FIBRAÇÕES POR CURVAS SINGULARES DE GÊNERO ARITMÉTICO 2

Autor: Alejandro Simarra Cañate

Orientador
Karl Otto Stöhr

INSTITUTO NACIONAL DE MATEMATICA PURA E APLICADA

PROGRAMA DE DOUTORADO
RIO DE JANEIRO
2014

.

Agradecimentos

- ***A Deus por me salvar a vida.***
- ***Ao Brasil pela hospitalidade, pelo amor de seus filhos e pelo apoio financeiro por meio do CNPq.***
- ***Ao IMPA pela oportunidade e a seus funcionários pela sua excelência.***
- ***Ao Karl Otto porque me deu como presente um pouco da sua visão e uma linha de pesquisa.***
- ***Aos meus amigos dos quais menciono a Plinio, Rafael de Aruda e Ruben porque eles compartilharam comigo a minha tristeza e também parte da minha alegria no contexto do IMPA.***
- ***Às minhas 4 irmãs Dayse, Leida e Lilianas. Elas são uma manifestação clara da amizade verdadeira, a qual me deu fortaleza para continuar neste caminho.***
- ***A mis padres Nicolas Simarra y Noris Cañate por que me permitieron comprender que la sabiduria del hombre no está en hacer doctorados sino en la fidelidad, fe, esperanza, amor y temor de Dios.***

.

ABSTRACT

This work is about a birational classification of fibrations by singular curves of arithmetic genus 2 in characteristic $p = 2$. Characteristic 2 is not a restriction, but it is the case that help us to understand the classification problem indeed. This classification is obtained solving an equivalent problem on non-conservative function fields or regular but non-smooth curves, by mean of a simple geometric approach.

Keywords: Bertini's Theorem. Non-conservative function fields. Singular primes. Residue class field. Generic fibre. General fibre.

RESUMO

Neste trabalho obtemos uma classificação birracional de fibrações por curvas singulares de gênero aritmético 2 em característica $p = 2$. O caso de característica 2 não é uma restrição senão que é o caso que permite entender melhor o problema de classificação. A classificação é obtida solucionando um problema equivalente de corpos de funções não conservativos ou de curvas regulares não lisas, por meio de uma abordagem geométrica simples.

Palavras Chaves: Teorema de Bertini. Corpos de funções não conservativos. Primos singulares. Corpo residual. Fibra genérica. Fibra geral.

RESUMEN

Este trabajo trata sobre una classificación birracional de fibraciones por curvas singulares de género aritmético 2 en característica $p = 2$. El caso de característica 2 no es una restricción sino que es el caso que permite entender mejor el problema de classificación. La classificación se obtiene resolviendo un problema equivalente de cuerpos de funciones no conservativos o de curvas regulares singulares, por medio de un método geométrico simple.

Palabras Claves: Teorema de Bertini. Cuerpos de funciones no conservativos. Primos singulares. Cuerpo residual. Fibra genérica. Fibra general.

.

Dedicatória

A todos los que amo y a todos los que me aman de verdad. Entre estos últimos quiero mencionar a mis hermanos Jesus de Nazareth, Henry, Nicolas, Amalfy, Lorena y a mis hijos Alan, Nicol, Leida, Grace y Carmen. También la dedico a todos los que ellos se la quieran dedicar.

.

Conteúdo

.

INTRODUÇÃO

No ano 1944 Zariski [Zr] publicou um exemplo de uma fibração induzida por um morfismo $f : T \to B$ de variedades algébricas tal que T é lisa depois de restringir B a um aberto (denso) e quase todas as fibras são curvas cuspidais. Um tal exemplo foi suficiente para concluir que o Teorema de Sard ou aliás, o Teorema de Bertini é falso na categoria das variedades algébricas definidas sobre um corpo k de característica positiva. Este tipo de fibrações apareceram também na classificação de Enriques–Kodaira para superfícies definidas em característica positiva publicada por Bombieri e Mumford [BM]. É então natural se perguntar sobre uma classificação deste tipo de fibrações. Este trabalho tem como objetivo apresentar uma classificação birracional de fibrações por curvas singulares de gênero aritmético 2 em característica $p = 2$ (Teorema 3.2.2 e Teorema 3.3.2). A restrição da característica aparece naturalmente no trabalho de Tate [Ta1], porque o problema da classificação birracional de fibrações por curvas singulares é equivalente ao problema de classificação de corpos de funções não conservativos, de onde se conclui que o gênero da fibra genérica da fibração impõe restrições na característica do corpo. Queen [Qn] foi o primeiro em trabalhar neste contexto classificando os corpos de funções elíticas (de gênero igual a 1) não conservativos. Porém, Artin [At] e Kimura [Km] já tinham desenvolvido alguns trabalhos para entender o fenômeno de mudança de gênero em extensões por constantes de corpos de funções. Todavia, foi o Stichtenoth [Sn1] quem iniciou um estudo sistemático de caráter local e obteve a forma normal dos corpos de funções não conservativos de gênero $\frac{p-1}{2}$. Sem duvida muitos destes trabalhos foram influenciados pelo artigo de Rosenlicht [Rs], no qual, ele obteve uma fórmula do gênero para curvas regulares definidas sobre um corpo (possivelmente não perfeito), em termos dos graus de singularidade dos primos singulares (pontos regulares não lisos) e do gênero do modelo não singular da extensão da curva ao fecho algébrico do corpo de base. Um ano depois de que [Sn1] foi publicado, Borges Neto [Bg] abordou o problema para o caso de gênero 2 e característica impar. No ano 2004 Stöhr [St4] apresentou o problema no contexto geométrico de fibrações patológicas no sentido que todas as fibras (da fibração) são curvas singulares, construindo famílias de curvas onde o grau é menor que a característica do corpo de base das variedades envolvidas e cuja existência era desconhecida. Ele focalizou seu estudo em característica 7 e 5 onde estudou as fibrações por curvas de gênero aritmético 3 não hiperelíticas já que elas se realizam como quárticas no plano projetivo. No ano 2009, Salomão [Sl1] progrediu no estudo deste tipo de fibrações em característica 3 onde a diversidade de exemplos é maior. Ele classificou algumas famílias de fibrações e fez uma abordagem do problema usando a teoria do Frobenius pull-back de esquemas (ver [Sl2]). Finalmente temos conhecimento de que no seminário da Universidade Federal Fluminense (UFF) os professores C. D. Moreira e G. Borelli iniciaram um estudo da classificação de fibrações por curvas singulares sem usar corpos de funções, mas incorporando ferramentas da teoria de transformações de Cremona e folheções.

Nosso trabalho tem como finalidade classificar as fibrações por curvas singulares de gênero aritmético 2 em característica $p = 2$. Em um certo sentido o estudo em característica 2 permite entender melhor a classificação já feita em característica impar, além de que é a primeira classificação birracional completa em característica $p = 2$ no sentido das fibrações universais introduzidas por Stöhr [St5].

Neste trabalho uma variedade é um esquema integral separado de tipo finito definido sobre $\operatorname{Spec} k$ onde k é um corpo algebricamente fechado como definida em [Hs] p. 105. Porém, também podemos pensa-las como sendo variedades clássicas.

Seja $f : T \to B$ um morfismo próprio de variedades definidas sobre um corpo algebricamente fechado k de característica positiva p tal que T é liso depois de restringir B a um aberto, ou seja, existe $U \subseteq B$ tal que $f^{-1}(U)$ é lisa. Além disso, vamos supor que quase todas as fibras esquemáticas do morfismo são curvas integrais. Consideramos então a fibração induzida pelo morfismo f. Chamamos a T de *espaço total* e a B de *base*. Exatamente como na topologia algébrica as fibrações serão consideradas com uma base B fixada. Um morfismo (respectivamente, uma aplicação racional) entre duas fibrações é um morfismo (respectivamente, uma aplicação racional) entre os espaços totais que faz comutar o diagrama triangular resultante. Isto é, os morfismos serão morfismos de B-esquemas. Logo, as fibrações com base B formam uma categoria.

Sejam $F := k(T)$ e $K := k(B)$ os corpos de funções de T e B respectivamente. Então, usando o correspondente morfismo de feixes estruturais, K pode ser considerado como um subcorpo de F. Assim, $F|K$ é um corpo de funções, i.e., a extensão $F|K$ tem grau de transcendência 1 e K contem todos os elementos algébricos de F sobre K (K é algebricamente fechado em F). A fibra do ponto genérico de B é dita de *fibra genérica* e ela corresponde ao modelo regular do corpo de funções de $F|K$ que nós denotamos por $R_{F|K}$. A extensão da fibra genérica ao fecho algébrico do corpo de funções da base B é dita de *fibra geral* ou fibra genérica geométrica. Em outras palavras, a fibra geral é a curva $R_{F|K} \times_{Spec(K)} Spec(\overline{K})$ onde $\overline{K}$ denota o fecho algébrico de K. Um corpo de funções $F|K$ é dito *não conservativo* se a sua extensão por constantes ao fecho algébrico de K denotada por $F\overline{K}|\overline{K}$ tem gênero menor do que o gênero de $F|K$. É bem conhecido que o morfismo $f : T \to B$ induz uma fibração por curvas singulares se e só se a fibra geral é uma curva integral não lisa se e só se o corpo de funções $F|K$ é separável e não conservativo. Como nosso objetivo é estudar fibrações por curvas singulares de gênero aritmético 2, então este trabalho focaliza no estudo de corpos de funções não conservativos de gênero 2. O contexto de corpos de funções não conservativos é um pouco mais geral, muito mais operativo e permite nos aproximar a certos resultados no contexto geométrico. Por exemplo, alguns dos resultados da classificação foram obtidos primeiro assumindo que o corpo K é separavelmente fechado, o que não acontece no contexto geométrico; mas os resultados obtidos assumindo essa hipótese permitiram nos chegar ao resultado geral.

No primeiro capítulo obtemos a forma normal de um corpo de funções não conservativo de gênero 2 e se prova que toda fibração de tipo separável é uma fibração por curvas elíticas singulares (Teorema 1.4.1). Para ambas as conclusões se faz uso de uma abordagem geométrica induzindo uma curva no cone do espaço projetivo de dimensão 4 que modela ou representa a fibra geral de uma fibração. O método de classificação proposto depende então desta curva e do Teorema 1.2.2 o qual afirma que um corpo de funções munido da forma normal (já descoberta na primeira secção do capítulo) tem gênero 2 se e só se a curva induzida no cone tem gênero aritmético 2.

No segundo capítulo se classificam os corpos de funções não conservativos de gênero 2 em característica 2 (Teorema 2.2.1 e Teorema 2.3.1).

O Teorema 2.2.1 nos permite construir exemplos de fibrações por curvas elíticas singulares.

Seja $S \subset \mathbb{P}^4(k)$ o cone com vértice

$$V = (0:0:0:0:1)$$

composto pelas retas

$$L_a = \{(a^0 : a^1 : a^2 : a^3 : b) |\ b \in k\} \cup \{V\}, a \in k \quad \text{e} \quad L_\infty = \{(0:0:0:1:b) |\ b \in k\} \cup \{V\}.$$

Em $S\backslash\{V\}$ temos duas cartas $\begin{array}{ccc} U = S \setminus L_\infty & \to & k^2 \\ (a^0 : a^1 : a^2 : a^3 : b) & \mapsto & (a,b) \end{array}$ e $\begin{array}{ccc} U' = S \setminus L_0 & \to & k^2 \\ (a^3 : a^2 : a^1 : a^0 : b) & \mapsto & (a,b) \end{array}$.

Seja $T \subset S \times \mathbb{A}^1(k)$ a variedade cuja equação na carta $U \times \mathbb{A}^1(k) \to k^3$ é

$$y^2 + y + tx^6 = 0$$

onde $(x, y) \in k^2$ e $t \in \mathbb{A}^1(k)$. Na segunda carta de $S \times \mathbb{A}^1(k)$ a equação de T é

$$y'^2 + x'^3 y' + t = 0.$$

Seja $f : T \to \mathbb{A}^1(k)$ o morfismo definido pela segunda projeção. A fibração induzida pelo morfismo é uma fibração por curvas singulares de gênero aritmético 2 as quais têm modelo não singular elítico com invariante $j = 0$. Pelo critério jacobiano se pode ver que T é lisa. Além disso, todas as fibras são isomorfas, mas a fibração não se trivializa à maneira das superfícies geometricamente regradas, porque se tal for o caso chegaríamos a uma contradição; pois o corpo de funções relativo à fibração seria conservativo já que os coeficientes da sua equação normal estariam no corpo de base onde as variedades estão definidas o qual é algebricamente fechado (ver a Observação 3.1.2 e o Teorema 2.2.1).

Analogamente, usando o Teorema 2.3.1 podemos construir fibrações por curvas singulares de gênero aritmético 2 com modelo não singular racional tal que cada fibra tem uma singularidade com grau de singularidade 2 ou duas singularidades cada uma com grau de singularidade igual a 1 (Proposição 3.3.1).

No capítulo três se apresenta uma classificação birracional das fibrações por curvas elíticas de gênero aritmético 2 em característica 2 (Teorema 3.2.2). De forma análoga se apresenta a classificação birracional das fibrações por curvas racionais singulares de gênero aritmético 2. Esta classificação se faz usando uma fibração universal no sentido que qualquer outra fibração do mesmo tipo, se realiza birracionalmente como uma extensão da base de uma subfibração da fibração dita de universal. Finalmente, apresentamos uma proposta intuitiva para classificar um certo tipo de fibrações usando espaços de móduli e concluímos comentando alguns problemas a serem resolvidos no futuro dentro da mesma linha de pesquisa.

.

1 Formas normais de corpos de funções não conservativos de gênero 2

A classificação de corpos de funções não conservativos é em um certo sentido equivalente a classificar birracionalmente fibrações por curvas singulares. Um corpo de funções é dito *não conservativo* quando seu gênero é maior do que o gênero de sua extensão por constantes ao fecho algébrico do corpo de base. O objetivo principal deste capítulo é obter uma forma normal para os corpos de funções não conservativos de gênero 2. Esta forma normal permitirá dividir o problema de classificação dos corpos de funções não conservativos de gênero 2 de acordo com o *tipo de separabilidade* (Teorema 1.4.1) o que no sentido das fibrações nos diz que toda fibração por curvas singulares de gênero aritmético 2 é de tipo separável se e só se é uma fibração por curvas singulares de gênero aritmético 2 com modelo não singular elítico.

1.1 Forma normal de um corpo de funções de gênero 2

Esta secção tem como finalidade chegar a uma forma normal dos corpos de funções de gênero 2 e determinar condições nas equações normais para que dois deles sejam isomorfos.

Se preferir, pode-se pensar em um corpo de funções como sendo um esquema integral completo e regular de dimensão 1 sobre o espectro de um corpo que em geral não é algebricamente fechado. Então, neste caso, todas as noções para esquemas (e.g. gênero, divisor canônico, etc.) são consideradas como sendo noções do corpo de funções relativo ao esquema.

Seja $F|K$ um corpo de funções de gênero $g = 2$ e $\mathfrak{c}$ um divisor canônico dele. Como, a dimensão de $L(\mathfrak{c}) = \{f \in F^* : \operatorname{div}(f) + \mathfrak{c} \geq 0\} \cup \{0\}$ como espaço vetorial sobre K é $l(\mathfrak{c}) = 2$ então, podemos supor que $\mathfrak{c}$ e um divisor positivo. Logo, existe $x \in L(\mathfrak{c}) \setminus K$, i.e.,

$$L(\mathfrak{c}) = K \oplus Kx.$$

Pela igualdade fundamental em corpos de funções e a definição de $L(\mathfrak{c})$, temos que

$$[F : K(x)] = \deg(\operatorname{div}_\infty(x)) \leq \deg(\mathfrak{c}) = 2$$

onde $\operatorname{div}_\infty(x)$ é o divisor de polos da função x. Agora, já que $g > 0$, então $F \neq K(x)$. Logo, $[F : K(x)] = \deg(\operatorname{div}_\infty(x)) = \deg(\mathfrak{c}) = 2$, i.e.,

$$\operatorname{div}_\infty(x) = \mathfrak{c}.$$

Por outro lado, usando o Teorema de Riemann–Roch se tem que

$$l(n\mathfrak{c}) = 2n - 1$$

para todo inteiro $n \geq 2$. Outro resultado mais ou menos imediato para todo inteiro positivo n é

$$L(n\mathfrak{c}) \cap K(x) = H^0(\mathbb{P}^1_K, \operatorname{div}_\infty(x^n)) = \oplus_{i=0}^{n} Kx^i.$$

Como $l(3\mathfrak{c}) = 5$, existe $y \in L(3\mathfrak{c}) \setminus K(x)$ i.e,

$$L(3\mathfrak{c}) = \oplus_{i=0}^{3} Kx^i \oplus Ky.$$

Mais ainda,

$$L(n\mathfrak{c}) = (\bigoplus_{i=0}^{n} Kx^i) \oplus (\bigoplus_{i=0}^{n-3} Kx^i y)$$

para todo $n \geq 2$. Como o grau da extensão $F|K(x)$ é 2 então $F = K(x, y)$ e, como $y^2 \in L(6\mathfrak{c})$ temos que a equação do corpo de funções $F|K$ é

$$y^2 + a(x)y + b(x) = 0 \tag{1}$$

onde $a(x)$ e $b(x)$ são polinômios em $K[x]$ de graus menores ou iguais a 3 e 6 respectivamente.

A equação (1) é chamada de *forma normal* de um corpo de funções de gênero 2, ou simplesmente de *equação normal.*

Primeiramente devemos observar que esta equação não é canônica. Ela depende da escolha de um divisor canônico positivo $\mathfrak{c}$ e de elementos $x, y \in F$. A função x pertence a $L(\mathfrak{c}) \setminus K$ e $y \in L(3\mathfrak{c}) \setminus K(x)$. Naturalmente nos perguntamos como se relacionam as equações normais se mudamos as escolhas do divisor canônico e das funções x, y. Além disso, se espera que um corpo de funções $K(x, y)|K$ de gênero 2 onde x e y satisfazem a equação normal, provém da escolha de um divisor canônico positivo do corpo de funções. Vamos exemplificar isto para fixar ideias. Suponhamos que mantemos fixo o divisor canônico $\mathfrak{c}$, mas escolhemos qualquer outros $\hat{x}, \hat{y} \in F$ tais que $F = K(\hat{x}, \hat{y})$ onde $\hat{y}^2 + \hat{a}(\hat{x})\hat{y} + \hat{b}(\hat{x}) = 0$. Isto é, $\hat{x} \in L(\mathfrak{c}) \setminus K$ e $\hat{y} \in L(3\mathfrak{c}) \setminus K(\hat{x})$, i.e., $\hat{x} = \alpha x + \gamma$ e $\hat{y} = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x^3 + \beta y$ onde $\gamma, \gamma_0, \ldots, \gamma_3 \in K$ e $\alpha, \beta \in K^* := K \setminus \{0\}$ (observe-se que a igualdade de corpos $K(\hat{x}) = K(x)$ é crucial). Então, usando a equação que satisfazem $\hat{x}$ e $\hat{y}$ contas mostram que os coeficientes da equação normal que x e y satisfazem, podem ser calculados em termos dos coeficientes dos polinômios $\hat{a}(\hat{x})$, $\hat{b}(\hat{x})$ e das constantes $\gamma, \gamma_0, \ldots, \gamma_3, \alpha, \beta$ da forma seguinte:

$$a(x) = \beta^{-1}\big(\hat{a}(\alpha x + \gamma) + 2(\gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x^3)\big)$$

e

$$b(x) = \beta^{-2}\Big(\hat{b}(\alpha x + \gamma) + (\gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x^3)^2 + (\gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x^3)\hat{a}(\alpha x + \gamma)\Big)$$

Na verdade o assunto da mudança dos coeficientes da forma normal ao modificar as escolhas do divisor canônico e das funções x, y está intimamente relacionado com o problema de classificação dos corpos de funções a menos de isomorfismo. O exemplo anterior nos apresenta um caminho para classificar corpos de funções $(F|K, \mathfrak{c})$ com um divisor canônico positivo $\mathfrak{c}$ fixado. Porém, nós queremos classificar os corpos de funções $F|K$ de gênero 2 sem fixar a priori nenhum divisor.

Proposição 1.1.1. *Sejam $F|K$ e $\hat{F}|K$ corpos de funções de gênero $g = 2$ tais que $F = K(x, y)$ e $\hat{F} = K(\hat{x}, \hat{y})$ onde $\hat{x}$, $\hat{y}$ e x, y satisfazem as equações normais $\hat{y}^2 + \hat{a}(\hat{x})\hat{y} + \hat{b}(\hat{x}) = 0$ e $y^2 + a(x)y + b(x) = 0$ $\big($As funções $\hat{a}(\hat{x})$ e $a(x)$ $(\hat{b}(\hat{x})$ e $b(x))$ são polinomiais em $\hat{x}$ e x sobre K de graus menores o iguais a 3 (6) respectivamente$\big)$. Então,*

os corpos de funções $F|K$ e $\hat{F}|K$ são isomorfos se e só se existem $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in K$, $\beta \in K^*$ e uma matriz invertível $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ com coeficientes em K tais que

$$a(x) = \beta^{-1}\Big((\alpha_{21}x + \alpha_{22})^3\hat{a}\big(\frac{\alpha_{11}x + \alpha_{12}}{\alpha_{21}x + \alpha_{22}}\big) + 2(\gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x^3)\Big)$$

e

$$\begin{aligned} b(x) \;\; = \;\; & \beta^{-2}\Big((\alpha_{21}x + \alpha_{22})^3\hat{b}\big(\tfrac{\alpha_{11}x+\alpha_{12}}{\alpha_{21}x+\alpha_{22}}\big) + (\gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x^3)^2 \\ & +(\gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x^3)(\alpha_{21}x + \alpha_{22})^3\hat{a}\big(\tfrac{\alpha_{11}x+\alpha_{12}}{\alpha_{21}x+\alpha_{22}}\big)\Big) \end{aligned}$$

Demonstração. Vamos provar a implicação direta em dois passos. Primeiramente vamos ver que qualquer equação normal de um corpo de funções de gênero 2 provém da escolha de um divisor canônico positivo; o que é esperado pelo que foi discutido antes da proposição. Isto é, vamos provar que $\hat{x} \in L(\hat{\mathfrak{c}}) \setminus K$ e que $\hat{y} \in L(3\hat{\mathfrak{c}}) \setminus K(\hat{x})$ para algum divisor canônico positivo $\hat{\mathfrak{c}}$. O segundo passo será mostrar de onde provêm as constantes alfas, gamas e beta e descrever o cálculo dos coeficientes da equação de $F|K$ como o requer a proposição.

Afirmamos que $\hat{\mathfrak{c}} := \mathrm{div}_\infty(\hat{x})$ é canônico. Pela igualdade fundamental em corpos de funções temos que

$$\deg(\hat{\mathfrak{c}}) = [\hat{F} : K(\hat{x})] = 2.$$

Por outro lado, pelo Teorema de Riemann–Roch concluímos que $l(\hat{\mathfrak{c}}) \leq 2$. Agora, como $1, \hat{x} \in L(\hat{\mathfrak{c}})$ e $\hat{x} \notin K$ temos que $l(\hat{\mathfrak{c}}) = 2$. Logo, $\hat{\mathfrak{c}}$ é um divisor canônico. Além disso,

$$L(\hat{\mathfrak{c}}) = K \oplus K\hat{x}.$$

Afirmamos também que $\hat{y} \in L(3\hat{\mathfrak{c}}) \setminus K(\hat{x})$. Claramente, $\hat{y} \notin K(\hat{x})$ pelo fato que $\hat{F}|K$ não é racional. O assunto de $\hat{y}$ pertencer a $L(3\hat{\mathfrak{c}})$ depende da forma da equação normal. De fato, argumentemos por contradição supondo que $\hat{y} \notin L(3\hat{\mathfrak{c}}) = L(3\mathrm{div}_\infty(\hat{x}))$. Isso é a mesma coisa que dizer que $\upsilon_P(\hat{y}) < -3\upsilon_P(\mathrm{div}_\infty(\hat{x}))$ para algum primo P de $\hat{F}|K$ (aqui υ_P denota a valorização correspondente ao primo P). É claro que se P não é um pólo de $\hat{x}$, i.e., $\upsilon_P(\mathrm{div}_\infty(\hat{x})) = 0$ então chegaríamos a um absurdo porque em tal caso $\upsilon_P(\hat{y}^2) < \upsilon_P(\hat{y}) < 0$ e pelas propriedades da valorização $\hat{y}^2 + \hat{a}(\hat{x})\hat{y} + \hat{b}(\hat{x}) \neq 0$. Logo, podemos supor que P é um pólo de $\hat{x}$, i.e., $\upsilon_P(\hat{x}) < 0$. Neste caso temos que $\upsilon_P(\hat{b}(\hat{x})) = \deg(\hat{b}(\hat{x}))\upsilon_P(\hat{x}) \geq 6\upsilon_P(\hat{x})$. Mas, nossa hipótese é a mesma coisa que $\upsilon_P(\hat{y}) < 3\upsilon_P(\hat{x}) < 0$ e então $\upsilon_P(\hat{y}^2) < 6\upsilon_P(\hat{x})$. Logo, pelas propriedades da valorização e pela equação $\hat{y}^2 + \hat{a}(\hat{x})\hat{y} + \hat{b}(\hat{x}) = 0$ não temos outra alternativa que $\upsilon_P(\hat{y}^2) = \upsilon_P(\hat{a}(\hat{x})\hat{y}) = \upsilon_P(\hat{a}(\hat{x})) + \upsilon_P(\hat{y})$. Além disso, obtemos que

$$\upsilon_P(\hat{y}) = \upsilon_P(\hat{a}(\hat{x})) = \deg(\hat{a}(\hat{x}))\upsilon_P(\hat{x}) \geq 3\upsilon_P(\hat{x})$$

que é uma contradição. Portanto, concluímos que

$$\hat{y} \in L(3\hat{\mathfrak{c}}) \setminus K(\hat{x}).$$

Observe-se que os resultados obtidos até aqui também se aplicam para $F|K$ colocando $\mathfrak{c} := \operatorname{div}_\infty(x)$ no lugar de $\hat{\mathfrak{c}}$ e $x, y \in F$ no lugar de $\hat{x}$ e $\hat{y}$.

Suponhamos agora que fixamos um K-isomorfismo $\sigma : F \to \hat{F}$. Ele induz um isomorfismo de grupos $\sigma^* : \operatorname{Div}(F|K) \to \operatorname{Div}(\hat{F}|K)$ onde σ^* é o pull-back de divisores correspondente ao morfismo entre os modelos regulares de $\hat{F}|K$ e $F|K$ induzido por σ. Em outras palavras, a aplicação σ^* que leva o divisor $D = \sum_P n_P P$ de $F|K$ em $\sigma^*(D) = \sum_{P_\sigma} n_P P_\sigma$ é um isomorfismo de grupos, onde P_σ é o primo de $\hat{F}|K$ correspondente a valorização $\upsilon_P \circ \sigma^{-1}$.

Logo, σ^* leva divisores canônicos positivos em divisores canônicos positivos. concluímos que $\sigma^*\mathfrak{c}$ é um divisor canônico positivo de $\hat{F}|K$. Além disso,

$$L(\sigma^*\mathfrak{c}) = \sigma(L(\mathfrak{c})) = K \oplus K\sigma(x).$$

Como todos os divisores canônicos são equivalentes, i.e., a classe canônica é unicamente determinada, então todos os divisores canônicos positivos de $\hat{F}|K$ são da forma

$$\sigma^*\mathfrak{c} + \operatorname{div}(\alpha_{21}\sigma(x) + \alpha_{22})$$

onde $\alpha_{21}\sigma(x) + \alpha_{22} \neq 0$ com $\alpha_{21}, \alpha_{22} \in K$. Então

$$\hat{\mathfrak{c}} = \sigma^*\mathfrak{c} + \operatorname{div}(\alpha_{21}\sigma(x) + \alpha_{22})$$

para alguns $\alpha_{21}, \alpha_{22} \in K$ onde pelo menos um deles é não nulo. Logo,

$$L(\hat{\mathfrak{c}}) = \frac{1}{\alpha_{21}\sigma(x) + \alpha_{22}} L(\sigma^*\mathfrak{c}).$$

De onde concluímos que

$$\hat{x} = \frac{\alpha_{11}\sigma(x) + \alpha_{12}}{\alpha_{21}\sigma(x) + \alpha_{22}} = \sigma\Big(\frac{\alpha_{11}x + \alpha_{12}}{\alpha_{21}x + \alpha_{22}}\Big)$$

onde a matriz $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ tem coeficientes em K. Dita matriz é invertível pois do contrario $K(\hat{x}) = K$ que não pode ser.

Adicionalmente queremos notar que como a classe canônica é unicamente determinada e $L(\hat{\mathfrak{c}}) = K \bigoplus K\hat{x}$, então o corpo gerado pelos elementos de $L(\hat{\mathfrak{c}})$, dito de *corpo canônico* de $\hat{F}|K$ é $K(\hat{x})$. Aplicando todo o raciocínio desta primeira parte da prova a $F|K$ no lugar de $\hat{F}|K$ concluímos que o corpo canônico $K(x)$ é o único subcorpo quadrático racional de $F|K$.

Analogamente,

$$3\hat{\mathfrak{c}} = 3\sigma^*\mathfrak{c} + 3\operatorname{div}(\alpha_{21}\sigma(x) + \alpha_{22})$$

e
$$L(3\hat{\mathfrak{c}}) = \frac{1}{(\alpha_{21}\sigma(x)+\alpha_{22})^3} L(3\sigma^*\mathfrak{c}).$$
Portanto,
$$\hat{y} = \frac{\gamma_0 + \gamma_1\sigma(x) + \gamma_2\sigma(x)^2 + \gamma_3\sigma(x)^3 + \beta\sigma(y)}{(\alpha_{21}\sigma(x)+\alpha_{22})^3}$$
para alguns $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in K$ e $\beta \in K$. Como $K(x)$ é o único subcorpo quadrático racional de $F|K$, então $K(\sigma(x)) = K(\hat{x})$ aplicando a mesma unicidade para $\hat{F}|K$. Logo, como $\hat{y} \notin K(\hat{x})$, então $\beta \neq 0$. Usando o fato que $\sigma : F \to \hat{F}$ é um Kmorfismo injetor e a unicidade da equação mônica da extensão $F|K(x)$, contas mostram que

$$a(x) = \beta^{-1}\Big((\alpha_{21}x+\alpha_{22})^3\hat{a}\big(\frac{\alpha_{11}x+\alpha_{12}}{\alpha_{21}x+\alpha_{22}}\big) + 2(\gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x^3)\Big)$$

e
$$\begin{aligned} b(x) \quad &= \quad \beta^{-2}\Big((\alpha_{21}x+\alpha_{22})^3\hat{b}\big(\tfrac{\alpha_{11}x+\alpha_{12}}{\alpha_{21}x+\alpha_{22}}\big) + (\gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x^3)^2 \\ &\quad +(\gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x^3)(\alpha_{21}x+\alpha_{22})^3\hat{a}\big(\tfrac{\alpha_{11}x+\alpha_{12}}{\alpha_{21}x+\alpha_{22}}\big)\Big)\end{aligned}$$

O resultado reciproco já ficou claro também. Isto é, o K-morfismo $\sigma : F \to \hat{F}$ que aplica $\frac{\alpha_{11}x+\alpha_{12}}{\alpha_{21}x+\alpha_{22}}$ em $\hat{x}$ e $\frac{\gamma_0+\gamma_1 x+\gamma_2 x^2+\gamma_3 x^3+\beta y}{(\alpha_{21}x+\alpha_{22})^3}$ em $\hat{y}$ é um isomorfismo entre os corpos de funções $F|K$ e $\hat{F}|K$. $\square$

De acordo com a proposição a equação normal $y^2 + a(x)y + b(x) = 0$ de um corpo de funções de gênero 2 é unicamente determinada salvo uma transformação coordenada da forma

$$(x, y) \mapsto \Big(\frac{\alpha_{11}x+\alpha_{12}}{\alpha_{21}x+\alpha_{22}}, \frac{\gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x^3 + \beta y}{(\alpha_{21}x+\alpha_{22})^3}\Big).$$

Em tal caso, os coeficientes sofrem a seguinte mudança:

$$a(x) \mapsto \beta^{-1}\Big((\alpha_{21}x+\alpha_{22})^3 a\big(\frac{\alpha_{11}x+\alpha_{12}}{\alpha_{21}x+\alpha_{22}}\big) + 2(\gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x^3)\Big)$$

$$\begin{aligned} b(x) \quad &\mapsto \quad \beta^{-2}\Big((\alpha_{21}x+\alpha_{22})^3 b\big(\tfrac{\alpha_{11}x+\alpha_{12}}{\alpha_{21}x+\alpha_{22}}\big) + (\gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x^3)^2 \\ &\quad +(\gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x^3)(\alpha_{21}x+\alpha_{22})^3 a\big(\tfrac{\alpha_{11}x+\alpha_{12}}{\alpha_{21}x+\alpha_{22}}\big)\Big)\end{aligned}$$

Logo, quando o corpo K é característica $p \neq 2$ então com uma transformação

$$(x, y) \mapsto \Big(x, y + \frac{p-1}{2}a(x)\Big)$$

podemos normalizar $a(x) = 0$ chegando na forma normal $y^2 = b(x)$. Esta forma normal se encontra geralmente na literatura.

É claro que nem todo corpo de funções $K(x, y)|K$ onde x, y satisfazem a equação normal (1) tem gênero 2. Então, quando um corpo de funções $K(x, y)|K$ definido pela equação (1) tem gênero 2? É um fato conhecido na literatura que a resposta a esta pergunta tem uma solução relativamente simples se o corpo K tem característica $p \neq 2$. A resposta nesse caso é assim: um corpo de funções $F|K$ tem gênero $g = 2$ se e só se existem $x, y \in F$ tais que $F = K(x, y)$ e um polinômio $b(x)$ de grau 5 ou 6 que não tem fatores múltiplos em $K[x]$ tal que $y^2 = b(x)$. Em característica $p = 2$ a resposta é mais difícil. Nós daremos solução a esta pergunta nas seguintes secções deste capítulo.

1.2 Abordagem geométrica: A curva induzida no cone pelo corpo de funções

Estamos interessados em classificar corpos de funções $F|K$ não conservativos de gênero $g = 2$, i.e., corpos de funções tais que o gênero da sua extensão por constantes ao fecho algébrico do *corpo de base* K é estritamente menor do que $g = 2$ [1]. Para isto vamos assumir uma hipótese que se encontra em **negrito** abaixo e os parágrafos que se seguem pretendem explicar o porque desta hipótese.

A classificação de corpos de funções não conservativos está intimamente ligada com a classificação de fibrações por curvas singulares, ditas de *fibrações patológicas*. O assunto da mudança de gênero, é equivalente ao fenômeno de curvas (esquemas projetivos e integrais sobre $Spec(K)$ de dimensão 1) regulares que não são lisas. Isto é, curvas onde todos seus aneis locais são regulares, mas existe pelo menos um ponto que não satisfaz o critério jacobiano. Devido a esta ligação entre aritmética e geometria, o principal objetivo desta secção é abordar um "problema intermediário" ao fenômeno já relatado. Isto se faz induzindo uma certa curva definida sobre o fecho algébrico de K, a qual representa intuitivamente a fibra geral de uma fibração. O problema intermediário será entender esta curva com a finalidade de tirar informação valiosa que nos ajude na classificação dos corpos de funções não conservativos.

Vamos explicar um pouco mais a razão pela qual precisamos da abordagem do problema intermediário no parágrafo anterior. Na Secção 1.1 se concluiu que todo corpo de funções $F|K$ de gênero 2 pode ser levado à forma normal $f(x, y) = y^2 + a(x)y + b(x) = 0$ onde $F = K(x, y)$ e $a(x)$ e $b(x)$ são polinômios de $K[x]$ de graus menores ou iguais a 3 e 6 respectivamente. Porém, nem todo corpo de funções que satisfaz uma equação normal como essa tem gênero 2. Mas, é claro que uma condição necessária é que o polinômio $f(X, Y) \in K[X, Y]$ seja irredutível. Logo é natural procurar um método para calcular o gênero de um tal corpo de funções $F|K$. Se a característica do corpo é $p \neq 2$ então sabemos que podemos renormalizar chegando na equação $y^2 = b(x)$ e, é bem conhecido que o gênero do corpo de funções $F|K$ é $g = 2$ se e só se o polinômio $b(x)$ não tem fatores múltiplos sobre $K[x]$ e seu grau é 5 ou 6. Nós não encontramos na literatura um resultado similar em característica 2. Além disso, quando a característica é $p \neq 2$ os corpos não conservativos de gênero $g = 2$ foram classificados na tese [Bg] de forma algébrica e simples. Logo, neste sentido o único caso de interesse apresenta-se quando a característica do corpo é $p = 2$. Este caso é interessante pelo fato que ele vai ser entendido geometricamente.

[1] Para falar com precisão do fenômeno anterior é necessário supor que todos os corpos mencionados aqui estão mergulhados em um corpo algebricamente fechado.

`Portanto, vamos assumir desde agora que nossos corpos são de característica 2.`

A curva que representa a fibra geral vai ser importante tanto para calcular o gênero do corpo de funções como para nos ajudar a chegar a uma forma normal necessária em nosso roteiro de classificação dos corpos de funções não conservativos. Como intuitivamente esta curva representa a *fibra geral* de uma fibração patológica então é natural assumir que a fibra genérica é *geometricamente integral*, i.e., a fibra geral é integral (irredutível e reduzida). Portanto, vamos supor que a fibra geral de nossas fibrações é integral (ver Introdução). Isto significa que o polinômio $f(X,Y) \in K[X,Y]$ que define o corpo de funções é *absolutamente irredutível*, i.e., $f(X,Y)$ continua irredutível ainda em $\overline{K}[X,Y]$.

Fazemos uma parada na intuição para fixar uma hipótese definitiva:

Vamos assumir nesta secção que o corpo $F|K$ é definido por uma equação

$$f(x,y) = y^2 + a(x)y + b(x) = 0$$

onde $f(X,Y)$ é um polinômio absolutamente irredutível em $K[X,Y]$.

Comentamos que é conhecido que se temos um corpo M com grau de transcendência 1 sobre o corpo L e a extensão $M|L$ é separável e definida por uma equação $g(x,y) = 0$ onde $g(X,Y)$ é um polinômio irredutível arbitrário de $L[X,Y]$ então

O polinômio $g(X,Y)$ é absolutamente irredutível se e só se L é algebricamente fechado em M, i.e., $M|L$ é um corpo de funções.

Logo, juntando estes resultados no caso do corpo de funções $F|K$ então a hipótese acima é equivalente à hipótese seguinte:

O corpo de funções $F|K$ é separável, i.e., $F|K(x)$ é separável ou $F|K(y)$ é separável, i.e., $a(x) \neq 0$ ou $b'(x) \neq 0$ onde $b'(x)$ é a derivada de $b(x)$.

Quando a extensão $F|K(z)$ é separável para $z \in F \backslash K$ dizemos que z é uma *variável separante* de $F|K$.

Outro assunto a mencionar aqui é que se $F|K$ é separável e $L|K$ é uma extensão algébrica de K (possivelmente infinita) então o compósito FL pode ser realizado canonicamente como o produto tensorial de F e L e além disso, L é algebricamente fechado em $FL = F \otimes_K L$. Isto diz que o famoso corpo universal que consideramos nas notas ao pé no inicio da secção é desnecessário. Por outro lado, se $F|K$ fosse inseparável pode acontecer que $F \otimes_K L$ não seja um corpo e que L não seja algebricamente fechado em FL.

Voltando para assuntos intuitivos, se espera que o gênero aritmético da fibra geral de uma fibração e o gênero g do corpo de funções definido pela fibração estejam relacionados de alguma maneira. Agora, como nós estamos em um contexto mais geral, então, se o gênero de um corpo de funções $F|K$ for $g = 2$ e conseguíssemos construir uma curva C que represente intuitivamente a fibra geral, é esperado que dita curva tenha gênero aritmético 2 pelo fato que o gênero aritmético não muda por extensões do corpo de base (ver [Rs] p. 182). Como toda curva de gênero aritmético 2 é hiperelítica, então de acordo com [St1] ela deveria realizar-se no cone do espaço projetivo de dimensão 4.

Vamos definir C e comprovar todas nossas ideias intuitivas em seguida.

Seja $S \subset \mathbb{P}^4(\overline{K})$ o cone com vértice

$$V = (0:0:0:0:1)$$

composto pelas retas

$$L_a = \{(a^0 : a^1 : a^2 : a^3 : b) |\ b \in \overline{K}\} \cup \{V\}, \quad a \in \overline{K} \ \text{ e } \ L_\infty = \{(0:0:0:1:b) |\ b \in \overline{K}\} \cup \{V\}.$$

Ou equivalentemente

$$S = \left\{ (x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : y) \in \mathbb{P}^4(\overline{K}) |\ \text{posto} \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} < 2 \right\}$$

Em $S \backslash \{V\}$ temos duas cartas $\begin{array}{ccc} U = S \setminus L_\infty & \to & \overline{K}^2 \\ (a^0 : a^1 : a^2 : a^3 : b) & \mapsto & (a, b) \end{array}$ e $\begin{array}{ccc} U' = S \setminus L_0 & \to & \overline{K}^2 \\ (a^3 : a^2 : a^1 : a^0 : b) & \mapsto & (a, b) \end{array}$

Agora, seja C a curva projetiva cuja equação na primeira carta é a equação do corpo de funções $F|K$. Isto é, a equação de C na carta $U = S \setminus L_\infty \to \overline{K}^2$ é

$$y^2 + (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)y + b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + b_5x^5 + b_6x^6 = 0.$$

Claramente, C é o fecho no cone da imagem da curva plana dada pela equação anterior via a carta. Na outra carta a equação de C é

$$y'^2 + (a_3 + a_2x' + a_1x'^2 + a_0x'^3)y + b_6 + b_5x' + b_4x'^2 + b_3x'^3 + b_2x'^4 + b_1x'^5 + b_0x'^6 = 0$$

onde $x' = \frac{1}{x}$ e $y' = \frac{y}{x^3}$. A curva não passa pelo vértice já que o coeficiente do termo y^2 é não nulo. Observe-se que a curva é possivelmente singular. A curva C anterior é chamada de *curva induzida no cone* pelo corpo de funções $F|K$.

Vamos descrever seguidamente a relação entre os gêneros da curva induzida e do corpo de funções. A fórmula do *gênero do Hironaka* diz que

$$p_a(C) - \overline{g} = \sum_{Q \in C} \delta_Q$$

onde $p_a(C)$ é o gênero aritmético de C, $\overline{g}$ é o gênero do modelo não singular de C, i.e., o gênero do corpo de funções $F\overline{K}|\overline{K}$ e δ_Q é o grau de singularidade do ponto Q. Analogamente a fórmula

$$g - \overline{g} = \sum_{P \in R_{F|K}} \delta_P \tag{2}$$

onde $\delta_P := \dim_{\overline{K}} \widetilde{\mathcal{O}_P} / \overline{K}\mathcal{O}_P$ $\big($aqui $\mathcal{O}_P$ é o anel local do ponto P, $\widetilde{\mathcal{O}_P}$ é o seu fecho inteiro em $F\overline{K}\big)$ e $R_{F|K}$ é o modelo regular do corpo de funções $F|K$, é chamada neste trabalho de *fórmula do gênero de Rosenlicht* (ver [Rs], p. 182). O inteiro δ_P é chamado de *grau de* *singularidade* do ponto P . Na linguagem de corpos de funções os pontos $P \in R_{F|K}$ não lisos são ditos de *primos singulares*. Ou seja, P é primo singular se e só se $\delta_P > 0$.

As fórmulas anteriores permitem ligar o gênero do corpo de funções $F|K$ e o gênero aritmético da curva C chegando na fórmula

$$g = p_a(C) - \sum_{P \in R_{F|K}} \delta_P + \sum_{Q \in C} \delta_Q \tag{3}$$

onde P percorre todos os primos singulares de $F|K$ e Q percorre os pontos singulares de C.

Esta fórmula é importante porque na prática cada um dos termos do lado direito da igualdade são calculáveis. De fato, o invariante mais difícil de calcular é o grau de singularidade dos primos o qual se pode obter algoritmicamente de acordo com [BS].

Para conhecer o gênero aritmético da curva induzida no cone usamos o seguinte resultado.

Lema 1.2.1. *Seja C uma curva irredutível sobre o cone S definida pela equação*

$$f(x, y) = c_n(x)y^n + \cdots + c_1(x)y + c_0(x) = 0$$

onde x, y são as funções coordenadas afins de $\mathbb{A}^2(\overline{K})$ na carta $\begin{array}{ccc} U = S \setminus L_\infty & \to & \overline{K}^2 \\ (a^0 : a^1 : a^2 : a^3 : b) & \mapsto & (a, b) \end{array}$. *Seja d o menor inteiro tal que $\deg(c_i(x)) \leq d - 3i$ para $i = 0, \ldots, n$. Então a curva tem grau d e gênero aritmético*

$$p_a(C) = (\left\lceil \frac{d}{3} \right\rceil - 1)(d-1) - \frac{3}{2}(\left\lceil \frac{d}{3} \right\rceil - 1)\left\lceil \frac{d}{3} \right\rceil.$$

onde $\lceil \frac{d}{3} \rceil$ é o menor interior maior ou igual a $\frac{d}{3}$.

Só comentamos que estes invariantes se obtém de forma simples calculando o polinômio de Hilbert da curva. Um cálculo deste polinômio se encontra em [RS], p.196.

Agora vamos aplicar este resultado à curva induzida pelo corpo de funções $F|K$ com equação $f(x, y) = y^2 + a(x)y + b(x) = 0$ onde $F = K(x, y)$ e $a(x)$, $b(x)$ são polinômios de $K[x]$ de graus menores ou iguais a 3 e 6 respectivamente. O Lema nos diz que $6 \leq d$, $\deg(a(x)) + 3 \leq d$ e $\deg(b(x)) \leq d$. Isto é,

$$d = 6 \text{ e } p_a(C) = 2.$$

Aplicando a equação (3) que permite calcular o gênero do corpo de funções em termos do gênero aritmético da curva C concluímos que $g = 2 - \sum_{P \in R_{F|K}} \delta_P + \sum_{Q \in C} \delta_Q$.

Como o modelo regular de $F|K$, denotado por $R_{F|K}$ intuitivamente representa a fibra genérica de uma fibração então é natural pensar que C e $R_{F|K} \otimes_K \overline{K}$ são isomorfas sob certas condições. No resultado seguinte se encontra a essência do método usado neste trabalho para a classificação que desejamos.

Teorema 1.2.2. *Seja $F|K$ um corpo de funções com equação normal*

$$y^2 + a(x)y + b(x) = 0$$

onde $a(x)$ e $b(x)$ são polinômios em $K[x]$ de graus menores ou iguais a 3 e 6 respectivamente e $F = K(x, y)$. Então

O corpo de funções $F|K$ tem gênero $g = 2$ se e só se o modelo regular do corpo $F|K$ estendido a $\overline{K}$, $R_{F|K} \otimes_K \overline{K}$ é isomorfo à curva C contida no cone de $\mathbb{P}^4(\overline{K})$ que na primeira carta tem a mesma equação do corpo de funções $F|K$.

Já mencionamos acima que o gênero aritmético de uma curva não muda por extensões da base. Este resultado é crucial para provar as duas implicações.

Demonstração. A recíproca é clara pelo comentário anterior. A implicação direta usa o mesmo resultado já comentado e o mergulho das curvas hiperelíticas no cone que se encontra em [St1]. Vamos explicar de forma mais precisa. Como o modelo regular $R_{F|K}$ de $F|K$ tem gênero 2 então $D := R_{F|K} \otimes_K \overline{K}$ tem também gênero aritmético 2 e logo é hiperelítica. Assim, o divisor de polos de x em $R_{F|K} \otimes_K \overline{K}$ definido por $\operatorname{div}_\infty(x) = \prod_{P \in D} R_P$ onde $R_P = x\mathcal{O}_{D,P}$ se $x \notin \mathcal{O}_{D,P}$ e $R_P = \mathcal{O}_{D,P}$ em outro caso, é canônico. De forma análoga à abordagem feita na Secção 1.1 para corpos de funções de gênero 2, concluímos que

$$H^0(D, \operatorname{div}_\infty(x)^3) = \bigoplus_{i=0}^{3} \overline{K}x^i \bigoplus \overline{K}y$$

e o morfismo definido pelo sistema linear completo $|\operatorname{div}_\infty(x)^3|$ é um mergulho no cone de $\mathbb{P}^4(\overline{K})$ pelo fato que o divisor $\operatorname{div}_\infty(x)^3$ tem grau maior que $2g = 4$ e em consequência é muito amplo. A equação da curva na primeira carta do cone menos o vértice é a equação do corpo de funções $F|K$ (ver [St1] para uma análise mais geral). $\square$

Suponhamos que nosso corpo $F|K$ tem gênero $g = 2$. Se $F|K$ for não conservativo, i.e., o corpo de funções $F|K$ tem pelo menos um primo singular, então o Teorema 1.2.2 e a fórmula do gênero de Hironaka implicam que a curva induzida C é singular. Na secção seguinte vamos entender as relações entre os primos singulares de $F|K$ e os pontos singulares da curva C induzida pelo corpo de funções.

1.3 Teoria de corpos de funções não conservativos e aplicações

Seja $F|K$ um corpo de funções separável de gênero g. Vamos supor que $F|K$ é não *conservativo*, i.e., o gênero de $F|K$ é maior do que o gênero de $F\overline{K}|\overline{K}$ sendo $\overline{K}$ o fecho algébrico de K. Denotamos por C à curva $R_{F|K} \otimes_K \overline{K}$ onde $R_{F|K}$ denota o modelo regular do corpo de funções $F|K$. Logo, a curva C tem gênero aritmético g pelo fato que o gênero aritmético não muda por extensões da base. Como $F|K$ é não conservativo, então a fórmula do gênero de Hironaka implica que a curva C possui pelo menos um ponto singular. Analogamente, a fórmula do gênero de Rosenlicht (equação (2), p. 22) implica que o corpo de funções $F|K$ possui pelo menos um *primo singular*, i.e., a curva $R_{F|K}$ possui um ponto não liso. Surgem então as seguintes perguntas:

1. Qual é a relação entre os primos singulares $F|K$ e os pontos singulares de C?
2. As singularidades de C são de qualquer tipo?

O objetivo desta secção é ver que os pontos de C acima de primos singulares de $F|K$ são sempre pontos singulares. Além disso, vamos ver que os pontos singulares de C acima de primos singulares de $F|K$ tem um único ramo. Ou seja, as singularidades de C (que provêm de primos singulares) são de tipo cuspidal. A Teoria de corpos de funções não conservativos fornece uma linguagem apropriada para obter estes resultados de forma relativamente simples. Nós vamos mencionar só alguns aspectos necessários desta teoria para chegar aos resultados que queremos. O desenvolvimento desta teoria na linha de pensamento que inspira nossa abordagem se encontra basicamente em [Sn1] e [St3].

De acordo com [At], Theorem 22, p. 291, sabemos que se $K'|K$ é uma extensão algébrica separável, então os gêneros de $F|K$ e $FK'|K'$ são iguais. Ou seja, não ha mudança de gênero em extensões por constantes que são separaveis. Isto nos diz que estender até o fecho separável de K não faz muitas mudanças quando se deseja estudar corpos de funções não conservativos, salvo na descida do fecho separável para o corpo de base quando a finalidade principal é estudar as classes de isomorfismos deles. Denotamos por K' ao fecho separável de K. Logo, $FK'|K'$ é não conservativo. Como $FK'|K'$ tem o mesmo gênero que o modelo regular $R_{F|K}$ do corpo de funções $F|K$, então a curva $C' := R_{F|K} \otimes_K K'$ é o modelo regular de $FK'|K'$ pois o gênero aritmético não muda por extensões da base. Por outro lado, é claro que os aneis locais $\overline{K}\mathcal{O}_{C',P'}$ com $P' \in C'$ são os aneis locais da curva $C = R_{F|K} \otimes_K \overline{K}$. Mais ainda, se P' é um ponto não liso de C', i.e., um primo singular de $FK'|K'$ então o único ponto $P \in C$ acima de P' é um ponto singular de C e os grau de singularidade do ponto P e do primo singular P' coincidem. Observe-se que isso estabelece uma bijeção entre os primos singulares de $FK'|K'$ e os pontos singulares de $C = R_{F|K} \otimes_K \overline{K}$. Além disso, os pontos do modelo regular de $FK'|K'$ estão em correspondência com os pontos do modelo não singular de $F\overline{K}|\overline{K}$ que é a normalização $\widetilde{C}$. Isto é, cada ponto de C possui um único ramo. Agora, já que todo ponto não liso de $R_{F|K}$ tem acima dele pelo menos um ponto não liso de C', então concluímos o seguinte resultado (cf. [Sl3]).

Observação 1.3.1. *Todo ponto de $C = R_{F|K} \otimes_K \overline{K}$ sobre o qual está centrado um primo singular de $F|K$ é também singular e possui um único ramo.*

Esta Observação nos conduz ao seguinte teorema.

Teorema 1.3.2. *Seja $F|K$ um corpo de funções separável e $R_{F|K}$ seu modelo regular. Então*

O corpo de funções $F|K$ é conservativo se e só se o a curva $R_{F|K} \otimes_K \overline{K}$ é lisa.

Este teorema poderia ser considerado como uma generalização do Teorema de Bertini. Aplicando o teorema aos corpos de funções de nosso interesse junto com o Teorema 1.2.2 chegamos no seguinte corolário.

Corolário 1.3.3. *Seja $F|K$ um corpo de funções separável de gênero $g = 2$ e $R_{F|K}$ seu modelo regular. Então*

O corpo de funções $F|K$ é conservativo se e só se a curva C induzida no cone de $\mathbb{P}^4(\overline{K})$ é lisa.

concluímos então que um corpo de funções separável $F|K$ de gênero $g = 2$ é não conservativo se e só se a curva induzida no cone tem pelo menos uma singularidade com um único ramo. Este resultado é crucial para chegar na forma normal de um corpo de funções de gênero 2 não conservativo. Na verdade, é bem conhecido que se o corpo de funções $F|K$ tem equação $f(x, y) = 0$ onde $x, y \in F = K(x, y)$ e P é um primo singular de $F|K$ centrado no ponto (x_0, y_0) da curva plana definida pelo polinômio $f(X, Y) \in K[X, Y]$, então o ponto (x_0, y_0) também é singular e tem um único ramo.

1.4 Forma normal de corpos de funções de gênero 2 não conservativos em característica 2

O objetivo desta secção é obter uma forma normal reduzida para corpos de funções separaveis de gênero $g = 2$ e não conservativos em característica $p = 2$.

Vamos explicar a razão para nos restringir a característica $p = 2$ neste trabalho. Seja $F|K$ um corpo de funções de gênero g e denotemos por $\overline{g}$ o gênero de $F\overline{K}|\overline{K}$. De acordo com [Ta1] o gênero de $F|K$ impõe restrições na característica de K e no gênero de $F\overline{K}|\overline{K}$. Mais precisamente, o inteiro $g - \overline{g}$ é um múltiplo de $\frac{p-1}{2}$. Agora, supondo que $g = 2$ então p deve satisfazer a desigualdade $p \leq 2g + 1 = 5$, já que (pensando em termos de singularidades) o pior dos casos acontece quando $\overline{g} = 0$. Como nosso objetivo neste trabalho é a classificação de fibrações por curvas singulares de gênero aritmético 2 e esta classificação é equivalente à classificação de corpos de funções não conservativos de gênero 2, então deveriam ser estudados os casos p impar e $p = 2$. Mas a classificação dos corpos de funções não conservativos de gênero 2 no caso de característica impar ($p = 3$ e $p = 5$) se encontra em [Bg]. Assim que resta o caso $p = 2$.

Seja $F|K$ um corpo de funções separável de gênero $g = 2$. Logo, ele tem equação normal,

$$y^2 + a(x)y + b(x) = 0$$

onde $a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, $b(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + b_5x^5 + b_6x^6 \in K[x]$. Os polinômios, $a(x)$ e $b(x)$ tem graus menores o iguais a 3 e 6 respectivamente (ver Secção 1.1). Aliás, considerando o pólo de x em $K(x)$ como um zero de $a(x)$ de grau $3 - \deg(a(x))$ podemos supor que $a(x)$ tem grau (formal) 3 sempre que $a(x) \neq 0$. Um corpo de funções de gênero 2 com uma equação normal como acima é dito de *tipo separável* se $a(x) \neq 0$. Em caso contrario o corpo de funções é chamado de *tipo inseparável*. Como o corpo canônico, i.e., corpo gerado pelas seções globais do divisor canônico é o único subcorpo quadrático racional do corpo de funções, então um corpo de funções de gênero 2 é de tipo separável se e só se ele é uma extensão separável do seu subcorpo (canônico) quadrático racional.

Um corpo de funções $F|K$ é dito *absolutamente elítico (racional)* se o gênero da sua extensão por constantes ao fecho algébrico $F\overline{K}|\overline{K}$ é $\overline{g} = 1$ ($\overline{g} = 0$).

Nosso objetivo é chegar no seguinte teorema.

Teorema 1.4.1. *Seja $F|K$ um corpo de funções separável de gênero 2 não conservativo. Temos os seguintes resultados:*

1. *O corpo de funções $F|K$ é de tipo separável se e só se é absolutamente elítico e se tal for o caso a sua equação normal pode ser levada à forma*

$$y^2 + (a_0 + a_2x^2)y + b_0 + b_4x^4 + b_6x^6 = 0$$

onde $a_0, a_2, b_0, b_4, b_6 \in K$, $b_6^2(a_2^6b_0 + a_0^2a_2^4b_4 + a_0^3a_2^3b_6 + a_0^4b_6^2) \neq 0$, $F = K(x, y)$ e o seu invariante modular é

$$j = \frac{a_2^6}{b_6(a_2^6b_0 + a_0^2a_2^4b_4 + a_0^3a_2^3b_6 + a_0^4b_6^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

2. *O corpo de funções $F|K$ é de tipo inseparável se e só se é absolutamente racional e em tal caso sua equação normal pode ser levada à forma*

$$y^2 + b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + x^5 + b_6x^6 = 0$$

onde $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_6 \in K$, o polinômio $b(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + x^5 + b_6x^6$ não tem fatores múltiplos e $F = K(x, y)$.

Antes de iniciar a prova do teorema precisamos estabelecer algumas notações e enunciar um lema.

Seja $F|K$ um corpo de funções de gênero 2 com equação normal $y^2 + a(x)y + b(x) = 0$. Já sabemos pela Secção 1.1 que o grau de $a(x)$, denotado por $\deg(a(x))$ é menor ou igual a 3. Logo, por convenção vamos declarar que $a(x)$ tem *grau formal* 3 considerando o pólo de $K(x)$ como um zero de $a(x)$ de grau $3 - \deg(a(x))$. Analogamente, $b(x)$ tem grau formal 6.

Suponhamos que $F|K$ é não conservativo, i.e., $F|K$ admite pelo menos um primo singular. Com a convenção estabelecida acima e usando o corolário 1.3.3 junto com seus comentários procedentes concluímos que existe um ponto singular com um único ramo na curva C induzida no cone de $\mathbb{P}^4(\overline{K})$ pelo corpo de funções, tal que o primo singular está centrado nele. Se denotamos dito ponto singular por $(x_0, y_0) \in \overline{K}^2$ em uma carta do cone, então concluímos que $x = x_0$ é uma raiz (finita ou infinita) de $a(x)$ no caso em que o corpo de funções $F|K$ seja de tipo separável. Além disso, esta raiz é múltipla. Os detalhes desta afirmação se podem ver no meio da prova do seguinte resultado.

Lema 1.4.2. *Seja $F|K$ um corpo de funções de tipo separável, de gênero 2 e não conservativo. Então $F|K$ satisfaz uma equação normal*

$$y^2 + (a_0 + a_2x^2)y + b(x) = 0$$

onde $b(x) \in K[x]$ tem grau formal 6 *e $F = K(x,y)$.*

Demonstração. Como $F|K$ é não conservativo, então pela fórmula do gênero de Rosenlicht ele tem pelo menos um primo singular P. Pela Secção 1.1 a equação normal de $F|K$ é da forma

$$y^2 + a(x)y + b(x) = 0$$

onde $a(x)$ e $b(x)$ tem grau formal 3 e 6 respectivamente e $F = K(x,y)$. Podemos supor que o primo singular P não é um pólo de x pois senão, por meio de uma transformação de coordenadas $(x,y) \mapsto (\frac{1}{x}, y)$ podemos renormalizar a equação de tal forma que P é um zero do transformado de x. Seja $x_0 \in \overline{K}$ a abscissa do ponto da curva induzida no cone de $\mathbb{P}^4(\overline{K})$ sobre o qual o primo P está centrado (abscissa na carta onde a curva tem a mesma equação do corpo de funções). Pelo critério jacobiano $x = x_0$ é uma raiz de $a(x)$. O fato importante vai ser o observar que $x = x_0$ é uma raiz múltipla de $a(x)$ e com isso vai ser fácil chegar na forma normal pedida no lema. O argumento é por contradição. Vamos ver que com a suposição "$x = x_0$ é uma raiz simples de $a(x)$", o ponto da curva induzida no cone sobre o qual o primo singular P está centrado não tem um único ramo; o que contradiz a Observação 1.3.1. Suponhamos que $x = x_0$ é uma raiz simples de $a(x)$. Seja K' o fecho separável de K. Logo, x_0 está em K'.

A equação da curva induzida no cone é

$$y^2 + (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)y + b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + b_5x^5 + b_6x^6 = 0$$

na carta de nosso interesse. Além disso, o ponto $Q = (x_0, b(x_0)^{\frac{1}{2}})$ é o ponto onde primo singular P está centrado. Transladando o ponto Q na origem, a equação da curva se transforma em

$$\hat{y}^2 + (\hat{a}_1\hat{x} + \hat{a}_2\hat{x}^2 + a_3\hat{x}^3)y + \hat{b}_2\hat{x}^2 + \hat{b}_3\hat{x}^3 + \hat{b}_4\hat{x}^4 + b_5\hat{x}^5 + b_6\hat{x}^6 = 0$$

onde $\hat{x} = x - x_0$, $\hat{y} = y - b(x_0)^{\frac{1}{2}}$ e $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{b}_2, \hat{b}_3, \hat{b}_4 \in K'$. Agora, $\hat{a}_1 \neq 0$ pois $x = x_0$ é uma raiz simples de $a(x)$. Explodindo na origem e analisando a carta do blow up que nos interessa ($\hat{y} = \hat{x}\widetilde{y}$) vemos que ele tem equação

$$\widetilde{y}^2 + (\hat{a}_1 + \hat{a}_2\hat{x} + a_3\hat{x}^2)y + \hat{b}_2 + \hat{b}_3\hat{x} + \hat{b}_4\hat{x}^2 + b_5\hat{x}^3 + b_6\hat{x}^4 = 0$$

de onde concluímos que o ponto Q tem pelo menos dois ramos, o que contradiz a Observação 1.3.1. Portanto, a abscissa x_0 do ponto da curva induzida sobre o qual o primo singular P está centrado é uma raiz múltipla de $a(x)$. Só acrescentamos que como o grau formal de $a(x)$ é 3, então qualquer corpo de funções de tipo separável não conservativo de gênero $g = 2$ tem um único primo singular devido à conclusão anterior.

Agora, vamos chegar na forma normal pedida no lema. Primeiramente afirmamos que o polinômio $a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ tem uma raiz racional. Se a raiz for o pólo de $K(x)$, i.e., $a_3 = 0$, então temos nada a provar. Logo, podemos assumir que todas as raízes de $a(x)$ são finitas, i.e., $a_3 \neq 0$. Como x_0 é uma raiz múltipla de $a(x)$ então

$$a(x) = a_3(x - x_0)^2(x - c)$$

onde $c \in K'$. Aliás, como $a(x) = a_3(x^3 + cx^2 + x_0^2 x + cx_0^2) \in K[x]$ porque estamos em característica $p = 2$, então concluímos que $c = \frac{a_2}{a_3} \in K$. Finalmente por meio de uma transformação de Möbius que leve a raiz racional $x = c$ no pólo do transformado de x em $K(x)$ concluímos que a equação de $F|K$ pode ser renormalizada na forma

$$y^2 + (a_0 + a_2x^2)y + b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + b_5x^5 + b_6x^6 = 0$$

□

No meio da prova do lema se obteve uma conclusão que vale a pena ressaltar.

Observação 1.4.3. *Todo corpo de funções de tipo separável, de gênero* 2 *e não conservativo possui um único primo singular.*

Agora estamos prontos para provar o Teorema 1.4.1. O esquema da prova é o seguinte: Primeiro vamos provar que absolutamente elítico implica tipo separável ou equivalentemente que tipo inseparável implica absolutamente racional. Seguidamente, por meio do uso das formas normais se provará que não existem corpos de funções de tipo separável e absolutamente racionais; o que implica "tipo separável=absolutamente elítico" e "tipo inseparável=absolutamente racional". As formas normais se obtém naturalmente no processo da prova.

Demonstração. Começamos pelo item 1). Vamos ver que todo corpo de funções absolutamente elítico deve ser de tipo separável. Isso é equivalente a provar que um corpo de funções de tipo inseparável é absolutamente racional porque absolutamente elítico e absolutamente racional são incompatíveis. Então, seja $F|K$ um corpo de funções de tipo inseparável. Logo, $F|K$ tem equação normal

$$y^2 + b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + b_5x^5 + b_6x^6 = 0$$

onde $F = K(x, y)$ e $b'(x) = b_1 + b_3x^2 + b_5x^4 \neq 0$ pois $F|K$ é separável. Logo,

$$F\overline{K} = \overline{K}(x, y) = \overline{K}(x^{\frac{1}{2}})$$

porque $x^{\frac{1}{2}} = \frac{y-(b_0^{\frac{1}{2}}+b_2^{\frac{1}{2}}x+b_4^{\frac{1}{2}}x^2+b_6^{\frac{1}{2}}x^3)}{b_1^{\frac{1}{2}}+b_3^{\frac{1}{2}}x+b_5^{\frac{1}{2}}x^2}$. Portanto, $F|K$ é absolutamente racional.

Agora vamos obter a forma normal pedida no teorema para o caso absolutamente elítico. Pelo Lema 1.4.2, existem $x, y \in F$ tais que $F = K(x, y)$ tem equação normal

$$y^2 + (a_0 + a_2x^2)y + b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + b_5x^5 + b_6x^6 = 0$$

De acordo com a Proposição 1.1.1 e seus comentários predecessores ainda estão permitidas algumas transformações coordenadas em x e y. Mas, as transformações que respeitam a forma normal ou a forma do polinômio $a(x) = a_0 + a_2x^2$ são da forma

$$(x, y) \mapsto (\alpha x + \gamma, \beta y + \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x^3)$$

onde $\alpha, \beta \in K^*$ e $\gamma, \gamma_i \in K$ com $i = 0, 1, 2, 3$. Em tal caso, os coeficientes envolvidos na forma normal mudam da seguinte maneira:

$$a(x) \mapsto \frac{a(\alpha x + \gamma)}{\beta}$$

e

$$b(x) \mapsto \frac{b(\alpha x + \gamma) + \gamma_0^2 + \gamma_1^2 x^2 + \gamma_2^2 x^4 + \gamma_3^2 x^6 + (\gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x^3)a(\alpha x + \gamma)}{\beta^2}$$

ou equivalentemente os coeficientes de $a(x)$ mudam

$$\begin{array}{lcl} a_0 & \mapsto & \frac{a_0}{\beta} + \frac{a_2\gamma^2}{\beta} \\ a_2 & \mapsto & \frac{a_2\alpha^2}{\beta} \end{array}$$

e os de $b(x)$

$$\begin{array}{lcl} b_0 & \mapsto & \frac{b_0}{\beta^2} + \frac{b_1\gamma + b_2\gamma^2 + b_3\gamma^3 + b_4\gamma^4 + b_5\gamma^5 + b_6\gamma^6 + a(\gamma)\gamma_0 + \gamma_0^2}{\beta^2} \\ b_1 & \mapsto & \frac{b_1\alpha}{\beta^2} + \frac{b_3\alpha\gamma^2 + b_5\alpha\gamma^4 + a(\gamma)\gamma_1}{\beta^2} \\ b_2 & \mapsto & \frac{b_2\alpha^2}{\beta^2} + \frac{b_3\alpha^2\gamma + b_6\alpha^2\gamma^4 + a(\gamma)\gamma_2 + a_2\alpha^2\gamma_0 + \gamma_1^2}{\beta^2} \\ b_3 & \mapsto & \frac{b_3\alpha^3}{\beta^2} + \frac{a(\gamma)\gamma_3 + a_2\alpha^2\gamma_1}{\beta^2} \\ b_4 & \mapsto & \frac{b_4\alpha^4}{\beta^2} + \frac{b_5\alpha^4\gamma + b_6\alpha^4\gamma^2 + a_2\alpha^2\gamma_2 + \gamma_2^2}{\beta^2} \\ b_5 & \mapsto & \frac{b_5\alpha^5}{\beta^2} + \frac{a_2\alpha^2\gamma_3}{\beta^2} \\ b_6 & \mapsto & \frac{b_6\alpha^6}{\beta^2} + \frac{\gamma_3^2}{\beta^2} \end{array}$$

Aqui nossa problemática se divide em casos de acordo com o grau de $a(x)$. Se $a_2 \neq 0$ então, normalizamos $b_2 = 0 = b_3 = b_5$ usando γ_2, γ_1 e γ_3 respectivamente. Isto é, normalizamos $b(x) = b_0 + b_1x + b_4x^4 + b_6x^6$. Logo, a equação normal se transforma em

$$y^2 + (a_0 + a_2x^2)y + b_0 + b_1x + b_4x^4 + b_6x^6 = 0.$$

A curva induzida no cone de $\mathbb{P}^4(\overline{K})$ cuja equação em uma carta dele é a mesma equação do corpo de funções $F|K$ (cf. Secção 1.2) deve ter uma singularidade no ponto onde o único primo singular está centrado (ver Observação 1.3.1 e Observação 1.4.3). Logo, pelo critério jacobiano, derivando com respeito a x concluímos que $b_1 = 0$, chegando assim na forma normal

$$y^2 + (a_0 + a_2x^2)y + b_0 + b_4x^4 + b_6x^6 = 0$$

que foi anunciada no teorema. O caso $a_2 = 0$ é similar. Como $F|K$ é de tipo separável então $a_0 \neq 0$. Então, normalizamos $b(x) = b_0 + b_4x^4 + b_5x^5 + b_6x^6$ e ficamos com equação normal

$$y^2 + a_0y + b_0 + b_4x^4 + b_5x^5 + b_6x^6 = 0.$$

Neste caso o único primo singular está acima do pólo de x em $K(x)$. Logo, analisamos a curva induzida no cone na segunda carta. Nesta carta a curva tem equação

$$y'^2 + a_0 x'^3 y' + b_6 + b_5 x' + b_4 x'^2 + b_0 x'^6 = 0.$$

Onde $x' = \frac{1}{x}$ e $y' = \frac{y}{x^3}$. O ponto na curva induzida onde o primo singular está centrado tem abscissa $x' = 0$. Pelo critério jacobiano, derivando com respeito a x' vemos que $b_5 = 0$ e chegamos na mesma forma normal obtida acima que é a forma normal pedida no teorema. concluímos então que todo corpo de funções $F|K$ de gênero $g = 2$ não conservativo de tipo separável tem associada uma equação normal da forma

$$y^2 + (a_0 + a_2 x^2)y + b_0 + b_4 x^4 + b_6 x^6 = 0$$

onde $F = K(x, y)$.

Seguidamente vamos provar que não existem corpos de funções de tipo separável absolutamente racionais. Para isso, estudamos o corpo de funções $FK^{\frac{1}{2}}|K^{\frac{1}{2}}$ já que a mudança de gênero acontece em extensões por constantes inseparáveis com relação ao corpo de base K. Pelo morfismo de Frobenius $z \mapsto z^2$ o corpo de funções $FK^{\frac{1}{2}}|K^{\frac{1}{2}}$ é isomorfo a $F^2K|K$. O corpo $F_1 := F^2K$ é o único subcorpo de F contendo K tal que a extensão $F|F_1$ é puramente inseparável de grau 2. Claramente $F_1 = K(x^2, y^2) = K(x^2, y)$ porque $y \in K(x^2, y^2)$. Se denotamos por $\hat{x}$ a x^2 então, concluímos que $F_1 = K(\hat{x}, y)$. O corpo de funções $F_1|K$ tem equação normal

$$y^2 + (a_0 + a_2\hat{x})y + b_0 + b_4\hat{x}^2 + b_6\hat{x}^3 = 0$$

A equação de $F_1|K$ é uma cúbica (estamos supondo que $b_6 \neq 0$) que está quase na forma normal de Weierstrass de acordo com [Ta2]. Afirmamos que não é possível $b_6 = 0$. Suponhamos que $b_6 = 0$. Logo, a equação de $F_1|K$ é quadrática e usando a desigualdade do gênero concluímos que o gênero de $F_1|K$ é igual a 0. Denotemos por K' ao fecho separável de K. Logo, $F_1K'|K'$ é racional porque possui pelo menos um primo racional (cf. [Sn2], Proposition I.6.3, p. 30). Assim, $F_1K' = K'(x)$ pois $K'(x)$ é o corpo canônico de $FK'|K'$ o qual é o único subcorpo quadrático racional de FK' contendo K'. Assim, $y \in K'(x)$ e $FK' = K'(x)$ o que é uma contradição pelo fato que $F|K$ tem gênero 2 e igual ao gênero de $FK'|K'$. Como $b_6 \neq 0$ então por meio da transformação $(\hat{x}, y) \mapsto (\frac{\hat{x}}{b_6}, \frac{y}{b_6})$ obtemos a forma normal de Weierstrass

$$y^2 + (a_0 b_6 + a_2\hat{x})y = b_0 b_6^2 + b_4\hat{x}^2 + \hat{x}^3$$

do corpo de funções $F_1|K$. Denotamos por Δ o discriminante de $F\overline{K}|\overline{K}$, i.e., o discriminante de $FK^{\frac{1}{2}}|K^{\frac{1}{2}}$ [2]. O discriminante de $F_1|K$ é Δ^2 já que $FK^{\frac{1}{2}}|K^{\frac{1}{2}}$ e $F_1|K$ são isomorfos via o morfismo de Frobenius $z \mapsto z^2$. Analogamente, se $F\overline{K}|\overline{K}$ for elítico com invariante modular j, então o invariante modular de $F_1|K$ é j^2.

Para obter o discriminante de $F_1|K$ vamos usar as fórmulas obtidas em [Ta2] aplicadas ao caso de característica 2. Mais precisamente, dado um corpo de funções elíticas com equação normal de Weierstrass

$$y^2 + (a_1 x + a_3)y = x^3 + a_2 x^2 + a_4 x + a_6$$

[2] Estamos nos referindo ao discriminante da equação canônica correspondente.

então usando as fórmulas de Tate, contas mostram que em característica $p=2$ o discriminante é $\Delta' = a_1^4(a_1^2a_6 + a_1a_3a_4 + a_2a_3^2 + a_4^2) + a_3^3(a_3 + a_1^3)$ e o invariante modular em termos dos coeficientes é $j' = \frac{a_1^{12}}{\Delta'}$. Aplicando estes resultado a $F_1|K$ concluímos que

$$\Delta^2 = b_6^2(a_2^6b_0 + a_0^2a_2^4b_4 + a_0^3a_2^3b_6 + a_0^4b_6^2)$$

e no caso em que $F_1|K$ for elítico, i.e., $\Delta \neq 0$, então o invariante modular de $F\overline{K}|\overline{K}$ é

$$j = \frac{a_2^6}{\Delta}$$

Agora vamos provar que não é possível que $F\overline{K}|\overline{K}$ seja racional. O argumento é por contradição supondo que $F\overline{K}|\overline{K}$ é racional, i.e., $\Delta = 0$. Aqui dividimos de novo nosso problema em dois casos de acordo com o coeficiente a_2 da forma normal

$$y^2 + (a_0 + a_2x^2)y + b_0 + b_4x^4 + b_6x^6 = 0$$

de $F|K$.

Suponhamos primeiramente que $a_2 \neq 0$. Logo, com as transformações mencionadas acima que respeitam a forma normal de $F|K$ podemos normalizar $a_2 = 1$ (e.g., escolher $\alpha = 1$ e $\beta = a_2$). Assim, $\Delta^2 = b_6^2(b_0 + a_0^2b_4 + a_0^3b_6 + a_0^4b_6^2) = 0$, i.e., $b_0 = a_0^2b_4 + a_0^3b_6 + a_0^4b_6^2$ e concluímos que o corpo de funções tem equação

$$y^2 + (a_0 + x^2)y + a_0^2b_4 + a_0^3b_6 + a_0^4b_6 + b_4x^4 + b_6x^6 = 0.$$

Denotemos por C à curva induzida no cone de $\mathbb{P}^4(\overline{K})$ que tem a mesma equação do corpo de funções em alguma das duas cartas do cone menos o vértice (ver Secção 1.2). Já que não há mudança ao estendermos por constantes até o fecho separável de K e todo corpo de funções não conservativo de tipo separável e gênero 2 tem um único primo singular (Observação 1.4.3), então o ponto singular de C tem um único ramo porque o correspondente primo singular de $F|K$ tem uma única extensão em $F\overline{K}|\overline{K}$. Porém, vamos ver em seguida que com estas condições, o único ponto singular de C tem dois ramos. Na carta onde a curva C tem a equação do corpo de funções escrita acima, o ponto singular é $(a_0^{\frac{1}{2}}, a_0^2b_6)$. Denotemos dito ponto singular por Q. Transladando o ponto Q na origem a curva fica com equação

$$y^2 + x^2y + a_0^2b_6x^2 + (b_4 + a_0^2b_6)x^4 + b_6x^6 = 0.$$

Explodindo na origem e analisando na carta de interesse ($y = x\breve{y}$) a curva explodida fica com equação

$$\breve{y}^2 + x\breve{y} + a_0^2b_6 + (b_4 + a_0^2b_6)x^2 + b_6x^4 = 0.$$

O ponto acima do ponto explodido é $\breve{Q} = \left(0, a_0b_6^{\frac{1}{2}}\right)$. Levando ele na origem chegamos na equação

$$\breve{y}^2 + x\breve{y} + a_0b_6^{\frac{1}{2}}x + (b_4 + a_0^2b_6)x^2 + b_6x^4 = 0.$$

Como o corpo de funções é absolutamente racional, então a curva C tem gênero geométrico zero. Logo, o grau de singularidade de Q é 2, i.e, o grau de singularidade de $\breve{Q}$ é 1, i.e.,

$a_0 b_6^{\frac{1}{2}} = 0$. Isto é, $a_0 = 0$ pois já vimos que b_6 é não nulo. Explodindo de novo na origem e analisando na carta que nos interessa ($\breve{y} = x\widetilde{y}$) obtemos a equação do blow up

$$\widetilde{y}^2 + \widetilde{y} + b_4 + b_6 x^2 = 0$$

de onde observamos que Q tem dois ramos que é uma contradição.

Agora, suponhamos que $a_2 = 0$. Como $F|K$ é de tipo separável então $a_0 \neq 0$. Portanto, usando a fórmula do discriminante temos que $0 = \Delta = (a_0 b_6)^2 \neq 0$ que contradiz.

Isto é, todo corpo de funções $F|K$ de gênero 2 de tipo separável e não conservativo é absolutamente elítico. Além disso, o corpo de funções $F|K$ tem equação normal

$$y^2 + (a_0 + a_2 x^2)y + b_0 + b_4 x^4 + b_6 x^6 = 0$$

onde $F = K(x,y)$, $b_6^2\big(a_2^6 b_0 + a_0^2 a_2^4 b_4 + a_0^3 a_2^3 b_6 + a_0^4 b_6^2\big) \neq 0$ e o invariante modular é

$$j = \frac{a_2^6}{b_6\big(a_2^6 b_0 + a_0^2 a_2^4 b_4 + a_0^3 a_2^3 b_6 + a_0^4 b_6^2\big)^{\frac{1}{2}}}.$$

Agora provaremos o item 2). Sabemos que $F|K$ tem equação

$$y^2 + b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + b_5 x^5 + b_6 x^6 = 0$$

onde $b'(x) = b_1 + b_3 x^2 + b_5 x^4 \neq 0$ pois $F|K$ é separável. Usando uma transformação da forma $(x,y) \mapsto (\alpha x + \gamma, \beta y)$ com $\alpha, \beta \in K^*$ e $\gamma \in K$ vemos que o coeficiente b_1 muda da forma seguinte:

$$b_1 \mapsto b'(\gamma)\frac{\alpha}{\beta^2}$$

Como K não pode ser finito (pois em tal caso $F|K$ seria conservativo) existe $\gamma \in K$ tal que $b'(\gamma) \neq 0$. Logo, podemos supor $b_1 = 1 \neq 0$. Usando a transformação $(x,y) \mapsto (\frac{1}{x}, \frac{y}{x^3})$ podemos trocar b_1 com b_5. Isto é, podemos normalizar

$$b(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + x^5 + b_6 x^6.$$

Não é possível que $b(x)$ tenha fatores múltiplos. Se o fator for linear então dividindo pelo quadrado do fator e renormalizando chegamos em uma equação da forma

$$y^2 + b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 = 0.$$

Porém, com uma transformação do mesmo tipo daquela com a qual normalizamos $b_1 = 1$ concluímos que o coeficiente b_0 se transforma assim:

$$b_0 \mapsto \frac{b(\gamma)}{\beta^2}.$$

Logo como $b'(x) \neq 0$ então passando ao fecho separável K' de K podemos normalizar $b_0 = 0$. De onde $FK'|K'$ fica com equação

$$y^2 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 = 0.$$

Dividindo a equação por x^4 e definindo $x' := \frac{1}{x}$ e $y' := \frac{y}{x^2}$ concluímos que o corpo de funções $FK'|K'$ tem equação

$$y'^2 + b_4 + b_3 x' + b_2 x'^2 + b_1 x'^3 = 0.$$

Assim, pela desigualdade do gênero concluímos que $FK'|K'$ tem gênero ≤ 1 que contradiz pelo fato que o gênero não muda em extensões por constantes $K'|K$ separaveis. Se o fator que divide a $b(x)$ tiver grau maior que 1, se chega na mesma contradição anterior sem normalizar o coeficiente b_0. $\square$

Só acrescentamos que o resultado do item 2) do Teorema é exatamente o mesmo que se tem no caso de característica $p \neq 2$ só que nesse caso o assunto é resolvido usando a fórmula do gênero $g = [(\deg(b(x)) - 1)/2]$ onde $[\ .\ ]$ é a função parte inteira.

2 Classificação de corpos de funções não conservativos de gênero 2

Este capítulo tem como finalidade a classificação de corpos de funções não conservativos de gênero $g = 2$ em característica $p = 2$ (Teorema 2.2.1 e Teorema 2.3.1). A primeira secção contem uma exposição resumida de um algoritmo para calcular graus de singularidade de primos já que o algoritmo é crucial para chegar no nosso objetivo. Seguidamente, progredimos na classificação de corpos de funções de gênero 2 absolutamente elíticos. Na última secção classificamos os corpos de funções de gênero 2 absolutamente racionais.

2.1 Um algoritmo para calcular o grau de singularidade de primos

O objetivo desta secção é apresentar de forma concisa um algoritmo para calcular graus de singularidade de primos singulares.

Primeiramente, vamos explicar porque precisamos calcular graus de singularidade de primos para classificar corpos de funções não conservativos.

No Teorema 1.4.1 p. 27 se obteve uma forma normal para corpos de funções não conservativos de gênero 2 definidos sobre um corpo de característica 2. Mas, para chegar em uma classificação de tais corpos precisamos responder a pergunta recíproca. Isto é, se um corpo de funções tem uma equação normal como no Teorema 1.4.1 então, quais são as condições que devem satisfazer os coeficientes da forma normal para que o corpo de funções tenha gênero 2 e seja não conservativo? Observe-se que o Teorema já mencionado nos fornece condições necessárias. Por exemplo a forma normal de um corpo de funções $F|K$ absolutamente elítico involucrou uma relação entre os coeficientes da equação. Esta relação provém basicamente do discriminante do corpo de funções elíticas $F\overline{K}|\overline{K}$. Neste caso sabemos que o corpo de funções possui um único primo singular P (cf. Observação 1.4.3). A relação entre o gênero de $F|K$ e o gênero do corpo de funções elíticas $F\overline{K}|\overline{K}$ é dada pela fórmula do gênero de Rosenlicht $g = 1 + \delta$ onde δ é o grau de singularidade do primo P. Logo, concluímos que o corpo de funções $F|K$ tem gênero $g = 2$ se e só se o primo singular P tem grau de singularidade $\delta = 1$. Então, se queremos seguir este caminho em nossa classificação, precisamos de um método para determinar o grau de singularidade do primo P. Naturalmente, o grau de singularidade δ depende dos coeficientes da forma normal do corpo de funções $F|K$ e logo, a igualdade $\delta = 1$ vai nos fornecer as relações suficientes (entre os coeficientes) para que o gênero do corpo de funções $F|K$ seja $g = 2$.

No trabalho [BS], se desenvolveu um algoritmo eficiente para calcular o grau de singularidade de primos.

Nós vamos introduzir rapidamente os conceitos que se precisam para entender e aplicar os resultados deste artigo. Além disso, vamos enunciar os resultados que precisamos na forma mais simples possível. Seja $F|K$ um corpo de funções separável com K separavelmente fechado e de característica p. Seja P um primo de $F|K$ e $\overline{P}$ seu prolongamento a $F\overline{K}|\overline{K}$. O *semigrupo associado* a P é $H_P := \upsilon_{\overline{P}}(\mathcal{O}_P\overline{K} \setminus \{0\})$ onde $\upsilon_{\overline{P}}$ é a valorização correspondente a $\overline{P}$. O maior ideal de $\widetilde{\mathcal{O}_P} = \mathcal{O}_{\overline{P}}$ contido em $\mathcal{O}_P\overline{K}$ é dito *condutor* de $\mathcal{O}_P\overline{K}$. Como $\mathcal{O}_{\overline{P}}$ é um anel de valorização então existe um inteiro não negativo c_P (chamado de *condutor numérico*) tal que o condutor de $\mathcal{O}_P\overline{K}$ é

$$(\mathcal{O}_P\overline{K} : \mathcal{O}_{\overline{P}}) := \{z \in F | z\mathcal{O}_{\overline{P}} \subset \mathcal{O}_P\overline{K}\} = \{z \in \mathcal{O}_{\overline{P}} | \upsilon_{\overline{P}}(z) \geq c_p\}.$$

A relação entre o condutor numérico e o grau de singularidade é apresentada na seguinte Proposição.

Proposição 2.1.1. *O grau de singularidade de P é $\frac{c_P}{2}$. Além disso, o semigrupo H_P é simétrico, i.e., $i \in H_P \iff c_P - 1 - i \notin H_P$.*

Ver [BS] Proposition 1.1 e Corollary 1.4.

Para cada inteiro positivo n denotaremos por F_n o único subcorpo de $F|K$ tal que a extensão $F|F_n$ é puramente inseparável de grau p^n. Isto é, $F_n = F^{p^n}K$. Esta definição concorda com a notação que já usamos de $F_1 = F^2K$ no caso em que $p = 2$ na prova do Lema 1.4.2. Dado um primo P, denotamos por P_n sua restrição a $F_n|K$

Claramente os corpos de funções $FK^{p^{-n}}|K^{p^{-n}}$ e $F_n|K$ são isomorfos via o morfismo de Frobenius $z \mapsto z^{p^n}$.

Fixando um primo P de $F|K$ então existe um inteiro positivo n tal que P_n é racional (ver [BS], Lemma 2.1). Exatamente neste ponto é usada a condição técnica de K ser separavelmente fechado. Mas, pelo isomorfismo de Frobenius acima é mais o menos clara a existência de um tal n para uma longa classe de corpos $F|K$. Por exemplo, a afirmação é clara para os corpos de funções que queremos classificar neste trabalho.

Neste mesmo artigo citado acima, os autores conseguem um algoritmo para calcular o condutor numérico de um primo qualquer e em consequência se calcula também o grau de singularidade (Proposição 2.1.1).

Vamos enunciar os resultados que precisamos para nossos fins. Porém, primeiramente nós descreveremos os objetos e aspectos mais importantes do algoritmo.

Vamos fixar um primo P e um inteiro n tal que P_n e racional. Seja t um parâmetro local de $\mathcal{O}_{P_n}$. Lembramos que $F|K$ é separável, i.e., existe z tal que $F|K(z)$ é separável. Vamos fixar um tal *parâmetro separante* z. Logo, z^{p^n} é também parâmetro separante de $F_n|K$ e podemos escrever z^{p^n} como uma serie de Laurent com coeficientes em K no parâmetro P-primo t. Isto é,

$$z^{p^n} = \sum_{i=\gamma}^{\infty} c_i t^i \in K((t)) \setminus K((t^p)).$$

onde $c_\gamma \neq 0$.

Definimos

$$\mu = \min\{i | i \neq 0 \mod p,\ c_i \neq 0\} = \upsilon_{P_n}(dz^{p^n}) + 1$$

onde dz^{p^n} é o diferencial de z^{p^n}.

O algoritmo de [BS] permite calcular o grau do primo singular em termos de certas propriedades dos coeficientes da serie de z^{p^n} e de forma indutiva. Isto é, se pode calcular o condutor numérico c_P em termos do condutor numérico c_{P_1} e de um elemento $z \in \mathcal{O}_P$ tal que $\mathcal{O}_P = \oplus_{i=0}^{p-1} \mathcal{O}_{P_1} z^i$ (cf. [BS], Theorem 2.3). Como $[F : F_1] = p$ então usando a igualdade fundamental para corpos de funções, pode-se concluir que dito elemento z depende do fato da extensão $P|P_1$ ser ramificada ou inercial (ver [BS], Algorithm 2.2, p. 314). Mas, para os casos onde n é um ou dois se pode calcular o condutor numérico de forma explícita. Temos então a seguinte Proposição no caso em que P_1 é racional:

Proposição 2.1.2. *Supondo que $n = 1$ então, o primo P não é racional se e só se existe um $\tau < \mu$ tal que $c_\tau \notin K^2$. Se τ é o mínimo com a propriedade anterior, então $K_P = K(c_\tau^{\frac{1}{p}})$, $H_P = p\mathbb{N} + (\mu - \tau)\mathbb{N}$ e em consequência o condutor numérico é*

$$c_P = (p-1)(\mu - \tau - 1)$$

Logo, se denotamos por δ o grau de singularidade do primo P, então de acordo com a Proposição 2.1.1 temos que

$$\delta = \frac{(p-1)(\mu - \tau - 1)}{2}. \tag{4}$$

Lembramos que pela Proposição 2.1.2 convém definir $\tau := \min\{i \in \mathbb{Z} | c_i \notin K^2\}$.

Para o caso em que se sabe que P_2 é racional já se pode perceber a complexidade do problema do cálculo do grau de singularidade. Para este caso temos o seguinte resultado:

Proposição 2.1.3. *Supondo que $n = 2$ e que P_1 não é racional temos os seguintes resultados:*

i) Se $P|P_1$ é ramificado e z é um parâmetro uniformizante de $\mathcal{O}_P$ ou equivalentemente $\gamma = p$, então $H_P = p\mathbb{N} + (\mu + p(\mu - \tau - 1))\mathbb{N}$.

ii) Se $P|P_1$ é inercial e z e um elemento de $\mathcal{O}_P$ que gera a extensão de corpos residuais $K_P|K_{P_1}$ ou equivalentemente $c_0^{p^{-2}} \notin K(c_\tau^{p^{-1}})$ e $c_i = 0$ para todo $i < 0$, então

$$K_P = K(c_\tau^{p^{-1}}, c_0^{p^{-2}}).$$

Em qualquer um dos casos temos que

$$c_P = (p-1)(\mu - 1 + p(\mu - \tau - 1)).$$

Logo, no caso em que P_2 é racional e P_1 não é racional então o grau de singularidade de P é

$$\delta = \frac{(p-1)(\mu - 1 + p(\mu - \tau - 1))}{2}. \tag{5}$$

O cálculo do semigrupo H_P no caso $n = 2$ não se conhece em geral. As provas das proposições anteriores e uma discussão mais ampla sobre o semigrupo se encontram em [BS], Secção 4, p. 318.

O método apresentado aqui é suficiente para classificar os corpos de funções de gênero 2 absolutamente elíticos.

Para finalizar a secção vamos enunciar uma proposição relativa as ramificações dos primos singulares que vamos usar no futuro.

Proposição 2.1.4. *Seja K um corpo separavelmente fechado e $F|K$ um corpo de funções. Seja P um primo de $F|K$ e $\overline{P}$ o único prolongamento de P a $F\overline{K}|\overline{K}$. Então,*

$$e(\overline{P}|P) = \deg(P)$$

onde $e(\overline{P}|P)$ é índice de ramificação *de $\overline{P}$ sobre P, i.e., o índice do subgrupo $\upsilon_{\overline{P}}(F \setminus \{0\})$ em $\mathbb{Z}$ (aqui $\upsilon_{\overline{P}}$ é a valorização correspondente a $\overline{P}$) e* $\deg(P) := [\mathcal{O}_P/m_P : K]$ *é o grau do primo P $\big(\mathcal{O}_P$ é o anel de valorização (local) correspondente a P e m_P é seu (único) ideal maximal$\big)$.*

A prova desta Proposição se obtém de forma simples usando a *igualdade fundamental para corpos de funções* aplicada a extensões finitas de K. Isto se encontra nas entrelinhas da prova de [BS], Lemma 1.5, p. 312. Na verdade o lema da citação afirma que $\deg(P) \in H_P$. Isto se conclui trivialmente usando a Proposição anterior devido a que

$$\upsilon_{\overline{P}}(\mathcal{O}_P \setminus \{0\}) = e(\overline{P}|P)\mathbb{Z}_{\geq 0} \subseteq H_P := \upsilon_{\overline{P}}(\mathcal{O}_{\overline{P}}\overline{K} \setminus \{0\})$$

onde $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ denota o conjunto de inteiros não negativos.

Vamos destacar uma implicação da Proposição.

Observação 2.1.5.

Todo primo P racional é não singular.

Esta Observação se conclui juntando a Proposição 2.1.4 e a Proposição 2.1.1.

2.2 Classificação de corpos de funções de gênero 2 absolutamente elíticos

Lembramos que um corpo de funções $F|K$ é dito absolutamente elítico se o gênero da sua extensão por constantes $F\overline{K}|\overline{K}$ é igual a 1, i.e., se $F\overline{K}|\overline{K}$ é um corpo de funções elíticas, onde $\overline{K}$ denota o fecho algébrico de K. Nesta secção vamos classificar os corpos de funções $F|K$ de gênero 2 absolutamente elíticos em característica 2. Esta classificação é em um certo sentido equivalente a classificação birracional de fibrações por curvas singulares de gênero aritmético 2 que tem uma cúspide como única singularidade em característica 2. Vamos provar o seguinte resultado.

Teorema 2.2.1. *Seja $F|K$ um corpo de funções (separável) absolutamente elítico de característica $p = 2$. Então o corpo $F|K$ tem gênero 2 se e só se existem $x, y \in F$ tais que $F = K(x, y)$ onde x, y satisfazem alguma das seguintes equações normais de acordo com o j-invariante da extensão por constantes $F\overline{K}|\overline{K}$:*

1) Se $j = 0$ então existem $b_0, b_4 \in K$ e $b_6 \in K \setminus K^2$ tais que

$$y^2 + y + b_0 + b_4x^4 + b_6x^6 = 0$$

2) Se $j \neq 0$ então existem $b_4 \in K$, $b_6 \in K^*$ e $a_0 \in K \setminus (K^2)^*$ tais que

$$y^2 + (a_0 + x^2)y + b_0 + b_4x^4 + b_6x^6 = 0$$

onde $b_0 = \frac{1}{(b_6j)^2} + a_0^2b_4 + a_0^3b_6 + a_0^4b_6^2$. Mais ainda, o caso $a_0 = 0$ ocorre só quando $j \notin K$ ou equivalentemente, $a_0 = 0$ implica $b_0 \in K \setminus K^2$.

Observe-se que este resultado mostra também a existência de tais corpos de funções. Apresentamos o esquema da prova. Primeiramente provaremos a implicação direta. Isto se fará usando o algorítmo para calcular graus de singularidade apresentado na Secção 2.1 tendo conhecimento que um corpo de funções de gênero 2 absolutamente elítico tem um único primo singular pela fórmula do gênero de Rosenlicht (ver equação (2) p. 22), que neste caso é $2 - 1 = 1 = \delta$ onde δ é o grau de singularidade do único primo singular. A condição $\delta = 1$ vai se traduzir em relações entre os coeficientes. A implicação recíproca (volta) vai ser quase imediata. Denotando por g o gênero do corpo de funções $F|K$ a fórmula de Rosenlicht acima nos diz que $g - 1 = \delta$ onde δ é o grau de singularidade de um primo que vai ser o único primo candidato a ser singular. Logo, vamos ver que as condições dadas nos coeficientes das formas normais do Teorema são suficientes para concluir que o grau de singularidade desse primo candidato a singular é $\delta = 1$ ou equivalentemente $g = 2$.

Demonstração. Mencionamos que pelo Teorema 1.4.1 sabemos que o corpo de funções $F|K$ é de tipo separável e possui uma equação normal

$$y^2 + (a_0 + a_2x^2)y + b_0 + b_4x^4 + b_6x^6 = 0$$

onde $a_0, a_2, b_0, b_4, b_6 \in K$, $b_6^2(b_0 + a_0^2b_4 + a_0^3b_6 + a_0^4b_6^2) \neq 0$ e

$$j = \frac{a_2^6}{b_6(b_0 + a_0^2b_4 + a_0^3b_6 + a_0^4b_6^2)^{\frac{1}{2}}} \in K^{\frac{1}{2}}.$$

De onde concluímos que

$$b_6 \in K^*.$$

Além disso, se $j \neq 0$ então

$$b_0 = \frac{1}{(b_6j)^2} + a_0^2b_4 + a_0^3b_6 + a_0^4b_6^2.$$

As transformações de coordenadas que respeitam a forma normal são

$$(x, y) \mapsto (\alpha x + \gamma, \beta y + \gamma_0 + \gamma_1x + \gamma_2x^2 + \gamma_3x^3)$$

onde $\alpha, \beta \in K^*$ e $\gamma, \gamma_i \in K$ com $i = 0, 1, 2, 3$. Os coeficientes envolvidos na forma normal mudam da seguinte forma:

$$\begin{array}{lll} a_0 & \mapsto & \frac{a_0}{\beta} + \frac{a_2\gamma^2}{\beta} \\ a_2 & \mapsto & \frac{a_2\alpha^2}{\beta} \end{array}$$

e os de $b(x)$

$$\begin{array}{lll} b_0 & \mapsto & \frac{b_0}{\beta^2} + \frac{b_1\gamma+b_2\gamma^2+b_3\gamma^3+b_4\gamma^4+b_5\gamma^5+b_6\gamma^6+a(\gamma)\gamma_0+\gamma_0^2}{\beta^2} \\ b_1 & \mapsto & \frac{b_1\alpha}{\beta^2} + \frac{b_3\alpha\gamma^2+b_5\alpha\gamma^4+a(\gamma)\gamma_1}{\beta^2} \\ b_2 & \mapsto & \frac{b_2\alpha^2}{\beta^2} + \frac{b_3\alpha^2\gamma+b_6\alpha^2\gamma^4+a(\gamma)\gamma_2+a_2\alpha^2\gamma_0+\gamma_1^2}{\beta^2} \\ b_3 & \mapsto & \frac{b_3\alpha^3}{\beta^2} + \frac{a(\gamma)\gamma_3+a_2\alpha^2\gamma_1}{\beta^2} \\ b_4 & \mapsto & \frac{b_4\alpha^4}{\beta^2} + \frac{b_5\alpha^4\gamma+b_6\alpha^4\gamma^2+a_2\alpha^2\gamma_2+\gamma_2^2}{\beta^2} \\ b_5 & \mapsto & \frac{b_5\alpha^5}{\beta^2} + \frac{a_2\alpha^2\gamma_3}{\beta^2} \\ b_6 & \mapsto & \frac{b_6\alpha^6}{\beta^2} + \frac{\gamma_3^2}{\beta^2} \end{array}$$

Vamos provar o item 1). Suponhamos que $j = 0$. Logo, $a_2 = 0$ e portanto $a_0 \neq 0$ (cf. Teorema 1.4.1). Usando as transformações mencionadas acima podemos normalizar $a_0 = 1$ ficando com equação

$$y^2 + y + b_0 + b_4x^4 + b_6x^6 = 0.$$

Para provar a implicação direta só nos resta ver que $b_6 \notin K^2$. Denotemos por P o único primo singular de $F|K$. Já que o corpo $F\overline{K}|\overline{K}$ é elítico, então nossa estrategia será observar que esta condição $b_6 \notin K^2$ é necessária e suficiente para que o primo P tenha grau de singularidade 1. Com esta finalidade em mente, fazemos uso do método para calcular o grau de singularidade da Secção 2.1. Primeiramente vamos concluir que o primo P_1 definido como a restrição de P a $F^2K|K$ é racional. Para isso vamos fazer uso da equação da curva C induzida pelo corpo de funções $F|K$ no cone de $\mathbb{P}^4(\overline{K})$ (ver Secção 1.2). A equação desta curva na segunda carta do cone menos o vértice é

$$y'^2 + x'^3y' + b_6 + b_4x'^2 + b_0x'^6 = 0$$

onde $x' = \frac{1}{x}$ e $y' = \frac{y}{x^3}$. O primo singular P está centrado no ponto singular $(0, b_6^{\frac{1}{2}})$ (ver Observação 1.3.1). Levando o ponto singular na origem chegamos na equação

$$y'^2 + x'^3y' + b_4x'^2 + b_6^{\frac{1}{2}}x'^3 + b_0x'^6 = 0.$$

Explodindo no ponto singular e analisando na carta de interesse com $y' = x'\widetilde{y}$ concluímos que a explosão de C no ponto singular fica com equação

$$\widetilde{y}^2 + x'^2\widetilde{y} + b_4 + b_6^{\frac{1}{2}}x' + b_0x'^4 = 0.$$

O ponto acima da singularidade é $(0, b_4^{\frac{1}{2}})$. Transladando dito ponto na origem chegamos na equação

$$\widetilde{y}^2 + x'^2\widetilde{y} + b_6^{\frac{1}{2}}x' + b_4x'^2 + b_0x'^4 = 0.$$

Como $b_6 \neq 0$, o ponto $(0, b_4^{\frac{1}{2}})$ é não singular. Agora, como $(0, b_4^{\frac{1}{2}})$ é um ponto $K^{\frac{1}{2}}$-racional, então usando o morfismo de Frobenius $FK^{\frac{1}{2}}|K^{\frac{1}{2}} \to F_1|K := F^2K|K$ que envia $z \in FK^{\frac{1}{2}}$ em z^2, concluímos que a restrição de P a $F_1|K$ é racional. Sabemos que x é variável separante de $F|K$. Logo, $\breve{x} := x^2$ é variável separante de $F_1|K$. Logo, se t é um parâmetro uniformizante de P_1, então

$$x^2 = \sum_{i=r}^{\infty} c_i t^i \in K((t)) \setminus K((t^2)).$$

Por outro lado, como $F = K(x, y)$ então $F_1 = K(x^2, y^2) = K(\breve{x}, y)$ porque $y \in F_1$. A equação de $F_1|K$ fica

$$y^2 + y + b_0 + b_4\breve{x}^2 + b_6\breve{x}^3 = 0$$

onde $b_0, b_4 \in K$ e $0 \neq b_6 \in K$. Além disso, como P_1 é o único primo em $F_1|K$ acima do pólo de $\breve{x}$ então $\mathrm{div}_\infty(\breve{x}) = 2P_1$, i.e., $\upsilon_{P_1}(\breve{x}) = -2 = r$. Pela forma da equação de $F_1|K$ concluímos que $\upsilon_{P_1}(y) = -3$. Na verdade os fatos $\upsilon_{P_1}(\breve{x}) = -2$ e $\upsilon_{P_1}(y) = -3$ são uma consequência da forma normal de Weierstrass obtida em [Ta2] aplicada a $F_1|K$. Logo, $t := \frac{\breve{x}}{y}$ é um parâmetro uniformizante de P_1 e $y = t^{-1}\breve{x}$. Substituindo $\breve{x}$ em termos de t na equação de $F_1|K$ vemos que

$$(c_{-2}^2 + b_6c_{-2}^3)t^{-6} + b_6c_{-2}^2c_{-1}t^{-5} + (c_{-1}^2 + b_4c_{-2}^2 + b_6(c_{-2}^2c_0 + c_{-2}c_{-1}^2))t^{-4} + (c_{-2} + b_6(c_{-2}^2c_1 + c_{-1}^3))t^{-3} \cdots = 0.$$

Como $c_{-2} \neq 0 \neq b_6$ concluímos que

$$c_{-2} = \frac{1}{b_6}, \quad c_{-1} = 0, \quad c_0 = \frac{b_4}{b_6} \ \text{ e } \ c_1 = 1.$$

Isto é,

$$\breve{x} = x^2 = \frac{1}{b_6}t^{-2} + \frac{b_4}{b_6} + t + \cdots .$$

Afirmamos que não é possível que $b_6 \in K^2$. Argumentemos por contradição supondo que $b_6 \in K^2$. De fato, pela Observação 2.1.5 concluímos que P não pode ser racional e então a Proposição 2.1.2 nos permite concluir que $b_4 \notin K^2$, o que implica que o grau de singularidade do primo P é $\delta = 0$ que não pode ser. Logo, $b_6 \notin K^2$ o que prova a implicação direta do item 1). Para concluir as duas direções do item 1) só devemos observar que aplicando de novo a Proposição 2.1.2 ou a equação (4) concluímos que $b_6 \notin K^2$ se e só se o grau de singularidade de P é $\delta = 1$.

Vamos provar o item 2). Suponhamos que $j \in \overline{K}^*$. Logo, $a_2 \neq 0$. Com as transformações de coordenadas que respeitam a forma normal mencionadas acima podemos normalizar $a_2 = 1$.

Vamos ver a implicação direta. O corpo de funções $F|K$ tem equação

$$y^2 + (a_0 + x^2)y + b_0 + b_4x^4 + b_6x^6 = 0$$

onde $a_0, b_4, b_6 \in K$ e $b_0 = \frac{1}{(b_6j)^2} + a_0^2b_4 + a_0^3b_6 + a_0^4b_6^2 \in K$

Seja P o primo que está centrado no único ponto singular da curva induzida no cone de $\mathbb{P}^4(\overline{K})$ (ver Secção 1.2). Como o gênero de $F|K$ é $g = 2$, então a Observação 1.3.1 nos permite concluir que o primo P é singular. Além disso, a fórmula do gênero de Rosenlicht mencionada antes de iniciar a prova do teorema implica que o grau de singularidade de P é $\delta = 1$.

Vamos ver que o fato de P ser singular com grau de singularidade $\delta = 1$ implica as condições pedidas nos coeficientes da forma normal do teorema. Estas condições serão determinadas usando o algoritmo para calcular o grau de singularidade de primos descrito na Secção 2.1. Observe-se primeiramente que

$$F_1 := F^2K = K(x^2, y).$$

Logo, definindo $\breve{x} = x^2$ se conclui que $F_1|K$ tem equação,

$$y^2 + (a_0 + \breve{x})y + b_0 + b_4\breve{x}^2 + b_6\breve{x}^3 = 0 \tag{6}$$

Assim, $\breve{x}$ é variável separante de $F_1|K$. Agora, o primo P_1 definido como a restrição de P a $F_1|K$ está centrado no ponto (a_0, y_0) do modelo não singular correspondente a $F_1\overline{K}|\overline{K}$ onde

$$y_0 = \frac{1}{b_6 j} + a_0^2 b_6.$$

Observe-se que y_0 pode não pertencer a K pois j é um invariante de $F\overline{K}|\overline{K}$ e então poderia não estar em K. Isto é, só podemos afirmar que o primo P_1 está centrado em um ponto $K^{\frac{1}{2}}$-racional porque somente sabemos que $j \in K^{\frac{1}{2}}$. Logo, concluímos que P_2 é racional via o morfismo de Frobenius $F_1K^{\frac{1}{2}}|K^{\frac{1}{2}} \to F_1^2|K = F_2|K$. Então qualquer reta passando pelo ponto (a_0, y_0) não tangente ao modelo regular de $F_1\overline{K}|\overline{K}$ (no mesmo ponto (a_0, y_0)) induz um parâmetro uniformizante em dito ponto de acordo com [Ft], Theorem 1, p. 34. A reta tangente ao ponto (a_0, y_0) é $x + a_0 = 0$. Como a reta $y + y_0 = 0$ não é tangente ao modelo não singular de $F_1\overline{K}|\overline{K}$ no ponto (a_0, y_0) e ela está definida sobre $K^{\frac{1}{2}}$, então dita reta induz um uniformizante local de P_2 via o morfismo de Frobenius porque o índice de ramificação do ponto (a_0, y_0) com relação a extensão de P_1 a $F_1K^{\frac{1}{2}}|K^{\frac{1}{2}}$ é igual a $\deg(P_2) = 1$ (cf. Proposição 2.1.4). Logo, concluímos que

$$t := y^2 + y_0^2 = y^2 + b_0 + b_4a_0^2 + b_6a_0^3$$

é um parâmetro P_2-uniformizante. Usando de novo o morfismo de Frobenius temos que $\upsilon_{P_2}\big((a_0 + \breve{x})^2\big) = \upsilon_{(a_0,y_0)}(a_0 + \breve{x}) = 2$ porque $\upsilon_{(a_0,y_0)}(a_0 + \breve{x})$ é a multiplicidade de intersecção em (a_0, y_0) do modelo não singular de $F_1\overline{K}|\overline{K}$ e a reta de equação $a_0 + \breve{x} = 0$ (Aqui estamos denotando por $\upsilon_{(a_0,y_0)}$ a valorização correspondente ao ponto (a_0, y_0)). Logo, de acordo com a Secção 2.1, temos que

$$x^4 = \breve{x}^2 = c_0 + c_1t + c_2t^2 + c_3t^3 + c_4t^4 + \cdots \in K((t)) \setminus K((t^2))$$

onde, $c_0 = a_0^2$, $c_1 = 0$ e $c_2 \neq 0$. Tomando o quadrado da equação (6) chegamos na igualdade

$$y^4 + (a_0^2 + \breve{x}^2)y^2 + b_0^2 + b_4^2\breve{x}^4 + b_6^2\breve{x}^6 = 0.$$

Substituindo $y^2 = y_0^2 + t$, $y^4 = y_0^4 + t^2$ e a serie de $\breve{x}^2$ na equação acima temos que

$y_0^4 + (a_0^2 + c_0)y_0^2 + b_0^2 + b_4^2c_0^2 + b_6^2c_0^3 + (a_0^2 + c_0 + c_1y_0^2 + b_6^2c_0^2c_1)t +$
$\big(1 + c_1 + c_2y_0^2 + b_4^2c_1^2 + b_6^2(c_0^2c_2 + c_0c_1^2)\big)t^2 + \big(c_2 + c_3y_0^2 + b_6^2(c_0^2c_3 + c_1^3)\big)t^3 + \cdots = 0.$

Observando que $b_0 + a_0^2b_4 + a_0^3b_6 + a_0^4b_6^2 = y_0^2 + a_0^4b_6^2 = \frac{1}{(b_6j)^2} \neq 0$ podemos conferir os resultados obtidos acima sobre os três primeiros coeficientes da serie. Logo, os quatro primeiros coeficientes (que são todos os que precisamos para calcular o grau de singularidade do primo) ficam assim:

$$c_0 = a_0^2, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{1}{y_0^2 + a_0^4b_6^2}, \quad \text{e} \quad c_3 = \frac{1}{(y_0^2 + a_0^4b_6^2)^2}.$$

Isto é,

$$x^4 = \breve{x}^2 = a_0^2 + (b_6j)^2t^2 + (b_6j)^4t^3 + \cdots . \tag{7}$$

Agora, usando o algoritmo para calcular o grau de singularidade do primo P concluímos que $\mu := v_P(dx^4) + 1 = 3$. Não é possível que P seja racional porque em tal caso sería não singular pela Observação 2.1.5. Vamos supor primeiramente que P_1 não é racional. Logo, pela Proposição 2.1.2 temos que $c_2 \notin K^2$, i.e., $j \notin K$. Agora, fazemos uso da Proposição 2.1.3. Só precisamos determinar se a extensão $P|P_1$ é ramificada o inercial para poder aplicar dita proposição. Primeiramente observe-se que o corpo residual de P_1 é

$$K(\overline{\breve{x}}, \overline{y}) = K(a_0, y_0) = K(y_0)$$

onde $\overline{\breve{x}}, \overline{y}$ são as classes residuais de $\breve{x},\ y \in \mathcal{O}_{P_1}$ (em dito corpo residual). Isto é, o corpo residual de P_1 é $K(y_0) = K(j)$. Denotemos por $\overline{x}$ a classe residual de x no corpo residual de P. Se $\overline{x} = a_0^{\frac{1}{2}} \notin K(y_0)$ então a extensão $P|P_1$ é inercial e como $j \notin K$ então pela Proposição 2.1.3 concluímos que o grau de singularidade de P é $\delta = 1$.

Suponhamos agora que $\overline{x} = a_0^{\frac{1}{2}} \in K(y_0)$. Logo, $a_0^{\frac{1}{2}} = \alpha + \beta y_0$ onde $\alpha, \beta \in K$ já que $y_0^2 \in K$ pois $j \in K^{\frac{1}{2}}$. Definimos $z := x - (\alpha + \beta y) \in \mathcal{O}_P$. Claramente, z é variável separante de $F|K$ pois $z \notin F_1 = k(x^2, y)$. Além disso, $F = K(z, y)$. Como $z^4 = x^4 - (\alpha^4 + \beta^4y^4)$ e $y^4 = y_0^4 + t^2$ então

$$z^4 = \Big((b_6j)^2 + \beta^4\Big)t^2 + (b_6j)^4t^3 + \cdots .$$

Como $j \notin K$ então $(b_6j)^2 + \beta^4 \neq 0$. Assim, aplicando a Proposição 2.1.3 concluímos que $P|P_1$ é ramificada e $\delta = 1$.

Vamos supor agora que P_1 é racional. Logo, pela Proposição 2.1.2 aplicada a P_1 concluímos que $c_2 \in K^2$, i.e., $j \in K$. Logo, pela igualdade fundamental aplicada aos corpos de funções $F_1|K$ e $F_2|K$ com relação a P_2, concluímos que $e(P_1|P_2) = 2$. Então,

$$t_1 := t^{\frac{1}{2}} = y + y_0$$

é um parâmetro uniformizante de P_1. Voltando para o algoritmo para calcular o grau de singularidade de P concluímos que

$$x^2 = \breve{x} = a_0 + b_6jt_1^2 + (b_6j)^2t_1^3 + \cdots .$$

Com estas condições não é possível que $a_0 \in K^2$, pois se tal for o caso, então o grau de singularidade do primo P é $\delta = 0$ (ver Proposição 2.1.2 e Observação 2.1.5). Logo, $a_0 \notin K^2$ e consequentemente o grau de singularidade de P é $\delta = 1$ de acordo com a Proposição 2.1.2 ou a equação (4). Observe-se que no caso em que P_1 não é racional, i.e., $j \notin K$, poderia acontecer que $a_0 \in K^2$. Porém, em tal caso normalizamos $a_0 = 0$ usando as transformações coordenadas em x e y que respeitam a forma normal. Logo, concluímos que

$$a_0 \in (K \setminus K^2) \cup \{0\} = K \setminus (K^2)^*$$

e que se $a_0 = 0$ então $j \notin K$, i.e., $a_0 = 0$ implica $b_0 \in K \setminus K^2$.

A volta (implicação recíproca) se conclui observando que com as condições dadas na forma normal do item 2), o primo P que está centrado no ponto (a_0, y_0) tem grau de singularidade $\delta = 1$ de acordo com o cálculo do grau de singularidade que já foi mostrado acima. □

Uma análise usando as transformações de coordenadas das funções x e y ou da Proposição 1.1.1 no caso de corpos de funções de gênero 2 absolutamente elíticos em característica 2 nos permite concluir os seguintes corolários.

Corolário 2.2.2. *Sejam $F|K$ e $\hat{F}|K$ corpos de funções de gênero 2 absolutamente elíticos com formas normais $y^2+y+b_0+b_4x^4+b_6x^6 = 0$ e $\hat{y}^2+\hat{y}+\hat{b}_0+\hat{b}_4\hat{x}^4+\hat{b}_6\hat{x}^6 = 0$ respectivamente. Então $F|K$ é isomorfo a $\hat{F}|K$ se e só se existem $\alpha \in K^*$ e $\gamma, \gamma_0 \in K$ tais que*

$$\hat{b}_0 = b_0 + b_4\gamma^4 + b_6\gamma^6 + \gamma_0 + \gamma_0^2, \quad \hat{b}_4 = (b_4 + b_6\gamma^2 + b_6^2\gamma^8)\alpha^4 \quad e \quad \hat{b}_6 = b_6\alpha^6$$

Corolário 2.2.3. *Sejam $F|K$ e $\hat{F}|K$ corpos de funções de gênero 2 absolutamente elíticos com formas normais $y^2+(a_0+x^2)y+b_0+b_4x^4+b_6x^6 = 0$ e $\hat{y}^2+(\hat{a}_0+\hat{x}^2)\hat{y}+\hat{b}_0+\hat{b}_4\hat{x}^4+\hat{b}_6\hat{x}^6 = 0$ respectivamente. Então $F|K$ é isomorfo a $\hat{F}|K$ se e só se existem $\alpha \in K^*$ e $\gamma, \gamma_2 \in K$ tais que*

$$\hat{a}_0 = \frac{a_0+\gamma^2}{\alpha^2}, \quad \hat{b}_0 = \frac{b_0+b_4\gamma^4+b_6\gamma^6}{\alpha^4} + \hat{a}_0\frac{\gamma_0}{\alpha^2} + \left(\frac{\gamma_0}{\alpha^2}\right)^2, \quad \hat{b}_4 = b_4 + b_6\gamma^2 + \frac{\gamma_2}{\alpha^2} + \left(\frac{\gamma_2}{\alpha^2}\right)^2 \quad e \quad \hat{b}_6 = b_6\alpha^2$$

onde $\gamma_0 = b_6\gamma^4 + \hat{a}_0\gamma_2$.

Corolário 2.2.4. *Sejam $F|K$ e $\hat{F}|K$ corpos de funções de gênero 2 absolutamente elíticos com formas normais $y^2 + x^2y + b_0 + b_4x^4 + b_6x^6 = 0$ e $\hat{y}^2 + \hat{x}^2\hat{y} + \hat{b}_0 + \hat{b}_4\hat{x}^4 + \hat{b}_6\hat{x}^6 = 0$ respectivamente. Então $F|K$ é isomorfo a $\hat{F}|K$ se e só se $\hat{j} = j$, $\frac{b_6}{\hat{b}_6} \in (K^2)^*$ e existe $c \in K$ tal que*

$$\hat{b}_4 = b_4 + c + c^2$$

onde j e $\hat{j}$ são os invariantes modulares de $F|K$ e $\hat{F}|K$ respectivamente.

2.3 Classificação de corpos de funções de gênero 2 absolutamente racionais

O objetivo desta secção é classificar os corpos de funções separaveis de gênero 2 absolutamente racionais em característica $p = 2$. Um corpo de funções $F|K$ é dito absolutamente racional se o gênero de sua extensão por constantes $F\overline{K}|\overline{K}$ é zero, i.e., o corpo de funções $F\overline{K}|\overline{K}$ é racional, onde $\overline{K}$ é o fecho algébrico de K.

Lembramos que pelo Teorema 1.4.1 um corpo de funções $F|K$ separável de gênero 2 é absolutamente racional se e só se é de tipo inseparável. Em consequência, existem funções $x, y \in F$ que satisfazem uma equação normal

$$y^2 + b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + x^5 + b_6 x^6 = 0$$

e além disso $F = K(x, y)$. Por outro lado, a fórmula do gênero de Rosenlicht

$$g - \overline{g} = \sum_{P \in R_{F|K}} \delta_P$$

onde g e $\overline{g}$ são os gêneros de $F|K$ e $F\overline{K}|\overline{K}$ respectivamente, $R_{F|K}$ é o modelo regular de $F|K$ e $\delta_P := \dim_{\overline{K}} \widetilde{\mathcal{O}_P}/\overline{K}\mathcal{O}_P$ é o grau de singularidade do primo P $\big($aqui $\mathcal{O}_P$ é o anel local do ponto P e $\widetilde{\mathcal{O}_P}$ é o seu fecho inteiro em $F\overline{K}\big)$ nos diz que um corpo de funções $F|K$ de gênero $g = 2$ é absolutamente racional se e só se ele tem um primo singular P com grau de singularidade $\delta_P = 2$ ou dois primos singulares tendo cada um deles grau de singularidade 1. Então, de acordo com a Observação 1.3.1 a curva induzida no cone $\mathbb{P}^4(\overline{K})$ (ver Secção 1.2) que em uma da suas cartas tem a mesma equação normal de acima é singular. Logo, se (x_0, y_0) for um ponto sobre o qual um primo singular está centrado, então pelo critério jacobiano concluímos que

$$b'(x_0) = b_1 + b_3 x_0^2 + x_0^4 = 0.$$

Assim, é natural pensar que a classificação dos corpos de funções de gênero 2 absolutamente racionais está ligada com a separabilidade do polinômio

$$b'(T^{\frac{1}{2}}) := b_1 + b_3 T + T^2.$$

Enunciamos então o teorema.

Teorema 2.3.1. *Seja $F|K$ um corpo de funções separável, absolutamente racional de característica $p = 2$. O corpo de funções $F|K$ tem gênero $g = 2$ se e só se existem $x, y \in F$ tais que $F = K(x, y)$ e um polinômio $b(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + x^5 + b_6 x^6 \in K[x]$ satisfazendo a equação normal $y^2 + b(x) = 0$ com alguma das seguintes condições:*

1) *$b_3 \neq 0$, as raízes c_1, c_2 do polinômio $b'(T^{\frac{1}{2}}) = b_1 + b_3 T + T^2 \in K[T]$ estão em K e, $b(c_i^{\frac{1}{2}}) \notin K^2$ quando $c_i \in K^2$ para $i = 1, 2$.*

2) *$b_3 \neq 0$ e as raízes c_1 e $c_2 = c_1 + b_3$ do polinômio $b'(T^{\frac{1}{2}}) = b_1 + b_3 T + T^2$ não estão em K e, $b_1 \notin K^2$ ou $b_3 \notin K^2$ ou $b_0 + b_1(b_4 + b_3 b_6) \notin K^2$ ou $b_2 + b_1 b_6 + b_3(b_4 + b_3 b_6) \notin K^2$.*

3) *$b_3 = 0$ e $b_1 \in K \setminus K^2$*

4) *$b_3 = 0$, $b_1 \in K^2 \setminus K^4$, $b_0 + b_1 b_4 \notin K^2$ e $b_2 + b_1 b_6 \notin K^2$.*

5) *$b_3 = 0$, $b_1 \in K^4$ e $b\big(b_1^{\frac{1}{4}}\big) \notin K^2$.*

Demonstração. Vamos provar primeiramente a implicação direta. Consequentemente o mesmo roteiro da prova nos fornecerá o resultado reciproco. Suponhamos então que $F|K$ é um corpo de funções separável absolutamente racional de gênero 2. Pelo Teorema 1.4.1 existem $x, y \in F$ e um polinômio $b(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + x^5 + b_6x^6 \in K[x]$ tais que $y^2 + b(x) = 0$ (equação normal) e $F = K(x, y)$. A fórmula do gênero de Rosenlicht (Equação 2, p. 22) nos diz que o corpo de funções tem um único primo singular com grau de singularidade 2 ou dois primos singulares cada um deles tendo grau de singularidade 1. A ideia é determinar os primos candidatos a primos singulares de $F|K$ e logo determinar condições necessárias e suficientes para que eles tenham o grau de singularidade apropriado. Será dessa análise que conseguiremos obter as condições exigidas nos itens do Teorema. Denotamos então o modelo regular de $F|K$ por $R_{F|K}$. De acordo com o Teorema 1.3.2 a curva

$$C := R_{F|K} \otimes_K \overline{K}$$

tem gênero aritmético 2 e se realiza no cone de $\mathbb{P}^4(\overline{K})$. Dita curva admite pelo menos uma singularidade na qual algum primo singular está centrado (ver Observação 1.3.1). Afirmamos que qualquer singularidade da curva está na carta do cone menos o vértice, onde ela tem a mesma equação do corpo de funções. Para concluir isso, observe-se primeiramente que na outra carta a equação da curva é

$$h(x', y') = y'^2 + b_6 + x' + b_4x'^2 + b_3x'^3 + b_2x'^4 + b_1x'^5 + b_0x^6 = 0$$

onde $x' = \frac{1}{x}$ e $y' = \frac{y}{x^3}$. Logo, só precisamos ver que não há singularidades no infinito, i.e., não há singularidades nos pontos que tem abscissa $x' = 0$. De fato, pelo critério jacobiano temos que $\frac{\partial h}{\partial x'}(x', y') = 1 + b_3x'^2 + b_1x'^4 = 1 \neq 0$ sempre que $x' = 0$. Portanto, as singularidades da curva $R_{F|K} \otimes_K \overline{K}$ se encontram todas na primeira carta. Nesta (primeira) carta, a curva C tem equação

$$y^2 + b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + x^5 + b_6x^6 = 0.$$

Seja (x_0, y_0) um ponto singular da curva C representado nesta carta. Logo, pelo critério jacobiano temos que

$$b'(x_0) = b_1 + b_3x_0^2 + x_0^4 = 0.$$

Assim, $b'(x) = (x^2 + x_0^2)(x^2 + x_0^2 + b_3)$. Seja $c := x_0^2$ uma raiz do polinômio

$$b'(T^{\frac{1}{2}}) = b_1 + b_3T + T^2 \in K[T].$$

A outra raiz do polinômio é $c + b_3 = x_0^2 + b_3$. Agora vamos usar o algoritmo para calcular o grau de singularidades de primos descrito na Secção 2.1. Por causa do algoritmo devemos dividir nosso problema em casos. O primeiro caso que consideramos é quando $b_3 \neq 0$, i.e., o polinômio $b_1 + b_3T + T^2$ é separável e, o segundo caso quando $b_3 = 0$.

Suponhamos então que $b_3 \neq 0$.

Seja $K' = K(c)$ o corpo das raízes de $b_1 + b_3T + T^2$. Como o gênero do corpo de funções $F|K$ não muda ao estender por constantes separavelmente, então concluímos que $FK'|K'$ tem gênero 2. Além disso, observe-se que $K = K'$ se alguma das raízes do polinômio $b_1 + b_3T + T^2$ está em K.

Vamos supor primeiramente que as raízes do polinômio $b_1 + b_3T + T^2$ estão em K i.e, $c \in K$.

Seja $P \in R_{F|K}$ o primo tal que $x(P) = x_0$. Para calcular o grau de singularidade de P devemos estudar os corpos $F_n := FK^{2^n}$. Claramente o corpo F_1 é igual a $K(x)$ já que é bem conhecido que F_1 é o único subcorpo de F contendo K tal que a extensão $F|F_1$ é puramente inseparável de grau 2. Denotamos por P_n a restrição do primo P ao corpo de funções $F_n|K$. Afirmamos que P_2 é racional. De fato, como $F_2 = K(x^2)$ então P_2 corresponde ao ideal primo $(x^2 + c)$ de $K[x^2]$ o que implica que o grau de P_2 é o grau na variável x^2 do polinômio $x^2 + c$, i.e., P_2 tem grau 1, i.e., P_2 é racional. Logo,

$$t := x^2 + c$$

é um parâmetro uniformizante de P_2. Como $y \in F$ é variável separante de $F|K$, então $y^4 \in F_2$ se escreve como uma serie em $K((t)) \setminus K((t^2))$. Como

$$y^4 = b_0^2 + b_1^2x^2 + b_2^2x^4 + b_3^2x^6 + b_4^2x^8 + x^{10} + b_6^2x^{12} = \sum_{i=0}^{6} b_i^2(t - c)^i$$

onde $b_5 := 1$, então concluímos que

$$y^4 = (b_0 + b_2c + b_4c^2 + b_6c^3)^2 + (b_2^2 + b_3^2c + b_6^2c^4)t^2 + b_3^2t^3 + (b_4^2 + c + b_6^2c^2)t^4 + t^5 + b_6^2t^6.$$

Assim, pela Proposição 2.1.2, P_1 é não racional $\iff$ $c \notin K^2$.

Suponhamos que P_1 não é racional. Queremos obter o grau de singularidade aplicando a Proposição 2.1.3. Observe-se que primeiramente devemos determinar se a extensão $P|P_1$ é ramificada ou inercial. Para isso, vamos denotar por $\overline{z}$ a classe residual de $z \in \mathcal{O}_P$ no corpo residual de P. Claramente o corpo residual de P_1 é $K(\overline{x}) = K(x_0) = K(c^{\frac{1}{2}})$.

Se $\overline{y} = (b_0 + b_2c + b_4c^2 + b_6c^3)^{\frac{1}{2}} \notin K(c^{\frac{1}{2}})$ então a extensão $P|P_1$ é inercial. Logo, no algoritmo para calcular o grau de singularidade temos que $\mu = \upsilon_{P_2}(dy^4) + 1 = 3$ (ver Secção 2.1, p. 35) e a Proposição 2.1.3 nos garante que o grau de singularidade de P é $\delta = 1$.

Suponhamos agora que $\overline{y} = (b_0 + b_2c + b_4c^2 + b_6c^3)^{\frac{1}{2}} \in K(c^{\frac{1}{2}})$. Então existem $\alpha, \gamma \in K$ tais que $(b_0 + b_2c + b_4c^2 + b_6c^3)^{\frac{1}{2}} = \gamma + \alpha c^{\frac{1}{2}} = \gamma + \alpha x_0$, i.e., $b_0 + b_2c + b_4c^2 + b_6c^3 = \gamma^2 + \alpha^2c$. Como $b_1 + b_3c + c^2 = 0$ então

$c^3 = b_1b_3 + (b_1 + b_3^2)c$ e $\gamma^2 + \alpha^2c = b_0 + b_1(b_4 + b_3b_6) + \big(b_2 + b_1b_6 + b_3(b_4 + b_3b_6)\big)c$, i.e.,

$$\gamma^2 = b_0 + b_1(b_4 + b_3b_6) \quad \text{e} \quad \alpha^2 = b_2 + b_1b_6 + b_3(b_4 + b_3b_6).$$

Seja $y_1 := y - (\gamma + \alpha x)$. Então, $y_1 \notin F_1 = K(x)$, i.e., y_1 é variável separante de $F|K$, $F = K(x, y_1)$ e $y_1^4 = y^4 - (\gamma^4 + \alpha^4x^4)$. Como $t^2 = x^4 + c^2$, então

$$y_1^4 = (b_2^2 + \alpha^4 + b_3^2c + b_6^2c^4)t^2 + b_3^2t^3 + (b_4^2 + c + b_6^2c^2)t^4 + t^5 + b_6^2t^6.$$

Portanto, a extensão $P|P_1$ é ramificada e o grau de singularidade de P é $\delta = 1$ (ver Proposição 2.1.3).

Quando P_1 é racional, i.e., $c \in K^2$, i.e., a abscissa x_0 do ponto onde o primo singular está centrado pertence a K então $t_1 := t^{\frac{1}{2}} = x + x_0 \in F_1 = K[x]$ é um parâmetro uniformizante de P_1 e

$$y^2 = b_0 + b_2 x_0^2 + b_4 x_0^4 + b_6 x_0^6 + (b_2 + b_3 x_0 + b_6 x_0^4) t_1^2 + b_3 t_1^3 + (b_4 + x_0 + b_6^2 x_0^2) t_1^4 + t_1^5 + b_6 t_1^6.$$

O primo P não é racional porque sendo ele racional o grau de singularidade é $\delta = 0$ (Observação 2.1.5). Logo, P é não racional, i.e., $b(x_0) = b_0 + b_2 x_0^2 + b_4 x_0^4 + b_6 x_0^6 \notin K^2$ ou $b_2 + b_3 x_0 + b_6 x_0^4 \notin K^2$ (ver Proposição 2.1.2). Assim, pela proposição mencionada anteriormente concluímos que o grau de singularidade de P é $\delta = 1 \iff b(x_0) \notin K^2$.

Fixando um corpo de funções $F|K$ com equação normal $y^2 + b(x) = 0$ tal que $b_3 \neq 0$ e qualquer raiz do polinômio $b'(T^{\frac{1}{2}}) = b_1 + b_3 T + T^2 \in K[T]$ está em K, podemos resumir o que provamos até aqui na seguinte frase:

O corpo de funções $F|K$ tem gênero $g = 2 \iff$ para qualquer raiz c de $b_1 + b_3 T + T^2$ tal que $c \in K^2$ temos que $b(c^{\frac{1}{2}}) \notin K^2$.

A conclusão acima é equivalente ao item 1) já que $b'(x)$ tem duas raízes e cada uma corresponde a um primo singular com grau de singularidade 1 em $F|K$.

Agora continuamos com o item 2).

Suponhamos que as raízes do polinômio $b_1 + b_3 T + T^2$ não estão em K, i.e., $c \notin K$.

Observe-se que como $K' = K(c)$ é uma extensão separável de K, então podemos aplicar todo o argumento acima ao corpo $FK'|K'$ no lugar de $F|K$ já que eles tem gêneros iguais.

Então de forma análoga, um corpo de funções $F|K$ com equação normal $y^2 + b(x) = 0$ tal que $b_3 \neq 0$ e alguma raiz do polinômio $b'(T^{\frac{1}{2}}) = b_1 + b_3 T + T^2 \in K[T]$ não está em K cumpre a seguinte equivalência

O corpo de funções $F|K$ tem gênero $g = 2 \iff$ para qualquer raiz c de $b_1 + b_3 T + T^2$ tal que $c \in K'^2$ temos que $b(c^{\frac{1}{2}}) \notin K'^2$.

Nossa ideia é escrever o lado direito da equivalência acima em termos de K.

Como $K' = K \bigoplus Kc$ e $b_1 + b_3 c + c^2 = 0$, então, $c \in K'^2 \iff b_1 \in K^2$ e $b_3 \in K^2$.

Claramente, temos que $K' = K \bigoplus Kc$, então $K'^2 = K^2 \bigoplus K^2 c^2 \subseteq K^2 \bigoplus K^2 c$ com igualdade se e só se $c \in K'^2$. Suponhamos então que c é uma raiz de $b_1 + b_3 T + T^2$ tal que $c \in K'^2$. Logo, $b_1, b_3 \in K^2$ e, $K'^2 = K^2 \bigoplus K^2 c^2 = K^2 \bigoplus K^2 c$. Contas mostram que

$$b(c^{\frac{1}{2}}) = b_0 + b_1(b_4 + b_3 b_6) + \big(b_2 + b_1 b_6 + b_3(b_4 + b_3 b_6)\big)c.$$

Assim, $b(c^{\frac{1}{2}}) \notin K'^2 \iff b_0 + b_1(b_4 + b_3 b_6) \notin K^2$ ou $(b_2 + b_1 b_6 + b_3(b_4 + b_3 b_6) \notin K^2$.

Portanto, o corpo de funções $F|K$ tem gênero $g = 2 \iff b_1 \notin K^2$ ou $b_3 \notin K^2$ ou $b_0 + b_1(b_4 + b_3b_6) \notin K^2$ ou $(b_2 + b_1b_6 + b_3(b_4 + b_3b_6) \notin K^2$. Isto prova o item 2).

Suponhamos agora que $b_3 = 0$.

Logo, $b'(x) = b_1 + x^4$. Seja P o primo singular de $F|K$ (ponto não liso do modelo regular de $F|K$) tal que $x(P) = b_1^{\frac{1}{4}}$. Como $F_3 = F_1^4K = K(x^4)$, então o primo P_3 definido como a restrição de P a $F_3|K$ é racional já que ele se corresponde com o ideal primo $(b_1 + x^4)$ de $K[x^4]$. Logo,

$$t := b_1 + x^4$$

é um parâmetro uniformizante de P_3. Como $y \in F$ é uma variável separante de $F|K$ então y^8 se escreve como uma serie em $K((t)) \setminus K((t^2))$ e o grau de singularidade de P depende dos coeficientes desta serie. Como $y^2 + b(x) = 0$ então

$$y^8 = b_0^4 + b_1^4x^4 + b_2^4x^8 + b_4^4x^{16} + x^{20} + b_6^4x^{24} = \sum_{i=0}^{6} b_i^4(t - b_1)^i$$

onde $b_3 := 0$ e $b_5 := 1$. Isto permite concluir que

$$y^8 = (b_0^2 + b_2^2b_1 + b_4^2b_1^2 + b_6^2b_1^3)^2 + (b_2 + b_1b_6)^4t^2 + (b_4^4 + b_1 + b_6^4b_1^2)t^4 + t^5 + b_6^4t^6.$$

Já que não podemos garantir a racionalidade dos primos P_1 ou P_2 (e.g., $b_1 \in K \setminus K^2$) então devemos usar o resultado principal do artigo [BS] onde se calcula (indutivamente) o condutor numérico de P denotado por c_P em termos do condutor numérico de P_1.

Teorema 2.3.2. *Seja z um elemento de $\mathcal{O}_P$ tal que $\mathcal{O}_P = \mathcal{O}_{P_1}[z]$, então*

$$c_P = pc_{P_1} + (p-1)\upsilon_{P_n}(dz^{p^n}).$$

Só acrescentamos que no teorema, p é a característica do corpo K, $\mathcal{O}_P$ representa o anel local do primo P e υ_{P_n} é a valorização correspondente ao primo racional P_n o qual é a restrição de P a $F_n = F^{p^n}K$ (ver Secção 2.1). Já que o grau de singularidade do primo P é $\delta_P = \frac{c_P}{2}$ (cf. Proposição 2.1.1), então

$$\delta_P = p\delta_{P_1} + \frac{(p-1)}{2}\upsilon_{P_n}(dz^{p^n}).$$

Acrescentamos que como F é um F_1-módulo de posto p então $\mathcal{O}_P$ é um $\mathcal{O}_{P_1}$-módulo de posto p. Se a extensão $P|P_1$ é ramificada (inercial), i.e., o índice de ramificação (inercia) é $e(P|P_1) = p$ $\big(f(P|P_1) = p\big)$ então z pode ser escolhido sendo um parâmetro uniformizante de P (um elemento tal que a sua classe residual no corpo residual de P gere a extensão algébrica determinada pelos corpos residuais de P e P_1).

Agora o objetivo é encontrar um tal z usando o algoritmo descrito em [BS], `Algorithm` 2.2.

Por todo o que foi comentado acima é conveniente e necessário fazer casos como os enunciados nos itens 3), 4) e 5) do Teorema.

Suponhamos que $b_1 \in K \setminus K^2$.

Como já foi mencionado acima desejamos determinar se $P|P_1$ é ramificada o inercial para desta forma obter um $z \in \mathcal{O}_P$ tal que $\mathcal{O}_P = \mathcal{O}_{P_1}[z]$. Nosso objetivo é observar que dito z é da forma $y + \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x^3$ para alguns $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in K$. Dado $z \in \mathcal{O}_P$ denotamos por $\overline{z}$ a sua classe no corpo residual de P.

Pela serie $y^8 = (b_0^2 + b_2^2 b_1 + b_4^2 b_1^2 + b_6^2 b_1^3)^2 + (b_2 + b_1 b_6)^4 t^2 + (b_4^4 + b_1 + b_6^4 b_1^2) t^4 + t^5 + b_6^4 t^6$ concluímos que $\overline{y} = (b_0^2 + b_2^2 b_1 + b_4^2 b_1^2 + b_6^2 b_1^3)^{\frac{1}{4}}$. Por outro lado o corpo residual de P_1 é $K(\overline{x}) = K\big(b_1^{\frac{1}{4}}\big)$.

Suponhamos primeiramente que $\overline{y} \notin K\big(b_1^{\frac{1}{4}}\big)$. Logo, a extensão $P|P_1$ é inercial e $\mathcal{O}_P = \mathcal{O}_{P_1}[y]$. Em tal caso, o Teorema 2.3.2 e seus comentários procedentes nos garantem que o grau de singularidade de P é $\delta = 2$ pois o grau de singularidade do primo P_1 é zero pelo fato que F_1 é o corpo de funções racionais $K(x)$.

Suponhamos agora que $\overline{y} \in K\big(b_1^{\frac{1}{4}}\big)$, i.e.,

$$(b_0^2 + b_2^2 b_1 + b_4^2 b_1^2 + b_6^2 b_1^3)^{\frac{1}{4}} = \gamma_0 + \gamma_1 b_1^{\frac{1}{4}} + \gamma_2 b_1^{\frac{1}{2}} + \gamma_3 b_1^{\frac{3}{4}}$$

para alguns $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in K$. Ou seja,

$$b_0^2 + b_2^2 b_1 + b_4^2 b_1^2 + b_6^2 b_1^3 = \gamma_0^4 + \gamma_1^4 b_1 + \gamma_2^4 b_1^2 + \gamma_3^4 b_1^3$$

tomando quartas potencias. Agora, como $K\big(b_1^{\frac{1}{4}}\big)$ é isomorfo a $K^4(b_1)$ pelo morfismo de Frobenius $\alpha \mapsto \alpha^4$, então a hipótese $\overline{y} \in K\big(b_1^{\frac{1}{4}}\big)$ é equivalente a dizer que $b_0^2 = \gamma_0^4$, $b_2^2 = \gamma_1^4$, $b_4^2 = \gamma_2^4$ e $b_6^2 = \gamma_3^4$, i.e., $b_0 = \gamma_0^2$, $b_2 = \gamma_1^2$, $b_4 = \gamma_2^2$ e $b_6 = \gamma_3^2$.

Definamos $z := y - (\gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + +\gamma_3 x^3) \in \mathcal{O}_P \subset F$. Claramente $z \notin F_1 = K(x)$, i.e., z é uma variável separante de $F|K$. Além disso, $F = K(x, z)$ e como $x^4 = t + b_1$ então,

$$z^8 = b_1 t^4 + t^5.$$

Como t é parâmetro uniformizante de P_1 então a extensão $P|P_1$ é ramificada e z é um parâmetro uniformizante de P. Assim, $\mathcal{O}_P = \mathcal{O}_{P_1}[z]$. Portanto, pelo Teorema 2.3.2 podemos concluir que o grau de singularidade de P é $\delta = 2$. Isto é, todo corpo de funções $F|K$ tal que $F = K(x, y)$ com $y^2 + b(x) = 0$ onde $b_3 = 0$ e $b_1 \in K \setminus K^2$ tem um único primo singular com grau de singularidade 2, i.e., o corpo de funções tem gênero $g = 2$. O parágrafo anterior é equivalente ao item 3).

Agora vamos continuar com o item 4).

Suponhamos que $b_1 \in K^2 \setminus K^4$. Digamos $b_1 = c^2$ onde $c \in K \setminus K^2$.

Então o primo P_2 é racional porque ele se corresponde com o ideal primo $(c + x^2)$ de $K[x^2]$. Além disso, $t_2 := c + x^2$ é um parâmetro uniformizante de P_2 e também de P_1. Por outro lado,

$$y^4 = (b_0 + b_2 c + b_4 c^2 + b_6 c^3)^2 + (b_2 + c^2 b_6)^2 t_2^2 + (b_4^2 + c + b_6^2 c^2) t_2^4 + t^5 + b_6^2 t_2^6.$$

Nosso objetivo agora e aplicar a Proposição 2.1.3 para calcular o grau de singularidade do primo P. Devemos então determinar se a extensão $P|P_1$ é ramificada ou inercial. Denotamos por $\overline{z}$ à classe residual de z módulo P. Pela serie de y^4 acima concluímos que

$$\overline{y} = (b_0 + b_2 c + b_4 c^2 + b_6 c^3)^{\frac{1}{2}}.$$

Por outro lado, o corpo residual de P_1 é $K(\overline{x}) = K(c^{\frac{1}{2}})$.

Se $\overline{y} \notin K(c^{\frac{1}{2}})$ então a extensão $P|P_1$ é inercial e como $c \notin K^2$ a Proposição 2.1.3 nos permite concluir que o grau de singularidade de P é $\delta = 2$.

Agora, vamos supor que $\overline{y} \in K(c^{\frac{1}{2}})$.

A nossa suposição é equivalente a dizer que existem γ_0 e γ_1 em K tais que

$$(b_0 + b_2 c + b_4 c^2 + b_6 c^3)^{\frac{1}{2}} = \gamma_0 + \gamma_1 c^{\frac{1}{2}}.$$

Ou seja, $b_0 + b_2 c + b_4 c^2 + b_6 c^3 = \gamma_0^2 + \gamma_1^2 c$. Como $c^2 = b_1$ então a igualdade acima e equivalente a

$$b_0 + b_1 b_4 + (b_2 + b_1 b_6)c = \gamma_0^2 + \gamma_1^2 c.$$

Isto é, $b_0 + b_1 b_4 = \gamma_0^2$ e $b_2 + b_1 b_6 = \gamma_1^2$. Em resumo,

$$\overline{y} \in K(c^{\frac{1}{2}}) \iff b_0 + b_1 b_4 \in K^2 \;\text{ e }\; b_2 + b_1 b_6 \in K^2.$$

Definimos $y_1 := y - (\gamma_0 + \gamma_1 x)$. Claramente, y_1 é variável separante de $F|K$ e $F = K(x, y_1)$. Como $x^2 = t + c$ então $y_1^4 = (b_4^2 + c + c^2 b_6^2)t_2^4 + t_2^5 + b_6^2 t_2^6$. Para poder aplicar a Proposição 2.1.3 devemos definir $z := \frac{y_1}{t_2} \in \mathcal{O}_P$. Logo,

$$z^4 = b_4^2 + c + c^2 b_6^2 + t_2 + b_6^2 t_2^2.$$

Afirmamos que $\overline{z} \notin K(c^{\frac{1}{2}})$.

Primeiramente lembramos que $K(c^{\frac{1}{2}})$ é o corpo residual de P_1 e que $c \in K \setminus K^2$. Por outro lado, pela serie de z^4 concluímos que $\overline{z} = (b_4^2 + c + c^2 b_6^2)^{\frac{1}{4}}$. Argumentemos por contradição supondo que $\overline{z} \in K(c^{\frac{1}{2}})$. Então, existem $\gamma, \epsilon \in K$ tais que $(b_4^2 + c + c^2 b_6^2)^{\frac{1}{4}} = \gamma + \epsilon c^{\frac{1}{2}}$. Elevando à quarta potencia concluímos que $b_4^2 + c + c^2 b_6^2 = \gamma^4 + \epsilon^4 c^2$. Desta última igualdade concluímos que $c \in K^2$ que é uma contradição. Logo, $\overline{z} \notin K(c^{\frac{1}{2}})$.

Nossa afirmação implica que $P|P_1$ é inercial e a Proposição 2.1.3 nos diz que o grau de singularidade de P é $\delta = 0$. Isso, nos diz que não pode acontecer que $\overline{y} \in K(c^{\frac{1}{2}})$, i.e., $b_0 + b_1 b_4 \in K^2$ e $b_2 + b_1 b_6 \in K^2$ porque em tal caso o gênero do corpo de funções $F|K$ é zero. Portanto, um corpo de funções $F|K$ tal que $F = K(x, y)$ onde $y^2 + b(x) = 0$ com $b_3 = 0$, $b_1 \in K \setminus K^2$ e, $b_0 + b_1 b_4 \notin K^2$ ou $b_2 + b_1 b_6 \in K^2$ tem gênero 2 (item 4)).

Finalizamos a prova do teorema com o item 5).

Suponhamos que $b_1 \in K^4$, digamos $b_1 = d^4$ com $d \in K$.

Logo, o primo P_1 é racional porque ele se corresponde com o ideal primo $(d + x)$ de $K[x]$. Por outro lado, $t_1 = d + x$ é um parâmetro uniformizante de P_1 e

$$y^2 = b_0 + b_2d^2 + b_4d^4 + b_6d^6 + (b_2 + d^4b_6)t_1^2 + (b_4 + d + b_6d^2)t_1^4 + t_1^5 + b_6t_1^6.$$

Portanto, concluímos que o grau de singularidade de P é 2 se e somente se $b(d) = b\big(b_1^{\frac{1}{4}}\big) \notin K^2$ (ver Proposição 2.1.2). Isto prova o item 5) fechando assim a prova do teorema. $\square$

Note-se que na prova do item 2) do Teorema há uma relação entre ramificação e separabilidade. O Teorema 2.3.1 é um resultado de classificação e de existência.

3 Fibrações por curvas singulares de gênero aritmético 2

O objetivo deste capítulo é classificar birracionalmente as fibrações por curvas singulares de gênero aritmético 2 definidas sobre um corpo de característica $p = 2$. Isto será feito estudando uma fibração que chamamos de *fibração universal*. Esta fibração é universal no sentido que qualquer outra fibração por curvas singulares do mesmo tipo é obtida birracionalmente por meio desta fibração. Finalmente estudamos a estrutura das fibras da fibração universal e apresentamos uma proposta para estudar fibrações a qual motiva o estudo de espaços de moduli de curvas singulares tais que todas as suas singularidades são de tipo cuspidal.

3.1 Teorema de Bertini versus corpos de funções não conservativos

Seja $f : T \to B$ uma aplicação diferenciável entre duas variedades. O Teorema de Sard afirma que o conjunto dos pontos $x \in B$ tais que a fibra $f^{-1}(x)$ não e uma variedade diferenciável é um conjunto de medida de Lebesgue igual a zero em B. Logo, quando a aplicação f é sobrejetora, então a propriedade de suavidade das fibras da aplicação é genérica. Ou seja, quase toda fibra é uma variedade diferenciável e o conjunto contido em B que parametriza todas elas é um conjunto de medida de Lebesgue igual à medida de B.

O resultado equivalente ao Teorema de Sard na geometria algébrica é o Teorema de Bertini. Ele nos diz que se a aplicação f acima é um morfismo de variedades algébricas definidas sobre os números complexos sendo T lisa e tal que $f(T)$ é densa em B então existe um aberto denso $U \subset B$ (na topologia de Zariski) tal que a fibra $f^{-1}(x)$ é não singular para todo $x \in U$ (ver [Sh], p. 139–141). Isto é, a propriedade de não singularidade das fibras do morfismo f é uma propriedade genérica.

No caso quando as variedades estão definidas sobre um corpo de característica $p > 0$ o resultado de Bertini é falso. Isto é, há morfismos $f : T \to B$ tais que para qualquer aberto $U \subset B$ existem pontos $x \in U$ tal que a fibra $f^{-1}(x)$ é uma variedade algébrica singular. Em outras palavras, a fibração induzida pelo morfismo $f : T \to B$ é uma fibração por variedades singulares no sentido que quase todas as fibras possuem pelo menos uma singularidade. Curiosamente, a veracidade de uma possível generalização do Teorema de Bertini em este contexto está intimamente relacionada com os corpos de funções não conservativos no caso em que as fibras são curvas. O objetivo desta secção é descrever rapidamente este fenômeno e usá-lo para construir exemplos.

Seja T um conjunto algébrico definido sobre um corpo k algebricamente fechado. Em outras palavras, T é um espaço topológico (munido com um feixe de aneis) que é localmente o lugar de zeros de polinômios com coeficientes em k (localmente afim). Seja

$$t(T) = \{[V] |\ V \text{ é subconjunto fechado irredutível de } T\}$$

o esquema reduzido correspondente a T definido sobre $\mathrm{Spec}(k)$. De forma mais precisa, seja t o functor natural entre a categoria dos conjuntos algébricos definidos sobre k e os esquemas definidos sobre Spec(k). É claro que se Z percorre os subconjuntos fechados de T, então $t(Z)$ percorre os subconjuntos fechados de $t(T)$. Em particular os pontos de Z são os pontos fechados de $t(Z)$. Agora, como a variedade V e o ponto genérico $[V]$ são densos no esquema $t(V)$, então

$$V \subset Z \iff [V] \in t(Z).$$

Seja X um esquema definido sobre Spec(K) onde K é um corpo (considerado em geral, não algebricamente fechado). Um ponto $P \in X$ é dito *regular* se o seu correspondente anel local de X em P, $\mathcal{O}_{X,P}$ é um anel local regular, i.e., se $\dim_{K_P} \frac{m_{X,P}}{m_{X,P}^2} = \dim \mathcal{O}_{X,P}$ onde $m_{X,P}$ é o (único) ideal maximal de $\mathcal{O}_{X,P}$, $K_P := \mathcal{O}_{X,P}/m_{X,P}$ é o *corpo de residual* de P e no lado direito da igualdade, a dimensão considerada é a dimensão de Krull do anel $\mathcal{O}_{X,P}$. Um ponto $P \in X$ é dito *liso*, se todos os pontos acima de P do produto fibrado de esquemas $X \times_{\mathrm{Spec}(K)} \mathrm{Spec}(\overline{K})$ são regulares, onde aqui $\overline{K}$ denota o fecho algébrico de K. Claramente se K for algebricamente fechado então, ponto liso e ponto regular são a mesma coisa e, em tal caso um ponto não liso é chamado de ponto *singular*.

Seja $f : T \to B$ é um morfismo sobrejetor de variedades (conjuntos algébricos irredutíveis) definidas sobre um corpo algebricamente fechado k de característica positiva p. Denotemos por Z o conjunto dos pontos não lisos de todas as fibras do morfismo $f : T \to B$. É bem conhecido que Z é um fechado de T e que $t(Z)$ é o conjunto de todos os pontos não lisos do correspondente morfismo de esquemas $t(f) : t(T) \to t(B)$, chamado de *locus não liso* (ver [Liu] p. 224). Logo, quase todas as fibras de $f : T \to B$ possuem singularidades se e só se existe uma subvariedade $V \subset T$ tal que cada ponto $P \in V$ é singular na fibra onde ele pertence e, a imagem de V por f é densa em B. Em outras palavras a fibração induzida pelo morfismo $f : T \to B$ fornece um contra-exemplo ao Teorema de Bertini se e só se a imagem de Z por f é densa em B.

Temos então o seguinte resultado.

Teorema 3.1.1. *Sejam $f : T \to B$ um morfismo de variedades algébricas definidas sobre um corpo k algebricamente fechado e V um subconjunto irredutível de T cuja imagem $f(V)$ é densa em B. Então, cada ponto $P \in V$ é não liso da fibra onde ele pertence se e só se o ponto genérico $[V]$ do subesquema integral $t(V)$ é um ponto não liso da fibra genérica do correspondente morfismo de esquemas $t(f) : t(T) \to t(B)$.*

A filosofia que se encontra por trás deste teorema é que $[V]$ é uma singularidade móvel ("moving singular point"). Para ver uma abordagem detalhada deste tipo de resultado o leitor pode consular [St4] pp. 292,293, [St5] p. 505 e [Sl1] Chapter 2.

De acordo com o que já comentamos até aqui, o problema de construção de fibrações por variedades singulares e a sua classificação ficam bem entendidos usando a categoria dos esquemas. Já que o functor t que leva variedades algébricas em esquemas integrais é completamente fiel (ver [Hs], pp. 78, 104 e 105), então vamos considerar todos nossos objetos como sendo esquemas. Em tal caso, dado um morfismo $f : T \to B$ de variedades algébricas definidas sobre um corpo k algebricamente fechado e P um ponto de B, então entenderemos a fibra $f^{-1}(P)$ como sendo a fibra esquemática $T \times_B \mathrm{Spec}\, k_P$ onde k_P é o corpo residual de P.

Agora vamos colocar algumas hipóteses razoáveis no morfismo $f : T \to B$ para que a construção de fibrações por curvas singulares seja não trivial, e permita estabelecer ligações com corpos de funções. Com esta finalidade em mente, vamos colocar as seguintes hipóteses no morfismo:

1. O morfismo f é próprio, dominante, i.e., sobrejetor, e tem fibras de dimensão 1.
2. A variedade T é lisa depois de restringir B a um aberto denso.
3. Existe um aberto $U \subset B$ tal que as fibras esquemáticas $f^{-1}(x)$ são integrais para todo $x \in U$.

Há uma explicação para acrescentar estas hipóteses adicionais. Como se quer um morfismo tal que quase todas as fibras sejam variedades singulares então nada melhor que explorar o caso em que as fibras são curvas (variedades de dimensão 1). Elas deveriam ser completas possivelmente não integrais, i.e, curvas projetivas (o que se satisfaz por exemplo no caso em que f seja próprio), pois do contrario poderíamos tirar de T o conjunto de todos os pontos singulares das fibras, chegando por restrição a um morfismo com fibras lisas. Isto justifica o item 1. Se pede que o *espaço total* T seja liso depois de restringir (possivelmente) a *base* B a um aberto denso (item 2) porque senão seria muito fácil construir as fibrações desejadas, colocando as singularidades das fibras na parte singular do espaço total T quando a imagem por f da parte singular de T é densa em B.

O item 3 é aquele que nos permite ligar esta problemática com corpos de funções. Denotemos por F o corpo de funções de T e por K o corpo de funções de B mergulhado em F via a aplicação f. O fato que as fibras sejam genericamente integrais (item 3) é equivalente a pedir que K seja algebricamente fechado em F e que a extensão $F|K$ é separável (ver [Sh], p. 139 ou [Ms]). Agora, como as fibras do morfismo são curvas, então chegamos naturalmente no corpo de funções em uma variável $F|K$ já que $\dim T = \dim B + 1$ (Teorema da dimensão das fibras). Só queremos fazer notar ao leitor que o corpo F não está sendo considerado aqui como corpo de funções sobre o corpo de base onde as variedades T e B estão definidas, pois K é o corpo de funções de B.

Um morfismo $f : T \to B$ com as hipóteses de acima não satisfaz o Teorema de Bertini, i.e., quase todas as fibras são curvas singulares se e só se a fibra genérica do morfismo que é uma curva regular definida sobre K, não é lisa (cf. Teorema 3.1.1 ou [Sl1] p. 24). Em outras palavras, como a fibra genérica do morfismo f é o modelo regular $R_{F|K}$ do corpo de funções $F|K$ então o morfismo $f : T \to B$ induz uma fibração por curvas singulares se e só se a *fibra geral* $R_{F|K} \otimes_K \overline{K}$ é singular, se e só se o gênero do corpo de funções $F|K$ é maior que o gênero do corpo $F\overline{K}|\overline{K}$, i.e., $F|K$ é não conservativo.

Observação 3.1.2. *O morfismo $f : T \to B$ induz uma fibração por curvas singulares se e só se a fibra genérica dele é uma curva regular que não é lisa, se e só se o corpo de funções $F|K$ é não conservativo onde K e F são os corpos de funções de B e T respectivamente.*

Comentamos adicionalmente que pelo fato de que o morfismo $f : T \to B$ é de tipo finito então ele é genericamente plano (flat, em inglês). Logo, a fibração induzida pelo morfismo poderia ser comparada com as *fibrações da topologia algébrica* no sentido em que quase todas as fibras tem os mesmos invariantes algébricos (o mesmo polinômio de Hilbert) já que na topologia algébrica uma fibração pode ser pensada como um fibrado salvo equivalência homotópica já que as fibras são trivialmente homotopicamente equivalentes (cf. [Hc] p. 405).

Nossa tarefa nas secções seguintes será classificar birracionalmente as fibrações por curvas singulares de gênero aritmético 2.

Um morfismo (respectivamente, uma aplicação racional) entre duas fibrações $f : T \to B$ e $f' : T' \to B$ é um morfismo entre os espaços totais $\varphi : T \to T'$ (respectivamente, um mapa $\varphi : U \to U'$ entre abertos $U \subset T$ e $U' \subset T'$) tal que $f'\varphi = f$. Isto é, os mapas entre as fibrações serão morfismos de B-esquemas. Logo, com este tipo de morfismos as fibrações formam naturalmente uma categoria. Para fixar ideias, dizemos por exemplo, que duas fibrações induzidas pelos morfismos $f : T \to B$ e $f' : T' \to B$ são birracionalmente equivalentes se existe uma aplicação birracional $\varphi : T \to T'$ tal que $f'\varphi = f$. Isto é, duas fibrações são birracionalmente equivalentes se existe um aberto $U \subset T$ onde φ está definida e $U' \subset T'$ tal que $\varphi : U \to U'$ é um isomorfismo de B-esquemas.

3.2 Fibrações por curvas elíticas de gênero aritmético 2 em característica 2

Nesta secção vamos apresentar uma fibração por curvas singulares de gênero aritmético 2 que tem modelo não singular elítico em característica $p = 2$. Esta fibração é dita *universal* no sentido que qualquer outra fibração por curvas elíticas singulares de gênero aritmético 2 é obtida birracionalmente por meio de uma extensão da base de uma subfibração dela.

Seja $S \subset \mathbb{P}^4(k)$ o cone composto pelas retas

$$L_a = \{(a^0 : a^1 : a^2 : a^3 : b)|\ b \in k\} \cup \{V\},\ a \in k \quad \text{e} \quad L_\infty = \{(0 : 0 : 0 : 1 : b)|\ b \in k\} \cup \{V\},$$

onde $V := (0 : 0 : 0 : 0 : 1)$ é o vértice e k é um corpo algebricamente fechado de característica $p = 2$. Isto é,

$$S = \Big\{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : y) \in \mathbb{P}^4(\overline{K})|\ \text{posto} \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} < 2\Big\}.$$

Em $S \setminus \{V\}$ temos duas cartas

$$\begin{array}{ccc} U = S \setminus L_\infty & \to & k^2 \\ (a^0 : a^1 : a^2 : a^3 : b) & \mapsto & (a, b) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} U' = S \setminus L_0 & \to & k^2 \\ (a^3 : a^2 : a^1 : a^0 : b) & \mapsto & (a, b) \end{array}$$

Agora, seja $T \subset S \times \mathbb{A}^5(k)$ a variedade cuja equação na carta $U \times \mathbb{A}^5(k) \to \mathbb{A}^7(k)$ é

$$y^2 + (a_0 + a_2x^2)y + b_0 + b_4x^4 + b_6x^6 = 0$$

onde $(a_0, a_2, b_0, b_4, b_6) \in \mathbb{A}^5(k)$. Na segunda carta a equação de T é

$$y'^2 + (a_2x' + a_0x'^3)y + b_6 + b_4x'^2 + b_0x'^6 = 0$$

onde $x' = \frac{1}{x}$ e $y' = \frac{y}{x^3}$. O morfismo $f : T \subset S \times \mathbb{A}^5(k) \to \mathbb{A}^5(k)$ dado pela segunda projeção induz uma fibração por curvas de gênero aritmético 2 (cf. Lema 1.2.1) chamada de *fibração universal* (por curvas elíticas singulares de gênero 2 em característica 2).

Proposição 3.2.1. *A fibração universal $f : T \to \mathbb{A}^5(k)$ definida acima tem fibra geral de gênero 2 com modelo não singular elítico e a fibra do ponto $(a_0, a_2, b_0, b_4, b_5) \in \mathbb{A}^5(k)$ se degenera da seguinte maneira:*

(1) $b_6^2(a_2^6 b_0 + a_0^2 a_2^4 b_4 + a_0^3 a_2^3 b_6 + a_0^4 b_6^2) \neq 0 \iff$ a fibra tem uma cúspide sendo esta a única singularidade.

(2) $b_6 = 0$ e $a_2^6 b_0 + a_0^2 a_2^4 b_4 \neq 0 \iff$ a fibra tem uma cúspide e um nó sendo estas as únicas singularidades.

(3) $b_6 \neq 0 \neq a_2$ e $a_2^6 b_0 + a_0^2 a_2^4 b_4 + a_0^3 a_2^3 b_6 + a_0^4 b_6^2 = 0 \iff$ a fibra tem uma única singularidade a qual tem grau de singularidade 2 e dois ramos (tacnode, em inglês).

(4) $b_6 = 0 = a_2$ e $a_0^2 \neq 0 \neq b_4 \iff$ a fibra tem uma única singularidade com grau de singularidade 2 e um único ramo (ramphoid cusp, em inglês).

(5) $b_6 = 0$, $(a_0, a_2) \neq (0, 0)$ e $a_0^2 b_4 + a_2^2 b_0 = 0 \iff$ a fibra é união de duas curvas isomorfas a curvas racionais que se interceptam em dois pontos, sendo em um deles com multiplicidade 1 e no outro com multiplicidade 2 (respectivamente em um único ponto com multiplicidade 3) se $a_2 \neq 0$ (respectivamente $a_2 = 0$). .

Além disso, em qualquer outro caso diferente de (1), (2), (3), (4) e (5) a fibra é não reduzida.

A expressão do item (1) $b_6^2(a_2^6 b_0 + a_0^2 a_2^4 b_4 + a_0^3 a_2^3 b_6 + a_0^4 b_6^2)$ corresponde ao quadrado do discriminante Δ da fibra (cf. prova do Teorema 1.4.1).

Demonstração. O morfismo $f : T \to \mathbb{A}^5(k)$ é próprio pela Teoria de Eliminação. Além disso, o espaço total T é liso já que em cada carta sua equação é mônica e linear em alguma variável (e.g., na primeira carta a equação é linear em b_0).

(1) Na primeira carta do cone $S \subset \mathbb{P}^4(k)$, a fibra tem equação

$$g(x, y) = y^2 + (a_0 + a_2 x^2)y + b_0 + b_4 x^4 + b_6 x^6 = 0.$$

Para determinar as singularidades da fibra aplicamos o critério jacobiano. Assim, temos que $\frac{\partial g}{\partial x} = g_x = 0$ e $g_y = a_0 + a_2 x^2$.

Vamos supor que $a_2 \neq 0$.

Logo, o ponto

$$P := \left(\left(\frac{a_0}{a_2}\right)^{\frac{1}{2}}, \left(b_0 + b_4\left(\frac{a_0}{a_2}\right)^2 + b_6\left(\frac{a_0}{a_2}\right)^3\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

é uma singularidade da fibra. Vamos ver que P é uma cúspide. Trasladando P na origem, a equação da fibra fica assim:

$$y^2 + a_2 x^2 y + \left(\left(\frac{a_0}{a_2}\right)^2 b_6 + a_2\left(b_0 + b_4\left(\frac{a_0}{a_2}\right)^2 + b_6\left(\frac{a_0}{a_2}\right)^3\right)^{\frac{1}{2}}\right)x^2 + (b_4 + \frac{a_0}{a_2} b_6)x^4 + b_6 x^6 = 0.$$

Explodindo o ponto e analisando na carta de interesse ($y = x\breve{y}$) concluímos que a equação do blow-up da fibra em P é

$$\breve{y}^2 + a_2 x\breve{y} + \left(\Big(\frac{a_0}{a_2}\Big)^2 b_6 + a_2\Big(b_0 + b_4\big(\frac{a_0}{a_2}\big)^2 + b_6\big(\frac{a_0}{a_2}\big)^3\Big)^{\frac{1}{2}}\right) + (b_4 + \frac{a_0}{a_2}b_6)x^2 + b_6 x^4 = 0.$$

O ponto acima de P é

$$\breve{P} = \left(0, \left(\Big(\frac{a_0}{a_2}\Big)^2 b_6 + a_2\Big(b_0 + b_4\big(\frac{a_0}{a_2}\big)^2 + b_6\big(\frac{a_0}{a_2}\big)^3\Big)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Levando o ponto $\breve{P}$ na origem a equação anterior se transforma assim:

$$\breve{y}^2 + a_2 x\breve{y} + a_2\left(\Big(\frac{a_0}{a_2}\Big)^2 b_6 + a_2\Big(b_0 + b_4\big(\frac{a_0}{a_2}\big)^2 + b_6\big(\frac{a_0}{a_2}\big)^3\Big)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} x + \big(b_4 + \frac{a_0}{a_2}b_6\big)x^2 + b_6 x^4 = 0.$$

Como o coeficiente de x é $\frac{\Delta^{\frac{1}{2}}}{a_2}$ o qual é não nulo por hipótese, então P é uma singularidade da fibra com grau e singularidade 1 e um único ramo, i.e., o ponto P é uma cúspide da fibra.

Na segunda carta do cone a fibra tem equação

$$h(x', y') = y'^2 + (a_2 x' + a_0 x'^3)y' + b_6 + b_4 x'^2 + b_0 x'^6 = 0$$

onde $x' = \frac{1}{x}$ e $y' = \frac{y}{x^3}$. Nesta carta só estamos interessados em saber se no infinito ($x' = 0$) há singularidades. Isto é, desejamos saber se o ponto $Q = (0, b_6^{\frac{1}{2}})$ é singular. Porém, como $h_{x'} = (a_2 + a_0 x'^2)y'$ e $h_{y'} = a_2 x' + a_0 x'^3$ então Q é liso pois $h_{x'}(Q) = a_2 b_6 \neq 0$ pelo fato que estamos supondo que $a_2 \neq 0$ e, por hipótese (1) temos que $b_6 \neq 0$. Logo, neste caso a fibra não tem singularidades. Isto é, o ponto cuspidal P é a única singularidade da fibra.

Agora suponhamos que $a_2 = 0$.

Logo, $b_6^2(a_0^4 b_6^2) \neq 0$ pela hipótese. Ou seja, $a_0 \neq 0 \neq b_6$. Então o ponto P é liso pois $g_y = a_0 \neq 0$. Porém, o ponto Q da segunda carta acima é singular pelo critério jacobiano. Levando Q na origem a equação da fibra fica assim:

$$y'^2 + a_0 x'^3 y' + b_4 x'^2 + a_0 b_6^{\frac{1}{2}} x'^3 + b_0 x'^6 = 0.$$

Explodindo e analisando na carta de interesse $y' = x'\hat{y}$, a equação da explosão da fibra na singularidade é

$$\hat{y}^2 + a_0 x'^2 \hat{y} + b_4 + a_0 b_6^{\frac{1}{2}} x' + b_0 x'^4 = 0.$$

O ponto $\hat{Q} = (0, b_4^{\frac{1}{2}})$ é o único ponto acima da singularidade. Trasladando $\hat{Q}$ na origem a curva explodida fica com equação

$$\hat{y}^2 + a_0 x'^2 \hat{y} + a_0 b_6^{\frac{1}{2}} x' + a_0 b_4^{\frac{1}{2}} x'^2 + b_0 x'^4 = 0$$

e como $a_0 b_6^{\frac{1}{2}} \neq 0$ concluímos que a singularidade Q é cuspidal.

(2) Por hipótese temos que $b_6 = 0$ e $a_2 \neq 0 \neq a_0^2 b_4 + a_2^2 b_0$. Logo, a equação da explosão em P da fibra na primeira carta é

$$\breve{y}^2 + a_2 x \breve{y} + a_2 \left(\left(a_2 \left(b_0 + b_4 \left(\frac{a_0}{a_2}\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right) x + b_4 x^2 = 0.$$

Assim, concluímos que P continua sendo cuspidal.

Na segunda carta temos a equação

$$y'^2 + (a_2 x' + a_0 x'^3) y' + b_4 x'^2 + b_0 x'^6 = 0$$

com $Q = (0,0)$ como nossa unica singularidade de interesse (singularidade no infinito). Agora, como $a_2 \neq 0$ então Q é um nó.

(3) Analogamente como em (1), sabemos que P é a única singularidade da fibra. A equação da fibra após explodir P e levar o ponto $\breve{P}$ na origem é

$$\breve{y}^2 + a_2 x \breve{y} + \left(b_4 + \left(\frac{a_0}{a_2}\right) b_6 \right) x^2 + b_6 x^4 = 0.$$

Como $a_2 \neq 0$ por hipótese, então P é uma singularidade com grau de singularidade 2 e dois ramos.

(4) Exatamente igual que em (1) não há singularidades na primeira carta da fibra. Na segunda carta sabemos que $Q = (0,0)$ é a única singularidade e a equação da fibra é

$$y'^2 + a_0 x'^3 y' + b_4 x'^2 + b_0 x'^6 = 0$$

Explodindo em Q o blow-up fica com equação

$$\hat{y}^2 + a_0 x'^2 \hat{y} + b_4 + b_0 x'^4 = 0.$$

Estamos só analisando na carta $y' = x' \hat{y}$ pois é a única que nos interessa. O ponto acima de Q na fibra explodida é $\hat{Q} = (0, b_4^{\frac{1}{2}})$. Levando ele na origem a equação anterior se transforma em

$$\hat{y}^2 + a_0 x'^2 \hat{y} + a_0 b_4^{\frac{1}{2}} x'^2 + b_0 x'^4 = 0.$$

Explodindo $\hat{Q}$ e analisando na carta de interesse ($\hat{y} = x' \widetilde{y}$) ficamos com equação

$$\widetilde{y}^2 + a_0 x' \widetilde{y} + a_0 b_4^{\frac{1}{2}} + b_0 x'^2 = 0.$$

O ponto acima de $\hat{Q}$ é $\widetilde{Q} = (0, a_0^{\frac{1}{2}} b_4^{\frac{1}{4}})$. Levando ele na origem a equação fica

$$\widetilde{y}^2 + a_0 x' \widetilde{y} + a_0^{\frac{1}{2}} b_4^{\frac{1}{4}} x' + b_0 x'^2 = 0.$$

Como $a_0 \neq 0 \neq b_4$, então Q é uma singularidade com grau de singularidade 2 e um único ramo.

Os casos que ficam faltando são os seguintes:

5') $b_6 = 0 \neq a_2$ e $a_0^2 b_4 + a_2^2 b_0 = 0$

6') $b_6 = 0 = a_2$ e $a_0 \neq 0 = b_4$.

7') $a_0 = 0 = a_2$

5') Como em (2), o ponto Q da segunda carta continua sendo um nó.

Na primeira carta o ponto P continua sendo singular e a equação da fibra é

$$y^2 + a_2 x^2 y + b_4 x^4 = 0.$$

Explodindo em P e analisando na carta $y = x\breve{y}$ a equação do blow-up da fibra é

$$\breve{y}^2 + a_2 x \breve{y} + b_4 x^2 = 0.$$

Logo, P é um ponto com grau de singularidade 2 com dois ramos pois $a_2 \neq 0$. Portanto, a fibra é redutível e, além disso, tem componentes

$$y + c\big(\frac{a_0}{a_2} + x^2\big) = 0 \qquad \text{e} \qquad y + a_0\big(\frac{c}{a_2} + 1\big) + (c + a_2)x^2 = 0$$

onde $c^2 + a_2 c = b_4$.

6') Usando (4) se observa que o ponto Q é a única singularidade da fibra. De forma análoga a 5') concluímos que o ponto Q tem multiplicidade 3 e a fibra é redutível e as suas componentes são

$$y + c = 0 \qquad \text{e} \qquad y + c + a_0 = 0$$

onde $c^2 + a_0 c = b_0$.

O item (5) é então a união dos casos 5') e 6') e o comentário adicional é equivalente ao caso 7).

7) É claro que $a_0 = 0 = a_2 \iff$ a fibra é não reduzida com equação

$$y + b_0^{\frac{1}{2}} + b_4^{\frac{1}{2}} x^2 + b_6^{\frac{1}{2}} x^6 = 0.$$

□

Classificar birracionalmente fibrações por curvas singulares é equivalente a classificar curvas regulares não lisas, i.e., corpos de funções não conservativos (cf. Teorema 3.1.1 ou Observação 3.1.2). O seguinte teorema é então uma consequência do Teorema 2.3.1.

Teorema 3.2.2. *Seja $f : T \to \mathbb{A}^5(k)$ a fibração universal por curvas elíticas singulares de gênero aritmético 2 em característica $p = 2$. Então qualquer outra fibração por curvas singulares de gênero aritmético 2 e modelo não singular elítico é birracionalmente equivalente a uma extensão da base de uma subfibração da fibração universal.*

Demonstração. Seja $f' : T' \to B'$ uma fibração por curvas elíticas singulares de gênero aritmético 2 definidas sobre um corpo k de característica $p = 2$. Logo, sendo K' e F' os corpo de funções de B' e T' concluímos que existem $x, y \in F'$ tais que

$$y^2 + (a_0 + a_2x^2)y + b_0 + b_4x^4 + b_6x^6 = 0$$

onde $a_0, a_2, b_0, b_4, b_6 \in K'$ e $F' = K'(x, y)$ (Teorema 2.3.1). Por outro lado sabemos que $k(a_0, a_2, b_0, b_4, b_6) \subseteq K'$ é isomorfo a um corpo de funções de um subesquema fechado integral B contido em $\mathbb{A}^5(k)$ cuja álgebra afim é $k[a_0, a_2, b_0, b_4, b_6]$. Denotemos dito corpo de funções por K, ou seja, $K = k(B)$. Consideremos a subfibração $f^{-1}(B) \subset T \to B$ da fibração universal. Já que $k(a_0, a_2, b_0, b_4, b_6) \subseteq K'$ então existe um aberto $U' \subset B'$ e um morfismo $U' \to B$ devido à identificação de $k(a_0, a_2, b_0, b_4, b_6)$ com $K = k(B)$. Analogamente, existe um aberto $V' \subset T'$ e um morfismo $V' \to f^{-1}(B)$ que faz comutar o diagrama seguinte

$$\begin{array}{ccc} V' \cap f'^{-1}(U') \subset T' & \to & U' \subset B' \\ \downarrow & & \downarrow \\ f^{-1}(B) & \to & B \end{array} .$$

Agora, como o corpo de funções de $f^{-1}(B)$ é $F := K(x, y) \subseteq F'$ então o corpo de funções do produto fibrado $f^{-1}(B) \times_B B'$ é $FK' := F \otimes_K K' = F'$. Logo, pela propriedade universal do produto fibrado existe uma aplicação racional e dominante de $T' \overset{\varphi}{\to} f^{-1}(B) \times_B B'$ que faz comutar o diagrama

$$\begin{array}{ccc} T' & \to & f^{-1}(B) \times_B B' \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & B' & \end{array} .$$

Como a dimensão de T' e $f^{-1}(B) \times_B B'$ são as mesmas, então pelo Teorema da dimensão das fibras (cf. [Mf], Theorem 3, p. 49), existe um aberto (afim) $Y \subset f^{-1}(B) \times_B B'$ tal que a aplicação racional φ restrita a $X := \varphi^{-1}(Y)$ é uma bijeção. Esta aplicação é birracional porque os corpos de funções das variedades são os mesmos. Isto é, temos um isomorfismo $X \subset T' \overset{\varphi}{\to} Y \subset f^{-1}(B) \times_B B'$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & B' & \end{array}$$

é comutativo, i.e., as fibrações $f' : T' \to B'$ e $f^{-1}(B) \times_B B' \to B'$ são birracionalmente equivalentes. □

3.3 Fibrações por curvas racionais de gênero aritmético 2 em característica 2

O objetivo desta secção é apresentar uma fibração por curvas singulares de gênero aritmético 2 que tem modelo não singular racional em característica $p = 2$. A fibração é chamada de *universal* pelo fato que qualquer outra fibração por curvas racionais singulares de gênero aritmético 2 é obtida birracionalmente por meio de uma extensão da base de uma subfibração dela.

Consideramos de novo como na Secção 3.2 o cone $S \subset \mathbb{P}^4(k)$ composto pelas retas

$$L_a = \{(a^0 : a^1 : a^2 : a^3 : b)|\ b \in k\} \cup \{V\},\ a \in k \ \text{ e } \ L_\infty = \{(0:0:0:1:b)|\ b \in k\} \cup \{V\},$$

onde $V := (0:0:0:0:1)$ é o vértice e k é um corpo algebricamente fechado de característica $p = 2$.

Em $S \setminus \{V\}$ temos duas cartas

$$\begin{array}{ccc} U = S \setminus L_\infty & \to & k^2 \\ (a^0 : a^1 : a^2 : a^3 : b) & \mapsto & (a,b) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} U' = S \setminus L_0 & \to & k^2 \\ (a^3 : a^2 : a^1 : a^0 : b) & \mapsto & (a,b) \end{array}$$

Agora seja $T \subset S \times \mathbb{A}^6(k)$ a variedade cuja equação na carta $U \times \mathbb{A}^6(k) \to \mathbb{A}^8(k)$ é

$$y^2 + b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + x^5 + b_6 x^6 = 0$$

onde $(b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_6) \in \mathbb{A}^6(k)$. Na segunda carta a equação de T é

$$y'^2 + b_6 + x' + b_4 x'^2 + b_3 x'^3 + b_2 x'^4 + b_1 x'^5 + b_0 x'^6 = 0$$

onde $x' = \frac{1}{x}$ e $y' = \frac{y}{x^3}$. O morfismo $f : T \subset S \times \mathbb{A}^6(k) \to \mathbb{A}^6(k)$ dado pela segunda projeção induz uma fibração por curvas de gênero aritmético 2 (cf. Lema 1.2.1) chamada de *fibração universal* (por curvas racionais singulares de gênero 2 em característica 2).

Proposição 3.3.1. *A fibração universal $f : T \to \mathbb{A}^6(k)$ definida acima tem fibra geral de gênero 2 com modelo não singular racional e a fibra do ponto $(b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_6) \in \mathbb{A}^6(k)$ se degenera assim:*

(1) $b_3 \neq 0 \iff$ *a fibra tem duas cúspides como únicas singularidades.*

(2) $b_3 = 0 \iff$ *a fibra tem uma única singularidade com grau de singularidade 2 e um único ramo (ramphoid cusp, em inglês).*

Demonstração. Analogamente como na prova da Proposição 3.3.1 é fácil ver que o morfismo $f : T \to \mathbb{A}^6(k)$ é próprio pela Teoria de Eliminação e que o espaço total T é liso pelo critério jacobiano.

Prosseguimos na análise das singularidades da fibra. Vamos analisar o que acontece na segunda carta da fibra do ponto $(b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_6) \in \mathbb{A}^6(k)$. Nesta carta a fibra tem equação

$$h(x', y') = y'^2 + b_6 + x' + b_4 x'^2 + b_3 x'^3 + b_2 x'^4 + b_1 x'^5 + b_0 x'^6 = 0.$$

Logo, não há singularidades no infinito ($x' = 0$) porque pelo critério jacobiano

$$h_{x'} = 1 + b_3 x'^2 + b_1 x'^4 = 1.$$

Então, é suficiente analisar as singularidades na primeira carta do cone. Nesta carta a equação da fibra é

$$g(x,y) := y^2 + b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + x^5 + b_6x^6 = 0$$

e a derivada respeito de x é $g_x = b_1 + b_3x^2 + x^4$. Seja c_i uma das duas possíveis raízes do polinômio $b_1 + b_3x^2 + x^4$. Logo, o ponto $P_i = \left(c_i, (b_0 + b_2c_i^2 + b_4c_i^4 + b_6c_i^6)^{\frac{1}{2}}\right)$ é singular na fibra para $i = 1,\ 2$. Levando este ponto na origem a fibra fica com equação

$$y^2 + (b_2 + b_3c_i + b_6c_i^4)x^2 + b_3x^3 + (b_4 + b_5c_i + b_6c_i^2)x^4 + x^5 + b_6x^6 = 0.$$

Explodindo a fibra em P_i e analisando a fibra explodida na carta $y = x\hat{y}$ chegamos na equação

$$\hat{y}^2 + b_2 + b_3c_i + b_6c_i^4 + b_3x + (b_4 + b_5c_i + b_6c_i^2)x^2 + x^3 + b_6x^4 = 0$$

O divisor excepcional é o ponto $\hat{P}_i = \left(0, (b_2 + b_3c_i + b_6c_i^4)^{\frac{1}{2}}\right)$. Levando o ponto $\hat{P}_i$ na origem a equação do blow-up da fibra se transforma em

$$\hat{y}^2 + b_3x + (b_4 + b_5c_i + b_6c_i^2)x^2 + x^3 + b_6x^4 = 0.$$

Portanto, $b_3 \neq 0 \iff$ a fibra tem só duas singularidades correspondentes às duas raízes do polinômio $g_x = b_1 + b_3x^2 + x^4$ as quais são cúspides. Isto prova (1). Para o item (2) observamos que se $b_3 = 0$ então a fibra tem uma única singularidade. Se denotamos por c a $b_1^{\frac{1}{4}}$ então a equação da explosão da fibra na sua singularidade depois de trasladar para a origem o divisor excepcional é

$$\hat{y}^2 + (b_4 + b_5c + b_6c^2)x^2 + x^3 + b_6x^4 = 0.$$

Explodindo de novo (o blow-up no divisor excepcional) e trasladando o ponto acima do divisor excepcional na origem ficamos com equação

$$\widetilde{y}^2 + x + b_6x^2 = 0.$$

De onde concluímos que a fibra tem uma única singularidade com grau de singularidade 2 a qual tem um único ramo. □

Teorema 3.3.2. *Seja $f : T \to \mathbb{A}^6(k)$ a fibração universal por curvas racionais singulares de gênero 2 em característica $p = 2$. Então qualquer outra fibração por curvas singulares de gênero aritmético 2 e modelo não singular racional é birracionalmente equivalente a uma extensão da base de uma subfibração da fibração universal.*

Demonstração. Seja $f' : T' \to B'$ uma fibração por curvas singulares de gênero aritmético 2 definida sobre um corpo k de característica $p = 2$. Sejam $K' = k(B')$ e $F' = k(T')$ os corpos de funções de B' e T' respectivamente. Pelos Teoremas 1.4.1 e 2.3.1, existem $x, y \in F'$ e $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_6 \in K'$ tais que

$$y^2 + b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + x^5 + b_6x^6 = 0$$

e $F' = K'(x,y)$. O corpo de funções $k(b_0,b_1,b_2,b_3,b_4,b_6) \subseteq K'$ pode ser identificado com o corpo de funções de um subesquema (afim) $B \subseteq \mathbb{A}^6(k)$. Logo, temos uma aplicação racional $B' \to B$. Agora, consideremos a subfibração $f^{-1}(B) \to B$ da fibração universal $f : T \to \mathbb{A}^6(k)$ e o produto fibrado $f^{-1}(B) \times_B B'$. Em nosso caso temos só um diagrama de aplicações racionais

$$\begin{array}{ccc} f'^{-1}(B) \times_B B' & \to & B' \\ \downarrow & & \downarrow \\ f^{-1}(B) & \to & B \end{array}$$

pelas propriedades do produto fibrado. Claramente $F := k(f^{-1}(B)) = K(x,y)$ é isomorfo a $k(b_0,b_1,b_2,b_3,b_4,b_6)(x,y) \subseteq F'$ e

$$k(f'^{-1}(B) \times_B B') \cong F \otimes_K K' \cong F' = k(T').$$

Além disso, como os corpos de funções $FK'|K'$ e $F'|K'$ são isomorfos então existe uma aplicação birracional $T' \to f'^{-1}(B) \times_B B'$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} T' & \to & f^{-1}(B) \times_B B' \\ & \overset{f'}{\searrow} \quad \swarrow & \\ & B' & \end{array}$$

é comutativo. Isto é, as fibrações $f' : T' \to B'$ e $f' : f^{-1}(B) \times_B B' \to B'$ são birracionalmente equivalentes. $\square$

3.4 Abordagens e problemas futuros

O objetivo desta Secção é descrever uma abordagem intuitiva para classificação de fibrações usando moduli e mencionar alguns problemas que poderiam ser resolvidos em continuação com este trabalho.

Comecemos pela abordagem. Suponhamos que existe um morfismo $\varphi : T \to B$ tal que as fibras são genericamente singulares de gênero aritmético $g = 2$ e gênero geométrico $\overline{g} = 1$, onde T e B são variedades lisas definidas sobre o corpo k algebricamente fechado de característica $p = 2$. Vamos denotar de novo por F o corpo de funções de T e por K o corpo de funções $k(B)$. Seja b o ponto genérico de B. Logo, a sua fibra genérica T_b deve ser uma curva regular definida sobre K de gênero 2 que não é lisa e os coeficientes da sua forma normal $y^2 + a(x)y + b(x) = 0$ satisfazem algumas *relações algébricas* (ver por exemplo o Teorema 1.4.1). Além disso, a *fibra geral* $T_b \otimes_K \overline{K}$ é uma curva (induzida no cone de $\mathbb{P}^4(\overline{K})$ pelo corpo $F|K$) que tem uma cúspide como única singularidade. Agora considere o espaço de moduli de curvas do mesmo tipo da fibra geral, tal que seus coeficientes ainda satisfazem as mesmas *relações algébricas* da fibra genérica T_b. Isto é, considere-se o espaço de moduli de curvas de gênero aritmético 2 pontoadas em uma cúspide definidas sobre $\overline{K}$ tal que as classes de isomorfismo ainda satisfazem as *relações algébricas* da fibra genérica T_b. Observe-se que este espaço está definido sobre $\overline{K}$ o qual contem naturalmente a k pelo fato que $k \subset K = k(B)$

pois B é um esquema sobre k. Logo, podemos considerar os pontos k-racionais deste espaço de moduli, o qual é naturalmente um esquema $\mathfrak{M}$ sobre k (possivelmente não integral). Agora, seja B uma componente irredutível deste esquema $\mathfrak{M}$. Para o caso que estamos tratando, estratificações destes espaços (de moduli) foram calculados em [St1] e eles estão mergulhados em espaços projetivos com peso. Agora, seja $T = \{(x, [C]) | [C] \in B, \quad x \in C\}$. Logo, o morfismo $\begin{array}{ccc} T: & \stackrel{\varphi}{\to} & B \\ (x,[C]) & \mapsto & [C] \end{array}$ satisfaz que a fibra $\varphi^{-1}([C]) = C \times \{[C]\}$ é singular.

O problema deste roteiro é que a variedade T é possivelmente singular. Além disso, pensando em um contexto geral, o cálculo do espaço de moduli de curvas com singularidades é um problema difícil. Além disso, se o espaço $\mathfrak{M}$ dos pontos k-racionais do espaço de moduli considerado, for um esquema de dimensão zero, então os morfismos φ obtidos seriam totalmente triviais.

Vamos tratar com este método um de nossos casos de interesse. Vamos calcular o espaço de moduli de curvas de gênero aritmético $g = 2$ com uma cúspide como única singularidade e seu modelo não singular (que é elítico) tenha invariante $j \neq 0$ e que ainda satisfaça as *relações algébricas* da condição necessária na fibra genérica como se encontram no Teorema 1.4.1.

Estas curvas se realizam no cone $S \subset \mathbb{P}^4(\overline{K})$ que tem vértice $V = (0:0:0:0:1)$ e está composto pela união das retas

$$L_a = \{(a^0 : a^1 : a^2 : a^3 : b) |\, a, b \in \overline{K}\} \cup \{V\},\ a \in \overline{K} \ \text{ e } \ L_\infty = \{(0:0:0:1:b) |\, b \in \overline{K}\} \cup \{V\}.$$

O cone menos o vértice tem duas cartas

$$\begin{array}{ccc} U = S - L_\infty & \to & \overline{K}^2 \\ (a^0 : a^1 : a^2 : a^3 : b) & \mapsto & (a,b) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} U' = S - L_0 & \to & \overline{K}^2 \\ (a^3 : a^2 : a^1 : a^0 : b) & \mapsto & (a,b) \end{array}$$

De acordo com o Teorema 1.4.1 concluímos que na primeira carta, uma tal curva singular tem equação

$$y^2 + (a_0 + x^2)y + b_0 + b_4x^4 + b_6x^6 = 0$$

onde $a_0, b_0, b_4, b_6 \in k$ e $b_6^2(b_0 + a_0^2 b_4 + a_0^3 b_6 + a_0^4 b_6^2) \neq 0$ (relação algébrica).

Agora, as transformações que respeitam esta forma normal e/ou que determinam as classes de isomorfismos destas curvas são

$$(x, y) \mapsto (\alpha x + \gamma, \alpha^2 y + \gamma_0 + \gamma_2 x^2)$$

onde $\alpha \in k^*$ e $\gamma, \gamma_i \in K$ e $\gamma_0 = b_6\gamma^4 + \frac{a(\gamma)}{\alpha^4}\gamma_2$, onde $a(x) := a_0 + x^2$. Os coeficientes de $a(x)$ e $b(x) := b_0 + b_4x^4 + b_6x^6$ mudam da forma seguinte:

$$\begin{array}{lll} a_0 & \mapsto & \frac{a_0}{\alpha^2} + \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \\ b_6 & \mapsto & b_6\alpha^2 \\ b_4 & \mapsto & b_4 + b_6\gamma^2 + \frac{\gamma_2}{\alpha^2} + (\frac{\gamma_2}{\alpha^2})^2 \\ b_0 & \mapsto & \frac{b_0}{\alpha^4} + \frac{\gamma_0^2 + a(\gamma)\gamma_0 + b_6\gamma^6 + b_4\gamma^4}{\alpha^4} \end{array}$$

De onde podemos normalizar $b_6 = 1$, $a_0 = 0 = b_4$. Ficamos então com equação,

$$y^2 + x^2y + b_0 + x^6 = 0.$$

onde $b_0 \neq 0$ (relação algébrica entre os coeficientes).

As transformações que respeitam as normalizações são $(x, y) \mapsto (x, y + \gamma_2 x^2)$ onde $\gamma_2 = 0$ ou $\gamma_2 = 1$. Logo, $b_0 \in \mathbb{A}^1(\overline{K}) \setminus \{0\}$ é um sistema completo de invariantes desta classe de curvas. Vamos provar que a condição de que a curva tenha uma única singularidade a qual é de tipo cuspidal se traduz na condição $b_0 \neq 0$. Sabemos que a única singularidade da curva é o ponto $(0, b_0^{\frac{1}{2}})$. Transladando a singularidade na origem ficamos com equação

$$y^2 + x^2y + b_0x^2 + x^6 = 0.$$

Explodindo e analisando na carta que nos interessa com $y =: x\widetilde{y}$ ficamos com equação

$$\widetilde{y}^2 + x\widetilde{y} + b_0^{\frac{1}{2}} + x^4 = 0$$

O ponto da curva explodida acima da singularidade é $(0, b_0^{\frac{1}{4}})$. Colocando ele na origem ficamos com equação

$$\widetilde{y}^2 + x\widetilde{y} + b_0^{\frac{1}{4}}x + x^4 = 0.$$

Então, concluímos que $b_0 \neq 0$ pelo fato que este ponto deve ser liso ou porque a singularidade da curva deve ter um único ramo.

Em conclusão, nossa curva singular inicial tem equação

$$y^2 + x^2y + b_0 + x^6 = 0.$$

onde $b_0 \neq 0$.

Outra forma de chegar na forma normal de acima é fazendo diretamente as normalizações usando os resultados de [St1], levando em conta que o modelo não singular da curva deve ser élítico com invariante $j \neq 0$.

Assim o esquema dos pontos k-racionais $\mathfrak{M}$ do espaço de moduli de curvas de gênero aritmético $g = 2$ pontoadas em uma cúspide como única singularidade é integral e igual a $\mathbb{A}^1(k) \setminus \{0\}$.

Agora consideramos a variedade $T \subset S \times B \subset \mathbb{P}^4(k) \times \mathbb{A}^1(k)$ onde $B = \mathbb{A}^1(k) \setminus \{0\}$ e a equação de T na primeira carta do cone S é dada por

$$y^2 + x^2y + b_0 + x^6 = 0$$

com $b_0 \in B$. Na segunda carta $U' \times B \to \mathbb{A}^2(k) \times B$ a equação de T é $y'^2 + x'y' + 1 + b_0x'^6 = 0$. onde $x' = \frac{1}{x}$ e $y' = \frac{y}{x^3}$.

Consideremos agora o morfismo $\varphi : T \subset S \times B \to B$ definido pela projeção natural. Afirmamos que este morfismo define uma fibração por curvas elíticas singulares de gênero aritmético $g = 2$, i.e., o morfismo não satisfaz o Teorema de Bertini e tem as três propriedades pedidas na Secção 3.1, p. 53. É claro que o morfismo é própio pela teoria de eliminação. As fibras do morfismo são curvas projetivas pois elas se realizam no cone S e não passam pelo vértice (ver [St1], p. 97). Por outro lado, pelo critério jacobiano aplicado em cada uma das cartas de T concluímos que ela é lisa. As fibras são integrais por construção.

Portanto, como $F = k(x, y, b_0)$ e $K = k(b_0)$, o corpo de funções $F|K = k(T)|k(B)$ é um corpo não conservativo de gênero $g = 2$ absolutamente elítico de acordo com a Observação 3.1.2.

Observe-se que é possível definir o morfismo modificando o B por todo o espaço afim $\mathbb{A}^1(k)$ e em consequência acrescentado mais uma fibra a T. Em tal caso a fibra acrescentada $\varphi^{-1}(0)$ tem uma singularidade com dois ramos que se interceptam com multiplicidade 2. Em caso que se compactificasse a variedade B, então o espaço T vai ser singular o que complicaria um pouco mais as coisas.

Acrescentamos dois comentários antes de finalizar. O primeiro é que com esta abordagem construímos um exemplo de corpos de funções não conservativo (assumindo que temos conhecimento da Observação 3.1.2). O segundo comentário é que nosso método intuitivo apresenta problemas para construir fibrações tais que todas as fibras tem invariante $j = 0$, porque neste caso se pode provar que há só uma única classe de isomorfismo.

Há três problemas que consideramos deveriam ser analisados posteriormente como continuação desta tese. Suponhamos que o espaço total não tem singularidades. Classificar as fibras que contem singularidades de tipo diferente das singularidades da fibra geral, ditas de fibras más, é um problema clássico. O segundo problema é a procura de modelos minimais de fibrações cuja base é uma curva algébrica. Ambos os problemas foram considerados por Kodaira e Néron no caso de fibrações elíticas. O último problema é obter uma classificação "boa" de todas as subfibrações da fibração universal. Estes três problemas ficaram fora de nossa abragência neste trabalho.

Referências

[At] E. Artin, *Algebraic Numbers and Algebraic Functions.* Gordon and Breach, New York (1967).

[BM] E. Bombieri, D. Mumford, *Enriques classification of surfaces in characteristic p. III* Invent. Math. 35 (1976) 197–232.

[Bg] H. Borges Neto, *Mudança de gênero e classificação de corpos de gênero 2.* Tese de Doutorado, IMPA, Rio de Janeiro (1979).

[BS] H. Bedoya, K.-O. Stöhr, *An algorithm to calculate discrete invariants of singular primes in function fields.* J. Number Theory 27 (1987) 310–323.

[Ft] W. Fulton, *Algebraic Curves.* W.A. Benjamin, New York (2008).

[Hs] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry.* Springer, New York (1977).

[Hc] A. Hatcher, *Algebraic Topology.* Cambridge University Press (2002).

[Km] J. Kimura, *On the conservativity of algebraic function fields.* Proc. Jap. Acad. 45 (1969) 595-597.

[Liu] Q. Liu, *Algebraic geometry and arithmetic curves.* Oxford University Press, New York (2006).

[Mf] D. Mumford, *The Red Book of Varieties and Schemes.* Expanded ed., Springer, New York (1991).

[Ms] T. Matsusaka, *The Theorem of Bertini on linear systems in modular fields.* Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A. Math. 26 (1951) 51–62.

[Qn] C. S. Queen, *Non-conservative function field of genus one. I* Arch. Math. 22 (1971) 612–623.

[Rs] M. Rosenlicht, *Equivalence relations on algebraic curves.* Ann. of Math (2) 56 (1952) 169–191.

[RS] R. Rosa, K.-O. Stöhr, *Trigonal Gorenstein curves.* J. Pure Appl. Algebra, 174 (2002) 187–205.

[Sh] I. R. Shafarevich, *Basic algebraic geometry 1.* Springer, Berlin (1994).

[Sl1] R. Salomão, *On Moving singularities in fibrations by algebraic curves.* Tese de Doutorado, IMPA, Rio de Janeiro (2009).

[Sl2] R. Salomão, *Fibrations by nonsmooth genus three curves in characteristic three.* J. Pure Appl. Algebra. 215 (2011) 1967–1979.

[Sl3] R. Salomão, *Fibrations by curves with more than one nonsmooth point.* Bol. Soc. Bras. Mat. (2) 45 (2014) 267–292.

[Sn1] H. Stichtenoth, *Zur Konservativität algebraischer Funktionenkörper.* J. Reine Angew. Math. 301 (1978) 30–45

[Sn2] H. Stichtenoth, *Algebraic function fields and codes.* Springer, Berlin (1991).

[St1] K.-O. Stöhr, *Hyperelliptic Gorenstein curves.* J. Pure Appl. Algebra, 135 (1999) 93–105.

[St2] K.-O. Stöhr, *On the poles of regular differentials of singular curves.* Bol. Soc. Bras. Mat. 24 (1993) 105–136.

[St3] K.-O. Stöhr, *On singular primes in function fields.* Arch. Math. 50 (1988) 156–163.

[St4] K.-O. Stöhr, *On Bertini's theorem in characteristic p for families of canonical curves in $P^{(p-3)/2}$.* Proc. London Math. Soc. (3) 89 (2004) 291–316.

[St5] K.-O. Stöhr, *On Bertini's theorem for fibrations by plane projective quartic curves in characteristic five.* Journal of Algebra 315 (2007), 502–526.

[Ta1] J. Tate, *Genus change in inseparable extensions of function fields.* Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1952) 400–406.

[Ta2] J. Tate, *The arithmetic of elliptic curves.* Invent. Math. 23 (1974) 179–206.

[Zr] O. Zariski, *The theorem of Bertini on the variable singular points of a linear system of varieties.* Trans. Amer. Math. Soc. 56 (1944) 130–140.

Índice