

**INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E  
APLICADA**

**FELIPE DE FREITAS SANTIAGO**

**EFEITO DAS REUNIÕES DO COPOM NO VALOR  
DAS OPÇÕES DE IDI**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Métodos Matemáticos em Finanças do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada a Finanças.

Orientador: Ariel Levy, Dr. UFF

Rio de Janeiro  
2014

c2014

INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA  
Estrada Dona Castorina, 110-Jardim Botânico  
Rio de Janeiro-RJ CEP 22460-320

Este exemplar é de propriedade do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, que poderá incluí-lo em base de dados, armazenar em computador, microfilmar ou adotar qualquer forma de arquivamento.

É permitida a menção, reprodução parcial ou integral e a transmissão entre bibliotecas deste trabalho, sem modificação de seu texto, em qualquer meio que esteja ou venha a ser fixado, para pesquisa acadêmica, comentários e citações, desde que sem finalidade comercial e que seja feita a referência bibliográfica completa.

Os conceitos expressos neste trabalho são de responsabilidade do autor e dos orientadores.

S624c Santiago, Felipe de Freitas  
Efeito das Reuniões do COPOM no Valor das Opções de IDI / Felipe de Freitas Santiago. - Rio de Janeiro : Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2014.  
113 p.: il, graf., tab.

Dissertação (mestrado) - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada- Rio de Janeiro, 2014.

1. Derivativos financeiros - Preços 2. Juros - Taxas 3. Processos de preços - Reversão à média 4. Modelos em árvores binomiais - Não censuradas 5. Processos para os saltos - COPOM II. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada.

CDD 000.0

**INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E  
APLICADA**

**FELIPE DE FREITAS SANTIAGO**

**EFEITO DAS REUNIÕES DO COPOM NO VALOR DAS  
OPÇÕES DE IDI**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Métodos Matemáticos em Finanças do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada a Finanças.

Orientador: Ariel Levy, Dr. UFF Aprovada em 5 de Agosto de 2014 pela seguinte Banca Examinadora:

---

Ariel Levy, Dr. UFF - Presidente

---

Jorge P. Zubelli, Dr. IMPA

---

Vinícius Albani, Dr. IMPA

---

Luca Mertens, Dr. IMPA

Rio de Janeiro  
2014

À minha família

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço ao IMPA que me permitiu ser aluno deste mestrado profissional. Batalhei bastante para ser aceito e agora para finalizar este trabalho, pois não poderia desperdiçar a oportunidade inicial a mim dada nem ofuscar a confiança em mim depositada.

Nessa longa jornada foi constante o apoio e incentivo da minha família. Todos orando por mim e acreditando que eu poderia chegar ao final. Isso ajudou a fortalecer-me naqueles momentos em que o cansaço e as preocupações tentavam ditar o ritmo, querendo levar-me a parar!

A ajuda e colaboração dos colegas e amigos do IME e do IMPA foram, também, de fundamental importância.

A orientação inicial do prof. Dr. Sergei aliada às conversas e ensinamentos do prof. Dr. Ariel, meu orientador, permitiram que o tema dessa dissertação fosse precisamente delineado e o trabalho de pesquisa e escrita fossem realizados.

As constantes discussões com meus colegas da BM&FBOVESPA e do Banco Credit Suisse ajudaram-me a aprofundar os meus conhecimentos acerca do assunto aqui abordado. Também foi de grande ajuda os vários emails trocados com João Grossi.

Os ensinamentos do grande amigo Antonio Marcos, doutorando em matemática aplicada na USP, foram decisivos para a conclusão desta dissertação.

A todos o meu muito obrigado e a Deus, que nos deu um espírito de força, amor e sabedoria, todo o meu louvor!

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIG.2.1	Movimento no tempo do preço de uma ação .....	26
FIG.2.2	Ramificações do tipo normal, decrescente e crescente .....	30
FIG.2.3	Nó binomial .....	38
FIG.2.4	Nó binomial para o processo de Ornstein-Uhlenbeck .....	39
FIG.3.1	Preço de ação e da opção em um passo geral da árvore binomial .....	42
FIG.3.2	Árvore não-recombinante, alta demanda computa- cional .....	44
FIG.3.3	Árvore recombinante .....	45
FIG.3.4	Modelo binomial para a taxa de juros .....	47
FIG.3.5	Árvore binomial para um título com vencimento em 2 períodos .....	48
FIG.3.6	Pagamentos do título descontado para a data 1 .....	49
FIG.3.7	Árvore de preço do título de desconto puro na data 2 .....	49
FIG.3.8	Árvore de preço do título de desconto puro com 3 períodos .....	50
FIG.3.9	Árvore de taxa de juros futura - 3 períodos .....	51
FIG.3.10	Exemplo de precificação de <i>cap</i> de taxa de juro .....	52
FIG.3.11	Árvore binomial do modelo <i>ABNC</i> com 4 passos para o dia 4/5/2005 .....	53
FIG.3.12	Árvore binomial do IDI no método de <i>ABNC</i> com 4 passos para o dia 4/5/2005 com vencimento em 1/7/2005 .....	54
FIG.3.13	Árvore binomial de taxa de juros para o exemplo hipotético .....	55
FIG.3.14	Árvore binomial de IDI para o exemplo hipotético .....	55
FIG.3.15	Árvore binomial para taxa de juros sem considerar	

	COPOM .....	57
FIG.3.16	Árvore binomial para taxa de juros considerando saltos nas datas do COPOM .....	57
FIG.3.17	Um passo da árvore binomial na taxa de juros para incorporar os saltos do COPOM .....	58
FIG.3.18	Árvore binomial do modelo <i>ABNC</i> considerando os saltos do COPOM com 4 passos para o dia 4/5/2005. ....	61
FIG.3.19	Árvore binomial do IDI no método de <i>ABNC</i> considerando os saltos do COPOM com 4 passos para o dia 4/5/2005 com vencimento em 1/7/2005 .....	62
FIG.4.1	Histórico das taxas de juros fixadas pelas reuniões do COPOM .....	65
FIG.4.2	Gráfico comparativo para a opção de <i>strike</i> 154.500,00 ....	69
FIG.4.3	Gráfico comparativo para a opção de <i>strike</i> 155.000,00 ....	69
FIG.4.4	Gráfico comparativo para a opção de <i>strike</i> 155.500,00 ....	70
FIG.4.5	Desvio do preço com a variação do sigma .....	71
FIG.4.6	Desvio do preço com a variação da velocidade de reversão à média .....	71
FIG.4.7	Desvio do preço com a variação do sigma e da velocidade de reversão à média .....	72
FIG.4.8	Desvio do preço com a variação do sigma resultante dos Saltos do COPOM .....	73
FIG.4.9	Comparação dos preços obtidos pelo Modelo Proposto e praticados no Mercado para os contratos em aberto de opções de IDI com vencimento em 01 de abril de 2014 para a data de referência 02 de dezembro de 2013 ...	80
FIG.4.10	Cálculo do desvio para os contratos em aberto de opções de IDI com vencimento em 01 de abril de 2014 para a data de referência 02 de dezembro de 2013 .....	80

## LISTA DE TABELAS

TAB.3.1	Dados de mercado do dia 4-mai-05. ....	52
TAB.4.1	Contratos de opção sobre IDI com vencimento em 01- jul-05 no dia 4-mai-05. ....	66
TAB.4.2	Exemplificando alguns pontos da Figura 4.7 .....	73
TAB.4.3	Preços calculados para contratos de opções de IDI pelo Método de BDT e pelo Método de BDT com Saltos para 4/5/2005 .....	75
TAB.4.4	Preços calculados para contratos de opções de IDI pelo Método de ABNC e pelo Método ABNC com Saltos para 4/5/2005 .....	76
TAB.4.5	Comparação entre os preços calculados para contratos de opções de IDI pelo Método de BDT e pelo Método ABNC para 4/5/2005 .....	76
TAB.4.6	Comparação entre os preços praticados no Mercado e os preços calculados para contratos de opções de IDI pelo Método de BDT e pelo Método ABNC para 4/5/2005 .....	76
TAB.4.7	Comparação entre os preços calculados para contratos de opções de IDI pelo Método de BDT com Saltos e pelo Método ABNC com Saltos para 4/5/2005 .....	77
TAB.4.8	Comparação entre os preços praticados no Mercado (M) e os preços calculados para contratos de opções de IDI pelo Método de BDT com Saltos ( $BDT_{saltos}$ ) e pelo Método ABNC com Saltos ( $ABNC_{saltos}$ ) para 4/5/2005 .....	77
TAB.4.9	Comparação entre os preços praticados no Mercado e os preços calculados pelo método ABNC com Saltos	



para contratos de opções de IDI com vencimento em  
01 de abril de 2014 para a data de referência 02 de  
dezembro de 2013 ..... 79

## LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIATURAS

### ABREVIATURAS

IDI	-	Índice de Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia
DI1	-	Taxa Média de Depósitos Interbancários de Um DIA
BM&FBOVESPA-		Bolsa de Mercadorias & Futuros Bolsa de Valores de São Paulo
COPOM	-	Comitê de Política Monetária
BDT	-	Modelo de Black, Derman e Toy 1990 para apuração de opção de taxa de juros
HW	-	Modelo de Hull-White 1990 para apuração de opção de taxa de juros

## RESUMO

O objetivo deste trabalho é modificar o modelo desenvolvido por BASTIAN-PINTO (2010), que é uma extensão do modelo de reversão à média de HAHN (2008), de modo a apreçar opções de IDI levando em consideração os saltos nas taxas de juros resultantes das reuniões do COPOM. O modelo caracteriza-se por não promover censuras nas probabilidades de transição entre os nós da árvore binomial. Como característica do instrumento financeiro apreçado e da aplicação dos ajustes nas taxas de juros promovidos pelas decisões do COPOM, será necessário o desenvolvimento de árvores binomiais não recombinantes. Apesar do custo computacional em que isso resulta, mostra-se que esse modelo ainda traz muitas vantagens quando comparado a outros também baseados em árvores. Como exemplo, destaca-se a maior simplicidade de implementação computacional e a robustez dos resultados frente às variações dos parâmetros do modelo. Para validar o apreçamento realizado, são comparados os preços obtidos com os disponíveis no mercado. Os resultados obtidos são apresentados em gráficos e tabelas e, em seguida, são analisados quanto à sensibilidade dos parâmetros do modelo e quanto à sua proximidade aos valores negociados no mercado financeiro. Além dessa comparação, o modelo proposto será contrastado também com o modelo de Black-Derman-Toy (1990), também em árvore binomial. Contrastam-se os resultados do BDT obtidos tanto por uma árvore sem saltos quanto por uma árvore com saltos resultantes das reuniões do COPOM.

**Palavras-chave:** Modelo de Taxa de Juros, Árvore Binomial, Reversão à Média, Sem Censuras de Probabilidade, Saltos Resultantes das Reuniões do COPOM.

## ABSTRACT

The purpose of this paper is to modify the model developed by BASTIAN-PINTO (2010) to price Brazilian interest rate (IDI) options taking into account interest rates changes by Brazil's Monetary Policy Committee (COPOM). The Bastian-Pinto model is an extension of the mean reverting model of HAHN (2008) and is an uncensored binomial model. In view of the characteristics of the priced financial instrument and of the changes in interest rates by the COPOM, non-recombinant binomial trees need to be developed. Despite the resulting computational cost, this model proves to have several advantages compared to other tree-based approaches. For example, it is computationally simpler and the results are robust when the values of the model are changed. To validate the pricing model, the prices calculated by the proposed model are compared with actual trading prices. The results are shown in graphs and tables. Then, the prices obtained from the proposed model are tested for their sensitivity to the model parameters and their similarity to actual trading prices. In addition, the proposed model is also compared with the Black-Derman-Toy (1990) model, also in a binomial tree. The results obtained from the Black-Derman-Toy tree without jumps are compared with those obtained from a tree with jumps resulting from changes in interest rates by the COPOM.

**Keywords:** Interest Rate Model, Binomial Tree, Mean Reversion, Uncensored Probability, Jumps Resulting from COPOM's interest-rate decisions.

## SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES .....	6
LISTA DE TABELAS .....	8
LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIATURAS .....	10
<b>1</b> <b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>15</b>
<b>2</b> <b>MODELOS DE TAXAS DE JUROS</b> .....	<b>20</b>
2.1    Conceitos e Definições .....	20
2.2    Modelos de Taxas de Juros .....	22
2.2.1   Modelo de Black .....	23
2.2.2   Modelo de Cox-Ross-Rubinstein .....	25
2.2.3   Modelo de Black-Derman-Toy .....	27
2.2.4   Modelo de Hull-White .....	28
2.2.5   Modelo de Hahn-Dyer .....	34
2.2.6   Extensão do Modelo de Hahn-Dyer: uma Proposta sem Censura de Probabilidades Desenvolvida por Bastian- Pinto, Brandão e Hahn .....	37
<b>3</b> <b>ABORDAGEM DA ÁRVORE BINOMIAL</b> .....	<b>41</b>
3.1    Descrição da Árvore Binomial .....	41
3.1.1   Árvore Binomial de Juros e a Correspondente Árvore Bi- nomial de IDI .....	47
3.1.2   O Efeito das Decisões do COPOM na Árvore Binomial .....	55
<b>4</b> <b>RESULTADOS</b> .....	<b>63</b>
<b>5</b> <b>COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES</b> .....	<b>81</b>
<b>6</b> <b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	<b>84</b>

<b>7</b>	<b><u>APÊNDICES</u></b> .....	87
7.1	APÊNDICE 1: Revisão da Teoria de Finanças .....	88
7.2	APÊNDICE 2: Calibragem do Modelo <i>ABNC</i> .....	100
7.3	APÊNDICE 3: Códigos em MATLAB® .....	102

## 1 INTRODUÇÃO

O mercado de derivativos apresenta a possibilidade de especulação, entretanto é a capacidade de proteger produtores de diversos bens quanto a reveses financeiros decorrentes de incertezas que os torna essenciais e alimenta o interesse em seu estudo. Um derivativo pode ser definido como um instrumento financeiro cujo valor depende do (ou deriva do) valor de outro mais básico, de uma variável subjacente. Muito frequentemente os derivativos de variáveis subjacentes são os preços de ativos negociados.

Quando se pensa no valor futuro de alguma mercadoria, logo surge a idéia de juros e de taxa de juros. Esta que é a relação entre os juros pagos e o capital num intervalo de tempo quando referenciada num período futuro de tempo recebe o nome de taxa a termo.

Arelado a este conceito, tem-se a estrutura a termo de taxas de juro - ETTJ. A ETTJ já há muito tempo é do interesse dos economistas. A tentativa de encontrar a relação entre os rendimentos dos “títulos de desconto sem risco de *default*” de diferentes prazos de maturação e de relacionar estes rendimentos e variáveis econômicas - principalmente taxa real de juros e de inflação - tem sido tópico constante de *papers* desde os anos 1970<sup>1</sup>. Esses estudos sobre ETTJ foram de suma importância para o surgimento de novos instrumentos financeiros. É sabido no mercado financeiro que hoje é possível negociar opções sobre quase tudo. Como exemplo, cita-se as opções de juros de IDI. A opção de Índice de Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia - IDI - é um instrumento derivativo de taxas de juros negociado na BM&FBOVESPA. Essa opção pode ser usada para propósitos de cobertura de riscos, apostas direcionais e outros tipos de operações na curva de taxas de juros. O ativo subjacente dessa opção é o IDI. Esse é um índice divulgado

---

<sup>1</sup>Veja um histórico sobre ETTJ no trabalho de ROQUE (1996)

diariamente que reflete o acúmulo diário das taxas médias do Certificado de Depósito Interbancário - CDI. Como a taxa média diária do CDI quantifica o custo do dinheiro para os bancos em um determinado dia, ela é utilizada pelo mercado como um parâmetro para fundos de renda fixa e DI - Taxa média de depósito interbancário de 1 dia. Além disso, o CDI também é usado na BM&FBOVESPA para o ajuste diário do DI futuro.

Pretende-se nesse estudo, apreçar opções desse instrumento, IDI. Como é esperado, cada ativo ou variável apresenta determinado comportamento em seus preços, a esse comportamento é dado o nome de processo de preços. Para as taxas de juro os preços são considerados estocásticos, de acordo com um movimento de reversão à média (RM). Processos em RM tendem a causar na taxa de juro um desvio negativo, quando essa taxa é alta, e um desvio positivo, quando essa taxa é baixa. Destarte, espera-se que as taxas de juros tenham relação no longo prazo, o que faz com que elas retornem para um nível médio.

Como esse trabalho se baseia nas opções de IDI, que são opções sobre taxas de juros, é importante destacar a diferença entre os mercados internacional e nacional no que tange os juros. Como é sabido, no mercado internacional os contratos de opção sobre taxas de juros adotam opções sobre um título de renda fixa que vence numa data posterior ao vencimento da opção. Diferentemente do que ocorre com o IDI. Como característica do contrato de IDI, essa opção irá negociar uma opção sobre a taxa DI acumulada entre a data de negociação e a data de vencimento da opção o que é uma particularidade do mercado brasileiro. Assim sendo é de se esperar que os modelos de apreçamento utilizados no mercado externo sofram uma adequação quando aplicados aqui no Brasil.

A partir do exposto, elaborou-se este estudo cujo objetivo é modificar o modelo desenvolvido por BASTIAN-PINTO (2010) de modo a precificar opções de IDI levando em consideração os saltos decorrentes das reuniões do COPOM. Esse modelo desenvolvido em árvores binomiais, sobre um processo que apre-



senta reversão a média, será modificado para fornecer o preço de uma opção de IDI. Alterações em ramos predeterminados serão realizadas de tal forma a acoplar ao modelo informações de mercado que são fundamentais para a correta precificação destes instrumentos financeiros. As informações de mercado a que se refere relaciona-se às reuniões do COPOM e as alterações realizadas relaciona-se à junção de um processo estocástico para esses saltos do COPOM, tal como desenvolvido por GROSSI (2005).

Este trabalho, entretanto, diferencia-se dos trabalhos de GLUCKSTERN (2001) e GROSSI (2005), em particular, que também aplicaram árvores no apreamento de opções de IDI, porque a árvore que será estudada aqui desenvolve-se a partir de um modelo *non-censored* para as probabilidades de transição. Como a implementação de procedimentos que envolvem o *censoring* dessas probabilidades é tão mais difícil à medida em que a complexidade do modelo estocástico aumenta, a adoção do *non-censoring* das probabilidades de transição permite que até os modelos com processos mais complexos sejam implementados de forma mais simples. Essa abordagem *non-censoring* será tratada tomando como base o artigo BASTIAN-PINTO (2010). Nessa obra os autores, Bastian Pinto, Brandão e Hahn, detalham os principais conceitos desse modelo em árvore binomial e demonstram os cálculos envolvidos na obtenção dessas probabilidades de transição *non-censored*.

Esses modelos e metodologias serão expostos e utilizados para a construção da árvore binomial de taxa de juros. Essa árvore, juntamente com a árvore binomial de IDI, terá aplicabilidade no apreamento de opções de taxa de juros, opções de IDI. Como é previsto que a curva de juros sofra alterações regulares devido às reuniões do COPOM, haverá a necessidade de se modificar a árvore binomial. A modificação será feita acrescentando na árvore os saltos resultantes dessas reuniões. Ressalta-se que esses saltos deverão ocorrer nos enlaces coincidentes com as datas predeterminadas para a ocorrência das modificações da SELIC definidas pelo COPOM.

Para alcançar, então, o preço de uma opção de IDI via modelo não cen-

surado, descreve-se, inicialmente, o modelo de precificação de opção de IDI utilizado pelo mercado e os limitantes deste. Depois serão mostrados os modelos desenvolvidos em árvore binomial, como o BDT e o modelo de Hahn, e em árvore trinomial, como o modelo HW. Por último, destaca-se o modelo em árvore binomial com as probabilidades de transição não censurado, que de agora em diante será tratado por modelo ABNC - modelo em árvore binomial não censurada modificada para os saltos resultantes das reuniões do COPOM. Esse será o objeto de estudo desta dissertação. Posto isso, descreve-se com mais detalhes o modelo proposto - ABNC. Ressalta-se também a importância da estimação da reversão a média e da volatilidade no modelo e desenvolve-se uma abordagem para a curva de juros e as mudanças verificadas nela devido às reuniões do COPOM. Destaca-se, em seguida, a distribuição de probabilidade para a expectativa do mercado sobre as taxas de juros definidas pelas reuniões do COPOM. A distribuição de probabilidade escolhida será a distribuição normal. Finalmente, para validar o modelo proposto, realiza-se testes de desvio do preço obtido pelo modelo ABNC comparativamente com o preço encontrado no mercado. Quatro opções de IDI serão precificadas utilizando o modelo ABNC e variações dos parâmetros do modelo serão avaliadas com o intuito de verificar a sensibilidade dele e concluir sobre a sua robustez e precisão.

Este trabalho está dividido da seguinte forma:

No Capítulo 1 explicitam-se as questões relativas aos objetivos do trabalho e os procedimentos adotados para a sua realização.

No Capítulo 2 discute-se os modelos de taxa de juros. Dá-se ênfase ao modelo BDT e ao ABNC.

No Capítulo 3, discursa-se sobre as reuniões do COPOM e a implementação em árvore binomial.

No Capítulo 4 aplica-se o modelo proposto para o apereamento de opções de IDI negociadas no mercado e analisa-se os resultados obtidos.

A dissertação finda com o Capítulo 5 que apresenta além de uma revisão

dos principais resultados obtidos, sugestões para possíveis aprimoramentos do presente trabalho.

## 2 MODELOS DE TAXAS DE JUROS

Pretende-se com este capítulo, ressaltar as diferenças presentes nos principais modelos existentes para a taxa de juros que se desenvolvem por meio de árvores, seja binomial ou trinomial. Enfatiza-se quatro modelos em especial, o modelo de Black em BLACK (1976), Black-Derman-Toy em BLACK (1990), Hull-White em HULL (1996) e o modelo binomial *non-censored* abordado por BASTIAN-PINTO (2010). O primeiro porque é o modelo utilizado pelo mercado financeiro para tratar opções de IDI, o segundo porque será o modelo utilizado para contrastar os resultados obtidos pelo modelo proposto, o terceiro por ser modelo em árvore consagrado na literatura e o último, por ser o objeto de estudo (irá compor o modelo proposto) deste trabalho. Antes de explicitar os modelos mais relevantes de taxas de juros, é necessário abordar alguns conceitos acerca deste assunto. Isso porque apesar de o conceito de juros ser parte do cotidiano e soar familiar, expressá-lo em termos matemáticos pode ser menos imediato e intuitivo. Assim na seção a seguir apresenta-se uma coletânea de definições. Para esse objetivo utilizou-se as seguintes referências: HULL (2009), REBONATO (2009) e BRIGO (2001).

### 2.1 CONCEITOS E DEFINIÇÕES

**Definição 2.1.** (*Fator de desconto estocástico.*) *O fator de desconto estocástico  $D(t, T)$  entre dois instantes de tempo  $t$  e  $T$  é a quantidade, no tempo  $t$ , que é "equivalente" a uma unidade de moeda pagável em  $T$ , e é dado por*

$$D(t, T) = \frac{B(t)}{B(T)} = \exp\left(-\int_t^T r_s ds\right) \quad (2.1)$$

onde  $r_s$  é a taxa instantânea spot, também conhecida por short rate. (Fonte: BRIGO (2001))

**Definição 2.2.** (*Título zero cupom.*) Um título zero cupom com maturidade em  $T$  (título de desconto puro) é um contrato que garante ao seu titular o pagamento de uma unidade de moeda no tempo  $T$ , com pagamentos intermediários nulos. O valor do contrato no tempo  $t \leq T$  é denotado por  $P(t, T)$ . Claramente  $P(T, T) = 1$  para todo  $T$ . (Fonte: BRIGO (2001))

**Definição 2.3.** (*Taxa de juros à vista continuamente composta.*) A taxa de juros à vista continuamente composta vigente no tempo  $t$  até à maturidade  $T$  é denotada por  $R(t, T)$  e é a taxa constante no qual um investimento de  $P(t, T)$  unidades de moeda no tempo  $t$  acumula continuamente para produzir um montante unitário de moeda no tempo  $T$ . A fórmula é

$$R(t, T) := -\frac{\ln P(t, T)}{\tau(t, T)} \quad (2.2)$$

A taxa de juros continuamente composta é, portanto, uma taxa constante que é consistente com o preço do título zero coupon

$$e^{R(t, T)\tau(t, T)} P(t, T) = 1, \quad (2.3)$$

da qual podemos escrever o preço do título em termos da taxa  $R$ , continuamente composta:

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)\tau(t, T)}. \quad (2.4)$$

A fração de ano envolvida na composição contínua é geralmente  $\tau = T - t$ , a diferença no tempo expressa em anos. (Fonte: BRIGO (2001))

**Definição 2.4.** (*Curva zero cupom.*) A curva zero cupom (às vezes referenciada por curva de rendimentos ou "yield curve", na terminologia em inglês; ou ainda denominada por estrutura a termo da taxa de juros no tempo  $t$ ) no tempo  $t$  é o gráfico da função

$$T \mapsto \begin{cases} L(t, T) & t < T \leq t + 1(\text{anos}) \\ Y(t, T) & T > t + 1(\text{anos}) \end{cases} \quad (2.5)$$

onde  $L(t, T)$  e  $Y(t, T)$  são a taxa de juros à vista simplesmente-composta e anualmente-composta, respectivamente. (Fonte: BRIGO (2001))

**Definição 2.5.** (*Curva zero título.*) A curva de título zero no tempo  $t$  é o gráfico da função

$$T \mapsto P(t, T), \quad T > t, \quad (2.6)$$

que, por causa da positividade das taxas de juros, é uma função  $T$ -decrecente, começando de  $P(t, t) = 1$ . Tal curva é também chamada de estrutura a termo de fatores de desconto. (Fonte: BRIGO (2001))

**Definição 2.6.** (*Taxas de juro forward simplesmente compostas.*) A taxa de juro forward simplesmente composta existente em  $t$  até o vencimento  $T > t$  e maturidade  $S > T$  é denotada por  $F(t, T, S)$  e definida por

$$F(t, T, S) := \frac{1}{r(T, S)} \left( \frac{P(t, T)}{P(t, S)} - 1 \right). \quad (2.7)$$

(Fonte: BRIGO (2001))

## 2.2 MODELOS DE TAXAS DE JUROS

A equação diferencial estocástica dada em (2.8) define a ampla classe de processos de taxas de juros que inclui muitos modelos de taxas de juros bem conhecidos. Esses modelos podem ser obtidos de (2.8) simplesmente colocando as restrições apropriadas sobre os quatro parâmetros  $\theta(t)$ ,  $a(t)$ ,  $\sigma(t)$  e  $\beta$ . Nesta seção serão abordados seis especificações da dinâmica da taxa livre de risco que tem aparecido na literatura<sup>2</sup>.

$$df(r_t) = [\theta(t) + a(t)f(r_t)]dt + \sigma(t)f(r_t)^\beta dW_t \quad (2.8)$$

onde  $f(r_t)$  descreve a taxa de juros de curto prazo;  $\theta(t)$  é um parâmetro de ajuste para a curva de juros observada no mercado;  $a(t)$  é a velocidade de

---

<sup>2</sup>Para ver mais algumas especificações ver CHAN (1992), em que os autores mostram que os modelos mais bem sucedidos em capturar a dinâmica da taxa livre de risco *short-term* são aqueles que permitem que a mudança da volatilidade da taxa de juro seja altamente sensível ao nível da taxa livre de risco.

reversão à média;  $\sigma(t)$  é a volatilidade da taxa de juros de curto prazo;  $\beta$  é um coeficiente de elasticidade sobre a taxa de juros e  $W_t$  é um movimento browniano na medida de probabilidade natural.

Essa dinâmica implica que a média condicional e a variância das mudanças em uma taxa *short-term* dependam só do nível de  $r$ , que é a taxa de juro livre de risco.

### 2.2.1 MODELO DE BLACK

O modelo de Black é usado em muitas diferentes formas no apreçamento de opções. É usado no apreçamento e no *hedging* de opções de ação, opções de índices futuros, opções de moeda estrangeira e opções de taxa de juros de vários tipos. Isso ocorre apesar do fato das suposições normalmente usadas para estabelecer o modelo: o preço do ativo subjacente segue um movimento Browniano geométrico e taxas de juros são não-estocásticas. Perceba que essas suposições são fortes e difíceis de se justificar, e em alguns casos até mesmo inconsistentes. Aqui não serão abordados nem analisados esses tópicos que suportam o modelo de Black, mas o leitor interessado pode se valer do artigo STAPLETON (2005), em que os autores estabelecem as condições necessárias e suficientes para o modelo de Black apreçar corretamente opções do estilo europeu. Mostram também condições sobre as quais o modelo de Black apreçará de forma mais consistente opções sobre bonds, taxas de juros e futuros de taxas de juros.

O modelo de Black para avaliar opções futuras pode ser estendido do modelo de Black-Scholes. Fischer Black foi o primeiro a mostrar isso no artigo publicado em 1976<sup>3</sup>.

Em 2012, De Genaro propõe em GENARO (2012) uma metodologia de apreçamento que também faz uso da fórmula clássica de Black-Scholes. Ele incorpora explicitamente as mudanças provocadas na taxa de juros resul-

---

<sup>3</sup>Veja F. Black, “The Pricing of Commodity Contracts”, *Journal of Financial Economics*, 3 (Março 1976):167-79.

tantes das reuniões do COPOM no apereamento de opções de taxa de juros, especificamente opções de IDI. De Genaro associa um regime de taxa de juros *overnight* continuamente composta à  $(r_t)_{(t \geq 0)}$ , de modo que o IDI passa a ser dado por:

$$IDI_t = IDI_0 \times e^{\int_0^t r_t dt}$$

Como no modelo desenvolvido por De Genaro o  $r_t$  depende de todos os valores anteriores da variável que representa o salto do COPOM (variável definida como  $\theta$  nesse artigo), o cálculo do preço dependeria da densidade conjunta de  $r_t$  e  $\theta$ . O que complicaria bastante o apereamento pois os cálculos envolveria uma mistura de variáveis contínuas e discretas (representada por  $\theta$ ). Entretanto De Genaro ao fixar as possibilidades dos saltos do COPOM em  $\{-25 \text{ bps}, 0, +25 \text{ bps}\}$  ele consegue calcular o preço das opções via fórmula de Black-Scholes.

Nessa obra não será desenvolvida essa abordagem mostrada em GENARO (2012), será explicitada nessa seção apenas a formulação de Fischer Black. Em seu trabalho, Fischer, para avaliar opções futuras, assume que o preço futuro segue o processo (lognormal) na equação (2.9).

$$dF = \sigma F dz \tag{2.9}$$

onde  $\sigma$  é uma constante. Essa é a suposição usual feita pelo processo seguido por um preço futuro,  $F$ , no mundo neutro ao risco.

Os preços  $c$  das opções de futuros de compra européia e  $p$  das opções de futuros de venda européia são dados pelas equações a seguir (2.10 e 2.11):

$$c = e^{-rT} [F_0 N(d_1) - KN(d_2)] \tag{2.10}$$

$$p = e^{-rT} [KN(-d_2) - F_0 N(-d_1)] \tag{2.11}$$



onde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F_0}{K}\right) + \sigma^2 \frac{T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}$$
$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{F_0}{K}\right) - \sigma^2 \frac{T}{2}}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$\sigma$  é a volatilidade do preço do futuro,  $r$  é a taxa de juro livre de risco,  $T$  é a maturidade da opção,  $K$  é o preço de exercício e a função  $N(x)$  é a função de distribuição de probabilidade acumulativa, i.e., é a probabilidade de que uma variável com distribuição normal padrão,  $\phi(0, 1)$ , seja menor do que  $x$ . Quando o custo de carregamento e o rendimento de conveniência são funções somente do tempo, pode ser mostrado que a volatilidade do preço futuro é a mesma que a volatilidade do ativo subjacente. Perceba que o modelo de Black não exige que o contrato da opção e o contrato do futuro tenham maturidade no mesmo tempo.

### 2.2.2 MODELO DE COX-ROSS-RUBINSTEIN

O modelo de Cox, Ross e Rubinstein, CRR, hoje conhecido como Modelo Binomial, tornou-se um dos métodos mais utilizados para calcular o valor de opções, principalmente opções americanas, devido a sua simplicidade e fácil implementação computacional. Como mostrado em SENNA (2010), o principal ponto a ser observado no modelo de CRR é que este considera que o processo do ativo segue um Movimento Geométrico Browniano, MGB. Nesta seção apresenta-se as principais conclusões do modelo. Os detalhes dele podem ser buscados em COX (1979). Assume-se inicialmente que o preço da ação segue um processo binomial multiplicativo sobre os períodos discretos. A taxa de retorno sobre a ação em cada período pode ter dois valores possíveis:  $u - 1$  com probabilidade  $q$ , ou  $d - 1$  com probabilidade  $1 - q$ . Então se o preço atual da ação é  $S$ , o preço da ação no final do período será  $uS$  ou  $dS$ . Podemos representar esse movimento com o seguinte diagrama:

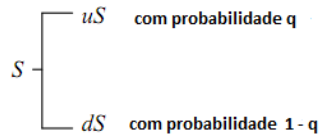


FIG. 2.1: Movimento no tempo do preço de uma ação

Cox-Ross-Rubinstein (COX, 1979) também assumem que a taxa de juros é constante. Assumem também que não há nenhuma taxa de custo de transação, ou exigência de margem. Exigindo ainda que  $u > r > d$ , eles descrevem as condições que caso não sejam respeitadas, haveria oportunidades de arbitragem de lucro sem risco, envolvendo somente a ação e o empréstimo e a concessão de empréstimo sem risco.

As equações que regem o modelo CRR são:

$$\begin{aligned}
 u &= e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \\
 d &= e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \\
 q &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{r}{\sigma} \sqrt{\Delta t}
 \end{aligned}
 \tag{2.12}$$

Onde  $dS = rdt + \sigma dz$  é a equação diferencial estocástica que modela os movimentos nos preços dos ativos objeto, sendo  $S$  o preço do ativo objeto,  $r$  a taxa de juros livre de risco,  $\sigma$  o desvio padrão do preço do ativo objeto e  $dz$  um incremento de um processo de Wiener, com média 0 e desvio padrão  $dt$ . Os parâmetros  $r$  e  $\sigma$  são considerados constantes ao longo do tempo.

Note que ao considerar  $u = -\ln d$ , ou  $u = \frac{1}{d}$ , o modelo CRR garante que a árvore binomial será recombinante. Uma árvore binomial é recombinante quando em qualquer dois intervalos de tempo consecutivos, um movimento de subida seguido por um movimento de descida é exatamente o mesmo que um movimento de descida seguido por um movimento de subida. Essa propriedade diminui drasticamente o número de nós em cada período, a medida que  $n$ , número de períodos, cresce.

### 2.2.3 MODELO DE BLACK-DERMAN-TOY

O modelo de Black-Derman-Toy (como mostrado no artigo BLACK (1990)) baseia-se na premissa de que um único fator rege os preços dos ativos de renda fixa: a taxa de juros de curto prazo. Ele é um modelo unifatorial algorítmicamente construído de tal forma a apreçar exatamente qualquer conjunto de títulos de mercado descontados sem exigir para isso uma especificação explícita de preferências de risco dos investidores. Nesse artigo os autores descrevem como implementar o modelo em uma árvore binomial. Eles mostram como replicar a estrutura a termo de juros com volatilidade constante e como replicar as duas estruturas, de juros e volatilidade, simultaneamente<sup>4</sup>.

O modelo BDT além dessa flexibilidade no trato da volatilidade também evita a ocorrência de taxas de juro negativas ao adotar a hipótese de que  $r_t$  possui distribuição lognormal. Com isso esse modelo resolve um problema que a maioria dos modelos de um fator apresenta ao assumir a distribuição gaussiana para a taxa de juros de curto prazo, esses modelos permitem a ocorrência de juros negativo!

Entretanto, faz-se necessário o uso de métodos numéricos<sup>5</sup> para resolver as taxas de juros, volatilidades e preços de títulos em cada nó na árvore. Isso porque a lognormalidade para  $r_t$  diminui a tratabilidade analítica do modelo. Seja a equação diferencial estocástica:

$$d \ln(r_t) = [\theta(t) - a \ln(r_t)]dt + \sigma(t)dW_t^Q \quad (2.13)$$

Na equação (2.13)<sup>6</sup>, verifica-se mais claramente que o processo para  $\ln(r_t)$  possui reversão à média. Considerando  $r_t = u(t)e^{\sigma(t)W_t}$  e aplicando o lema de Itô, como mostrado no apêndice (7.1), para a função  $r(T, W_t)$ , com  $W_t = \ln r_t - \frac{\ln u(T)}{\sigma(T)}$ , amplia-se o nível de detalhamento do modelo BDT.

---

<sup>4</sup>Na dissertação (GROSSI (2005)) pode ser visto o detalhamento da estrutura a termo da volatilidade no modelo BDT

<sup>5</sup>Um método bastante utilizado é o de Newton-Raphson.

<sup>6</sup>Essas variáveis possuem a mesma definição das variáveis mostradas na equação (2.8)

$$d \ln(r_t) = \left[ \frac{\partial \ln u(t)}{\partial t} - \frac{\partial \ln \sigma(t)}{\partial t} (\ln u(t) - \ln(r_t)) \right] dt + \sigma(t) dW_t^Q \quad (2.14)$$

onde  $u(T)$  é a mediana da distribuição lognormal para  $r_t$ .

Note que caso se considere a volatilidade constante, o termo  $\frac{\partial \ln \sigma(t)}{\partial t}$  será igual a zero e não permitirá reversão à média. Uma das limitações do modelo é que deve ser assumido que o processo de evolução de  $\sigma(T)$  decaia com o tempo  $\frac{\partial \ln \sigma(t)}{\partial t} < 0$ , caso contrário, acontecerá o inverso (*mean fleeing*) da reversão à média, isto é, acontecerá a aversão à média e a volatilidade assumirá um caráter explosivo com o aumento do tempo.

A discretização desse processo estocástico para  $r_t$  na árvore binomial segue a equação (2.15):

$$r_{i,j} = u(i) e^{-\sigma j \sqrt{\Delta t}} \quad (2.15)$$

Na equação (2.15),  $r_{i,j}$  é a taxa de juro no tempo  $i$  e estado  $j$  e  $u(i)$  é o termo que se ajusta para gerar preços dos títulos iguais aos do mercado. BDT assumem que a probabilidade neutra ao risco é igual a  $\frac{1}{2}$  em qualquer nó. O procedimento de *forward induction* (indução para a frente) e o uso dos preços de estado de Arrow-Debreu facilita a construção da árvore binomial.

#### 2.2.4 MODELO DE HULL-WHITE

O procedimento de construção da árvore do Hull-White foi primeiro delineado na edição de outono de 1994 do *Journal of Derivatives*. O modelo implementado na árvore trinomial é denominado por *Modelo de Hull-White (um fator)* e foi publicado em 1990 como pode ser visto em HULL (1990). Hull e White exploraram extensões do modelo de Vasicek que fornece um ajuste exato para a estrutura a termo inicial. Uma versão da extensão do modelo de VASICEK (1977) que eles consideraram é:

$$dr = [\theta(t) - ar]dt + \sigma dz \quad (2.16)$$

ou

$$dr = a\left[\frac{\theta(t)}{a} - r\right]dt + \sigma dz$$

onde  $a$  e  $\sigma$  são constantes<sup>7</sup>.

O modelo de Hull-White apresentado pode ser caracterizado como o modelo de Vasicek com o nível de reversão à média dependente do tempo. No tempo  $t$ , a taxa curta reverte para  $\frac{\theta(t)}{a}$  na velocidade  $a$ .

Aqui não se abordará a forma analítica do modelo de Hull-White, apenas a estrutura em árvore do modelo será tratada. Como descrito no livro HULL (2009), Hull e White desenvolveram um procedimento bastante robusto de dois estágios para a construção da árvore trinomial.

### Primeiro Estágio

Considere que a taxa instantânea  $r$  siga o modelo de Hull-White apresentado na Equação (2.16). Suponha que o passo no tempo na árvore é constante e igual a  $\Delta t$ .

Assuma que a taxa em  $\Delta t$ ,  $R$ , segue o mesmo processo de  $r$ , ou seja,  $dR = [\theta(t) - aR]dt + \sigma dz$ . A primeira etapa na construção da árvore para esse modelo é construir uma árvore para a variável  $R^*$  que segue o processo:

$$dR^* = -aR^*dt + \sigma dz \quad (2.17)$$

ou seja,  $\theta(t) = 0$  (não existe um ajuste à estrutura a termo inicial). Neste processo considera-se  $R^*(0) = 0$  e calculam-se os percursos possíveis para esta nova variável  $R^*$  de forma a obter  $p_u, p_m, p_d$  e  $i\Delta r$ . As condições necessárias para as probabilidades, como mostrado na dissertação TEIXEIRA (2009), são:

---

<sup>7</sup>Essas variáveis possuem a mesma definição das variáveis mostradas na equação (2.8)

$$\begin{aligned}
E[R((i+1)\Delta t) \mid R(i\Delta t) = j\Delta R] &= j\Delta R - aj\Delta R\Delta t \\
&= p_u((k+1)\Delta R) + p_m(k\Delta R) + p_d((k-1)\Delta R)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\text{Var}[R((i+1)\Delta t) \mid R(i\Delta t)] &= \sigma^2\Delta t \\
&= p_u[(k+1)\Delta R - (1-a\Delta t)j\Delta R]^2 + p_d[(k-1)\Delta R - (1-a\Delta t)j\Delta R]^2 + p_m[k\Delta R - (1-a\Delta t)j\Delta R]^2
\end{aligned}$$

onde  $k = j - 1$  para as ramificações do tipo decrescente,  $k = j$  para as do tipo normal e  $k = j + 1$  para as do tipo crescente, como se pode ver na figura (2.2).

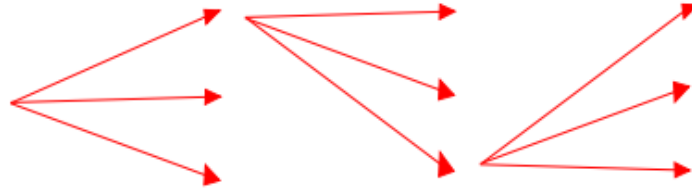


FIG. 2.2: Ramificações do tipo normal, decrescente e crescente

$$p_u + p_m + p_d = 1 \quad (2.18)$$

Com a equação (2.18) fica-se com três equações e três incógnitas. Resolvendo o sistema e fazendo  $\rho = \frac{\Delta R^2}{\sigma\Delta t}$  obtêm-se as soluções para os três tipos de ramificação. Para o tipo normal, as soluções são:

$$p_u = \frac{1 + aj\Delta t(-1 + aj\Delta t)\rho}{2\rho} \quad (2.19)$$

$$p_m = 1 - a^2j^2\Delta t^2 - \frac{1}{\rho} \quad (2.20)$$

$$p_d = \frac{1 + aj\Delta t(1 + aj\Delta t)\rho}{2\rho} \quad (2.21)$$

Para o tipo crescente são:

$$p_u = \frac{1 + aj\Delta t(1 + aj\Delta t)\rho}{2\rho} \quad (2.22)$$

$$p_m = -aj\Delta t(2 + aj\Delta t) - \frac{1}{\rho} \quad (2.23)$$

$$p_d = \frac{1 + (1 + aj\Delta t)(2 + aj\Delta t)\rho}{2\rho} \quad (2.24)$$

Para o tipo decrescente são:

$$p_u = \frac{1}{2} \left( 2 + aj\Delta t(-3 + aj\Delta t) + \frac{1}{\rho} \right) \quad (2.25)$$

$$p_m = \frac{-1 + aj\Delta t(2 - aj\Delta t)\rho}{\rho} \quad (2.26)$$

$$p_d = \frac{\sigma^2 + aj\Delta t(aj\Delta t R^2 - \rho\sigma^2)}{2\rho\sigma^2} \quad (2.27)$$

Em qualquer um dos três casos, as probabilidades têm que ser sempre positivas. Assim impondo as condições  $p_u > 0$ ,  $p_m > 0$ ,  $p_d > 0$ ,  $\Delta t > 0$ ,  $\sigma > 0$  e  $a > 0$  obtem-se os limites de  $j$  para os três tipos de ramificação. Para a ramificação normal:

$$-\frac{1}{a\Delta t} \sqrt{\frac{\rho-1}{\rho}} < j < \frac{1}{a\Delta t} \sqrt{\frac{\rho-1}{\rho}} \quad (2.28)$$

$$\frac{-1 - \sqrt{\frac{\rho-1}{\rho}}}{a\Delta t} < j < \frac{-1 + \sqrt{\frac{\rho-1}{\rho}}}{a\Delta t} \quad (2.29)$$

$$\frac{1 - \sqrt{\frac{\rho-1}{\rho}}}{a\Delta t} < j < \frac{1 + \sqrt{\frac{\rho-1}{\rho}}}{a\Delta t} \quad (2.30)$$

É fácil perceber que, quanto maior for o valor de  $j$  menor será a probabilidade de a taxa  $R$  chegar ao nó  $(i, j)$ . O que se deve ao fator de reversão à média presente na modelagem de Hull-White.

Como visto em HULL (2009), uma escolha para o valor de  $\rho$  seria  $\rho = 3$ , por ser um valor que satisfaz a condição de estabilidade e contribui para a minimização dos erros. Assim, as equações (2.28), (2.29) e (2.30) ficariam:

$$-\frac{1}{a\Delta t} \sqrt{\frac{2}{3}} < j < \frac{1}{a\Delta t} \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (2.31)$$

$$\frac{-1 - \sqrt{\frac{2}{3}}}{a\Delta t} < j < \frac{-1 + \sqrt{\frac{2}{3}}}{a\Delta t} \quad (2.32)$$

$$\frac{1 - \sqrt{\frac{2}{3}}}{a\Delta t} < j < \frac{1 + \sqrt{\frac{2}{3}}}{a\Delta t} \quad (2.33)$$

Analisando essas equações, conclui-se que os limites para  $j$  são:

$$\frac{-1 - \sqrt{\frac{2}{3}}}{a\Delta t} < j < \frac{1 + \sqrt{\frac{2}{3}}}{a\Delta t} \quad (2.34)$$

Cabe ressaltar que  $j$  assume apenas valores inteiros e que a ramificação do tipo decrescente será utilizada quando o valor de  $j$  for igual ao maior valor inteiro inferior a  $j_{max} = \frac{1 + \sqrt{\frac{2}{3}}}{a\Delta t}$ . Analogamente, aplica-se uma ramificação crescente quando  $j$  é igual ao maior inteiro inferior a  $-j_{max}$ .

### Segundo Estágio

O segundo estágio na construção da árvore serve para converter a árvore de  $R^*$  para a árvore de  $R$ . Isso é realizado ao deslocar os nós na árvore  $R^*$  de modo que as taxas de juros da estrutura a termo inicial sejam exatamente



combinadas. Para isso é necessário incluir a função  $\theta(t)$  e adicionar uma quantidade  $\alpha(t)$ , que depende de  $\theta(t)$ , a  $R^*$  de modo a alterar as posições dos nós, de  $R^*$  para  $R$ :

$$dR = [\theta(t) - aR]dt + \sigma dz \quad (2.35)$$

$$R(t) = R^*(t) + \alpha(t) \quad (2.36)$$

É possível determinar a solução analítica para  $\alpha(t)$ . Basta considerar as equações (2.35) e (2.17), para com alguma álgebra obter:

$$d\alpha(t) = [\theta(t) - a\alpha(t)]dt \quad (2.37)$$

Se se considerar que  $r$  e  $R$  seguem o mesmo processo e se fizer  $r = R$ , chega-se à solução:

$$d\alpha(t) = F(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-at})^2 \quad (2.38)$$

Como está sendo usado uma discretização do modelo, tem-se:

$$R_i = R_i^* + \alpha_i \quad (2.39)$$

Os  $\alpha$ 's têm que ser calculados iterativamente a fim de que a estrutura a termo inicial seja combinada exatamente. Defina  $\alpha_i$  como  $\alpha(i\Delta t)$ , o valor de  $R$  no tempo  $i\Delta t$  sobre a árvore- $R$  menos o valor correspondente  $R^*$  no tempo  $i\Delta t$  sobre a árvore- $R^*$ . Defina  $Q_{i,j}$  como o valor presente de um título que paga \$1 se o nó  $(i, j)$  é alcançado e zero caso contrário. O  $\alpha_i$  e o  $Q_{i,j}$  podem ser calculados usando uma indução para frente de tal forma que a estrutura a termo inicial é exatamente combinada.

Como desenvolvido em HULL (2009) há fórmula para expressar  $\alpha$  e  $Q$ <sup>8</sup>. Suponha que o  $Q_{i,j}$  tenha sido determinado para  $i \leq m$  ( $m \geq 0$ ). O próximo passo é determinar  $\alpha_m$  de modo que a árvore corretamente apreça um *zero-coupon* com maturidade em  $(m + 1)\Delta t$ . A taxa de juros no nó  $(m, j)$  é  $\alpha_m + j\Delta R$ , de modo que o preço do título *zero-coupon* com maturidade em  $(m + 1)\Delta t$  seja dado por:

$$P_{m+1} = \sum_{j=-n_m}^{n_m} (Q_{m,j} \exp[-(\alpha_m + j\Delta R)\Delta t]) \quad (2.40)$$

onde  $n_m$  é o número de nós em cada lado do nó central no tempo  $m\Delta t$ . A solução para essa equação é:

$$\alpha_m = \frac{\ln \sum_{j=-n_m}^{n_m} Q_{m,j} \exp[-j\Delta R\Delta t] - \ln P_{m+1}}{\Delta t} \quad (2.41)$$

Uma vez que  $\alpha_m$  tenha sido determinado, o  $Q_{i,j}$  para  $i = m + 1$  pode ser calculado usando

$$Q_{m+1,j} = \sum_k (Q_{m,k} q(k, j) \exp[-(\alpha_m + k\Delta R)\Delta t]) \quad (2.42)$$

onde  $q(k, j)$  é a probabilidade de mover do nó  $(m, k)$  para o nó  $(m + 1, j)$  e o somatório é tomado sobre todos os valores de  $k$  para o qual esse não é zero.

### 2.2.5 MODELO DE HAHN-DYER

Essa subseção será desenvolvida segundo as formulações presentes em BASTIAN-PINTO (2010). Nelson e Ramaswamy (1990) propuseram uma abordagem que pode ser usada em uma extensa gama de condições e que é

---

<sup>8</sup>No Capítulo 30 de HULL (2009) há um exemplo para ilustrar o uso das fórmulas aqui exibidas.

apropriada para o processo de Ornstein-Uhlenbeck. O modelo é uma sequência binomial simples de  $n$  períodos tendo cada passo uma duração  $\Delta t$ , com um horizonte total de tempo  $T = n\Delta t$ , que permite então que uma árvore binomial recombinante possa ser construída. A forma geral para a equação diferencial do processo estocástico é dada por:  $dx = \mu(x, t) + \sigma(x, t)dz$ , e o modelo proposto é dado pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned}
 x_t^+ &\equiv x + \sqrt{\Delta t \sigma(x, t)} && \text{(movimento ascendente)} \\
 x_t^- &\equiv x - \sqrt{\Delta t \sigma(x, t)} && \text{(movimento descendente)} \\
 p_t &\equiv \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\Delta t} \frac{\alpha(x, t)}{\sigma(x, t)} && \text{(probabilidade de subida)} \\
 &1 - p_t && \text{(probabilidade de descida)}
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Entretanto, nesse modelo há a necessidade de se restringir a probabilidade  $p_t$ , que pode vir a assumir valores maiores do que 1. Esse fato é reparado ao censurar a probabilidade  $p_t$  (e conseqüentemente  $(1 - p_t)$ ) para o intervalo de 0 a 1 da seguinte forma:

$$p \equiv \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{\alpha(x, t)}{\sigma(x, t)} \sqrt{\Delta t} & \text{se } p_t \geq 0 \text{ e } p_t \leq 1 \\ 0 & \text{se } p_t < 0, (p_t \text{ é censurado)} \\ 1 & \text{se } p_t > 1, (p_t \text{ é censurado)} \end{cases}$$

Esse modelo é bastante abrangente e se aplica bem ao processo de reversão à média, como mostrado a seguir.

Para o processo  $(dx_t = \eta(\bar{x} - x_t)dt + \sigma dz_t)$ <sup>9</sup>, onde  $x_t$  é o logaritmo neperiano do preço,  $\eta$  é a velocidade de reversão à média,  $\bar{x}$  é a média de longo prazo para qual o  $x_t$  reverte,  $\sigma$  é a volatilidade do processo e  $dz$  é o processo de Wiener padrão, os termos da equação (2.43) são:

$$\alpha(x, t) = \eta((\bar{x}) - x_t)$$

---

<sup>9</sup>Essa é a forma mais simples do processo de reversão à média, que é o processo de um fator de Ornstein-Uhlenbeck, também conhecido por processo de reversão à média aritmético.

e

$$\sigma(x, t) = \sigma$$

Entretanto, pode-se ocorrer valores negativos ou valores maiores do que 1 nos seguintes casos:

$$\text{se } (\bar{x} - x_t)\sqrt{\Delta t} > \sigma, \text{ então } p_{x_t} > 1$$

$$\text{se } (\bar{x} - x_t)\sqrt{\Delta t} < -\sigma, \text{ então } p_{x_t} < 0$$

Nesses casos os valores de  $p_t$  podem ser censurados como mostrado a seguir:

$$p \equiv \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{\eta(\bar{x}-x)\sqrt{\Delta t}}{2\sigma} & \text{se } p_t \geq 0 \text{ e } p_t \leq 1 \\ 0 & \text{se } p_t < 0, (p_t \text{ é censurado}) \\ 1 & \text{se } p_t > 1, (p_t \text{ é censurado}) \end{cases}$$

Essas condições são mostradas na equação a seguir (equação 2.44)

$$p_{x_t} = \max \left( 0, \min \left( 1, \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\eta(\bar{x} - x_t)}{\sigma} \sqrt{\Delta t} \right) \right) \quad (2.44)$$

onde:

$$x_t^+ - x = \Delta x^+ = \sigma \sqrt{\Delta t}$$

$$x_t^- - x = \Delta x^- = -\sigma \sqrt{\Delta t}$$

Como  $x_t$  é o ln do preço  $S_t$ , então  $\Delta S^+ = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$  e  $\Delta S^- = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$ . Essas expressões são idênticas àquelas usadas na árvore recombinante para um Movimento Browniano Geométrico, portanto o resultado é uma árvore binomial recombinante similar àquela obtida em COX (1979). Os cálculos das probabilidades e suas censuras produzirão um modelo que converge fracamente para o processo de reversão à média, como mostrado em HAHN (2005). Perceba que, em cada estado da natureza, a probabilidade de um movimento de subida ( $p_t$ ) dependerá de  $x_t$  produzindo, de acordo com a equação (2.44), uma segunda árvore de probabilidade de alta ( $p_{x_t}$ ), e uma outra correspondente de probabilidade de queda.

O processo até agora formulado para ser aplicado no apereamento de opções precisará de um ajuste para transformá-lo em um processo neutro ao risco. Esse ajuste será feito na média de longo prazo  $\bar{x}$ , que será penalizada pelo prêmio de risco normalizado do processo:  $\bar{x} - \frac{\lambda_x}{\eta}$ , como visto em DIXIT (1994).

Portanto, para a árvore binomial censurada neutra ao risco, o ajuste feito é mostrado na equação (2.45):

$$p_{x_t} = \max \left( 0, \min \left( 1, \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\eta \left[ \left( \bar{x} - \frac{\lambda_x}{\eta} \right) - x \right]}{\sigma} \sqrt{\Delta t} \right) \right) \quad (2.45)$$

## 2.2.6 EXTENSÃO DO MODELO DE HAHN-DYER: UMA PROPOSTA SEM CENSURA DE PROBABILIDADES DESENVOLVIDA POR BASTIAN-PINTO, BRANDÃO E HAHN

A abordagem deste modelo realizada nesta subseção segue o artigo BASTIAN-PINTO (2010). Nesse artigo os autores estendem o modelo de Hahn-Dyer e propõem um modelo binomial *non-censored* também com reversão à média mas que é mais preciso, robusto e intuitivamente atraente para o apereamento de opções. Além disso, esse novo modelo apresenta vantagens distintas sobre os modelos atualmente disponíveis. Ele é de fácil implementação, é flexível em seu uso e não precisa realizar a censura de probabilidades de transição como os outros modelos disponíveis.

Para desenvolver um modelo binomial, o primeiro e segundo momentos (valor esperado e variância) do processo estocástico devem combinar com os momentos correspondentes da árvore binomial. O problema é encontrar uma sequência binomial que convirja para a solução de uma equação diferencial estocástica (EDE) na forma:

$$dx_t = \alpha(x, t)dt + \sigma(x, t)dz \quad (2.46)$$

onde  $\alpha(x, t)$  e  $\sigma(x, t)$  são respectivamente a taxa de crescimento instantânea contínua (*drift*) e a volatilidade, e  $dz$  é um incremento padrão de Wiener. As condições para que uma sequência binomial de  $x_t$  convirja para a solução da equação (2.46) são que  $x_t = x_0 + \int_0^t \alpha(x_s, s)ds + \int_0^t \sigma(x_s, s)dz$  exista em  $0 < t < \infty$ , e que  $|x_t^\pm(x, t) - x|$ ,  $|\alpha_t(x, t) - \alpha(x, t)|$ , e  $|\sigma_t^2(x, t) - \sigma^2(x, t)| \rightarrow 0$ , quando  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Usando a discretização  $\Delta t = t - t_0$ , pode-se reescrever o valor esperado e a variância do processo Ornstein-Uhlenbeck mostrados em DIXIT (1994):

$$E[x_t] = \bar{x} + (x_{t-1} - \bar{x})e^{-\eta\Delta t} \quad (2.47)$$

$$Var[x_t] = \frac{\sigma^2}{2\eta}(1 - e^{-2\eta\Delta t}) \quad (2.48)$$

O objetivo é combinar as equações (2.47) e (2.48) com os termos análogos para um processo binomial de um período do preço  $S$ , como mostrado na figura (2.3)

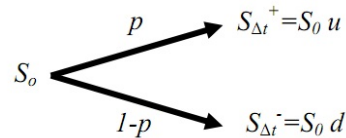


FIG. 2.3: Nó binomial

Para o modelo aqui desenvolvido, usa-se a aproximação sugerida por HULL (1994) e HULL (1995) como descrita em CLEWLOW (1999) e em HULL (2009).

Primeiro, define-se uma árvore aditiva, que modela um processo aritmético de Ornstein-Uhlenbeck com uma média de longo prazo igual a zero:  $\bar{x}^* = 0$ , e valor inicial zero:  $x_0^* = 0$ . Nessa árvore os nós terão um valor de  $x_t^*$ . Os valores esperados do modelo de Ornstein-Uhlenbeck são adicionados ao valor dos nós em cada período da equação (2.47) usando a média de longo prazo

real do processo ( $\bar{x}$ ), e o valor inicial real ( $x_0$ ). Por isso, essa árvore de valores  $x_t$  é usada para obter a árvore de um processo de preço  $S_t$  com distribuição lognormal definida por  $S_t = e^{x_t}$ .

Uma vez que se considera  $x_t = \ln(S_t)$ , para estudar o efeito da dinâmica do nó binomial, pode-se adotar  $S_0$  como um valor unitário, i.e.,  $S_0 = 1$  de tal forma que as magnitudes relativas no processo binomial permaneçam inalteradas. Uma vez que  $x_0^* = \bar{x}^* = 0$  pode-se escrever a relação binomial do processo, que é agora aritmético, como  $x_0^*$  - vide a figura 2.4.

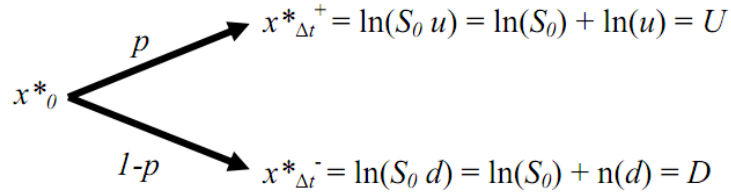


FIG. 2.4: Nó binomial para o processo de Ornstein-Uhlenbeck

Para adotar esse processo binomial considerando as equações (2.47) e (2.48) do processo de Ornstein-Uhlenbeck, tem-se as seguintes relações:

$$x^{*+} = x^* + \sigma\sqrt{\Delta t} \quad (2.49)$$

$$x^{*-} = x^* - \sigma\sqrt{\Delta t} \quad (2.50)$$

$$p_{x_t} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\eta(-x_t^*)\sqrt{\Delta t}}{\sqrt{\eta^2(-x_t^*)^2\Delta t + \sigma^2}} \quad (2.51)$$

A derivação das equações (2.49), (2.50) e (2.51) pode ser vista no apêndice 1 do artigo BASTIAN-PINTO (2010). Com elas é possível modelar a árvore binomial recombinante aditiva de média 0 e valor inicial 0 para uma processo de Reversão à Média Aritmética  $x_t^*$ . Como em CLEWLOW (1999) e em HULL (2009), para esses valores de nós, é factível adicionar o valor esperado indicado na equação (2.47), considerando agora  $x_0$  e  $\bar{x}$  (ambos não iguais a 0, mas com os valores dos parâmetros reais de um processo de reversão à

média). O valor de  $x$  depois de  $i$  movimentos ascendentes, e  $j$  movimentos descendentes será:

$$t = (i + j)\Delta t$$

$$\begin{aligned} x_{(i,j)} &= \bar{x} + (x_0 - \bar{x})e^{-\eta(i+j)\Delta t} + (i + j)\sigma\sqrt{\Delta t} \\ x_{(i,j)} &= \bar{x}(1 - e^{-\eta(i+j)\Delta t}) + x_0e^{-\eta(i+j)\Delta t} + \underbrace{(i + j)\sigma\sqrt{\Delta t}}_{x^*} \end{aligned} \quad (2.52)$$

A árvore binomial *non-censored* para o processo de reversão à média geométrico, definido por,  $S_t = e^{x_t}$ , é obtida pela transformação direta do valor de  $x_{(i,j)}$  em  $S_{(i,j)}$ . Isso produz uma árvore binomial com reversão à média geométrica recombinante. Percebe-se que nesse modelo *non-censored*, o ajuste para a neutralidade do risco é dado pela equação do valor esperado do processo, alterando o valor de  $x$  dado na equação (2.52) para:

$$x_{(i,j)} = \left(\bar{x} - \frac{\lambda_x}{\eta}\right)(1 - e^{-\eta(i+j)\Delta t}) + x_0e^{-\eta(i+j)\Delta t} + \underbrace{(i + j)\sigma\sqrt{\Delta t}}_{x^*} \quad (2.53)$$

Esse ajuste para transformar um processo de reversão à média em um processo neutro ao risco é também mais simples do que aquele do modelo *censored* (mostrado em HAHN (2008)), que exige que o ajuste seja feito nas probabilidades de transição ao longo de toda a árvore.

No próximo capítulo, será construída uma árvore binomial segundo a abordagem desse modelo *ABNC* apresentada na presente seção. Depois a árvore obtida será utilizada para apreçar opções de taxa de juros. Feito isso, mostrar-se a sensibilidade dos preços das opções às variações realizadas nos parâmetros do modelo e, por fim, esses preços serão avaliados frente aos encontrados no mercado e aos calculados pelo modelo BDT com e sem saltos, a exemplo do desenvolvido no trabalho (GROSSI (2005)).



### 3 ABORDAGEM DA ÁRVORE BINOMIAL

É bastante comum o uso de árvores binomiais no apreamento de opções. Uma árvore pode ser entendida como um diagrama que descreve os caminhos possíveis que o preço de uma ação pode seguir ao longo da existência de uma opção. Observando um diagrama de árvore binomial, nota-se que, dado um estado da natureza (nó), o próximo estado da natureza ou pode seguir um movimento ascendente ou descendente, cada qual com uma probabilidade bem definida. Quando o passo no tempo entre os estados da natureza são reduzidos e o preço do log neperiano do ativo segue um movimento Browniano, esse modelo leva a suposições de lognormalidade para os preços das ações que subjazem o modelo de Black-Scholes (vide a seção 12.6 do livro HULL (2009)).

Nesse capítulo será mostrado como a árvore binomial pode ser usada para avaliar opções usando tanto conceitos de não arbitragem quanto princípios de avaliação neutra ao risco. Depois será detalhado o processo de construção de duas árvores binomiais: a de taxa de juros e a de IDI. Feito isso, explica-se o porquê das considerações realizadas e depois esboça-se ambas as árvores. Por fim, inclui-se o efeito dos saltos provenientes das decisões do COPOM na árvore binomial de taxa de juros. Como a árvore binomial de IDI é completamente dependente da árvore de taxa de juros, um deslocamento provocado pelo COPOM nesta irá impactar também aquela. Para desenvolver esse ponto, as fontes HULL (2009) e REBONATO (2009) serão utilizadas.

#### 3.1 DESCRIÇÃO DA ÁRVORE BINOMIAL

Considere uma ação cujo preço é  $S_0$  e uma opção sobre essa ação cujo preço atual é  $f$ . Suponha que a data de vencimento da opção ocorra em um inter-

valo de tempo e que, durante esse intervalo, o preço da ação possa mover-se para cima de  $S_0$ , em um novo nível,  $S_0u$ , com  $u > 1$ , ou para baixo de  $S_0$  para um novo nível,  $S_0d$ , com  $d < 1$ . O aumento percentual no preço da ação quando há um movimento de subida é  $u - 1$ ; a diminuição percentual quando há um movimento de descida é  $1 - d$ . Se o preço da ação move para cima para  $S_0u$ , supõe-se que o pagamento da opção é  $f_u$ ; se o preço da ação move para baixo para  $S_0d$ , supõe-se que o pagamento da opção é  $f_d$ . Essa situação é mostrada em 3.1

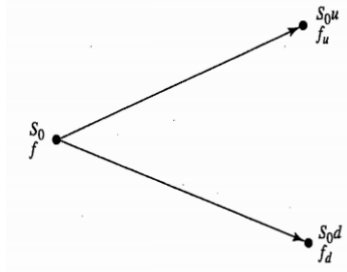


FIG. 3.1: Preço de ação e da opção em um passo geral da árvore binomial

Suponha agora uma carteira composta de  $\Delta$  ações compradas e uma opção vendida. Calcula-se o valor de  $\Delta$  que faz o portfólio ser livre de risco. Se há um movimento de subida no preço da ação, o valor do portfólio no final da vida da opção é:

$$S_0u\Delta - f_u$$

Se há um movimento de descida no preço da ação, o valor torna-se:

$$S_0d\Delta - f_d$$

Igualando as duas equações com o intuito de deixar o portfólio livre de risco, obtém-se:

$$S_0u\Delta - f_u = S_0d\Delta - f_d$$

ou

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0u - S_0d} \quad (3.1)$$

Nesse caso, o portfólio é livre de risco, e para não existir oportunidades de arbitragem, ele deve render a taxa de juros livre de risco. A Equação 3.1 mostra que  $\Delta$  é a razão da variação no preço da opção sobre a variação no preço da ação quando se move entre os nós no tempo  $T$ .

Fazendo a taxa livre de risco igual a  $r$ , o valor presente do portfólio é:

$$(S_0 u \Delta - f_u) e^{-rT}$$

O valor da carteira é :

$$S_0 \Delta - f$$

Segue, então:

$$f = S_0 \Delta (1 - u e^{-rT}) + f_u e^{-rT}$$

Trazendo a Equação 3.1 para  $\Delta$  e simplificando, reduz-se a equação acima a:

$$f = e^{-rT} [p f_u + (1 - p) f_d] \quad (3.2)$$

onde

$$p = \frac{e^{rT} - d}{u - d} \quad (3.3)$$

O preço da opção obtido por meio de uma árvore binomial e mostrado na Equação 3.2 pode ser utilizado para variados intervalos de tempo  $\Delta t$ . O tamanho desse intervalo de tempo é que ditará o número de passos da árvore utilizada na precificação da opção.

Quando se adota árvores com muitos passos, deve-se considerar dois tipos de árvores binomiais: não-recombinantes e recombinantes. Como discutido em BENNINGA (1998), com o intuito de fazer cálculos simples, a taxa de juro que resulta de uma sequência de movimentos “subida-descida” deveria ser

igual à taxa de juro resultante de uma sequencia de movimentos de “descida-subida”. Mas em princípio, nada impediria a existência de modelos de taxa de juros que produzem árvores binomiais como a mostrada na Figura 3.2<sup>10</sup>, mas isso traria severos problemas computacionais. Infelizmente, em muitos modelos, é impossível satisfazer essa exigência dos movimentos e, portanto, árvores não-recombinantes devem ser construídas. Mais a seguir, em outra seção deste capítulo, aborda-se com mais detalhes a árvore não-recombinante.

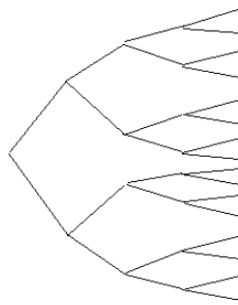


FIG. 3.2: Árvore não-recombinante, alta demanda computacional

Em contraste à árvore mostrada na Figura 3.2, tem-se a árvore recombinante (vide Figura 3.3)

Para determinar se uma árvore binomial é ou não recombinante, é necessário abordar os conceitos envolvidos nos cálculos dos parâmetros de alta (ou subida)  $u$ , de queda (ou descida)  $d$  e de probabilidade  $p$ .

Esses parâmetros devem fornecer valores corretos para a média e variância das mudanças dos preços dos ativos durante o intervalo de tempo de tamanho  $\Delta t$ . Como se está trabalhando em um mundo neutro ao risco, o retorno esperado do ativo é a taxa de juros livre de risco  $r$ . Suponha que o ativo forneça um rendimento de  $q$ . O retorno esperado na forma de ganhos de capital deve ser  $r - q$ . Isso significa que o valor esperado do preço do ativo no final do intervalo  $\Delta t$  deve ser  $Se^{(r-q)\Delta t}$ , onde  $S$  é o preço do ativo no início do intervalo. Para combinar o retorno da média com a árvore, precisa-se:

<sup>10</sup>Figura retirada do trabalho BENNINGA (1998)

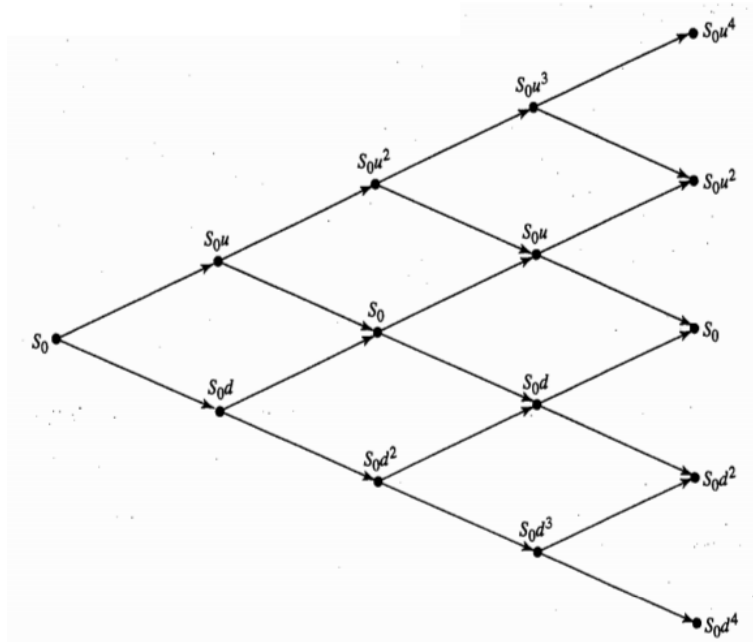


FIG. 3.3: Árvore recombinante

$$S e^{(r-q)\Delta t} = [pSu + (1-p)Sd]$$

ou

$$e^{(r-q)\Delta t} = [pu + (1-p)d] \quad (3.4)$$

A variância da mudança percentual,  $R$ , no preço do ativo em um pequeno intervalo de tempo  $\Delta t$  é  $\sigma^2 \Delta t$ , onde  $\sigma$  é a volatilidade do preço do ativo. Isso é também a variância de  $1 + R$ . Usando a definição de variância para a variável  $Q$ , temos  $E(Q^2) - [E(Q)]^2$ . Há uma probabilidade  $p$  de que  $1 + R$  seja  $u$  e  $1 - p$  de que seja  $d$ . Então

$$pu^2 + (1-p)d^2 - e^{2(r-q)\Delta t} = \sigma^2 \Delta t \quad (3.5)$$

Substituindo a Equação 3.5 na Equação 3.4 tem-se:

$$e^{(r-q)\Delta t}(u + d) - ud - e^{2(r-q)\Delta t} = \sigma^2\Delta t \quad (3.6)$$

As equações (3.4) e (3.6) impõe duas condições para p, u e d. A terceira condição <sup>11</sup> é  $u = 1/d$ .

Resolvendo, então as três condições, chega-se:

$$p = \frac{e^{(r-d)\Delta t} - d}{u - d} \quad (3.7)$$

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad (3.8)$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad (3.9)$$

Com a definição da terceira condição apresentada garante-se que a árvore binomial construída seja recombinante. Ainda por essa condição, pode-se caracterizar essa árvore por multiplicativa.

Comparando as árvores das Figuras (3.2) e (3.3) percebe-se, quando a árvore binomial é recombinante, há uma coincidência de vários estados da natureza, na realidade, só não coincidem os estados da natureza que tem como caminho só sequência de movimentos de alta e os estados só com sequências de movimento de baixa. Essa coincidência de estados da natureza é explicada pela independência da trajetória seguida na árvore, ou seja, o estado atual da natureza só depende, além do estado inicial, do número de altas e do número de quedas, mas não da ordem em que as altas e as quedas ocorreram.

Como mostrado no comentário da Figura (3.2) árvores não-recombinantes, devem ser evitadas sempre que possível. Isso porque, enquanto nas recombinantes o número de estados da natureza aumenta de uma unidade a cada

---

<sup>11</sup>Essa condição foi obtida por Cox, Ross e Rubinstein. Mais detalhes veja COX (1979)

passo, nas não-recombinantes esse número dobra. Assim, com um menor número de estados da natureza, as árvores recombinantes reduzem o número de cálculos para se calibrar um modelo.

### 3.1.1 ÁRVORE BINOMIAL DE JUROS E A CORRESPONDENTE ÁRVORE BINOMIAL DE IDI

Antes de abordar a construção da Árvore Binomial de Juros via o modelo desenvolvido em BASTIAN-PINTO (2010), que compõe o modelo proposto neste trabalho, faz-se uma pequena introdução sobre modelos de taxa de juro binomial. Para isso, utiliza-se o exemplo, as anotações e figuras mostrados no artigo BENNINGA (1998).

Suponha que a taxa de juros desenvolva em um modelo binomial de acordo com a árvore binomial indicada na Figura 3.4

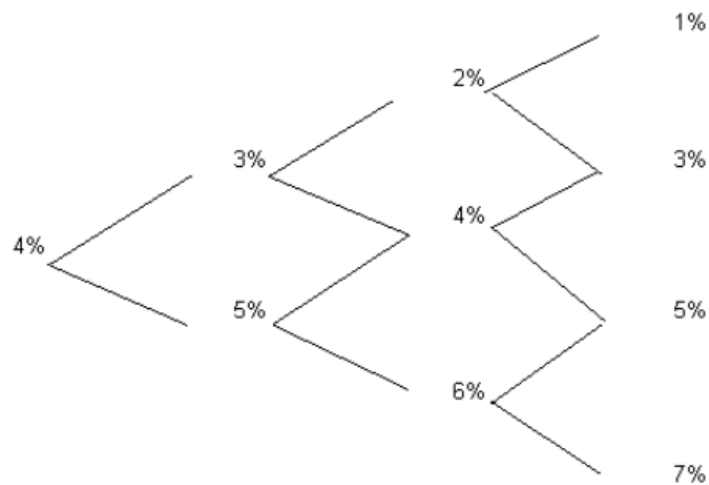


FIG. 3.4: Modelo binomial para a taxa de juros

Nesse exemplo, o processo da taxa de juros é como se segue: a taxa de juro de curto prazo hoje é 4% (por “curto prazo” entenda “um período”), em cada período posterior, a taxa de juro ou aumenta ou diminui uma unidade percentual.

Claramente há problemas com esse processo, como por exemplo, em algum ponto a taxa tornará negativa, uma propriedade altamente indesejável do modelo que é proposto para descrever taxas de juro nominais. Mas, por hora, ignora-se o problema e segue-se com o exemplo.

Para usar esse modelo simples para o cálculo de preços, serão necessárias mais duas suposições: a) A probabilidade de subida e descida de cada nó é 0.5; b) As probabilidades de estado podem ser usadas para fazer os cálculos do valor do ativo dependente do estado, i.e., fazer o cálculo do valor presente do seu pagamento esperado.

Essas suposições juntas configuram o que é conhecido como as suposições de neutralidade ao risco.

Calcula-se agora o preço no instante 0 de uma estrutura com dois períodos de um título de desconto puro. Como o título só tem pagamento no instante 2, sem perda de generalidade assume-se que esses pagamentos são \$1, como mostrado na Figura 3.5

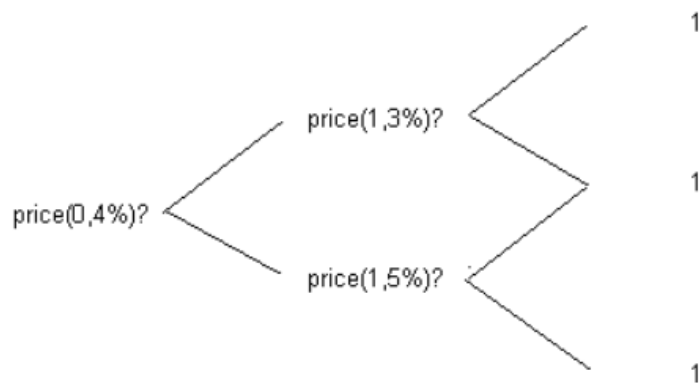


FIG. 3.5: Árvore binomial para um título com vencimento em 2 períodos

Os preços do título, como ainda serão calculados, estão indicados na Figura 3.5. Por exemplo, “price(1, 3%)” refere-se ao preço do título na data 1 quando a taxa de juro de um período é 3%. Para calcular os preços, primeiro desconta-se os pagamentos do título para o instante 1, como mostrado na Figura 3.6.



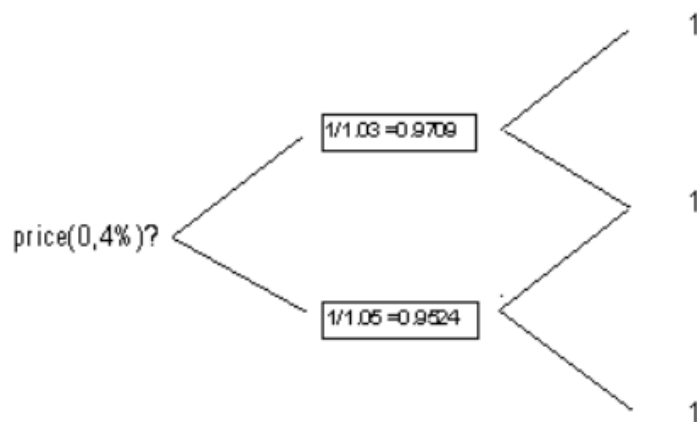


FIG. 3.6: Pagamentos do título descontado para a data 1

O problema agora é encontrar o preço hoje, “price(0, 4%)”. Aqui é onde são adotadas as suposições de neutralidade ao risco. Assumindo uma medida neutra ao risco, calcula-se:

$$In[1] := price[0, 0.04] = \frac{0.5 * price[1, 0.03] + 0.5 * price[1, 0.05]}{1.04}$$

$$Out[1] := 0.924642$$

onde:  $price[1, 0.03] \rightarrow \frac{1}{1.03}$ ,  $price[1, 0.05] \rightarrow \frac{1}{1.05}$

Então a árvore de preço para esse título de desconto puro na data 2 pode ser vista na Figura 3.7.

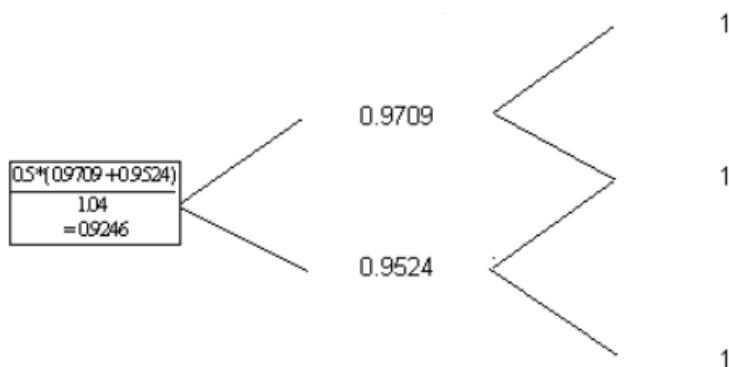


FIG. 3.7: Árvore de preço do título de desconto puro na data 2

Perceba que  $price[0, 4\%]$  fornece a taxa futura para duas datas (dois períodos na árvore binomial), como pode ser visto na Equação 3.10.

$$In[2] := r_2 = \left( \frac{0.5 * \left( \frac{1}{1+r_{111}} + \frac{1}{1+r_{101}} \right)}{1 + r_1} \right)^{-0.5} - 1 \quad (3.10)$$

$$Out[2] := 0.0399519$$

onde:  $r_1 \rightarrow 0.04, r_{111} \rightarrow 0.05, r_{101} \rightarrow 0.03,$

Na Equação 3.10 introduz-se uma nova notação para a taxa de juro. Note que  $r_{tjm}$  é a taxa de juro para o período  $m$ , no tempo  $t$  quando a taxa de juro realizou  $j$  movimentos de subida. Então, neste exemplo, tem-se  $r_{001} = 4\%$ ,  $r_{111} = 5\%$ ,  $r_{101} = 3\%$  e agora mostra-se que  $r_{002} = 3.99519\%$ . Facilmente pode-se estender esse processo acima demonstrado para árvores com mais períodos. Por exemplo, veja a árvore binomial de preço para um título de desconto com 3 datas (Figura 3.8).

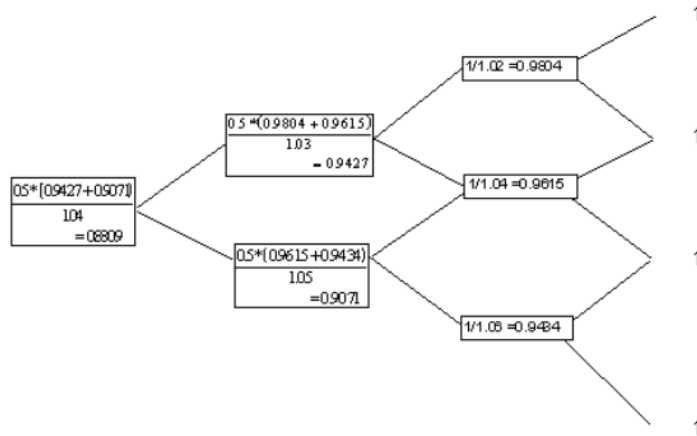


FIG. 3.8: Árvore de preço do título de desconto puro com 3 períodos

Com essa árvore de preço mostrada na Figura 3.8, é possível calcular a árvore de taxa futura para 3 períodos na data 0 ( $r_{003}$ ) e também para 2 períodos na data 1, ( $r_{102}$ ) e ( $r_{112}$ ) (vide Figura 3.9).

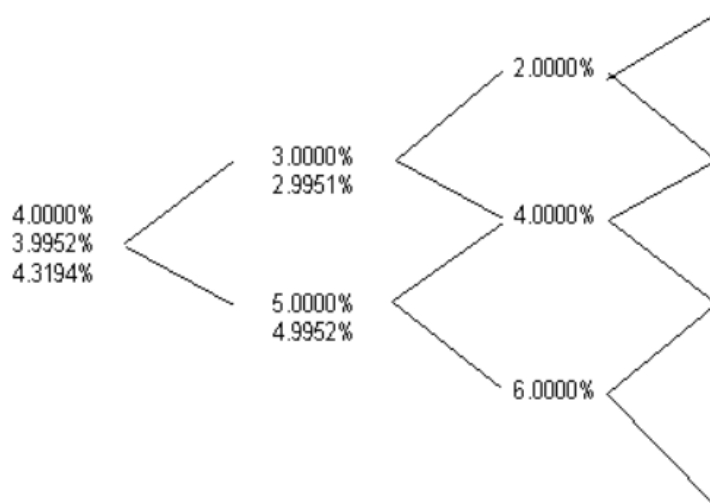


FIG. 3.9: Árvore de taxa de juros futura - 3 períodos

Esse modelo simples pode ser usado para apreçar opções cujos pagamentos são funções da estrutura a termo de taxa de juros. Suponha por exemplo que se queira apreçar um “interest-rate cap”. *Cap* de taxa de juros, como mostrado em YAZBEK (2012), é um derivativo de renda fixa no qual são acordados um período de vigência, um período entre *reset's* (chamado de tenor), uma taxa *cap* (teto) e uma taxa de referência (por exemplo *LIBOR* ou *IPCA*), além do *notional*<sup>12</sup>. Este instrumento é projetado para fornecer ao comprador um seguro contra a elevação, acima de um determinado nível, da flutuação da taxa de referência. Para esse exemplo simples, considera-se um *cap* que oferece ao comprador um empréstimo de 1 período de \$1,000,000 na data 1 com uma taxa não superior a 4%. A Figura 3.10 ilustra esse cenário. Na Figura 3.10, é possível ver que o *cap* só é tomado para a taxa de 5% resultando em um pagamento de  $\frac{\$10,000}{1.05} = \$9,523.81$ . Dada a neutralidade ao risco, desconta-se esse pagamento para chegar ao valor do *cap* hoje, que é de \$4,578.75. Esse modelo pode ser usado para apreçar outros derivativos mais complexos.

Exemplificado como ocorre o processo de precificação de uma opção por

<sup>12</sup>Valor financeiro sobre o qual serão aplicadas as taxas de juros acordadas

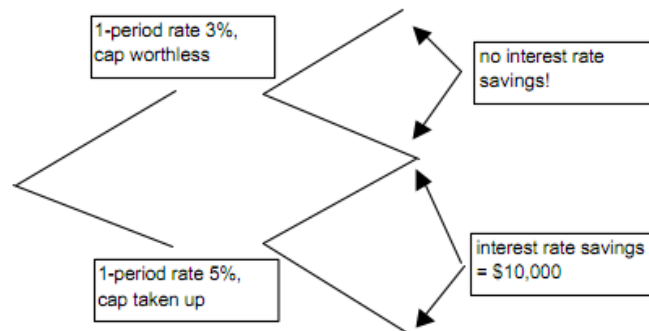


FIG. 3.10: Exemplo de precificação de *cap* de taxa de juro

meio de um modelo binomial simples, pode-se agora por meio de um exemplo, mostrar como neste trabalho as árvores binomiais de taxa de juros e de IDI foram utilizadas para a obtenção do prêmio de uma opção de taxa de juros. Como já dito, o modelo utilizado nessa precificação foi o desenvolvido por BASTIAN-PINTO (2010) e por GROSSI (2005), quando for necessário aplicar um salto na árvore.

TAB. 3.1: Dados de mercado do dia 4-mai-05.

Instrumento	Data	Taxa
CDI Over	04-mai-05	19.48%
DI1JUN5	01-jun-05	19.53%
DI1JUL5	01-jul-05	19.60%
DI1AGO5	01-ago-05	19.66%
DI1SET5	01-set-05	19.66%
DI1OUT5	03-out-05	19.65%
DI1JAN6	02-jan-06	19.47%

Conhecendo a taxa de juros vigente na data de análise 4/5/2005 (vide tabela<sup>13</sup> (3.1)), e valendo-se das equações (2.49), (2.50) e (2.51), mostradas no capítulo (2) da presente obra, constrói-se a árvore binomial recombinante de taxa de juros desenhada na Figura 3.11.

Vai-se agora, a partir da árvore de taxa de juros, construir a árvore binomial

<sup>13</sup>Tabela extraída do trabalho GROSSI (2005)

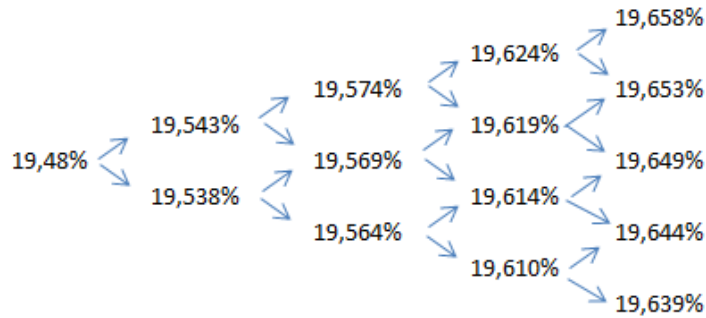


FIG. 3.11: Árvore binomial do modelo *ABNC* com 4 passos para o dia 4/5/2005

para o IDI. Para isso, será necessário conhecer também o valor do índice de IDI <sup>14</sup> no dia 4/5/2005, que é a data de análise. O valor do IDI para essa data era de 151.477,08.

Antes de esboçar a figura da árvore binomial para o IDI, faz-se duas sequências de movimentos na árvore para facilitar a compreensão de que a árvore que será construída é não-recombinante.

As sequências calculadas são: a) Alta-Alta-Queda; b) Queda-Alta-Alta. Claramente, se estiver em uma estrutura recombinante atinge-se um mesmo estado da natureza. Entretanto para o IDI isso não ocorre. A equação utilizada para se determinar em cada estado da natureza o valor do IDI é:

$$IDI_t := IDI_{t-1} * (1 + r_t)^{\frac{\Delta t}{252}} \quad (3.11)$$

Portanto, os resultados para cada movimento nas sequências a) e b) <sup>15</sup> são:

a) Valores encontrados para o IDI: 152.580,91 - 153.694,37 - 154.818,36

b) Valores encontrados para o IDI: 152.580,67 - 153.693,90 - 154.817,88

<sup>14</sup> *Link* da página eletrônica da BM&FBOVESPA para o contrato da opção de compra sobre IDI: [http://www.bmf.com.br/bmfbovespa/pages/contratos1/Financeiros/PDF/IDI\\_compra.pdf](http://www.bmf.com.br/bmfbovespa/pages/contratos1/Financeiros/PDF/IDI_compra.pdf)

<sup>15</sup> Como vai-se construir uma árvore com quatro passos e a opção para a qual essa árvore é construída tem vencimento em 1/7/2005, desenvolve-se uma árvore com 41 dias úteis.

Observe que no último estado da natureza alcançado os valores obtidos por a) e b) são distintos. Conclui-se, então, que a árvore para o IDI será não-recombinante. Na Figura 3.12 vemos a árvore do IDI obtida a partir da árvore binomial de taxa de juros.

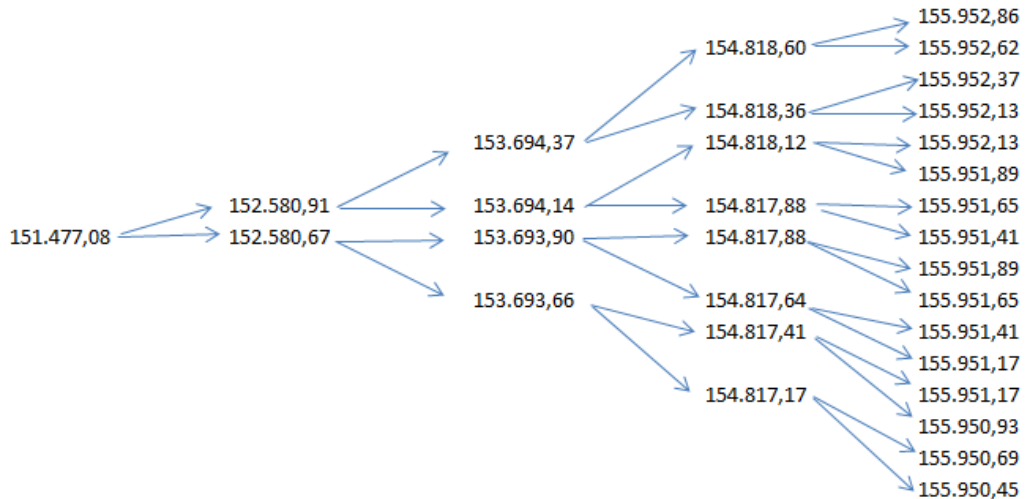


FIG. 3.12: Árvore binomial do IDI no método de *ABNC* com 4 passos para o dia 4/5/2005 com vencimento em 1/7/2005

Para elucidar melhor esse fato, de que a árvore de IDI não é recombinante, e que, portanto, o que dá o impacto no valor do IDI não é o incremento dado no juros mas sim o nível de juros presente em um determinado nó, mostra-se a correção do IDI em um exemplo hipotético.

Suponha que inicialmente se esteja no “Ponto X” e, pretenda-se caminhar para o “Ponto Y”, ambos no mesmo nível de taxa de juros, 0%. Para chegar no “Ponto Y”, como mostrado na Figura 3.13, é possível percorrer dois caminhos distintos. No caminho *a)* tem-se três altas seguidas de três quedas. Já no caminho *b)* tem-se três quedas seguidas de três altas. O incremento ou decremento dado na taxa de juros sempre é de 1%, o que, por construção, obriga os pontos *X* e *Y* a estarem num mesmo nível de taxa de juros.

Supondo agora que o IDI valha 100 e que um nó esteja a 10 dias do outro nó - o que resulta em um passo de 0,04 -, pode-se perceber na Figura 3.14, que

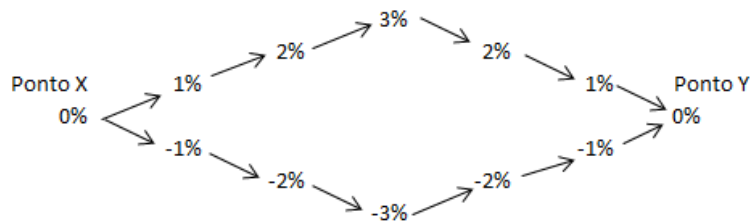


FIG. 3.13: Árvore binomial de taxa de juros para o exemplo hipotético

os valores encontrados para o IDI no final dos dois caminhos traçados são distintos entre si. Isso mostra, de fato, a não recombinação da árvore para o valor do IDI.

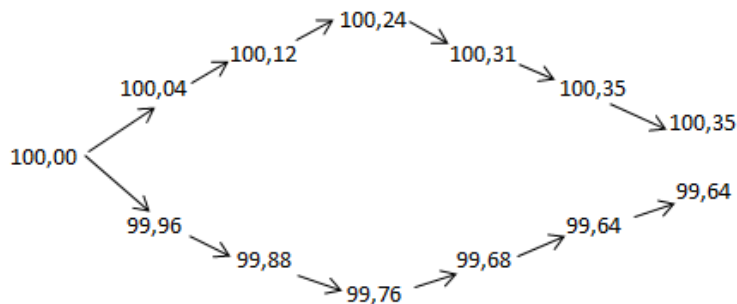


FIG. 3.14: Árvore binomial de IDI para o exemplo hipotético

### 3.1.2 O EFEITO DAS DECISÕES DO COPOM NA ÁRVORE BINOMIAL

Os saltos referentes às diferenças entre as expectativas do mercado e as decisões do COPOM ocorrem em datas fixas e conhecidas. O ideal, então, seria fixar os períodos dos ramos da árvore de modo a coincidir um nó com cada salto. Essa ideia relatada foi utilizada por GROSSI (2005). Entretanto neste trabalho optou-se por deixar os passos no tempo variarem, atentando apenas para o fato que todos os passos devem ter o mesmo tamanho. Com isso, como nem sempre a data de reunião do COPOM coincidia com algum nó da árvore, foi-se necessário deslocar a data de cada salto do COPOM para o nó mais próximo.

É importante saber que, na ramificação em que ocorrer o salto do COPOM, os nós da árvore serão duplicados. Para cada nó do modelo ABNC em uma data de COPOM, tem-se  $2^{n+1}$  nós no modelo ABNC que considera os saltos do COPOM, sendo  $n$  o número de reuniões do COPOM realizadas até aquele momento em questão.

Ciente disso, e da não recombinação da árvore de IDI, decidiu-se construir a árvore binomial de taxa de juros adotando-se não recombinação, ainda que os cálculos utilizados a considerem. Ou seja, a única ação que se teve durante a implementação do programa foi explicitar os nós recombinantes, não como um único nó, mas sim como dois nós com o mesmo valor de taxa de juros. O programa em MATLAB foi assim desenvolvido para facilitar o apreçamento das opções de IDI uma vez que, independente de se ter ou não uma reunião do COPOM, a árvore que levará o IDI da data de análise até a data de vencimento deverá ser não recombinante, pois a determinação do valor do IDI em um dado nó depende da trajetória seguida até ele.

O COPOM afetará a árvore binomial de taxa de juros pois toda vez que ocorrer uma reunião do COPOM, esta impactará as taxas esperadas dos estados da natureza da árvore em uma certa quantidade para cima e uma certa quantidade para baixo. Está ilustrado na figura (3.16) o que isso quer dizer<sup>16</sup>.

Observe na figura (3.16) que, na data efetiva do COPOM, o nó original da árvore binomial de taxa de juro,  $r_{20}$ , cede lugar não mais a apenas dois outros estados da natureza, mas sim, a quatro novos estados da natureza, que na figura (3.16) estão retratados por  $ur_{31}$ ,  $dr_{31}$ ,  $ur_{30}$  e  $dr_{30}$ . Ou seja, em cada nó que era previsto, vide os nós  $r_{31}$  e  $r_{30}$  na figura (3.15), ocorre uma alta e uma baixa. Para chegar a esses novos valores alcançados pelas taxas de juros originais primeiro deve-se aplicar a metodologia mostrada no artigo BASTIAN-PINTO (2010), mas na ramificação em que se tem uma reunião do COPOM deve-se utilizar a metodologia definida para o salto do COPOM

---

<sup>16</sup>Esta figura foi retirada do trabalho GROSSI (2005)



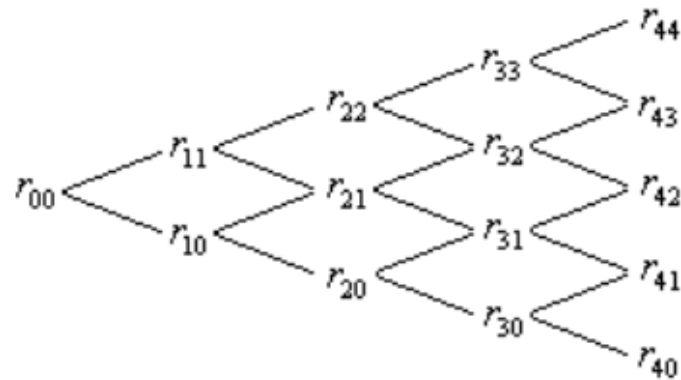


FIG. 3.15: Árvore binomial para taxa de juros sem considerar COPOM

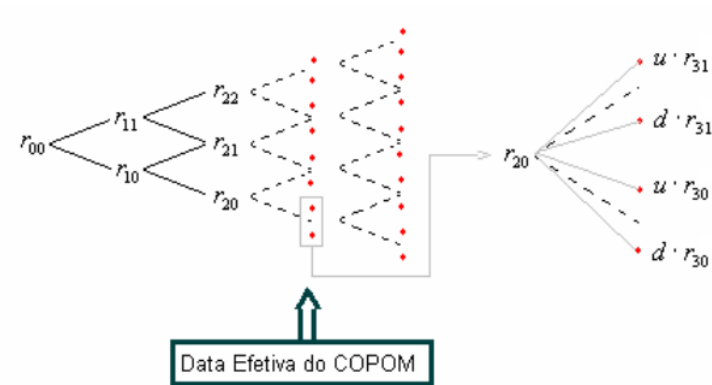


FIG. 3.16: Árvore binomial para taxa de juros considerando saltos nas datas do COPOM

mostrada na dissertação GROSSI (2005). Em seguida define-se uma nova probabilidade ( $p$ ) e novos valores ( $u$  e  $d$ ), que serão multiplicados pela taxa original para se chegar a um novo patamar de taxa de juros (em novos estados de alta e queda). Considere agora apenas essa nova definição para se chegar aos novos estados a partir de um original. A figura (3.17) resume a situação que se pretende definir. Nela  $r$  é o DI Over imediatamente antes da data do COPOM.

Como mostrado em GROSSI (2005), a variável aleatória que representa os saltos do COPOM pode ser aproximada por um processo Browniano como

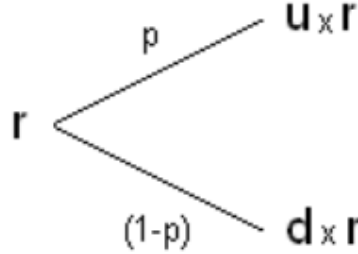


FIG. 3.17: Um passo da árvore binomial na taxa de juros para incorporar os saltos do COPOM

mostrado na Equação 3.12 a seguir.

$$dJ = C + \sigma dB \quad (3.12)$$

onde: -  $C$  : média do processo -  $\sigma$  : volatilidade do processo

Para calcular os valores de  $u$ ,  $d$  e  $p$ , será utilizada a mesma metodologia de COX (1979). A partir da árvore binomial, calcula-se a média e o desvio padrão:

$$E[J * r] = p * u * r + (1 - p) * d * r$$

$$(E[J * r])^2 = p^2 * u^2 * r^2 + (1 - p)^2 * d^2 * r^2 + 2 * p * (1 - p) * u * d * r^2$$

$$E[(J * r)^2] = p * u^2 * r^2 + (1 - p) * d^2 * r^2$$

$$Var(J * r) = (E[J * r])^2 - E[(J * r)^2] = p * (1 - p) * (u - d)^2 * r^2$$

Aproximando o processo para  $J$  tem-se:  $\Delta J = C + \sigma \Delta B$ , ou,  $J_{t+1} - J_t = C + \sigma \Delta B$ . Calculando o valor esperado e a variância de  $J_{t+1}$  considerando que no início  $t = t_0$  tem-se  $J_{t_0} = 0$ :

$$E[J * r] = C * r$$

$$E[(J * r)^2] = C^2 * r^2 + \sigma^2 * r^2 * \Delta t$$

$$Var(J * r) = \sigma^2 * r^2 * \Delta t^2$$

Igualando-se os valores calculados para média e variância de  $(J * r)$  na árvore e na aproximação no tempo discreto do processo dos saltos  $J$ , chega-se ao seguinte conjunto de equações:

$$C * r = p * u * r + (1 - p) * d * r$$

$$\sigma^2 * r^2 * \Delta t = p * (1 - p) * (u - d)^2 * r^2$$

A escolha da terceira equação para resolver o problema por Cox-Ross-Rubenstein foi fazer  $u = 1/d$ . Como baseia-se no raciocínio desenvolvido por Grossi em seu trabalho GROSSI (2005) e ele utiliza  $p = \frac{1}{2}$  para seguir o modelo de Black-Derman-Toy, como visto em BLACK (1990), também será utilizado aqui uma probabilidade igual a  $\frac{1}{2}$ . Isso resulta nos seguintes valores para  $u$  e  $d$ :

$$u = C + \sigma\sqrt{\Delta t}$$

$$d = C - \sigma\sqrt{\Delta t}$$

Para o modelo de saltos, a constante  $C$  do processo representa na verdade a média das realizações da variável  $J$ .

Apresentada essas considerações sobre a modelagem do efeito do COPOM na estrutura binomial da taxa de juros, pode-se agora mostrar como ficaria a árvore binomial de taxa de juros e a árvore binomial de IDI, mostradas nas Figuras 3.11 e 3.12, respectivamente, para o caso em que se constroi uma árvore com 4 passos. Como, no período em análise, dias compreendidos entre as datas 4/5/2005 (data de referência da opção ou data de análise) e 1/7/2005 (data de vencimento da opção), ocorreram duas reuniões do COPOM (em 18/5/2005 e 15/6/2005, respectivamente), as árvores construídas levaram em consideração ambas as reuniões. Como relatado, a inclusão na árvore de cada reunião do COPOM implicará na substituição de um nó por outros 4. Portanto, as dimensões da árvore crescem de forma bastante acelerada. Por uma questão de organização mostra-se essas árvores na forma matricial. Nas

Figuras 3.18 e 3.19 os saltos ocorrem nas colunas B e E, no primeiro e quarto passos da árvore binomial.

	A	B	C	D	E	Continuação				
	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E
1	19,480%	19,632%	19,663%	19,713%	19,883%	33	0	0	0	0 19,878%
2	0	19,454%	19,658%	19,709%	19,702%	34	0	0	0	0 19,698%
3	0	19,628%	19,485%	19,709%	19,473%	35	0	0	0	0 19,469%
4	0	19,450%	19,480%	19,704%	19,296%	36	0	0	0	0 19,292%
5	0	0	19,658%	19,534%	19,878%	37	0	0	0	0 19,874%
6	0	0	19,654%	19,530%	19,698%	38	0	0	0	0 19,693%
7	0	0	19,480%	19,530%	19,469%	39	0	0	0	0 19,464%
8	0	0	19,476%	19,525%	19,292%	40	0	0	0	0 19,287%
9	0	0	0	19,709%	19,878%	41	0	0	0	0 19,874%
10	0	0	0	19,704%	19,698%	42	0	0	0	0 19,693%
11	0	0	0	19,704%	19,469%	43	0	0	0	0 19,464%
12	0	0	0	19,700%	19,292%	44	0	0	0	0 19,287%
13	0	0	0	19,530%	19,874%	45	0	0	0	0 19,869%
14	0	0	0	19,525%	19,693%	46	0	0	0	0 19,689%
15	0	0	0	19,525%	19,464%	47	0	0	0	0 19,460%
16	0	0	0	19,521%	19,287%	48	0	0	0	0 19,283%
17	0	0	0	0	19,702%	49	0	0	0	0 19,698%
18	0	0	0	0	19,524%	50	0	0	0	0 19,519%
19	0	0	0	0	19,297%	51	0	0	0	0 19,292%
20	0	0	0	0	19,121%	52	0	0	0	0 19,117%
21	0	0	0	0	19,698%	53	0	0	0	0 19,693%
22	0	0	0	0	19,519%	54	0	0	0	0 19,514%
23	0	0	0	0	19,292%	55	0	0	0	0 19,288%
24	0	0	0	0	19,117%	56	0	0	0	0 19,113%
25	0	0	0	0	19,698%	57	0	0	0	0 19,693%
26	0	0	0	0	19,519%	58	0	0	0	0 19,514%
27	0	0	0	0	19,292%	59	0	0	0	0 19,288%
28	0	0	0	0	19,117%	60	0	0	0	0 19,113%
29	0	0	0	0	19,693%	61	0	0	0	0 19,689%
30	0	0	0	0	19,514%	62	0	0	0	0 19,510%
31	0	0	0	0	19,288%	63	0	0	0	0 19,283%
32	0	0	0	0	19,113%	64	0	0	0	0 19,108%

FIG. 3.18: Árvore binomial do modelo *ABNC* considerando os saltos do COPOM com 4 passos para o dia 4/5/2005.

						Continuação					
	A	B	C	D	E		A	B	C	D	E
1	151.477,08	152.585,54	153.703,72	154.832,74	155.979,03	33	0	0	0	0	155.978,79
2	0,00	152.576,29	153.703,48	154.832,50	155.969,47	34	0	0	0	0	155.969,23
3	0,00	152.585,31	153.685,07	154.832,26	155.957,31	35	0	0	0	0	155.957,07
4	0,00	152.576,06	153.684,83	154.832,02	155.947,92	36	0	0	0	0	155.947,68
5	0,00	0,00	153.703,24	154.804,53	155.978,79	37	0	0	0	0	155.978,55
6	0,00	0,00	153.703,01	154.804,29	155.969,23	38	0	0	0	0	155.968,99
7	0,00	0,00	153.684,60	154.804,05	155.957,07	39	0	0	0	0	155.956,83
8	0,00	0,00	153.684,36	154.803,81	155.947,68	40	0	0	0	0	155.947,44
9	0,00	0,00	0,00	154.832,02	155.978,79	41	0	0	0	0	155.978,55
10	0,00	0,00	0,00	154.831,78	155.969,23	42	0	0	0	0	155.968,99
11	0,00	0,00	0,00	154.831,54	155.957,07	43	0	0	0	0	155.956,83
12	0,00	0,00	0,00	154.831,30	155.947,68	44	0	0	0	0	155.947,44
13	0,00	0,00	0,00	154.803,81	155.978,55	45	0	0	0	0	155.978,30
14	0,00	0,00	0,00	154.803,57	155.968,99	46	0	0	0	0	155.968,75
15	0,00	0,00	0,00	154.803,33	155.956,83	47	0	0	0	0	155.956,59
16	0,00	0,00	0,00	154.803,10	155.947,44	48	0	0	0	0	155.947,21
17	0,00	0,00	0,00	0,00	155.969,47	49	0	0	0	0	155.969,23
18	0,00	0,00	0,00	0,00	155.959,98	50	0	0	0	0	155.959,74
19	0,00	0,00	0,00	0,00	155.947,93	51	0	0	0	0	155.947,69
20	0,00	0,00	0,00	0,00	155.938,61	52	0	0	0	0	155.938,37
21	0,00	0,00	0,00	0,00	155.969,23	53	0	0	0	0	155.968,98
22	0,00	0,00	0,00	0,00	155.959,74	54	0	0	0	0	155.959,50
23	0,00	0,00	0,00	0,00	155.947,69	55	0	0	0	0	155.947,45
24	0,00	0,00	0,00	0,00	155.938,37	56	0	0	0	0	155.938,14
25	0,00	0,00	0,00	0,00	155.969,23	57	0	0	0	0	155.968,98
26	0,00	0,00	0,00	0,00	155.959,74	58	0	0	0	0	155.959,50
27	0,00	0,00	0,00	0,00	155.947,69	59	0	0	0	0	155.947,45
28	0,00	0,00	0,00	0,00	155.938,37	60	0	0	0	0	155.938,14
29	0,00	0,00	0,00	0,00	155.968,99	61	0	0	0	0	155.968,74
30	0,00	0,00	0,00	0,00	155.959,50	62	0	0	0	0	155.959,26
31	0,00	0,00	0,00	0,00	155.947,45	63	0	0	0	0	155.947,22
32	0,00	0,00	0,00	0,00	155.938,14	64	0	0	0	0	155.937,90

FIG. 3.19: Árvore binomial do IDI no método de *ABNC* considerando os saltos do COPOM com 4 passos para o dia 4/5/2005 com vencimento em 1/7/2005

## 4 RESULTADOS

Pretende-se com este capítulo aplicar o modelo proposto para a precificação de opções de IDI negociadas no mercado e analisar os resultados obtidos.

Vários testes foram realizados a fim de validar o modelo apresentado e verificar o impacto no preço da opção de IDI quando se varia os parâmetros dele.

Para a validação do modelo, os preços das opções obtidos nos testes realizados foram comparados com os preços divulgados pela BM&FBOVESPA. A verificação das mudanças produzidas nos parâmetros também foram analisadas sob a óptica dos preços divulgados pela BM&FBOVESPA. Primeiramente será formalizada a sequência de testes que foi realizada, depois serão mostrados os gráficos resultantes desses testes e, em seguida, comentam-se os resultados verificados nos gráficos. Após esse processo, o modelo ABNC será comparado também com um outro modelo, o modelo BDT com e sem saltos. Para isso, serão utilizados os resultados desenvolvidos no trabalho de João Grossi (em GROSSI (2005)). Além dessas análises, o modelo proposto será avaliado também para um período mais recente, com o intuito de melhor garantir a sua viabilidade na precificação de opções de taxa de juros.

Inicia-se a sequência de testes já no momento da estimação dos parâmetros de volatilidade e velocidade de reversão à média do modelo *ABNC*. Percebe-se que a determinação da janela que seria escolhida para o cálculo dos parâmetros do modelo afetava bastante o valor estimado dessas variáveis. A partir da série de dados de CDI obtidas no site da CETIP - e depois de fazer as considerações mostradas na seção 3.1.2, definem-se os horizontes das janelas utilizadas. Para validar o modelo, serão utilizados os preços de quatro contratos de opção de IDI com vencimento em 1/7/2005 e data de análise em 4/5/2005. Os horizontes adotados anteriores a essa data de análise

das opções escolhidas foram 160, 170, 180, 190, 200, 220, 252 dias úteis (com base nos feriados nacionais no Brasil). Observe que foi utilizado um período a partir de seis meses de informação para calibrar o modelo. Utilizando a metodologia de estimação mostrada no artigo BASTIAN-PINTO (2010) e detalhada no apêndice (7.2), obtem-se os seguintes valores para a volatilidade, definida como sigma ( $\sigma$ ), e velocidade de reversão à média, definida como eta ( $\eta$ ):

$$\sigma = [ 8.15 \ 8.5 \ 8.36 \ 8.34 \ 8.95 \ 9.04 \ 9.53 ] \times 10^{-4};$$

$$\eta = [ 5.88 \ 8.19 \ 6.93 \ 9.71 \ 8.66 \ 4.06 \ 1.40 ] \times 10^{-4}.$$

Ressalta-se que os dados utilizados para a calibração desse modelo são obtidos a partir da evolução histórica dos retornos das taxas de CDI. Como pretende-se modelar a parte da árvore que não possui salto, promove-se um ajuste na série excluindo as variações devido as decisões do COPOM.

Para os ramos da árvore que representarão os saltos devidos as reuniões do COPOM tem-se as seguintes volatilidades e constantes  $C$  (constante que representa a média do processo)<sup>17</sup>:

$$\sigma(\text{copom}) = [ 0.00507 \ 0.00559 \ 0.00473];$$

$$C(\text{copom}) = [ 1.0011 \ 1.0013 \ 1,0007].$$

Estes parâmetros foram estimados a partir de janelas com horizontes de 59, 124 e 252 dias úteis (com base nos feriados nacionais no Brasil). Para a calibração do modelo utilizou-se também a evolução histórica dos retornos das taxas de DI Over. Supondo-se que em  $D + 1$  da data de reunião do COPOM os choques sejam unicamente devido ao resultado do COPOM do dia  $D$ , constroem-se duas séries, uma utilizando todos os dias de CDI e outra retirando apenas as datas do COPOM. Com isso é possível isolar a componente aleatória dos saltos da volatilidade da taxa de juros e obter a volatilidade e a constante  $C$  que são calculadas pelo desvio padrão e pela média, respectivamente, das séries mencionadas.

Ressalta-se que a série de juros pode ser tratada de uma maneira diferente,

---

<sup>17</sup>Como detalhado no Capítulo 3, a equação que modela os saltos é  $\partial J = C + \sigma \partial B$



como a apresentada no trabalho de TONHOLO (2011). Esse autor a exemplo do que foi feito em MÜLLER (2009), concilia dois modelos estocásticos com intuito de explicar a taxa DI-overnight de forma consistente e bem ajustada. Segundo TONHOLO (2011) essa taxa em estudo deve ser escrita como uma soma de um processo de Markov que representará a meta SELIC e um processo de Ornstein-Uhlenbeck que representará o *spread* entre a meta SELIC e a taxa DI-Overnight.<sup>18</sup>

Como era esperado, eliminando-se o fator COPOM, as volatilidades encontradas são menores que aquelas que consideram esse fator.

Cabe ressaltar aqui o porquê de se optar por horizontes longos na estimação dos parâmetros do modelo de taxa de juros no que tange os ramos da árvore binomial fora das datas referentes ao COPOM. Pode-se explicar isso quando se analisa o gráfico mostrado na Figura 4.1.

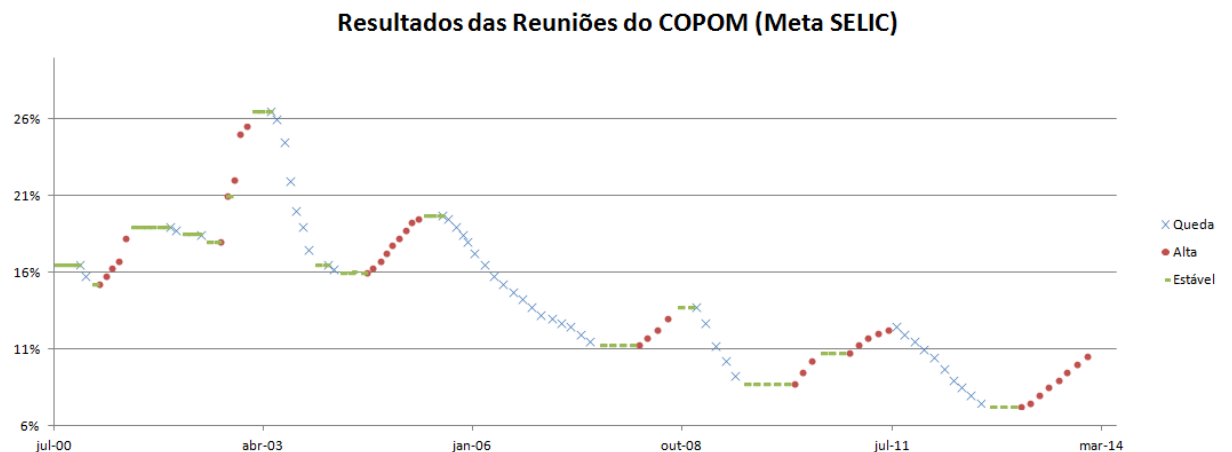


FIG. 4.1: Histórico das taxas de juros fixadas pelas reuniões do COPOM

Observa-se na Figura 4.1 que o COPOM apresenta ciclos de alta de juros e ciclos de queda de juros. Como exemplo tem-se o período entre agosto de 2004 a abril de 2005, em que se verifica um aperto monetário - elevação das taxas de juros vigentes no mercado financeiro -, e o período entre agosto de 2005 a julho de 2007, em que se constata um afrouxamento das políticas monetárias

<sup>18</sup>Mais detalhes veja as obras TONHOLO (2011) e MÜLLER (2009)

- diminuição das taxas de juros. Percebe-se que o intervalo de tempo em que o COPOM mantém o mesmo ciclo é longo. Logo, pode acontecer, por exemplo, que, num determinado horizonte de tempo escolhido, a média dos juros que estava numa alta tenda a subir ainda mais se o COPOM julgar necessária a continuidade de aperto monetário<sup>19</sup>. O mesmo pode ocorrer quando o COPOM decidir dar continuidade a um afrouxamento monetário quando as taxas de juros já estão baixas. Neste caso, esta taxa de juros que em média estava numa queda tende a cair ainda mais se o COPOM julgar necessária a continuidade do afrouxamento monetário. Portanto, neste trabalho optou-se por horizontes de tempo longos para realizar a calibragem do modelo de taxa de juros, pois, certamente, no longo prazo o mercado já conseguiu absorver as decisões promulgadas nas reuniões do COPOM.

De posse dos parâmetros e implementado o modelo *ABNC* em MATLAB, foi possível apreçar as quatro opções mostradas na tabela 4.1 <sup>20</sup>.

TAB. 4.1: Contratos de opção sobre IDI com vencimento em 01-jul-05 no dia 4-mai-05.

Contrato	Vencimento	Ajuste	Strike
IDIJL02	01-jul-05	1,411.00	154,500.00
IDIJL03	01-jul-05	936.00	155,000.00
IDIJL04	01-jul-05	441.00	155,500.00
IDIJL05	01-jul-05	11.00	156,000.00

O desenvolvimento desse programa computacional teve como base teórica as equações apresentadas na subseção 2.2.6 do capítulo 2 do presente trabalho. Como o modelo *ABNC* trata de uma árvore binomial, o apreçamento das opções será feito através de uma árvore binomial de taxa de juros<sup>21</sup>. A

<sup>19</sup>Em geral, a elevação dos juros tem como objetivo reduzir a inflação. Como geralmente o impacto de uma decisão do COPOM irá afetar a inflação só daqui a 6 meses, é comum que a política monetária mantenha uma certa estratégia (de aumento ou de redução dos juros) por períodos longos.

<sup>20</sup>Fonte: GROSSI (2005)

<sup>21</sup>Vide capítulo 3 para um maior detalhamento do processo de precificação de opções de

taxa de juros que foi utilizada no programa é a continuamente composta, ao contrário do que se adota no dia a dia em investimentos financeiros - as taxas de juros discretamente compostas em base anual.<sup>22</sup> Na verdade, será feito uma árvore do logaritmo neperiano da taxa continuamente composta diária, uma vez que o modelo da taxa em cada passo é lognormal.

Pelo modelo *ABNC*, a árvore é construída apenas com base na taxa de juros na data inicial de análise da curva de juros de mercado e nos parâmetros de volatilidade e de velocidade de reversão à média, para os períodos sem saltos, e nos parâmetros de volatilidade e da constante que representa a média das realizações da variável aleatória que modela os resultados do COPOM, para os períodos com saltos. Portanto, uma vez obtida a árvore, duas pequenas translações precisam ser feitas em todos os seus ramos para que as taxas de juros presentes nessa árvore possam, de fato, corresponder às taxas de juros observadas no mercado.

Na primeira correção da árvore que foi implementada, deslocou-se a média do  $\ln(\text{taxa continuamente composta})$  para o  $\ln(\text{taxa de mercado})$ . O segundo ajuste foi para assegurar a não arbitragem do mercado. Desta vez, desloca-se os ramos da árvore de  $\frac{1}{2}\sigma^2t$ , como abordado no compêndio HULL (2009). Por causa destes ajustes, e ciente de que o modelo *ABNC* faz uma aproximação na expansão de Taylor para chegar na sua forma final, é esperado que o passo na árvore seja pequeno.

Entretanto, a escolha do quão pequeno deve ser esse passo precisa ser feita também sob a luz de outros fatores. Um desses fatores é o tempo de execução da rotina computacional. De nada adiantaria um passo extremamente curto se para isso fossem necessárias longas horas de processamento até se atingir o valor do prêmio da opção. Outro ponto importante é, considerando que a árvore binomial de IDI não é recombinante, não criar um número extremamente grande de nós na árvore.

---

IDI via árvore de taxa de juros e árvore de IDI

<sup>22</sup>Para maiores detalhes na distinção dessas taxas vide YAZBEK (2012).

Para definir o passo, então, inicialmente verificou-se a capacidade computacional disponível. Percebeu-se que, ao se precificar as opções de IDI pelo modelo *ABNC* sem levar em consideração as reuniões do COPOM, era possível um passo de 1,95 dias (ou em número de passos tem-se um total de 21 passos). Caso contrário, o tempo de execução era muito longo (mais de 10 minutos), ou ocorria um erro de *overflow* no MATLAB devido ao excesso de nós na árvore (já que o número de nós é uma variável inteira). Esse problema poderia ser contornado através de um aprimoramento do código em MATLAB, porém isso não foi feito por estar fora do objetivo deste trabalho. Já para o modelo *ABNC* com presença do COPOM, esse passo não poderia ser menor que 2,41 dias (ou em número de passos tem-se um total de 17 passos). Essa diferença de quantidade de passos justifica-se pela não recombinação que a reunião do COPOM promove na árvore, como foi visto na seção 3.1.2 do capítulo 3. Ressalta-se que a presente limitação não invalida o modelo, pois, além de ele fornecer resultados com baixo desvio quando comparados com os prêmios de mercado, ele futuramente poderá ter sua precisão aumentada quando o avanço tecnológico certamente propiciará uma maior capacidade computacional aos equipamentos computacionais disponíveis e, conseqüentemente, a utilização de um maior número de nós na árvore.

Ao analisar os primeiros resultados obtidos, percebe-se que os preços das opções não diferiam muito quando o número de passos na árvore variava de 10 a 17. Posto isso, e levando-se em consideração o fato das árvores não serem recombinantes, definiu-se que, para a maioria dos testes, a quantidade de passos adotada seria 10. Logo, nos gráficos e tabelas que serão mostrados, quando nada for dito, será considerado uma árvore de 10 passos.

Passa-se agora aos gráficos e tabelas. Aqui será apresentado apenas os resultados mais relevantes para a análise do modelo.

Nos três gráficos a seguir (mostrados nas Figuras 4.2, 4.3 e 4.4)<sup>23</sup>, adota-se o número máximo de passos como 17. Não se apresenta o gráfico para a

---

<sup>23</sup>O “Preço da Opção” nos três gráficos está expresso em reais

opção de 156.000,00 de preço de exercício porque para esta opção não se encontrou valores diferentes de zero. Isso pode ser justificado pelo fato desta opção estar muito “fora do dinheiro”.<sup>24</sup> O baixo nível da volatilidade bem como a não viabilidade do aumento do número de passos da árvore binomial *non-censored* para as probabilidades de transição contribuíram para se obter esse valor nulo.

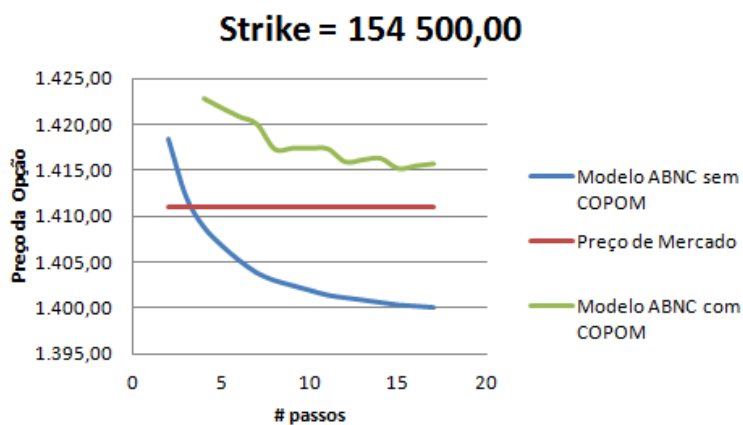


FIG. 4.2: Gráfico comparativo para a opção de *strike* 154.500,00

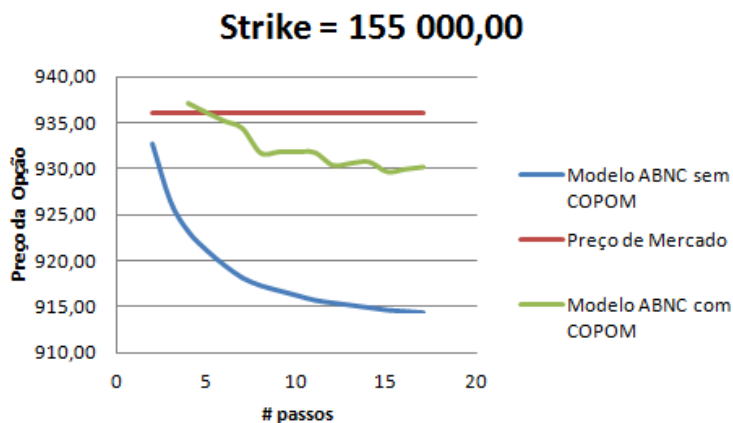


FIG. 4.3: Gráfico comparativo para a opção de *strike* 155.000,00

Com base nas Figuras 4.2, 4.3 e 4.4, nota-se que o “Modelo *ABNC* com COPOM” fornece valores mais próximos aos preços negociados no mercado

<sup>24</sup>Ou seja, trata-se de uma opção de compra com preço de exercício muito elevado.

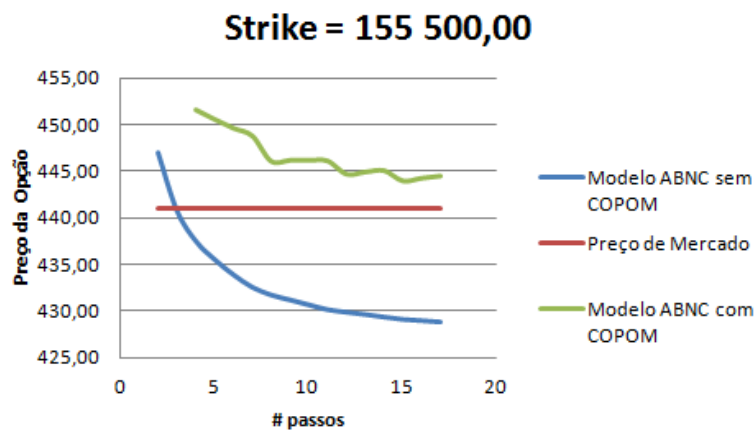


FIG. 4.4: Gráfico comparativo para a opção de *strike* 155.500, 00

se comparado aos valores obtidos através do “Modelo *ABNC* sem COPOM”. Esse último gera valores mais distantes dos preços observados no mercado das opções de IDI quando o número de passos na árvore binomial aumenta. Em contrapartida, no modelo que considera as decisões das reuniões do COPOM, verifica-se valores mais próximos dos preços negociados no mercado financeiro à medida que o número de passos na árvore aumenta.

Os gráficos a seguir se referem apenas à opção cujo preço de exercício é 155.000,00.

No gráfico apresentado na Figura 4.5, varia-se o parâmetro sigma da árvore. Utilizam-se 200 pontos diferentes para a volatilidade (sigma). O passo utilizado na construção desse gráfico foi 0,000041, ou 5% do valor inicial do sigma. Portanto, o intervalo obtido para esse parâmetro foi:  $\sigma = [0,000815 ; 0,009]$ .

Os outros parâmetros - Eta e Sigma-Copom são mantidos constantes na árvore.  $\eta = 0,000588$  e  $\sigma(Copom) = 0,004731$ .

No gráfico mostrado na Figura 4.6, tem-se o efeito (no preço da opção) da variação no eta da árvore. Utilizam-se 200 pontos diferentes para a velocidade de reversão à média (eta). O passo utilizado na construção desse gráfico foi 0,00003, ou 5% do valor inicial do eta. Portanto, o intervalo obtido para esse

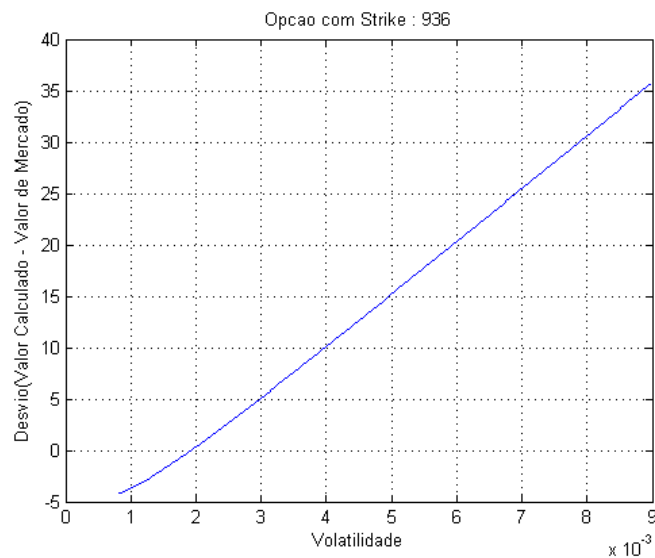


FIG. 4.5: Desvio do preço com a variação do sigma

parâmetro foi:  $\eta = [0,000588 ; 0,00658]$ .

Os outros parâmetros Sigma e Sigma-Copom são mantidos constantes na árvore.  $\sigma = 0,000815 ; \sigma(Copom) = 0,004731$ .

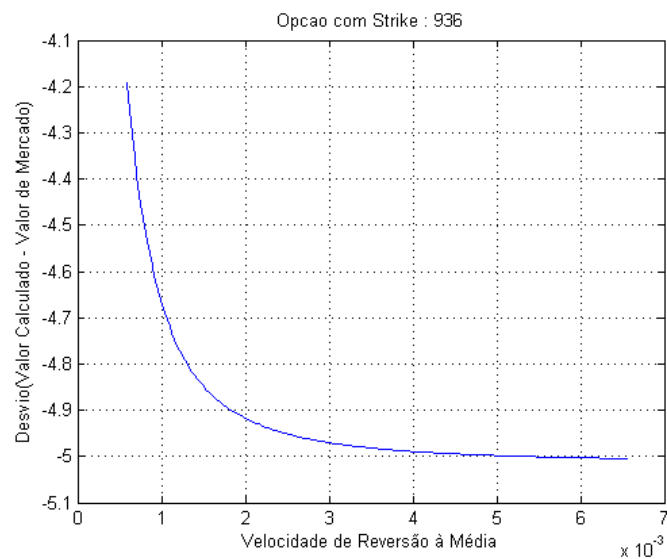


FIG. 4.6: Desvio do preço com a variação da velocidade de reversão à média

Percebe-se nas Figuras 4.5 e 4.6, que um aumento nos valores dos parâmetros

sigma e eta resulta em um aumento do desvio, em módulo. Mas o efeito desse último parâmetro, diferentemente do sigma, tende a estabilizar o desvio. Ou seja, o preço da opção, quando se incrementa o valor do eta, converge para um certo nível, neste caso R\$ - 5, que não se verifica ao produzir incrementos no sigma.

No gráfico mostrado na Figura 4.7, apresenta-se o efeito (no preço da opção) decorrente da variação do sigma e do eta da árvore. Utilizam-se 200 pontos diferentes para a volatilidade (sigma) e para a velocidade de reversão à média (eta). O passo utilizado na construção desse gráfico foi 0,000041, ou 5% do valor inicial do sigma e 0,00003, ou 5% do valor inicial do eta. Portanto, os intervalos obtidos para esses parâmetros foram:  $\sigma = [0,000815 ; 0,009]$  e  $\eta = [0,000588 ; 0,00658]$ . O outro parâmetro Sigma-Copom é mantido constante na árvore:  $\sigma(Copom) = 0,004731$ .

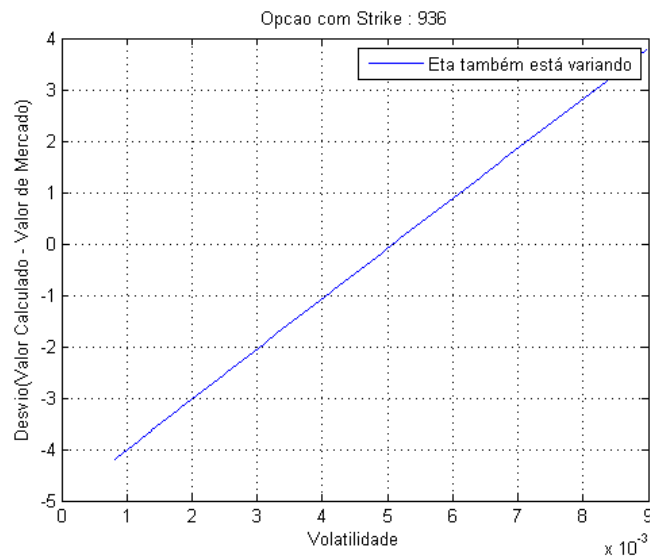


FIG. 4.7: Desvio do preço com a variação do sigma e da velocidade de reversão à média

Ao promover um aumento simultâneo na volatilidade e na velocidade de reversão à média, como mostrado na Figura 4.7, constata-se que a curva do desvio segue as características ressaltadas na Figura 4.5, ou seja, nesse teste



TAB. 4.2: Exemplificando alguns pontos da Figura 4.7

$\sigma(\times 10^{-4})$	$\eta(\times 10^{-4})$	Desvio
8,15	5,88	-4,19
10,61	7,68	-3,95
39,29	22,08	-2,02
44,23	32,28	-0,65
58,17	42,48	0,71
69,24	50,58	1,78

também ocorre a não estabilização do valor do desvio.

No gráfico mostrado na Figura 4.8, vê-se a variação no sigma da árvore. Utilizam-se 800 pontos diferentes para a volatilidade (sigma) resultante do efeito das reuniões do COPOM. O passo utilizado na construção desse gráfico foi 0,000237, ou 5% do valor inicial da volatilidade. Portanto, o intervalo obtido para esse parâmetro foi:  $\sigma(Copom) = [0,004731 ; 0,0518]$ . Os outros parâmetros Sigma e Eta são mantidos constantes na árvore.  $\sigma = 0,000815$  e  $\eta = 0,000588$ .

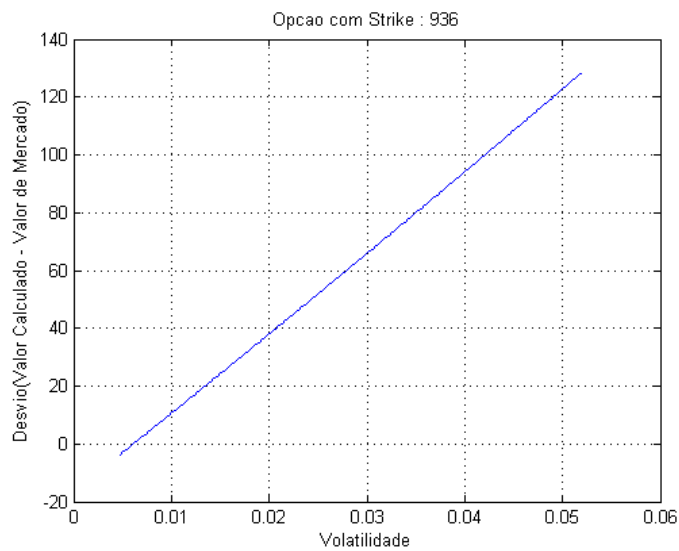


FIG. 4.8: Desvio do preço com a variação do sigma resultante dos Saltos do COPOM

Analisando agora a Figura 4.8, nota-se que o desvio afasta-se do zero de

forma crescente. Observa-se que ocorre um aumento muito expressivo no preço calculado pelo modelo proposto à medida em que a volatilidade aumenta. Ao se comparar essa Figura 4.8 com a Figura 4.5 percebe-se que ao se considerar o COPOM, o preço calculado diverge mais expressivamente do mercado quando a volatilidade é aumentada. Fato esperado uma vez que o nível de volatilidade do COPOM é consideravelmente maior que o nível de volatilidade encontrada no mercado em dias normais, sem a presença das decisões do COPOM.

Observa-se que apesar do desvio aumentar com o aumento da volatilidade (seja no caso em que há reuniões do COPOM ou simplesmente nos casos das oscilações diárias verificadas no mercado financeiro) ressalta-se que, nos testes aqui realizados, extrapolou-se os valores dos parâmetros. Ou seja, partiu-se de valores reais, que foram estimados a partir de dados de mercado, e incrementou-se esses parâmetros até o desvio mostrar alguma tendência, que pode ser de estabilização ou de explosão.

Isso todavia foi implementado com o intuito de julgar a sensibilidade do modelo *ABNC* com relação às variações de seus parâmetros. Conclui-se que, para valores dos parâmetros próximos dos valores estimados do mercado, o modelo apresenta preços para as opções de IDI muito próximos aos negociados no mercado. Além disso, esses testes mostram que o modelo desenvolvido em BASTIAN-PINTO (2010) é bastante robusto mediante alterações ocorridas no mercado. Isso porque, mesmo com valores elevados de volatilidade e de velocidade de reversão à média, o modelo não apresentou grandes desvios. Portanto, o uso da árvore binomial (para implementar o modelo *non-censored* para probabilidades) para apreçar opções de taxas de juros está validado neste trabalho, dado que os resultados obtidos dos preços das opções ficaram próximos dos verificados no mercado e a complexidade computacional de implementação dessa árvore é simples quando comparada com a complexidade da implementação do modelo, por exemplo, em uma árvore trinomial.

Posto isso, parte-se agora para uma comparação entre os modelos *ABNC*

e BDT. Utilizando-se as opções de IDI já abordadas, serão mostrados os seguintes quadros comparativos:

- a) Modelo BDT versus modelo BDT com saltos<sup>25</sup>
- b) Modelo ABNC versus modelo ABNC com saltos<sup>26</sup>
- c) Modelo BDT versus modelo ABNC
- d) Modelo BDT com saltos versus modelo ABNC com saltos
- e) Comparativo entre os desvios dos preços (BDT - Mercado), (ABNC - Mercado) e (BDT - ABNC)
- f) Comparativo entre os desvios dos preços ( $BDT_{saltos}$  - Mercado), ( $ABNC_{saltos}$  - Mercado) e ( $BDT_{saltos} - ABNC_{saltos}$ )

TAB. 4.3: Preços calculados para contratos de opções de IDI pelo Método de BDT e pelo Método de BDT com Saltos para 4/5/2005

Contrato	Strike	BDT	BDT com Saltos
IDIJL02	154.500,00	1.411,27	1.414,06
IDIJL03	155.000,00	925,62	928,42
IDIJL04	155.500,00	439,97	442,78
IDIJL05	156.000,00	3,26	1,93

Em a), como visto na tabela (4.3) e discutido em GROSSI (2005), Grossi mostra que o fato da média dos saltos, no prazo observado, ter sido maior que um, significa que o mercado esperou aumentos menores, ou quedas maiores, para as taxas de juros do que ocorreu nas decisões do COPOM. Ao utilizar essa média, adiciona-se uma tendência para as próximas reuniões e chega-se, na maioria dos casos a preços mais elevados para o modelo BDT com saltos do que para o BDT sem saltos.

<sup>25</sup>Tabela extraída do trabalho (GROSSI (2005))

<sup>26</sup>Utilizou-se árvores com 14 passos por parecer que os preços fornecidos por esses dois modelos, ABNC e ABNC com saltos, estariam estabilizando-se em um patamar de preço.

TAB. 4.4: Preços calculados para contratos de opções de IDI pelo Método de ABNC e pelo Método ABNC com Saltos para 4/5/2005

Contrato	Strike	ABNC	ABNC com Saltos
IDIJL02	154.500,00	1.400,66	1.416,36
IDIJL03	155.000,00	914,98	930,72
IDIJL04	155.500,00	429,29	445,08
IDIJL05	156.000,00	0	0

Para o modelo ABNC também se constata essa ocorrência, como visto na tabela (4.4). Uma possível justificativa seria o fato de que os saltos do COPOM além de eles abrirem mais a árvore (os nós ficam um pouco mais distantes uns dos outros, o que pode aumentar as chances da opção ser exercida), eles aumentam a quantidade de estados da natureza possíveis e, portanto, mais preços finais contribuiriam para o cálculo do preço na data de referência.

TAB. 4.5: Comparação entre os preços calculados para contratos de opções de IDI pelo Método de BDT e pelo Método ABNC para 4/5/2005

Contrato	Strike	BDT	ABNC
IDIJL02	154.500,00	1.411,27	1.400,66
IDIJL03	155.000,00	925,62	914,98
IDIJL04	155.500,00	439,97	429,29
IDIJL05	156.000,00	3,26	0,00

TAB. 4.6: Comparação entre os preços praticados no Mercado e os preços calculados para contratos de opções de IDI pelo Método de BDT e pelo Método ABNC para 4/5/2005

Contrato	Strike	BDT - Mercado	ABNC - Mercado	BDT - ABNC
IDIJL02	154.500,00	0,27	-10,34	10,61
IDIJL03	155.000,00	-10,38	-21,02	10,64
IDIJL04	155.500,00	-1,03	-11,71	10,68
IDIJL05	156.000,00	-7,74	-11,00	3,26

Contrastando agora os modelos BDT e ABNC por meio dos desvios entre os preços calculados por esses modelos e os preços de mercado, como mostrado

na tabela (4.6), observa-se que o modelo ABNC distoa mais do mercado - apresenta desvios maiores. Como visto no quadro (TAB. 4.5), parece que esse modelo subvaloriza as opções de taxa de juro. Talvez isso ocorra porque esse modelo, diferentemente do outro que se utiliza de uma estrutura a termo da volatilidade para apreçar as opções, desde a data inicial da opção até a sua maturidade vale-se do mesmo valor da volatilidade para fornecer os seus preços para esses instrumentos derivativos.

TAB. 4.7: Comparação entre os preços calculados para contratos de opções de IDI pelo Método de BDT com Saltos e pelo Método ABNC com Saltos para 4/5/2005

Contrato	Strike	BDT com Saltos	ABNC com Saltos
IDIJL02	154.500,00	1.414,06	1.416,36
IDIJL03	155.000,00	928,42	930,72
IDIJL04	155.500,00	442,78	445,08
IDIJL05	156.000,00	1,93	0,00

TAB. 4.8: Comparação entre os preços praticados no Mercado (M) e os preços calculados para contratos de opções de IDI pelo Método de BDT com Saltos ( $BDT_{saltos}$ ) e pelo Método ABNC com Saltos ( $ABNC_{saltos}$ ) para 4/5/2005

Contrato	Strike	$BDT_{saltos} - M$	$ABNC_{saltos} - M$	$BDT_{saltos} - ABNC_{saltos}$
IDIJL02	154.500,00	3,06	5,36	-2,30
IDIJL03	155.000,00	-7,58	-5,28	-2,30
IDIJL04	155.500,00	1,78	4,08	-2,30
IDIJL05	156.000,00	-9,07	-11,00	1,93

Quanto às comparações mostradas em (TAB. 4.7) e (TAB. 4.8), tem-se que os preços obtidos, tanto pelo modelo BDT quanto pelo ABNC (ambos com saltos), estão próximos do mercado. Isso pode ser verificado quando se observa os desvios entre os preços desses modelos e os preços praticados pelo mercado. Nota-se que o desvio do modelo ABNC com saltos é menor do que o desvio do modelo ABNC sem saltos mostrado na tabela (4.6). Então, realmente, quando se introduz nesse modelo as volatilidades constadadas no

mercado (faz-se isso ao considerar-se as decisões das reuniões do COPOM em ramificações específicas da árvore binomial utilizada no apregamento<sup>27</sup>), ele fornece resultados mais coerentes com o mercado.

Para validar melhor o modelo proposto realizou-se mais um teste análogo ao desenvolvido para as opções de IDI com vencimento em 1 de julho de 2005 para o dia 4 de maio de 2005. Entretanto as opções de IDI analisadas agora possuem vencimento em 1 de abril de 2014, sendo a data de referência o dia 02 de dezembro de 2013.

Na tabela (4.9) mostram-se as séries escolhidas para o estudo, o preço de exercício (*strike*), o valor de mercado, que é o prêmio divulgado pela BM&FBOVESPA e o valor calculado pelo modelo proposto, *ABNC* com saltos nas datas do COPOM. Para destacar a comparação entre esses preços mostrados nessa tabela traçou-se dois gráficos, como podem ser vistos nas Figuras 4.9 e 4.10. Na primeira figura, observa-se que os valores encontrados pelo modelo proposto acompanham a curva de mercado, já nesta última figura enfatizou-se o quanto esse modelo *ABNC* com saltos está próximo do mercado. Os desvios dos preços como mostrado na figura (4.10) permanecem próximos do patamar de R\$4,00 até o preço de exercício de 161.200. Após esse valor, como a opção já está fora do dinheiro, o modelo proposto não mais mantém a sua precisão, passando a subavaliar os demais contratos em aberto.

---

<sup>27</sup>Como relatado por João Grossi em seu trabalho GROSSI (2005), estatisticamente falando, no período entre janeiro de 2000 a julho de 2005, observa-se variações diárias do DI Over maiores que 10 pontos base em apenas 5% dos dias. Destes 5%, 70% ocorreram exatamente nas datas após a divulgação da Meta SELIC pelo COPOM, 24% ocorreram em momentos de estresse do mercado no ano de 2002 e apenas 6% não aconteceram em nenhuma das situações citadas. Destes últimos 6%, a variação diária máxima não passou de 13 pontos base, ou 0,13%. Verifica-se com isso a relevância de se considerar as decisões do COPOM na construção da árvore que fornecerá os preços das opções de taxa de juros.

TAB. 4.9: Comparação entre os preços praticados no Mercado e os preços calculados pelo método ABNC com Saltos para contratos de opções de IDI com vencimento em 01 de abril de 2014 para a data de referência 02 de dezembro de 2013

Serie de Opções	Strike	Preço Mercado	Preço Modelo Proposto
JG80	160.000,00	1.345,32	1.349,27
JG81	160.100,00	1.248,40	1.252,41
JG82	160.200,00	1.151,48	1.155,54
JG83	160.300,00	1.054,56	1.058,68
JG84	160.400,00	957,63	961,82
JG85	160.500,00	860,71	864,96
JG86	160.600,00	763,79	768,10
JG87	160.700,00	666,87	671,24
JG88	160.800,00	569,95	574,37
JG89	160.900,00	473,03	477,51
JG8B	161.000,00	376,11	380,65
JG8C	161.100,00	279,21	283,79
JG8D	161.200,00	182,87	186,94
JG8F	161.300,00	90,93	90,83
JG8G	161.400,00	23,38	5,94
JG8H	161.500,00	6,19	0,00
JG8J	161.600,00	1,16	0,00
JG8K	161.700,00	0,11	0,00
JG8L	161.800,00	0,01	0,00
JG8M	161.900,00	0,01	0,00
JG8N	162.000,00	0,01	0,00
JG8P	162.100,00	0,01	0,00
JG8Q	162.200,00	0,01	0,00
JG8R	162.300,00	0,01	0,00
JG8S	162.400,00	0,01	0,00
JG8T	162.500,00	0,01	0,00

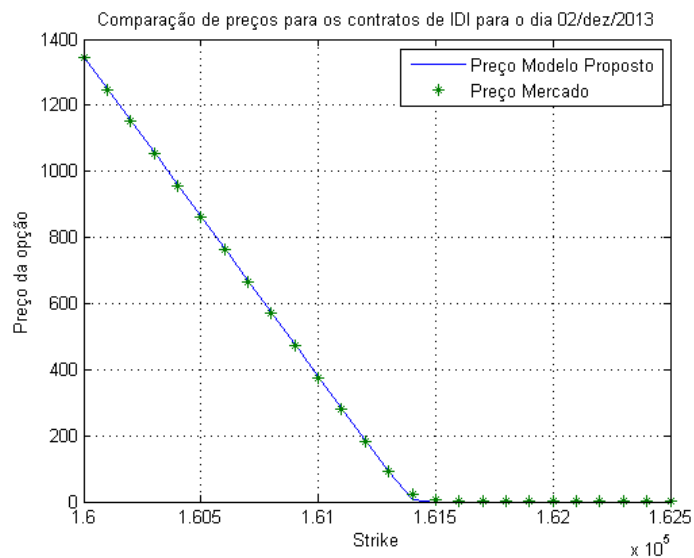


FIG. 4.9: Comparação dos preços obtidos pelo Modelo Proposto e praticados no Mercado para os contratos em aberto de opções de IDI com vencimento em 01 de abril de 2014 para a data de referência 02 de dezembro de 2013

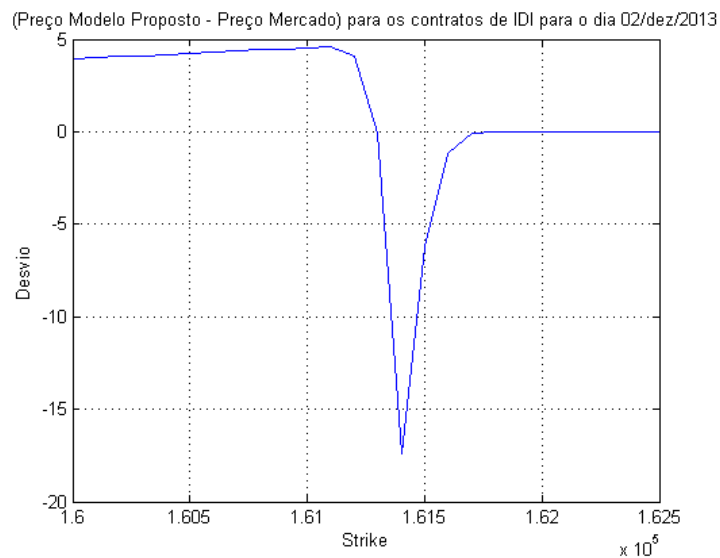


FIG. 4.10: Cálculo do desvio para os contratos em aberto de opções de IDI com vencimento em 01 de abril de 2014 para a data de referência 02 de dezembro de 2013



## 5 COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

Neste trabalho realizou-se uma modificação no modelo desenvolvido no artigo BASTIAN-PINTO (2010) de modo a apreçar opções de IDI levando-se em consideração os saltos resultantes das reuniões do COPOM. Utilizando-se de quatro opções de IDI foi possível perceber a validade desse modelo para a precificação desses derivativos de taxas de juros.

A maneira como se processa o cálculo das taxas de juros e da volatilidade do próximo ramo permitiu a implementação computacional do modelo sem maiores problemas ou complexidades. Ainda que as dificuldades encontradas para se incluir um maior número de passos na árvore tenha ocorrido (pois isso causa um grande aumento no tempo de execução do programa), o modelo *ABNC* com saltos, modelo proposto neste estudo, mostrou-se bastante eficaz quando se analisou os resultados dos desvios obtidos em todos os testes realizados. Foi possível notar que ao se considerar as reuniões do COPOM, a árvore desenvolvida pelo modelo *ABNC* apresenta desvios menores do que aqueles encontrados pela árvore binomial construída também por esse modelo mas sem se considerar os saltos. Portanto aquele modelo retrata mais coerentemente os preços obtidos na BM&F do que este, que subavalia as opções.

Destaca-se também a robustez constatada no modelo *ABNC*. Essa característica foi verificada ao se variar os seus parâmetros, velocidade de reversão à média e volatilidade. Notou-se que a curva do preço calculada não apresenta movimentos bruscos. Isso significa que em condições extremas de mercado (condições de estresse), o modelo continuaria a precificar essas opções.

Outra característica da árvore que foi cuidadosamente trabalhada foi a inclusão dos saltos do COPOM na árvore. Com o intuito de se preservar a não arbitragem do modelo, as probabilidades que determinaram os saltos

de subida e descida foram calculadas utilizando-se a ideia de neutralidade ao risco, de forma que as probabilidades encontradas não permitissem arbitragem. Ainda seguindo esse objetivo, fez-se a árvore binomial de taxa de juros corresponder à estrutura a termo praticada no mercado financeiro. Diferentemente do que se vê, por exemplo, no modelo de Hull-White desenvolvido em árvore trinomial, em que o modelo força as taxas de juros serem positiva quando estas, nos ramos mais inferiores, apresentam valores negativos (fato que leva à arbitragem), o *ABNC*, justamente por se valer da estrutura a termo de juros e por se trabalhar com o logaritmo neperiano da taxa de juros, conserva-se livre de risco. Como nas outras ramificações mantém-se a validade do modelo mostrado em BASTIAN-PINTO (2010), a árvore em sua totalidade não permite arbitragem.

Outra consideração realizada na construção da árvore binomial ocorreu na definição de seus ramos em que as datas do COPOM seriam definidas. A fim de ela manter os seus passos temporais constantes fez-se uma translação dos saltos para a ramificação mais próxima. Entretanto, essa condição de passos fixos poderia ser flexibilizada para passos temporais variáveis, como desenvolvido no trabalho TEIXEIRA (2009). Assim seria possível inserir na árvore as reuniões do COPOM exatamente nas datas em que elas ocorressem. Essa ideia pode ser praticada em um novo estudo e, com isso, seria possível verificar se essa translação implicaria em melhoria nos preços aqui obtidos. Como trabalho futuro é sugerido ainda, a construção de uma árvore trinomial de Hull-White seguida de uma comparação dos resultados desse modelo com o modelo aqui apresentado, em árvore binomial. Propõe-se também um aprimoramento da programação deste modelo *ABNC*, com o intuito de promover um aumento do número de passos na árvore e, conseqüentemente, melhorar os desvios calculados entre os resultados alcançados pelo modelo e encontrados no mercado.

Outra parte que poderia ser aprofundada é o desenvolvimento de uma nova metodologia para estimar os parâmetros do modelo *ABNC*. Aqui foi utilizada

a regressão mostrada no artigo BASTIAN-PINTO (2010) para calibrar o modelo proposto. Entretanto, apesar de se promover variações nos parâmetros desse modelo, testes sobre a qualidade da estimação não foram feitos. Portanto, utilizar-se de modelos econométricos avançados, bem como promover testes para avaliar a aderência da regressão poderão trazer novidades para o estudo ora apresentado.

## 6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BASTIAN-PINTO, C., BRANDAO, L. e HAHN, W. J. A non-censored binomial model for mean reverting stochastic processes. Em *ANNUAL INTERNATIONAL CONFERENCE ON REAL OPTIONS*, volume 14, 2010.
- BENNINGA, S. e WIENER, Z. Binomial term structure models. *Mathematica in Education and Research*, 7(3):1–10, 1998.
- BLACK, F. Studies of stock price volatility changes. *American Statistical Association*, págs. 177–81, 1976.
- BLACK, F., DERMAN, E. e TOY, W. A one factor model of interest rates and its application to treasury bond options. *Financial Analysts Journal*, págs. 33–39, Jan/Feb 1990.
- BRIGO, D. e MERCURIO, F. *Interest Rate Models. Theory and Practice*. Springer Finance Series, 2001.
- CHAN, K. C., KAROLYI, G. A., LONGSTAFF, F. A. e SANDERS, A. B. An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate. *Journal of Finance*, 47(3):1209–1227, July 1992.
- CLEWLOW, L. e STRICKLAND, C. Valuing energy options in a one factor model fitted to forward prices. *The Journal of Derivatives*, April 1999.
- COX, J. C., ROSS, S. A. e RUBINSTEIN, M. Option pricing: A simplified approach. *Journal of financial Economics*, 7(3):229–263, 1979.
- DIXIT, A. K. e PINDYCK, R. S. Invest under uncertainty. 1994.
- GENARO, A. e AVELLANEDA, M. Pricing interest rate derivatives under monetary policy changes. April 2012.
- GLUCKSTERN, M. *Aplicação do modelo de Hull-White a precificação de opções sobre IDI*. Tese de doutorado, Escola de Administração de Empresas de São Paulo, Fundação Getúlio Vargas, FGV-SP, São Paulo, SP, 2001.
- GROSSI, J. E. S. *Modelo discreto de apuração de derivativos de taxas de juros com saltos devidos às decisões do Comitê de política monetária do Banco Central do Brasil*. Dissertação de mestrado, Faculdade de Economia

- e Administração e Instituto de Matemática e Estatística, FEA-IME:USP, São Paulo, SP, 2005.
- HAHN, W. J. *A Discrete-Time Approach for Valuing Real Options with Underlying Mean-Reverting Stochastic Processes*. Phd dissertation, The University of Texas, Texas, May 2005.
- HAHN, W. J. e DYER, J. S. Discrete time modeling of mean-reverting stochastic processes for real option valuation. *European Journal of Operational Research*, 183(2):534–548, 2008.
- HARRISON, M. J. e KREPE, O. Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *Journal of Economic Theory*, 20:381–408, 1979.
- HARRISON, M. J. e PLISKA, S. R. Theory of continuous trading, stochastic processes and their applications. 11(454):215–260, January 1981.
- HARRISON, M. J. e PLISKA, S. R. A stochastic calculus model of continuous trading: Complete markets, stochastic process and their applications. 15: 313–316, 1983.
- HULL, J. e WHITE, A. Pricing interest rate derivative securities. *Review of Financial Studies*, 3(4):573–592, 1990.
- HULL, J. e WHITE, A. Numerical procedures for implementing term structure models i: Single-factor models. *The Journal of Derivatives*, 2(1):7–16, Fall 1994.
- HULL, J. e WHITE, A. Numerical procedures for implementing term structure models ii: Two-factor models. *The Journal of Derivatives*, 2(2):37–48, Winter 1995.
- HULL, J. e WHITE, A. Using hull-white interest-rate trees. *The Journal of Derivatives*, Winter 1996.
- HULL, J. C. *Options, Futures, and Other Derivatives*. Pearson, Prentice Hall, Toronto, 2009.
- KORN, R. e KORN, E. *Option Pricing and Portfolio Optimization: modern methods of financial mathematics*. American Mathematical Society, 2001.
- MÜLLER, L. E. *Mathematical Methods in Finance: Modeling and Numerical Analysis*. Tese de doutorado, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, IMPA-RJ, Rio de Janeiro, RJ, 2009.

- REBONATO, R. *Interest-Rate Option Models*. John Wiley & Sons, Toronto, 2009.
- ROQUE, E. D. L. *O mercado de juros brasileiros: uma contribuição para a modelagem de mercados de juros futuros em economia instáveis*. Tese de doutorado, Departamento de Economia, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, 1996.
- SCHWARTZ, E. S. The stochastic behavior of commodity prices: Implications for valuation and hedging. *The Journal of Finance*, 52(3):923–973, 1997.
- SENN, L. *Aplicação de Modelo Trinomial para o Apreçamento de Opções Reais em Processos com Reversão à Média e Comparação com Modelos Binomiais*. Tese de Doutorado, Instituto COPPEAD de Administração, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, 2010.
- SHREVE, S. E. *Stochastic Calculus for Finance I. The Binomial Asset Pricing Model*. Springer Finance Series, 2000a.
- SHREVE, S. E. *Stochastic Calculus for Finance II. Continuous - Time Models*. Springer Finance Series, 2000b.
- STAPLETON, R. e FRANKE, G. The black model and the pricing of options on assets, futures and interest rates. 2005.
- TEIXEIRA, P. *Valorização de Derivados de Taxas de Juro Utilizando o Modelo de Hull-White*. Tese de Doutorado, Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal, 2009.
- TONHOLO, D. *A Estrutura a Termo de Taxas de Juros Brasileira do Ponto de Vista dos Processos Estocásticos*. Dissertação de mestrado, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, IMPA-RJ, Rio de Janeiro, RJ, 2011.
- VASICEK, O. A. An equilibrium characterisation of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5:177–188, 1977.
- YAZBEK, F. e MURRER, D. *Precificação de Ativos de Renda Fixa*. Projeto final de curso, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, USP, São Paulo, SP, 2012.

## 7 APÊNDICES

## 7.1 APÊNDICE 1: REVISÃO DA TEORIA DE FINANÇAS

Serão apresentados aqui os conceitos matemáticos de finanças que ajudarão no entendimento e desenvolvimento do modelo de não arbitragem de estrutura a termo em termos do processo seguido pela taxa de juro. Os seguintes compêndios serão utilizados: KORN (2001); SHREVE (2000b) e BRIGO (2001).

### PROCESSOS MARTINGAIS

#### Processos Martingais

Antes de definir o que vem a ser um processo martingal é preciso descrever o movimento Browniano. Para isso algumas definições e conceitos preliminares serão introduzidos.

Seja  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  um espaço de probabilidade completo, com espaço amostral  $\Omega$ ,  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$  e medida de probabilidade  $P$ .

**Definição 7.1.** *Seja  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$  uma família de sub- $\sigma$ -álgebra de  $\mathcal{F}$ ,  $I$  um conjunto de índices ordenados com  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$  para  $s < t, s, t \in I$ . Tal família  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$  é denominada filtração.*

**Definição 7.2.** *Seja  $X$  uma variável aleatória definida sobre um espaço amostral não-vazio  $\Omega$ . Seja  $\zeta$  uma  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $\Omega$ . Se todo conjunto em  $\sigma(X)$  está também em  $\zeta$ , nós dizemos que  $X$  é  $\zeta$ -mensurável.*

**Definição 7.3.** *Um conjunto  $\{X_t, \mathcal{F}_t\}_{t \in I}$  sendo formado por uma filtração  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$  e uma família de variáveis aleatórias avaliadas em  $\mathbb{R}^n$   $\{X_t\}_{t \in I}$  com  $\{X_t\}$  sendo  $\{\mathcal{F}_t\}$ -mensurável é denominado processo estocástico com filtração  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$ .*



Posto isso, pode-se agora caracterizar o processo estocástico mais importante que é o movimento Browniano.

**Definição 7.4.** *O processo  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  que possui trajetória contínua e satisfaz as 3 condições a seguir:*

- a)  $W_0 = 0$  *P-quase certamente*
- b)  $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$  *para  $0 \leq s < t$ , isto é, incrementos estacionários*
- c)  $W_t - W_s$  *independente de  $W_u - W_r$  para  $0 \leq r \leq u \leq s < t$ , isto é, incrementos independentes*

*é denominado movimento Browniano uni-dimensional.*

Neste ponto é relevante também abordar a filtração para o movimento Browniano, uma vez que com ela desenvolve-se a capacidade de avaliar a quantidade de informação disponível em cada tempo do movimento.

**Definição 7.5.** *Seja  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  um espaço de probabilidade sobre o qual está definido um movimento Browniano  $\{W_t\}_{t \geq 0}$ . A filtração para o movimento Browniano é uma coleção de  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}, t \geq 0$ , satisfazendo:*

- a) *(Acumula informação) Para  $0 \leq s < t$ , todo conjunto em  $\mathcal{F}(s)$  está também em  $\mathcal{F}(t)$ . Ou seja, há pelo menos tanta informação disponível no tempo posterior  $\mathcal{F}(t)$  quanto há no tempo anterior  $\mathcal{F}(s)$ .*
- b) *(Adaptatividade) Para todo  $t \geq 0$ , o movimento Browniano  $W(t)$  no tempo  $t$  é  $\{\mathcal{F}(t)\}$ -mensurável. Ou seja, a informação disponível no tempo  $t$  é suficiente para avaliar o movimento Browniano  $W(t)$  naquele tempo.*
- c) *(Independencia de incrementos futuros) Para  $0 \leq t < u$ , o incremento  $W(u) - W(t)$  é independente de  $\mathcal{F}(t)$ . Ou seja, qualquer incremento do movimento Browniano depois do tempo  $t$  é independente da informação disponível no tempo  $t$ .*

Enfim, pode-se agora definir um processo martingal.

**Definição 7.6.** *O processo  $\{X_t, \mathcal{F}_t\}_{t \in I}$  com  $E|X_t| < \infty$  para todo  $t \in I$ , onde  $I$  é um conjunto de índice ordenado, é denominado martingal, se para todo  $s, t \in I$  com  $s \leq t$  ocorre  $\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s$  P.q.c.*

**Teorema 7.1.** *Um movimento Browniano unidimensional  $W_t$  é um martingal*<sup>28</sup>.

## ESPERANÇAS CONDICIONAIS

### Esperanças Condicionais

Nesta seção caracteriza-se a estimação do valor de uma variável aleatória dada alguma informação. Considere que  $X$  - variável aleatória definida sobre um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  - é  $\zeta$ -mensurável, em que  $\zeta$  é uma sub- $\sigma$ -álgebra de  $\mathcal{F}$ . Então a informação em  $\zeta$  é suficiente para determinar o valor de  $X$ . Entretanto se  $X$  é independente de  $\zeta$ , então a informação em  $\zeta$  não nos ajuda a determinar o valor de  $X$ . Mas, todavia, caso se esteja em um caso intermediário, pode-se valer da informação em  $\zeta$  para estimar  $X$ . Essa estimação é dada pela esperança condicional de  $X$  dado  $\zeta$ , que é denotada por  $\mathbb{E}[X|\zeta]$ .

**Teorema 7.2.** *Seja  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  um espaço de probabilidade e seja  $\zeta$  uma sub- $\sigma$ -álgebra de  $\mathcal{F}$*

a) *Se  $X$  e  $Y$  são variáveis aleatórias integráveis e  $c_1$  e  $c_2$  são constantes, então:*

$$\mathbb{E}[c_1X + c_2Y|\zeta] = c_1\mathbb{E}[X|\zeta] + c_2\mathbb{E}[Y|\zeta]. \quad (7.1)$$

b) *Se  $X$  e  $Y$  são variáveis aleatórias integráveis,  $Y$  e  $XY$  são integráveis, e  $X$  é  $\zeta$ -mensurável, então:*

$$\mathbb{E}[XY|\zeta] = X\mathbb{E}[Y|\zeta]. \quad (7.2)$$

---

<sup>28</sup>A demonstração deste teorema pode ser verificada em SHREVE (2000a).

c) Se  $\mathcal{H}$  é uma sub- $\sigma$  álgebra de  $\zeta$  ( $\mathcal{H}$  contém menos informação do que  $\zeta$ ) e  $X$  é uma variável aleatória integrável, então:

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\zeta]|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}]. \quad (7.3)$$

d) Se  $X$  é integrável e independente de  $\zeta$ , então:

$$\mathbb{E}[X|\zeta] = \mathbb{E}[X]. \quad (7.4)$$

e) (Desigualdade condicional de Jensen) Se  $\varphi(x)$  é uma função convexa de uma variável indicadora  $x$  e  $X$  é integrável, então:

$$\mathbb{E}[\varphi(X)|\zeta] \geq \varphi(\mathbb{E}[X|\zeta]). \quad (7.5)$$

**Lema 7.1. (Independência.)** Seja  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  um espaço de probabilidade e seja  $\zeta$  uma sub- $\sigma$ -álgebra de  $\mathcal{F}$ . Suponha que as variáveis aleatórias  $X_1, \dots, X_K$  sejam  $\zeta$ -mensurável e as variáveis aleatórias  $Y_1, \dots, Y_L$  sejam independentes de  $\zeta$ . Seja  $f(x_1, \dots, x_K, y_1, \dots, y_L)$  uma função de variáveis indicadoras  $x_1, \dots, x_K$  e  $y_1, \dots, y_L$ , e defina

$$g(x_1, \dots, x_K) = \mathcal{E}f(x_1, \dots, x_K, Y_1, \dots, Y_L). \quad (7.6)$$

Então

$$\mathcal{E}[f(X_1, \dots, X_K, Y_1, \dots, Y_L)|\zeta] = g(X_1, \dots, X_K). \quad (7.7)$$

A ideia desse lema é que uma vez que a informação em  $\zeta$  é suficiente para determinar os valores de  $X_1, \dots, X_K$ , deve-se manter essas variáveis constantes quando se estima  $f(X_1, \dots, X_K, Y_1, \dots, Y_L)$

Posto isso o processo de Markov poderá ser abordado.

**Definição 7.7.** Seja  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  um espaço de probabilidade. Seja  $T$  um número positivo fixo, e seja  $\mathcal{F}(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , uma filtração da sub- $\sigma$ -álgebra

de  $\mathcal{F}$ . Considere o processo estocástico adaptado <sup>29</sup>  $X(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ . Assuma que para todo  $0 \leq s \leq t \leq T$ , e para todo não negativo  $f$ , função de Borel-mensurável, há outra função de Borel-mensurável,  $g$ , tal que

$$\mathbb{E}[f(X(t))|\mathcal{F}(s)] = g(X(s)). \quad (7.8)$$

Então dizemos que o  $X$  é um Processo de Markov.

## CÁLCULO ESTOCÁSTICO

### Cálculo Estocástico

Nesta seção, mostra-se os resultados desenvolvidos pelo trabalho de Itô. Dentre outros resultados destaca-se a definição de Itô para a integral com respeito ao movimento Browniano e a fórmula de Itô para mudança de variável.

**Definição 7.8.** Um processo estocástico  $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$  é chamado processo simples se existe números reais  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p = T$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , e variáveis aleatórias  $\phi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, \dots, p$ , com

$$\phi_0 \text{ } F_0 \text{ - mensurvel, } \phi_i, i = 1, \dots, p, F_{t_{i-1}} \text{ - mensurvel,}$$

tal que  $X_t(\omega)$  tem a seguinte representação

$$X_t(\omega) = X(t, \omega) = \phi_0(\omega) \cdot 1_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^p \phi_i(\omega) \cdot 1_{\{t_{i-1}, t_i\}}(t)$$

para cada  $\omega \in \Omega$ .

**Definição 7.9.** Seja  $\Pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n = T\}$  uma partição de  $[0, T]$  e  $\Delta(t)$  um processo simples. Considere um movimento Browniano,  $W(t)$ ,  $t \geq 0$ , junto com uma filtração  $\mathcal{F}(t)$ ,  $t \geq 0$ , para esse movimento Browniano. Considerando esse  $W(t)$  como o preço por ação de um ativo no tempo  $t$ ,

---

<sup>29</sup>seja  $X(t)$  um processo, uma coleção de variáveis aleatórias indexadas por  $t$ . Se  $X(t)$  é mensurável com respeito a  $\mathcal{F}_t$  para todo  $t$ , então dizemos que o processo  $X$  é adaptado a  $\mathcal{F}_t$

$t_0, t_1, \dots, t_{n-1}$  como as datas de negociação do ativo, e  $\Delta(t_0), \Delta(t_1), \dots, \Delta(t_{n-1})$  como a posição tomada no ativo em cada data de negociação e mantida para a próxima data de negociação, temos que o ganho da negociação em cada tempo  $t$  é dado por

$$I(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \Delta(t_j)[W(t_{j+1}) - W(t_j)] + \Delta(t_k)[W(t) - W(t_k)] \quad t_k \leq t \leq t_{k+1} \quad (7.9)$$

Denomina-se esse processo  $I(t)$  como a integral de Itô do processo simples  $\Delta(t)$  fato que nós escrevemos como

$$I(t) = \int_0^t \Delta(u) dW(u).$$

**Teorema 7.3.** *A integral de Itô definida em 7.9 é um martingal.*

**Teorema 7.4. (Isometria de Itô.)** *A integral de Itô definida em 7.9 satisfaz*

$$\mathbb{E}I^2(t) = \mathbb{E} \int_0^t \Delta^2(u) du. \quad (7.10)$$

**Teorema 7.5.** *A variação quadrática acumulada até o tempo  $t$  pela integral de Itô (7.9) é*

$$[I, I](t) = \int_0^t \Delta^2(u) du. \quad (7.11)$$

**Definição 7.10. (Integral de Itô para integrandos gerais.)** *Seja  $\Delta(t)$  um integrando que varia continuamente. Então a integral de Itô terá a seguinte fórmula*

$$\int_0^t \Delta(u) dW(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \Delta_n(u) dW(u) \quad 0 \leq t \leq T. \quad (7.12)$$

Além das propriedades da integral de Itô mostradas nos teoremas 7.3, 7.4 e 7.5 pode-se citar outras três, que serão sumarizadas no próximo teorema.

**Teorema 7.6.** *Seja  $T$  uma constante positiva e seja  $\Delta(t), 0 \leq t \leq T$  um processo estocástico adaptado que satisfaça*

$$\mathbb{E} \int_0^T \Delta^2(t) dt < \infty.$$

*Então  $I(t) = \int_0^t \Delta(u) dW(u)$  definida pela equação (7.12) tem as seguintes propriedades*

- a) (**Continuidade.**) Como uma função do limite superior de integração  $t$ , as trajetórias de  $I(t)$  são contínuas.*
- b) (**Adaptatividade.**) Para cada  $t$ ,  $I(t)$  é  $\mathcal{F}(t)$ -mensurável.*
- c) (**Linearidade.**) Se  $I(t) = \int_0^t \Delta(u) dW(u)$  e  $J(t) = \int_0^t \Gamma(u) dW(u)$ , então  $I(t) \pm J(t) = \int_0^t (\Delta(u) \pm \Gamma(u)) dW(u)$ , além disso para toda constante  $c$ ,  $cI(t) = \int_0^t c\Delta(u) dW(u)$ .*

**Teorema 7.7. (Fórmula Itô-Doebelin para movimento Browniano.)** *Seja  $f(t, x)$  uma função para a qual as derivadas parciais  $f_t(t, x)$ ,  $f_x(t, x)$  e  $f_{xx}(t, x)$  são definidas e contínuas, e seja  $W(t)$  um movimento Browniano. Então, para todo  $T \geq 0$ ,*

$$\begin{aligned} f(T, W(T)) &= f(0, W(0)) + \int_0^T f_t(t, W(t)) dt + \\ &+ \int_0^T f_x(t, W(t)) dW(t) + \frac{1}{2} \int_0^T f_{xx}(t, W(t)) dt. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Estendendo a fórmula de Itô-Doebelin para processos estocásticos mais gerais do que o movimento Browniano. Esses novos processos serão chamados de processos de Itô, que serão definidos a seguir.

**Definição 7.11.** *Seja  $W(t)$ ,  $t \geq 0$ , um movimento Browniano, e seja  $\mathcal{F}(t)$ ,  $t \geq 0$  uma filtração associada. Um processo de Itô é um processo estocástico da forma*

$$X(T) = X(0) + \int_0^T \Delta(u) dW(u) + \int_0^T \Theta(u) du. \quad (7.14)$$

onde  $X(0)$  é não aleatório e  $\Delta(u)$  e  $\Theta(u)$  são processos estocásticos adaptados.<sup>30</sup>

Posto isto, define-se agora a integral de Itô para o processo de itô.

**Definição 7.12.** *Seja  $X(t), t \geq 0$ , um processo de Itô como descrito na definição 7.11, e seja  $\Gamma(t), t \geq 0$ , um processo adaptado. Defina-se, então, a integral de Itô com respeito ao processo de Itô<sup>31</sup>*

$$\int_0^T \Gamma(u) dX(u) = \int_0^T \Gamma(u) \Delta(u) dW(u) + \int_0^T \Gamma(u) \Theta(u) du. \quad (7.15)$$

## MEDIDA DE PROBABILIDADE

### Medida de Probabilidade

Sabe-se que em um ambiente de não arbitragem, a precificação de derivativos precisa ser transformada em um martingal através da mudança de medida da probabilidade. Assim sendo, esta seção abordará os conceitos relevantes para viabilizar a colocação do teorema de Girsanov.

Inicialmente será abordado um resultado presente em HARRISON (1981), HARRISON (1983) e HARRISON (1979) que é a conexão estabelecida entre os conceitos econômicos de ausência de arbitragem e as propriedades matemáticas de existência de uma medida de probabilidade, a medida martingal equivalente (ou medida neutra ao risco):

**Definição 7.13.** *Uma medida martingal equivalente  $Q$  é uma medida de probabilidade sobre o espaço  $(\Omega, \mathcal{F})$  tal que*

- a)  $Q_0$  e  $Q$  são medidas equivalentes, isto é  $Q_0(A) = 0$  se, e somente se,  $Q(A) = 0$ , para todo  $A \in \mathcal{F}$ .

<sup>30</sup>Assume-se que  $\mathbb{E} \int_0^t \Delta^2(u) du$  e  $\int_0^t |\Delta(u)| du$  são finitas para todo  $t > 0$  de modo que as integrais do lado direito de (7.14) estejam definidas e a integral de Itô seja um martingal.

<sup>31</sup>Assume-se que  $\mathbb{E} \int_0^t \Gamma^2(u) \Delta^2(u) du$  e  $\int_0^t |\Delta(u) \Theta(u)| du$  são finitas para todo  $t > 0$  de modo que as integrais do lado direito de (7.15) estejam definidas

- b) a derivada de Radon-Nikodym  $\frac{dQ}{dQ_0}$  pertence a  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, Q_0)$  (isto é, ela é quadrado-integrável com respeito a  $Q_0$ ).
- c) o processo do "preço do ativo descontado"  $D(0, \cdot)S$  é um  $(\mathbb{F}, Q)$ -martingal, isto é,  $\mathbb{E}(D(0, t)S_t^k | \mathcal{F}_u) = D(0, u)S_u^k$  para todo  $k = 0, 1, \dots, K$  e todo  $0 \leq u \leq t \leq T$ , com  $\mathbb{E}$  denotando esperança sobre a medida  $Q$ .

Detalhando melhor a derivada de Radon-Nykokym, tem-se:

**Definição 7.14.** Vamos considerar um espaço amostral finito  $\Omega$  sobre o qual temos duas medidas de probabilidade  $\mathbb{P}$  e  $\tilde{\mathbb{P}}$ . Vamos assumir que  $\mathbb{P}$  e  $\tilde{\mathbb{P}}$  ambos tenham probabilidade positiva para todo elemento de  $\Omega$ , então nós podemos formar o quociente

$$Z(\omega) = \frac{\tilde{\mathbb{P}}(\omega)}{\mathbb{P}(\omega)} \quad (7.16)$$

Note que  $Z(\omega)$  é um processo aleatório, uma vez que ele depende de um experimento aleatório. Ele é chamado derivada de Radon-Nikodym de  $\tilde{\mathbb{P}}(\omega)$  com respeito a  $\mathbb{P}(\omega)$ , embora nesse contexto de espaço amostral  $\omega$  finito, ele seja de fato um quociente ao invés de uma derivada.

**Teorema 7.8.** Seja  $\tilde{\mathbb{P}}$  e  $\mathbb{P}$  medidas de probabilidade sobre um espaço amostral finito  $\Omega$ , assuma que  $\tilde{\mathbb{P}}(\omega) > 0$  e  $\mathbb{P}(\omega) > 0$  para todo  $\omega \in \Omega$ , e defina a variável aleatória  $Z$  como mostrado em 7.16. Então temos o seguinte:

- a)  $\mathbb{P}(Z > 0) = 1$ ;
- b)  $\mathbb{E}(Z) = 1$ ;
- c) Para qualquer variável aleatória  $Y$ ,

$$\tilde{\mathbb{E}}(Y) = \mathbb{E}(ZY) \quad (7.17)$$

**Lema 7.2.** Seja  $t$ , satisfazendo  $0 \leq t \leq T$ , dado e  $Y$  uma variável aleatória  $\mathcal{F}(t)$ -mensurável. Então

$$\tilde{\mathbb{E}}Y = \mathbb{E}[YZ(t)] \quad (7.18)$$



**Lema 7.3.** *Seja  $s$  e  $t$ , satisfazendo  $0 \leq s \leq t \leq T$ , dados  $e Y$  uma variável aleatória  $\mathcal{F}(t)$ -mensurável. Então*

$$\tilde{\mathbb{E}}[Y|\mathcal{F}(s)] = \frac{1}{Z(s)} \mathbb{E}[YZ(t)|\mathcal{F}(s)] \quad (7.19)$$

**Teorema 7.9. (Girsanov, unidimensional.)** *Seja  $W(t), 0 \leq t \leq T$ , um movimento Browniano sobre um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , e  $\mathcal{F}(t), 0 \leq t \leq T$ , uma filtração para esse movimento Browniano. Seja  $\Theta(t), 0 \leq t \leq T$ , um processo adaptado. Defina*

$$Z(t) = \exp\left(-\int_0^t \Theta(u)dW(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \Theta^2(u)du\right) \quad (7.20)$$

$$\tilde{W}(t) = W(t) + \int_0^t \Theta(u)du \quad (7.21)$$

e assumamos que <sup>32</sup>

$$\mathbb{E} \int_0^T \Theta^2(u)Z^2(u)du < \infty. \quad (7.22)$$

Seja  $Z = Z(T)$ . Então  $\mathbb{E}Z = 1$  e sobre a medida de probabilidade dada por

$$\tilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A Z(\omega)dP(\omega) \quad \text{para todo } A \in \mathcal{F} \quad (7.23)$$

o processo  $\tilde{W}(t), 0 \leq t \leq T$ , é um movimento Browniano.

## EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

### Equações Diferenciais

Agora serão abordadas algumas ferramentas que são de suma importância para o entendimento e análise dos modelos de taxa de juros. Isso porque uma das maneiras existentes para se precificar um ativo derivativo é resolver numericamente uma equação parcial diferencial. A seguir, então, mostra-se

---

<sup>32</sup>A condição 7.22 é imposta para assegurar que a Integral de Itô está definida e é um martingal.

como ligar o problema de precificação neutra ao risco às equações diferenciais parciais.

**Definição 7.15.** *Uma equação diferencial estocástica, EDE, é uma equação da forma*

$$dX(u) = \beta(u, X(u))du + \gamma(u, X(u))dW(u). \quad (7.24)$$

onde  $\beta(u, x)$  e  $\gamma(u, x)$  são funções dadas, chamadas de velocidade de deriva e difusão, respectivamente. Adicionalmente a essa equação, uma condição inicial da forma  $X(t) = x$ , onde  $t \geq 0$  e  $x \in \mathbb{R}$  é especificada. O problema reside então em encontrar um processo estocástico  $X(t)$ , definido por  $T \geq t$ , tal que

$$X(t) = x, \quad (7.25)$$

$$X(T) = X(t) + \int_t^T \beta(u, X(u))du + \int_t^T \gamma(u, X(u))dW(u). \quad (7.26)$$

Sob condições suaves para as funções  $\beta(u, x)$  e  $\gamma(u, x)$ , existe um único processo  $X(t), T \geq t$ , satisfazendo (7.25) e (7.26). A solução  $X(T)$  no tempo  $T$  será  $\mathcal{F}(T)$ -mensurável.

**Teorema 7.10.** *Seja  $X(u), u \geq 0$ , uma solução para a equação diferencial estocástica (7.24) com condição inicial dada no tempo 0. Então, para  $0 \leq t \leq T$ ,*

$$\mathbb{E}[h(X(T))|\mathcal{F}(t)] = g(t, X(t)). \quad (7.27)$$

**Corolário 7.1.** *Soluções para equações diferenciais estocásticas são processos de Markov.*

Enuncia-se agora o teorema de Feynman-Kac, que relaciona equação diferencial estocástica e equação diferencial parcial.

**Teorema 7.11. (Feynman-Kac.)** *Considere a equação diferencial estocástica mostrada em 7.24. Seja  $h(y)$  uma função Borel-mensurável. Faça  $T > 0$*

e seja  $t \in [0, T]$  dado. Defina a função

$$g(t, x) = \mathbb{E}^{t,x} h(X(T)). \quad (7.28)$$

(Assumimos que  $\mathbb{E}^{t,x} |h(X(T))| < \infty$  para todo  $t$  e  $x$ .) Então  $g(t, x)$  satisfaz, para  $t < T$ , a equação diferencial parcial

$$g_t(t, x) + \beta(t, x)g_x(t, x) + \frac{1}{2}\gamma^2(t, x)g_{xx}(t, x) = 0 \quad (7.29)$$

e a condição terminal

$$g(T, x) = h(x) \quad \text{para todo } x \quad (7.30)$$

**Lema 7.4.** *Seja  $X(u)$  uma solução para a EDE (7.24) com condição inicial dada no tempo 0. Seja  $h(y)$  uma função Borel-mensurável, estabeleça  $T > 0$ , e seja  $g(t, x)$  uma função dada por (7.28). Então o processo estocástico*

$$g(t, X(t)), \quad 0 \leq t \leq T,$$

*é um martingal.*

A seguir, mostra-se um complemento do teorema de Feynman-Kac, que será um dos pilares quando for abordado os modelos de taxas de juros.

**Teorema 7.12. (Feynman-Kac descontado.)** *Considere a equação diferencial estocástica mostrada em (7.24). Seja  $h(y)$  uma função Borel-mensurável e seja  $r$  uma constante. Estabeleça  $T > 0$  e seja  $t \in [0, T]$  dado. Defina a função*

$$f(t, x) = \mathbb{E}^{t,x} [e^{-r(T-t)} h(X(T))]. \quad (7.31)$$

(Assumimos que  $\mathbb{E}^{t,x} |h(X(T))| < \infty$  para todo  $t$  e  $x$ .) Então  $f(t, x)$  satisfaz a equação diferencial parcial

$$f_t(t, x) + \beta(t, x)f_x(t, x) + \frac{1}{2}\gamma^2(t, x)f_{xx}(t, x) = rf(t, x) \quad (7.32)$$

e a condição terminal

$$f(T, x) = h(x) \quad \text{para todo } x \quad (7.33)$$

## 7.2 APÊNDICE 2: CALIBRAGEM DO MODELO *ABNC*

Para calibrar o modelo *ABNC* em datas sem saltos para a taxa de juros

$$dS = \eta\left(\bar{x} + \frac{\sigma^2}{2\eta} - \ln(S)\right)Sdt + \sigma Sdz_t \quad (7.34)$$

onde:

$x_t = \ln(S_t)$ , e

$dx_t = \eta(\bar{x} - x_t)dt + \sigma dz$

Para essa modelagem é necessário se ter especificados os valores das seguintes variáveis:

$S_0$  - valor inicial (em  $t = 0$ ) da variável estocástica  $S_t$

$x_0 = \ln(S_0)$

$\bar{x}$  - valor da média de longo prazo para a qual  $x_t = \ln(S_t)$  converge

$\eta$  - parâmetro de velocidade de reversão à média do processo (7.34)

$\sigma$  - parâmetro de volatilidade do processo (7.34)

$\Delta t$  - valor do intervalo de discretização do tempo

É importante ressaltar que o modelo 1 de Schwartz definido por (7.34), converge a longo prazo para um valor  $\bar{S}^* = \exp\left(\bar{x} + \frac{\sigma^2}{4\eta}\right)$  (SCHWARTZ (1997)). Os modelos binomiais geométricos desenvolvidos, com  $S_t = \exp(x_t)$ , convergem para um valor  $\bar{S} = \exp(\bar{x})$ . Portanto se se considerar  $\bar{S}^* = \exp\left(\bar{x} + \frac{\sigma^2}{2\eta}\right)$  a média de longo prazo que intuitivamente transformaria o processo definido por (7.34), em:

$$dS = \eta(\ln(\bar{S}^*) - \ln(S))Sdt + \sigma Sdz$$

Nesse caso tem-se:  $\bar{S} = \bar{S}^* \exp\left(\frac{\sigma^2}{4\eta}\right)$

Dos dados históricos disponíveis para  $S$ , os parâmetros do modelo são estimados usando um procedimento baseado na metodologia delineada por

DIXIT (1994) a qual permite a estimação de todos os parâmetros de uma série temporal discreta. Para uma série dada, uma regressão linear simples é estimada com  $\ln(S_t) - \ln(S_{t-1})$  como a variável dependente e  $\ln(S_{t-1})$  como a variável independente. Portanto, a equação resultante da regressão é:  $\ln(S_t) - \ln(S_{t-1}) = \beta_0 + \beta_1 \ln(S_{t-1}) + \epsilon$ .

O coeficiente de velocidade de reversão à média  $\eta$  é obtido do estimador da regressão assim:  $\eta = \frac{-\ln(\beta_1+1)}{\Delta t}$ , e a volatilidade é dada por  $\sigma = \sigma_\epsilon \sqrt{\frac{2\ln(\beta_1+1)}{\Delta t[(\beta_1+1)^2-1]}}$  onde  $\sigma_\epsilon^2$  é a variância dos erros da regressão, e a média de longo prazo é dada por  $\bar{S} = \exp[-\frac{\beta_0}{\beta_1} + \frac{\sigma^2}{2\eta}]$ .

### 7.3 APÊNDICE 3: CÓDIGOS EM MATLAB®

```

function [Vet_Posicao_Copom] =
CalculaPosicaoCopom(Vet_Dias_Arvore,Vet_DataCopom)
%Vet_Dias_Arvore vetor contendo as datas, em dias uteis, de cada
ramificacao da arvore
%Vet_DataCopom vetor contendo as datas, em dias uteis, do Copom

ponteiroA = 1;
ponteiroB = 2;
posicaoA = Vet_Dias_ArvoreAux(ponteiroA);
posicaoB = Vet_Dias_ArvoreAux(ponteiroB);
Vet_Posicao_Copom = zeros(1,passos+1);
Vet_Dias_ArvoreAux = Vet_Dias_Arvore;
for k = 1:tam_Vet_DataCopom
    h = ponteiroB;
    while h <= passos+1
        valorA = Vet_DataCopom(k) - posicaoA;
        valorB = Vet_DataCopom(k) - posicaoB;
        if valorA <= 0
            Vet_Posicao_Copom(ponteiroA) = Vet_DataCopom(k);
            h = passos+2;
        elseif valorB <= 0
            moduloA = abs(Vet_DataCopom(k) - posicaoA);
            moduloB = abs(Vet_DataCopom(k) - posicaoB);
            if moduloA < moduloB
                Vet_Posicao_Copom(ponteiroA) = Vet_DataCopom(k);
                h = passos+2;
            else
                Vet_Posicao_Copom(ponteiroB) = Vet_DataCopom(k);
                h = passos+2;
            end
        end
    end
    if h ~= passos+2
        ponteiroA = ponteiroB;
        posicaoA = Vet_Dias_ArvoreAux(ponteiroA);
        ponteiroB = ponteiroB + 1;
        posicaoB = Vet_Dias_ArvoreAux(ponteiroB);
        h = h + 1;
    end
end
end
end

function [Matriz_prob_acumulada] = CalculaMatProbAcumulada(Matriz_prob)
%Calculo da Matriz_prob_acumulada

Matriz_prob_Copom_aux = Matriz_prob;
Matriz_prob_acumulada = Matriz_prob_Copom_aux;
[lin_Matriz_prob_acumulada,col_Matriz_prob_acumulada] =
size(Matriz_prob_acumulada);
for j = 3:col_Matriz_prob_acumulada
    ponteiro_anterior = 1;
    ponteiro_atual = 1;
    while ponteiro_atual < 2*(j-1)
        if (ponteiro_atual == 1) || (ponteiro_atual == 2*(j - 1)-1)

```

```

        Matriz_prob_acumulada(ponteiro_atual+1,j) =
Matriz_prob_acumulada(ponteiro_anterior,j-1)*Matriz_prob_Copom_aux
(ponteiro_atual+1,j);
        ponteiro_atual = ponteiro_atual + 2;
        ponteiro_anterior = ponteiro_anterior + 1;
    elseif (ponteiro_atual > 2)
        Matriz_prob_acumulada(ponteiro_atual,j) =
(Matriz_prob_acumulada(ponteiro_anterior,j-
1)+Matriz_prob_acumulada(ponteiro_anterior+1,j-1))*Matriz_prob_Copom_aux
(ponteiro_atual,j);
        Matriz_prob_acumulada(ponteiro_atual+1,j) =
(Matriz_prob_acumulada(ponteiro_anterior,j-
1)+Matriz_prob_acumulada(ponteiro_anterior+1,j-1))*Matriz_prob_Copom_aux
(ponteiro_atual+1,j);
        ponteiro_atual = ponteiro_atual + 2;
        ponteiro_anterior = ponteiro_anterior + 2;
    end
end
end
end

function [T,Matriz_prob] = ArvoreBinomial_Brandao_Versao2( N, DeltaT,
Volatilidade, VolSaltoCopom, Alpha, Alpha_Copom, DUT, TxJuros, Base,
Vet_Posicao_Copom)
%Constroi arvore binomial (presente no artigo do Brandao) de Taxa de
Juros
%TxJuros = deve estar em porcentagem e representar uma taxa cont.
comp.annual

tam_DUT = length(DUT);
ano = Base;
i = 1;
while i<=N
    if Vet_Posicao_Copom(i)~=0
        PosicaoCopom1 = i;
        i = N + 1;
    end
    i = i + 1;
end

%Os juros devem ser taxa continuamente composta diaria.
TxJuros1 = (1/100).*TxJuros;
Fator = 1 + TxJuros1;
TxJuros_cont_comp_diaria = log(Fator)/ano;
passos = N-1;
Sigma = Volatilidade;
Eta = Alpha;
A=zeros(N,N);
Matriz_prob_acumulada = zeros (N,N);
qtidade_prob_ultimo_ramo = 2*(N-1);
Matriz_prob = zeros (qtidade_prob_ultimo_ramo,N);
A(1,1)= log(TxJuros_cont_comp_diaria(1));

Fator_aditivo = Sigma*sqrt(DeltaT*Base);

```



```

for j = 2:N
    conta_i = 1;
    for i = 1:j-1
        x_ast = A(i,j-1);
        x_astmais = x_ast + Fator_aditivo;
        x_astmenos = x_ast - Fator_aditivo;
        A(i,j) = x_astmais;
        A(i+1,j) = x_astmenos;
        num = Eta*(-x_ast)*sqrt(DeltaT*Base);
        den = sqrt((num)^2 + Sigma^2);
        p_xt = 1/2 + (1/2)*num/den;
        Matriz_prob(conta_i,j) = p_xt;
        Matriz_prob(conta_i+1,j) = 1 - p_xt;
        conta_i = conta_i + 2;
    end
end

aux = 0;
T_aux1 = A;
for i = 1:N
    for j = 1: N
        if ( A(i,j)~= 0 )
            aux=252*exp(A(i,j));
            aux = exp(aux);
            T_aux1(i,j) = aux-1;
        end
    end
end
T_aux1 = 100.*T_aux1;

Matriz_prob_acumulada(1,2) = Matriz_prob (1,2);
Matriz_prob_acumulada(2,2) = Matriz_prob (2,2);
for j = 3:N
    conta_i_mat_prob = 1;
    for i = 1:j
        if (i == 1)
            Matriz_prob_acumulada(i,j) = Matriz_prob_acumulada(i,j-
1)*Matriz_prob (conta_i_mat_prob,j);
            conta_i_mat_prob = conta_i_mat_prob + 1;
        elseif (i == j)
            Matriz_prob_acumulada(i,j) = Matriz_prob_acumulada(i-1,j-
1)*Matriz_prob (conta_i_mat_prob,j);
        else
            Matriz_prob_acumulada(i,j) = Matriz_prob_acumulada(i-1,j-
1)*Matriz_prob (conta_i_mat_prob,j) + ...
            Matriz_prob_acumulada(i,j-
1)*Matriz_prob (conta_i_mat_prob + 1,j);
            conta_i_mat_prob = conta_i_mat_prob + 2;
        end
    end
end

%Transladando a arvore para o ln(taxa) vista no mercado
LnTxJuros = log(TxJuros_cont_comp_diaria);
LnTxJuros_Mercado(1) = LnTxJuros(1);
for i = 1:N-1

```

```

        %funcao interpola taxa de juros
        LnTxJuros_Mercado(i+1) = JurosInterpol(DUT, LnTxJuros,
(i+1)*DeltaT*Base, Base);
    end

media_pond = 0;
A_aux1 = A;
for j=2:N
    for i = 1:j
        media_pond = media_pond + Matriz_prob_acumulada(i,j)*A(i,j);
    end
    Deslocamento = LnTxJuros_Mercado(j) - media_pond;
    for i = 1:j
        A_aux1(i,j) = A(i,j) + Deslocamento;
    end
    media_pond = 0;
end

aux2 = 0;
T_aux2 = A_aux1;
for i = 1:N
    for j = 1: N
        if ( A_aux1(i,j) ~= 0 )
            aux2=252*exp(A_aux1(i,j));
            aux2 = exp(aux2);
            T_aux2(i,j) = aux2-1;
        end
    end
end
T_aux2 = 100.*T_aux2;

%Transladando a arvore para a taxa vista no mercado. Para isso utilizarei
%{(-1/2)*sigma(NumeroDePassos*DeltaT)}

k = -(1/2)*(Sigma^2)*(DeltaT*passos);
A_aux2 = A_aux1;
for j=2:N
    for i = 1:j
        A_aux2(i,j) = A_aux1(i,j) + k;
    end
end

aux2 = 0;
T_aux3 = A_aux2;
for i = 1:N
    for j = 1: N
        if ( A_aux2(i,j) ~= 0 )
            aux2=252*exp(A_aux2(i,j));
            aux2 = exp(aux2);
            T_aux3(i,j) = aux2-1;
        end
    end
end
T_aux3 = 100.*T_aux3;

T = T_aux3;

```

```

end

%%Adicionando o resultado do COPOM na arvore de taxa de juros
function
[T_Copom,Matriz_prob_Copom,Matriz_prob_acumulada_Copom,Vet_QtidadeNosPorRamo_Copom] = ArvoreBinomial_Brandao_VersaoCopom( N,...
    DeltaT, Volatilidade,
VolSaltoCopom, Alpha, Alpha_Copom, DUT, TxJurosCurva, TxJurosRamo,
Base,...
    T, Matriz_prob,
Matriz_prob_acumulada, DataCopom, SigmaModeloGrossi, CteCopom,
Posicao_Arvore_Copom, ...
    QtidadeDeChamaDaFuncao,
Vet_Posicao_Copom)
%%Adicionando o resultado do COPOM na arvore de taxa de juros
%DataCopom eh dado em dias uteis
%TxJuros é um vetor contendo as taxas do ramo da arvore que antecede a
data do Copom

passos = N-1;
tam_DUT = length(DUT);
ano = Base;

[lin_T,col_T] = size(T);
PosicaoCopomVetor = Posicao_Arvore_Copom;

conta = 0;
if QtidadeDeChamaDaFuncao == 1
    for i = 1:N
        j = 1;
        while (j <= lin_T)
            if (T(j,i) ~= 0)
                conta = conta +1;
            end
            j = j+1;
        end
        Vet_QtidadeNosPorRamo (i) = conta;
        conta = 0;
    end

    if PosicaoCopomVetor ~= 2
        T_aux = zeros(lin_T,col_T);
        Matriz_prob_aux = T_aux;
        T_aux(1,1) = T(1,1);
        T_aux(1,2) = T(1,2);
        T_aux(2,2) = T(2,2);
        for i = 3:N
            j = 1;
            conta_j = 1;
            while (j <= Vet_QtidadeNosPorRamo (i))
                if j == 1
                    T_aux(conta_j,i) = T(j,i);
                    conta_j = conta_j + 1;
                elseif j == Vet_QtidadeNosPorRamo (i)
                    T_aux(conta_j,i) = T(j,i);
                    conta_j = conta_j + 1;
                end
            end
        end
    end
end

```

```

        else
            T_aux(conta_j,i) = T(j,i);
            T_aux(conta_j + 1,i) = T(j,i);
            conta_j = conta_j + 2;
        end
        j = j+1;
    end
    end
    T = T_aux;
end
[lin_T,col_T] = size(T);
PosicaoCopomVetor = Posicao_Arvore_Copom;
end
conta = 0;
for i = 1:N
    j = 1;
    while (j <= lin_T)
        if (T(j,i) ~= 0)
            conta = conta + 1;
        end
        j = j+1;
    end
    Vet_QtidadeNosPorRamo (i) = conta;
    conta = 0;
end

Vet_QtidadeNosPorRamo_Copom = Vet_QtidadeNosPorRamo;
%Definindo o tamanho da arvore T_Copom
tam_TxJuros = length(TxJurosRamo);

Vet_QtidadeNosPorRamo_Copom (PosicaoCopomVetor) =
Vet_QtidadeNosPorRamo (PosicaoCopomVetor)*2;
for i = PosicaoCopomVetor+1:N
    Vet_QtidadeNosPorRamo_Copom (i) = Vet_QtidadeNosPorRamo_Copom (i-1)*2;
end

for i = PosicaoCopomVetor+1: N
    if Vet_Posicao_Copom(i)~=0
        PosicaoCopomAux = i;
    end
end

T_Copom = zeros (Vet_QtidadeNosPorRamo_Copom(N),N);
Matriz_prob_acumulada_Copom = zeros (Vet_QtidadeNosPorRamo_Copom(N),N);
Matriz_prob_Copom = zeros (Vet_QtidadeNosPorRamo_Copom(N),N);

%Realizando o bump nas taxas no dia da data do COPOM
Raiz_DeltaT = 1; % Pois analisamos os saltos sobre as taxas anuais
Fator_copom_u = CteCopom + SigmaModeloGrossi*Raiz_DeltaT;
Fator_copom_d = CteCopom - SigmaModeloGrossi*Raiz_DeltaT;
for i = 1:PosicaoCopomVetor
    j = 1;
    j_aux = 1;
    if i == PosicaoCopomVetor
        while j <= Vet_QtidadeNosPorRamo_Copom(i)
            T_Copom(j,i) = T(j_aux,i)*Fator_copom_u;

```

```

        T_Copom(j+1,i) = T(j_aux,i)*Fator_copom_d;
        Matriz_prob_Copom(j,i) = (1/2)*Matriz_prob(j_aux,i);
        Matriz_prob_Copom(j+1,i) = (1/2)*Matriz_prob(j_aux,i);
        j = j + 2;
        j_aux = j_aux + 1;
    end
end

if i < PosicaoCopomVetor
    while j <= Vet_QtidadeNosPorRamo_Copom(i)
        T_Copom(j,i) = T(j,i);
        Matriz_prob_Copom(j,i) = Matriz_prob(j,i);
        j = j + 1;
    end
end

end

TxJurosCurva = (1/100).*TxJurosCurva;
T_Copom = (1/100).*T_Copom;
FatorCurva = 1 + TxJurosCurva;
T_Copom = 1 + T_Copom;

TxJuros_cont_comp_diaria = log(FatorCurva)/ano;
TxJuros_cont_comp_diaria = log(TxJuros_cont_comp_diaria);
T_Copom = log(T_Copom)/ano;

for i = 1:PosicaoCopomVetor
    for j = 1:Vet_QtidadeNosPorRamo_Copom(i)
        T_Copom(j,i) = log(T_Copom(j,i));
    end
end

passos = N-1;
Sigma = Volatilidade;
Eta = Alpha;

Fator_aditivo = Sigma*sqrt(DeltaT*Base);
k = 2*Fator_aditivo;

for j = PosicaoCopomVetor+1:N
    i = 1;
    i_aux = 1;

    while i <= Vet_QtidadeNosPorRamo_Copom(j)
        x_ast = T_Copom(i_aux,j-1);
        x_astmais = x_ast + Fator_aditivo;
        x_astmenos = x_ast - Fator_aditivo;
        T_Copom(i,j) = x_astmais;
        T_Copom(i+1,j) = x_astmenos;
        num = Eta*(-x_ast)*sqrt(DeltaT*Base);
        den = sqrt((num)^2 + Sigma^2);
        p_xt = 1/2 + (1/2)*num/den;
        Matriz_prob_Copom(i,j) = p_xt;
    end
end

```

```

        Matriz_prob_Copom(i+1,j) = 1 - p_xt;
        i = i + 2;
        i_aux = i_aux + 1;
    end
end

aux = 0;
A = T_Copom;
for i = 1:N
    for j = 1: Vet_QtidadeNosPorRamo_Copom(i)
        if ( T_Copom(j,i)~= 0 )
            aux=252*exp(T_Copom(j,i));
            aux = exp(aux);
            T_Copom(j,i) = aux-1;
        end
    end
end
T_aux1 = 100.*T_Copom;

if PosicaoCopomVetor == 2
    Matriz_prob_acumulada_Copom(1,2) = Matriz_prob_Copom (1,2);
    Matriz_prob_acumulada_Copom(2,2) = Matriz_prob_Copom (2,2);
    Matriz_prob_acumulada_Copom(3,2) = Matriz_prob_Copom (3,2);
    Matriz_prob_acumulada_Copom(4,2) = Matriz_prob_Copom (4,2);
else
    j = 1;
    while j <= Vet_QtidadeNosPorRamo_Copom(2)
        Matriz_prob_acumulada_Copom(j,2) = Matriz_prob_Copom (j,2);
        j = j + 1;
    end
end

for j = 3:N
    if j == PosicaoCopomVetor
        i_aux = 1;
        i = 1;
        while i <= Vet_QtidadeNosPorRamo_Copom(j)
            Matriz_prob_acumulada_Copom(i,j) =
Matriz_prob_acumulada_Copom(i_aux,j-1)*Matriz_prob_Copom (i,j);
            Matriz_prob_acumulada_Copom(i + 1,j) =
Matriz_prob_acumulada_Copom(i_aux,j-1)*Matriz_prob_Copom (i + 1,j);
            Matriz_prob_acumulada_Copom(i + 2,j) =
Matriz_prob_acumulada_Copom(i_aux,j-1)*Matriz_prob_Copom (i + 2,j);
            Matriz_prob_acumulada_Copom(i + 3,j) =
Matriz_prob_acumulada_Copom(i_aux,j-1)*Matriz_prob_Copom (i + 3,j);
            i = i + 4;
            i_aux = i_aux + 1;
        end
    else
        i_aux = 1;
        i = 1;
        while i <= Vet_QtidadeNosPorRamo_Copom(j)
            if QtidadeDeChamaDaFuncao == 1
                Matriz_prob_acumulada_Copom(i,j) =
Matriz_prob_acumulada_Copom(i_aux,j-1)*Matriz_prob_Copom (i,j);

```



```

        T_aux2(i,j) = aux2-1;
    end
end
T_aux2 = 100.*T_aux2;

%Transladando a arvore para a taxa vista no mercado. Para isso utilizarei
%{(-1/2)*sigma(NumeroDePassos*DeltaT)}

k = -(1/2)*(Sigma^2)*(DeltaT*passos);
A_aux2 = A_aux1;
for j=2:N
    for i = 1:Vet_QtidadeNosPorRamo_Copom(j)
        A_aux2(i,j) = A_aux1(i,j)+ k;
    end
end

aux2 = 0;
T_aux3 = A_aux2;
for j = 1:N
    for i = 1: Vet_QtidadeNosPorRamo_Copom(j)
        aux2=252*exp(A_aux2(i,j));
        aux2 = exp(aux2);
        T_aux3(i,j) = aux2-1;
    end
end
T_aux3 = 100.*T_aux3;

T_Copom = T_aux3;
end

function [mat_precoIDI,preco_opcao] =
gera_mat_taxa_IDI_Brandao_Copom_Versao2(passos_,dias_IDI, strikes,
IDI_1,ano,T_Copom,Matriz_prob_Copom,Matriz_prob_acumulada_Copom,DUT,
TxJurosCurva ,Vet_QtidadeNosPorRamo_Copom)
%Esta funcao ira pegar a arvore de taxa e redistribuir essas taxas na
%arvore de idi.

mat_IDI = zeros(Vet_QtidadeNosPorRamo_Copom(passos_+1),passos_+1);
mat_IDI (1,1) = IDI_1;

for j = 2:passos_+1
    ponteiro_atual = 1;
    ponteiro_anterior = 1;
    while ponteiro_atual <= Vet_QtidadeNosPorRamo_Copom(j)
        mat_IDI(ponteiro_atual,j) = mat_IDI(ponteiro_anterior,j-
1)*((1+T_Copom(ponteiro_atual,j))^(dias_IDI(j)/ano));
        mat_IDI(ponteiro_atual+1,j) = mat_IDI(ponteiro_anterior,j-
1)*((1+T_Copom(ponteiro_atual+1,j))^(dias_IDI(j)/ano));
        ponteiro_atual = ponteiro_atual + 2;
        if Vet_QtidadeNosPorRamo_Copom(j) ==
2*Vet_QtidadeNosPorRamo_Copom(j-1)
            ponteiro_anterior = ponteiro_anterior + 1;
        end
    end
end

```



```

end

mat_preco_opcao =
zeros(Vet_QtidadeNosPorRamo_Copom(passos_+1),passos_+1);
mat_preco_opcao(:,passos_+1) = max(mat_IDI(:,passos_+1) - strikes,0);

vet_preco_opcao = mat_preco_opcao(:,passos_+1);
tam_TxJurosCurva = length(TxJurosCurva);
tam_DUT = length(DUT);
vet_preco_opcao = vet_preco_opcao/((1 + TxJurosCurva(tam_TxJurosCurva-
1))^(DUT(tam_DUT-1)/ano));

preco_opcao = 0;
for m = 1: Vet_QtidadeNosPorRamo_Copom(passos_+1)
    preco_opcao = preco_opcao +
vet_preco_opcao(m)*Matriz_prob_acumulada_Copom(m,passos_+1);
end

mat_precoIDI = mat_preco_opcao;
end

function IR = JurosInterpol( Days, Rates, Date, Base )
%Funcao retirada do trabalho Precificação de Ativos de Renda Fixa de
%Yazbek, F. e Murrer, D.
%Interpola a Curva de Juros

Maior=find(Days>Date,1,'first');
Menor=Maior-1;
Intervalo=Days(Maior)-Days(Menor);

First_FR=exp(Rates(Menor)*Days(Menor)/Base);
Last_FR=exp(Rates(Maior)*Days(Maior)/Base);
Rate=log(Last_FR/First_FR)*Base/Intervalo;

Interpol=First_FR*exp(Rate*(Date-Days(Menor))/Base);
Interpol=log(Interpol)*Base/Date;

IR=Interpol;

end

```