Petróleo WTI

Não existe uma explicação clara para este fenômeno, mas podemos especular a respeito. Dado que a liquidez dos contratos de vencimento mais longos é menor que a de vencimentos curtos, e em muitos casos nem sequer há negociação em um determinado dia, os preços publicados são pouco representativos, sendo muitas vezes formados a partir de processos automáticos de interpolação e extrapolação. Por outro lado, diante da chegada de uma nova informação, os

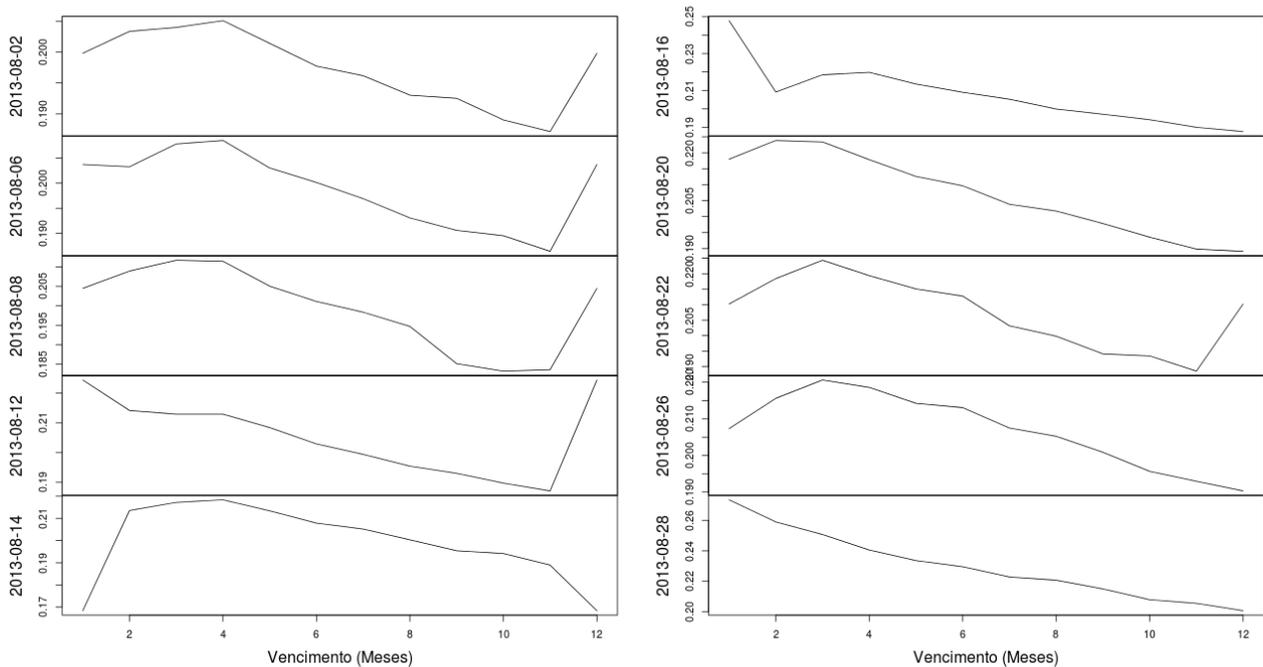


Figura 4.3: Volatilidade Implícita - Petróleo WTI

preços podem se movimentar a partir de atividades reais de mercado, fazendo com que o formato da curva passe de fato a representar as expectativas dos negociantes.

Formas Paramétricas

A modelagem da volatilidade como uma função exclusivamente dependente do tempo até o vencimento permite a calibragem do modelo de forma bastante eficiente para o caso do petróleo, ao menos para horizontes de tempos não tão longos. No entanto, o processo em si não oferece garantias de que a solução guardará uma boa relação com o comportamento histórico da volatilidade.

Neste ponto, é importante enfatizar que, embora os valores da volatilidade tenham pouca valia no processo de precificação, o formato da curva de volatilidade histórica não pode ser completamente negligenciado, em especial nos casos em que este comportamento mostra-se consistente e estável ao longo do tempo, como parece ser o caso para os mercados futuros de *commodities*.

Diante disso, uma abordagem típica de modelagem da estrutura de volatilidades consiste na mistura de formas constantes por partes e formas paramétricas. Quando os efeitos sazonais são relevantes, é comum a decomposição da estrutura de volatilidade em duas componentes: uma relativa ao tempo calendário, e outra relativa ao tempo de vencimento do contrato futuro.

Dado o Efeito Samuelson, a mais natural das formas paramétricas constante por partes que pode ser escolhida para a volatilidade é mostrada em (4.2.3).

$$\sigma_k(t) = \alpha_k \exp^{-\lambda(T_k^* - t)} \quad (4.2.3)$$

Nesta formulação, desde que tenhamos λ seja positivo, a componente exponencial produzirá menores volatilidades para os contratos de vencimento mais longos. As constantes α_k atuarão para ajustar a curva de volatilidade, tornando-a compatível com configurações que violem o Efeito Samuelson – seja por conta da sazonalidade ou por conta de outros ruídos de mercado. A flexibilidade do modelo vem às custas da perda da solução única, uma vez que agora a calibragem envolve a determinação de $M + 1$ parâmetros, um a mais que a quantidade de restrições impostas em (4.2.1).

Para contratos de vencimento muito longos, o termo $(T_k^* - t)$ presente na exponencial em (4.2.3) forçará a volatilidade produzida pelo modelo para zero, o que durante o processo de calibragem terá que ser compensado pelo parâmetro λ e, principalmente pelos parâmetros α_k correspondentes, de modo que estes se tornem preponderantes, e não mais simples fatores de ajustes. Em certa medida, isso é inconveniente se estivermos interessados em dar interpretações financeiras aos coeficientes do modelo calibrado.

Diante disso, podemos ajustar o modelo com outros três parâmetros, dando lugar a uma estrutura constante por partes igual a da Tabela 4.4, associada a uma forma paramétrica conforme (4.2.4). Os coeficientes μ_k conciliam o modelo com eventuais efeitos sazonais ou ruídos de mercado, assim como os termos α_k do modelo (4.2.3) o faziam.

O termo δ é usado para capturar o comportamento da volatilidade para contratos de vencimento muito longos. A exponencial negativa garante uma aderência ao Efeito Samuelson, enquanto que o termo $(\alpha + \beta(k - i)\Delta t)$ confere a possibilidade de que para vencimentos muito curtos tenhamos volatilidades menores, e não cada vez maiores, como prega a hipótese de Samuelson.

$$\eta_{k,i} = \mu_k [(\alpha + \beta(k - i)\Delta t)e^{-\gamma(k-i)\Delta t} + \delta] , \quad (4.2.4)$$

De forma análoga ao modelo apresentado na Seção 4.2.2, a calibragem envolve a resolução de um problema de mínimos quadrados não linear. Considerando que o vencimento das opções está igualmente espaçado de Δt , no modelo em questão a volatilidade de Black é dada por

$$\sigma_{Modelo}^k = \sqrt{\frac{1}{k} \mu_k^2 \left(\sum_{j=0}^{k-1} [(\alpha + \beta j \Delta t) e^{-\gamma j \Delta t} + \delta]^2 \right)} ,$$

de modo que determinar o conjunto de $M + 4$ parâmetros $\theta = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu_1, \dots, \mu_M\}$ do modelo consiste em minimizar a função objetivo

$$\sum_{k=1}^M (\sigma_{Modelo}^k - \sigma_{Black}^k)^2 . \quad (4.2.5)$$

Crítério de Regularização

O problema de minimização da função (4.2.2) não possui solução única. A solução local que será produzida pelo algoritmo escolhido pode ser mais ou menos sensível à solução inicial fornecida e à precisão da máquina, entre outros fatores. Dada uma solução local θ_0 considerada boa pelo negociante e para a qual ele ou a organização já possua interpretações financeiras dos coeficientes, pode ser desejável que a solução produzida nos dias ou semana subsequentes não se distancie muito de θ_0 . Para garantir isso, o problema (4.2.2) pode ser modificado para

$$\sum_{k=1}^M \left[(\sigma_{Modelo}^k - \sigma_{Black}^k)^2 \right] + w \|\theta - \theta_0\|^2,$$

onde w é o peso que se deseja dar à proximidade entre a nova solução e solução já conhecida θ_0 . Além da interpretação prática, este tipo de modificação também ajuda a garantir que o algoritmo de otimização encontre uma solução independente do ponto da solução inicial fornecida, o que é conhecido como regularização ou globalização do problema. Mais detalhes sobre técnicas de globalização de problemas podem ser vistos em [BGLS09].

4.2.3 Testes para Opções ATM

Calibramos o modelo (4.2.4) usando as primeiras 22 opções ATM do tipo *call* para o dia 01/08/2013, e executamos os testes de precificação destas usando uma simulação de Monte Carlo de forma análoga ao realizado para o modelo calibrado a dados históricos. Os resultados mostrados na Tabela 4.8 evidenciam que a calibragem implícita produz erros substancialmente reduzidos em comparação com a abordagem baseada na calibração a dados históricos.

#	Petróleo WTI					Gás Henry Hub				
	Tau	K	Mkt	Model	APE(%)	Tau	K	Mkt	Model	APE(%)
1	0.04	108.00	1.82	1.82	0.09	0.08	3.40	0.15	0.11	25.21
2	0.13	107.00	3.15	3.19	1.42	0.15	3.40	0.21	0.17	19.84
3	0.21	105.50	3.94	3.86	2.01	0.24	3.50	0.25	0.22	13.10
4	0.29	103.50	4.74	4.60	3.15	0.32	3.70	0.27	0.26	5.45
5	0.37	102.00	5.09	5.16	1.36	0.40	3.80	0.30	0.28	5.33
6	0.45	100.50	5.48	5.20	4.97	0.48	3.80	0.33	0.30	8.02
7	0.70	97.00	6.49	6.12	5.71	0.56	3.75	0.35	0.33	7.46
8	0.79	97.00	6.32	6.34	0.26	0.64	3.70	0.33	0.34	2.38
9	0.87	97.00	6.02	6.01	0.18	0.73	3.80	0.31	0.33	5.58
10	0.96	97.00	5.82	5.71	1.95	0.81	3.80	0.34	0.36	7.06
11	1.04	95.00	6.71	6.54	2.43	0.90	3.80	0.37	0.38	2.47
12	1.13	93.00	7.57	7.45	1.65	0.98	3.85	0.37	0.37	2.33
13	1.21	93.00	7.39	7.31	1.11	1.07	3.85	0.38	0.40	3.70
14	1.29	93.00	7.21	7.15	0.88	1.15	3.85	0.41	0.40	2.43
15	1.37	100.00	3.97	4.43	11.40	1.24	3.95	0.41	0.43	5.45
16	1.44	100.00	3.85	4.24	10.17	1.31	4.10	0.43	0.46	7.55
17	1.53	100.00	3.77	4.12	9.20	1.40	4.20	0.44	0.46	5.06
18	1.61	100.00	3.68	4.05	9.92	1.48	4.15	0.47	0.47	1.17
19	1.70	100.00	3.62	3.88	7.39	1.55	4.10	0.48	0.49	2.21
20	1.78	90.00	7.76	7.56	2.65	1.64	3.90	0.43	0.46	5.89
21	1.87	100.00	3.69	3.84	4.10	1.73	4.00	0.40	0.45	11.64
22	1.95	100.00	3.62	3.67	1.39	1.81	4.00	0.43	0.45	5.21

Tabela 4.8: Resultados - Forma Paramétrica Constante por Partes

Para testar a consistência do método, repetimos os testes para os 22 dias de Agosto de 2013. O erro médio percentual absoluto na precificação de opções ATM sobre futuro do petróleo foi de aproximadamente 4%, enquanto que para o gás foi de 10%.

No entanto, se fizermos um teste *out-of-sample* usando as opções não ATM, o erro médio absoluto aumenta substancialmente. Para exemplificar este fato, executamos os testes para o

WTI usando dados do dia 01/08/2013 e obtivemos erro médio percentual absoluto de 21%.

Tal resultado decorre do fato de o modelo de volatilidade determinística (4.2.4) não ser capaz de capturar o *smile* de volatilidade, problema que tentaremos endereçar no próximo capítulo.

Capítulo 5

Calibragem do Modelo de Volatilidade Estocástica

5.1 Formulação do Problema

Entre as diversas formulações possíveis para a adaptação do modelo de Heston para futuros de *commodities*, para a calibragem usaremos a versão (3.5.9). Como pontuado na Seção 3.5.3, tal formulação pode ser interpretada como um modelo de Heston a parte para cada um dos contratos futuros, exceto pelo fato de que agora possuímos múltiplas fontes de incerteza que estão correlacionadas. No entanto, para a calibragem podemos interpretar o somatório que aparece na terceira das equações do sistema (3.5.9) como o termo de correlação do modelo de Heston, e então usar a fórmula precificação (3.5.7) naturalmente.

Neste caso, como estamos especialmente interessados em melhorar os resultados obtidos com o modelo de volatilidade determinística para opções não ATM, não realizaremos a calibragem do modelo a partir de dados históricos, mas primordialmente a partir de dados de opções quotadas no mercado, com ressalva apenas para a quantidade N e os coeficientes a_{kj} , determinados com base em análise histórica.

Para formular o problema de calibragem do modelo (3.5.9) para uma *commodity*, definimos por $\{C_{mkt}(K_j, T_k)\}_{j=1}^J$ os preços de mercado das opções definidas sobre os contratos futuros com vencimentos respectivamente em $\{T_k\}_{k=1}^M$. Enfatizamos que agora o conjunto de opções utilizadas na calibragem não consiste apenas nas opções de *strike* ATM, como realizado para os modelos de volatilidade determinística. Dito isto, definimos $\{C_{mod}(K_j, T_k)\}_{j=1}^J$ como os preços dos contratos segundo o modelo calibrado. Assim, uma possível formulação para o problema de calibragem consiste em minimizar

$$\sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^J (C_{mkt}(K_j, T_k) - C_{mod}(K_j, T_k))^2 .$$

Se estivermos interessados em obter um modelo que responda bem às pequenas diferenças de preço, podemos formular o problema como a minimização de erros absolutos relativos, ao invés de erros quadráticos, dando lugar a função objetivo

$$\sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^J \frac{|(C_{mkt}(K_j, T_k) - C_{mod}(K_j, T_k))|}{C_{mkt}(K_j, T_k)}. \quad (5.1.1)$$

Uma outra abordagem consiste em minimizar (5.1.2), onde os termos w_{kj} dão pesos diferentes aos erros cometidos pelo modelo de acordo com o vencimento do contrato e com o *strike*. Podemos usar esta formulação quando desejarmos que o modelo produza melhores resultados para certos vencimentos ou *strikes*, tipicamente os mais líquidos.

$$\sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^J w_{kj} \frac{|(C_{mkt}(K_j, T_k) - C_{mod}(K_j, T_k))|}{C_{mkt}(K_j, T_k)}. \quad (5.1.2)$$

Em nossa implementação, optamos pela versão (5.1.1), visto que em casos como o da gasolina RBOB a precisão do mercado é de US\$0.0001, e portanto é importante que o modelo seja capaz de trabalhar bem com este nível de precisão. Finalmente, independente da versão da função objetivo selecionada, dada a existência de uma raiz quadrada na primeira equação do sistema (3.5.9) e o nosso interesse em dar interpretações financeiras para os coeficientes do modelo calibrado, devemos impor algumas restrições sobre o problema de minimização.

Como K^* é interpretado como a velocidade de reversão à média, devemos assegurar sua positividade. O produto $\theta^* \alpha_k$ denota a média para qual a volatilidade do contrato de vencimento em T_k se reverte, de modo que também deve ser positivo. O mesmo deve ser exigido para os termos α_k e de σ , já que o primeiro corresponde ao volatilidade inicial dos contratos, e o segundo à volatilidade da volatilidade. Consequentemente, θ^* também deve ser positivo. Finalmente, como representam correlações, os somatórios da terceira equação do sistema (3.5.9) devem possuir módulo menor ou igual a um. Para forçar o modelo capturar o efeito de alavangem inversa, podemos ainda forçar tais somatórios serem maiores positivos. No entanto, optamos por não fazer isso em nossas implementações.

Robustez da Otimização

Mesmo formulando o problema de otimização de modo a garantir que a solução encontrada tenha interpretações financeiras realistas, na busca de soluções melhores os algoritmos de otimização podem não respeitar todas as restrições matemáticas ao longo de todas as iterações. No problema de calibragem do modelo de Heston, este problema tipicamente impacta a computação do preço das opções através da integral indefinida apresentada em (3.5.7), que por vezes pode divergir ao longo da otimização, culminando em encerramento prematuro do programa. Para tornar a otimização mais robusta e independente do método de busca de soluções do algoritmo selecionado, podem ser adicionados tratamentos de erro de modo que a função objetivo retorne $+\infty$ nas situações em que não estiver definida, seja por questões matemáticas ou por questões numéricas. Do ponto de vista de um programador pragmático, esta alternativa pode não parecer elegante, mas ela é indispensável nos casos de algoritmos de otimização que admitem piorar a solução temporariamente ou “navegar” temporariamente fora da região viável para ampliar o espaço de busca de soluções melhores. Este é o caso, por exemplo, do COBYLA (*Constrained Optimization by Linear Approximations*) [Pow94] que usamos em nossa implementação.

5.2 Testes para Uma *Commodity*

Calibramos o modelo (3.5.9) para os 12 primeiros contratos futuros de petróleo WTI. Para cada um deles, usamos 30 opções (ou todas as disponíveis, quando menos que 30) do tipo *call*

com dados do dia 01/08/2013. Os termos a_{kj} foram calibrados tomados como sendo os elementos da matriz de correlação histórica dos retornos dos contratos. Apresentamos os resultados na Tabela 5.1, ao lado dos resultados do modelo de volatilidade determinística (indicado por Vol.Det) para facilitar a comparação. O símbolo * na última coluna indica que a modelagem estocástica diminui o erro na precificação da opção.

O erro absoluto médio para o modelo de volatilidade estocástica foi de 14.8%, frente a 21.3% para o modelo de volatilidade determinística, enquanto que o erro relativo ficou em 10.52% e 15.56%, respectivamente. Entre as 252 opções utilizadas na bateria de testes, o modelo de volatilidade estocástica diminui o erro de precificação em cerca 159, totalizando aproximadamente 63% dos casos. Estes estão indicados na Tabela 5.1 pelo * na última coluna. Em 7% dos casos, todos eles de opções muito “fora do dinheiro”, os modelos empataram, com ambos produzindo o valor de zero para as opções. Além disso, nos casos em que o modelo estocástico produziu melhores resultados, a melhoria média foi de 9%, enquanto que nos casos que os resultados foram piorados, a piora foi em média de 3%.

Escolhendo as Opções para Calibragem

O processo de calibragem implícita dos modelos de preços envolve a seleção de opções quotadas no mercado que sejam líquidas, de modo que seus preços sejam uma boa representação do estado do mercado e das expectativas dos negociantes. Para o mercado futuro do petróleo WTI, por exemplo, as *calls* europeias, para as quais o modelo de Heston oferece uma fórmula fechada de precificação são muito menos líquidas que as *calls* americanas. Para alguns casos, as opções de exercício europeu podem sequer existir. Para contornar este fato, podemos criar contratos europeus fictícios extraindo a volatilidade implícita das opções americanas usando fórmulas fechadas aproximadas como as de Barone-Adesi e Whaley [BAW87] ou Bjerksund e Stensland [BS93] e usando tais volatilidades para calcular os preços europeus correspondentes a partir da fórmula de Black. Para testar o procedimento a coerência do procedimento, deve-se notar que os preços dos contratos europeus criados em geral serão menores que os preços dos americanos, dada a possibilidade de exercício antecipado. Em nosso caso, as volatilidades implícitas dos *calls* americanas já estavam informadas em nossas fontes de dados, de modo que precisamos apenas gerar os preços europeus correspondentes.

Observamos ainda que para opções de vencimento mais longo, o modelo de volatilidade estocástica parece funcionar sistematicamente melhor, talvez refletindo o fato que, quanto maior o horizonte de tempo, maiores os erros acumulados em virtude de uma volatilidade mal estimada. Para horizontes de tempo bem curtos, os modelos empataram em alguns casos, tendo produzido valor praticamente nulos.

	$(T-t)$	$F(t,T)$	K	Mkt	Preços		Abs.Err		Rel.Err		
					Heston	Vol.Det	Heston	Vol.Det	Heston	Vol.Det	
1	11	107.890	100.000	8.016	8.127	7.845	0.111	0.171	1.39%	2.13%	*
2	11	107.890	102.000	6.180	6.268	6.149	0.088	0.031	1.43%	0.51%	
3	11	107.890	104.000	4.475	4.561	4.386	0.086	0.089	1.93%	1.99%	*
4	11	107.890	106.000	3.008	3.091	2.968	0.082	0.040	2.74%	1.34%	
5	11	107.890	108.000	1.823	1.927	1.871	0.104	0.048	5.68%	2.62%	
6	11	107.890	110.000	0.998	1.094	1.048	0.096	0.049	9.61%	4.94%	
7	11	107.890	112.000	0.518	0.563	0.517	0.045	0.001	8.74%	0.23%	
8	11	107.890	114.000	0.256	0.262	0.232	0.006	0.024	2.34%	9.29%	*
9	11	107.890	116.000	0.138	0.111	0.096	0.027	0.042	19.84%	30.46%	*
10	11	107.890	118.000	0.083	0.042	0.039	0.040	0.043	48.74%	52.44%	*
11	11	107.890	120.000	0.049	0.015	0.011	0.034	0.038	69.39%	78.01%	*
12	11	107.890	122.000	0.037	0.010	0.010	0.027	0.027	73.10%	73.10%	
13	11	107.890	124.500	0.037	0.010	0.010	0.027	0.027	73.29%	73.29%	
14	11	107.890	126.500	0.026	0.010	0.010	0.016	0.016	60.81%	60.81%	
15	11	107.890	128.500	0.026	0.010	0.010	0.016	0.016	60.98%	60.98%	
16	11	107.890	130.500	0.013	0.010	0.010	0.003	0.003	24.64%	24.64%	
17	11	107.890	133.000	0.013	0.010	0.010	0.003	0.003	24.99%	24.99%	
18	11	107.890	135.000	0.013	0.010	0.010	0.003	0.003	25.25%	25.25%	
19	11	107.890	137.000	0.013	0.010	0.010	0.003	0.003	25.49%	25.49%	
20	11	107.890	139.000	0.013	0.010	0.010	0.003	0.003	25.72%	25.72%	
21	11	107.890	141.000	0.014	0.010	0.010	0.004	0.004	25.93%	25.93%	

22	11	107.890	150.000	0.014	0.010	0.010	0.004	0.004	26.73%	26.73%	
23	11	107.890	76.000	31.855	32.006	31.828	0.151	0.027	0.47%	0.08%	
24	11	107.890	85.000	22.868	23.020	22.888	0.151	0.020	0.66%	0.09%	
25	11	107.890	88.000	19.873	20.024	19.816	0.152	0.057	0.76%	0.28%	
26	11	107.890	90.000	17.876	18.027	17.864	0.152	0.012	0.85%	0.07%	
27	11	107.890	92.000	15.879	16.031	15.872	0.152	0.007	0.96%	0.04%	
28	11	107.890	94.000	13.894	14.035	13.825	0.141	0.069	1.02%	0.50%	
29	11	107.890	96.000	11.909	12.044	11.916	0.136	0.007	1.14%	0.06%	
30	11	107.890	98.000	9.946	10.067	9.971	0.121	0.025	1.22%	0.25%	
31	33	106.930	100.000	7.859	8.086	7.589	0.228	0.269	2.90%	3.43%	*
32	33	106.930	102.000	6.305	6.503	6.184	0.198	0.121	3.14%	1.92%	
33	33	106.930	104.000	4.911	5.083	4.809	0.172	0.102	3.50%	2.09%	
34	33	106.930	106.000	3.686	3.853	3.654	0.167	0.032	4.53%	0.87%	
35	33	106.930	108.000	2.671	2.829	2.667	0.158	0.004	5.91%	0.17%	
36	33	106.930	110.000	1.855	2.011	1.953	0.156	0.098	8.39%	5.27%	
37	33	106.930	112.000	1.249	1.385	1.327	0.136	0.079	10.90%	6.30%	
38	33	106.930	114.000	0.822	0.926	0.840	0.104	0.019	12.66%	2.25%	
39	33	106.930	116.000	0.544	0.602	0.581	0.058	0.037	10.66%	6.79%	
40	33	106.930	118.000	0.355	0.381	0.351	0.026	0.005	7.32%	1.27%	
41	33	106.930	120.000	0.247	0.236	0.225	0.010	0.022	4.08%	8.91%	*
42	33	106.930	122.000	0.177	0.144	0.133	0.034	0.044	18.93%	24.87%	*
43	33	106.930	124.000	0.138	0.086	0.082	0.052	0.056	37.66%	40.33%	*
44	33	106.930	126.000	0.108	0.051	0.049	0.058	0.059	53.24%	54.79%	*
45	33	106.930	129.500	0.069	0.019	0.017	0.049	0.052	71.70%	75.37%	*
46	33	106.930	133.000	0.049	0.010	0.010	0.039	0.039	79.59%	79.59%	
47	33	106.930	140.000	0.029	0.010	0.010	0.019	0.019	65.91%	65.91%	
48	33	106.930	150.000	0.020	0.010	0.010	0.010	0.010	48.76%	48.76%	
49	33	106.930	87.000	19.908	20.340	19.801	0.432	0.107	2.17%	0.54%	
50	33	106.930	90.000	16.980	17.378	16.773	0.397	0.208	2.34%	1.22%	
51	33	106.930	92.000	15.039	15.423	15.033	0.384	0.006	2.55%	0.04%	
52	33	106.930	94.000	13.147	13.495	12.993	0.348	0.154	2.65%	1.17%	
53	33	106.930	96.000	11.305	11.614	11.161	0.309	0.144	2.73%	1.28%	
54	33	106.930	98.000	9.532	9.801	9.421	0.269	0.111	2.82%	1.17%	
55	54	105.320	100.000	7.350	7.474	7.112	0.124	0.238	1.69%	3.23%	*
56	54	105.320	101.500	6.308	6.402	6.114	0.094	0.194	1.49%	3.07%	*
57	54	105.320	103.000	5.355	5.417	5.233	0.062	0.122	1.15%	2.28%	*
58	54	105.320	104.500	4.472	4.527	4.245	0.055	0.226	1.23%	5.06%	*
59	54	105.320	106.000	3.688	3.737	3.666	0.049	0.021	1.33%	0.58%	
60	54	105.320	107.500	3.013	3.047	3.124	0.035	0.111	1.15%	3.69%	*
61	54	105.320	109.000	2.417	2.456	2.378	0.039	0.039	1.62%	1.61%	
62	54	105.320	110.500	1.910	1.958	1.964	0.048	0.054	2.51%	2.81%	*
63	54	105.320	112.000	1.493	1.546	1.580	0.053	0.087	3.54%	5.81%	*
64	54	105.320	113.500	1.175	1.209	1.224	0.034	0.049	2.92%	4.16%	*
65	54	105.320	115.000	0.907	0.938	1.000	0.032	0.093	3.51%	10.27%	*
66	54	105.320	117.000	0.648	0.662	0.730	0.014	0.082	2.13%	12.66%	*
67	54	105.320	118.500	0.519	0.506	0.534	0.013	0.015	2.49%	2.98%	*
68	54	105.320	120.000	0.409	0.384	0.405	0.025	0.004	6.04%	1.10%	
69	54	105.320	121.500	0.320	0.291	0.342	0.029	0.023	8.95%	7.06%	
70	54	105.320	124.500	0.220	0.165	0.203	0.055	0.017	25.09%	7.78%	
71	54	105.320	129.000	0.130	0.069	0.078	0.061	0.052	47.14%	39.94%	
72	54	105.320	135.000	0.080	0.021	0.015	0.059	0.065	73.81%	81.16%	*
73	54	105.320	138.500	0.060	0.010	0.012	0.050	0.048	82.62%	80.51%	
74	54	105.320	140.000	0.050	0.010	0.010	0.040	0.040	80.07%	80.07%	
75	54	105.320	141.500	0.050	0.010	0.010	0.040	0.040	80.07%	80.07%	
76	54	105.320	85.000	20.398	21.002	20.275	0.604	0.123	2.96%	0.60%	
77	54	105.320	91.000	14.772	15.217	14.473	0.446	0.298	3.02%	2.02%	
78	54	105.320	92.500	13.432	13.819	13.074	0.387	0.358	2.88%	2.66%	
79	54	105.320	94.500	11.686	12.005	11.308	0.319	0.378	2.73%	3.23%	*
80	54	105.320	96.000	10.436	10.691	10.042	0.255	0.393	2.45%	3.77%	*
81	54	105.320	97.500	9.215	9.432	8.935	0.217	0.281	2.36%	3.05%	*
82	54	105.320	99.000	8.074	8.234	7.809	0.160	0.265	1.98%	3.28%	*
83	74	103.710	100.000	6.814	6.930	6.478	0.116	0.335	1.70%	4.92%	*
84	74	103.710	102.500	5.299	5.365	5.096	0.066	0.203	1.25%	3.83%	*
85	74	103.710	105.000	3.993	4.046	3.929	0.053	0.064	1.33%	1.60%	*
86	74	103.710	107.500	2.924	2.978	2.938	0.054	0.015	1.85%	0.51%	
87	74	103.710	110.000	2.092	2.146	2.189	0.055	0.097	2.61%	4.63%	*
88	74	103.710	112.500	1.458	1.521	1.654	0.063	0.196	4.35%	13.47%	*
89	74	103.710	115.000	1.032	1.064	1.164	0.032	0.132	3.14%	12.79%	*
90	74	103.710	118.000	0.655	0.684	0.750	0.029	0.094	4.44%	14.42%	*
91	74	103.710	121.000	0.447	0.436	0.462	0.011	0.015	2.53%	3.42%	*
92	74	103.710	126.000	0.229	0.202	0.198	0.026	0.030	11.47%	13.31%	*
93	74	103.710	130.000	0.149	0.109	0.110	0.040	0.039	26.97%	26.37%	
94	74	103.710	136.000	0.090	0.043	0.043	0.047	0.047	52.04%	52.52%	*
95	74	103.710	145.000	0.050	0.011	0.010	0.039	0.040	78.39%	79.93%	*

96	74	103.710	157.500	0.030	0.010	0.010	0.020	0.020	66.59%	66.59%	
97	74	103.710	175.000	0.020	0.010	0.010	0.010	0.010	49.94%	49.94%	
98	74	103.710	55.000	48.232	49.272	48.130	1.041	1.012	2.16%	0.21%	
99	74	103.710	69.000	34.405	35.418	34.203	1.013	0.202	2.94%	0.59%	
100	74	103.710	73.000	30.486	31.464	30.259	0.979	0.227	3.21%	0.74%	
101	74	103.710	79.000	24.676	25.555	24.704	0.879	0.028	3.56%	0.11%	
102	74	103.710	82.500	21.351	22.139	20.990	0.788	0.361	3.69%	1.69%	
103	74	103.710	85.000	19.015	19.727	18.783	0.712	0.232	3.74%	1.22%	
104	74	103.710	87.500	16.729	17.355	16.383	0.625	0.346	3.74%	2.07%	
105	74	103.710	90.000	14.513	15.039	14.279	0.527	0.234	3.63%	1.61%	
106	74	103.710	92.500	12.395	12.806	12.033	0.412	0.362	3.32%	2.92%	
107	74	103.710	95.000	10.396	10.686	9.868	0.290	0.528	2.79%	5.08%	*
108	74	103.710	97.500	8.526	8.715	8.129	0.189	0.396	2.22%	4.65%	*
109	94	102.130	100.000	6.253	6.269	5.963	0.016	0.290	0.25%	4.64%	*
110	94	102.130	101.000	5.661	5.668	5.669	0.007	0.008	0.12%	0.14%	*
111	94	102.130	102.000	5.089	5.105	5.095	0.016	0.006	0.31%	0.12%	*
112	94	102.130	103.000	4.586	4.581	4.525	0.005	0.060	0.11%	1.31%	*
113	94	102.130	104.000	4.102	4.096	4.206	0.006	0.103	0.15%	2.52%	*
114	94	102.130	105.000	3.659	3.651	3.799	0.007	0.140	0.20%	3.83%	*
115	94	102.130	106.000	3.245	3.246	3.321	0.000	0.076	0.01%	2.35%	*
116	94	102.130	107.500	2.684	2.707	2.901	0.023	0.217	0.85%	8.07%	*
117	94	102.130	108.500	2.350	2.392	2.646	0.042	0.296	1.80%	12.60%	*
118	94	102.130	111.000	1.633	1.743	1.926	0.110	0.292	6.72%	17.91%	*
119	94	102.130	130.000	0.152	0.140	0.141	0.012	0.010	7.91%	6.75%	*
120	94	102.130	140.000	0.056	0.038	0.023	0.019	0.033	33.27%	58.49%	*
121	94	102.130	85.000	17.825	18.506	17.326	0.681	0.499	3.82%	2.80%	*
122	94	102.130	90.000	13.545	13.950	13.166	0.405	0.379	2.99%	2.80%	*
123	94	102.130	92.000	11.924	12.224	11.457	0.300	0.467	2.52%	3.92%	*
124	94	102.130	93.500	10.758	10.980	10.185	0.222	0.573	2.06%	5.32%	*
125	94	102.130	95.000	9.631	9.786	9.139	0.155	0.492	1.60%	5.11%	*
126	94	102.130	96.000	8.910	9.022	8.442	0.112	0.467	1.25%	5.25%	*
127	94	102.130	97.000	8.208	8.286	7.705	0.077	0.503	0.94%	6.13%	*
128	94	102.130	98.000	7.527	7.580	7.219	0.053	0.308	0.71%	4.09%	*
129	94	102.130	99.000	6.875	6.907	6.729	0.032	0.147	0.47%	2.13%	*
130	114	100.710	100.000	5.751	5.744	5.568	0.007	0.183	0.12%	3.18%	*
131	114	100.710	101.000	5.210	5.189	5.227	0.021	0.017	0.41%	0.33%	*
132	114	100.710	102.000	4.718	4.672	4.815	0.046	0.098	0.98%	2.07%	*
133	114	100.710	103.000	4.246	4.194	4.295	0.052	0.049	1.22%	1.15%	*
134	114	100.710	104.000	3.814	3.756	3.860	0.058	0.046	1.52%	1.20%	*
135	114	100.710	105.000	3.402	3.356	3.691	0.046	0.289	1.34%	8.50%	*
136	114	100.710	106.000	3.019	2.993	3.312	0.026	0.292	0.86%	9.68%	*
137	114	100.710	107.000	2.667	2.666	2.997	0.001	0.330	0.04%	12.38%	*
138	114	100.710	108.000	2.344	2.371	2.794	0.027	0.450	1.17%	19.20%	*
139	114	100.710	109.000	2.050	2.107	2.434	0.057	0.384	2.77%	18.73%	*
140	114	100.710	111.000	1.552	1.661	1.911	0.108	0.358	6.98%	23.09%	*
141	114	100.710	120.000	0.494	0.564	0.723	0.070	0.229	14.17%	46.41%	*
142	114	100.710	140.000	0.055	0.055	0.044	0.000	0.012	0.24%	21.01%	*
143	114	100.710	87.000	15.063	15.663	14.229	0.599	0.835	3.98%	5.54%	*
144	114	100.710	92.000	11.090	11.382	10.310	0.292	0.779	2.63%	7.03%	*
145	114	100.710	93.500	9.986	10.189	9.388	0.203	0.598	2.03%	5.99%	*
146	114	100.710	95.000	8.921	9.050	8.445	0.129	0.477	1.45%	5.35%	*
147	114	100.710	96.000	8.242	8.325	7.841	0.084	0.401	1.01%	4.87%	*
148	114	100.710	97.500	7.257	7.294	6.918	0.037	0.338	0.51%	4.66%	*
149	114	100.710	98.500	6.636	6.647	6.489	0.011	0.148	0.17%	2.22%	*
150	114	100.710	99.500	6.036	6.036	6.048	0.000	0.012	0.00%	0.20%	*
151	135	99.540	100.000	5.441	5.364	5.586	0.077	0.145	1.41%	2.67%	*
152	135	99.540	102.500	4.264	4.137	4.522	0.127	0.258	2.98%	6.05%	*
153	135	99.540	104.000	3.637	3.519	3.923	0.119	0.286	3.27%	7.85%	*
154	135	99.540	105.000	3.246	3.153	3.478	0.093	0.232	2.86%	7.16%	*
155	135	99.540	106.000	2.894	2.823	3.170	0.071	0.276	2.44%	9.54%	*
156	135	99.540	107.000	2.561	2.526	2.926	0.035	0.364	1.37%	14.22%	*
157	135	99.540	110.000	1.770	1.808	2.118	0.037	0.348	2.11%	19.64%	*
158	135	99.540	112.000	1.429	1.447	1.666	0.018	0.237	1.25%	16.57%	*
159	135	99.540	115.000	1.030	1.038	1.264	0.008	0.234	0.81%	22.75%	*
160	135	99.540	120.000	0.584	0.602	0.770	0.018	0.186	3.05%	31.84%	*
161	135	99.540	130.000	0.208	0.209	0.203	0.000	0.006	0.22%	2.70%	*
162	135	99.540	145.000	0.075	0.047	0.016	0.028	0.059	37.78%	78.80%	*
163	135	99.540	88.000	13.474	14.065	12.828	0.591	0.647	4.39%	4.80%	*
164	135	99.540	90.500	11.558	11.968	10.979	0.410	0.579	3.54%	5.01%	*
165	135	99.540	91.500	10.831	11.160	10.357	0.329	0.474	3.04%	4.37%	*
166	135	99.540	92.500	10.124	10.374	9.539	0.250	0.585	2.47%	5.78%	*
167	135	99.540	93.500	9.436	9.610	8.923	0.174	0.513	1.85%	5.44%	*
168	135	99.540	95.000	8.434	8.513	8.075	0.079	0.359	0.94%	4.25%	*
169	135	99.540	96.000	7.776	7.817	7.579	0.041	0.197	0.52%	2.54%	*

170	135	99.540	97.500	6.854	6.831	6.569	0.022	0.285	0.32%	4.15%	*
171	135	99.540	98.500	6.265	6.217	6.157	0.048	0.108	0.76%	1.72%	*
172	135	99.540	99.500	5.706	5.639	5.763	0.067	0.057	1.17%	1.00%	*
173	155	98.440	100.000	5.139	5.057	5.319	0.081	0.180	1.58%	3.50%	*
174	155	98.440	102.000	4.231	4.125	4.401	0.106	0.170	2.51%	4.02%	*
175	155	98.440	103.500	3.616	3.527	3.836	0.089	0.220	2.47%	6.08%	*
176	155	98.440	105.000	3.061	3.011	3.417	0.050	0.357	1.63%	11.65%	*
177	155	98.440	110.000	1.692	1.780	2.070	0.088	0.378	5.23%	22.35%	*
178	155	98.440	111.000	1.517	1.604	1.970	0.087	0.452	5.75%	29.81%	*
179	155	98.440	116.000	0.861	0.963	1.203	0.102	0.342	11.80%	39.65%	*
180	155	98.440	130.000	0.203	0.248	0.226	0.045	0.023	21.91%	11.10%	*
181	155	98.440	140.000	0.100	0.100	0.060	0.000	0.041	0.47%	40.59%	*
182	155	98.440	145.000	0.073	0.065	0.030	0.008	0.042	11.05%	58.04%	*
183	155	98.440	92.500	9.602	9.842	9.143	0.241	0.458	2.51%	4.77%	*
184	155	98.440	93.000	9.268	9.470	8.986	0.202	0.282	2.18%	3.04%	*
185	155	98.440	96.000	7.339	7.381	7.052	0.042	0.287	0.57%	3.92%	*
186	155	98.440	97.000	6.742	6.746	6.690	0.004	0.052	0.06%	0.78%	*
187	155	98.440	99.000	5.628	5.583	5.530	0.045	0.097	0.80%	1.73%	*
188	177	97.580	100.000	4.975	4.879	5.110	0.096	0.136	1.93%	2.73%	*
189	177	97.580	102.000	4.108	3.993	4.345	0.114	0.238	2.78%	5.78%	*
190	177	97.580	103.500	3.514	3.430	3.807	0.083	0.294	2.37%	8.36%	*
191	177	97.580	105.000	2.978	2.947	3.508	0.032	0.530	1.07%	17.78%	*
192	177	97.580	110.000	1.715	1.793	2.216	0.078	0.501	4.54%	29.19%	*
193	177	97.580	111.000	1.550	1.627	1.971	0.076	0.421	4.93%	27.13%	*
194	177	97.580	116.000	0.902	1.015	1.159	0.113	0.257	12.56%	28.52%	*
195	177	97.580	130.000	0.247	0.295	0.259	0.048	0.013	19.48%	5.08%	*
196	177	97.580	140.000	0.132	0.130	0.081	0.002	0.051	1.72%	38.71%	*
197	177	97.580	145.000	0.103	0.088	0.041	0.016	0.062	15.35%	60.10%	*
198	177	97.580	87.000	13.105	13.857	12.464	0.752	0.641	5.74%	4.89%	*
199	177	97.580	88.000	12.362	13.026	11.575	0.663	0.788	5.37%	6.37%	*
200	177	97.580	91.000	10.263	10.636	9.730	0.374	0.533	3.64%	5.19%	*
201	177	97.580	93.000	8.945	9.147	8.455	0.203	0.489	2.26%	5.47%	*
202	177	97.580	97.000	6.486	6.500	6.302	0.014	0.184	0.21%	2.83%	*
203	177	97.580	99.000	5.452	5.380	5.436	0.072	0.017	1.32%	0.31%	*
204	198	96.830	100.000	4.890	4.594	4.979	0.296	0.088	6.06%	1.81%	*
205	198	96.830	102.000	4.054	3.752	4.395	0.302	0.341	7.45%	8.40%	*
206	198	96.830	103.500	3.490	3.224	3.795	0.267	0.305	7.64%	8.73%	*
207	198	96.830	107.000	2.363	2.280	3.019	0.083	0.656	3.52%	27.76%	*
208	198	96.830	109.000	1.897	1.883	2.458	0.014	0.560	0.74%	29.54%	*
209	198	96.830	111.000	1.548	1.563	2.160	0.015	0.612	0.98%	39.57%	*
210	198	96.830	116.000	0.908	0.999	1.311	0.091	0.403	10.01%	44.38%	*
211	198	96.830	120.000	0.598	0.709	0.869	0.111	0.271	18.53%	45.31%	*
212	198	96.830	130.000	0.260	0.315	0.312	0.055	0.053	21.21%	20.30%	*
213	198	96.830	140.000	0.144	0.147	0.101	0.003	0.043	2.37%	29.63%	*
214	198	96.830	150.000	0.086	0.072	0.026	0.014	0.060	16.26%	69.27%	*
215	198	96.830	165.000	0.048	0.027	0.010	0.021	0.038	44.27%	79.06%	*
216	198	96.830	85.000	14.270	15.137	13.577	0.867	0.693	6.08%	4.85%	*
217	198	96.830	86.000	13.520	14.285	12.833	0.764	0.688	5.65%	5.09%	*
218	198	96.830	88.000	12.070	12.621	11.209	0.551	0.861	4.56%	7.13%	*
219	198	96.830	89.500	11.019	11.414	10.445	0.395	0.574	3.59%	5.21%	*
220	198	96.830	90.500	10.348	10.633	9.742	0.285	0.606	2.75%	5.86%	*
221	198	96.830	91.500	9.686	9.872	8.987	0.186	0.699	1.92%	7.22%	*
222	198	96.830	92.500	9.044	9.134	8.493	0.090	0.551	0.99%	6.09%	*
223	198	96.830	93.500	8.402	8.421	7.993	0.019	0.409	0.23%	4.86%	*
224	198	96.830	94.500	7.779	7.736	7.386	0.043	0.393	0.55%	5.05%	*
225	198	96.830	95.500	7.186	7.082	6.943	0.103	0.242	1.44%	3.37%	*
226	198	96.830	97.000	6.320	6.166	6.127	0.154	0.192	2.44%	3.05%	*
227	198	96.830	99.000	5.347	5.077	5.256	0.270	0.092	5.05%	1.71%	*
228	220	95.990	100.000	4.642	4.234	4.885	0.409	0.243	8.80%	5.23%	*
229	220	95.990	102.000	3.838	3.448	4.289	0.391	0.451	10.18%	11.74%	*
230	220	95.990	105.000	2.803	2.555	3.388	0.248	0.585	8.84%	20.88%	*
231	220	95.990	110.000	1.720	1.603	2.292	0.117	0.572	6.78%	33.26%	*
232	220	95.990	111.000	1.566	1.468	2.059	0.098	0.493	6.26%	31.49%	*
233	220	95.990	116.000	0.958	0.959	1.382	0.002	0.424	0.16%	44.28%	*
234	220	95.990	130.000	0.266	0.325	0.328	0.059	0.062	22.16%	23.11%	*
235	220	95.990	140.000	0.123	0.161	0.096	0.038	0.027	30.61%	21.84%	*
236	220	95.990	145.000	0.094	0.115	0.053	0.020	0.041	21.60%	43.96%	*
237	220	95.990	93.000	8.230	8.302	7.979	0.072	0.251	0.88%	3.05%	*
238	220	95.990	94.000	7.648	7.611	7.750	0.036	0.102	0.48%	1.34%	*
239	220	95.990	97.000	6.019	5.740	6.033	0.278	0.014	4.62%	0.23%	*
240	220	95.990	99.000	5.078	4.730	5.306	0.348	0.228	6.85%	4.48%	*
241	241	95.170	100.000	4.499	4.099	4.855	0.400	0.356	8.90%	7.91%	*
242	241	95.170	102.000	3.716	3.361	4.187	0.356	0.470	9.57%	12.66%	*
243	241	95.170	105.000	2.722	2.525	3.366	0.197	0.644	7.23%	23.66%	*

244	241	95.170	110.000	1.748	1.627	2.283	0.121	0.536	6.91%	30.66%	*
245	241	95.170	111.000	1.593	1.497	1.983	0.096	0.389	6.05%	24.43%	*
246	241	95.170	116.000	1.006	1.006	1.352	0.000	0.346	0.04%	34.34%	*
247	241	95.170	130.000	0.314	0.368	0.349	0.053	0.035	16.93%	11.10%	
248	241	95.170	140.000	0.152	0.191	0.135	0.040	0.017	26.02%	11.42%	
249	241	95.170	145.000	0.114	0.140	0.054	0.027	0.060	23.42%	52.56%	*
250	241	95.170	93.000	7.940	7.999	7.813	0.059	0.128	0.74%	1.61%	*
251	241	95.170	97.000	5.823	5.527	5.755	0.296	0.068	5.09%	1.17%	
252	241	95.170	99.000	4.914	4.531	5.155	0.384	0.241	7.81%	4.90%	

Tabela 5.1: *Forward* Heston vs. Paramétrico Determinístico

5.3 Testes para Duas *Commodities*

Realizamos a calibragem conjunta para o petróleo WTI e a gasolina RBOB, utilizamos os 10 primeiros contratos futuros de cada uma das *commodities*. Agora, os preços de cada *commodity* são regidos por um modelo da forma 3.5.9, e o processo de calibragem é semelhante, exceto na obtenção dos coeficientes α_{kj} .

Como estamos interessados em saber como as curvas de futuros das duas *commodities* se comportam conjuntamente, e não em separado, tais coeficientes devem ser obtidos a partir de uma estimação conjunta. A calibragem foi realizada à dados históricos da seguinte forma. Primeiro, obtivemos as matrizes de correlação histórica C_p entre os retornos dos 10 primeiros contratos para o petróleo WTI. Fazemos o mesmo para a gasolina RBOB, obtendo a matriz C_g . Em seguida, usamos PCA para obter decomposições das matrizes C_p e C_g tais que $C_p = V\Lambda_pV^T$ e $C_g = W\Lambda_gW^T$. Em seguida, selecionamos as cinco primeiras componentes principais para cada uma das *commodities*, ou seja, as cinco primeiras colunas de V e W :

$$V_5 = \begin{bmatrix} | & | & | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ | & | & | & | & | \end{bmatrix} \text{ e } W_5 = \begin{bmatrix} | & | & | & | & | \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 \\ | & | & | & | & | \end{bmatrix}.$$

Esta quantidade de componentes é suficiente para capturar mais que 98% da variância dos dados em cada caso. Assim, V_5 e W_5 podem ser vistas como componentes fundamentais e independentes de correlação para cada uma das *commodities*. Finalmente, para obtermos a estrutura conjunta de correlações entre o petróleo WTI e a gasolina RBOB, criamos a matriz A , definida como a matriz de correlação entre V_5 e W_5 .

$$A = \text{Corr} \left(\begin{bmatrix} | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 \\ | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | \end{bmatrix} \right)$$

Assim, os termos a_{kj} para cada um dos modelos são iguais, e definidos como os elementos da linha k e coluna j de A . A menos dos termos a_{kj} , os modelos de cada uma das *commodities* não possuem parâmetros em comum. Como tais termos já foram determinados a partir de análise histórica, e logo não serão objeto de estimação durante o processo de otimização, podemos então

abordar a calibragem conjunta das curvas como dois problemas de otimização independentes. O mesmo raciocínio é válido para três ou mais *commodities*. Para uma organização que deseje manter um modelo conjunto para uma grande quantidade de *commodities*, esta consideração técnica é de fundamental importância do ponto de vista prático, à medida que torna-se possível reduzir um problema de grandes dimensões em diversos problemas menores e passíveis de serem resolvidos em paralelo. Os resultados da calibragem, mostrados na Tabela 5.2 para o caso do petróleo WTI e na Tabela 5.3 para o a gasolina RBOB.

O erro médio relativo para na precificação das opções sobre o WTI foi de 13%, valor muito próximo dos erro relativo médio obtido a partir do modelo calibrado individualmente para esta *commodities*. Para a gasolina RBOB, o erro relativo médio foi de 3.3%, valor também semelhante ao obtido para o modelo quando calibrado em separado. Assim, verificamos que a calibragem conjunta não prejudicou a modelagem.

#	$(T-t)$	$F(t, T)$	K	Mkt	Model	Abs.Err	Rel.Err
1	11	107.890	100.000	8.016	7.971	0.045	0.56%
2	11	107.890	102.000	6.180	6.126	0.054	0.87%
3	11	107.890	104.000	4.475	4.445	0.030	0.67%
4	11	107.890	106.000	3.008	3.009	0.000	0.01%
5	11	107.890	108.000	1.823	1.879	0.056	3.07%
6	11	107.890	110.000	0.998	1.074	0.075	7.54%
7	11	107.890	112.000	0.518	0.558	0.040	7.71%
8	11	107.890	114.000	0.256	0.263	0.007	2.59%
9	11	107.890	116.000	0.138	0.112	0.026	18.69%
10	11	107.890	118.000	0.083	0.048	0.035	42.33%
11	11	107.890	120.000	0.049	0.015	0.033	68.66%
12	11	107.890	122.000	0.037	0.010	0.027	73.10%
13	11	107.890	124.500	0.037	0.010	0.027	73.29%
14	11	107.890	126.500	0.026	0.010	0.016	60.81%
15	11	107.890	128.500	0.026	0.010	0.016	60.98%
16	11	107.890	130.500	0.013	0.010	0.003	24.64%
17	11	107.890	133.000	0.013	0.010	0.003	24.99%
18	11	107.890	135.000	0.013	0.010	0.003	25.25%
19	11	107.890	137.000	0.013	0.010	0.003	25.49%
20	11	107.890	139.000	0.013	0.010	0.003	25.72%
21	11	107.890	141.000	0.014	0.010	0.004	25.93%
22	11	107.890	150.000	0.014	0.010	0.004	26.73%
23	11	107.890	76.000	31.855	31.841	0.013	0.04%
24	11	107.890	85.000	22.868	22.855	0.013	0.06%
25	11	107.890	88.000	19.873	19.860	0.013	0.07%
26	11	107.890	90.000	17.876	17.863	0.013	0.07%
27	11	107.890	92.000	15.879	15.866	0.013	0.08%
28	11	107.890	94.000	13.894	13.871	0.023	0.17%
29	11	107.890	96.000	11.909	11.880	0.029	0.24%
30	11	107.890	98.000	9.946	9.905	0.042	0.42%
31	33	106.930	100.000	7.859	7.717	0.142	1.80%
32	33	106.930	102.000	6.305	6.196	0.109	1.73%
33	33	106.930	104.000	4.911	4.846	0.065	1.32%
34	33	106.930	106.000	3.686	3.687	0.001	0.02%
35	33	106.930	108.000	2.671	2.726	0.055	2.04%
36	33	106.930	110.000	1.855	1.957	0.101	5.47%
37	33	106.930	112.000	1.249	1.364	0.115	9.23%
38	33	106.930	114.000	0.822	0.924	0.102	12.43%
39	33	106.930	116.000	0.544	0.608	0.064	11.85%
40	33	106.930	118.000	0.355	0.390	0.034	9.67%
41	33	106.930	120.000	0.247	0.243	0.003	1.24%
42	33	106.930	122.000	0.177	0.148	0.029	16.26%
43	33	106.930	124.000	0.138	0.088	0.049	35.76%
44	33	106.930	126.000	0.108	0.052	0.056	52.23%
45	33	106.930	129.500	0.069	0.019	0.049	71.98%
46	33	106.930	133.000	0.049	0.010	0.039	79.59%
47	33	106.930	140.000	0.029	0.010	0.019	65.91%
48	33	106.930	150.000	0.020	0.010	0.010	48.76%
49	33	106.930	87.000	19.908	19.849	0.058	0.29%
50	33	106.930	90.000	16.980	16.889	0.092	0.54%
51	33	106.930	92.000	15.039	14.938	0.101	0.67%
52	33	106.930	94.000	13.147	13.022	0.125	0.95%

53	33	106.930	96.000	11.305	11.161	0.143	1.27%
54	33	106.930	98.000	9.532	9.383	0.149	1.57%
55	54	105.320	100.000	7.350	7.087	0.263	3.57%
56	54	105.320	101.500	6.308	6.094	0.214	3.39%
57	54	105.320	103.000	5.355	5.188	0.167	3.12%
58	54	105.320	104.500	4.472	4.371	0.100	2.25%
59	54	105.320	106.000	3.688	3.646	0.042	1.14%
60	54	105.320	107.500	3.013	3.009	0.004	0.13%
61	54	105.320	109.000	2.417	2.458	0.041	1.70%
62	54	105.320	110.500	1.910	1.988	0.077	4.05%
63	54	105.320	112.000	1.493	1.592	0.099	6.61%
64	54	105.320	113.500	1.175	1.262	0.087	7.42%
65	54	105.320	115.000	0.907	0.992	0.085	9.39%
66	54	105.320	117.000	0.648	0.709	0.061	9.43%
67	54	105.320	118.500	0.519	0.546	0.027	5.28%
68	54	105.320	120.000	0.409	0.417	0.008	1.96%
69	54	105.320	121.500	0.320	0.316	0.003	1.00%
70	54	105.320	124.500	0.220	0.178	0.042	18.97%
71	54	105.320	129.000	0.130	0.072	0.058	44.66%
72	54	105.320	135.000	0.080	0.020	0.060	74.90%
73	54	105.320	138.500	0.060	0.010	0.050	83.38%
74	54	105.320	140.000	0.050	0.010	0.040	80.07%
75	54	105.320	141.500	0.050	0.010	0.040	80.07%
76	54	105.320	85.000	20.398	20.222	0.176	0.86%
77	54	105.320	91.000	14.772	14.497	0.275	1.86%
78	54	105.320	92.500	13.432	13.131	0.301	2.24%
79	54	105.320	94.500	11.686	11.374	0.311	2.66%
80	54	105.320	96.000	10.436	10.117	0.319	3.05%
81	54	105.320	97.500	9.215	8.921	0.294	3.19%
82	54	105.320	99.000	8.074	7.795	0.279	3.45%
83	74	103.710	100.000	6.814	6.459	0.354	5.20%
84	74	103.710	102.500	5.299	5.049	0.250	4.72%
85	74	103.710	105.000	3.993	3.864	0.129	3.23%
86	74	103.710	107.500	2.924	2.896	0.028	0.95%
87	74	103.710	110.000	2.092	2.128	0.036	1.72%
88	74	103.710	112.500	1.458	1.535	0.077	5.28%
89	74	103.710	115.000	1.032	1.089	0.057	5.50%
90	74	103.710	118.000	0.655	0.706	0.051	7.81%
91	74	103.710	121.000	0.447	0.450	0.003	0.60%
92	74	103.710	126.000	0.229	0.204	0.024	10.59%
93	74	103.710	130.000	0.149	0.106	0.043	28.89%
94	74	103.710	136.000	0.090	0.039	0.051	57.03%
95	74	103.710	145.000	0.050	0.010	0.040	79.93%
96	74	103.710	157.500	0.030	0.010	0.020	66.59%
97	74	103.710	175.000	0.020	0.010	0.010	49.94%
98	74	103.710	55.000	48.232	48.212	0.020	0.04%
99	74	103.710	69.000	34.405	34.356	0.049	0.14%
100	74	103.710	73.000	30.486	30.401	0.085	0.28%
101	74	103.710	79.000	24.676	24.491	0.185	0.75%
102	74	103.710	82.500	21.351	21.082	0.269	1.26%
103	74	103.710	85.000	19.015	18.686	0.329	1.73%
104	74	103.710	87.500	16.729	16.344	0.385	2.30%
105	74	103.710	90.000	14.513	14.082	0.431	2.97%
106	74	103.710	92.500	12.395	11.930	0.465	3.75%
107	74	103.710	95.000	10.396	9.922	0.474	4.56%
108	74	103.710	97.500	8.526	8.089	0.436	5.12%
109	94	102.130	100.000	6.253	5.959	0.294	4.71%
110	94	102.130	101.000	5.661	5.436	0.225	3.97%
111	94	102.130	102.000	5.089	4.947	0.142	2.79%
112	94	102.130	103.000	4.586	4.490	0.096	2.09%
113	94	102.130	104.000	4.102	4.065	0.038	0.91%
114	94	102.130	105.000	3.659	3.671	0.013	0.34%
115	94	102.130	106.000	3.245	3.308	0.063	1.94%
116	94	102.130	107.500	2.684	2.818	0.134	4.97%
117	94	102.130	108.500	2.350	2.525	0.175	7.45%
118	94	102.130	111.000	1.633	1.902	0.269	16.48%
119	94	102.130	130.000	0.152	0.166	0.014	9.51%
120	94	102.130	140.000	0.056	0.042	0.015	26.09%
121	94	102.130	85.000	17.825	17.269	0.556	3.12%
122	94	102.130	90.000	13.545	12.896	0.649	4.79%
123	94	102.130	92.000	11.924	11.285	0.639	5.36%
124	94	102.130	93.500	10.758	10.142	0.616	5.73%
125	94	102.130	95.000	9.631	9.061	0.570	5.92%
126	94	102.130	96.000	8.910	8.377	0.533	5.98%

127	94	102.130	97.000	8.208	7.724	0.484	5.90%
128	94	102.130	98.000	7.527	7.103	0.424	5.63%
129	94	102.130	99.000	6.875	6.514	0.361	5.25%
130	114	100.710	100.000	5.751	5.491	0.260	4.52%
131	114	100.710	101.000	5.210	5.012	0.198	3.79%
132	114	100.710	102.000	4.718	4.565	0.153	3.25%
133	114	100.710	103.000	4.246	4.147	0.099	2.33%
134	114	100.710	104.000	3.814	3.760	0.054	1.42%
135	114	100.710	105.000	3.402	3.401	0.000	0.01%
136	114	100.710	106.000	3.019	3.070	0.051	1.69%
137	114	100.710	107.000	2.667	2.766	0.100	3.73%
138	114	100.710	108.000	2.344	2.487	0.144	6.13%
139	114	100.710	109.000	2.050	2.232	0.182	8.88%
140	114	100.710	111.000	1.552	1.789	0.236	15.23%
141	114	100.710	120.000	0.494	0.616	0.122	24.73%
142	114	100.710	140.000	0.055	0.047	0.008	14.51%
143	114	100.710	87.000	15.063	14.373	0.690	4.58%
144	114	100.710	92.000	11.090	10.421	0.669	6.03%
145	114	100.710	93.500	9.986	9.354	0.632	6.33%
146	114	100.710	95.000	8.921	8.349	0.572	6.41%
147	114	100.710	96.000	8.242	7.716	0.525	6.37%
148	114	100.710	97.500	7.257	6.823	0.433	5.97%
149	114	100.710	98.500	6.636	6.267	0.370	5.57%
150	114	100.710	99.500	6.036	5.742	0.295	4.88%
151	135	99.540	100.000	5.441	5.076	0.365	6.70%
152	135	99.540	102.500	4.264	4.034	0.230	5.39%
153	135	99.540	104.000	3.637	3.500	0.138	3.78%
154	135	99.540	105.000	3.246	3.177	0.069	2.13%
155	135	99.540	106.000	2.894	2.879	0.014	0.49%
156	135	99.540	107.000	2.561	2.606	0.045	1.75%
157	135	99.540	110.000	1.770	1.918	0.147	8.33%
158	135	99.540	112.000	1.429	1.555	0.125	8.78%
159	135	99.540	115.000	1.030	1.127	0.097	9.40%
160	135	99.540	120.000	0.584	0.651	0.066	11.38%
161	135	99.540	130.000	0.208	0.211	0.003	1.25%
162	135	99.540	145.000	0.075	0.039	0.036	48.29%
163	135	99.540	88.000	13.474	12.621	0.853	6.33%
164	135	99.540	90.500	11.558	10.717	0.842	7.28%
165	135	99.540	91.500	10.831	9.998	0.832	7.69%
166	135	99.540	92.500	10.124	9.307	0.816	8.06%
167	135	99.540	93.500	9.436	8.644	0.791	8.39%
168	135	99.540	95.000	8.434	7.705	0.729	8.65%
169	135	99.540	96.000	7.776	7.116	0.660	8.49%
170	135	99.540	97.500	6.854	6.290	0.563	8.22%
171	135	99.540	98.500	6.265	5.778	0.487	7.77%
172	135	99.540	99.500	5.706	5.297	0.408	7.16%
173	155	98.440	100.000	5.139	4.885	0.254	4.95%
174	155	98.440	102.000	4.231	4.092	0.139	3.28%
175	155	98.440	103.500	3.616	3.567	0.049	1.35%
176	155	98.440	105.000	3.061	3.100	0.039	1.28%
177	155	98.440	110.000	1.692	1.902	0.210	12.41%
178	155	98.440	111.000	1.517	1.719	0.202	13.30%
179	155	98.440	116.000	0.861	1.026	0.165	19.10%
180	155	98.440	130.000	0.203	0.229	0.025	12.52%
181	155	98.440	140.000	0.100	0.078	0.023	22.49%
182	155	98.440	145.000	0.073	0.046	0.027	37.15%
183	155	98.440	92.500	9.602	8.872	0.729	7.59%
184	155	98.440	93.000	9.268	8.557	0.712	7.68%
185	155	98.440	96.000	7.339	6.810	0.529	7.21%
186	155	98.440	97.000	6.742	6.285	0.457	6.78%
187	155	98.440	99.000	5.628	5.323	0.305	5.42%
188	177	97.580	100.000	4.975	4.627	0.348	7.00%
189	177	97.580	102.000	4.108	3.891	0.217	5.27%
190	177	97.580	103.500	3.514	3.406	0.107	3.06%
191	177	97.580	105.000	2.978	2.975	0.004	0.13%
192	177	97.580	110.000	1.715	1.721	0.006	0.35%
193	177	97.580	111.000	1.550	1.699	0.149	9.59%
194	177	97.580	116.000	0.902	1.050	0.149	16.47%
195	177	97.580	130.000	0.247	0.268	0.021	8.54%
196	177	97.580	140.000	0.132	0.102	0.030	22.73%
197	177	97.580	145.000	0.103	0.063	0.040	38.63%
198	177	97.580	87.000	13.105	12.127	0.977	7.46%
199	177	97.580	88.000	12.362	11.391	0.972	7.86%
200	177	97.580	91.000	10.263	9.326	0.936	9.12%

201	177	97.580	93.000	8.945	8.083	0.862	9.64%
202	177	97.580	97.000	6.486	5.936	0.551	8.49%
203	177	97.580	99.000	5.452	5.035	0.417	7.66%
204	198	96.830	100.000	4.890	4.669	0.221	4.53%
205	198	96.830	102.000	4.054	3.965	0.089	2.19%
206	198	96.830	103.500	3.490	3.500	0.009	0.26%
207	198	96.830	107.000	2.363	2.597	0.234	9.88%
208	198	96.830	109.000	1.897	2.183	0.285	15.04%
209	198	96.830	111.000	1.548	1.832	0.284	18.32%
210	198	96.830	116.000	0.908	1.175	0.267	29.43%
211	198	96.830	120.000	0.598	0.822	0.224	37.42%
212	198	96.830	130.000	0.260	0.337	0.077	29.68%
213	198	96.830	140.000	0.144	0.140	0.004	2.63%
214	198	96.830	150.000	0.086	0.060	0.026	30.67%
215	198	96.830	165.000	0.048	0.018	0.030	63.30%
216	198	96.830	85.000	14.270	13.281	0.989	6.93%
217	198	96.830	86.000	13.520	12.532	0.988	7.31%
218	198	96.830	88.000	12.070	11.101	0.969	8.03%
219	198	96.830	89.500	11.019	10.090	0.929	8.43%
220	198	96.830	90.500	10.348	9.447	0.901	8.71%
221	198	96.830	91.500	9.686	8.829	0.857	8.84%
222	198	96.830	92.500	9.044	8.238	0.806	8.91%
223	198	96.830	93.500	8.402	7.674	0.728	8.66%
224	198	96.830	94.500	7.779	7.137	0.642	8.25%
225	198	96.830	95.500	7.186	6.628	0.558	7.76%
226	198	96.830	97.000	6.320	5.915	0.405	6.41%
227	198	96.830	99.000	5.347	5.058	0.289	5.41%

Tabela 5.2: *Forward* Heston - Calibragem Conjunta WTI e RBOB - WTI

#	$(T-t)$	$F(t,T)$	K	Mkt	Model	Abs.Err	Rel.Err
1	19	3.028	2.390	0.637	0.637	0.001	0.09%
2	19	3.028	2.650	0.382	0.378	0.004	1.03%
3	19	3.028	2.670	0.363	0.358	0.004	1.21%
4	19	3.028	2.700	0.334	0.329	0.005	1.50%
5	19	3.028	2.750	0.287	0.281	0.006	2.05%
6	19	3.028	2.790	0.250	0.244	0.006	2.41%
7	19	3.028	2.820	0.223	0.218	0.006	2.59%
8	19	3.028	2.840	0.206	0.201	0.006	2.72%
9	19	3.028	2.860	0.190	0.184	0.006	3.00%
10	19	3.028	2.890	0.166	0.161	0.006	3.34%
11	19	3.028	2.910	0.152	0.146	0.005	3.53%
12	19	3.028	2.930	0.137	0.132	0.005	3.61%
13	19	3.028	2.950	0.124	0.119	0.005	3.74%
14	19	3.028	2.970	0.111	0.107	0.004	3.82%
15	19	3.028	2.990	0.100	0.096	0.004	3.83%
16	19	3.028	3.010	0.089	0.085	0.003	3.74%
17	19	3.028	3.030	0.079	0.076	0.003	3.52%
18	19	3.028	3.050	0.069	0.067	0.002	3.42%
19	19	3.028	3.070	0.061	0.059	0.002	3.09%
20	19	3.028	3.090	0.053	0.052	0.002	2.85%
21	19	3.028	3.110	0.046	0.045	0.001	2.43%
22	19	3.028	3.130	0.040	0.039	0.001	1.86%
23	19	3.028	3.160	0.032	0.032	0.000	1.22%
24	19	3.028	3.190	0.026	0.026	0.000	0.24%
25	19	3.028	3.210	0.022	0.022	0.000	0.39%
26	19	3.028	3.230	0.019	0.019	0.000	0.96%
27	19	3.028	3.270	0.013	0.014	0.000	3.27%
28	19	3.028	3.350	0.007	0.007	0.000	7.56%
29	19	3.028	3.450	0.003	0.003	0.000	10.38%
30	19	3.028	3.650	0.000	0.000	0.000	0.12%
31	39	2.883	2.400	0.484	0.480	0.004	0.74%
32	39	2.883	2.600	0.299	0.288	0.010	3.46%
33	39	2.883	2.680	0.232	0.221	0.012	5.00%
34	39	2.883	2.700	0.217	0.205	0.012	5.39%
35	39	2.883	2.750	0.180	0.169	0.011	6.20%
36	39	2.883	2.790	0.153	0.143	0.010	6.55%
37	39	2.883	2.800	0.147	0.137	0.010	6.70%
38	39	2.883	2.820	0.135	0.126	0.009	6.91%
39	39	2.883	2.840	0.124	0.115	0.009	7.04%
40	39	2.883	2.870	0.108	0.100	0.008	7.08%

41	39	2.883	2.900	0.094	0.087	0.007	6.99%
42	39	2.883	2.920	0.085	0.079	0.006	6.83%
43	39	2.883	2.940	0.077	0.072	0.005	6.56%
44	39	2.883	2.970	0.066	0.062	0.004	5.92%
45	39	2.883	3.000	0.056	0.053	0.003	5.05%
46	39	2.883	3.050	0.042	0.041	0.001	3.32%
47	39	2.883	3.100	0.031	0.031	0.000	0.56%
48	39	2.883	3.150	0.023	0.024	0.001	3.03%
49	39	2.883	3.200	0.017	0.018	0.001	6.54%
50	39	2.883	3.250	0.012	0.013	0.001	8.63%
51	39	2.883	3.330	0.007	0.008	0.001	12.03%
52	61	2.835	2.620	0.252	0.245	0.007	2.85%
53	61	2.835	2.900	0.088	0.085	0.003	3.90%
54	61	2.835	3.000	0.055	0.054	0.002	3.22%
55	61	2.835	3.050	0.043	0.042	0.001	2.41%
56	61	2.835	3.100	0.033	0.033	0.000	1.08%
57	61	2.835	3.150	0.026	0.026	0.000	0.01%
58	61	2.835	3.200	0.020	0.020	0.000	0.12%
59	61	2.835	3.250	0.015	0.015	0.000	0.03%
60	61	2.835	3.300	0.012	0.012	0.000	0.01%
61	80	2.800	2.480	0.342	0.334	0.007	2.18%
62	80	2.800	2.540	0.293	0.285	0.008	2.69%
63	80	2.800	2.550	0.285	0.277	0.008	2.72%
64	80	2.800	2.560	0.277	0.269	0.008	2.89%
65	80	2.800	2.580	0.262	0.254	0.008	3.03%
66	80	2.800	2.600	0.247	0.239	0.008	3.18%
67	80	2.800	2.630	0.226	0.218	0.008	3.42%
68	80	2.800	2.640	0.219	0.211	0.007	3.39%
69	80	2.800	2.660	0.205	0.198	0.007	3.56%
70	80	2.800	2.700	0.179	0.173	0.006	3.57%
71	80	2.800	2.720	0.168	0.161	0.006	3.70%
72	80	2.800	2.730	0.162	0.156	0.006	3.74%
73	80	2.800	2.750	0.151	0.145	0.006	3.84%
74	80	2.800	2.760	0.146	0.140	0.006	3.85%
75	80	2.800	2.780	0.135	0.130	0.005	3.78%
76	80	2.800	2.800	0.125	0.121	0.005	3.72%
77	80	2.800	2.850	0.103	0.100	0.004	3.52%
78	80	2.800	2.860	0.099	0.096	0.003	3.43%
79	80	2.800	2.900	0.084	0.082	0.002	2.90%
80	80	2.800	2.960	0.065	0.064	0.001	2.02%
81	80	2.800	2.980	0.060	0.059	0.001	1.49%
82	80	2.800	3.000	0.055	0.054	0.001	1.09%
83	80	2.800	3.060	0.042	0.042	0.000	1.01%
84	80	2.800	3.100	0.034	0.035	0.001	3.05%
85	80	2.800	3.140	0.029	0.030	0.001	3.47%
86	80	2.800	3.150	0.027	0.028	0.001	3.64%
87	80	2.800	3.200	0.022	0.023	0.001	4.45%
88	80	2.800	3.300	0.014	0.015	0.001	6.51%
89	80	2.800	3.500	0.006	0.006	0.000	0.00%
90	101	2.780	2.440	0.363	0.360	0.003	0.95%
91	101	2.780	2.660	0.201	0.197	0.003	1.62%
92	101	2.780	2.800	0.126	0.123	0.003	2.26%
93	101	2.780	2.850	0.105	0.102	0.003	2.47%
94	101	2.780	2.900	0.087	0.084	0.002	2.50%
95	101	2.780	2.950	0.071	0.069	0.002	2.30%
96	101	2.780	3.100	0.038	0.038	0.000	0.00%
97	101	2.780	3.200	0.024	0.025	0.000	1.88%
98	101	2.780	3.300	0.016	0.016	0.001	3.45%
99	122	2.773	2.670	0.198	0.197	0.001	0.45%
100	122	2.773	2.700	0.181	0.182	0.001	0.42%
101	122	2.773	2.800	0.131	0.138	0.007	5.21%
102	141	2.780	2.900	0.103	0.116	0.013	13.09%
103	141	2.780	3.300	0.024	0.024	0.000	0.02%
104	162	2.924	2.680	0.305	0.305	0.001	0.30%
105	162	2.924	2.700	0.291	0.292	0.001	0.31%
106	162	2.924	2.760	0.251	0.256	0.005	1.96%
107	162	2.924	2.840	0.203	0.214	0.011	5.55%
108	184	2.908	2.660	0.313	0.310	0.002	0.69%
109	184	2.908	2.950	0.149	0.150	0.001	0.67%
110	205	2.880	2.950	0.143	0.157	0.014	9.96%
111	205	2.880	3.000	0.124	0.138	0.014	11.18%

Tabela 5.3: *Forward* Heston - Calibragem Conjunta WTI e RBOB - RBOB

Capítulo 6

Framework para Opções Exóticas

6.1 Método de Monte Carlo

Nesta Seção, apresentamos o método de Monte Carlo e como ele pode ser usado na precificação de opções. Consideremos uma opção de exercício europeu cujo *payoff* no tempo T é $B = g(T, S(T))$. Por não arbitragem (ver [KK01]), pode ser mostrado que o preço $C(t, S(t))$ da opção no instante t pode ser representado por

$$C(t, S(t)) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{P_0(t)}{P_0(T)} B \mid \mathcal{F}_t \right] = \frac{P_0(t)}{P_0(T)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [B \mid \mathcal{F}_t] = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [B \mid \mathcal{F}_t] , \quad (6.1.1)$$

onde $P_0(t) = e^{rt}$ é um *zero-coupon bond* determinístico, que é o numerário associado à medida neutra ao risco \mathbb{Q} , enquanto que \mathcal{F}_t , informalmente, denota toda a informação disponível até o instante t acerca dos preços do ativo arriscado S . Desde que $\mathbb{E}[B] < \infty$, podemos recorrer a Lei dos Grande Números para aproximar a esperança condicional (6.1.1) por

$$C(t, S(t)) \simeq \tilde{C}(t, S(t)) = e^{-r(T-t)} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M B_i , \quad (6.1.2)$$

onde $\{B_i\}_{i=1}^M$ são realizações do *payoff* da opção. Além disso, se $\{B_i\}_{i=1}^M$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tais que $\{B_i\}_{i=1}^M \sim X$, então pelo Teorema do Limite Central temos

$$\tilde{C}(t, S(t)) \xrightarrow{d} N(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X \mid \mathcal{F}_t], \frac{1}{M} \text{Var}^{\mathbb{Q}}[X \mid \mathcal{F}_t]) . \quad (6.1.3)$$

Para usar a relação (6.1.2), simulamos trajetórias de preços para o ativo arriscado até o instante T , calculamos o *payoff* da opção em cada um dos casos, computamos a média e a trazemos a valor presente. Já a relação (6.1.3) permite criarmos um intervalo de confiança para a aproximação ou, equivalentemente, encontrar o valor M de simulações que nos garanta o nível de confiança desejado.

O mecanismo descrito é conhecido como método de Monte Carlo, e é especialmente útil na precificação de opções para quais não está disponível uma solução analítica ou aproximada.

Nos mercados de energia, onde são comuns as opções definidas sobre múltiplos contratos futuros de uma ou mais *commodities*, o método de Monte Carlo pode ser a única alternativa viável dependendo da complexidade das regras que definem a opção. Quando lidamos com modelos de volatilidade estocástica como os utilizados neste trabalho, tal método torna-se ainda mais importante, visto que nestes casos a disponibilidade de soluções analíticas é ainda menor. Este foi o motivo pelo qual, no Capítulo 4 e, particularmente no Capítulo 5, fizemos questão de testar os modelos calibrados a partir de simulações de Monte Carlo.

Finalmente, consideramos importante enfatizar o significado prático dos símbolos \mathbb{Q} e \mathcal{F}_t e como eles estão ligados com os modelos e os processos de calibragem apresentados, visto que até o momento tratamos o problema de um ponto de vista primordialmente numérico.

Para computar a esperança (6.1.1), precisamos simular as possíveis trajetórias dos preços dos contratos futuros subjacentes. Como os preços são modelados como processos estocásticos, para simulá-los precisamos definir em que espaço de probabilidade as componentes aleatórias dos preços estão definidas, e portanto em que medida de probabilidade iremos trabalhar. Neste contexto, \mathbb{Q} denota a medida que garante que, sob o numerário a ela associado (no nosso caso, $P_0(t)$), os preços descontados das opções serão martingais. Informalmente, equivale a dizer que estes serão os preços justos, que eliminam as oportunidades de arbitragem. Então, a questão que emerge é como determinar \mathbb{Q} .

Se partirmos da hipótese de que não há oportunidades de arbitragem, então os preços das opções observados no mercado são o fruto da evolução dos preços dos ativos subjacentes em uma medida de probabilidade neutra aos riscos que, pode não ser única, como no caso do modelo de Heston. Logo, calibrar os modelos de forma implícita equivale a identificar a medida de probabilidade na qual os processos estocásticos que modelam os ativos subjacentes devem ser expressos, de modo que os preços teóricos das opções sejam justamente os observados no mercado. Portanto, para fins de precificação, os parâmetros obtidos no processo de calibragem implícita são justamente os que devem ser usados no processo de simulação das trajetórias de preços.

Por sua vez, \mathcal{F}_t denota toda informação disponível sobre todas as variáveis aleatórias que compõe o modelo. Quando lidamos com opções sobre contratos futuros, \mathcal{F}_t corresponde aos preços dos contratos futuros observados até o momento. Em alguns casos, apenas o preço corrente é relevante, como no caso das *plain-vanilla*. Agora, suponhamos uma opção asiática baseada na média dos preços diários de fechamento dos últimos 22 dias úteis. Quando estivermos a mais de 22 dias ou mais para o vencimento, apenas o preço corrente do ativo subjacente para simularmos o *payoff* da opção no vencimento. No entanto, se estivermos a menos de 22 dias para o vencimento, parte da informação que compõe o preço da opção já é conhecida com certeza, e esta não pode ser negligenciada durante a precificação.

6.2 Simulação Numérica de SDEs

Métodos de Euler e de Milstein

A precificação de opções através do método de Monte Carlo depende da geração aleatória de uma grande quantidade de realizações para o *payoff* da opção. Como sabemos, em alguns

casos este pode depender da trajetória dos preços dos ativos subjacentes, e não somente de seus valores no instante da expiração da opção. Para simular tais trajetórias, precisamos recorrer a métodos numéricos de solução de equações diferenciais estocásticas, cujos exemplos mais peculiares são os de Euler e de Milstein. Para introduzi-los, consideremos um processo de Itô $X = \{X_t, t_0 \leq t \leq T\}$ satisfazendo a equação diferencial estocástica no intervalo $t_0 \leq t \leq T$

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t ,$$

com condição inicial $X_{t_0} = X_0$. Para uma discretização $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n < \dots < \tau_N = T$ do intervalo de tempo $[t_0, T]$, uma aproximação de Euler é um processo estocástico de tempo contínuo $Y = \{Y_t, t_0 \leq t \leq T\}$ satisfazendo o esquema iterativo

$$Y_{n+1} = Y_n + a(\tau_n, Y_n)(\tau_{n+1} - \tau_n) + b(\tau_n, Y_n)(W_{\tau_{n+1}} - W_{\tau_n}) ,$$

para $n = 0, 1, 2, \dots, N$ e valor inicial $Y_0 = X_0$. Supondo que os intervalos de discretização possuam o mesmo tamanho $\Delta = \tau_{n+1} - \tau_n$, podemos simplificar a notação para

$$Y_{n+1} = Y_n + a(\tau_n, Y_n)\Delta + b(\tau_n, Y_n)\Delta W_n , \quad (6.2.1)$$

onde $\Delta W_n = W_{\tau_{n+1}} - W_{\tau_n}$. Visto que $W = \{W_t, t \geq 0\}$ é um processo de Wiener, então sabemos que as variáveis ΔW_n são variáveis aleatórias normalmente distribuídas com média $E[\Delta W_n] = 0$ e variância $E[(\Delta W_n)^2] = \Delta$. Como a simulação de (6.2.1) depende da geração de números pseudo-aleatórios cuja variância está relacionada ao passo de discretização, devemos escolhê-lo de modo evitar que a simulação dos incrementos ΔW_n não resulte em valores positivos ou negativos extremamente grandes, mesmo que isso possa ocorrer com baixa probabilidade. Em regra, quanto menor o passo de discretização, melhor será a aproximação. O método de Milstein é similar ao de Euler, com a diferença de que agora temos mais um termo cujo objetivo é diminuir o erro de truncamento, onde b' denota a derivada com respeito a X . Tal método consiste na seguinte discretização:

$$Y_{n+1} = Y_n + a(\tau_n, Y_n)\Delta + b(\tau_n, Y_n)\Delta W_n + \frac{1}{2}b(\tau_n, Y_n)b'(\tau_n, Y_n)[(\Delta W_n)^2 - \Delta] . \quad (6.2.2)$$

Critérios de Convergência

Para melhor compararmos os métodos de Euler e de Milstein, é oportuno introduzir algumas noções de convergência de soluções numéricas para equações diferenciais estocásticas. Usamos a noção de convergência forte quando precisamos que as trajetórias simuladas sejam próximas das trajetórias reais, e usamos a noção de convergência fraca quando o nosso interesse se limita a certos momentos estatísticos de um funcional aplicado sobre a solução numérica.

Dizemos que o método converge fortemente com ordem p em $[t_0, T]$ se existe uma constante C tal que

$$\sup_{t_0 < \tau_n < T} \{ \mathbb{E} (|X(\tau_n) - Y_n|^2) \}^{1/2} \leq C\Delta^p ,$$

e dizemos que o método converge fracamente com ordem p em $[t_0, T]$ se para toda função g pertencente a uma classe de funções teste, existe uma constante C tal que

$$\sup_{t_0 < \tau_n < T} |\mathbb{E}[g(X(\tau_n))] - \mathbb{E}[g(Y_n)]| \leq C\Delta^p ,$$

Como estamos interessados em precificar opções cujo *payoff* depende da trajetória de preços, focamos na comparação baseada na ordem de convergência no sentido forte. Embora este tema ainda seja objeto de investigação, não havendo consenso acerca da ordem de convergência para alguns dos métodos, é sabido ao menos que, no sentido forte, o método de Milstein é mais adequado que o de Euler (ver [KP11]). Portanto, esta foi a nossa escolha ao longo das implementações.

Controle de Precisão

Para usarmos o método de Monte Carlo em conjunto com algum esquema de discretização do modelo de preços, as duas grandezas fundamentais que determinaram a precisão dos resultados produzidos pelo modelo são a quantidade de simulações M e o passo de discretização Δ . Se μ for o valor da opção com *payoff* dependendo apenas do valor final do ativo subjacente, então temos que

$$\mu = \mathbb{E}[g(X(T))] \simeq \mathbb{E}[g(Y_N)] \simeq \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M [g(Y_N^i)] = \mu_M .$$

Uma aplicação simples da desigualdade triangular nos leva à

$$|\mathbb{E}[g(X(T))] - \mu_M| \leq |\mathbb{E}[g(X(T))] - \mu| + |\mu - \mu_M| , \quad (6.2.3)$$

de modo que, para assegurarmos um nível de precisão ϵ , devemos escolher $\Delta = \epsilon$ e $M = \epsilon^{-2}$, onde usamos os fatos de que $|\mathbb{E}[g(X(T))] - \mu|$ é $O(\Delta)$, pelos critérios de convergência, e $|\mu - \mu_M|$ é $O(\sqrt{1/M})$, pelo Teorema do Limite Central. Em grande parte de nossos testes, usamos $\Delta = 0.001$ e $M = 10.000$, visto que este é o nível de precisão dos mercados de opções das *commodities* analisadas.

Geração de Números Aleatórios

O processo de simulação dos modelos *forward* discretizados através de algum dos métodos apresentados em 6.2 depende da geração de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição normal de média zero e variância Δ , visto que $\Delta W_n = W_{n+1} - W_n \sim N(0, \Delta)$. Em uma simulação de $M = 10.000$ trajetórias para os preços para o horizonte de 6 meses, com um passo e discretização de $\Delta = 0.001$, a equação de preços do modelo de Heston irá demandar um total de $10.000 \times (66 \times 22/252)/0.001 = 5.238.095$. A equação da volatilidade demandará a mesma quantidade, totalizando mais de 10.000.000 milhões de amostras, o que pode consumir algumas dezenas segundos em ambientes como o R e o MATLAB. Mesmo em linguagens de programação mais eficientes, como C e C++, se estivermos interessados em construir um sistema de precificação capaz de lidar com uma grande quantidade de *commodities*

e de vencimentos de forma *online*, a tarefa de geração de grandes quantidades de amostras de variáveis aleatórias pode se tornar um gargalo.

Não desejamos prover uma resposta completa para o problema, mas listamos alguns pontos que podem ser relevantes para uma implementação prática em larga escala. O primeiro deles o seguinte. Visto que $N(0, \Delta) \sim \sqrt{\Delta}N(0, 1)$, são comuns as implementações baseadas no lado direito da equivalência. No entanto, ao menos no R, esta abordagem em média 4% menos eficiente, como mostrado na Tabela 6.1.

#	$(T - t)$	$N(0, \Delta)$	$\sqrt{\Delta}N(0, 1)$	t_b/t_a
		t_a	t_b	
1	22	0.0939	0.0996	1.0606
2	44	0.1791	0.2026	1.1316
3	66	0.2842	0.2869	1.0095
4	88	0.4067	0.3893	0.9572
5	110	0.4942	0.4664	0.9436
6	132	0.5616	0.5718	1.0182
7	154	0.6419	0.6731	1.0486
8	176	0.7368	0.7600	1.0315
9	198	0.8335	0.8507	1.0206
10	220	0.9232	0.9453	1.0240
11	242	1.0142	1.0742	1.0592
12	264	1.1078	1.1954	1.0791
13	286	1.1996	1.2347	1.0293
14	308	1.2921	1.3324	1.0312
15	330	1.4374	1.4327	0.9967
16	352	1.4755	1.5546	1.0536
17	374	1.5906	1.6142	1.0148
18	396	1.6655	1.7531	1.0526
19	418	1.7707	1.8057	1.0198
20	440	1.8452	1.9478	1.0556
21	462	1.9372	2.0226	1.0441
22	484	2.0316	2.1106	1.0389
23	506	2.1141	2.2095	1.0451
24	528	2.2099	2.3120	1.0462

Tabela 6.1: Tempos de Geração de Amostras Aleatórias

O segundo ponto é o seguinte. Consideremos um cenário em que haja a necessidade de se executar as simulações de preços diversas vezes durante o dia para um grande conjunto modelos. À primeira vista, haveria a necessidade de gerarmos as amostras aleatórias novamente a cada simulação. No entanto, não há motivos para se fazer isso, visto que o método de Monte Carlo está fundamentado na Lei dos Grandes Números e no Teorema do Limite Central, de modo que para um valor apropriado de M , o valor aproximado da opção não sofrerá alterações relevantes ao usarmos uma nova amostra de variáveis aleatórias. Visto isso, podemos considerar a possibilidade de gerarmos as amostras aleatórias antecipadamente, evitando a necessidade de regenerá-las a cada simulação. Ao fazê-lo, “calcular” ΔW_n se restringirá a acessar uma estrutura de dados que, potencialmente, já estará carregada em memória, tornado a operação bem mais eficiente. Em testes realizados no R, a estratégia de reutilização das amostras (B) consumiu em média 20% do tempo necessário à geração de novas amostras (A), como mostrado na Tabela 6.2.

É importante enfatizar que este tipo de estratégia somente pode ser utilizado entre simulações diferentes e, desde que a distribuição das variáveis aleatórias não tenha se modificado entre as simulações. Feita esta consideração, a estratégia pode ser usada com segurança.

Para otimizar ainda mais as simulações, também podem ser empregadas as tradicionais técnicas de redução de variância (ver [Gla04]) além de técnicas mais recentes, como as simulações de

#	$(T-t)$	t_a	t_b	t_b/t_a
1	22	2.707	0.490	0.181
2	44	5.337	1.024	0.192
3	66	8.081	1.495	0.185
4	88	10.414	1.998	0.192
5	110	13.255	2.508	0.189
6	132	15.796	3.039	0.192
7	154	18.253	3.530	0.193
8	176	21.635	4.179	0.193
9	198	24.622	4.464	0.181
10	220	26.917	5.127	0.190
11	242	28.951	5.511	0.190
12	264	31.903	6.126	0.192

Tabela 6.2: Reutilização de Variáveis Aleatórias entre Simulações

Monte Carlo Multinível (ver [GS13]). Em nossas implementações, não utilizamos nenhuma das duas técnicas, mas para uma implementação comercial em larga escala, o uso destas deve ser considerado.

6.3 Opções com Exercício Americano

Nos mercados de *commodities* são bastante comuns as opções americanas, aquelas que oferecem a possibilidade de exercício antecipado. No caso das opções de compra de contratos futuros de petróleo WTI, as opções americanas são, inclusive, mais líquidas do que as respectivas opções de exercício europeu. O mesmo é válido para o caso da gasolina RBOB. Em contratos mais complexos, como as *crack spread options* entre petróleo e gasolina, também existe a possibilidade de exercício europeu¹. É conhecido o fato de que a possibilidade de exercício antecipado pode adicionar valor à opção, de modo que as opções americanas sempre possuem valores maiores ou iguais do que os valores das européias correspondentes (ver [MR06]). A diferença entre os preços europeus e americanos é comumente chamada de prêmio de exercício antecipado.

Como definido em [KK01], uma opção americana é um contrato contingenciado caracterizado por um processo de pagamentos $B = \{(B_t, \mathcal{F}_t)\}_{t \in [0, T]}$ e pagamento final $B(\tau)$, com $\tau \in \Sigma_{0, T}$, onde $\Sigma_{0, T}$ é o conjunto de tempos de parada com valores em $[0, T]$. O preço justo de um contrato deste tipo no instante $t = 0$ é dado por

$$C(t) = \operatorname{ess\,sup}_{\tau \in \Sigma_{0, T}} \left\{ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-r(T-\tau)} B(\tau) \right] \right\}.$$

Usando uma estratégia racional de investimento, o detentor do contrato exercerá seu direito quando o valor corrente da opção for maior que o chamado valor de continuação (*continuation value*), que corresponde ao valor esperado do contrato no caso de não exercício. Assim, a cada instante de tempo $t \in [0, T]$, uma opção americana vale

$$C(t) = \max \left\{ B(t), \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [C(t + \Delta t) \mid \mathcal{F}_t] \right\}.$$

¹Na NYMEX, as opções européias e americanas sobre futuros de WTI são negociadas sob os símbolos LC e LO, respectivamente. Já para a gasolina RBOB, tais opções são negociadas sob os símbolos RF e RB, enquanto que as *crack spread options* entre estas duas *commodities* são negociadas sob o símbolo RX. Mais detalhes em <http://www.cmegroup.com/trading/energy/>

Assim, poderíamos pensar em calcular $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [C(t + \Delta t) \mid \mathcal{F}_t]$ através de uma simulação de Monte Carlo. No entanto, $C(t + \Delta t)$ pode ser expresso novamente como uma função de um novo valor de continuação que, analogamente, poderia ser calculado via Monte Carlo. Assim, recaímos em problema recursivo inviável computacionalmente.

Em alguns casos, estão disponíveis algumas boas aproximações para o valor das opções americanas. Em um modelo de Black-Scholes, por exemplo, podem ser usadas as aproximações através de árvores binomiais de Cox, Ross e Rubinstein, ou fórmulas analíticas aproximadas, como as de Barone-Adesi e Whaley [BAW87] ou de Bjerksund e Stensland [BS93]. Para modelos de volatilidade estocástica, uma boa revisão dos métodos de precificação de opções americanas é feita por Beliaeva e Nawalkha em [BN10]. Em particular, para o modelo de Heston, uma aproximação numérica baseada na transformada de Fourier é apresentada por Ziogas e Chiarella em [CZ05].

No entanto, entre os métodos mais populares para precificação de opções americanas está o de Longstaff e Schwartz [LS01]. Sua popularidade deve-se à sua integração direta com o Método de Monte Carlo, e à sua relativa facilidade de implementação. O método opera sobre as trajetórias de preços geradas a partir de uma simulação de Monte Carlo, não dependendo dos parâmetros dos modelos de preços que as deram origem. Este “desacomplamento” confere ao método uma boa flexibilidade para lidar com opções mais complexas, definidas sobre múltiplos ativos arriscados, cujas respectivas trajetórias de preços podem ser geradas a partir de modelos completamente distintas. Para o caso das *spread options*, esta característica é bastante interessante.

A principal ideia do método é, de forma retroativa, projetar o preço $C(t, S_t)$ em um espaço \mathcal{L}^2 para calcular $C(t - \Delta t, S_{t-\Delta t})$. Mais precisamente, devemos resolver

$$\begin{aligned} C(t - \Delta t, S_{t-\Delta t}) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [C(t, S_t) \mid \mathcal{F}_t] \\ &= \underset{g(S_{t-\Delta t}) \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_{t-\Delta t}, \mathbb{Q})}{\operatorname{argmin}} \operatorname{Var}^{\mathbb{Q}} [g(S_{t-\Delta t}) - C(t, S_t)e^{-r\Delta t}]. \end{aligned}$$

Se notarmos que $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [g(S_{t-\Delta t}) - C(t, S_t)e^{-r\Delta t}] = 0$, o problema pode ser reformulado como

$$\begin{aligned} C(t - \Delta t, S_{t-\Delta t}) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [C(t, S_t) \mid \mathcal{F}_t] \\ &= \underset{g(S_{t-\Delta t}) \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_{t-\Delta t}, \mathbb{Q})}{\operatorname{argmin}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [(g(S_{t-\Delta t}) - C(t, S_t)e^{-r\Delta t})^2]. \end{aligned}$$

Pode ser mostrado que em \mathcal{L}^2 existe uma base ortonormal de funções $\{\chi_j(S)\}_j$ tal que $g(S_{t-\Delta t})$ pode ser expresso como

$$g(S_{t-\Delta t}) = \sum_{j=1}^{+\infty} \alpha_j \chi_j(S_{t-\Delta t}) \simeq \sum_{j=1}^N \alpha_j \chi_j(S_{t-\Delta t})$$

para algum valor apropriado de N . Assim, a minimização consiste em um problema de mínimos quadrados. Por este motivo, o método de Longstaff e Schwartz é também conhecido como *Least-Squares Monte Carlo*. Sua implementação consiste no seguinte procedimento. Criamos M

trajetórias para os preços dos ativos através de uma simulação de Monte Carlo. Seleccionamos uma base de funções $\{\chi_j(S)\}_{j=1}^N$. Para cada trajetória, inicializamos $C(t, S_t)$ como o valor intrínseco da opção para cada instante de tempo t . Na sequência, executamos o seguinte *loop* para $t = T - \Delta t, T - 2\Delta t, \dots, \Delta t$.

1. Encontramos $\alpha \in \mathcal{R}^N$ tal que $\alpha = \operatorname{argmin} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [(C(t + \Delta t, S_{t+\Delta t})e^{-r\Delta t} - \alpha\chi(S_t))^2]$;
2. Para cada trajetória, calculamos a projeção $\hat{C}(t, S_t) = \alpha\chi(S_t)$;
3. Para cada trajetória, se $C(t, S_t) < \hat{C}(t, S_t)$, fazemos $C(t, S_t) = e^{-r\Delta t}C(t + \Delta t, S_{t+\Delta t})$.

Ao final do processo, calculamos o valor da opção americana como $E[C(0, S_0)]$. Baseamos nossa implementação na apresentada por Lorigato em [Lor14], adicionando apenas um tratamento para incluirmos somente as trajetórias *in-the-money* nas regressões, conforme sugerido originalmente por Longstaff e Schwartz. Além de tornar o processo mais rápido ao reduzir a dimensão dos problemas de regressão, este tratamento diminui os ruídos numéricos, permitindo uma precificação mais precisa.

6.4 Algumas Opções Exóticas

Nesta Seção, ilustramos o uso do nosso modelo de volatilidade estocástica na precificação de algumas opções exóticas disponíveis nos mercados de petróleo e derivados. Como não tivemos acesso a dados de preços de mercado para tais contratos, não pudemos analisar os níveis de erro dos resultados. No entanto, tentamos compensar isso com interpretações matemáticas e financeiras dos contratos e dos resultados obtidos.

6.4.1 Average Price Options

As *average price options*, também conhecidas como opções asiáticas, são contratos cujo *payoff* depende de algum tipo média dos preços observados até a data de expiração. Como observado por [Gem11], as opções asiáticas são instrumentos naturais nos mercados de *commodities* por conta de grande parte dos índices de mercado serem determinados como médias.

Consideremos uma opção de compra asiática, de exercício europeu em T , sob um contrato futuro de uma determinada *commodity* A com expiração em $T_a \geq T$. Seguindo uma das especificações típicas de mercado, definimos o *payoff* da opção como a diferença entre o preço de exercício e a média aritmética dos preços diários de fechamento no mês calendário do contrato de vencimento mais próximo². Assim, o valor da opção é dado por

$$C(t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [(Avg(T) - K)^+ | \mathcal{F}_t] ,$$

onde o termo $Avg(T)$ é dado por

²A rigor, no mercado de *commodities* os *payoffs* das opções são definidos sobre o *settlement price*, o que não invalida os modelos e técnicas aqui empregados. No entanto, quando aplicados em situações reais, um *trader* precisa estar atento às regras do mercado. Quando estabelecendo contratos OTC, as regras do *payoff* devem estar claras para ambas as partes, evitando disputas no momento da liquidação do contrato.

$$Avg(T) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M F_a(t_i, T_a) .$$

Executamos testes usando nosso modelo de volatilidade estocástica para nove contratos futuros de petróleo WTI. Usamos a convenção de dias úteis, escolhendo $M = 22$. Definimos 30 *strikes* equidistantes de US\$1 centrados em um *strike* equivalente ao valor corrente do respectivo contrato futuro. Os resultados são mostrados na Tabela 6.3.

#	$(T - t)$																	
	33		54		74		94		114		135		155		177		198	
	<i>K</i>	<i>C</i>	<i>K</i>	<i>C</i>	<i>K</i>	<i>C</i>	<i>K</i>	<i>C</i>	<i>K</i>	<i>C</i>	<i>K</i>	<i>C</i>	<i>K</i>	<i>C</i>	<i>K</i>	<i>C</i>	<i>K</i>	<i>C</i>
1	92.93	13.96	91.32	14.09	89.71	14.35	88.13	14.43	86.71	14.62	85.54	14.85	84.44	14.99	83.58	15.00	82.83	15.36
2	93.93	12.98	92.32	13.16	90.71	13.47	89.13	13.57	87.71	13.79	86.54	14.05	85.44	14.23	84.58	14.23	83.83	14.62
3	94.93	12.00	93.32	12.24	91.71	12.60	90.13	12.73	88.71	12.99	87.54	13.27	86.44	13.48	85.58	13.48	84.83	13.91
4	95.93	11.04	94.32	11.35	92.71	11.76	91.13	11.91	89.71	12.21	88.54	12.51	87.44	12.76	86.58	12.74	85.83	13.22
5	96.93	10.09	95.32	10.48	93.71	10.94	92.13	11.11	90.71	11.45	89.54	11.77	88.44	12.06	87.58	12.03	86.83	12.55
6	97.93	9.15	96.32	9.63	94.71	10.15	93.13	10.34	91.71	10.72	90.54	11.06	89.44	11.38	88.58	11.34	87.83	11.89
7	98.93	8.25	97.32	8.82	95.71	9.39	94.13	9.59	92.71	10.01	91.54	10.38	90.44	10.72	89.58	10.68	88.83	11.26
8	99.93	7.37	98.32	8.04	96.71	8.66	95.13	8.88	93.71	9.33	92.54	9.72	91.44	10.09	90.58	10.03	89.83	10.65
9	100.93	6.54	99.32	7.29	97.71	7.97	96.13	8.19	94.71	8.68	93.54	9.08	92.44	9.48	91.58	9.41	90.83	10.06
10	101.93	5.74	100.32	6.59	98.71	7.30	97.13	7.54	95.71	8.06	94.54	8.47	93.44	8.90	92.58	8.82	91.83	9.50
11	102.93	5.00	101.32	5.92	99.71	6.67	98.13	6.91	96.71	7.47	95.54	7.89	94.44	8.34	93.58	8.25	92.83	8.96
12	103.93	4.31	102.32	5.29	100.71	6.07	99.13	6.32	97.71	6.91	96.54	7.33	95.44	7.81	94.58	7.70	93.83	8.44
13	104.93	3.67	103.32	4.70	101.71	5.50	100.13	5.76	98.71	6.38	97.54	6.80	96.44	7.30	95.58	7.18	94.83	7.94
14	105.93	3.09	104.32	4.16	102.71	4.98	101.13	5.24	99.71	5.87	98.54	6.30	97.44	6.82	96.58	6.69	95.83	7.46
15	106.93	2.57	105.32	3.66	103.71	4.49	102.13	4.74	100.71	5.39	99.54	5.83	98.44	6.35	97.58	6.22	96.83	7.01
16	107.93	2.11	106.32	3.20	104.71	4.03	103.13	4.29	101.71	4.94	100.54	5.38	99.44	5.92	98.58	5.78	97.83	6.58
17	108.93	1.72	107.32	2.78	105.71	3.61	104.13	3.86	102.71	4.51	101.54	4.96	100.44	5.50	99.58	5.36	98.83	6.16
18	109.93	1.38	108.32	2.40	106.71	3.22	105.13	3.47	103.71	4.12	102.54	4.56	101.44	5.11	100.58	4.97	99.83	5.77
19	110.93	1.10	109.32	2.07	107.71	2.87	106.13	3.11	104.71	3.75	103.54	4.18	102.44	4.73	101.58	4.60	100.83	5.40
20	111.93	0.86	110.32	1.77	108.71	2.54	107.13	2.77	105.71	3.41	104.54	3.83	103.44	4.38	102.58	4.25	101.83	5.04
21	112.93	0.66	111.32	1.50	109.71	2.25	108.13	2.47	106.71	3.08	105.54	3.50	104.44	4.05	103.58	3.92	102.83	4.71
22	113.93	0.50	112.32	1.27	110.71	1.98	109.13	2.19	107.71	2.79	106.54	3.19	105.44	3.75	104.58	3.61	103.83	4.39
23	114.93	0.38	113.32	1.07	111.71	1.75	110.13	1.94	108.71	2.51	107.54	2.91	106.44	3.46	105.58	3.32	104.83	4.09
24	115.93	0.28	114.32	0.90	112.71	1.53	111.13	1.71	109.71	2.26	108.54	2.65	107.44	3.19	106.58	3.05	105.83	3.80
25	116.93	0.21	115.32	0.75	113.71	1.34	112.13	1.50	110.71	2.03	109.54	2.40	108.44	2.94	107.58	2.80	106.83	3.53
26	117.93	0.15	116.32	0.62	114.71	1.16	113.13	1.31	111.71	1.82	110.54	2.18	109.44	2.71	108.58	2.56	107.83	3.28
27	118.93	0.11	117.32	0.52	115.71	1.01	114.13	1.15	112.71	1.63	111.54	1.97	110.44	2.49	109.58	2.35	108.83	3.05
28	119.93	0.08	118.32	0.43	116.71	0.87	115.13	1.00	113.71	1.45	112.54	1.78	111.44	2.28	110.58	2.14	109.83	2.82
29	120.93	0.05	119.32	0.35	117.71	0.75	116.13	0.87	114.71	1.29	113.54	1.60	112.44	2.09	111.58	1.96	110.83	2.61
30	121.93	0.04	120.32	0.28	118.71	0.65	117.13	0.75	115.71	1.15	114.54	1.44	113.44	1.91	112.58	1.78	111.83	2.42

Tabela 6.3: *Average Price Options - WTI*

6.4.2 *Floating Average Price Options*

As *floating average price options* são similares às *average price options*, porém não possuem um *strike* fixo. Tipicamente, o *strike* é definido como o preço do contrato subjacente no momento da expiração da opção. Portanto, o valor de uma opção deste tipo é dado por

$$C(t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [(Avg(T) - F_a(T, T_a))^+ | \mathcal{F}_t] . \quad (6.4.1)$$

Executamos testes para nove contratos de petróleo e de gasolina, com $M = 22$. Os resultados mostrados na Tabela 6.4 mostram que o valor das opções é praticamente o mesmo para cada *commodity*, independente do contrato analisado.

A explicação por trás deste resultado está no seguinte. Para qualquer valor de $t < T \leq T_a$, o valor de $F_a(T, T_a)$ será, em média, igual a $F_a(t, T_a)$, visto que os contratos futuros são

#	WTI		RBOB	
	$(T-t)$	C	$(T-t)$	C
1	33	1.535	39	0.041
2	54	1.593	61	0.040
3	74	1.574	80	0.042
4	94	1.351	101	0.043
5	114	1.414	122	0.042
6	135	1.407	141	0.039
7	155	1.479	162	0.040
8	177	1.318	184	0.044
9	198	1.434	205	0.047

Tabela 6.4: *Floating Strike Average Price Options* - WTI

martingais. Consequentemente, em média $Avg(T)$ também será igual a $F_a(t, T_a)$, de modo que o termo dentro da esperança em (6.4.1) se anularia caso não estivéssemos interessados apenas na parte positiva. Assim, o valor da opção consiste em uma espécie de prêmio de risco associado à volatilidade, escalado pelo tempo de exposição e, no modelo de volatilidade estocástica que estamos usando, também pelo nível corrente de preço. Como o tempo de exposição à volatilidade é o mesmo em todos os casos, 22 dias, e os níveis de preços dos diversos contratos são bastante próximos, o resultado encontrado parece coerente.

6.4.3 *Calendar Spread Options*

As *calendar spread options* são opções definidas sobre dois contratos futuros de uma mesma *commodity*, porém com vencimentos distintos. Podem ser utilizadas na elaboração de estratégias de investimento que explorem um descasamento entre o spread observado e o spread histórico entre os preços de dois contratos de vencimentos distintos. São especialmente úteis nos mercados onde há sazonalidade nos preços.

Consideremos dois contratos futuros de uma mesma *commodity* A com vencimentos em $T_a < T_b$. O valor de uma *calendar spread option* com vencimento em $T \leq T_a < T_b$ que permite assumir uma posição comprada no segundo contrato e uma posição vendida no primeiro mediante o pagamento de um *strike* K é dado portanto

$$C(t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [(F(T, T_a) - F(T, T_b) - K)^+ | \mathcal{F}_t] ,$$

Para ilustrar o uso do nosso modelo de volatilidade estocástica, executamos testes de precificação deste tipo de opção para o petróleo WTI. Selecionamos o contrato mais próximo como base, e construímos *calendar spread options* sobre os oito próximos vencimentos, com um total de 30 *strikes* para cada uma delas. Os resultados são mostrados na Tabela 6.5.

6.4.4 *Crack Spread Options*

As *crack spread options* são contratos definidos sobre a diferença de preço entre o petróleo e seus derivados, como a gasolina ou o óleo combustível. Este tipo de opção pode ser utilizada como instrumento de proteção contra flutuações nos preços de refino ou descasamento de preços entre o petróleo e a gasolina. Este tipo de contrato também tem pode ser visto como uma opção real relacionada à construção de uma refinaria, fazendo às vezes dos “fluxos de caixa líquidos” descontados. Usando esta abordagem, estaríamos fazendo uma análise de viabilidade neutra

	$(T_a - t)/(T_b - t)$															
	11/33		11/54		11/74		11/94		11/114		11/135		11/155		11/177	
	K	C	K	C	K	C	K	C	K	C	K	C	K	C	K	C
1	0.064	3.247	0.171	4.218	0.279	5.106	0.384	6.246	0.479	7.228	0.557	8.264	0.630	9.145	0.687	9.975
2	0.128	3.211	0.343	4.108	0.557	4.907	0.768	5.946	0.957	6.833	1.113	7.780	1.260	8.576	1.375	9.346
3	0.192	3.176	0.514	3.999	0.836	4.713	1.152	5.655	1.436	6.447	1.670	7.305	1.890	8.020	2.062	8.728
4	0.256	3.141	0.685	3.892	1.115	4.522	1.536	5.370	1.915	6.071	2.227	6.841	2.520	7.477	2.749	8.122
5	0.320	3.106	0.857	3.787	1.393	4.336	1.920	5.093	2.393	5.705	2.783	6.390	3.150	6.947	3.437	7.529
6	0.384	3.071	1.028	3.683	1.672	4.153	2.304	4.824	2.872	5.348	3.340	5.952	3.780	6.434	4.124	6.953
7	0.448	3.037	1.199	3.582	1.951	3.975	2.688	4.562	3.351	5.002	3.897	5.527	4.410	5.937	4.811	6.395
8	0.512	3.002	1.371	3.482	2.229	3.801	3.072	4.307	3.829	4.667	4.453	5.118	5.040	5.458	5.499	5.857
9	0.576	2.968	1.542	3.383	2.508	3.631	3.456	4.060	4.308	4.345	5.010	4.724	5.670	4.997	6.186	5.341
10	0.640	2.935	1.713	3.286	2.787	3.466	3.840	3.821	4.787	4.036	5.567	4.347	6.300	4.557	6.873	4.849
11	0.704	2.901	1.885	3.191	3.065	3.307	4.224	3.591	5.265	3.739	6.123	3.986	6.930	4.139	7.561	4.381
12	0.768	2.868	2.056	3.097	3.344	3.152	4.608	3.369	5.744	3.454	6.680	3.642	7.560	3.743	8.248	3.937
13	0.832	2.835	2.227	3.005	3.623	3.001	4.992	3.156	6.223	3.183	7.237	3.315	8.190	3.370	8.935	3.519
14	0.896	2.803	2.399	2.915	3.901	2.855	5.376	2.951	6.701	2.924	7.793	3.009	8.820	3.019	9.623	3.125
15	0.960	2.770	2.570	2.827	4.180	2.715	5.760	2.754	7.180	2.679	8.350	2.720	9.450	2.692	10.310	2.759
16	1.024	2.738	2.741	2.740	4.459	2.578	6.144	2.566	7.659	2.447	8.907	2.448	10.080	2.389	10.997	2.423
17	1.088	2.706	2.913	2.655	4.737	2.447	6.528	2.386	8.137	2.228	9.463	2.196	10.710	2.109	11.685	2.114
18	1.152	2.674	3.084	2.572	5.016	2.320	6.912	2.214	8.616	2.024	10.020	1.961	11.340	1.851	12.372	1.832
19	1.216	2.642	3.255	2.490	5.295	2.197	7.296	2.051	9.095	1.833	10.577	1.742	11.970	1.615	13.059	1.578
20	1.280	2.611	3.427	2.410	5.573	2.079	7.680	1.897	9.573	1.655	11.133	1.542	12.600	1.401	13.747	1.351
21	1.344	2.580	3.598	2.332	5.852	1.965	8.064	1.751	10.052	1.490	11.690	1.359	13.230	1.208	14.434	1.150
22	1.408	2.549	3.769	2.255	6.131	1.855	8.448	1.613	10.531	1.337	12.247	1.192	13.860	1.034	15.121	0.972
23	1.472	2.518	3.941	2.180	6.409	1.750	8.832	1.482	11.009	1.196	12.803	1.041	14.490	0.881	15.809	0.816
24	1.536	2.488	4.112	2.106	6.688	1.648	9.216	1.359	11.488	1.066	13.360	0.905	15.120	0.747	16.496	0.679
25	1.600	2.458	4.283	2.034	6.967	1.552	9.600	1.244	11.967	0.947	13.917	0.783	15.750	0.630	17.183	0.562
26	1.664	2.428	4.455	1.964	7.245	1.459	9.984	1.135	12.445	0.837	14.473	0.674	16.380	0.527	17.871	0.462
27	1.728	2.398	4.626	1.895	7.524	1.370	10.368	1.033	12.924	0.737	15.030	0.577	17.010	0.437	18.558	0.377
28	1.792	2.369	4.797	1.828	7.803	1.285	10.752	0.939	13.403	0.647	15.587	0.491	17.640	0.361	19.245	0.306
29	1.856	2.339	4.969	1.763	8.081	1.205	11.136	0.850	13.881	0.566	16.143	0.415	18.270	0.296	19.933	0.246
30	1.920	2.310	5.140	1.699	8.360	1.128	11.520	0.768	14.360	0.493	16.700	0.350	18.900	0.242	20.620	0.196

Tabela 6.5: *Calendar Spread Options - WTI*

ao risco, ao passo que as opções são precificadas nessa medida.

Consideremos dois contratos futuros de duas *commodities* diferentes A e B , e uma opção de troca de uma unidade do contrato futuro A por H unidades B , com preço de exercício K e expiração em T , onde $T_a \geq T$ e $T_b \geq T$ são as datas de expiração dos contratos futuros de A e B , respectivamente. O valor deste tipo de opção é dado por

$$C(t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[(F_a(t, T_a) - HF_b(t, T_b) - K)^+ \mid \mathcal{F}_t \right].$$

Como há duas *commodities* envolvidas, precisamos recorrer aos modelos calibrados conjuntamente. Selecionamos os 5 primeiros contratos das *commodities* petróleo (A) e gasolina (B) para ilustrar o uso do modelo, usando o fator de conversão de $H = 30$. Selecionamos o *strike* central como a diferença dos preços correntes de cada contrato futuro, e geramos mais 30 *strikes* equidistantes ao redor deste. As opções foram definidas sob os contratos de mesma “ordem de expiração”, ou seja, o primeiro vencimento do petróleo contra o primeiro da gasolina, e assim sucessivamente. O tempo de expiração foi escolhido de modo a coincidir com a expiração do primeiro contrato futuro, ou seja, $T = \min\{T_a, T_b\}$. Os resultados são mostrados na Tabela 6.6.

Usando o método de Longstaff e Schwartz, repetimos a precificação considerando que tais opções possuem a possibilidade de exercício antecipado. Os resultados são mostrados na Tabela 6.7, na qual a coluna P representa o prêmio de exercício antecipado em termos percentuais. O prêmio de exercício antecipado em média se mostrou maior para as opções de vencimentos mais próximos. Para as opções de vencimento em 11, 54 e 94 dias, os prêmios médios foram

#	$(T-t)$									
	11		33		54		74		94	
	K	C	K	C	K	C	K	C	K	C
1	1.00	16.18	1.00	19.64	1.00	19.66	1.00	19.33	1.00	18.60
2	2.07	15.12	2.27	18.42	2.27	18.49	2.27	18.21	2.20	17.59
3	3.14	14.07	3.54	17.22	3.54	17.34	3.54	17.11	3.40	16.60
4	4.21	13.02	4.81	16.02	4.81	16.21	4.81	16.04	4.60	15.63
5	5.28	11.99	6.08	14.85	6.08	15.10	6.08	14.99	5.80	14.69
6	6.35	10.97	7.35	13.70	7.35	14.02	7.35	13.97	7.00	13.77
7	7.42	9.97	8.62	12.58	8.62	12.98	8.62	12.98	8.20	12.88
8	8.49	8.99	9.89	11.49	9.89	11.96	9.89	12.03	9.40	12.01
9	9.56	8.03	11.16	10.44	11.16	10.98	11.16	11.11	10.60	11.18
10	10.63	7.11	12.43	9.42	12.43	10.03	12.43	10.22	11.80	10.38
11	11.70	6.24	13.70	8.46	13.70	9.13	13.70	9.37	13.00	9.61
12	12.77	5.41	14.97	7.55	14.97	8.27	14.97	8.57	14.20	8.88
13	13.84	4.64	16.24	6.69	16.24	7.46	16.24	7.80	15.40	8.18
14	14.91	3.92	17.51	5.89	17.51	6.69	17.51	7.07	16.60	7.52
15	15.98	3.27	18.78	5.14	18.78	5.97	18.78	6.39	17.80	6.88
16	17.00	2.72	20.00	4.48	20.00	5.33	20.00	5.78	19.00	6.28
17	18.07	2.21	21.27	3.86	21.27	4.71	21.27	5.18	19.00	6.28
18	19.14	1.76	22.54	3.29	22.54	4.14	22.54	4.63	20.20	5.72
19	20.21	1.38	23.81	2.78	23.81	3.62	23.81	4.12	21.40	5.19
20	21.28	1.06	25.08	2.33	25.08	3.14	25.08	3.66	22.60	4.69
21	22.35	0.81	26.35	1.94	26.35	2.71	26.35	3.23	23.80	4.23
22	23.42	0.60	27.62	1.59	27.62	2.32	27.62	2.84	25.00	3.80
23	24.49	0.44	28.89	1.30	28.89	1.98	28.89	2.49	26.20	3.41
24	25.56	0.31	30.16	1.06	30.16	1.68	30.16	2.18	27.40	3.05
25	26.63	0.22	31.43	0.85	31.43	1.41	31.43	1.89	28.60	2.72
26	27.70	0.15	32.70	0.68	32.70	1.18	32.70	1.64	29.80	2.41
27	28.77	0.10	33.97	0.54	33.97	0.98	33.97	1.41	31.00	2.14
28	29.84	0.07	35.24	0.42	35.24	0.80	35.24	1.21	32.20	1.89
29	30.91	0.05	36.51	0.32	36.51	0.66	36.51	1.04	33.40	1.66
30	31.98	0.03	37.78	0.25	37.78	0.54	37.78	0.88	34.60	1.46

Tabela 6.6: *Crack Spread Options* - 1 WTI : 30 RBOB

aproximadamente de 7%, 4% e 2%. Este resultado é de certa forma contraintuitivo, ao passo que em um intervalo de tempo maior, maior seria a chance de os preços alcançarem valores que justificassem o exercício antecipado. No entanto, tal oscilação de preços depende também da volatilidade, e sabemos que para contratos de vencimentos mais curtos esta é bem maior que para vencimentos mais longos.

#	$(T - t)$											
	11				54				94			
	K	C_e	C_a	$P(\%)$	K	C_e	C_a	$P(\%)$	K	C_e	C_a	$P(\%)$
1	13.250	5.035	5.218	1.036	16.250	7.240	7.391	1.021	15.250	8.633	8.763	1.015
2	13.500	4.857	5.047	1.039	16.500	7.087	7.236	1.021	15.500	8.489	8.612	1.014
3	13.750	4.682	4.881	1.042	16.750	6.934	7.093	1.023	15.750	8.347	8.448	1.012
4	14.000	4.510	4.720	1.047	17.000	6.784	6.947	1.024	16.000	8.206	8.349	1.017
5	14.250	4.342	4.559	1.050	17.250	6.636	6.767	1.020	16.250	8.066	8.229	1.020
6	14.500	4.176	4.405	1.055	17.500	6.491	6.618	1.020	16.500	7.928	8.094	1.021
7	14.750	4.015	4.241	1.056	17.750	6.347	6.517	1.027	16.750	7.791	7.974	1.023
8	15.000	3.857	4.095	1.062	18.000	6.205	6.382	1.028	17.000	7.656	7.836	1.024
9	15.250	3.703	3.958	1.069	18.250	6.066	6.243	1.029	17.250	7.522	7.685	1.022
10	15.500	3.552	3.815	1.074	18.500	5.928	6.120	1.032	17.500	7.390	7.565	1.024
11	15.750	3.404	3.670	1.078	18.750	5.793	6.015	1.038	17.750	7.259	7.462	1.028
12	16.000	3.261	3.538	1.085	19.000	5.659	5.872	1.038	18.000	7.129	7.330	1.028
13	16.250	3.121	3.398	1.089	19.250	5.527	5.763	1.043	18.250	7.002	7.207	1.029
14	16.500	2.984	3.257	1.092	19.500	5.396	5.645	1.046	18.500	6.876	7.040	1.024
15	16.750	2.851	3.096	1.086	19.750	5.268	5.539	1.052	18.750	6.751	6.868	1.017
16	17.000	2.721	2.949	1.083	20.000	5.142	5.404	1.051	19.000	6.628	6.736	1.016
17	17.250	2.596	2.820	1.087	20.250	5.018	5.265	1.049	19.250	6.507	6.643	1.021
18	17.500	2.474	2.689	1.087	20.500	4.895	5.149	1.052	19.500	6.386	6.512	1.020
19	17.750	2.356	2.560	1.087	20.750	4.775	5.031	1.054	19.750	6.267	6.405	1.022
20	18.000	2.242	2.442	1.089	21.000	4.657	4.906	1.054	20.000	6.149	6.228	1.013
21	18.250	2.131	2.321	1.089	21.250	4.540	4.772	1.051	20.250	6.034	6.117	1.014
22	18.500	2.024	2.206	1.090	21.500	4.425	4.640	1.048	20.500	5.919	6.014	1.016
23	18.750	1.921	2.075	1.080	21.750	4.312	4.545	1.054	20.750	5.807	5.906	1.017
24	19.000	1.821	1.985	1.090	22.000	4.201	4.420	1.052	21.000	5.695	5.794	1.017
25	19.250	1.726	1.885	1.092	22.250	4.092	4.309	1.053	21.250	5.585	5.658	1.013
26	19.500	1.634	1.783	1.092	22.500	3.985	4.195	1.053	21.500	5.476	5.589	1.021
27	19.750	1.546	1.688	1.092	22.750	3.879	4.081	1.052	21.750	5.369	5.438	1.013
28	20.000	1.462	1.608	1.100	23.000	3.775	3.974	1.053	22.000	5.263	5.332	1.013
29	20.250	1.381	1.521	1.101	23.250	3.674	3.880	1.056	22.250	5.158	5.218	1.012
30	20.500	1.304	1.435	1.100	23.500	3.574	3.768	1.054	22.500	5.055	5.113	1.012

Tabela 6.7: *American Crack Spread Options - 1 WTI : 30 RBOB*

Capítulo 7

Conclusões

Ao longo do trabalho, empregamos esforços na construção de um *framework* para a precificação de derivativos exóticos nos mercados futuros de petróleo e seus derivados, partindo de uma análise exploratória dos dados até chegar na calibragem e testes dos modelos em casos práticos.

Durante o Capítulo 2, revisitamos as propriedades estatísticas dos dados, ilustrando fatos estilizados como as altas volatilidades em comparação com os mercados de ações, o Efeito Samuelson, a sazonalidade da volatilidade e as complexas estruturas de correlações entre os contratos de vencimentos distintos.

No Capítulo 3, selecionamos alguns dos principais modelos para os preços à vista e *forward*. Optamos por aprofundar os estudos na segunda classe de modelos, dada a sua compatibilidade direta com a curva de preços futuros, característica desejável quando lidamos com a precificação de derivativos. Assumimos a existência de taxa de juros livre de risco determinística e constante, hipótese sob a qual os preços *forward* são equivalentes aos preços futuros. Embora esta não seja uma hipótese realista, nos valem do fato de que os preços das opções são mais sensíveis à volatilidade dos ativos subjacentes do que às taxas de juros. No entanto, esta premissa poderia não ser adequada para a precificação de opções com vencimentos muito longos. Obviamente, a premissa de uma taxa de juros determinística também não seria adequada caso a finalidade dos modelos calibrados fosse a precificação de derivativos envolvendo *commodities* e taxas de juros simultaneamente. Contratos deste tipo poderiam ser usados, por exemplo, para proteger produtores de um descasamento de receitas – dependentes dos preços das *commodities* – e dívidas – potencialmente dependentes de taxas de juros de mercado. Assim, uma evolução natural do trabalho seria a incorporação de taxas de juros variáveis e até mesmo estocásticas aos modelos.

Prosseguindo, no Capítulo 4 apresentamos diversas alternativas para a estrutura de volatilidade dos modelos. Para ganharmos um pouco mais de intuições acerca do problema, iniciamos calibrando à dados históricos o modelo de Cortazar-Schwartz, usando a técnica de análise de componentes principais. Dos resultados intermediários da modelagem podemos observar aspectos relativos às correlações entre os contratos de diversos vencimentos, ao formato e tendência das curvas de futuros, e à complexidade do mercado em termos da quantidade de fontes de incerteza atuantes, matematicamente expressa pela quantidade de componentes principais necessárias para capturar altos níveis de variância. Embora nos testes com dados de mercado os resultados da calibragem à dados históricos tenham se mostrado insatisfatórios para fins práticos, recordamos o fato de que este tipo de calibragem pode ser uma alternativa quando

preços de opções não estiverem disponíveis para uma calibragem implícita.

Para melhorar os resultados produzidos pelo modelo calibrado a dados históricos, revisitamos no Capítulo 4 a noção de volatilidade implícita e como esta pode ser utilizada para formularmos um problema inverso de calibragem. Também introduzimos o modelo de Black para opções sobre futuros, uma espécie de padrão de mercado. Partindo de uma modelagem determinística para a volatilidade e recorrendo às intuições obtidas na análise exploratória dos dados, propusemos uma série de estruturas de volatilidade, e apresentamos os seus respectivos métodos de calibragem. Mostramos que, em casos como o do petróleo, cuja volatilidade não apresenta fortes traços sazonais, modelá-la como função exclusiva do tempo ao vencimento pode ser uma alternativa viável, com o grande benefício de poder ser calibrada facilmente a partir de um processo simples de *bootstrapping*. Infelizmente, esta abordagem mostrou-se inadequada para o caso do gás, *commodity* cuja sazonalidade da volatilidade é mais marcante. Assim, propusemos estruturas de volatilidades mais sofisticadas, baseadas em formas paramétricas coerentes com o comportamento histórico e implícito da volatilidade. Visto que a calibragem de modelos desta forma recaem na resolução de problemas de otimização não lineares e não convexos, nos deparamos com a missão de selecionar algoritmos apropriados capazes de encontrar boas soluções locais. Com 4% e 10% de erro na precificação via Monte Carlo de opções de petróleo e gás, respectivamente, acreditamos ter alcançado resultados satisfatórios, mas que podem ser aprimorados a partir da utilização de algoritmos de otimização mais apropriados e do refinamento dos métodos numéricos utilizados para simular as SDEs.

Ao ampliarmos a bateria de testes incluindo opções não utilizadas na calibragem, os erros aumentaram para a casa de 20% no caso do petróleo, o que deve-se à incapacidade do modelo de lidar com um importante fato estilizado de mercado, o *smile* de volatilidade. Assim, movemos adiante para alcançar o que julgamos ser a maior contribuição deste trabalho: uma formulação do modelo de volatilidade estocástica de Heston para curvas *forward* de uma ou mais *commodities*.

Revisitamos os argumentos de Heston e suas explicações de como seu modelo pode ser utilizado para produzir uma grande família de distribuições para os retornos, algo bastante útil para o mercado de *commodities*, tendo em vista a sua baixa aderência a hipótese de normalidade. Reformulamos o modelo de Heston adicionando múltiplas fontes de incerteza para a equação dos preços, e buscando um modelo parcimonioso, recorreremos às intuições financeiras e baseadas na análise histórica para escolher quais dos parâmetros devem ser próprios de cada contrato, e quais parâmetros devem ser compartilhados.

Visto que os dados disponíveis para calibragem, opções de compra européias e americanas, quotam apenas a volatilidade, calibramos as correlações entre os retornos dos contratos futuros a dados históricos, recorrendo a análise de componentes principais reduzir a dimensionalidade do modelo, artifício importante quando modelamos os preços em horizontes de tempo muito longos, ou quando modelamos múltiplas curvas conjuntamente. Para uma “calibragem de mercado” completa no caso de uma única *commodity*, uma alternativa futura seria a calibragem das correlações a partir das *calendar spread options*, observando que para que isso seja interessante, tais opções necessitam de liquidez, o que precisa ser melhor investigado. Para o caso de duas *commodities*, as *crack spread options* poderiam cumprir este papel, feita a mesma ressalva da

liquidez.

Calibramos a nossa formulação do modelo de Heston para curvas *forward* e comparamos seus resultados na precificação das mesmas opções usadas nos testes dos modelos de volatilidade determinística. Os resultados mostraram a superioridade do modelo de volatilidade estocástica, validando tanto o modelo quanto os mecanismos de calibragem. Na sequência, no Capítulo 6 complementamos o nosso *framework* para a precificação de derivativos exóticos revisitando temas como o Método de Monte Carlo, soluções numéricas de SDEs, e o método de Longstaff e Schwartz para a precificação de contratos contingenciados de exercício americano, bastante comuns no mercado de *commodities*. Do ponto de vista dos compradores das opções, o *framework* poderia ser complementado ainda com métodos para determinação das fronteiras de exercício das opções, enquanto que do ponto de vista dos emissores, com métodos de *hedging* sob o modelo apresentado. Estas duas frentes seriam extensões bastante desejáveis deste trabalho. De posse dos modelos calibrados, executamos baterias de simulações para a precificação de contratos exóticos bastante populares nos mercados de petróleo, como as opções asiáticas, as *calendar spread options* e as *crack spread options* entre petróleo e gasolina.

Concluimos que o mercado de *commodities* de energia é bastante interessante e desafiador dos pontos de vista matemático e computacional. Assim como é amplo o conjunto de contratos a serem precificados, é amplo o conjunto de modelos que podem ser utilizados. Não devemos nos deixar seduzir pela complexidade de alguns deles, tampouco subestimar a simplicidade de outros. O ponto chave está em selecionar o modelo mais adequado para cada caso, não perdendo de vista que a realidade deve prevalecer. Afinal, um modelo é apenas um modelo, e há quem alegue que todos eles estão errados. No entanto, alguns são úteis. Com isso em mente, tempo e dinheiro poderão ser salvos!

Apêndice A

Códigos em R

```
1 #####
2 # File: lib.pfc.options.r
3 # Main library for heston forward model calibration
4 #####
5
6 #####
7 #Dependencies
8 #####
9 library(zoo)
10 library(tseries)
11 library(timeDate)
12 library(RQuantLib)
13 library(pracma)
14 library(MASS)
15 library(NMOF)
16 library(nloptr)
17
18 #####
19 # > underlying_and_option_tau
20 # Return time to maturity in days of first Nf futures and respective options
21 #####
22
23 #Return time to maturity in days of first Nf futures and respective options
24 underlying_and_option_tau = function(date, underlying_exp_day, options_exp_before, Nf, month_length)
25 {
26   #Trade date
27   day_int = as.numeric(format(date, "%d"))
28   month_str = format(date, "%m")
29   year_str = format(date, "%Y")
30
31   #Maturity date of nearby future contract
32   if (day_int <= underlying_exp_day){
33     exp_date = as.Date(paste(year_str, month_str, underlying_exp_day, sep="-"))
34   }else{
35     exp_date = as.Date(timeLastDayInMonth(date)) + underlying_exp_day
36   }
37
38   #Time do Maturity of first Nf contracts and Options
39   tau_0 = as.numeric(businessDaysBetween("UnitedStates",date, exp_date)) + 1
40   u_tau = matrix(c(tau_0, tau_0 + month_length * seq(1:(Nf-1))),ncol=1)
41   o_tau = u_tau - options_exp_before
42
43   #Return
44   invisible(list(u_tau=u_tau, o_tau=o_tau))
45 }
46 }
47
48 #####
49 # > options.prepare
50 # Prepare data structure with relevant data from a CME EndOfDay datafile
51 #####
52 options.prepare = function(o_filename, u_filename, Nf, date){
```

```

53 #Options
54 option_file_columns = c(1,4,9,10,11,12,17,14,69,70)
55 o = read.csv(file=o_filename, header=T, sep=",")
56 o = na.omit(o[,option_file_columns])
57 o$Trade.Date = as.Date(paste(o$Trade.Date), format="%Y%m%d")
58 o$Last.Trade.Date = as.Date(paste(o$Last.Trade.Date), format="%Y%m%d")
59 o$Strike.Price = o$Strike.Price
60
61
62 #Only options with valid implied vol
63 o = o[o$Implied.Volatility > 0,]
64
65 #Select options os first Nf futures
66 contracts_Nf = unique(o[,c("Contract.Year", "Contract.Month")])[1:Nf,]
67 min_month = head(contracts_Nf, n=1)$Contract.Month
68 min_year = head(contracts_Nf, n=1)$Contract.Year
69 max_month = tail(contracts_Nf, n=1)$Contract.Month
70 max_year = tail(contracts_Nf, n=1)$Contract.Year
71 o_Nf_rows = (o$Contract.Year < max_year) | (o$Contract.Year == max_year & o$Contract.Month <= max_
month)
72 o_Nf = o[o_Nf_rows,]
73
74 #Underlying
75 u = read.csv(file=u_filename, header=T, sep=",")
76 u = na.omit(u)
77 u$Date = as.Date(paste(u$Date), format="%Y-%m-%d")
78
79 #Underlying prices of specific date
80 u_prices = u[u$Date==date, -c(1)]
81
82 #Auxiliar Structures
83 u_ = matrix(numeric(0), ncol=1, nrow=0)
84 u_tau_ = matrix(numeric(0), ncol=1, nrow=0)
85 o_tau_ = matrix(numeric(0), ncol=1, nrow=0)
86 colnames(u_) = "Underlying.Price"
87 colnames(u_tau_) = "Underlying.Tau"
88 colnames(o_tau_) = "Option.Tau"
89
90 #Append Underlying Price, Underlying Tau and Option Tau to the Option Data
91 j = 1
92 l_month = o_Nf[1, "Contract.Month"]
93 l_year = o_Nf[1, "Contract.Year"]
94 for(i in 1:nrow(o_Nf)){
95   c_month = o_Nf[i, "Contract.Month"]
96   c_year = o_Nf[i, "Contract.Year"]
97   if (c_month != l_month | c_year != l_year){
98     l_month = c_month
99     l_year = c_year
100    j = j + 1
101   }
102   u_ = rbind(u_, as.numeric(u_prices[j]))
103   u_tau_ = rbind(u_tau_, 0)
104   o_tau_ = rbind(o_tau_, as.numeric(businessDaysBetween("UnitedStates", o_Nf[i, "Trade.Date"], o_Nf[
i, "Last.Trade.Date"]))) + 1)
105 }
106 ou_Nf = cbind(o_Nf, u_, u_tau_, o_tau_)
107
108 invisible(ou_Nf)
109
110 }
111
112
113 #####
114 # > atm.udist
115 # Identify ATM Options based on the distance between Strike and Underlying Prices
116 #####
117
118 atm.udist = function(o_Nf){
119
120 #Auxiliar Variables
121 j = 1
122 distances = abs(o_Nf[, "Underlying.Price"] - o_Nf[, "Strike.Price"])
123 atm_flags = matrix(numeric(0), ncol=1, nrow=nrow(o_Nf))
124 colnames(atm_flags) = c("ATM")

```

```

125
126 #Initialization
127 atm_flags[,1] = 0
128 atm_flags[1,1] = 1
129 l_month = o_Nf[1,"Contract.Month"]
130 l_year = o_Nf[1,"Contract.Year"]
131 min_dist_index = 1
132
133 for(i in 2:nrow(o_Nf)){
134
135     #Update current contract info
136     c_month = o_Nf[i,"Contract.Month"]
137     c_year = o_Nf[i,"Contract.Year"]
138
139     #Check if the contract changed
140     if ((c_month != l_month) | (c_year != l_year)){
141         l_month = c_month
142         l_year = c_year
143         atm_flags[i,1] = 1
144         min_dist_index = i
145     }else{
146         #Compare current distance with the last one and update ATM flag if necessary
147         #if(distances[i] < distances[i-1]){
148         if(distances[i] < distances[min_dist_index]){
149             atm_flags[min_dist_index:i-1,1] = 0
150             atm_flags[i,1] = 1
151             min_dist_index = i
152         }
153     }
154
155 }
156 o = cbind(o_Nf, atm_flags)
157 invisible(o)
158
159 }
160
161
162 #####
163 # > par.sigma.seasonality & par.integrated.sigma.seasonality
164 # Constant by parts version
165 #####
166 par.sigma.seasonality = function(mu, alpha, beta, gamma, delta, tau){
167     s = (alpha+beta*tau)*exp(gamma*tau)+delta
168     s = s * mu
169     invisible(s)
170 }
171
172 par.integrated.sigma.seasonality = function(mu, alpha, beta, gamma, delta, tau){
173     s = matrix(ncol=1, nrow=length(tau))
174     for(k in 1:length(tau)){
175         sum_ = 0
176         for(j in 1:k){
177             if(j==1){
178                 sum_ = sum_ + tau[j] * ((alpha+beta*tau[j])*exp(gamma*tau[j])+delta)^2
179             }
180             else{
181                 sum_ = sum_ + (tau[j]-tau[j-1]) * ((alpha+beta*tau[j])*exp(gamma*tau[j])+delta)^2
182             }
183         }
184         s[k,1] = sqrt( (1/tau[k]) * mu[k]^2 * sum_)
185     }
186     invisible(as.numeric(s))
187 }
188
189 #####
190 # > span.integrated.sigma.seasonality
191 # Span the constant by parts volatility in a daily time grid
192 #####
193 span.integrated.sigma.seasonality = function(vols_by_parts, tau, Tmax){
194     h = seq(1:Tmax)/252
195     v = matrix(numeric(0),nrow = length(h), ncol = 1)
196     j = 1
197     for(i in 1:length(h)){
198         if(h[i] <= tau[j]){

```

```

199     v[i,1] = vols_by_parts[j]
200   }
201   else{
202     j = j + 1
203     v[i,1] = vols_by_parts[j]
204   }
205 }
206 invisible(v)
207 }
208
209 #####
210 # > integrated.sigma.seasonality.obj
211 # Objective function related to integrated.sigma.seasonality
212 #####
213 integrated.sigma.seasonality.obj = function(par, tau, vols, regFactor){
214
215   alpha = par[1]
216   beta = par[2]
217   gamma = par[3]
218   delta = par[4]
219   mu = par[5:(5+length(tau)-1)]
220
221   model_vols = par.integrated.sigma.seasonality(mu, alpha, beta, gamma, delta, tau)
222
223   reg = norm(matrix(par))
224   e = sum((vols - model_vols)^2) + regFactor * reg^2
225   invisible(e)
226 }
227
228 #####
229 # > fit.parametric.sigma.seasonality
230 # Fit parametric.sigma.seasonality using NLOPTR package
231 #####
232 fit.parametric.sigma.seasonality = function(start_params, data){
233   alg = "NLOPT_LN_NEWUOA"
234   or = nloptr(
235     x0=start_params,
236     eval_f=integrated.sigma.seasonality.obj,
237     tau = data$tau,
238     vols = data$vols,
239     regFactor = data$regFactor,
240     opts = list("algorithm"=alg, "xtol_rel"=1.0e-8, maxeval=5000)
241   )
242   invisible(or)
243 }
244
245 #####
246 # > SDE.solve
247 # Solve a driftless SDE using Euler or Milstein method
248 #####
249 SDE.solve = function(t0=0, T=1, X0=1, N.t=100, sigma, method=c("euler", "milstein"), B=NULL){
250
251   #Select Method
252   if(missing(method)){
253     method = "euler"
254   } else{
255     method = match.arg(method)
256   }
257
258   # Spans the time range
259   t = seq(t0, T, length=(N.t+1))
260
261   # Calculates time discretization step
262   dt = (T-t0)/N.t
263   sqrt.dt = sqrt(dt)
264
265   # Pre-allocates a matrix with N.t+1 rows for X
266   Z = B
267   X = matrix(ncol=ncol(Z), nrow=(N.t+1))
268
269   # First X value is X0
270   X[1,] = X0
271
272   sigma_ = sigma

```

```

273
274 # Generates a sample path from SDE solution's X with chosen method
275 if(method=="euler"){
276
277     for(i in 2:(N.t+1)){
278         drift__ = 0
279         sigma__ = sigma_[i-1]* X[i-1,]
280         X[i,] = X[i-1,] + drift__*dt + sigma__*sqrt.dt*Z[i-1,]
281     }
282
283 } else if(method=="milstein"){
284
285     for(i in 2:(N.t+1)){
286         drift__ = 0
287         sigma__ = sigma_[i-1]*X[i-1,]
288         sigma.x__ = sigma_[i-1]
289         X[i,] = X[i-1,] + drift__*dt + sigma__*sqrt.dt*Z[i-1,] +
290             (1/2)*sigma__*sigma.x__*(dt*Z[i-1,]^2 - dt)
291     }
292 }
293
294 invisible(X)
295 }
296
297 #####
298 # > price.paths
299 # Create the price trajectories
300 #####
301 price.paths = function(X0, sigma, t0, Tmax, dt, N.MC, N.MC.delta, method){
302
303     # Number of groups of Monte Carlo simulations to be computed simultaneously
304     N.MC.groups = floor(N.MC/N.MC.delta)
305
306     # Number of steps
307     N.t = round(Tmax/dt)
308
309     #Random Variables
310     Z1 = matrix(rnorm(N.t*N.MC), ncol=N.MC, nrow=N.t)
311
312     # Simulate paths via Euler and Milstein methods
313     paths = matrix(ncol=N.MC, nrow=(N.t+1))
314
315     # Loop to create price paths via Euler and Milstein
316     for(i in 1:N.MC.groups){
317
318         #print(paste("Simulating ",i, "..."))
319         indexes = ((i-1)*N.MC.delta+1):(max(i*N.MC.delta-1, N.MC))
320
321         if (method == "euler"){
322             method = "euler"
323             call.euler = SDE.solve(t0=t0, T=Tmax, X0=X0, N.t=N.t, sigma=sigma, method=method, B=Z1[,
324                 indexes])
325             paths[,indexes] = call.euler
326         }else{
327             method = "milstein"
328             call.milstein = SDE.solve(t0=t0, T=Tmax, X0=X0, N.t=N.t, sigma=sigma, method=method, B=Z1[,
329                 indexes])
330             paths[,indexes] = call.milstein
331         }
332     }
333
334     invisible(paths)
335 }
336 #####
337 # > price.MC
338 # Price an european call via MonteCarlo given price trajectories, r, K and tau
339 #####
340 price.MC = function (final_prices, r, K, tau){
341     payoff = function(s){eval(max(s-K, 0))}
342     final_payoffs = sapply(final_prices, payoff)
343     p = exp(-r*tau)*mean(final_payoffs)
344     invisible(p)

```

```

345 }
346
347
348 #####
349 # > heston.foward.milstein.variance
350 # # Simulate the forward heston model variance equation using Milstein method
351 #####
352 heston.foward.milstein.variance = function(t0=0, T=1, dt=0.001, B=NULL, k, theta, alpha_i, sigma){
353
354 #Reference equation
355 #dYi(t) = K (theta*alpha_i - Yi(t)) dt + sigma*alpha_i*sqrt(Yi(t)) dWv(t)
356
357 #Time range and discretization
358 sqrt.dt = sqrt(dt) # for saving computation, pre-computes sqrt(dt)
359 N.t = round((T-t0)/dt)
360
361 # Pre-allocates a matrix with N.t+1 rows for X
362 Z = B
363 X = matrix(ncol=ncol(Z), nrow=(N.t+1))
364
365 #Initial Variance
366 X[1,] = alpha_i^2
367
368 #Milstein Method with full-truncation to avoid negative variance
369 for(i in 2:(N.t+1)){
370   drift__ = k*(theta*alpha_i^2 - X[i-1,])
371   sigma__ = sigma*alpha_i*sqrt(X[i-1,])
372   sigma.x__ = sigma*alpha_i*0.5*(1/sqrt(X[i-1,]))
373   X[i,] = X[i-1,] + drift__*dt + sigma__*sqrt.dt*Z[i-1,]
374   + (1/2)*sigma__*sigma.x__*(dt*Z[i-1,]^2 - dt)
375   X[i,] = apply(matrix(X[i,],ncol=ncol(Z),nrow=1),2,"max",0)
376 }
377
378 invisible(X)
379
380 }
381
382 #####
383 # > heston.foward.milstein.price
384 # Simulate the forward heston model price equation using Milstein method
385 #####
386 heston.foward.milstein.price = function(t0=0, T=1, dt=0.001, B=NULL, F0, variance){
387
388 #Reference equation
389 #dF(t,Ti) = sqrt(Yi(t)) F(t,Ti) dWi(t)
390
391 #Time range and discretization
392 sqrt.dt = sqrt(dt)
393 N.t = round((T-t0)/dt)
394
395 Z = B # matrix of N(0,1) samples to simulate brownian motion
396 X = matrix(ncol=ncol(Z), nrow=(N.t+1)) # pre-allocates a matrix with N.t+1 rows for X
397
398 #Initial Price
399 X[1,] = F0
400
401 #Milstein Method
402 for(i in 2:(N.t+1)){
403   drift__ = 0
404   sigma__ = sqrt(variance[i])*X[i-1,]
405   sigma.x__ = sqrt(variance[i])
406   X[i,] = X[i-1,] + drift__*dt + sigma__*sqrt.dt*Z[i-1,]
407   + (1/2)*sigma__*sigma.x__*(dt*Z[i-1,]^2 - dt)
408 }
409
410 invisible(X)
411
412 }
413
414 #####
415 # > heston.foward.price.paths
416 # Create price trajectories based on a Forward Heston Model
417 #####
418 heston.foward.price.paths = function(t0=0, Tmax, dt, N.MC, N.MC.delta, F0, par, a_i, i){

```

```

419 #Get model params
420 M = length(a_i)
421 alpha_i = par[1:M][i]
422 rho = par[(M+1):(2*M)]
423 k = par[2*M+1]
424 theta = par[2*M+2]
425 sigma = par[2*M+3]
426
427
428 # number of groups of Monte Carlo simulations to be computed simultaneously
429 N.MC.groups = floor(N.MC/N.MC.delta)
430
431 # number of steps
432 N.t = round(Tmax/dt)
433
434 #Random Variables
435 print("Generating correlated random samples")
436 rho_i_v = sum(a_i*rho)
437 Z1 = rnorm(N.t*N.MC)
438 Z2 = rho_i_v*(Z1)+sqrt(1-rho_i_v^2)*rnorm(N.t*N.MC)
439 Z1 = matrix(Z1, ncol=N.MC, nrow=N.t)
440 Z2 = matrix(Z2, ncol=N.MC, nrow=N.t)
441
442 # Simulate paths via Euler and Milstein methods
443 print("Pre-allocating space for price paths")
444 paths = matrix(ncol=N.MC, nrow=(N.t+1))
445
446 # Loop to create price paths via Euler and Milstein
447 for(i in 1:N.MC.groups){
448   indexes = ((i-1)*N.MC.delta+1):(max(i*N.MC.delta-1, N.MC))
449   print("MC Loop: Variance...")
450   variance = heston.foward.milstein.variance (t0=0, T=Tmax, dt=dt, B=Z1[,indexes], k, theta, alpha
         _i, sigma)
451   print("MC Loop: Price...")
452   prices = heston.foward.milstein.price (t0=0, T=Tmax, dt=dt, B=Z2[,indexes], F0=F0, variance=
         variance)
453   paths[,indexes] = prices
454 }
455
456 invisible(paths)
457 }
458 }
459
460
461
462 #####
463 # > obj.heston.foward
464 # Forward Heston Model Objective Function
465 #####
466 obj.heston.foward = function (par, options, r, Corr, type, min_flutuatiou){
467
468   #Maturities of contracts being modeled
469   maturities = unique(options$Option.Tau)
470
471   #Number of contracts being modeled
472   M = ncol(Corr)
473
474   #Parameters
475   alpha = par[1:M]
476   rho = par[(M+1):(2*M)]
477   k = par[2*M+1]
478   theta = par[2*M+2]
479   sigma = par[2*M+3]
480
481   #Error Vector
482   ev = matrix(numeric(0),ncol=1,nrow=0)
483
484   o = options
485   for (q in 1:nrow(o)){
486
487     #Option
488     Ti = o[q,]$Option.Tau
489     i = which(maturities == Ti)
490

```

```

491 #Correlation Matrix Line
492 a = Corr[i,]
493
494 #Market Price
495 if (type == "american"){
496   #If given price is american, find the equivalent European
497   cMkt = vanillaOptionEuropean(
498     S=o[q,]$Underlying.Price, X=o[q,]$Strike.Price,
499     tau=o[q,]$Option.Tau/252, r=r, q=r, v=o[q,]$Implied.Volatility^2,
500     tauD=0, D=0, type="call", greeks=FALSE
501   )
502 }else{
503   cMkt = o[q,]$Settlement
504 }
505
506 #Market Implied Vol
507 vMkt = o[q,]$Implied.Volatility
508
509 c = tryCatch(
510   callHestoncf(
511     S = o[q,]$Underlying.Price, X = o[q,]$Strike.Price,
512     tau = o[q,]$Option.Tau/252, r = r, q = r,
513     v0 = alpha[i]^2, vT = theta*alpha[i]^2,
514     rho = sum(a*rho), k = k, sigma = sigma,
515     implVol = FALSE
516   ),error=function(cond)Inf
517 )
518
519 cMod = max(c[[1L]],min_flutuation)
520 ev = rbind(ev, abs(cMod-cMkt)/cMkt)
521
522 }
523
524 invisible(mean(ev))
525
526 }
527
528 #####
529 # > ineq.constraints.heston.foward
530 # Inequality Constraints for Forward Heston Model Calibration
531 #####
532 ineq.constraints.heston.foward = function(par, options, r, Corr, type, min_flutuation){
533
534   maturities = unique(options$Option.Tau)
535   M = ncol(Corr)
536   alpha = par[1:M]
537   rho = par[(M+1):(2*M)]
538   k = par[2*M+1]
539   theta = par[2*M+2]
540   sigma = par[2*M+3]
541
542   ineq.constraints = matrix(numeric(0),ncol=1,nrow=0)
543
544   for (i in 1:M){
545     a = Corr[i,]
546     ineq.constraints = rbind(ineq.constraints, sum(a*rho) - 1, - sum(a*rho) - 1)
547     ineq.constraints = rbind(ineq.constraints, -sigma*alpha[i] + 0.001)
548     ineq.constraints = rbind(ineq.constraints, -theta*alpha[i]^2 + 0.001)
549   }
550
551   invisible(ineq.constraints)
552 }
553
554 #####
555 # > fit.heston.foward
556 # Fit the Forward Heston Model using NLOPTR package
557 #####
558 fit.heston.foward = function (par, options, r, Corr, type, min_flutuation){
559
560   #Optimization Algorithm
561   alg = "NLOPT_LN_COBYLA"
562
563   #Run Optimization
564   or = nloptr(

```

```

565     x0 = par,
566     eval_f = obj.heston.foward,
567     eval_g_ineq = ineq.constraints.heston.foward,
568     options = options,
569     r = r,
570     Corr = Corr,
571     type = type,
572     min_flutuauation = min_flutuauation,
573     opts = list("algorithm"=alg, "xtol_rel"=1.0e-4, maxeval=2000, ftol_rel=1.0e-4, stopval=0.05),
574     lb = c(alpha=rep(-Inf,M), rho=rep(-1,M), k=0.001, theta=-Inf, sigma=0.00001),
575     ub = c(alpha=rep(Inf,M), rho=rep(1,M), k=Inf, theta=Inf, sigma=Inf)
576 )
577 invisible(or)
578
579 }
580
581 #####
582 # > select_N_strikes
583 # Select N options of contracts of a given maturity
584 #####
585 select_N_strikes = function(o, maturities, N = 30){
586   o_N = matrix(numeric(0),nrow=0, ncol=ncol(o))
587   for (i in maturities){
588     o_i = o[o$Option.Tau==i,]
589     o_i = o_i[seq(1,nrow(o_i),by=ceil(nrow(o_i)/N)),]
590     o_N = rbind(o_N, o_i)
591   }
592   invisible(o_N)
593 }
594
595 #####
596 # > load_correlation_matrix
597 # Load the correlation matrix from a file
598 #####
599 load_correlation_matrix = function(A_c_file, A_maturities){
600
601   #Load complete correlation matrices (all vertices)
602   AC_ = read.csv(file=A_c_file)[,-c(1)]
603
604   #Pre-allocate matrices
605   MA = length(A_maturities)
606   AC = matrix(numeric(0),nrow=MA,ncol=MA)
607
608   #Load Correlation Matrix of 1st Commodity
609   cix = expand.grid(A_maturities,A_maturities)
610   k = 1
611   for(i in 1:MA){
612     for(j in 1:MA){
613       AC[i,j]=AC_[cix[k,1],cix[k,2]]
614       AC[j,i]=AC[i,j]
615       k = k + 1
616     }
617   }
618
619   invisible(AC)
620 }
621
622 #####
623 # > create_correlation_heston_2
624 # Create correlation matrix for joint forward heston model
625 #####
626 create_correlation_heston_2 = function(A_c_file, B_c_file, A_maturities, B_maturities){
627
628   #Load complete correlation matrices (all vertices)
629   AC_ = read.csv(file=A_c_file)[,-c(1)]
630   BC_ = read.csv(file=B_c_file)[,-c(1)]
631
632   #Pre-allocate matrices
633   MA = length(A_maturities)
634   MB = length(B_maturities)
635   AC = matrix(numeric(0),nrow=MA,ncol=MA)
636   BC = matrix(numeric(0),nrow=MB,ncol=MB)
637
638   #Load Correlation Matrix of 1st Commodity

```

```

639   cix = expand.grid(A_maturities,A_maturities)
640   k = 1
641   for(i in 1:MA){
642     for(j in 1:MA){
643       AC[i,j]=AC_[cix[k,1],cix[k,2]]
644       AC[j,i]=AC[i,j]
645       k = k + 1
646     }
647   }
648
649   #Load Correlation Matrix of 2nd Commodity
650   cix = expand.grid(B_maturities,B_maturities)
651   k = 1
652   for(i in 1:MB){
653     for(j in 1:MB){
654       BC[i,j]=BC_[cix[k,1],cix[k,2]]
655       BC[j,i]=BC[i,j]
656       k = k + 1
657     }
658   }
659
660   #Run decomposition for each correlation matrix
661   EVA = eigen(AC)
662   EVB = eigen(BC)
663   EVAB = cbind(EVA$vector[,1:(MA/2)], EVB$vector[,1:(MB/2)])
664   C = cor(EVAB)
665
666   invisible(C)
667
668 }

```

../impl/final/lib.pfc.options.r

```

1  #####
2  # File: options.heston.r
3  # Calibrate the Heston Forward Model for 12 futures of WTI
4  #####
5
6  #####
7  #Dependencies
8  #####
9  source("lib.pfc.options.r")
10
11 #####
12 # Calibration specs and parameters
13 #####
14 Nf = 12
15 u_filename = "data/CL.vert.csv"
16 c_file = "data/cl_500_correlation.csv"
17 prefix = "L0"
18 type="american"
19 min_flutuation=0.01
20 start_par = c(alpha=rep(0.2,M), rho=rep(-0.02,M), k=0.1, theta=1, sigma=0.17)
21
22 #####
23 #Results and Auxiliar Matrices
24 #####
25 battery = matrix(numeric(0),ncol=5,nrow=0)
26
27 #####
28 #Test Date
29 #####
30 d = "2013-08-01"
31
32 #####
33 #Initial Solution
34 #####
35 start_par = c(alpha=rep(0.2,M), rho=rep(-0.02,M), k=0.1, theta=1, sigma=0.17)
36
37 #####
38 #Run the calibration ...
39 #####
40 date = as.Date(d)

```

```

41 str_date = strftime(date,format="%Y%m%d")
42 o_filename = paste("data/cme/", prefix, "/", prefix, "_", str_date, ".csv", sep="")
43
44 if(file.exists(o_filename)){
45
46     #Prepare option data
47     print(paste("Preparing option data for day",str_date))
48     o = options.prepare (o_filename, u_filename, Nf, date)
49
50     #Only Calls
51     o_calls = o[o$Put.Call=="C", ]
52
53     #Select a maximum of 30 strikes per maturity
54     maturities = unique(o_calls$Option.Tau)
55     M = length(maturities)
56     o_calls_30 = matrix(numeric(0),nrow=0, ncol=ncol(o_calls))
57     for (i in maturities){
58         o_calls_i = o_calls[o_calls$Option.Tau==i,]
59         o_calls_i = o_calls_i[seq(1,nrow(o_calls_i),by=ceil(nrow(o_calls_i)/30)),]
60         o_calls_30 = rbind(o_calls_30, o_calls_i)
61     }
62
63     #Prepare Correlation Data
64     print("Loading Correlation Matrix")
65     C_ = read.csv(file=c_file)[,-c(1)]
66     C = matrix(numeric(0),nrow=M,ncol=M)
67     cix = expand.grid(maturities,maturities)
68     k = 1
69     for(i in 1:M){
70         for(j in 1:M){
71             C[i,j]=C_[cix[k,1],cix[k,2]]
72             C[j,i]=C[i,j]
73             k = k + 1
74         }
75     }
76
77     #Fit parameters via optimization
78     f = fit.heston.foward (par=start_par, options=o_calls_30, r=0.035, Corr=C, type=type, min_
79         flutuuation=min_flutuuation)
80
81     #Test the model!
82     batery = test.heston.foward(o=o_calls_30, f=f, Corr=C, type=type, r = 0.035, min_flutuuation=min_
83         flutuuation)
84 }

```

../impl/final/options.heston.r

```

1 #####
2 # File: options.heston.2curves.r
3 # Joint Calibration of Heston Forward Model for 10 futures of WTI and RBOB
4 #####
5
6 #####
7 #Dependencies
8 #####
9 source("lib.pfc.options.r")
10
11 #####
12 # Calibration specs and parameters
13 #####
14 Nf = 10
15
16 # 1st Commodity: WTI
17 A_u_filename = "data/CL.vert.csv"
18 A_c_file = "data/cl_500_correlation.csv"
19 A_prefix = "L0"
20 A_type="american"
21 A_min_flutuuation=0.01
22
23 # 2nd Commodity: RBOB
24 B_u_filename = "data/RB.vert.csv"
25 B_c_file = "data/rb_500_correlation.csv"

```

```

26 B_prefix = "OB"
27 B_type="american"
28 B_min_flutuuation=0.0001
29
30 #####
31 #Results and Auxiliar Matrices
32 #####
33 A_batery = matrix(numeric(0),ncol=5,nrow=0)
34 B_batery = matrix(numeric(0),ncol=5,nrow=0)
35
36 #####
37 #Test dates
38 #####
39 d = "2013-08-01"
40
41 #####
42 #Run Calibration ...
43 #####
44
45 #Date information
46 date = as.Date(d)
47 str_date = strftime(date,format="%Y%m%d")
48
49 # 1st Commodity
50 A_o_filename = paste("data/cme/", A_prefix, "/", A_prefix, "_", str_date, ".csv", sep="")
51 B_o_filename = paste("data/cme/", B_prefix, "/", B_prefix, "_", str_date, ".csv", sep="")
52
53 if(file.exists(A_o_filename) & file.exists(B_o_filename)){
54
55     #Prepare Option for 1st Commodity
56     A_o = options.prepare (A_o_filename, A_u_filename, Nf, date)
57     A_o_calls = A_o[A_o$Put.Call=="C", ]
58     A_maturities = unique(A_o_calls$Option.Tau)
59     A_M = length(A_maturities)
60     A_o_calls_30 = select_N_strikes (A_o_calls, A_maturities, N=30)
61
62     #Prepare Option for 2nd Commodity
63     B_o = options.prepare (B_o_filename, B_u_filename, Nf, date)
64     B_o_calls = B_o[B_o$Put.Call=="C", ]
65     B_maturities = unique(B_o_calls$Option.Tau)
66     B_M = length(B_maturities)
67     B_o_calls_30 = select_N_strikes (B_o_calls, B_maturities, N=30)
68
69     #Create the Joint Correlation Matrix
70     C = create_correlation_heston_2(A_c_file, B_c_file, A_maturities, B_maturities)
71     M = Nf
72
73     #Fit parameters via optimization
74     A_start_par = c(alpha=rep(0.2,M), rho=rep(-0.02,M), k=0.1, theta=1, sigma=0.17)
75     B_start_par = c(alpha=rep(0.2,M), rho=rep(-0.02,M), k=0.1, theta=1, sigma=0.17)
76     A_f = fit.heston.foward (par=A_start_par, options=A_o_calls_30, r=0.035, Corr=C, type=A_type,
77         min_flutuuation=A_min_flutuuation)
78     B_f = fit.heston.foward (par=B_start_par, options=B_o_calls_30, r=0.035, Corr=C, type=B_type,
79         min_flutuuation=B_min_flutuuation)
80
81     #Testing the the model for both curves!
82     A_batery = test.heston.foward(o=A_o_calls_30, f=A_f, Corr=C, type=A_type, r = 0.035, min_
83         flutuuation=A_min_flutuuation)
84     B_batery = test.heston.foward(o=B_o_calls_30, f=B_f, Corr=C, type=B_type, r = 0.035, min_
85         flutuuation=B_min_flutuuation)
86
87 }
88 }

```

../impl/final/options.heston.2curves.r

```

1 #####
2 # File: options.heston.calendar.r
3 # Run Forward Heston Model for pricing WTI Calendar Spread Options
4 #####
5
6 #####

```

```

7 #Dependencies
8 #####
9 source("lib.heston.foward.mc.r")
10 source("lib.pfc.options.r")
11
12 #####
13 # Calibration specs and parameters
14 #####
15 M = 10
16
17 #####
18 # Test Date
19 #####
20 date = "2013-08-01"
21
22 #####
23 #Read Joint Model Parameters
24 #####
25 cl_heston_params = read.csv(file="data/resultados/sol_batery_heston2_clrb_cl_10_20130801.csv")[,-1]
26 par = cl_heston_params
27 cl_alpha = par[1:M]; cl_rho = par[(M+1):(2*M)]; cl_k = par[2*M+1]; cl_theta = par[2*M+2]; cl_sigma =
    par[2*M+3]
28
29 #####
30 #Read Maturities
31 #####
32 A_maturities = read.csv(file="data/resultados/maturities_heston2_clrb_cl_10_20130801.csv")[,-1]
33
34 #####
35 #Current Future Prices
36 #####
37 CL_fprices = read.csv("data/CL.vert.csv")
38 CL_fprices_d = as.numeric(CL_fprices[CL_fprices$Date==date,][-1])
39
40 #####
41 #Correlation Factors akj
42 #####
43 A = read.csv(file="data/resultados/crosscorrelation_heston2_clrb_10_20130801.csv")[,-1]
44
45 #####
46 #Monte Carlo and Milstein Params
47 #####
48 dt=0.001; N.MC=10000; N.MC.delta=10000;
49
50 #####
51 #Interest Rate
52 #####
53 r = 0.035
54
55 #####
56 #Results matrices
57 #####
58 CL_CalendarSpreadOptions = matrix(ncol=0,nrow=30)
59
60 #####
61 #Calendar Combinations
62 #####
63 path_1st_created = F
64 base_contract = 1
65
66 #####
67 # Run Tests ...
68 #####
69 for (i in 2:9){
70
71   #Expiration of 1st contract
72   Tmax_cl = A_maturities[base_contract]/252
73   Tmax_cl_i = A_maturities[i]/252
74
75   #Initial Prices
76   F0_cl = CL_fprices_d[base_contract]
77   F0_cl_i = CL_fprices_d[i]
78
79   #Initial Spread, used as ATM strike

```

```

80 KATM_cl = F0_cl - F0_cl_i
81 step = KATM_cl/15
82 KALL_cl = c(KATM_cl - seq(from=step*14,to=0,by=-step), KATM_cl+seq(from=step, to=step*15, by=step)
83 )
84 #Price Paths for CL
85 if (!path_1st_created){
86   print("Simulating CL price paths of 1st contract")
87   paths_cl = heston.foward.price.paths(t0=0, Tmax_cl, dt, N.MC, N.MC.delta, F0_cl, cl_heston_
88     params, A[base_contract,])
89   terminal_prices_cl = tail(paths_cl,n=1)
90   path_1st_created = TRUE
91 }
92 print(paste("Simulating CL price paths of the other contract", i))
93 paths_cl_i = heston.foward.price.paths(t0=0, Tmax_cl, dt, N.MC, N.MC.delta, F0_cl_i, cl_heston_
94   params, A[i,])
95 terminal_prices_cl_i = tail(paths_cl_i,n=1)
96 C_cl_all = matrix(ncol=2,nrow=0)
97 for(j in 1:30){
98   K_cl = KALL_cl[j]
99   C_cl = exp(-r*Tmax_cl)*mean(apply(terminal_prices_cl - terminal_prices_cl_i - K_cl, 2, "max", 0)
100 )
101   C_cl_all = rbind(C_cl_all, c(K_cl,C_cl) )
102 }
103 CL_CalendarSpreadOptions = cbind(CL_CalendarSpreadOptions, C_cl_all)
104 }

```

../impl/final/options.heston.calendar.r

```

1 #####
2 # File: options.heston.crack.r
3 # Run Forward Heston Model for pricing WTI x RBOB Crack Spread Options
4 #####
5
6 #####
7 #Dependencies
8 #####
9 source("lib.heston.foward.mc.r")
10
11 #####
12 # Calibration specs and parameters
13 #####
14 M = 10
15
16 #####
17 # Test Date
18 #####
19 date = "2013-08-01"
20
21 #####
22 #Read Joint Model Parameters
23 #####
24 cl_heston_params = read.csv(file="data/resultados/sol_batery_heston2_clrb_cl_10_20130801.csv")[,-1]
25 rb_heston_params = read.csv(file="data/resultados/sol_batery_heston2_clrb_rb_10_20130801.csv")[,-1]
26 par = cl_heston_params
27 cl_alpha = par[1:M]; cl_rho = par[(M+1):(2*M)]; cl_k = par[2*M+1]; cl_theta = par[2*M+2]; cl_sigma =
28   par[2*M+3]
29 par = rb_heston_params
30 rb_alpha = par[1:M]; rb_rho = par[(M+1):(2*M)]; rb_k = par[2*M+1]; rb_theta = par[2*M+2]; rb_sigma =
31   par[2*M+3]
32
33 #####
34 #Read Maturities
35 #####
36 A_maturities = read.csv(file="data/resultados/maturities_heston2_clrb_cl_10_20130801.csv")[,-1]
37 B_maturities = read.csv(file="data/resultados/maturities_heston2_clrb_rb_10_20130801.csv")[,-1]
38
39 #####
40 #Correlation Factors akj
41 #####

```

```

40 A = read.csv(file="data/resultados/crosscorrelation_heston2_clrb_10_20130801.csv")[,-1]
41
42 #####
43 #Current Future Prices
44 #####
45 CL_fprices = read.csv("data/CL.vert.csv")
46 RB_fprices = read.csv("data/RB.vert.csv")
47 CL_fprices_d = as.numeric(CL_fprices[CL_fprices$Date==date,][-1])
48 RB_fprices_d = as.numeric(RB_fprices[RB_fprices$Date==date,][-1])
49
50 #####
51 #Monte Carlo and Milstein Params
52 #####
53 dt=0.001; N.MC=10000; N.MC.delta=10000;
54
55 #####
56 #Exchange factor (1xCL vs HxRB contracts)
57 #####
58 H = 30
59
60 #####
61 #Interest Rate
62 #####
63 r = 0.035
64
65 #####
66 # Result Matrix
67 #####
68 Call_Crack_Options = matrix(ncol=0,nrow=30)
69
70 #####
71 # Run Tests ...
72 #####
73 for (i in c(1,3,5)){
74
75   #Crack Option expiration at same date of first expiration
76   Tmax = min(A_maturities[i], B_maturities[i])/252
77
78   #Initial Prices
79   FO_cl = CL_fprices_d[i]; FO_rb = RB_fprices_d[i]
80
81   #Initial Spread, used as ATM strike
82   KATM = round(FO_cl - H*FO_rb)
83   Spread = FO_cl - H*FO_rb
84
85   #Create a strike grid arround ATM strike
86   l_lower_strike = KATM-15*0.25
87   step = 0.25
88   left_strikes = seq(l_lower_strike, KATM, by=step)
89   right_strikes = seq(KATM+step, KATM+14*step, by=step)
90   KALL = c(left_strikes,right_strikes)[1:30]
91
92   #Price Paths for CL
93   print("Simulating CL price paths")
94   paths_cl = heston.foward.price.paths(t0=0, Tmax, dt, N.MC, N.MC.delta, FO_cl, cl_heston_params, A[
95     i,],i)
96   terminal_prices_cl = tail(paths_cl,n=1)
97
98   #Price Paths for RB
99   print("Simulating RB price paths")
100  paths_rb = heston.foward.price.paths(t0=0, Tmax, dt, N.MC, N.MC.delta, FO_rb, rb_heston_params, A[
101    i,],i)
102  terminal_prices_rb = tail(paths_rb,n=1)
103
104  #Crack Spreads at each time
105  N.t = nrow(paths_cl) - 1
106  crack_spreads = matrix(nrow=0,ncol=ncol(paths_cl))
107  for(t in 1:(nrow(paths_cl))){
108    crack_spreads = rbind(crack_spreads, paths_cl[t,]-H*paths_rb[t,])
109  }
110
111  C = matrix(ncol=5,nrow=0)
112  P = matrix(ncol=5,nrow=0)

```

```

112 for(j in 1:(length(KALL))){
113
114   #Strike
115   K_ = KALL[j]
116
117   #European Call and Put
118   print(paste("C.European:",Tmax*252,K_))
119   C_eur = exp(-r*Tmax)*mean(apply(tail(crack_spreads,n=1) - K_, 2, "max", 0))
120
121   price.fun = basis(type="laguerre", M=5)
122   payoff_call = expression(max(s-K_, 0))
123   C_ame = price.LSMC.itm(S=crack_spreads, r=r, t0=0, T=Tmax, N.t=N.t, dt=dt, N.MC=ncol(crack_
      spreads), payoff=payoff_call, price.fun=price.fun)$value
124
125   #Premium
126   C_premium = C_ame - C_eur
127
128   #Results
129   print (c(K_, C_eur, C_ame, C_ame/C_eur))
130   intrinsic_value_call = max(F0_cl - H*F0_rb - K_, 0)
131   C = rbind(C, c(K_, intrinsic_value_call, C_eur, C_ame, C_ame/C_eur))
132
133 }
134
135 Call_Crack_Options = cbind(Call_Crack_Options, C)
136
137 }

```

../impl/final/options.heston.crack.r

```

1 #####
2 # > lib.pfc.pca.r
3 # Library for data manipulation, interpolation and PCA and analysis
4 #####
5
6 #####
7 # Dependencies
8 #####
9 library(zoo)
10 library(tseries)
11 library(timeDate)
12 library(RQuantLib)
13 library(pracma)
14 library(MASS)
15
16 #####
17 # > lin_interpolation
18 # Auxiliar method for linear interpolation of future curves
19 #####
20 lin_interpolation = function(x, y){
21   vertex_ = matrix(numeric(0), nrow=0, ncol=1)
22   fcurve_ = matrix(numeric(0), nrow=0, ncol=1)
23   for (j in 1:(length(x)-1)){
24     li_ = approx(x[j:(j+1)], y[j:(j+1)], n=x[j+1,]-x[j,]+1)
25     if (j==1){
26       vertex_ = rbind(vertex_, matrix(li_$x,ncol=1))
27       fcurve_ = rbind(fcurve_, matrix(li_$y,ncol=1))
28     }else{
29       vertex_ = rbind(vertex_, matrix(li_$x[-1],ncol=1))
30       fcurve_ = rbind(fcurve_, matrix(li_$y[-1],ncol=1))
31     }
32   }
33   fcurve = zoo(fcurve_, order.by=vertex_)
34   return(fcurve)
35 }
36
37 #####
38 # > read.spot
39 # Read spot prices from a file
40 #####
41 read.spot = function(filename , date_format){
42   spot_data = read.csv(file=filename, header=T, sep=",")
43   spot_data = na.omit(spot_data)

```

```

44 |   dates = as.Date(spot_data[,1], format=date_format)
45 |   spot = zoo(spot_data[,-1],order.by=dates)
46 |   return(spot)
47 | }
48 |
49 | #####
50 | # > read.futures
51 | # Read future prices from a file
52 | #####
53 | read.futures = function(filename, date_format){
54 |   futures_data = read.csv(file=filename, header=T, sep=",")
55 |   futures_data = na.omit(futures_data)
56 |   dates = as.Date(futures_data[,1], format=date_format)
57 |   futures = zoo(futures_data[,-1],order.by=dates)
58 |   return(futures)
59 | }
60 |
61 | #####
62 | # > read.spot.futures
63 | # Read spot and future prices from files
64 | #####
65 | read.spot.futures = function(spot_filename,futures_filename, date_format){
66 |   spot = read.spot(spot_filename, date_format)
67 |   futures = read.futures(futures_filename, date_format)
68 |   M = merge(spot,futures)
69 |   M = na.omit(M)
70 |   return(M)
71 | }
72 |
73 | #####
74 | # > futures.interpolation
75 | # Main method for futures interpolation
76 | #####
77 | futures.interpolation = function(M, INTERP_VERTEX = seq(1,500,by=1), DEFAULT_EXPDAY = 25, MONTH_
78 |   LENGTH = 22){
79 |   # Matrix for return
80 |   fprices = matrix(numeric(0),nrow=0,ncol=length(INTERP_VERTEX))
81 |
82 |   # Quantity of futures (first col is the spot price)
83 |   exp_qty = ncol(M) - 1
84 |
85 |   #Main Loop
86 |   for (i in 1:nrow(M)){
87 |
88 |     #Auxiliar
89 |     vertex_ = matrix(numeric(0),ncol=1,nrow=0)
90 |     colnames(vertex_) = c("tau")
91 |
92 |     #Date information
93 |     date = index(M[i,])
94 |     day_int = as.numeric(format(index(M[i,]), "%d"))
95 |     month_str = format(index(M[i,]), "%m")
96 |     year_str = format(index(M[i,]), "%Y")
97 |
98 |     #Compute tau = T-t
99 |     if (day_int <= DEFAULT_EXPDAY){
100 |       exp_date = as.Date(paste(year_str, month_str, DEFAULT_EXPDAY,sep="-"))
101 |     }else{
102 |       exp_date = as.Date(timeLastDayInMonth(date)) + DEFAULT_EXPDAY
103 |     }
104 |     tau_0 = as.numeric(businessDaysBetween("UnitedStates",date, exp_date)) + 1
105 |     tau_ = matrix(tau_0 + MONTH_LENGTH * seq(1:(exp_qty-1)))
106 |
107 |     #Prepare data for interpolation
108 |     vertex_ = matrix(rbind(0, tau_0, tau_),ncol=1)
109 |     prices_ = matrix(M[i,],ncol=1)
110 |
111 |     #Loop Information
112 |     print(paste("Interpolating curve for ", date,"..."))
113 |
114 |     #Interpolate future curve of current date
115 |     fcurve = lin_interpolation(vertex_, prices_)

```

```

116     fcurve_sel_vert_all = matrix(fcurve[which(index(fcurve)%in%INTERP_VERTEX),], ncol=length(INTERP_
117         VERTEX))
118     fprices = rbind(fprices, fcurve_sel_vert_all)
119 }
120 return(fprices)
121 }
122 }
123
124 #####
125 # > get.market.invariant
126 # Compute different version of market invariants
127 #####
128 get.market.invariant = function(spot, fprices, mode = 1){
129     if (mode == 1){
130         #Log-returns
131         market.invariant = diff(log(fprices))
132     }
133     else if(mode == 2){
134         #Log-returns normalized by spot volatility, computed on the last 22 business days
135         srw = 22
136         invar_ = diff(log(fprices))
137         market.invariant = matrix(numeric(0),nrow=0, ncol=ncol(invar_))
138         for (i in srw:nrow(invar_)){
139             inst_sigma_spot = sd(spot[(i-srw):i,1])
140             market.invariant = rbind(market.invariant, invar_[i,]/inst_sigma_spot)
141         }
142     }
143     else if(mode == 3){
144         #Log-returns normalized by spot volatility, computed on the last 22 business days
145         srw = 22
146         invar_ = diff(log(fprices))
147         market.invariant = matrix(numeric(0),nrow=0, ncol=ncol(invar_))
148         for (i in srw:nrow(invar_)){
149             inst_sigma_spot = sd(diff(log(spot[(i-srw):i,1])))
150             market.invariant = rbind(market.invariant, invar_[i,]/inst_sigma_spot)
151         }
152     }
153 }
154 return(market.invariant)
155 }
156
157 #####
158 # > pca.analysis
159 # SVD decomposition of Covariance or Correlation Matrices
160 #####
161 pca.analysis = function(data, mode = "V", scale=T){
162
163     #Center and Scale the data
164     if (scale) {
165         data_ = scale(data, center=T, scale=apply(data, 2, sd, na.rm = TRUE))
166     }else{
167         data_ = data
168     }
169
170     if(mode == "C"){
171         M = cor(data_) #Correlation Matrix
172     }else if (mode == "V"){
173         M = cov(data_) #Covariance Matrix
174     }
175
176     #Matrix decomposition
177     e = eigen(M)
178
179     pca.results = list(
180         eigenvalues = e$values,
181         eigenvectors = e$vectors,
182         abs_var = e$values/sum(e$values),
183         cum_var = cumsum(e$values)/sum(e$values)
184     )
185
186     return(pca.results)
187 }
188 }

```

```

189
190 #####
191 # > sliding.pca.analysis
192 # Run PCA on a sliding window
193 #####
194 sliding.pca.analysis = function(data, mode = "C", window_size = 6*252, step_size = 32, n_ev = 5,
    scale=T){
195
196   j = 0; i = 1 #Auxiliar counters
197   continue_loop = T #Just for loop control
198
199   #Matrix for cumulative variance and eigen-vectors of correlation matrix
200   abs_var = matrix(numeric(0),nrow=ncol(data),ncol=0)
201   cum_var = matrix(numeric(0),nrow=ncol(data),ncol=0)
202   eigen_vectors = matrix(numeric(0),nrow=ncol(data),ncol=0)
203   eigen_values = matrix(numeric(0),nrow=ncol(data),ncol=0)
204
205   while(continue_loop){
206
207     #Window limits
208     k_start = i + j*step_size
209     k_end = min((k_start + window_size), nrow(data))
210
211     #Loop control
212     if (k_end == nrow(data)) continue_loop = F else continue_loop = T
213     print(paste(k_start,k_end,k_end-k_start))
214     j = j + 1
215     i = i + 1
216
217     #Slice of data
218     data_ = data[k_start:k_end,]
219
220     #Run PCA for data slice
221     pca.results = pca.analysis(data_, mode, scale)
222     abs_var = cbind(abs_var, pca.results$abs_var)
223     cum_var = cbind(cum_var, pca.results$cum_var)
224     eigen_values = cbind(eigen_values, matrix(pca.results$eigenvalues,ncol=1))
225     eigen_vectors = cbind(eigen_vectors, pca.results$eigenvectors[,1:n_ev])
226
227   }
228
229   sliding.pca.results = list(
230     sliding_abs_var = abs_var, sliding_cum_var = cum_var,
231     sliding_evalues = eigen_values, sliding_evectors = eigen_vectors
232   )
233
234   output=sliding.pca.results
235
236 }
237
238 #####
239 # > basic.stats
240 # Basic Stats of futures returns
241 #####
242 basic.stats = function(f,d,vertices){
243   stats = round(
244     rbind(
245       apply(f[,vertices],2,"mean"),
246       apply(f[,vertices],2,"sd"),
247       apply(f[,vertices],2,"skewness"),
248       apply(f[,vertices],2,"kurtosis")
249     ),digits=d)
250   return(stats)
251 }
252
253 #####
254 # > contango.backward.count
255 # Basic stats about market status (contango vs. backwardation)
256 #####
257 contango.backward.count = function(X){
258   total = nrow(X)
259   status = (X[,1] < X[,ncol(X)]) * 1
260   contango = sum(status)
261   backward = total - contango

```

```
262 shifts_vector = abs(diff(status))
263 shifts = sum(shifts_vector)
264 cb = list(
265   contango = contango,
266   backward = backward,
267   contango_prc = contango/total,
268   backward_prc = backward/total,
269   shifts = shifts,
270   shifts_prc = shifts/total,
271   status = status
272 )
273 return(cb)
274 }
```

../impl/final/lib.pfc.pca.r

Referências Bibliográficas

- [BAW87] G. Barone-Adesi and R. Whaley. Efficient analytical approximation of american option values. *Journal of Finance*, 42:301–320, 1987.
- [BGLS09] J. F. Bonnans, J. C. Gilbert, C. Lemaréchal, and C. A. Sagastizábal. *Numerical Optimization: Theoretical and Practical Aspects*. Universitext. Springer, 2nd edition, 2009.
- [Bla76] Fischer Black. The pricing of commodity contracts. *Journal of Financial Economics*, (3):197–179, 1976.
- [BM06] Damiano Brigo and Fabio Mercurio. *Interest Rate Models – Theory and Practice with Smile, Inflation and Credit*. Springer Finance. Springer, 2006.
- [BN10] N. Beliaeva and S. Nawalkha. A simple approach to pricing american options under the heston stochastic volatility model. *Journal of Derivatives*, 17:25–43, 2010.
- [BS73] F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81:637–654, 1973.
- [BS93] P. Bjerksund and G. Stensland. Closed-form approximation of american options. *Scandinavian Journal of Management*, 9:88–99, 1993.
- [CD03] Rene Carmona and Valdo Durrleman. Pricing and hedging spread options. 2003.
- [CIR85] J. C. Cox, J. E. Ingersoll, and S. A. Ross. A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53:385–407, 1985.
- [CS11] Les Clewlow and Chris Strickland. *Energy Derivatives: Pricing and Risk Management*. Wiley Finance. Wiley, 2011.
- [CZ05] Carl Chiarella and Andrew Ziogas. Pricing american options under stochastic volatility. *Computing in Economics and Finance*, 77, 2005.
- [Dup94] Bruno Dupire. Pricing with a smile. *Risk Magazine*, pages 18–20, 1994.
- [Gat06] Jim Gatheral. *The Volatility Surface (A practitioner’s Guide)*. Wiley Finance, 2006.
- [GE94] Cortazar G. and Schwartz E. The valuation of commodity contingent claims. *The Journal of Derivatives*, 1(4):27–39, 1994.
- [Gem11] Helyette Geman. *Commodities and Commodity Derivatives*. Wiley Finance. Wiley, 2011.
- [Gla04] Paul Glasserman. *Monte Carlo methods in financial engineering*. Applications of mathematics. Springer, 2004.

- [Gro] Sanford J. Grossman. The existence of future markets, noisy rational expectations and informational externalities. *Review of Economic Studies*, (64).
- [GS90] Rajna Gibson and Eduardo S Schwartz. Stochastic convenience yield and the pricing of oil contingent claims. *Journal of Finance*, 45(3):959–76, 1990.
- [GS13] Mike Giles and Lukasz Szpruch. Multilevel monte carlo methods for applications in finance. Papers, arXiv.org, 2013.
- [Hes93] Steven L. Heston. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *The Review of Financial Studies*, 6:327–340, 1993.
- [Jol86] I. T. Jolliffe. *Principal component analysis*. Springer series in statistics. Springer, 1986.
- [KK01] Ralf Korn and Elke Korn. *Option pricing and portfolio optimization : modern methods of financial mathematics*. Graduate studies in mathematics. Providence, R.I. American Mathematical Society, 2001.
- [KP11] Peter E. Kloeden and Eckhard Platen. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Stochastic Modelling and Applied Probability. Springer, 2011.
- [Lor14] Leandro Amato Loriato. Convertible bonds modelling and pricing. Master’s thesis, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2014.
- [LS01] Francis A. Longstaff and Eduardo S. Schwartz. Valuing american options by simulation: A simple least-squares approach. *Review of Financial Studies*, pages 113–147, 2001.
- [Meu05] Attilio Meucci. *Risk and Asset Allocation*. Springer Finance. Springer, 2005.
- [Moo05] N. Moodley. The heston model: A practical approach with matlab code. <http://http://math.nyu.edu/~atm262/fall06/compmethods/a1/nimalinmoodley.pdf>, 2005.
- [MR06] Marek Musiela and Marek Rutkowski. *Martingale Methods in Financial Modelling*. Stochastic Modelling and Applied Probability. Springer, 2006.
- [Pow94] M. J. D. Powell. A direct search optimization method that models the objective and constraint functions by linear interpolation. *Advances in Optimization and Numerical Analysis*, pages 51–67, 1994.
- [PS09] K.F. Pilz and E. Schlögl. A hybrid commodity and interest rate market model. Papers, Quantitative Finance Research Centre, 2009.
- [Sch97] E. Schwartz. The stochastic behavior of commodity prices: implications for valuation and hedging. *Journal of Finance*, pages 923–973, 1997.
- [Sch10] Martin Schmelzle. Option pricing formulae using fourier transform: Theory and application, 2010.
- [Sto11] Lynn A. Stout. Derivatives and the legal origin of the 2008 credit crisis. http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1874806, 2011.
- [Yer91] Daniel Yergin. *O Petróleo: Uma história mundial de conquistas, poder e dinheiro*. Paz e Terra, 1991.