

FEUILLETAGES HOLOMORPHES DE CODIMENSION 1: UNE ÉTUDE LOCALE DANS LE CAS DICRITIQUE

D. CERVEAU, A. LINS NETO & M. RAVARA-VAGO

TABLE DES MATIÈRES

1.	Introduction	1
2.	Notations, définitions et rappels	3
3.	Cas dicritique dégénéré avec $\nu \leq 2$	7
4.	Un lemme utile et le Théorème de Camacho–Lins Neto revisité	8
5.	Feuilletages avec singularités nilpotentes ; problèmes de déploiements	10
6.	Théorème de Dulac : présentation et applications	12
7.	Points nilpotents génériques	13
8.	Vers la conjecture : le cas $\mu = 3$	16
9.	Le cas $\mu = 4$	19
10.	Le cas $\mu = 5$	20
11.	Le cas $\mu = 6$	22
12.	Krull-déformations pour certains feuilletages transversalement affines	23
13.	Perturbations de 1–formes fermées : exemples	24
14.	Conclusion	26
	Références	27

1. INTRODUCTION

On se propose dans cet article de donner la description de certains germes de feuilletages holomorphes de codimension un à l'origine de \mathbb{C}^n . Un tel feuilletage \mathcal{F} est associé à la donnée d'une 1–forme holomorphe $\omega \in \Omega^1(\mathbb{C}^n, 0)$, définie à unité multiplicative près, satisfaisant la condition d'intégrabilité de Frobenius $\omega \wedge d\omega = 0$ et dont le lieu singulier $\text{Sing } \omega = \text{Zéros}(\omega)$ est de codimension supérieure ou égale à deux. On note $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\omega$ et $\text{Sing } \mathcal{F} = \text{Sing } \omega$. La condition d'intégrabilité est non linéaire en les coefficients de ω , ce qui rend difficile la construction d'exemples par des procédés calculatoires. Il y a essentiellement deux manières simples pour construire de tels exemples. La première consiste à se donner un germe $\omega_0 \in \Omega^1(\mathbb{C}^2, 0)$ en dimension 2 (dans ce cas la condition d'intégrabilité est triviale), une application holomorphe $F : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^2, 0$ dominante et à considérer $\omega = F^*\omega_0$ qui est automatiquement intégrable ; les feuilles du feuilletage \mathcal{F}_ω sont alors fibrées par les niveaux de F . Un tel feuilletage sera dit de type *pull-back* ; on peut d'ailleurs généraliser cette procédure en considérant un feuilletage \mathcal{F}_0 d'une surface S_0 , éventuellement singulière, et une application méromorphe $F : \mathbb{C}^n \dashrightarrow S_0$ (typiquement la projection naturelle $\mathbb{C}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$) et en rappelant \mathcal{F}_0 par F . L'autre manière est de considérer les feuilletages \mathcal{F}_θ associés aux 1–formes méromorphes θ fermées : $d\theta = 0$. Comme nous le rappellerons une telle forme s'écrit :

$$\theta = \sum \lambda_i \frac{df_i}{f_i} + dh$$

où les f_i sont holomorphes, h méromorphe et les *résidus* λ_i des nombres complexes. Essentiellement les feuilles de \mathcal{F}_θ sont les niveaux de la fonction multivaluée $\sum \lambda_i \log f_i + h$. Ceci n'est pas sans rappeler la conjecture, concernant cette fois les feuilletages globaux, suivante :

Conjecture. (Brunella, Lins Neto et ?) *Soit \mathcal{F} un feuilletage holomorphe de codimension un sur une variété projective X . Alors ou bien \mathcal{F} est transversalement projectif (sur un ouvert de Zariski) ou bien il existe $F : X \dashrightarrow S$ une application rationnelle vers une surface S et un feuilletage \mathcal{G} de S tels que $\mathcal{F} = F^*\mathcal{G}$.*

Pour éclairer cette conjecture disons que parmi les feuilletages transversalement projectifs il y a les feuilletages donnés par une 1–forme fermée méromorphe ou les feuilletages transverses à une fibration rationnelle (sur un ouvert de Zariski fibré). Ils sont donnés par une 1–forme rationnelle ω_0 pour laquelle existe deux autres 1–formes rationnelles ω_1, ω_2 formant un $SL(2, \mathbb{C})$ triplet [10, 20] :

$$d\omega_0 = \omega_0 \wedge \omega_1, \quad d\omega_1 = \omega_0 \wedge \omega_2, \quad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2.$$

Soit $\omega \in \Omega^1(\mathbb{C}^n, 0)$ un germe de 1–forme intégrable, $\omega = \sum a_i dz_i$; si l'ensemble singulier $\text{Sing } \omega := \{a_1 = \dots = a_n = 0\}$ est suffisamment petit, $\text{Cod Sing } \omega \geq 3$, le Théorème de Frobenius de B. Malgrange assure l'existence d'une intégrale première non constante $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n, 0) : \omega = gdf$, $g \in \mathcal{O}^*(\mathbb{C}^n, 0)$; ici les feuilles sont les niveaux de f . On pourrait penser que cela décrit la situation générique (pour la topologie de Krull), mais il n'en est rien : on sait en effet depuis Kupka et Reeb que la condition $d\omega(0) \neq 0$ implique que le lieu singulier est lisse de codimension deux et cette propriété est évidemment stable. Nous précisons dans le texte ce phénomène bien connu et nous présentons la classification des 1–formes intégrables dont le 1–jet est non trivial suivant les travaux de [17, 12, 19]. Une grande partie du travail que nous proposons repose sur l'idée naïve suivante; si l'on procède au développement de Taylor de ω :

$$\omega = \omega_\nu + \omega_{\nu+1} + \dots + \omega_k + \dots$$

où chaque ω_k est une 1–forme homogène de degré k , i.e. à coefficients polynômes homogènes de degré k , et ω_ν est la *partie homogène de plus bas degré non nulle*, alors la partie initiale $\text{In}(\omega) = \omega_\nu$ de ω est intégrable. Mieux, il y a une homotopie

$$\omega_t = \omega_\nu + t\omega_{\nu+1} + \dots + t^k \omega_{\nu+k} + \dots, \quad t \in \mathbb{C}$$

reliant $\omega = \omega_{t=1}$ à sa partie initiale $\omega_{t=0} = \text{In}(\omega)$. On peut donc espérer, modulo des conditions raisonnables sur ω_ν , que la 1–forme ω , que l'on voit donc comme une déformation de ω_ν , va conserver certaines propriétés de sa partie initiale $\text{In}(\omega)$. Pour présenter nos résultats nous avons besoin de quelques notations et rappels. On désigne par R le champ *radial*, $R = \sum z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$. Une 1–forme homogène intégrable ω_ν est dite *dicritique* si le polynôme $P_{\nu+1} = i_R \omega_\nu$ est identiquement nul; elle est *non dicritique* sinon. Une forme dicritique induit un feuilletage sur l'espace projectif $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n-1}$, tandis que le feuilletage homogène associé à une forme non dicritique est défini par une 1–forme fermée rationnelle : en effet $\frac{\omega_\nu}{P_{\nu+1}}$ est fermée. Modulo des conditions génériques portant sur ω_ν , ces propriétés sont gardées

en mémoire par les ω telles que $\text{In}(\omega) = \omega_\nu$. Ainsi, dans le cas non dicritique, si $[P_{\nu+1} = 0] \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n-1}$ est réduit et à croisement normaux, alors \mathcal{F}_ω est encore défini par une 1–forme fermée méromorphe dès que les résidus λ_i de $\omega_\nu = \text{In}(\omega)$ satisfont une condition générique (satisfaite sur un ouvert dense); de même si $[P_{\nu+1} = 0]$ est irréductible de degré p^s , avec p premier et $n \geq 3$ [11] : en fait dans ce cas ω possède une intégrale première holomorphe non constante.

Dans le cas dicritique et en dimension 3, on démontre dans [1] que si $d\omega_\nu = d(\text{In}(\omega))$ est à singularité isolée et $\nu \geq 3$, alors les feuilletages \mathcal{F}_{ω_ν} et \mathcal{F}_ω sont holomorphiquement conjugués, ce que l'on peut interpréter comme un résultat de *détermination finie* ou de stabilité (pour la topologie de Krull).

Nous nous intéressons dans cet article à des feuilletages \mathcal{F}_ω dont la partie homogène $\omega_\nu = \text{In}(\omega)$ ne satisfait plus les conditions précédentes. Si ω_ν est une 1–forme homogène intégrable dicritique, on note $[\mathcal{F}_{\omega_\nu}]$ le feuilletage de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n-1}$ associé; si $\text{Cod Sing } \omega_\nu \geq 2$, c'est un feuilletage de degré $\nu - 1$. Rappelons qu'un point *central* (ou une singularité de *type centre*) pour un feuilletage \mathcal{G} du plan est un point singulier m en lequel \mathcal{G} possède une intégrale première de Morse; toujours en dimension 2, un

point singulier m est dit *nilpotent* si $\mathcal{G}_{,m}$ est défini par un germe de 1–forme dont la partie initiale est de type $x dx$.

Les résultats qui suivent sont propres à la dimension 3, première dimension où la condition d’intégrabilité est non triviale.

Théorème A. *Soit $\omega \in \Omega^1(\mathbb{C}^3, 0)$ holomorphe intégrable. On suppose que la partie initiale $\text{In}(\omega) = \omega_\nu$ est dicritique et satisfait $\text{Cod Sing } \omega_\nu \geq 2$. Alors :*

- (1) *Si $\nu = 1$, \mathcal{F}_ω est holomorphiquement conjugué à \mathcal{F}_{ω_1} , $\omega_1 = z_2 dz_1 - z_1 dz_2$; en particulier \mathcal{F}_ω possède intégrale première méromorphe $\frac{Z_1}{Z_2}$ (Z_i coordonnées).*
- (2) *Si $\nu = 2$, \mathcal{F}_ω est donné par une 1–forme fermée méromorphe.*
- (3) *Si $\nu \geq 3$ et $[\mathcal{F}_{\omega_\nu}]$ n’a ni singularité nilpotente, ni centre, alors \mathcal{F}_ω est conjugué à \mathcal{F}_{ω_ν} .*
- (4) *Si $\nu = 3$ et $[\mathcal{F}_{\omega_3}]$ a une singularité de type centre, alors \mathcal{F}_ω est défini par une 1–forme fermée méromorphe.*
- (5) *Si $\nu = 3$ et $[\mathcal{F}_{\omega_3}]$ a une singularité nilpotente alors, modulo une condition de non résonance portant sur ω_3 , \mathcal{F}_ω est défini par une 1–forme fermée méromorphe ou bien \mathcal{F}_ω est conjugué à \mathcal{F}_{ω_3} .*
- (6) *Si $\nu = 3$ et \mathcal{F}_{ω_3} a une singularité quadratique (1–jet nul), alors \mathcal{F}_ω est transversalement affine, i.e. $d\omega = \omega \wedge \omega_1$, avec ω_1 méromorphe fermée.*

Dans le Théorème A, nous avons rassemblé divers énoncés qui apparaissent dans le texte. Par souci de cohérence nous avons inséré dans le théorème des résultats bien connus : c’est le cas des points 1 et 2. Le point 3 contient le résultat de Camacho-Lins Neto [1]. Le point 4 fait intervenir un résultat d’intégration Liouvillienne remarquable démontré en 1908 par Henri Dulac [14]. Le point 5 nécessite une étude fine des déploiements des feuilletages du plan à singularité nilpotente. Cette étude est rendue possible par l’utilisation du Théorème de Préparation de F. Loray [19]. A titre d’exemple, on démontre que si $\omega_0 \in \Omega^1(\mathbb{C}^2, 0)$ est à singularité nilpotente et à nombre de Milnor $\mu(\omega_0; 0)$ de type $p - 1$ avec p premier, alors tout déploiement \mathcal{F}_ω de \mathcal{F}_{ω_0} à singularité nilpotente ($\text{In}(\omega) = \text{In}(\omega_0)$) est trivial ou bien \mathcal{F}_{ω_0} (et \mathcal{F}_ω) possède une intégrale première holomorphe non constante. Rappelons que si $\omega_0 = adx + bdy$ alors $\mu(\omega_0; 0)$ est la multiplicité d’intersection de l’idéal (a, b) :

$$\mu(\omega_0; 0) = \dim \frac{\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)}{(a, b)}.$$

Nous donnons des exemples de déploiements non triviaux pour les feuilletages \mathcal{F}_{ω_3} associés à des 1–formes fermées méromorphes. En particulier on rencontre dans cette description des feuilletages \mathcal{F}_ω , $\omega \in \Omega^1(\mathbb{C}^3, 0)$, qui après réduction des singularités sont complètement réguliers.

Remerciements. Nous remercions F. Loray, C. Rousseau et F. Touzet pour des échanges fructueux. Le deuxième auteur a bénéficié d’un financement IUF et CNPq pour un séjour à Rennes, le troisième est financé par un projet PDE/CsF du CNPq pour un séjour de deux ans à Rennes.

2. NOTATIONS, DÉFINITIONS ET RAPPELS

On note $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n, 0)$ l’anneau des germes de fonctions holomorphes à l’origine de \mathbb{C}^n ; on désigne par $\Omega^k(\mathbb{C}^n, 0)$ le $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n, 0)$ –module des germes de k –formes holomorphes à l’origine de \mathbb{C}^n . Bien sûr $\Omega^0(\mathbb{C}^n, 0) = \mathcal{O}(\mathbb{C}^n, 0)$; le $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n, 0)$ –module des champs de vecteurs holomorphes se note $\Theta(\mathbb{C}^n, 0)$. Plus généralement si M est une variété complexe on note $\mathcal{O}(M)$, $\Omega^k(M)$ et $\Theta(M)$ les faisceaux de fonctions, k –formes et champs. Si $\alpha \in \Omega^k$ et $X \in \Theta$ on note $i_X \alpha$ le produit intérieur de α par X et par $L_X \alpha = i_X d\alpha + d(i_X \alpha)$ la dérivée de Lie de α suivant X .

Un germe de feuilletage holomorphe $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\omega$ de codimension 1 à l’origine de \mathbb{C}^n est défini par la donnée d’un germe de 1–forme $\omega \in \Omega^1(\mathbb{C}^n, 0)$ satisfaisant les deux conditions :

- (i) $\omega \wedge d\omega = 0$ (intégrabilité)

(ii) Cod Sing $\omega \geq 2$
 où Sing ω désigne l'ensemble singulier de ω ; en coordonnées si :

$$\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i, \quad a_i \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n, 0)$$

alors Sing $\omega = \{a_1 = \dots = a_n = 0\}$.

Ajoutons que par définition deux 1-formes ω, ω' satisfaisant (i), (ii) et $\omega \wedge \omega' = 0$ définissent le même feuilletage. Avec la notation ci-dessus le lieu singulier Sing \mathcal{F} de $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\omega$ est Sing ω . Deux germes de feuilletages $\mathcal{F}_\omega = \mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_{\omega'} = \mathcal{F}'$ sont conjugués s'il existe $\phi \in \text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$, le groupe des germes de difféomorphismes de $\mathbb{C}^n, 0$, tel que $\phi^*\omega \wedge \omega' = 0$. On note $\mathcal{F}' = \phi^{-1}\mathcal{F}$.

On a le théorème de structure suivant :

Théorème 1. (Malgrange [21]) *Soit ω comme ci-dessus ; si Cod Sing $\omega \geq 3$ il existe une unité $g \in \mathcal{O}^*(\mathbb{C}^n, 0)$ et $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n, 0)$ tels que $\omega = gdf$.*

Lorsque ω est non singulière, i.e. Sing $\omega = \emptyset$, on retrouve le Théorème de Frobenius classique. Dans ce cas, f est une submersion.

Dans la théorie des singularités de feuilletage il y a un énoncé classique connu sous le nom de phénomène de Kupka-Reeb et qui est une application directe du Théorème de Darboux classifiant localement les 2-formes fermées. En voici l'énoncé :

Théorème 2. [17, 3] *Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\omega$ un germe de feuilletage à l'origine de \mathbb{C}^n défini par la 1-forme intégrable ω . On suppose que la différentielle $d\omega$ est non nulle à l'origine : $d\omega(0) \neq 0$. Il existe des coordonnées (x_1, x_2, \dots, x_n) telles que $\omega = A_1(x_1, x_2)dx_1 + A_2(x_1, x_2)dx_2$, $A_i \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$.*

Sous les hypothèses du théorème, il existe une submersion $\varphi : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^2, 0$ telle que $\mathcal{F} = \varphi^{-1}(\mathcal{F}_0)$ où \mathcal{F}_0 est un feuilletage sur $\mathbb{C}^2, 0$.

Si l'on souhaite décrire tous les feuilletages donnés par une 1-forme ω dont la partie linéaire est non triviale les deux énoncés précédents s'avèrent insuffisants. Ils doivent être complétés par deux autres ; le premier se trouve dans [12], nous en donnons sa preuve dont l'esprit est important pour la compréhension de la suite :

Proposition 1. *Soit \mathcal{F} un germe de feuilletage holomorphe de codimension 1 à l'origine de \mathbb{C}^n donné par $\omega \in \Omega^1(\mathbb{C}^n, 0)$, $n \geq 3$. Soient $i : \mathbb{C}^2, 0 \hookrightarrow \mathbb{C}^n, 0$ une immersion et $\omega_0 = i^*\omega$. On suppose que le 1-jet de ω_0 est non nilpotent (i.e. non nul et non conjugué à $x_1 dx_1$). On a l'alternative :*

- (1) \mathcal{F} ne dépend que de deux variables, i.e. il existe une submersion $j : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^2, 0$, $j \circ i = \text{id}_{\mathbb{C}^2}$, telle que $\mathcal{F} = j^{-1}(i^{-1}\mathcal{F})$.
- (2) \mathcal{F} possède une intégrale première holomorphe $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n, 0)$ non constante, i.e. $\omega \wedge df = 0$.

Démonstration. Soit $(x, y) = (x_1, x_2, y_3, \dots, y_n)$ un système de coordonnées tel que i s'identifie à l'inclusion $i(x) = (x, 0)$. Si $d\omega_0(0) \neq 0$ on a bien sûr $d\omega(0) \neq 0$ et on se trouve en présence d'un phénomène de Kupka-Reeb ; on est alors dans le cas (1). Sinon, puisque le 1-jet de ω_0 est non nilpotent, on a à conjugaison linéaire près :

$$j^1\omega_0 = x_2 dx_1 + x_1 dx_2.$$

On écrit alors :

$$\omega = A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + B_3 dy_3 + \dots + B_n dy_n$$

où $A_i, B_i \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n, 0)$ avec $A_1 = x_2 + \dots$, $A_2 = x_1 + \dots$. Si le lieu singulier de ω est de codimension au moins trois, le Théorème de Malgrange dit que nous sommes dans l'éventualité (2). Comme l'ensemble lisse $\{A_1 = A_2 = 0\}$ est de codimension 2 et contient Sing ω , on constate, lorsque Cod Sing $\omega = 2$, l'égalité Sing $\omega = \{A_1 = A_2 = 0\}$. En particulier chaque B_i est dans l'idéal $\langle A_1, A_2 \rangle$:

$$B_i = \alpha_i A_1 + \beta_i A_2, \quad \alpha_i, \beta_i \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n, 0).$$

Par suite les champs de vecteurs $X_j = \frac{\partial}{\partial y_j} - \alpha_j \frac{\partial}{\partial x_1} - \beta_j \frac{\partial}{\partial x_2}$ annulent ω par produit intérieur et produisent une *trivialisation* de \mathcal{F} : nous sommes dans le cas (1). \square

La description des feuilletages donnés par une 1–forme dont le 1–jet est $x_1 dx_1$ est présentée par F. Loray dans [19] comme conséquence de son Théorème de Préparation. En voici l'énoncé :

Théorème 3. *Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\omega$ un germe de feuilletage de codimension 1 à l'origine de \mathbb{C}^n . On suppose que la partie linéaire de ω est de type $x_1 dx_1$. Alors à conjugaison et multiplication par unité près ω est de la forme :*

$$(1) \quad \omega = x_1 dx_1 + (l_1(f) + x_1 l_2(f)) df$$

où $f = f(x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^{n-1}, 0)$, l_1 et l_2 sont dans $\mathcal{O}(\mathbb{C}, 0)$.

Une 1–forme de type (1) sera appelée *forme normale de Loray*. Comme dans le phénomène de Kupka-Reeb, le feuilletage \mathcal{F} apparaît comme image réciproque (par l'application (x_1, f)) d'un feuilletage de $\mathbb{C}^2, 0$ (le feuilletage défini par $x_1 dx_1 + (l_1(y_1) + x_1 l_2(y_1)) dy_1$).

Soit ω un germe de 1–forme intégrable à l'origine de \mathbb{C}^n ; on note $\nu = \nu(\omega)$ la multiplicité algébrique de ω . Si on effectue le développement de Taylor de ω :

$$\omega = \omega_\nu + \omega_{\nu+1} + \dots + \omega_k + \dots$$

où chaque ω_k est une 1–forme homogène de degré k , alors ω_ν est une 1–forme homogène qui se trouve intégrable (condition (i)) ; par contre la condition (ii) pour ω , i.e. $\text{Cod Sing } \omega \geq 2$ n'implique pas qu'elle soit vérifiée par ω_ν .

Définition 1. *Soit ω_ν une 1–forme homogène intégrable sur \mathbb{C}^n , $\omega_\nu = \sum_{i=1}^n A_i dx_i$, A_i homogène de degré ν . On dit que ω_ν est dicritique si $\sum_{i=1}^n x_i A_i \equiv 0$ et non dicritique sinon.*

Considérons le champ radial $R = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$; ω_ν est dicritique si et seulement si le polynôme $P_{\nu+1} = i_R \omega_\nu$ est identiquement nul. Dans le cas non dicritique, $P_{\nu+1} \neq 0$, la 1–forme $\frac{\omega_\nu}{P_{\nu+1}}$ est fermée ; si la décomposition en facteurs irréductibles de $P_{\nu+1}$ est :

$$P_{\nu+1} = P_1^{n_1+1} \dots P_s^{n_s+1}, \quad n_i \in \mathbb{N}, P_i \text{ irréductible,}$$

alors il existe des nombres $\lambda_i \in \mathbb{C}$ et un polynôme H de degré $d^0 H = \sum n_i d^0 P_i$ tel que ([12]) :

$$\frac{\omega_\nu}{P_{\nu+1}} = \sum \lambda_i \frac{dP_i}{P_i} + d \left(\frac{H}{P_1^{n_1} \dots P_s^{n_s}} \right).$$

Cette 1–forme possède l'intégrale première multivaluée $\sum \lambda_i \log P_i + \frac{H}{P_1^{n_1} \dots P_s^{n_s}}$.

Lorsque $P_{\nu+1}$ est réduit, i.e. $n_i = 0$, on peut supposer $H = 0$ et :

$$\frac{\omega_\nu}{P_{\nu+1}} = \sum \lambda_i \frac{dP_i}{P_i} \quad \text{avec} \quad \sum \lambda_i d^0 P_i = 1.$$

Dans ce cas on dit que ω_ν (ou $\frac{\omega_\nu}{P_{\nu+1}}$) est *logarithmique* et que les λ_i sont les *résidus* de $\frac{\omega_\nu}{P_{\nu+1}}$.

On dit que les résidus satisfont la condition \mathcal{P} si $\lambda_i \notin \mathbb{Q}$ pour tout i et l'un des λ_i est ou bien non réel ou bien un irrationnel mal approché par les rationnels.

Voici deux résultats dus à D. Cerveau et F. Loray [11] et D. Cerveau et J.-F. Mattei [12] que nous concentrons dans un seul et qui donnent un aperçu raisonnable des feuilletages $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\omega$ lorsque ω_ν est non dicritique logarithmique.

Théorème 4. *Soit $\omega = \omega_\nu + \dots$ un germe de 1–forme intégrable à l'origine de \mathbb{C}^n , $n \geq 3$. On suppose que la partie homogène de plus bas degré ω_ν est non dicritique et satisfait $\text{Cod Sing } \omega_\nu \geq 2$.*

(1) *Si $P_{\nu+1} = i_R \omega_\nu$ est irréductible de degré $\nu + 1 = p^s$ avec $s \in \mathbb{N}$ et p premier, alors ω possède une intégrale première holomorphe non constante $f = P_{\nu+1} + \dots$, $\omega \wedge df = 0$.*

- (2) Si $P_{\nu+1} = P_1 \cdots P_s$ est réduct, $s \geq 2$, l'hypersurface $[P_{\nu+1} = 0] \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n-1}$ est à croisement ordinaires et les résidus λ_i satisfont la condition \mathcal{P} , alors ω possède une intégrale première $\sum \lambda_i \log f_i$, où les $f_i = P_i + \cdots$ sont holomorphes.
- (3) Si $P_{\nu+1}$ est irréductible et $[P_{\nu+1} = 0] \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n-1}$ est à croisements ordinaires alors ω possède intégrale première holomorphe.

Remarque 1. Dans les cas (1), (2) et (3) le feuilletage \mathcal{F}_ω est défini par une 1-forme fermée tout comme sa partie homogène \mathcal{F}_{ω_ν} .

Remarque 2. Dans [11] on construit des feuilletages \mathcal{F}_ω de $\mathbb{C}^3, 0$ tels que la partie homogène ω_ν soit de type $dP_{\nu+1}$ avec $P_{\nu+1}$ irréductible et qui ne possèdent pas d'intégrale première holomorphe non constante. Ils ont la propriété d'être image réciproque par une application holomorphe d'un feuilletage de $\mathbb{C}^2, 0$.

Remarque 3. Dans [13] on s'intéresse au cas où $P_{\nu+1} = 0$ est un croisement normal, i.e. un produit de coordonnées, et les λ_i des entiers positifs. On obtient dans ce cas l'alternative (non exclusive) : ou bien \mathcal{F}_ω est défini par une 1-forme fermée (qui n'est pas en général à pôles simples) ou bien \mathcal{F}_ω est image réciproque d'un feuilletage de $\mathbb{C}^2, 0$.

Intéressons nous maintenant dans le cas dicritique aux propriétés de ω_ν susceptibles d'être transmises à tout $\omega = \omega_\nu + \cdots$. Le premier résultat en ce sens est du à C. Camacho et A. Lins Neto [1] :

- Théorème 5.** (1) Soit $\omega = \omega_\nu + \cdots$ un germe de 1-forme intégrable à l'origine de \mathbb{C}^3 dont le ν -jet est la 1-forme homogène dicritique ω_ν avec $\nu \geq 3$. Si la 2-forme $d\omega_\nu$ ne s'annule qu'en 0, il existe un germe de difféomorphisme $\phi : \mathbb{C}^3, 0 \circlearrowleft$ tel que $\omega = \phi^* \omega_\nu$, i.e. ω et ω_ν sont conjuguées.
- (2) Soit $\omega \in \Omega^1(\mathbb{C}^n, 0)$, $n \geq 4$, un germe de 1-forme intégrable pour lequel il existe une section 3-plane $i : \mathbb{C}^3, 0 \rightarrow \mathbb{C}^n, 0$ telle que $i^* \omega$ satisfait le point (1). Alors il existe une submersion $j : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^3, 0$ telle que $\omega = j^*(i^* \omega)$. En particulier ω est conjugué à la 1-forme $(i^* \omega)_\nu \in \Omega^1(\mathbb{C}^3, 0)$ (vue dans $\Omega^1(\mathbb{C}^n, 0)$).

Le Théorème 5 classe les feuilletages en dimension 3 à partie homogène *générique* pour $\nu \geq 3$. Qu'en est-il pour $\nu \leq 2$? Il se trouve que si $\omega_\nu \in \Omega^1(\mathbb{C}^n, 0)$ est intégrable homogène dicritique de degré $\nu \leq 2$, il existe un polynôme homogène $Q_{\nu+1}$ de degré $\nu + 1$ tel que $\frac{\omega_\nu}{Q_{\nu+1}}$ soit fermée [3]. Par exemple si $\nu = 1$, ω_1 est linéairement conjugué à $x_1 dx_2 - x_2 dx_1$ et $Q_2 = x_1 x_2$ convient.

On déduit la classification (générique lorsque) $\nu \leq 2$ en utilisant le résultat suivant énoncé dans [7] :

Théorème 6. Soit $\omega = \omega_\nu + \cdots \in \Omega^1(\mathbb{C}^n, 0)$ intégrable avec ω_ν homogène dicritique de degré ν et satisfaisant $\text{Cod Sing } \omega_\nu \geq 2$. On suppose qu'il existe un polynôme homogène Q tel que $\frac{\omega_\nu}{Q}$ soit fermée.

Il existe alors $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n, 0)$ tel que $\frac{\omega}{f}$ soit fermée.

Remarque 4. De la même façon que dans le cas homogène, une 1-forme fermée *méromorphe* η s'écrit :

$$\eta = \sum_{i=1}^s \lambda_i \frac{df_i}{f_i} + d \left(\frac{H}{f_1^{n_1} \cdots f_s^{n_s}} \right)$$

où les f_i et H sont holomorphes, $\lambda_i \in \mathbb{C}$ et $n_i \in \mathbb{N}$. La fonction multivaluée $\sum \lambda_i \log f_i + \frac{H}{f_1^{n_1} \cdots f_s^{n_s}}$ est une intégrale première du feuilletage correspondant.

Corollaire 1. Soit $\omega = \omega_\nu + \cdots \in \Omega^1(\mathbb{C}^n, 0)$ intégrable avec ω_ν homogène dicritique, $\text{Cod Sing } \omega_\nu \geq 2$ et $\nu \leq 2$. Il existe $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n, 0)$ tel que $\frac{\omega}{f}$ soit fermée.

Remarque 5. Le Théorème 6 s'étend stricto-sensu (avec une démonstration différente) de la façon suivante : s'il existe Q rationnelle homogène telle que $\frac{\omega_\nu}{Q}$ soit fermée alors il existe f méromorphe telle que $\frac{\omega}{f}$ soit fermée.

Remarque 6. En dimension supérieure à 4 l'espace des formes intégrables homogènes dicritiques de degré ν est une variété algébrique non irréductible. "Beaucoup" de ses composantes sont associés à des feuilletages définis par des 1-formes fermées rationnelles. C'est un cas typique où le Théorème 6 s'applique.

Ceci étant dit il semble intéressant d'étudier les dégénérescences des cas *génériques* – ce que nous abordons dans les chapitres suivants.

3. CAS DICRITIQUE DÉGÉNÉRÉ AVEC $\nu \leq 2$

Dans le paragraphe qui précède l'hypothèse $\text{Cod Sing } \omega_\nu \geq 2$ a été essentielle. En fait si ω_ν est homogène dicritique avec $\nu \leq 2$ et ω_ν s'annule sur une hypersurface alors $\nu = 2$ et à conjugaison linéaire près ω_2 est de l'un des deux types suivants :

$$x_1(x_1dx_2 - x_2dx_1) \quad \text{ou} \quad x_3(x_1dx_2 - x_2dx_1).$$

Il existe des 1-formes holomorphes $\omega \in \Omega^1(\mathbb{C}^n, 0)$ dont le 2-jet est $x_1(x_1dx_2 - x_2dx_1)$ pour lesquels il n'existe pas de $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ tels que $\frac{\omega}{f}$ soit fermée : c'est d'ailleurs générique par la topologie de Krull. Pour ce qui concerne les dimensions supérieures à 2 on peut poser la

Question : Soit $\omega \in \Omega^1(\mathbb{C}^n, 0)$ intégrable dont le 2-jet est $x_1(x_1dx_2 - x_2dx_1)$. Existe-t-il $F : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^2, 0$ et $\omega_0 \in \Omega^1(\mathbb{C}^2, 0)$ tels que $\omega \wedge F^*\omega_0 = 0$, i.e. le feuilletage \mathcal{F}_ω est-il le tiré en arrière d'un feuilletage du plan ?

Pour ce qui concerne l'autre modèle nous avons la :

Proposition 2. Il n'existe pas de 1-forme $\omega \in \Omega^1(\mathbb{C}^n, 0)$, $n \geq 3$, ω intégrable, $\text{Cod Sing } \omega \geq 2$ ayant pour 2-jet $\omega_2 = x_3(x_1dx_2 - x_2dx_1)$.

Démonstration. Quitte à couper par un 3-plan général, il suffit d'établir la proposition pour $n = 3$. Supposons qu'il existe $\omega \in \Omega^1(\mathbb{C}^3, 0)$ telle que $j^2\omega = \omega_2$ et $\text{Cod Sing } \omega \geq 2$.

Considérons l'éclatement $E : \tilde{\mathbb{C}}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3, 0$ de l'origine de \mathbb{C}^3 . Le diviseur exceptionnel $E^{-1}(0) \simeq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ est génériquement transverse au feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ relevé de $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\omega$ par E . En se plaçant dans la carte (x_1, x_2, x_3) où E s'exprime sous la forme :

$$E(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1x_2, x_1x_3)$$

on constate que $\tilde{\mathcal{F}}$ est défini par :

$$\frac{E^*\omega}{x_1^3} = \tilde{\omega} = x_3dx_2 + \tilde{A}dx_1 + x_1\tilde{B}dx_2 + x_1\tilde{C}dx_3.$$

En écrivant explicitement l'intégrabilité de $\tilde{\omega}$ on constate que $\tilde{\omega}$ s'annule sur la droite $x_1 = x_3 = 0$ contenue dans $E^{-1}(0)$. Un calcul immédiat montre que :

$$d\tilde{\omega} \Big|_{x_1=x_3=0} = dx_3 \wedge dx_2 + dx_1 \wedge (\cdot).$$

Ainsi $\tilde{\omega}$ annule un champ \tilde{Z} dont la composant suivant $\frac{\partial}{\partial x_1}$ est non nulle le long de $x_1 = x_3 = 0$. Ceci oblige $\tilde{\omega}$ à s'annuler sur une surface, contredisant l'hypothèse $\text{Cod Sing } \omega \geq 2$. \square

Si l'on considère l'espace $\mathcal{J}_\nu \subset \Omega^1(\mathbb{C}^n, 0)$ des germes de 1-formes intégrables ω tels que $j^{\nu-1}\omega = 0$, $\omega_\nu = j^\nu\omega$ est homogène de degré ν dicritique, on hérite d'une projection (jet d'ordre ν)

$$j^\nu : \mathcal{J}_\nu \rightarrow [\mathcal{J}_\nu]$$

à valeur dans $[\mathcal{J}_\nu] = \{\omega_\nu \text{ homogène intégrable dicritique de degré } \nu\}$. La Proposition 2 indique que cette projection n'est en général pas surjective.

Remarque 7. Le groupe des difféomorphismes tangents à l'identité $\text{Diff}_1(\mathbb{C}^n, 0)$ agit sur \mathcal{J}_ν en préservant les fibres de j^ν . Le Théorème 5 de Camacho-Lins Neto s'interprète comme suit : si $\underline{\omega}_\nu$ satisfait les hypothèses du Théorème 5 alors l'action de $\text{Diff}_1(\mathbb{C}^n, 0)$ sur la fibre $(j^\nu)^{-1}(\underline{\omega}_\nu)$ est transitive.

4. UN LEMME UTILE ET LE THÉORÈME DE CAMACHO-LINS NETO REVISITÉ

Dans ce chapitre $\omega = \omega_\nu + \dots \in \Omega^1(\mathbb{C}^3, 0)$ est un germe de 1-forme intégrable, $\text{Cod Sing } \omega \geq 2$. Ils nous sera utile de représenter les germes considérés sur une boule centrée à l'origine. Nous la noterons B et son rayon sera supposé suffisamment petit pour que le discours qui suit ait un sens. On pose $B^* = B - \{0\}$.

Lemme 1. *Supposons qu'il existe un recouvrement ouvert $\{U_k\}$ de B^* et des champs de vecteurs holomorphes $X_k \in \Theta(U_k)$ tels que $\omega|_{U_k} = i_{X_k} d\omega|_{U_k}$. Il existe alors $X \in \Theta(\mathbb{C}^3, 0)$ tel que $\omega = i_X d\omega$.*

Démonstration. Soit Z un champ de vecteurs tel que $d\omega = i_Z \text{vol}$ où $\text{vol} = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ est une 3-forme non nulle de \mathbb{C}^3 . L'hypothèse du lemme implique que l'ensemble des zéros $\text{Sing } Z$ de Z est contenu dans $\text{Sing } \omega$ et donc de codimension au moins deux. Lorsque $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, on a $i_{X_i - X_j} d\omega|_{U_i \cap U_j} = 0$; puisque $\text{Cod Sing } Z \geq 2$ il existe $h_{ij} \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)$ tels que $X_i - X_j = h_{ij} Z$. Comme le groupe de cohomologie $H^1(B^*, \mathcal{O})$ est trivial, c'est un résultat de H. Cartan [5] (voir [3]), on a, quitte à choisir un bon recouvrement, $h_{ij} = h_i - h_j$, $h_k \in \mathcal{O}(U_k)$. Ainsi les champs $X_i - h_i Z$ se recollent et définissent un champ global $X^* \in \Theta(B^*)$. Le Théorème de Hartogs permet de prolonger ce champ en un champ $X \in \Theta(B)$ qui vérifie $\omega = i_X d\omega$. \square

À titre d'application nous présentons une preuve de l'énoncé de Camacho-Lins Neto, partie (1).

Démonstration du Théorème 5, partie (1). Puisque $d\omega_\nu$ ne s'annule qu'en 0 il en est de même pour $d\omega$. Par suite en chaque point m d'une boule épointée B^* on peut trouver un champ $X_{,m} \in \Theta(B^*, m)$ tel que $\omega_{,m} = i_{X_{,m}} d\omega_{,m}$. D'après le Lemme 1 il existe $X \in \Theta(\mathbb{C}^3, 0)$ tel que $\omega = i_X d\omega$. Il est clair que X s'annule en 0 sinon $d\omega_\nu$ s'annulerait sur une droite. Soit X_1 la partie linéaire de X en 0; on a :

$$\omega_\nu = i_{X_1} d\omega_\nu = i_{\frac{R}{\nu+1}} d\omega_\nu$$

qui conduit à $i_{X_1 - \frac{R}{\nu+1}} d\omega_\nu = 0$. Comme $\nu \geq 3$ et $d\omega_\nu$ est à singularité isolée on a $X_1 = \frac{R}{\nu+1}$. Le Théorème de linéarisation des champs de vecteur de Poincaré permet alors de supposer que $X = X_1 = \frac{R}{\nu+1}$. Un calcul direct (utilisant $L_{\frac{R}{\nu+1}} \omega = \omega$) montre que $\omega = \omega_\nu$. \square

Remarque 8. Dans l'article [1] les auteurs substituent au Lemme 1 le Lemme de Division de de Rham-Saito [25]. Il se trouve que le Lemme de Division peut se démontrer (sur \mathbb{C} et en dimension 3) en utilisant l'argument de H. Cartan.

Remarque 9. Dans [18] l'un de nous montre que la seule hypothèse $\text{Sing } d\omega = \{0\}$ conduit, à conjugaison près, à l'existence d'un champ de vecteurs radial à poids $X = \sum p_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $p_i \in \mathbb{N}^*$, tel que $L_X \omega = p\omega$, $p \in \mathbb{N}$, ce qui permet de montrer que ω est *quasi-homogénéisable*. Le feuilletage \mathcal{F}_ω peut être vue comme image réciproque d'un feuilletage sur un espace projectif à poids de dimension 2.

Le lemme qui suit va nous permettre de donner une généralisation des résultats qui précèdent. Comme toujours on désigne par $E : \tilde{\mathbb{C}}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3, 0$ l'éclatement de l'origine de \mathbb{C}^3 ; le diviseur exceptionnel $E^{-1}(0)$ est isomorphe à $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$.

Lemme 2. *Soit $\omega \in \Omega^1(\mathbb{C}^3, 0)$ un germe de 1-forme intégrable à l'origine de \mathbb{C}^3 dont la partie homogène ω_ν est dicritique et satisfait $\text{Cod Sing } \omega_\nu \geq 2$. On suppose qu'en chaque point $m \in E^{-1}(0)$ il existe un germe de champ de vecteur $\tilde{X}_{,m} \in \Theta(\tilde{\mathbb{C}}^3, m)$ tel que :*

- (1) $\tilde{X}_{,m}$ est tangent au feuilletage $E^{-1}(\mathcal{F}_\omega)$, i.e. $i_{\tilde{X}_{,m}} E^* \omega = 0$.
- (2) $\tilde{X}_{,m}$ est transverse à $E^{-1}(0)$ en tout point $m \in E^{-1}(0)$.

Alors il existe $X \in \Theta(\mathbb{C}^3, 0)$ tel que $i_X d\omega = \omega = L_X \omega$.

Démonstration. Nous allons montrer que les hypothèses du Lemme 1 sont satisfaites. On écrit

$$\omega = \omega_\nu + \omega_{\nu+1} + \cdots = (A_\nu + \cdots)dx_1 + (B_\nu + \cdots)dx_2 + (C_\nu + \cdots)dx_3$$

où les A_ν, B_ν, C_ν sont homogènes de degré ν et satisfont :

$$x_1 A_\nu + x_2 B_\nu + x_3 C_\nu = 0.$$

Plaçons nous dans la carte (x_1, x_2, x_3) de $\tilde{\mathbb{C}}^3$ où l'expression de E est donnée par $E(x_1, x_2, x_3) = (x_3 x_1, x_3 x_2, x_3)$. Dans cette carte $E^{-1}(0)$ est donné par $(x_3 = 0)$ et

$$E^* \omega = x_3^{\nu+1} \left[(A_\nu(x_1, x_2, 1) + x_3 A') dx_1 + (B_\nu(x_1, x_2, 1) + x_3 B') dx_2 + C' dx_3 \right]$$

où les A', B', C' sont holomorphes le long de $x_3 = 0$.

En chaque point $m \in E^{-1}(0)$, l'hypothèse implique l'existence d'un champ de vecteur Y_m :

$$Y_m = \frac{\partial}{\partial x_3} + Y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + Y_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad Y_i \text{ holomorphes,}$$

tel que $i_{Y_m} E^* \omega_m = 0$. En conjuguant localement Y_m à $\frac{\partial}{\partial x_3}$ par un difféomorphisme local fibré $\phi_m = (\varphi, x_3)$, $\varphi(x_1, x_2, 0) = (x_1, x_2)$, on conjugue $E^* \omega_m$ à

$$W x_3^{\nu+1} (A_\nu(x_1, x_2, 0) dx_1 + B_\nu(x_1, x_2, 0) dx_2)$$

où W est une unité, $W(x_1, x_2, 0) = 1$. Quitte à changer x_3 en $W^{\frac{1}{\nu+1}} x_3$, on conjugue $E^* \omega_m$ à :

$$\Omega = x_3^{\nu+1} (A_\nu(x_1, x_2, 0) dx_1 + B_\nu(x_1, x_2, 0) dx_2).$$

Un calcul élémentaire montre que $i_{\frac{\partial}{\partial x_3}} d\Omega = (\nu + 1)\Omega$. De sorte que l'on peut modifier le champ \tilde{X}_m pour qu'il satisfasse $i_{\tilde{X}_m} dE^* \omega_m = E^* \omega_m$. La collection des \tilde{X}_m nous permet de construire des champs X_k satisfaisant le Lemme 1. \square

Nous allons maintenant décrire une première conséquence du Lemme 2. Une 1-forme dicritique $\omega_\nu \in \Omega^1(\mathbb{C}^3)$, $\text{Cod Sing } \omega_\nu \geq 2$, induit un feuilletage $[\mathcal{F}_{\omega_\nu}]$ de degré $\nu - 1$ sur $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. Ce feuilletage possède exactement $\nu^2 - \nu + 1$ points singuliers comptés avec multiplicité. Nous dirons que $[\mathcal{F}_{\omega_\nu}]$ est *sans nilpotence* si en tout point $m \in \text{Sing } [\mathcal{F}_{\omega_\nu}]$ le feuilletage est défini par une 1-forme locale α_m dont la partie linéaire est non nilpotente (en particulier non nulle). Dit autrement α_m est ou bien de type Kupka-Reeb, i.e. $d\alpha(m) \neq 0$, ou bien le 1-jet de α en m est à conjugaison près $d(x_1 x_2)$. Dans ce dernier cas nous dirons que $m \in \text{Sing } [\mathcal{F}_{\omega_\nu}]$ est de *type centre* ou *central* si $[\mathcal{F}_{\omega_\nu}]_m$ possède une intégrale première non constante : $\alpha_m = gdf$, $f \in \mathcal{O}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, m)$, $g \in \mathcal{O}^*(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, m)$. Notons qu'un tel f est nécessairement de Morse en m .

Proposition 3. *Soit $\omega = \omega_\nu + \cdots \in \Omega^1(\mathbb{C}^3, 0)$ un germe de 1-forme intégrable à l'origine de \mathbb{C}^3 dont la partie homogène ω_ν est dicritique, $\nu \geq 3$ et $\text{Cod Sing } \omega_\nu \geq 2$. Si $[\mathcal{F}_{\omega_\nu}]$ est sans nilpotence et n'a pas de point central, alors ω et ω_ν sont conjugués ; en particulier \mathcal{F}_ω et \mathcal{F}_{ω_ν} sont conjugués.*

Démonstration. D'après la Proposition 1 les hypothèses du Lemme 2 sont satisfaites. Il existe donc un champ $X \in \Theta(\mathbb{C}^3, 0)$ tel que $i_X(d\omega) = \omega$. On conclut comme dans la preuve du Théorème 5 : comme $\omega_\nu = i_{\frac{R}{\nu+1}} d\omega_\nu$ et $\text{Cod Sing } \omega_\nu \geq 2$ on a $\text{Cod Sing } d\omega_\nu \geq 2$. Par suite si $X_1 = j^1 X$, l'égalité $i_{X_1 - \frac{R}{\nu+1}} d\omega_\nu = 0$ implique que $X_1 = \frac{R}{\nu+1}$. On conclut en linéarisant X . \square

Remarque 10. La condition sans nilpotence, sans point central est générique dans l'espace des 1-formes dicritiques de degré ν .

On peut interpréter la Proposition 3 comme un énoncé de rigidité ou de détermination finie.

Proposition 4. *Soit $\omega = \omega_\nu + \dots \in \Omega^1(\mathbb{C}^3, 0)$ un germe de 1-forme intégrable à l'origine de \mathbb{C}^3 dont la partie homogène ω_ν est dicritique, $\nu \geq 3$ et $\text{Cod Sing } \omega_\nu \geq 2$. On suppose qu'en chaque point singulier m de $[\mathcal{F}_{\omega_\nu}]$ celui ci est donné par une 1-forme à 1-jet non nul. Si $\text{Sing } \omega$ est homéomorphe à $\text{Sing } \omega_\nu$, alors ω et ω_ν sont conjugués.*

Démonstration. Laisée au lecteur. □

5. FEUILLETAGES AVEC SINGULARITÉS NILPOTENTES ; PROBLÈMES DE DÉPLOIEMENTS

Dans ce chapitre on identifie \mathbb{C}^3 à $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}$ et l'on considère un feuilletage \mathcal{F}_0 sur $\mathbb{C}^2, 0$ ayant une singularité nilpotente non triviale en 0, i.e. avec 1-jet nilpotent non nul. Soit \mathcal{F} un déploiement de \mathcal{F}_0 sur \mathbb{C}^3 , c'est à dire un germe de feuilletage en $0 \in \mathbb{C}^3$ dont la restriction à $\mathbb{C}^2 \times \{0\}$ est \mathcal{F}_0 . Si $\omega \in \Omega^1(\mathbb{C}^3, 0)$ est une 1-forme définissant \mathcal{F} , le feuilletage \mathcal{F}_0 est défini par $\omega_0 \in \Omega^1(\mathbb{C}^2, 0)$ restriction de ω à $\mathbb{C}^2 \times \{0\}$. On fixe des coordonnées (x_1, x_2, x_3) de $\mathbb{C}^3 = \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}$; comme \mathcal{F}_0 est à singularité nilpotente non triviale on peut supposer que le 1-jet de ω_0 est $x_1 dx_1$. Il se pourrait que ω soit non singulière en 0, c'est le cas par exemple pour le feuilletage par les niveaux de $x_1^2 + x_2^2 + x_3$; mais dans ce cas \mathcal{F} et donc \mathcal{F}_0 possède une intégrale première holomorphe non constante (Frobenius classique).

Supposons maintenant ω singulière en 0. Le 1-jet de ω est du type :

$$\omega_1 = x_1 dx_1 + x_3 dl + L dx_3$$

où $l = l(x_1, x_2)$ et $L = L(x_1, x_2, x_3)$ sont des formes linéaires. L'intégrabilité de ω impliquant celle de ω_1 on a :

$$(x_1 dx_1 + x_3 dl) \wedge d(l - L) \wedge dx_3 \equiv 0$$

qui implique $d\omega(0) = d\omega_1(0) = \lambda dx_1 \wedge dx_3$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Il y a deux cas suivant que λ est nul ou non. Si $d\omega_1(0) \neq 0$ alors $l = l(x_1)$, $L = L(x_1, x_3)$ et nous avons un phénomène de Kupka-Reeb : il existe une submersion

$$F : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (X_1(x_1, x_2, x_3), X_3(x_1, x_2, x_3)), \quad F(x_1, 0, x_3) = (x_1, x_3),$$

telle que $\omega = F^* \alpha$ où α est la restriction de ω au plan $x_2 = 0$. Si

$$\omega = A dx_1 + B dx_2 + C dx_3 = x_1 dx_1 + \dots$$

on a $F^* \alpha = A(X_1, 0, X_3) dX_1 + C(X_1, 0, X_3) dX_3$. Ainsi ω_0 est la restriction de $F^* \alpha$ au plan $x_3 = 0$. Un calcul direct élémentaire montre que le nombre de Milnor $\mu(\mathcal{F}_0; 0)$ de \mathcal{F}_0 en 0 est plus grand ou égal à 3. Dans ce cas il y a un facteur intégrant pour \mathcal{F} , et donc \mathcal{F}_0 (tout du moins formel).

Supposons maintenant ω_1 fermée :

$$\omega_1 = d \left(\frac{x_1^2}{2} + x_3 l + \varepsilon x_3^2 \right) = dq, \quad \varepsilon \in \mathbb{C}, \quad l = l(x_1, x_2) \text{ linéaire.}$$

De nouveau nous distinguons trois cas suivant le rang de la forme quadratique q .

Si q est de rang 3, la forme ω est à singularité isolée et les feuilletages \mathcal{F} et donc \mathcal{F}_0 possèdent une intégrale première holomorphe non constante (Théorème de Malgrange).

Si q est de rang 2, $q = \frac{x_1^2}{2} + x_3(ax_1 + \varepsilon x_3)$, alors d'après la Proposition 1 ou bien \mathcal{F} et donc \mathcal{F}_0 possèdent une intégrale première holomorphe ou bien il existe une submersion $F : \mathbb{C}^3, 0 \rightarrow \mathbb{C}^2, 0 = (x_2 = 0)$,

$$F : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (X_1(x_1, x_2, x_3), X_3(x_1, x_2, x_3)),$$

$F(x_1, 0, x_3) = (x_1, x_3)$, dont les fibres sont tangents à \mathcal{F} . Avec les mêmes notations que précédemment le feuilletage \mathcal{F} est donné par $A(X_1, 0, X_3) dX_1 + C(X_1, 0, X_3) dX_3$ et \mathcal{F}_0 par $A(X_1, 0, X_3) dX_1 + C(X_1, 0, X_3) dX_3 \Big|_{x_3=0}$. Comme \mathcal{F}_0 possède facteur intégrant formel, il en est de même pour \mathcal{F} [12, 13].

Un calcul élémentaire montre que le nombre de Milnor de cette dernière forme est plus grand que trois.

Avant d'attaquer le cas restant où q est de rang 1, nous résumons la situation dans la

Proposition 5. *Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\omega$ un déploiement de \mathcal{F}_0 sur $\mathbb{C}^3, 0 = \mathbb{C}^2, 0 \times \mathbb{C}, 0$, $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}|_{\mathbb{C}^2, 0 \times \{0\}}$. On suppose que \mathcal{F}_0 a une singularité nilpotente non triviale en 0. On est dans l'un des cas suivants :*

- (1) \mathcal{F} et \mathcal{F}_0 ont une intégrale première holomorphe non constante.
- (2) Le nombre de Milnor $\mu(\mathcal{F}_0; 0)$ est plus grand que 3 et \mathcal{F} et \mathcal{F}_0 ont un facteur intégrant (formel).
- (3) Le 1-jet de ω en 0 est $(x_1 + \delta x_3)d(x_1 + \delta x_3)$, $\delta \in \mathbb{C}$. À conjugaison linéaire près on peut supposer que $\delta = 0$.

Le cas restant correspondant au cas (3) où rang $q = 1$ se traite de la façon suivante, tout de moins lorsque $\mu(\mathcal{F}_0; 0) = 2$.

Proposition 6. Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\omega$ un déploiement de $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_{\omega_0} = \mathcal{F}|_{\mathbb{C}^2, 0 \times \{0\}}$; on suppose que le 1-jet de ω est $j^1\omega = x_1 dx_1$. Si $\mu(\mathcal{F}_0; 0) = 2$, alors on est dans l'une des situations suivantes :

- (1) \mathcal{F}_0 (et \mathcal{F}) ont une intégrale première holomorphe.
- (2) Le déploiement \mathcal{F} de \mathcal{F}_0 est trivial, plus précisément il existe un champ de vecteurs $\xi \in \Theta(\mathbb{C}^3, 0)$ tangent à \mathcal{F} et transverse à $\mathbb{C}^2, 0 \times \{0\}$.

Démonstration. Elle repose sur la forme normale de Loray. En fait l'énoncé 3 dit que l'on peut supposer à unité multiplicative près que

$$\omega = X_1 dX_1 + (l_1(f) + X_1 l_2(f))df$$

avec $f = f(x_2, x_3) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$, l_1 et $l_2 \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, 0)$ et $X_1 = x_1 + \dots \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^3, 0)$.

Le feuilletage \mathcal{F}_0 est alors donné par

$$\omega_0 = X_1(x_1, x_2, 0)dX_1(x_1, x_2, 0) + (l_1(f(x_2, 0)) + X_1 l_2(f(x_2, 0)))df(x_2, 0)$$

qui est conjugué à

$$\omega'_0 = x_1 dx_1 + (l_1(f_0(x_2)) + x_1 l_2(f_0(x_2)))df_0(x_2)$$

avec $f_0(x_2) = f(x_2, 0)$. Si f_0 est une submersion alors (X, f) aussi et l'on est dans le cas (2). On peut donc supposer que $f_0(x_2) = x_2^k$ avec $k \geq 2$.

Remarquons que si l_1 est une unité alors ω'_0 possède une intégrale première holomorphe et nous sommes dans le cas (1). En effet ω'_0 apparait comme image réciproque par l'application (x_1, x_2^k) de

$$\omega''_0 = x_1 dx_1 + (l_1(u) + x_1 l_2(u))du$$

qui se trouve non singulière, donc avec intégrale première. On peut donc supposer que $l_1 = \varepsilon u^l + \dots$, $l \geq 1$, $\varepsilon \neq 0$; l'idéal des composantes de ω'_0 est donc $\langle x_1, x_2^{lk+k-1} \rangle$. Comme $k \geq 2$ et $l \geq 1$, $k(l+1) - 1 \geq 3$ et donc $\mu(\mathcal{F}_0; 0) \geq 3$, cas exclus par hypothèse. \square

Dans [8] on classe les feuilletages de degré 2 du plan $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ n'ayant qu'une seule singularité. Il découle de cette classification que si m est un point singulier de type nilpotent non trivial d'un feuilletage \mathcal{F}_0 de degré 2 alors $\mu(\mathcal{F}_0; m) \leq 6$.

En fait la Proposition 6 s'étend comme suit :

Théorème 7. Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\omega$ un feuilletage de $\mathbb{C}^3, 0$ déploiement de $\mathcal{F}_{\omega_0} = \mathcal{F}_0 = \mathcal{F}|_{\mathbb{C}^2, 0 \times \{0\}}$; on suppose que le 1-jet de ω est $x_1 dx_1$.

- (1) Si $\mu(\mathcal{F}_0; 0) = 3$ alors ou bien le déploiement \mathcal{F} est trivial ou bien \mathcal{F}_0 (et donc \mathcal{F}) possède un facteur intégrant formel $g_0 \in \widehat{\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)}$ (respectivement $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^3, 0)$) tel que $d\left(\frac{\omega_0}{g_0}\right) = 0$ (respectivement $d\left(\frac{\omega}{g}\right) = 0$).
- (2) Si $\mu(\mathcal{F}_0; 0) + 1$ est un nombre premier alors ou bien le déploiement \mathcal{F} est trivial ou bien \mathcal{F}_0 (et donc \mathcal{F}) possède une intégrale première holomorphe non constante.

Démonstration. Elle procède comme la précédente; lorsque le déploiement est non trivial on a, avec les mêmes notations :

$$\omega'_0 = x_1 dx_1 + (l_1(x_2^k) + x l_2(x_2^k))kx_2^{k-1} dx_2, \quad k \geq 2.$$

Visiblement ω'_0 est image réciproque par (x_1, x_2^k) de :

$$\omega''_0 = x_1 dx_1 + (l_1(u) + x_1 l_2(u)) du.$$

Comme dans la preuve précédente si l_1 est unité ω''_0 possède une intégrale première holomorphe et par suite \mathcal{F}_0 et \mathcal{F} aussi. Sinon le 1-jet de ω''_0 est $x_1 dx_1 + (\varepsilon u + \lambda x_1) du$ avec $\varepsilon = l'_1(0)$ et $\lambda = l_2(0)$.

Ce 1-jet est nilpotent si et seulement si $\varepsilon = \lambda = 0$; s'il est non nilpotent, la théorie élémentaire des formes normales [12] assure que ω''_0 (et donc ω'_0 et puis ω) possède un facteur intégrant formel. On pose $l_1(u) = \varepsilon_p u^p + \dots$, $\varepsilon_p \neq 0$, de sorte que

$$l_1(x_2^k) = \varepsilon_p x_2^{kp} + \dots, \quad k \geq 2.$$

L'idéal des composantes de ω'_0 est donc $\langle x_1, x_2^{k(p+1)-1} \rangle$ et par suite $\mu(\mathcal{F}_0; 0) + 1 = k(p+1)$. Comme $k \geq 2$, si $\mu(\mathcal{F}_0; 0) + 1$ est premier alors $p = 0$ et l_1 est une unité; de sorte que \mathcal{F}_0 a une intégrale première holomorphe non constante. Lorsque $\mu(\mathcal{F}_0; 0) = 3$, alors ou bien $(k, p) = (4, 0)$ et \mathcal{F}_0 a une intégrale première holomorphe, ou bien $(k, p) = (2, 1)$, cas où \mathcal{F}_0 a un facteur intégrant formel. \square

Remarque 11. Comme on l'a dit, pour une singularité nilpotente d'un feuilletage de degré 2 on a que $\mu \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$; seul le nombre 5 n'apparaît pas dans la liste du Théorème 7. Dans ce cas avec les notations précédentes on a, lorsque $k \geq 2$, les possibilités $(k, p) = (6, 0)$ (présence d'intégrale première holomorphe), $(k, p) = (3, 1)$ (présence de facteur intégrant formel) mais aussi à priori $(k, p) = (2, 2)$; dans ce cas, si $\lambda \neq 0$, il y a encore un facteur intégrant formel.

Remarque 12. Le cas $\mu = 2$, traité dans la Proposition 6, l'est aussi dans le Théorème 7. Nous avons souhaité séparer ces deux cas pour des raisons de lisibilité. Remarquons aussi que l'énoncé 7 se généralise en dimension n quelconque avec une preuve identique.

Exemple : Soit \mathcal{F}_0 le feuilletage de degré 2 défini par $\omega_0 = (x_1 - x_2^3) dx_1 + x_1 x_2^2 dx_2 = (x_1 - x_2^3) dx_1 + \frac{1}{3} x_1 dx_2^3$. On a $\mu(\mathcal{F}_0; 0) = 5$, $k = 3$, $p = 1$ et \mathcal{F}_0 possède l'intégrale première $\frac{3x_1 - 2x_2^3}{x_1^3}$.

6. THÉORÈME DE DULAC : PRÉSENTATION ET APPLICATIONS

Rappelons un résultat célèbre d'Henri Dulac [14] sous sa forme généralisée dans [9] :

Théorème 8. *Soit \mathcal{F} un feuilletage de degré deux sur le plan projectif $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. Supposons qu'il existe un point singulier $m \in \text{Sing } \mathcal{F}$ de type centre. Alors \mathcal{F} est défini par une 1-forme fermée rationnelle η .*

En fait Dulac donne en carte affine une liste de formes normales pour les feuilletages de degré 2 ayant une singularité de type centre sous l'hypothèse que la droite à l'infini est invariante (il considère en effet des 1-formes de type $A dx + B dy$ où A et B sont des polynômes de degré inférieur ou égal à 2). Dans [9] on montre que la présence d'une singularité de type centre implique celle d'une droite invariante, ce qui permet d'invoquer Dulac. Les preuves reposent sur des calculs formels longs typiques du début du 20e siècle et l'intuition d'un tel résultat reste mystérieuse; il serait intéressant d'ailleurs d'en produire une démonstration géométrique.

Ce théorème doit être interprété comme suit : une certaine condition d'intégrabilité locale (condition de centre) conduit à un résultat d'intégrabilité globale (primitive d'une forme fermée rationnelle).

Voici la liste des modèles obtenus par H. Dulac. Les feuilletages génériques ont une singularité de type centre. Par contre il y a des feuilletages qui n'ont pas de singularités centrales; ces deux situations sont contenues dans la liste ci-dessous.

Théorème 9. (Dulac [14]) *La 1-forme fermée rationnelle η est d'un des types suivants :*

- (a) $\eta = dq$, où q est un polynôme de degré 3.
- (b) $\eta = \sum_{i=1}^3 \lambda_j \frac{dp_j}{p_j}$, où $\lambda_j \in \mathbb{C}^*$ et p_j est un polynôme de degré 1, $1 \leq j \leq 3$.
- (c) $\eta = \sum_{i=1}^2 \lambda_j \frac{dp_j}{p_j}$, où $\lambda_j \in \mathbb{C}^*$, $j = 1, 2$, $\deg(p_1) = 2$ et $\deg(p_2) = 1$.
- (d) $\eta = \sum_{i=1}^2 \lambda_j \frac{dp_j}{p_j} + dq$, où $\lambda_j \in \mathbb{C}^*$, $\deg(p_j) = 1$, $j = 1, 2$, et $\deg(q) = 1$.

- (e) $\eta = \sum_{i=1}^2 \lambda_j \frac{dp_i}{p_i} + d\left(\frac{q}{p_1}\right)$, où $\lambda_1, \lambda_2, p_1, p_2, q$ sont comme en (d).
- (f) $\eta = \frac{dp}{p} + d\left(\frac{q}{p^2}\right)$, où $\deg(p) = 1$ et $\deg(q) = 2$.
- (g) $\eta = \frac{dp}{p} + d\left(\frac{q}{p}\right)$, où p et q sont comme en (f).
- (h) $\eta = \frac{dp}{p} + dq$, où p et q sont comme en (f).
- (i) $\eta = \frac{dp}{p} + dq$, où $\deg(p) = 2$ et $\deg(q) = 1$.
- (j) $\eta = 3\frac{df}{f} - 2\frac{dq}{g}$, où $\deg(f) = 2$, $\deg(g) = 3$ et $3gdf - 2fdg$ est divisible par une fonction affine.

Voici une conséquence du Théorème de Dulac :

Théorème 10. *Soit $\omega = \omega_3 + \dots \in \Omega^1(\mathbb{C}^3, 0)$ un germe de 1–forme intégrable à l’origine de \mathbb{C}^3 dont la partie homogène ω_3 est dicritique et $\text{Cod Sing } \omega_3 \geq 2$. Soit $[\mathcal{F}_{\omega_3}]$ le feuilletage de degré deux de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ induit par ω_3 .*

- (1) *Si $[\mathcal{F}_{\omega_3}]$ possède un point central alors \mathcal{F}_{ω} est défini par une 1–forme fermée méromorphe η .*
- (2) *Si $[\mathcal{F}_{\omega_3}]$ ne possède pas de point singulier de type centre ou nilpotent, alors \mathcal{F}_{ω} est conjugué au feuilletage homogène \mathcal{F}_{ω_3} .*

Démonstration. Si $[\mathcal{F}_{\omega_3}]$ satisfait le point (2) on applique la Proposition 3. Si $[\mathcal{F}_{\omega_3}]$ a un point central on invoque le Théorème de Dulac : $[\mathcal{F}_{\omega_3}]$ est défini par une 1–forme fermée rationnelle η . Soit $E : \tilde{\mathbb{C}}^3, 0 \rightarrow \mathbb{C}^3, 0$ l’éclatement de l’origine. La restriction $E^*\eta|_{E^{-1}(0)}$ définit le feuilletage $[\mathcal{F}_{\omega_3}]$ sur $E^{-1}(0) \simeq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. Le Théorème d’extension de Lévi permet de construire une 1–forme méromorphe $\tilde{\eta}$ au voisinage de $E^{-1}(0)$ et définissant $E^{-1}(\mathcal{F})$. Toujours par Lévi, il existe η méromorphe à l’origine de \mathbb{C}^3 telle que $E^*\eta = \tilde{\eta}$. Cet η convient. \square

Avant de s’intéresser à des centres *dégénérés* mentionnons que l’énoncé 8 ne se généralise pas en degré plus grand que deux. En voici la raison ; considérons un feuilletage \mathcal{F}' de degré ≥ 2 en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. Si \mathcal{F}' est générique il ne possède pas de courbe algébrique invariante ([16, 9]) et par suite il ne peut être défini par une 1–forme fermée. Choisissons une carte affine $\mathbb{C}^2 = \{(x_1, x_2)\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ telle que l’origine $(0, 0)$ soit un point non singulier de \mathcal{F}' et telle que la feuille passant par $(0, 0)$ soit tangente à l’axe $x_2 = 0$ en $(0, 0)$; en d’autres termes \mathcal{F}' est défini à l’origine par une 1–forme du type $dx_2 + \dots$. Considérons l’application birationnelle définie par $\sigma(x_1, x_2) = (x_2, x_1x_2)$; le feuilletage $\sigma^{-1}(\mathcal{F}') = \mathcal{F}$ a une intégrale première de Morse en $(0, 0)$, c’est donc un centre, mais n’est pas défini par une 1–forme fermée rationnelle puisque \mathcal{F}' ne l’est pas.

7. POINTS NILPOTENTS GÉNÉRIQUES

Nous nous proposons de préciser le résultat du Théorème 10 en établissant d’abord un théorème de type Dulac dans le cas nilpotent générique. Une démonstration de ce même résultat a été proposée par C. Rousseau et C. Christopher suite à une discussion avec l’un des auteurs (communication personnelle).

Théorème 11. *Soit \mathcal{F} un feuilletage de degré deux sur le plan projectif $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. On suppose que \mathcal{F} possède un point singulier m nilpotent tel que $\mu(\mathcal{F}, m) = 2$. Si \mathcal{F}_m possède une intégrale première holomorphe non constante, alors \mathcal{F} est défini par une 1–forme fermée rationnelle.*

Démonstration. Nous choisissons une carte affine $\mathbb{C}^2 = \{(x_1, x_2)\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ dont l’origine est le point m . Le feuilletage \mathcal{F} est donc défini par une 1–forme du type :

$$\omega = 2x_1dx_1 + A_2dx_1 + B_2dx_2 + q(x_1dx_2 - x_2dx_1)$$

où les A_2, B_2 et q sont des polynômes de degré 2.

Comme le germe \mathcal{F}_0 a une intégrale première holomorphe non triviale, c’est une *courbe généralisée* au sens de [2]. En particulier si $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ est une intégrale première minimale de \mathcal{F}_0 ([24]), alors la multiplicité algébrique de f est 2 et son nombre de Milnor $\mu(f; 0) = 2$ aussi. En résulte que f est

holomorphiquement conjugué à $x_1^2 - x_2^3$. Ceci nous permet de supposer, à automorphisme de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ fixant 0 près, que

$$f = x_1^2 - x_2^3 - \sum_{i \geq 4} f_i = \sum_{i \geq 2} f_i$$

où les f_i sont des polynômes homogènes de degré i ; on note

$$f_k = \sum_{i+j=k} a_{ij} x_1^i x_2^j.$$

Remarquons que l'on peut, quitte à changer f en $l(f)$, $l \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$, supposer que $a_{2i,0} = 0$ pour tout $i \geq 2$.

Le but est maintenant d'obtenir des renseignements sur les polynômes A_2, B_2 en exploitant formellement l'égalité

$$(2) \quad 0 = \omega \wedge df = (2x_1 + A_2 - qx_2) \left(-3x_2^2 + \frac{\partial f_4}{\partial x_2} + \dots \right) - (B_2 + qx_1) \left(2x_1 + \frac{\partial f_4}{\partial x_1} + \dots \right).$$

Visiblement on a $B_2 = -3x_2^2$; en considérant les termes de degré 4 dans (2) on constate que :

$$2x_1 \frac{\partial f_4}{\partial x_2} - 3x_2^2 A_2 - 2x_1^2 q = 0$$

et A_2 est divisible par x_1 :

$$A_2 = x_1(ax_1 + bx_2), \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

Si l'on pose $q = Px_1^2 + Qx_1x_2 + Rx_2^2$ on obtient (en utilisant la remarque $a_{2i,0} = 0$) :

$$f_4 = \frac{3}{8}bx_2^4 + \left(\frac{a}{2} + \frac{R}{3} \right) x_1x_2^3 + \frac{Q}{2}x_1^2x_2^2 + Px_1^3x_2.$$

L'étude des termes d'ordre 5 dans (2) donne $R = -\frac{3a}{8}$ et

$$f_5 = \left(-\frac{3b^2}{20} - \frac{3Q}{5} \right) x_2^5 - \left(\frac{21}{64}ab + \frac{3P}{2} \right) x_2^4x_1 - \left(\frac{3a^2}{16} + \frac{Qb}{6} \right) x_2^3x_1^2 - \frac{(Qa + Pb)}{4}x_2^2x_1^3 - \frac{Pa}{2}x_1^4x_2 + a_{50}x_1^5.$$

On fait ensuite $x_2 = 0$ dans les termes d'ordre 6 de (2) et l'on obtient $P = -\frac{3}{32}ab$. Finalement on a

$$A_2 = x_1(ax_1 + bx_2); \quad B_2 = -3x_2^2; \quad q = -\frac{3}{32}abx_1^2 + Qx_1x_2 - \frac{3a}{8}x_2^2$$

et nous allons distinguer deux cas suivant que a est nul ou non.

Cas $a = 0$. La 1-forme ω s'écrit donc :

$$\omega = x_1(2 + bx_2 - Qx_2^2)dx_1 + (Qx_1^2x_2 - 3x_2^2)dx_2 = \left(1 + \frac{b}{2}x_2 - \frac{Q}{2}x_2^2 \right) dx_1^2 + (Qx_1^2x_2 - 3x_2^2)dx_2$$

et apparait comme image réciproque de

$$\omega' = \left(1 + \frac{b}{2}y - \frac{Q}{2}y^2 \right) dx + (Qxy - 3y^2)dy$$

par l'application $\sigma : (x_1, x_2) \rightarrow (x_1^2, x_2)$. Remarquons que toute forme de type ω' précédente, puisque no singulière possède une intégrale première holomorphe et donc ω aussi. Ainsi l'existence d'une intégrale première ne donne pas plus d'information sur les coefficients b et Q .

Un calcul direct montre que la conique d'équation $\mathcal{C} = bQx - 3Qy^2 + 6 = 0$ est invariante par ω' . Par suite $\mathcal{C} \circ \sigma = 0$ est invariante par ω . On vérifie que $\omega' / \left(1 + \frac{b}{2}y - \frac{Q}{2}y^2 \right) \mathcal{C}$ est fermée et par suite que $\omega / \left(1 + \frac{b}{2}x_2 - \frac{Q}{2}x_2^2 \right) (bQx_1^2 - 3Qx_2^2 + 6)$ aussi; ceci démontre le théorème lorsque $a = 0$.

Cas $a \neq 0$. On peut supposer $a = 1$, à isomorphisme près. Donc

$$\omega = \left[2x_1 + x_1(x_1 + bx_2) - x_2 \left(-\frac{3}{32}bx_1^2 + Qx_1x_2 - \frac{3}{8}x_2^2 \right) \right] dx_1$$

$$+ \left[-3x_2^2 + x_1 \left(-\frac{3}{32}bx_1^2 + Qx_1x_2 - \frac{3}{8}x_2^2 \right) \right] dx_2.$$

Il faut ici calculer explicitement les coefficients a_{05} et a_{15} , ce qui se fait sans difficulté à partir de (2) :

$$a_{15} = \frac{147}{1280}b^2 + \frac{3Q}{5}, \quad a_{15} + \frac{5}{8}a_{05} = 0$$

pour en déduire que $Q = \frac{3}{32}b^2$.

On constate alors que la droite $l = x_1 + bx_2 + 8 = 0$ est invariante par ω . Un calcul direct montre que $8\omega = ldG - 3Gdl$ où $G = x_1^2 - x_2^3 + \frac{3}{8}bx_1^2x_2 + \frac{3}{8}x_1^3$; ainsi $\frac{\omega}{lG}$ est fermée, ce qui prouve le théorème dans ce second cas. \square

Le Théorème 11, combiné à la Proposition 6, nous permet d'améliorer le Théorème 10 comme il suit. Soit $[\mathcal{F}_{\omega_3}]$ un feuilletage de degré 2 sur $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$; nous dirons que $[\mathcal{F}_{\omega_3}]$ satisfait la propriété \mathcal{P} lorsque :

\mathcal{P}_1 : Pour tout point singulier $m \in [\mathcal{F}_{\omega_3}]$, si θ est une 1-forme définissant $[\mathcal{F}_{\omega_3}]_m$ alors le 1-jet de θ en m est non nul.

\mathcal{P}_2 : Si $j^1\theta_m$ est nilpotent, i.e. conjugué à x_1dx_1 , alors $\mu([\mathcal{F}_{\omega_3}]; m) = 2$.

Remarque 13. La condition \mathcal{P} est satisfaite pour un ouvert de Zariski de feuilletages de degré deux.

Remarque 14. Si \mathcal{P} n'est pas satisfaite, alors ou bien il existe un point m tel que, avec les notations précédentes, $j^1\theta_m = 0$, ou bien il y a un point nilpotent m en lequel $\mu([\mathcal{F}_{\omega_3}]; m) \geq 3$. Nous étudions ces deux situations plus loin.

Théorème 12. Soit $\omega = \omega_3 + \dots \in \Omega^1(\mathbb{C}^3, 0)$ un germe de 1-forme intégrable dont la partie homogène ω_3 est dicritique et $\text{Cod Sing } \omega_3 \geq 2$. Si $[\mathcal{F}_{\omega_3}]$ satisfait la propriété \mathcal{P} on est dans l'une des deux situations suivantes (non exclusives) :

- \mathcal{F}_{ω} est défini par une 1-forme fermée méromorphe.
- \mathcal{F}_{ω} est holomorphiquement conjugué à \mathcal{F}_{ω_3} .

Démonstration. Si $[\mathcal{F}_{\omega_3}]$ est sans nilpotence on invoque le Théorème 10. Sinon $[\mathcal{F}_{\omega_3}]$ a un point singulier m nilpotent non trivial en lequel $\mu([\mathcal{F}_{\omega_3}]; m) = 2$. Si \mathcal{F}_{ω} n'est pas conjugué à \mathcal{F}_{ω_3} c'est qu'on ne peut appliquer le Lemme 2 en un certain point singulier (pour conclure comme dans la Proposition 3); si c'est en m , d'après les Propositions 5 et 6 le germe $[\mathcal{F}_{\omega_3}]_m$ possède une intégrale première holomorphe non constante. D'après le Théorème 11, $[\mathcal{F}_{\omega_3}]$ est défini par une 1-forme fermée rationnelle η . Si c'est en un point m' où le 1-jet est non nilpotent, alors m' est central et $[\mathcal{F}_{\omega_3}]$ est encore défini par une 1-forme fermée. \square

Théorème 13. Soit $\omega = \omega_3 + \dots \in \Omega^1(\mathbb{C}^3, 0)$ un germe de 1-forme intégrable dont la partie homogène ω_3 est dicritique et $\text{Cod Sing } \omega_3 \geq 2$. S'il existe un point $m \in \text{Sing } [\mathcal{F}_{\omega_3}]$ tel que $j^1\theta_m \equiv 0$ (θ définissant $[\mathcal{F}_{\omega_3}]$ en m) alors \mathcal{F}_{ω} est transversalement affine, i.e. il existe une 1-forme méromorphe fermée ω_1 telle que $d\omega = \omega \wedge \omega_1$.

Remarque 15. Il y a une généralisation du Théorème 13 en tout ordre, i.e. en remplaçant ω_3 par ω_ν et la condition $j^1\theta_m \equiv 0$ par $j^{\nu-2}\theta_m \equiv 0$. La conclusion et la preuve sont les mêmes.

Remarque 16. D'un point de vue formel, la fonction multivaluée $F = \exp - \int \omega_1$ est un facteur intégrant de ω : $d(\frac{\omega}{F}) = 0$.

Démonstration du Théorème 13. On se place dans la carte affine $x_3 = 1$ et l'on suppose que le 1-jet de $\zeta = \omega_3|_{x_3=1}$ est nul au point $(0 : 0 : 1)$, i.e. :

$$\zeta = \zeta_2 + q(x_1dx_2 - x_2dx_1)$$

où ζ_2 est une 1-forme à coefficients homogènes de degré 2 non colinéaire à $x_1dx_2 - x_2dx_1$. Un calcul élémentaire (par éclatement par exemple) montre qu'il existe une 1-forme méromorphe fermée η telle que $d\zeta = \zeta \wedge \eta$. Comme dans la preuve du Théorème 10, en utilisant le Théorème de Frobenius et le

Théorème d'Extension de Lévi, on construit une 1–forme méromorphe fermée $\tilde{\eta}$ définie au voisinage de $E^{-1}(0)$ telle que $dE^*\omega = E^*\omega \wedge \tilde{\eta}$. Toujours d'après Lévi il existe une 1–forme méromorphe fermée ω telle que $E^*\omega_1 = \tilde{\eta}$. Cet ω_1 convient. \square

Conjecture. Soit $[\mathcal{F}_{\omega_3}]$ un feuilletage de degré deux sur $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. Alors si $\omega = \omega_3 + \dots \in \Omega^1(\mathbb{C}^3, 0)$ est intégrable on a l'alternative :

- (1) \mathcal{F}_{ω} et \mathcal{F}_{ω_3} sont conjugués holomorphiquement.
- (2) \mathcal{F} est défini par une 1–forme fermée ou bien est transversalement affine.

Dans les paragraphes qui suivent on traite plusieurs nouveaux cas allant dans le sens de la Conjecture.

8. VERS LA CONJECTURE : LE CAS $\mu = 3$

Nous gardons la notation du paragraphe précédent et nous proposons quelques résultats en présence d'un point nilpotent m tel que $\mu([\mathcal{F}_{\omega_3}]; m) \geq 3$. Comme on l'a dit précédemment un feuilletage de degré deux a au plus 7 points singuliers comptés avec multiplicité, i.e. $\mu([\mathcal{F}_{\omega_3}]; m) \leq 7$ et lorsque l'on classe, parmi ces feuilletages, ceux qui ne présentent qu'un point singulier (i.e. $\mu([\mathcal{F}_{\omega_3}]; m) = 7$) on constate que le 1–jet de $[\mathcal{F}_{\omega_3}]_{,m}$ est non nilpotent [8]; de sorte que si m est une singularité nilpotente de $[\mathcal{F}_{\omega_3}]$ on a $\mu([\mathcal{F}_{\omega_3}]; m) \in \{2, \dots, 6\}$.

En vertu du Théorème 7 nous allons nous intéresser au feuilletages de degré deux $[\mathcal{F}_{\omega_3}]$ possédant un point singulier nilpotent m en lequel $[\mathcal{F}_{\omega_3}]_{,m}$ possède un facteur intégrant formel. Pour cela nous avons besoin de résultats préparatoires élémentaires.

Soit \mathcal{F} un feuilletage de degré 2 donné dans la carte affine $\{(x_1, x_2)\} = \mathbb{C}^2 \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ par la 1–forme polynomiale :

$$\theta = (x_1 + A_2 - qx_2)dx_1 + (B_2 + qx_1)dx_2$$

où les A_2, B_2 et q sont des polynômes homogènes de degré 2.

Lemme 3. Si $\mu(\mathcal{F}; 0) \geq 3$ alors la droite $x_1 = 0$ est invariante.

Démonstration. Si ce n'est pas le cas alors $B_2(0, x_2)$ est non nul et $\mu(\mathcal{F}; 0) = 2$. \square

Nous allons adopter les notations suivantes :

$$A_2 = \alpha x_1^2 + \beta x_1 x_2 + \gamma x_2^2, \quad B_2 = x_1(ax_1 + bx_2), \quad q = Px_1^2 + Qx_1 x_2 + Rx_2^2.$$

En restriction à $x_1 = 0$ on a $\theta = (\gamma x_2^2 - Rx_2^3)dx_1$; notons que γ et R ne peuvent être simultanément nuls. Si γ est non nul, \mathcal{F} a deux singularités distinctes sur la droite $x_1 = 0$ (et peut-être d'autres ailleurs); dans ce cas on peut supposer, à automorphisme de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ près, que $\gamma = 1$ et $R = 0$. Après cette normalisation les singularités de \mathcal{F} sur $x_1 = 0$ sont en 0 et à l'infini. À l'inverse si γ est nul, \mathcal{F} a une seule singularité sur $x_1 = 0$ qui est bien sûr le point 0. Dans ce cas on peut supposer que $R = 1$.

Nous résumons ces faits dans le

Lemme 4. Si $\mu(\mathcal{F}; 0) \geq 3$ alors à automorphisme de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ près θ appartient à l'une des deux familles :

$$\Omega_1 := \{\theta_1 = x_1[(1 + \alpha x_1 + \beta x_2)dx_1 + (ax_1 + bx_2)dx_2] + (Px_1^2 + Qx_1 x_2 + x_2^2)(x_1 dx_2 - x_2 dx_1)\}$$

$$\Omega_2 := \{\theta_2 = x_1[(1 + \alpha x_1 + \beta x_2)dx_1 + (ax_1 + bx_2)dx_2] + x_2^2 dx_1 + (Px_1^2 + Qx_1 x_2)(x_1 dx_2 - x_2 dx_1)\}.$$

Remarque 17. On note que pour la première famille Ω_1 on a $\mu(\mathcal{F}_{\theta_1}; 0) \geq 4$. Dans la seconde famille Ω_2 on a $\mu(\mathcal{F}_{\theta_2}; 0) = 3$ si et seulement si le coefficient b est non nul. Si $b = 0$ et $a \neq 0$ on a $\mu(\mathcal{F}_{\theta_2}; 0) = 4$; si $a = b = 0$ et $Q \neq 0$ alors $\mu(\mathcal{F}_{\theta_2}; 0) = 5$ et enfin si $a = b = Q = 0$ alors $\mu(\mathcal{F}_{\theta_2}; 0) = 6$.

Exemples. La 1–forme $\theta_1 = (x_1 - x_2^3)dx_1 + x_1 x_2^2 dx_2$ fait partie de la première famille Ω_1 ; on a $\mu(\mathcal{F}_{\theta_1}; 0) = 5$ et \mathcal{F}_{θ_1} possède l'intégrale première rationnelle $\frac{1}{2x_1^2} - \frac{1}{3} \frac{x_2^3}{x_1^3}$. Dans la seconde famille Ω_2 on trouve par exemple (à homothétie près) $\theta_2 = (x_1 + x_2^2)dx_1 + x_1 d(x_1 + x_2^2) = (2x_1 + x_2^2)dx_1 + 2x_1 x_2 dx_2$ qui est fermée avec intégrale première $x_1(x_1 + x_2^2)$. Ici on a $\mu(\mathcal{F}_{\theta_2}; 0) = 3$ et $b = 2$.

Génériquement sur les paramètres $(\alpha, \beta, a, b, P, Q)$ un feuilletage \mathcal{F}_{θ_2} induit par un élément $\theta_2 \in \Omega_2$ possède à l'origine deux germes de courbes invariantes distinctes : l'une est l'axe $x_1 = 0$ et l'autre est lisse et tangente à $x_1 = 0$. Pour des valeurs spéciales des paramètres ceci n'est pas toujours le cas. Pour voir ceci voici comment l'on procède ; le germe linéaire $(x_1 + x_2)dx_1 - x_1dx_2$ possède un seul germe de courbe invariante à l'origine, l'axe $x_1 = 0$. Son image réciproque θ_3 par le revêtement ramifié (x_1, x_2^2) :

$$\theta_3 = (x_1 + x_2^2)dx_1 - 2x_1x_2dx_2$$

possède la même propriété. La 1-forme θ_3 est un élément de Ω_2 , avec $b = -2$ et tous les autres paramètres nuls. Le feuilletage \mathcal{F}_{θ_3} est défini par la 1-forme fermée $\frac{\theta_3}{x_1^3}$, ce qui fait apparaître le facteur intégrant x_1^3 qui possède donc de la multiplicité. Ce facteur intégrant est unique à constante multiplicative près.

Soit $\chi \subset \mathbb{Q}$ l'ensemble :

$$\chi := \left\{ \frac{l-2}{k-1}, l \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N} - \{1\} \right\} = \mathbb{Q}_{>0} \cup \{-\mathbb{N}\} \cup \left\{ \frac{-1}{\mathbb{N}} \right\} \cup \left\{ \frac{-2}{\mathbb{N}} \right\}$$

avec des notations évidentes. À l'inverse de cet exemple on a sous une hypothèse de non résonance le lemme technique suivant :

Lemme 5. *Soit θ_2 un élément de Ω_2 . On suppose que θ_2 possède un facteur intégrant formel $f \in \widehat{\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)}$: $d(\frac{\theta_2}{f}) = 0$. Si $b \notin \chi$, alors à constante multiplicative non nulle près $f = x_1g$ où $g \in \widehat{\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)}$ est une submersion formelle satisfaisant $\frac{\partial g}{\partial x_1}(0) \neq 0$ et $g(0, x_2) = x_2^2$.*

Démonstration. La condition $d(\frac{\theta_2}{f}) = 0$ s'exprime comme suit :

$$(3) \quad fd\theta_2 + \theta_2 \wedge df = 0.$$

Remarquons que si f est constant alors θ_2 est fermée ; ceci implique que $b = 2$, ce qui est interdit par hypothèse. On écrit alors $f = x_1^k g(x_1, x_2)$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $g \in \widehat{\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)}$ une série formelle telle que $g(0, x_2) \neq 0$.

En développant (3) et en faisant $x_1 = 0$ après simplification par x_1^k on obtient :

$$(4) \quad g(0, x_2)(b(1-k) - 2) + x_2 \frac{\partial g}{\partial x_2}(0, x_2) \equiv 0.$$

Quitte à multiplier f par une constante, on peut supposer que

$$g(0, x_2) = x_2^l + \dots \quad \text{avec } l \in \mathbb{N}.$$

On obtient alors d'après (4)

$$b(1-k) - 2 + l = 0$$

qui conduit, puisque $b \notin \chi$, à $k = 1$ et $l = 2$.

Puisque maintenant $k = 1$ la solution générale de (4) est $\{\lambda x_2^2, \lambda \in \mathbb{C}\}$, si bien que $g(0, x_2) \equiv x_2^2$. On écrit le développement en série de g sous la forme suivante :

$$g = x_2^2 + x_1\varphi_1(x_2) + x_1^2\varphi_2(x_2) + \dots + x_1^i\varphi_i(x_2) + \dots$$

où les φ_i sont des séries formelles en x_2 . Un calcul élémentaire montre que (3) implique :

$$(5) \quad x_2^2((a-\beta) + 5Qx_2) + 2x_2(1 + \beta x_2 - Qx_2^2) + x_2^2\varphi_1'(x_2) - (b+2)x_2\varphi_1(x_2) = 0.$$

En particulier le calcul du coefficient de x_2 dans (5) conduit à

$$2 - (b+2)\varphi_1(0) = 0$$

et par suite $\varphi_1(0) = \frac{\partial g}{\partial x_1}(0)$ est non nul. \square

Remarque 18. Il y a une possibilité de preuve directe en utilisant que pour $b \notin \mathbb{Q}$ la réduction des singularités en 0 est celle de $(x_1 + x_2^2)dx_1 + bx_1x_2dx_2$.

Nous énonçons maintenant deux résultats voisins qui vont se substituer dans certains cas au Théorème de Dulac. Comme nous n'utiliserons pas explicitement le premier nous n'en donnons pas la preuve que nous avons vérifiée au prix d'un calcul long et lourd ne mettant en jeu que des arguments utilisés dans le Théorème 11.

Théorème 14. *Soit \mathcal{F} un feuilletage de degré deux possédant une singularité nilpotente en 0 telle que $\mu(\mathcal{F}; 0) = 3$. Si \mathcal{F}_0 possède un facteur intégrant formel réduit du type $f = x_1g(x_1, x_2)$, $g = x_1 + \dots$ alors \mathcal{F} est défini par une 1-forme fermée rationnelle.*

Comme on l'a vu si \mathcal{F} a une singularité nilpotente telle que $\mu(\mathcal{F}; 0) = 3$, alors \mathcal{F} est décrit, à isomorphisme près, par une 1-forme $\theta_2 \in \Omega_2$ et le nombre $b = b(\mathcal{F})$ est bien défini. On a le :

Théorème 15. *Soit \mathcal{F} un feuilletage de degré deux possédant une singularité nilpotente en 0 telle que $\mu(\mathcal{F}; 0) = 3$. On suppose que \mathcal{F}_0 possède un facteur intégrant formel. Si $b = b(\mathcal{F}) \notin \mathbb{Q}$ alors \mathcal{F} est défini par une 1-forme fermée rationnelle.*

Le Lemme 5 fait que le Théorème 15 est un corollaire de Théorème 14.

Démonstration du Théorème 15. Au point 0 le feuilletage \mathcal{F} est défini par une 1-forme de type $\theta_2 \in \Omega_2$; d'après le Lemme 5 le facteur intégrant formel est de type $f = x_1g$, $g(0, x_2) = x_2^2$, $\frac{\partial g}{\partial x_1}(0) \neq 0$. Comme $\frac{\theta_2}{f}$ est fermée, il existe des nombres complexes λ et μ et $V \in \widehat{\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)}$ tels que (voir [12] par exemple) :

$$\frac{\theta_2}{f} = \frac{\theta_2}{x_1g} = \lambda \frac{dx_1}{x_1} + \mu \frac{dg}{g} + dV.$$

Un calcul élémentaire (direct ou en utilisant la réduction des singularités de \mathcal{F}_0) montre que $\frac{\mu}{\lambda} = \frac{b}{2}$. En résulte que si b est non réel positif ou un irrationnel mal approché par les rationnels (conditions de Siegel-Brujno), alors f est holomorphe en 0 (voir [12] par exemple) : c'est une conséquence des théorèmes de Poincaré-Siegel appliqués en un point convenable de la réduction des singularités de \mathcal{F}_0 .

Au point singulier à l'infini de $x_1 = 0$, le feuilletage est défini par une 1-forme θ' dont le 1-jet est :

$$j^1\theta' = (x_3 - Qx_1)dx_1 - (b+1)x_1dx_3.$$

Sous les mêmes conditions diophantiennes sur b , θ' est holomorphiquement linéarisable et possède donc un facteur intégrant holomorphe.

Maintenant, on observe que le problème est invariant sous l'action d'automorphismes du corps \mathbb{C} (existence d'un facteur intégrant formel, feuilletage défini par une forme fermée rationnelle); si le nombre b , qui est non rationnel, est algébrique il satisfait aux conditions diophantiennes exigées (c'est un résultat de Liouville). Si b est transcendant on peut via l'action d'un automorphisme σ se ramener au cas où encore ces conditions sont satisfaites.

Remarquons que l'holonomie de la variété invariante $x_1 = 0$ du feuilletage défini par $x_3dx_1 - (b+1)x_1dx_3$ n'est pas d'ordre fini si $b \notin \mathbb{Q}$; il en est donc de même pour l'holonomie de la variété invariante $((x_1 = 0) - \{0\})$ pour \mathcal{F} . Considérons maintenant θ_2 vue comme 1-forme rationnelle globale sur $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. On dispose en 0 d'un facteur intégrant holomorphe $f : d(\frac{\theta_2}{f}) = 0$. Comme \mathcal{F} n'a pas de singularités sur $\Sigma = \mathbb{C}^2 \cap ((x_1 = 0) - \{0\})$ qui est invariante on peut prolonger f holomorphiquement le long de Σ . Au point à l'infini $\infty \in \overline{\Sigma} - \Sigma$, on dispose cette fois d'un facteur intégrant méromorphe f_∞ hérité de la linéarisation de θ' . Si Δ est un petit disque transverse à Σ au point $m_0 \in \Sigma$, m_0 proche de ∞ , les 1-formes méromorphes fermées $\frac{\theta_2}{f}|_{\Delta}$ et $\frac{\theta_2}{f_\infty}|_{\Delta}$ sont invariantes par l'holonomie h de la variété invariante Σ représentée sur la transversale Δ . Comme h n'est pas d'ordre fini $\frac{\theta_2}{f}|_{\Delta}$ et $\frac{\theta_2}{f_\infty}|_{\Delta}$ sont \mathbb{C} -colinéaires. On peut donc, quitte à multiplier f_∞ par une constante, supposer que :

$$\frac{\theta_2}{f}|_{\Delta} = \frac{\theta_2}{f_\infty}|_{\Delta}.$$

Par suite au voisinage de $x_1 = 0$ dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ le feuilletage \mathcal{F} est défini par une 1-forme méromorphe fermée. Cette 1-forme s'étend en une 1-forme méromorphe globale sur $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, qui est donc rationnelle. \square

Avec les notations précédentes on a le :

Corollaire 2. *Soit $\omega = \omega_3 + \dots \in \Omega^1(\mathbb{C}^3, 0)$ un germe de 1-forme intégrable à l'origine de \mathbb{C}^3 dont la partie homogène ω_3 est dicritique et $\text{Cod Sing } \omega_3 \geq 2$. On suppose que le feuilletage de degré deux $[\mathcal{F}_{\omega_3}]$ possède un point singulier $m \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ tel que $\mu([\mathcal{F}_{\omega_3}]; m) = 3$; si $b = b([\mathcal{F}_{\omega_3}])$ est non rationnel on a l'alternative :*

- (1) \mathcal{F}_{ω} est défini par une 1-forme fermée méromorphe.
- (2) \mathcal{F}_{ω} est holomorphiquement conjugué à \mathcal{F}_{ω_3} .

Démonstration. Commençons par quelques précisions. On peut supposer que $[\mathcal{F}_{\omega_3}]$ est donné en carte affine par :

$$\theta_2 = [x_1(1 + \alpha x_1 + \beta x_2) + x_2^2 - x_2(Px_1^2 + Qx_1x_2)]dx_1 + x_1(ax_1 + bx_2 + Px_1^2 + Qx_1x_2)dx_2.$$

Au point singulier m' à l'infini de $x_1 = 0$, le feuilletage est donnée par $\theta' \in \Omega^1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, m')$, avec pour 1-jet $j^1\theta' = (x_3 - Qx_1)dx_1 - (b + 1)x_1dx_3$. En particulier $\mu([\mathcal{F}_{\omega'}]; m')$ est plus grand ou égal que 1 (et même vaut 1 si b est différent de -1). Par suite si m'' est un point singulier distinct de m et m' alors $\mu([\mathcal{F}_{\omega_3}]; m'') \leq 3$. En résulte que si $\theta'' \in \Omega^1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, m'')$ est une 1-forme définissant $[\mathcal{F}_{\omega_3}]_{m''}$ alors le 1-jet $j^1\theta''_{m''}$ est non identiquement nul. Supposons que $j^1\theta''_{m''}$ soit nilpotent avec $\mu([\mathcal{F}_{\omega_3}]; m'') = 3$.

Comme m'' ne peut être situé sur $x_1 = 0$ et $[\mathcal{F}_{\omega_3}]_m$ ne possède qu'une droite invariante, le feuilletage $[\mathcal{F}_{\omega_3}]$ possède une seconde droite invariante L passant par m'' et coupant $x_1 = 0$ nécessairement en m' ; c'est une conséquence du Lemme 3. Par suite L est ou bien une droite $x_1 = \varepsilon$ ou bien la droite à l'infini $x_3 = 0$. Un calcul élémentaire montre que, quitte à conjuguer par une transformation de type $\left(\frac{x_1}{x_1 - \varepsilon}, i\varepsilon^{1/2} \frac{x_2}{x_1 - \varepsilon}\right)$, on peut supposer que L est la droite à l'infini $x_3 = 0$, cette transformation laissant invariant l'espace Ω_2 et le coefficient b . Ainsi θ_2 est du type :

$$\theta_2 = (x_1(1 + \alpha x_1 + \beta x_2) + x_2^2)dx_1 + x_1(ax_1 + bx_2)dx_2.$$

Sous nos hypothèses \mathcal{F}_{θ_2} a pour singularités les trois points m, m', m'' . Un second calcul élémentaire montre que $\mathcal{F}_{\theta_2, m''}$ a une singularité nilpotente à nombre de Milnor 3 si et seulement si $\alpha = \beta = a = 0$. Mais dans ce cas \mathcal{F}_{θ_2} est donné par une forme fermée méromorphe; en résulte que le feuilletage \mathcal{F}_{ω} aussi.

Dans la suite on peut donc supposer que le point m est le seul point nilpotent à nombre de Milnor 3; les autres points singuliers ont donc leur nombre de Milnor ≤ 2 . Si \mathcal{F}_{ω} n'est pas conjugué à \mathcal{F}_{ω_3} c'est que l'on ne peut appliquer le Lemme 2. En utilisant les Théorèmes 7, 8, 11, 15 et la Proposition 5 suivant la nature des points singuliers, on constate que $[\mathcal{F}_{\omega_3}]$ est donné par une 1-forme fermée méromorphe, et donc \mathcal{F}_{ω} aussi. \square

9. LE CAS $\mu = 4$

Soit \mathcal{F} un feuilletage de degré 2 ayant une singularité nilpotente en 0; on suppose que $\mu(\mathcal{F}; 0) = 4$. Alors \mathcal{F} appartient, à conjugaison près, à la famille Ω_1 , i.e. est donné par une 1-forme de type θ_1 avec $b \neq 0$, ou bien à la famille Ω_2 avec $b = 0$ et $a \neq 0$. Nous dirons suivant le cas que \mathcal{F} est de type Ω_1 ou Ω_2 . Si \mathcal{F} est de type Ω_2 , nous dirons que \mathcal{F} est *non radial* à l'infini si $Q = Q(\theta_2) = Q(\mathcal{F})$ est non nul.

Proposition 7. *Soit \mathcal{F} un feuilletage de degré deux sur $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ de type Ω_2 ; on suppose que $b(\mathcal{F}) = Q(\mathcal{F}) = 0$, i.e. $\mu(\mathcal{F}; 0) \geq 4$ et \mathcal{F} est radial à l'infini. Alors \mathcal{F} est transversalement projectif.*

Démonstration. \mathcal{F} est défini au point $(0 : 1 : 0)$ par une 1-forme dont le 1-jet est $x_1dx_3 - x_3dx_1$; tout feuilletage de degré 2 ayant une singularité de type radial est transversalement projectif (équation de Ricatti). \square

Nous allons démontrer le résultat qui suit.

Théorème 16. *Soit $\omega = \omega_3 + \dots \in \Omega^1(\mathbb{C}^3, 0)$ intégrable, ω_3 dicritique, $\text{Cod Sing } \omega_3 \geq 2$. On suppose que $[\mathcal{F}_{\omega_3}]$ possède une singularité nilpotente m avec $\mu([\mathcal{F}_{\omega_3}]; m) = 4$ de type Ω_i . Alors \mathcal{F}_{ω} est conjugué à \mathcal{F}_{ω_3} .*

Démonstration. Dans la suite on suppose $m = (0 : 0 : 1)$ et que $[\mathcal{F}_{\omega_3}]$ est donné par une forme de type θ_i . Dans les deux cas la réduction des singularités du point nilpotent se fait en deux éclatements. On note $Ex(1)$ le premier diviseur apparaissant au premier éclatement, $Ex(2)$ le second ; sur $Ex(1)$ il y a un seul point singulier $p_3 = Ex(1) \cap Ex(2)$. Pour les deux configurations Ω_1, Ω_2 , le point p_3 est une singularité *résonnante* [23] avec 1-jet de type $xdy + 2ydx$, $(y = 0) = Ex(1)_{,p_3}$, $(x = 0) = Ex(2)_{,p_3}$. Comme sur $Ex(1)$ il n'y a qu'une singularité, l'holonomie de la variété invariante locale $(y = 0)$ est triviale et d'après Mattei-Moussu [24] il y a une intégrale première de type x^2y en p_3 . Par suite l'holonomie de la variété invariante locale $Ex(2)_{,p_3}$ est une involution $x \rightarrow -x$. On note $p_1 \in Ex(2)$ le point singulier où aboutit le transformé strict de la droite invariante $x_1 = 0$ pour θ_i . Enfin il y a un troisième point singulier, noté p_2 .

Dans la situation où \mathcal{F} est de type Ω_2 , le point singulier p_1 est résonnant, tandis que le point p_2 est de type noeud-col. En p_2 arrive une courbe invariante formelle transverse à $Ex(2)$. À l'inverse dans le cas où \mathcal{F} est de type Ω_1 , le point p_2 est résonnant tandis que le point p_1 est un noeud-col *mal-orienté* au sens où la *variété faible* invariante en p_1 est précisément la droite $x_1 = 0$.

Concernant la configuration dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ des autres points singuliers, nous affirmons qu'il n'existe pas d'autre point singulier nilpotent à nombre de Milnor 3. En effet s'il existait un tel point m' , il serait de type Ω_2 (avec $b \neq 0$) ; m' n'étant pas sur $x_1 = 0$, il y aurait une droite invariante passant par m' et il y aurait donc sur cette droite un autre point singulier m'' avec 1-jet non nilpotent ; donc m'' est distinct de m , ce qui nous donne au moins 8 points singuliers comptés avec multiplicité et est donc absurde.

Par suite les autres points singuliers ont leur nombre de Milnor inférieur ou égal à 2, en particulier en chacun des points singuliers le 1-jet est non nul. En chaque point singulier m' autre que m , on a $\mu([\mathcal{F}_{\omega_3}]; m') \leq 2$; s'il n'existe pas de champ tangent à $E^{-1}(\mathcal{F}_{\omega})$ en m' et transverse au diviseur $E^{-1}(0)_{,m}$ alors $[\mathcal{F}_{\omega_3}]$ et donc \mathcal{F}_{ω} est défini par une forme fermée méromorphe. Reste à étudier $E^{-1}(\mathcal{F}_{\omega})$ au point $m = (0 : 0 : 1)$. S'il n'y a pas de champ $X_{,m}$ comme ci-dessus on sait que $[\mathcal{F}_{\omega_3}]_{,m} = \mathcal{F}_{\theta_i}$ possède un facteur intégrant formel $f : d\left(\frac{\theta_2}{f}\right) = 0$.

Pour terminer la démonstration du théorème il nous suffit d'établir le

Lemme 6. *Si $\mu(\mathcal{F}_{\theta_i}; 0) = 4$, avec $\theta_i \in \Omega_i$, alors θ_i n'a pas de facteur intégrant formel.*

Démonstration. Si tel était le cas, l'holonomie du diviseur exceptionnel $Ex(2)$ serait abélienne [12]. Mais pour chaque θ_i il y a un point p_i en lequel la singularité est de type noeud-col avec nombre de Milnor 2. En résulte que l'holonomie de la variété invariante locale $Ex(2)_{,p_i}$ est du type $\varphi : x \rightarrow x + cx^2 + \dots$, $c \neq 0$. Mais un tel φ ne peut commuter à une involution $x \rightarrow -x$. \square

10. LE CAS $\mu = 5$

Soit \mathcal{F} un feuilletage de degré deux à singularité nilpotente à l'origine de \mathbb{C}^2 avec $\mu(\mathcal{F}; 0) = 5$. On peut supposer \mathcal{F} donné par une 1-forme θ appartenant à l'une des familles Ω_1, Ω_2 . Si $\theta = \theta_1 \in \Omega_1$ on vérifie que $b = 0$, i.e. que

$$\theta_1 = [x_1(1 + \alpha x_1 + \beta x_2) - x_2(Px_1^2 + Qx_1x_2 + x_2^2)]dx_1 + x_1(ax_1 + Px_1^2 + Qx_1x_2 + x_2^2)dx_2.$$

Remarquons que l'on peut faire P ou Q nuls.

Si $\theta = \theta_2 \in \Omega_2$ on a $a = b = 0$ et $Q \neq 0$, i.e. après normalisation

$$\theta_2 = [x_1(1 + \alpha x_1 + \beta x_2) + x_2^2 - x_2(Px_1^2 + x_1x_2)]dx_1 + x_1^2(Px_1 + x_2)dx_2.$$

Sous les hypothèses précédentes on a la

Proposition 8. *Si θ_2 possède un facteur intégrant formel, alors \mathcal{F}_{θ_2} est défini par une 1-forme fermée rationnelle.*

Démonstration. La singularité $(0 : 1 : 0)$ est de type $(x + y)dx - xdy$. En résulte que l'holonomie de la variété invariante $x_1 = 0$ est de la forme $y \rightarrow \frac{y}{1 - y}$. Dans la résolution des singularités de $\mathcal{F}_{\theta_2, 0}$, la singularité résonnante p_1 est donc holomorphiquement normalisable [23], sans intégrale première

holomorphe. En particulier en p_1 il y a un unique facteur intégrant formel, à constante multiplicative près, et celui-ci est en fait convergent. Par suite si f est un facteur intégrant formel de θ_2 en 0, son relevé en p_1 est convergent ; en résulte que f converge. On prolonge alors la forme méromorphe fermée $\frac{\theta_2}{f}$ le long de $x_1 = 0$, comme on l'a fait en Théorème 15. Ceci est possible car l'holonomie de $x_1 = 0$ est non périodique. \square

De la même façon on a la :

Proposition 9. *Si θ_1 possède un facteur intégrant formel f alors \mathcal{F}_{θ_1} est défini par une 1-forme fermée rationnelle.*

Démonstration. Si l'on procède à trois éclatements successifs (grosso modo, on pose $x_1 = sx_2^3$) on trouve un point singulier dont le 1-jet est $6udv - vdu$. Les théorèmes de linéarisation et normalisation de Poincaré assurent qu'en un tel point tout facteur intégrant formel est en fait convergent. Ceci implique que f est convergent ; la 1-forme fermée méromorphe $\frac{\theta_1}{f}$ locale se prolonge le long de $\overline{x_1 = 0} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ puis à tout $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. \square

Considérons un déploiement du germe de feuilletage \mathcal{F}_{θ_2} ; il suit des Proposition 6 et Remarque 11 que si ce déploiement est non trivial et si θ_2 n'a pas de facteur intégrant formel alors la forme normale de Loray de θ_2 est de type :

$$\theta_L = xdx + (y^4 + xl(y^2))dy^2 \text{ avec } \lambda = l(0);$$

plus précisément il existe des coordonnées x, y et une unité $U = 1 + u_1x + u_2y + \dots$ telles que $\theta_2 = U\theta_L$; on constate que $d\theta_2 = (-\beta x_1 - 2x_2 + \dots)dx_1 \wedge dx_2$. En particulier la tangente aux zéros de $d\theta_2$ ($2x_2 + \beta x_1 = 0$) est différente du cône tangent $x_1 = 0$ de θ_2 . Maintenant le cône tangent de θ_L est $x = 0$ et celui de $d\theta_L$ est $2\lambda y - u_2x = 0$. Pour qu'ils soient distincts il est nécessaire que λ soit non nul. La Remarque 11 dit que, sous cette hypothèse, θ_2 possède un facteur intégrant formel.

Remarque 19. La 1-forme $\theta_2 = (x_1 + x_2^2 - x_1x_2^2)dx_1 + x_1^2x_2dx_2$ satisfait la Proposition 8, i.e. \mathcal{F}_{θ_2} est défini par une 1-forme fermée rationnelle.

Examinons maintenant le cas où $\theta = \theta_1 \in \Omega_1$; toujours sous l'hypothèse d'un déploiement non trivial la forme normale de Loray de θ_1 est, si θ_1 n'a pas de facteur intégrant, encore de la forme :

$$\theta_L = xdx + (y^4 + xl(y^2))dy^2.$$

On exploite ici le fait que l'involution $(x, y) \rightarrow (x, -y)$ laisse invariante θ_L . Le feuilletage \mathcal{F}_{θ_1} est donc lui aussi laissé invariant par une involution I de type $(x, -y)$. On considère alors le schéma de réduction des singularités de θ_1 ; le premier éclatement produit un premier diviseur $Ex(1)$ contenant un seul point singulier p_1 correspondant à $x_1 = 0$. On éclate alors p_1 , ce qui produit un nouveau diviseur $Ex(2)$ et deux points singuliers ; le croisement $Ex(1) \cap Ex(2)$ noté encore p_1 et un point $p_2 \neq p_1$ où aboutit $x_1 = 0$. En p_1 le feuilletage est réduit, mais il faut encore éclater p_2 , ce qui produit un diviseur $Ex(3)$ et trois points singuliers distincts : $p_2 = Ex(2) \cap Ex(3)$, p_3 où aboutit $x_1 = 0$ et un troisième point singulier p_4 distinct de p_2 et p_3 . On relève l'involution I à cette configuration pour obtenir une involution \tilde{I} . La restriction de \tilde{I} à $Ex(3)$ fixe les points p_2 et p_3 . Un calcul élémentaire montre que $\tilde{I}|_{Ex(3)}$ est de type $s \rightarrow -s$. Remarquons que puisque I laisse invariante le feuilletage \mathcal{F}_{θ_2} , le point p_4 doit être laissé fixe par \tilde{I} ; ce qui est absurde. Ce cas n'arrive donc pas.

On en déduit en utilisant les mêmes idées que précédemment le :

Théorème 17. *Soit $\omega = \omega_3 + \dots \in \Omega^1(\mathbb{C}^3, 0)$ intégrable, ω_3 dicritique, $\text{Cod Sing } \omega_3 \geq 2$. On suppose que $[\mathcal{F}_{\omega_3}]$ possède un point nilpotent m tel que $\mu([\mathcal{F}_{\omega_3}]; m) = 5$. Alors ou bien \mathcal{F}_{ω} et \mathcal{F}_{ω_3} sont conjuguées ou bien \mathcal{F}_{ω} est défini par une 1-forme fermée méromorphe.*

11. LE CAS $\mu = 6$

Soit \mathcal{F} un feuilletage de degré deux sur $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ ayant une singularité nilpotente $m = (0 : 0 : 1)$ avec $\mu(\mathcal{F}; m) = 6$. On peut supposer que \mathcal{F} est défini par une 1–forme θ appartenant à l’une des familles Ω_i . Le lemme qui suit est élémentaire :

Lemme 7. *Si $\mu(\mathcal{F}; m) = 6$ alors θ appartient à la famille Ω_2 ; avec les notations habituelles on a de plus $a = b = Q = 0$.*

Ainsi \mathcal{F} est défini par une 1–forme de type

$$\theta_2 = [x_1(1 + \alpha x_1 + \beta x_2) + x_2^2 - Px_1^2x_2]dx_1 + Px_1^3dx_2$$

avec $P \neq 0$. Quitte à faire un automorphisme de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ *ad-hoc*, on se ramène à $P = 1$, $\alpha = \beta = 0$. On note θ_2^0 la 1–forme correspondant. Il y a donc un seul feuilletage de ce type à conjugaison près noté \mathcal{F}_0 .

Proposition 10. *Le feuilletage \mathcal{F}_0 est transversalement projectif.*

Démonstration. Après éclatement du point à l’infini $(0 : 1 : 0)$, \mathcal{F}_0 est transverse à la fibration $x_1 = \text{cte}$ en dehors de la droite $x_1 = 0$, ce qui implique la proposition. \square

Le feuilletage \mathcal{F}_0 est défini dans la carte $x_1 = 1$ par

$$dx_2 - (x_3 + x_2^2)dx_3.$$

Il s’agit de la fameuse équation d’Airy utilisée pour les problèmes de diffraction. Liouville a démontré que les solutions de cette équation différentielle ne sont pas *Liouvilliennes*. Ceci signifie, en utilisant les travaux de Singer [26] et Casale [6] que \mathcal{F}_0 n’est pas transversalement affine : il n’existe pas de 1–forme fermée rationnelle η telle que $d\theta_2^0 = \theta_2^0 \wedge \eta$. En particulier \mathcal{F}_0 n’est pas défini par une 1–forme fermée rationnelle.

En fait il y a une version locale de ce qui précède.

Lemme 8. *La 1–forme θ_2^0 ne possède pas de facteur intégrant formel.*

Démonstration. Comme $Q = 0$, la singularité $(0 : 1 : 0)$ de \mathcal{F}_0 est de type radial, i.e. possède une intégrale première de la forme $\frac{y}{x} = \text{cte}$. En résulte que l’holonomie de la variété invariante $x_1 = 0$ est triviale. Dans la résolution des singularités ceci implique, d’après [24], qu’en p_1 le feuilletage transformé de \mathcal{F}_0 possède au point p_1 une intégrale première de type $uv^2 = \text{cte}$ avec $(v = 0) = Ex(2)_{,p_1}$. Ceci implique aussi que, pour un bon choix de coordonnées, l’holonomie de la variété invariante $Ex(2)$ au point p_1 est la symétrie $v \rightarrow -v$. On se place maintenant au point p_2 où le point singulier est de type noeud-col avec nombre de Milnor 4 : au point p_2 le feuilletage est à conjugaison près du type

$$(x + \dots)dy + y^4dx$$

où cette fois $(y = 0) = Ex(2)_{,p_2}$. Le difféomorphisme d’holonomie de la variété invariante $Ex(2)_{,p_2}$ en p_2 est donc de la forme $y + cy^4 + \dots$, $c \in \mathbb{C}^*$. Notons qu’un tel difféomorphisme ne peut commuter avec une involution de type $y \rightarrow -y$. Or si θ_2^0 possédait un facteur intégrant formel, le groupe d’holonomie du diviseur $Ex(2)$ serait abélien. D’où le lemme. \square

On en déduit le

Théorème 18. *Soit $\omega = \omega_3 + \dots \in \Omega^1(\mathbb{C}^3, 0)$ intégrable, ω_3 dicritique, $\text{Cod Sing } \omega_3 \geq 2$. On suppose que $[\mathcal{F}_{\omega_3}]$ possède une singularité nilpotente m avec $\mu([\mathcal{F}_{\omega_3}]; m) = 6$. Alors \mathcal{F}_{ω} est conjugué à \mathcal{F}_{ω_3} .*

Démonstration. C’est une conséquence du Lemme 8. \square

12. KRULL-DÉFORMATIONS POUR CERTAINS FEUILLETAGES TRANSVERSALEMENT AFFINES

On s'intéresse ici aux feuilletages \mathcal{F}_ω où $\omega = \omega_3 + \dots \in \Omega^1(\mathbb{C}^3, 0)$ et $[\mathcal{F}_{\omega_3}]$ est transversalement affine comme dans le Théorème 13. On suppose que $[\mathcal{F}_{\omega_3}]$ est donné en carte affine par

$$\theta_0 = \omega_2 + q(x_1 dx_2 - x_2 dx_1)$$

où ω_2 est une 1-forme à coefficients homogènes de degré deux et q une forme quadratique. Pour un choix générique de ω_2 et q , le feuilletage \mathcal{F}_{θ_0} n'est pas défini par une 1-forme fermée. En fait le feuilletage local \mathcal{F}_{θ_0} ne possède pas en général de facteur intégrant formel. Nous allons faire les hypothèses (génériques) supplémentaires suivantes :

- (i) À conjugaison linéaire près $\omega_2 = x_1 x_2 (x_1 - x_2) \left(\lambda_1 \frac{dx_1}{x_1} + \lambda_2 \frac{dx_2}{x_2} + \lambda_3 \frac{d(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} \right)$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, condition qui est réalisée dès que le cône tangent est réduit.
- (ii) $\mu(\mathcal{F}_{\theta_0}; 0) = 4$, i.e. $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \neq 0$.
- (iii) Aux autres points singuliers m_i , que l'on peut supposer à distance finie, la condition de Kupka $d\theta(m_i) \neq 0$ est satisfaite.
- (iv) Les λ_i sont deux à deux distincts.
- (v) \mathcal{F}_{θ_0} n'est pas défini par une 1-forme fermée.

Un calcul élémentaire montre que

$$d\theta_0 + \theta_0 \wedge \left((1 + \lambda_1) \frac{dx_1}{x_1} + (1 + \lambda_2) \frac{dx_2}{x_2} + (1 + \lambda_3) \frac{d(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} \right) = 0$$

ce qui produit d'ailleurs une 1-forme ω_1 comme dans le Théorème 13. Notons que puisque \mathcal{F}_{θ_0} n'est pas défini par une forme fermée, les λ_i ne sont pas dans \mathbb{Z} .

Soit $[\mathcal{F}_{\omega_3}]$ défini par θ_0 comme ci-dessus. Nous dirons que $[\mathcal{F}_{\omega_3}]$ est *transversalement affine générique (TAG)* si les conditions (i), (ii), (iii), (iv), (v) sont satisfaites.

Théorème 19. *Soit \mathcal{F}_ω un germe de feuilletage à l'origine de \mathbb{C}^3 donné par $\omega = \omega_3 + \dots$, ω_3 dicritique. Si $[\mathcal{F}_{\omega_3}]$ est TAG alors \mathcal{F}_ω et \mathcal{F}_{ω_3} sont conjugués.*

Démonstration. Après un éclatement dans la carte où $E = (x_1 x_3, x_2 x_3, x_3)$ on a avec les notations précédentes :

$$\theta = \frac{E^* \omega}{x_3^4} = \omega_2 + q(x_1 dx_2 - x_2 dx_1) + x_3 (A dx_1 + B dx_2) + h dx_3.$$

Comme $\theta|_{x_3=0} = \theta_0$, il existe une 1-forme fermée méromorphe θ_1 telle que $d\theta + \theta \wedge \theta_1 = 0$, avec

$$\theta_1|_{x_3=0} = (1 + \lambda_1) \frac{dx_1}{x_1} + (1 + \lambda_2) \frac{dx_2}{x_2} + (1 + \lambda_3) \frac{d(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Puisque θ_1 est construite par prolongement de $\theta_1|_{x_3=0}$, θ_1 n'a pas de pôle le long de $x_3 = 0$. La condition (iv) implique que θ_1 a ses pôles le long de trois surfaces lisses deux à deux transverses dont les intersections avec $x_3 = 0$ sont $x_1 x_2 (x_2 - x_1) = 0$. À conjugaison holomorphe locale près on peut supposer que θ_1 a ses pôles le long de :

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_2 - x_1 + z^k = 0$$

pour un certain $k \in \mathbb{N}$. En résulte que la forme fermée θ_1 est du type suivant en $(0, 0, 0)$:

$$\theta_1 = (1 + \lambda_1) \frac{dx_1}{x_1} + (1 + \lambda_2) \frac{dx_2}{x_2} + (1 + \lambda_3) \frac{d(x_2 - x_1 + z^k)}{x_2 - x_1 + z^k} + df$$

avec f holomorphe en $(0, 0, 0)$, $f(x_1, x_2, 0) \equiv 0$.

Soit U une unité, $U(0) = 1$, et ϕ le difféomorphisme :

$$\phi = (x_1 U^k, x_2 U^k, x_3 U).$$

On pose $\theta'_1 = \theta_1 - df$; un calcul direct montre que

$$\phi^* \theta'_1 = \theta'_1 + 4k \frac{dU}{U}.$$

Par suite, si k est non nul, on peut supposer que $\theta'_1 = \theta'$ (choisir $U = \exp \frac{-f}{4k}$). Après cette transformation on a :

$$d\theta + \theta \wedge \left((1 + \lambda_1) \frac{dx_1}{x_1} + (1 + \lambda_2) \frac{dx_2}{x_2} + (1 + \lambda_3) \frac{d(x_2 - x_1 + x_3^k)}{x_2 - x_1 + x_3^k} \right) = d\theta + \theta \wedge \theta_1.$$

On considère alors l'application σ :

$$\sigma = (x_1, x_2, e^{\frac{2\pi i}{k}} x_3).$$

On a $\sigma^* \theta_1 = \theta_1$; on introduit la moyenne $\bar{\theta}$ de θ sous l'action de σ :

$$\bar{\theta} = \theta + \sigma^* \theta + \dots + \sigma^{k-1} \theta$$

qui est bien sûr invariante sous l'action de σ ; on a $\bar{\theta}|_{x_3=0} = k\theta_0$, ce qui indique que $\bar{\theta}$ est non triviale. L'invariance de $\bar{\theta}$ sous l'action de σ dit que $\bar{\theta}$ est image réciproque par l'application $\varphi = (x_1, x_2, x_3^k)$ d'une certaine 1-forme α vérifiant $\alpha|_{x_3=0} = k\theta_0$ et :

$$d\alpha + \alpha \wedge \left((1 + \lambda_1) \frac{dx_1}{x_1} + (1 + \lambda_2) \frac{dx_2}{x_2} + (1 + \lambda_3) \frac{d(x_2 - x_1 + x_3)}{x_2 - x_1 + x_3} \right) = d\alpha + \alpha \wedge \beta_1.$$

On a donc un nouveau déploiement de θ_0 mais avec $x_1 x_2 (x_2 - x_1 - x_3) = 0$ comme hypersurface invariante.

Comme cette hypersurface est un croisement normal, lorsque l'on éclate l'origine par E , l'holonomie du diviseur exceptionnel $E^{-1}(0)$ pour $\mathcal{F}_{E^* \alpha}$ est abélienne. En résulte que l'holonomie du diviseur exceptionnel après un éclatement du feuilletage \mathcal{F}_{θ_0} est aussi abélienne. Ce qui est exclus par la condition (v). Par suite $k = 0$ et θ possède la surface invariante $x_1 x_2 (x_2 - x_1) = 0$. Il est facile de voir que $\theta = F^* \theta_0$ où F est une submersion *ad-hoc*. On conclut en invoquant le Lemme 8. \square

13. PERTURBATIONS DE 1-FORMES FERMÉES : EXEMPLES

On considère dans ce paragraphe des feuilletages \mathcal{F}_ω , $\omega = \omega_3 + \dots$ dont la partie de degré deux $[\mathcal{F}_{\omega_3}]$ est défini par une 1-forme fermée rationnelle. Comme on l'a dit au paragraphe 6, \mathcal{F}_ω est aussi défini par une 1-forme fermée. Le cas le plus simple est celui où $[\mathcal{F}_{\omega_3}]$ est un pinceau générique de coniques. Un tel pinceau est à conjugaison linéaire près donné par les niveaux de $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{(x_0 - x_1)(x_0 + x_1)}{(x_0 - x_2)(x_0 + x_2)}$. Le feuilletage associé est donné en coordonnées homogènes par

$$\omega_3 = Q_1 dQ_2 - Q_2 dQ_1.$$

Vu dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ le feuilletage $[\mathcal{F}]_{\omega_3}$ a sept singularités, dont quatre sont de type radial $((1 : 1 : 1), (1 : 1 : -1), (1 : -1 : 1), (-1 : 1 : 1))$ et trois sont des centres $((1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1))$. Vu dans \mathbb{C}^3 le feuilletage \mathcal{F}_{ω_3} a donc sept lignes de singularités dont quatre sont de type Kupka ($Q_1 = Q_2 = 0$), et donc *persistantes* par perturbation. Soit $L = a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$, $a_i \in \mathbb{C}$, une forme linéaire ; introduisons la 1-forme intégrable $\omega_L \in \Omega^1(\mathbb{C}^3, 0)$

$$\omega_L := Q_1 dQ_2 - Q_2 dQ_1 + Q_1 Q_2 dL.$$

On remarque de ω_L s'annule sur les quatre droites $Q_1 = Q_2 = 0$ et que \mathcal{F}_{ω_L} a l'intégrale première méromorphe $e^{-L} \frac{Q_1}{Q_2}$. Considérons l'éclatement $E : \tilde{\mathbb{C}}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ de l'origine ; dans la première carte (x_0, t_1, t_2) où $E = (x_0, t_1 x_0, t_2 x_0)$, on a :

$$E^* \frac{\omega}{Q_1 Q_2} = \frac{-2t_1 dt_1}{1 - t_1^2} + \frac{2dt_2}{1 - t_2^2} + (a_0 + a_1 t_1 + a_2 t_2) dx_0 + x_0 (a_1 dt_1 + a_2 dt_2).$$

En particulier si $a_0 \neq 0$, la singularité initiale de $[\mathcal{F}_{\omega_3}]$ en $(1 : 0 : 0)$ a disparu et devient une tangence entre le feuilletage éclaté $E^{-1}(\mathcal{F}_{\omega_L})$ et le diviseur exceptionnel $E^{-1}(0)$. Si $a_0 a_1 a_2 \neq 0$, les singularités

de $E^{-1}(\mathcal{F}_{\omega_L})$ sont précisément sur les transformés strictes de $Q_1 = Q_2 = 0$. Le long de ces quatre droites D_1, D_2, D_3, D_4 le feuilletage $E^{-1}(\mathcal{F}_{\omega_L})$ est de type Kupka-radial. De sorte que si l'on éclate l'origine puis ces quatre droites par l'application $\sigma : M = \tilde{\mathbb{C}}^3_{D_1, D_2, D_3, D_4} \rightarrow \mathbb{C}^3$, le feuilletage transformé $\sigma^{-1}(\mathcal{F})$ est maintenant sans singularités. On obtient ainsi en dimension trois un exemple de feuilletage *absolument dicritique* au sens de Cano-Corral [4]. On peut d'ailleurs généraliser cet exemple en prenant pour les Q_i des polynômes de degré $k \geq 2$ génériques.

Remarquons qu'en annulant certains a_i on peut obtenir pour \mathcal{F}_{ω_L} quatre, cinq, six ou sept droites singulières. Ainsi sur cet exemple on peut éliminer de façons indépendantes les droites singulières venant d'une configuration centrale.

En choisissant des entiers non nuls k_0, k_1, k_2 on peut aussi considérer les feuilletages donnés par $\omega = Q_1 dQ_2 - Q_2 dQ_1 + Q_1 Q_2 df$ avec $f = a_0 x_0^{k_0} + a_1 x_1^{k_1} + a_2 x_2^{k_2}$. Par exemple dans $E^{-1}(\mathbb{C}^3) = \tilde{\mathbb{C}}^3$ le feuilletage relevé a au point $(1 : 0 : 0)$ une singularité avec intégrale première du type $xy + a_0 z^{k_1}$. On en déduit une infinité non dénombrable de déformations de \mathcal{F}_{ω_3} non conjuguées.

On peut procéder de même dans le cas de formes logarithmiques de type $(1, 1, 1, 1)$ suivant la notation de [9]. Un feuilletage générique de ce type est à conjugaison près de la forme :

$$\omega_3 = x_0 x_1 x_2 (x_0 + x_1 + x_2) \left(\lambda_0 \frac{dx_0}{x_0} + \lambda_1 \frac{dx_1}{x_1} + \lambda_2 \frac{dx_2}{x_2} - \frac{d(x_0 + x_1 + x_2)}{x_0 + x_2 + x_2} \right)$$

avec $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Les points singuliers dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ sont au nombre de sept ; parmi eux six correspondent aux intersections des quatre droites invariantes. Ce sont des singularités logarithmiques génériques pour des valeurs génériques des paramètres λ_k . La septième singularité est de type centre et se trouve au point $(\lambda_0 : \lambda_1 : \lambda_2)$. Vu dans \mathbb{C}^3 le feuilletage \mathcal{F}_{ω_3} a donc sept droites singulières. On peut comme précédemment introduire

$$\omega_L = \omega_3 + x_0 x_1 x_2 (x_0 + x_1 + x_2) dx_0.$$

Le feuilletage \mathcal{F}_{ω_L} a seulement six droites singulières. On peut aussi considérer les 1-formes $\omega_3 + x_0 x_1 x_2 (x_0 + x_1 + x_2) df_k$ avec $f_k = x_0^k$ produisant une famille dénombrable de feuilletages avec même partie homogène de degré 3 qui ne sont pas équivalents.

Terminons ce paragraphe par le cas exceptionnel. On considère sur $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ le feuilletage \mathcal{F}_{Γ} dont les feuilles sont les niveaux de la fonction rationnelle $\frac{F^2}{G^3}$ où F et G sont donnés en coordonnées homogènes par : $F = x_3 x_4^2 - x_1 x_2 x_4 + \frac{x_1^3}{3}$, $G = x_2 x_4 - \frac{x_1^2}{2}$. Il s'agit d'un feuilletage de degré 2, donné par $\Omega_3 = \frac{1}{x_4} (2GdF - 3FdG)$, appelé *feuilletage exceptionnel*; il est exceptionnel à plusieurs titres.

L'orbite de \mathcal{F}_{Γ} sous l'action du groupe d'automorphismes $\text{Aut}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3)$, ou plutôt sa fermeture, est une composante irréductible de l'espace des feuilletages de degré 2 sur $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ [9]. D'autre part ses feuilles sont des surfaces de degré 6, ce qui en un certain sens est un *degré anormal* pour un feuilletage de degré 2. Son lieu singulier Γ est constitué d'une droite, d'une conique et d'une cubique gauche tangentes en un point q [9]. Soit $H \simeq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ un hyperplan générique, i.e. transverse à Γ . La restriction de \mathcal{F}_{Γ} à H est un feuilletage de degré 2, qui a donc sept points singuliers comptés avec multiplicité. Comme $\Gamma - \{q\}$ est constitué des lignes de Kupka et H est transverse à Γ , les six points de $H \cap \Gamma$ sont des points singuliers de $\mathcal{F}_{\Gamma}|_H$ qui ont pour nombre de Milnor 1. Il y a donc un autre point $p \in H$ singulier pour $\mathcal{F}_{\Gamma}|_H$ avec nombre de Milnor égal à 1. Comme p n'appartient pas à Γ , le feuilletage \mathcal{F}_{Γ} a une intégrale première local φ submersive en p , et la restriction $\varphi|_H$ est nécessairement de Morse en p . Ainsi p est un centre de $\mathcal{F}_{\Gamma}|_H$. Supposons H donné par $x_4 = ax_1 + bx_2 + cx_3 = L$, avec $abc \neq 0$, et notons f et g les restrictions de F et G à H : $f = F(x_1, x_2, x_3, L)$, $g = G(x_1, x_2, x_3, L)$. Le feuilletage $\mathcal{F}_{\Gamma}|_H$ est défini par la forme :

$$\omega_3^H = \omega_3 = \frac{1}{L} (2gdf - 3fdg) \in \Omega^1(\mathbb{C}^3, 0).$$

Le feuilletage \mathcal{F}_{ω_3} a, pour L générique, sept droites singulières dont six sont de type Kupka et la septième de type centre, en dehors de 0.

On considère maintenant la perturbation $\omega = \omega_3 + \dots$, de 3-jet ω_3 , défini par :

$$\omega = \omega_3 + 2fgdL = \frac{1}{L}(2gdf - 3fdg + fgdL^2).$$

Cette 1-forme est intégrable puisque :

$$\omega = \frac{fg}{L} \left(2\frac{df}{f} - 3\frac{dg}{g} + dL^2 \right).$$

Notons que pour H générique, le point $p \in H$ est en dehors des zéros de F et G et donc de $[f^{-1}(0)]$ et $[g^{-1}(0)]$. Si l'on procède à l'éclatement de ω par $E = (y_1, y_1y_2, y_1y_3)$ on obtient :

$$E^*\omega = \frac{y_1^5 \tilde{f} \tilde{g}}{y_1(a + by_2 + cy_3)} \left(2\frac{d\tilde{f}}{\tilde{f}} - 3\frac{d\tilde{g}}{\tilde{g}} + dy_1^2(a + by_2 + cy_3)^2 \right)$$

avec $f \circ E = y_1^3 \tilde{f}$, $g \circ E = y_1^2 \tilde{g}$. On note que \tilde{f} et \tilde{g} sont des unités en p et comme $\mathcal{F}_\Gamma|_H$ a un centre en p , le 1-jet de $2\frac{d\tilde{f}}{\tilde{f}} - 3\frac{d\tilde{g}}{\tilde{g}}$ en p est de type $udv + vdu$ pour un bon choix de coordonnées u, v . Par suite le feuilletage $E^{-1}\mathcal{F}_\omega$ a en p une singularité isolée ; en résulte que l'ensemble singulier de \mathcal{F}_ω est constitué de six courbes lisses et non sept comme \mathcal{F}_{ω_3} . Par suite \mathcal{F}_ω et \mathcal{F}_{ω_3} ne sont pas conjugués.

On peut aussi considérer les feuilletages \mathcal{F}_{ω^k} associés aux 1-formes :

$$\omega^k = \omega_3 + fgkL^{k-1}dL, \quad k \in \mathbb{N}.$$

En étudiant la singularité $E^{-1}\mathcal{F}_{\omega^k,p}$ on constate que les feuilletages \mathcal{F}_{ω^k} ne sont pas holomorphiquement conjugués. Ceci indique en particulier que le feuilletage \mathcal{F}_{ω_3} n'est pas de détermination finie ; il est probable par contre que les \mathcal{F}_{ω^k} pour $k \geq 1$ le soient.

14. CONCLUSION

Rappelons que la classification des feuilletages de degré deux de $\mathbb{P}_\mathbb{C}^2$ n'ayant qu'une singularité (donc à nombre de Milnor 7) est faite dans [8] ; tous sont définis par une 1-forme fermée méromorphe sauf un modèle ayant une singularité noeud-col, donc satisfaisant la condition de Kupka. Tous les résultats qui précèdent sont résumés dans le Théorème A, présenté dans l'introduction. On obtient en particulier la classification des feuilletages \mathcal{F}_ω sur $\mathbb{C}^3, 0$ à partie initiale $\text{In}(\omega)$ dicritique de degré 3, $\text{Cod Sing In}(\omega) \geq 2$ (modulo la condition de non résonance locale $b \notin \mathbb{Q}$).

Voici maintenant une liste de problèmes ouverts.

- 1- Traiter le cas résonnant d'une singularité de type Ω_2 avec $b \in \mathbb{Q}$.
- 2- Soit ω_ν une 1-forme intégrable homogène de degré ν , $\text{Cod Sing } \omega_\nu \geq 2$; on considère l'ensemble

$$\mathcal{FIN}(\omega_\nu) := \{\text{feuilletages } \mathcal{F} = \mathcal{F}_\omega \text{ avec } \text{In}(\omega) = \omega_\nu\}.$$

Sur $\mathcal{FIN}(\omega_\nu)$, il y a la relation d'équivalence de conjugaison holomorphe : $\mathcal{F}_\omega \sim \mathcal{F}_{\omega'}$ si et seulement si il existe un difféomorphisme ϕ tangent à l'identité tel que $\phi^*\mathcal{F}_\omega = \mathcal{F}_{\omega'}$. Décrire l'espace de module $\mathcal{M}(\omega_\nu) = \mathcal{FIN}(\omega_\nu)/\sim$; par exemple si ω_ν satisfait le point 3 du Théorème A, alors $\mathcal{M}(\omega_\nu)$ se réduit à un point. Par contre nous venons de voir des exemples où $\mathcal{M}(\omega_\nu)$ est infini ($\omega_\nu = Q_1dQ_2 - Q_2dQ_1$ comme ci-dessus).

- 3- Généraliser les énoncés du Théorème A aux dimensions supérieures à 3. La classification de [9] permet de se ramener au cas où la partie initiale ne dépend que de 3 variables.
- 4- Donner une démonstration géométrique, i.e. non calculatoire, du Théorème de Dulac.

RÉFÉRENCES

- [1] Camacho, C.; Lins Neto, A. *The topology of integrable differential forms near a singularity*. Publ. Math. IHES, 55 no.1 (1982) 5–35.
- [2] Camacho, C.; Lins Neto, A.; Sad, P. *Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields*. Journ. of Diff. Geo., 20 no.1 (1984) 143–174.
- [3] Cano, F.; Cerveau, D.; Déserti, J. *Théorie élémentaire des feuilletages holomorphes singuliers*. Editions Belin, ISBN 978-2-7011-7484-6 (2013).
- [4] Cano, F.; Corral, N. *Absolutely Dicritical Foliations*. Int. Math. Res. Not., 8 (2011) 1926–1934
- [5] Cartan, H. *Œuvres. Vol. I, II, III*. Springer-Verlag, Berlin (1979). Edité par Reinhold Remmert et Jean-Pierre Serre.
- [6] Casale, G. *Suites de Godbillon-Vey et intégrales premières*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 335 no.12 (2002) 1003–1006.
- [7] Cerveau, D. *Un théorème d'existence d'intégrales premières multiformes dans le cas dicritique*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 297, no.2 (1983) 105–107.
- [8] Cerveau, D.; Déserti, J.; Garba Belko, D.; Meziani, R. *Géométrie classique des feuilletages de degré deux*. Bull. Braz. Math. Soc., 41, no.2 (2010) 161–198.
- [9] Cerveau, D.; Lins Neto, A. *Irreducible components of the space of holomorphic foliations of degree two in $\mathbb{C}P(n)$, $n \geq 3$* . Annals of Math., 143 no.3 (1996) 577–612.
- [10] Cerveau, D.; Lins Neto, A.; Loray, F.; Pereira, J.-V.; Touzet, F. *Complex codimension one singular foliations and Godbillon-Vey sequences*. Moscow Math. Journ. 7 no.1 (2007) 21–54.
- [11] Cerveau, D.; Loray, F. *Un théorème de Frobenius singulier via l'arithmétique élémentaire*. J. Number Theory 68 no.2, (1998) 217–228.
- [12] Cerveau, D.; Mattei, J.-F. *Formes intégrables holomorphes singulières*. Astérisque 97, Soc. Math. de France (1982)
- [13] Cerveau, D.; Mozo-Fernandez, J. *Classification analytique des feuilletages singuliers réduits de codimension 1 en dimension $n \geq 3$* . Ergod. Theory Dynam. Syst., 22 no.4 (2002) 1041–1060.
- [14] Dulac, H. *Détermination et intégration d'une certaine classe d'équations différentielles ayant pour point singulier un centre*. Bull. des Sc. Math. 32 (1908).
- [15] Hironaka, H.; Matsumura, H. *Formal functions and formal embeddings*. J. Math. Soc. Japan, 20 no.1-2 (1968) 52–82.
- [16] Jouanolou, J. P. *Équations de Pfaff Algébriques*. Lect. Notes in Math., v. 708 (1979).
- [17] Kupka, I. *Singularities of integrable Pfaffian forms*. Proc. Nat. Acad. Sciences, 52 (1964).
- [18] Lins Neto, A. *Finite determinacy of germs of integrable 1-forms in dimension 3 (a special case)*. Lect. Notes In Math., v. 1007 (1980) 480–497.
- [19] Loray, F. *A Preparation Theorem for codimension one foliations*. Annals of Math., 163 no.2 (2006) 709–722.
- [20] Loray, F.; Pereira, J.-V.; Touzet, F. *Representations of quasiprojective groups, flat connections and transversely projective foliations*. hal-00942861 (2014).
- [21] Malgrange, B. *Frobenius avec singularité I : codimension 1*. Publ. Math. IHES, 46 no.1 (1976) 163–173.
- [22] Martinet, J.; Ramis, J.-P. *Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre*. Publ. Math. IHES, 55 no.1 (1982) 63–164.
- [23] Martinet, J.; Ramis, J.-P. *Classification analytique des équations différentielles non linéaires résonnantes du premier ordre*. Ann. Sci. de l'École Norm. Sup., 16 no.4 (1983) 571–621.
- [24] Mattei, J.-F.; Moussu, R. *Holonomie et intégrales premières*. Ann. Sci. de l'École Norm. Sup., 13 no.4 (1980) 469–523.
- [25] Saito, K. *On a generalization of de Rham lemma*. Ann. de l'Inst. Fourier, 26 no.2 (1976) 165–170.
- [26] Singer, M. *Liouvillean first integrals of differential equations*. Trans. Amer. Math. Soc., 333 no.2 (1992) 673–688.