Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

Tese de Doutorado

A variedade de sistemas canônicos limites para curvas nodais com três componentes irredutíveis

Fábio Xavier Penna

Orientador: Eduardo Esteves

1 de outubro de 2012

Para Camila, Bernardo e Zanforlin.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, que mesmo longe acompanharam de perto o meu esforço para a conclusão deste trabalho. À Camila, pela paciência e por compreender que é preciso tempo para construir. Ao meu irmão e à Cintia, que acreditaram em mim. E ao Bernardo, por estar aqui.

Agradeço ao meu professor, Eduardo Esteves, que propôs este problema. Ao Alex Abreu, pelas conversas que, embora poucas, foram fundamentais. Ao Nivaldo Medeiros, pela disponibilidade em me receber e discutir o resultado principal. À Carolina Araujo e ao Arnaldo Garcia, pela leitura do trabalho, comentários e sugestões pertinentes.

Agradeço ao grupo de Geometria Algébrica do IMPA, onde eu pude aprender muito e ensinar um pouco: André Contiero, Alex Abreu, Pedro Rizzo, Flávio Rocha, Edilaine Ervilha, Douglas Monsores, Flaviano Bahia, Renan Lima... Agradeço ao grupo de Folheações Complexas, companheiros de disciplinas e de pena, em especial Wanderson Costa e Silva e Maycol Falla.

Agradeço a amizade, o companheirismo e a cooperação de todos com quem convivi na Voluntários da Pátria, 98/510C: LG, Contiero, Fi, Galão, Sobrinho, Juan, Renavam, Miguel, Adélio, Robertinho. Agradecimentos especiais ao professor Jacob Palis, há dez anos nosso fiador, e ao Sérgio Guerra, sempre aberto a negociações envolvendo aluguel e contrato.

Agradeço a Renato Zanforlin, grande amigo e companheiro que estará ao meu lado por toda a vida. Ao João Paulo Roquim Romanelli, amigo sempre presente, de Minas a Botafogo. À Laura Hinsch, uma joia alemã lapidada no Brasil. Ao Fábio Simas, antigo companheiro de sala e recente colega de Universidade. A todos os colegas e funcionários do IMPA pelo apoio técnico, logístico e psicológico durante estes anos.

Por fim, agradeço ao CNPq pelo suporte financeiro à minha pesquisa.

Sumário

"Invento, mas invento na secreta esperança de estar inventando certo."

Paulo Emílio Sales Gomes

Em *Invenção e memória* de Lygia Fagundes Telles.

Prefácio

Neste trabalho construímos uma variedade que parametriza os sistemas canônicos limites, e portanto, os divisores de Weierstrass limites em uma curva nodal com três componentes irredutíveis. Consideramos o caso no qual as componentes da curva limite se intersectam em pontos em posição geral e a degeneração ocorre ao longo de uma direção geral. Assumimos ainda que cada componente irredutível da curva intersecta todas as outras componentes.

Não é claro quando Karl Weierstrass estabeleceu e provou seu *Lückensatz* (ou Teorema das "Lacunas"), mas provavelmente isto ocorreu entre os anos 1860 e 1870. Este é o início da história dos pontos de Weierstrass. Seu Teorema afirma o seguinte: *Seja C uma superfície de Riemann compacta. Então, para cada $P \in C$, existem exatamente g inteiros $\alpha_i(P)$ com*

$$1 = \alpha_1(P) < \cdots < \alpha_g(P) \leq 2g - 1$$

tais que não existe uma função meromorfa em C com um único polo em P de multiplicidade $\alpha_i(P)$. Veja [11], página 432. Os números $\alpha_1(P), \ldots, \alpha_g(P)$ são chamados *lacunas* de C em P; o número g, que é independente da escolha de P, foi tomado por Weierstrass como a definição do gênero de C. Usando o Teorema de Riemann-Roch, podemos ver que

$$(\alpha_1(P), \ldots, \alpha_g(P)) \neq (1, \ldots, g) \text{ se, e somente se, } i(gP) > 0,$$

onde $i(\ )$ denota o índice de especialidade do divisor entre parênteses. Denote por W o conjunto de pontos de C onde $i(gP) > 0$. Alguns anos mais tarde, os pontos de W foram chamados "points de Weierstrass" por Haure em [13].

Ainda no final do século XIX, o artigo [2] escrito por Hürwitz foi de suma importância para a teoria dos pontos de Weierstrass e para sua aplicação ao estudo de curvas algébricas.

Nesse trabalho, Hürwitz desenvolve o método do Wronskiano que, em linguagem moderna, nos permite visualizar W como o esquema de zeros de uma seção de um certo fibrado pluricanônico da curva algébrica C. No mesmo trabalho ele deu uma definição precisa de "multiplicidade "ou "peso"de um ponto de Weierstrass e definiu o conceito de pontos de Weierstrass de "ordem superior". Uma descrição histórica completa sobre a origem e o desenvolvimento do conceito de pontos de Weierstrass está em [1].

Questões envolvendo pontos de Weierstrass que surgiram dos trabalhos de Noether, Hürwitz, Haure e Hensel foram redescobertas na segunda metade do século XX, como podemos ver em [4]. Após as novas ferramentas introduzidas na área de Geometria Algébrica por Alexander Grothendieck e seus colaboradores, o foco da pesquisa nesta área passou ao estudo de famílias de variedades. Como o espaço de moduli $\mathcal{M}_g$ das curvas projetivas, conexas e suaves de gênero g admite uma compactificação $\overline{\mathcal{M}}_g$ por curvas estáveis, isto é, curvas nodais com grupo de automorfismos finito, tornou-se natural perguntar para o que os pontos de Weierstrass se degeneram quando uma curva suave se especializa para uma curva estável.

Recorde que um *sistema linear* em uma curva suave C é um par $(V, \mathcal{L})$ onde $\mathcal{L}$ é um fibrado em retas sobre C e $V \subseteq H^0(C, \mathcal{L})$ é um subespaço vetorial. Se o grau de $\mathcal{L}$ é d e a dimensão de V é $r+1$, então $(V, \mathcal{L})$ é dito um $\mathfrak{g}^r_d$, i.e. um conjunto de d pontos movendo em uma família linear de dimensão projetiva r. Um método clássico na teoria de sistemas lineares em curvas suaves é degenerar a curva em curvas singulares e, estudando a geometria dos limites, derivar propriedades das curvas suaves originais. Castelnuovo, Severi, Kleiman, Kempf, Laksov, Griffiths e Harris aplicaram esta idéia degenerando curvas suaves em curvas nodais racionais e curvas com cúspides. Como os pontos de Weierstrass formam o divisor de ramificação do sistema linear completo $H^0(C, \omega_C)$, pode-se relacionar pontos de Weierstrass degenerados com a teoria de *sistemas lineares limites*, desenvolvida por Eisenbud e Harris em [3]. Neste artigo eles trabalham com famílias de curvas suaves degenerando em curvas de tipo compacto, ou seja, curvas com apenas nós desconectantes e cujas componentes irredutíveis são suaves. Grosseiramente falando, Eisenbud e Harris definem um sistema linear limite em uma curva C de tipo compacto como uma coleção de $\mathfrak{g}_d^r$'s, um para cada componente irredutível de C, satisfazendo certas condições de compatibilidade nas ordens de anulamento dos nós de C. Usando esta teoria, eles encontram condições necessárias para um sistema linear limite ser o limite de sistemas lineares definidos em curvas suaves numa vizinhança de C. Como descrito em [4, 5], usando estas ferramentas eles obtêm vários resultados sobre pontos de Weierstrass, como, por exemplo, uma caracterização dos limites de pontos de Weierstrass para curvas de tipo compacto. Eles perguntam em [4], página 499:

"Quais são os limites de pontos de Weierstrass em famílias de curvas degenerando em curvas estáveis que não são de tipo compacto?"

Eisenbud e Harris escrevem em seu artigo [3] que a noção de sistemas lineares se estende para uma curva redutível, contudo não é útil para o estudo da sua geometria. De fato, seja C uma curva nodal com componentes irredutíveis $C_1, \ldots, C_m$ e $\pi : S \longrightarrow B$ uma suavização regular de C onde ξ (resp. s) é o ponto genérico (resp. especial) de B. Suponha que (V_ξ, L_ξ) seja um sistema linear na fibra genérica $S(\xi)$, isto é, um fibrado em retas L_ξ em $S(\xi)$ e um subespaço vetorial $V_\xi \subseteq H^0(S(\xi), L_\xi)$ de dimensão $r+1$. Gostaríamos de determinar um sistema linear limite em C e, estudando sua geometria, dizer algo a respeito da geometria da fibra genérica da família. Como Eisenbud e Harris observam em [3], página 339, "embora limites (V_s, L_s) existam, eles não são únicos e nenhum deles reflete completamente a geometria de (V_ξ, L_ξ)". É possível estender L_ξ a um fibrado em retas $\mathcal{L}$ em S. Neste caso,

V_ξ terá como limite o subespaço vetorial $V_s \subseteq H^0(C, \mathcal{L}|_C)$ de dimensão $(r+1)$, onde

$$V_s = \{\sigma|_C : \sigma \in H^0(S, \mathcal{L}) \cap V_\xi\}$$

e $H^0(S, \mathcal{L}) \cap V_\xi = \{\sigma \in H^0(S, \mathcal{L}) : \sigma|_{S(\xi)} \in V_\xi\}$. No entanto, se $\mathcal{L}$ é tal extensão e D é um divisor de Cartier em S não trivial suportado em C, então $\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_S(D)$ é outra extensão de L_ξ cuja restrição a C pode ter, por exemplo, graus diferentes dos de $\mathcal{L}$ em cada componente.

Na teoria de sistemas lineares limites desenvolvida por Eisenbud e Harris em [3], eles consideram uma família suave $\pi : S \longrightarrow B$ de curvas se especializando para uma curva de tipo compacto $C = \pi^{-1}(s)$, e uma família de sistemas lineares (L_b, V_b) para $b \neq s$. Neste caso, os diferentes fibrados em retas L_s em C que surgem como limite são determinados pelos graus de suas restrições às componentes de C, e qualquer distribuição de graus cuja soma é o grau de L_ξ é possível. Para tais curvas, os fibrados em retas $\mathcal{O}_S(C_i)|_C$ não dependem da família S/B, e para que a coleção dos L_s's seja determinada basta que seja conhecido apenas um deles. Esta propriedade não é verdadeira para curvas estáveis em geral, tornando-se um problema para a extensão da noção de sistemas lineares limites para uma curva C que não seja de tipo compacto. Para superar esta dificuldade, usamos um conceito introduzido por Laila Mainò na sua tese de doutorado [12]. Uma *estrutura enriquecida* sobre uma curva C com m componentes irredutíveis é uma m-upla de fibrados em retas $\Gamma = \{L_1, \ldots, L_m\}$ em C tal que existe uma suavização regular S/B de C com $L_i \cong \mathcal{O}_S(C_i)|_C$ para $i = 1, \ldots, m$. Uma *curva estável enriquecida* é um par (C, Γ) onde C é uma curva estável e Γ é uma estrutura enriquecida em C. Em [12], Mainò introduz a noção de curva estável enriquecida e constrói um espaço de moduli para tais curvas. Ela descreve ainda como uma estrutura enriquecida Γ varia de acordo com a suavização de C e qual é o espaço das estruturas enriquecidas para uma curva estável fixada C. Usando estruturas enriquecidas, Esteves e Medeiros responderam à pergunta proposta por Eisenbud e Harris no caso de curvas estáveis com duas componentes irredutíveis se intersectando em pontos em posição geral; veja [6].

Em [7], Esteves e Salehyan consideram degenerações de curvas suaves em uma curva estável C com m componentes irredutíveis onde cada componente intersecta todas as outras. Sob certas condições de generalidade, para cada $l = 1, \ldots, m$ eles encontram uma m-upla $\underline{n}^{(l)} = (n_1^{(l)}, \ldots, n_m^{(l)})$ de inteiros tal que, para uma coleção geral de fibrados em retas $L_1, \ldots, L_m$ em C formando uma estrutura enriquecida, o sistema linear completo de seções do feixe

$$L^{\underline{n}^{(l)}} := \omega_C \otimes L_1^{n_1^{(l)}} \otimes \cdots \otimes L_m^{n_m^{(l)}}$$

tem número finito de pontos de base, é não degenerado na componente C_l e tem posto $g-1$, onde g é o gênero de C. Eles mostraram no Teorema 6, página 5053 de [7], que dada uma suavização regular $\pi : S \longrightarrow B$ de C, denotando por $\{L_1, \ldots, L_m\}$ a estrutura enriquecida associada, o divisor de Weierstrass limite de π é

$$W = \sum_{l=1}^{m} W_l + \sum_{i<j} g(g-1-n_j^{(i)} - n_i^{(j)})\Delta_{i,j},$$

onde W_l é o divisor de ramificação em C_l do sistema linear completo $H^0(C_l, L^{\underline{n}^{(l)}}|_{C_l})$ e $\Delta_{i,j} = C_i \cap C_j$. Este problema, o de determinar o divisor de Weierstrass limite, é conhecido como *problema da degeneração.*

Outra questão que surge naturalmente vai na direção contrária e é conhecida como o *problema da regeneração.* Considere um divisor de Weil em uma curva estável C. É possível encontrar uma suavização regular S/B de C tal que o divisor de Weierstrass limite associado é o divisor de Weil dado? Também em [7], Teorema 6 acima citado, Esteves e Salehyan apresentam uma solução para curvas estáveis nas quais cada componente intersecta todas as outras. Usando uma caracterização das estruturas enriquecidas dada por L. Mainò em [12], eles identificam os divisores de Weil em C que são limites de divisores de Weierstrass.

Nesta tese aprofundamos a discussão acerca do problema da regeneração para curvas com três componentes. Trabalhando sob as mesmas condições de generalidade de [7], apresentamos uma resposta mais precisa, encontrando uma suavização regular $\pi : S \longrightarrow B$ tal que o divisor de Weierstrass limite de π é o divisor de Weil dado. Deixamos claro quais parâmetros estão envolvidos na regeneração de um divisor de Weil e como eles afetam o processo. Por fim, construímos uma variedade que parametriza os divisores de Weierstrass limites em uma curva nodal com três componentes irredutíveis.

No início do Capítulo 1 temos uma breve apresentação de sistemas lineares limites contendo os resultados básicos de [9]. Em seguida definimos estruturas enriquecidas da mesma forma feita por E. Esteves e N. Medeiros em [6]. Concluímos o capítulo estabelecendo as condições de generalidade assumidas por Esteves e Salehyan e apresentando os principais resultados de [7]. No Capítulo 2 discutimos condições suficientes para a existência de estruturas enriquecidas em curvas nodais redutíveis. Mostramos a relação entre a existência de estruturas enriquecidas e a Pergunta 2.3. Apresentamos uma resposta parcial para esta Pergunta, conveniente para mostrar a existência de estruturas enriquecidas para curvas nodais com três componentes irredutíveis onde cada componente intersecta todas as outras. No Capítulo 3 mostramos que, para $l = 1, \ldots, m$, os inteiros que compõem a m-upla $\underline{n}^{(l)} = (n_1^{(l)}, \ldots, n_m^{(l)})$, encontrada por Esteves e Salehyan em [7], são positivos, exceto $n_l^{(l)}$ que é zero. Usamos este resultado para calcular a dimensão de espaços de seções de feixes canônicos. Na Seção 3.3 apresentamos a técnica que será usada nos Capítulos 4 e 5 para encontrar a variedade dos sistemas canônicos limites com foco em uma componente. No Capítulo 4 introduzimos a noção de “componente irredutível desbalanceada” de uma curva nodal C. Construímos a variedade dos sistemas canônicos limites para curvas nodais com três componentes irredutíveis. O resultado principal desta tese é o seguinte Teorema, cuja demonstração está na página 80:

Teorema 1. *Seja C uma curva nodal com três componentes irredutíveis. Assuma que o gênero de cada componente seja positivo. Assuma que as componentes de C se intersectem em pontos em $\underline{n}^{(l)}$-posição geral, para cada $l = 1, 2, 3$. Assuma que $\delta_{1,2}, \delta_{1,3}, \delta_{2,3} > 0$. Se, para algum $l \in \{1, 2, 3\}$, C_l for uma componente balanceada de C, suponha $\delta_{i,j} \leq 2$, onde $\{l\}^c = \{i, j\}$. Então, a variedade dos sistemas canônicos limites de C é um ponto ou birracional a um dos seguintes toros: $\mathbb{K}^{*\delta-1}, \mathbb{K}^{*\delta-2}, \mathbb{K}^{*\delta-3}, \mathbb{K}^{*\delta_l-1}, \mathbb{K}^{*\delta_l-2}, \mathbb{K}^{*\delta_{l,i}-1}$ onde $l, i \in \{1, 2, 3\}$ são distintos.*■

Na demonstração que apresentamos é necessário supor que as componentes irredutíveis da curva C sejam desbalanceadas. No Capítulo 5 discutimos direções nas quais acreditamos que os resultados dos Capítulos 2 e 4 possam ser generalizados. Finalmente, no Capítulo 6 descrevemos o algoritmo usado para calcular exemplos e apresentamos alguns desses. Uma implementação do algoritmo usando MAPLE está no Apêndice.

Terminologia

Para qualquer conjunto finito F, denote por $\#F$ a cardinalidade de F. Se G é um grupo e F um conjunto, defina G_F como o grupo $\Pi_{p \in F} G$. Se v é um elemento do grupo $\mathbb{Z}^m$, a representação de v na base canônica de $\mathbb{Z}^m$ será $(v_1, \ldots, v_m)$. Se V é um espaço vetorial, a dimensão de V será denotada $\dim(V)$. Para um subconjunto $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$, defina I^c como $\{1, \ldots, m\} - I$. Se f é uma função, denotamos por $\mathrm{Im}(f)$ a imagem de f.

Uma curva C projetiva, conexa, reduzida e nodal, definida sobre um corpo algebricamente fechado $\mathbb{K}$ de característica zero é dita apenas uma *curva nodal* C. O *gênero aritmético* de uma curva será dito apenas *gênero* de uma curva. Denote por $C_1, \ldots, C_m$ as componentes irredutíveis de C e $g_1, \ldots, g_m$ seus respectivos gêneros. Assumimos que as componentes irredutíveis de C se intersectam em pontos em posição geral. Sejam g o gênero e ω o feixe canônico de C. Nesta tese os divisores são assumidos como sendo de Weil. Não obstante, se o suporte do divisor está contido no lugar não singular da curva C, então o divisor de Weil será considerado como um divisor de Cartier. Se D é um divisor sobre C, então, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, a restrição de D a C_i será denotada por D_i. Para cada subconjunto I de $\{1, \ldots, m\}$, denote $D_I := \sum_{i \in I} D_i$. O grau de um divisor de Weil $\sum n_p p$ sobre C é a soma $\sum n_p$. Denotaremos por $|D|$ o suporte de um divisor D em C.

Assuma $m > 1$. Para quaisquer i, j distintos em $\{1, \ldots, m\}$, seja $\Delta_{i,j}$ o divisor de Weil em C reduzido cujo suporte é $C_i \cap C_j$. Denote por $\delta_{i,j}$ o grau de $\Delta_{i,j}$. Faça $\Delta_i := \sum_{j \neq i} \Delta_{i,j}$ e $\Delta := \sum_{i<j} \Delta_{i,j}$. Denote $\delta_i :=$grau(Δ_i) e $\delta :=$grau(Δ). Para cada par I, J de subconjuntos disjuntos de $\{1, \ldots, m\}$, defina

$$\Delta_{I,J} := \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \Delta_{i,j}$$

e denote por $\delta_{I,J}$ o grau do divisor $\Delta_{I,J}$. Quando o subconjunto $\{i\}$ aparecer como um índice, será escrito apenas i.

Para cada subconjunto não vazio $I \subset \{1, \ldots, m\}$, seja $C_I := \bigcup_{i \in I} C_i$, a subcurva de C determinada por I. Denotaremos seu feixe canônico por ω_I e seu gênero aritmético $h^0(C_I, \omega_I)$

por g_I. De acordo com [10], página 61, a relação entre os feixes canônicos de C e C_I é

$$\omega|_{C_I} \cong \omega_I(\Delta_{I,I^c}). \tag{1}$$

Se C_I é conexa, como C é uma curva nodal, segue de [10], página 57, que

$$g_I = \sum_{i \in I} g_i + \sum_{\substack{i,j \in I \\ i<j}} \delta_{i,j} - \#I + 1.$$

Em particular, como C é assumida uma curva conexa, temos que $g := \sum_{i=1}^{m} g_i + \delta - m + 1$. Assuma $g_i > 0$ para cada $i = 1, \ldots, m$.

Seja B o espectro de um anel de valoração discreta R e ξ (resp. s) seu ponto genérico (resp. especial). Uma suavização de C é um mapa projetivo e plano $\pi : S \longrightarrow B$, onde a fibra especial $S(s)$ é isomorfa a C e sua fibra genérica $S(\xi)$ é suave. Se π é uma suavização de C, seja ω_π o feixe dualizante relativo de π. Então ω_π é uma extensão invertível do feixe canônico da fibra genérica de π a S e sua restrição $\omega_\pi(s)$ à fibra especial é o feixe canônico desta fibra. Mais informações sobre o feixe dualizante relativo podem ser encontradas em [16].

Uma suavização $\pi : S \longrightarrow B$ é dita regular se S é um esquema regular. Neste caso, $C_1, \ldots, C_m$ são divisores de Cartier em S e qualquer divisor de Cartier suportado na fibra especial de π é uma combinação linear de $C_1, \ldots, C_m$. Note que $C_1 + \cdots + C_m$ é um divisor principal de S, isto é

$$\mathcal{O}_S(C_1 + \cdots + C_m) \cong \mathcal{O}_S.$$

Neste trabalho, todas as suavizações são assumidas regulares. Desta forma, uma suavização regular $\pi : S \longrightarrow B$ é dita apenas uma suavização $\pi : S \longrightarrow B$ ou S/B.

Capítulo 1

Introdução

1.1 Sistemas canônicos limites

Seja C uma curva nodal e $\pi : S \longrightarrow B$ uma suavização regular de C, onde $B = \mathrm{Spec}(R)$ com R anel de valoração discreta. Para cada feixe invertível L_ξ em $S(\xi)$ existe um feixe invertível $\mathcal{L}$ em S tal que $\mathcal{L}(\xi) \cong L_\xi$. Tal feixe $\mathcal{L}$ é chamado uma *extensão de L_ξ a S*. Por exemplo, se $L_\xi = \mathcal{O}_{S(\xi)}(D)$, onde D é um divisor de Cartier em $S(\xi)$, então $\overline{D}$ é um divisor de Cartier em S e $\mathcal{L} := \mathcal{O}_S(\overline{D})$ é uma extensão de L_ξ. Dada outra extensão $\mathcal{M}$ de L_ξ a S, temos que $(\mathcal{M} \otimes \mathcal{L}^{-1})(\xi) \cong \mathcal{O}_{S(\xi)}$. Segue que existem inteiros $n_1, \ldots, n_m$ tais que $\mathcal{M} \cong \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_S(n_1C_1 + \cdots + n_mC_m)$.

Fixe um feixe invertível L_ξ em $S(\xi)$ e um subespaço vetorial não nulo $V_\xi \subseteq H^0(S(\xi), L_\xi)$ de dimensão $r+1$. Dada uma extensão $\mathcal{L}$ de L_ξ a S, temos o mapa de restrição

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L} & \longrightarrow & L_\xi \\ t & \longmapsto & t|_{S(\xi)} \end{array}$$

que induz o mapa injetivo $H^0(S,\mathcal{L}) \longrightarrow H^0(S(\xi), L_\xi)$. Defina

$$V_{\mathcal{L}} := V_\xi \cap H^0(S,\mathcal{L}) \subset H^0(S(\xi), L_\xi).$$

Temos que

$$V_{\mathcal{L}}(\xi) = (V_\xi \cap H^0(S,\mathcal{L})) \otimes k(\xi) = V_\xi \cap H^0(S(\xi), \mathcal{L}(\xi)) = V_\xi.$$

Observe que $H^0(S,\mathcal{L})$ é R-módulo livre de torção, onde R é anel de valoração discreta. Como $V_{\mathcal{L}} \subseteq H^0(S,\mathcal{L})$, concluímos que $V_{\mathcal{L}}$ é um R-módulo livre. Além disso, posto$(H^0(S,\mathcal{L})) = \dim(H^0(S(\xi), L_\xi))$ e o posto de $V_{\mathcal{L}}$ é $r+1$.

Considere a inclusão $V_{\mathcal{L}} \subseteq H^0(S,\mathcal{L})$. Se $s \in H^0(S,\mathcal{L})$ e $f \in R-\{0\}$ são tais que $fs \in V_{\mathcal{L}}$, então $fs \in V_\xi$. Como V_ξ é espaço vetorial sobre $k(\xi)$, temos que f é uma unidade e concluímos que $s \in V_\xi$. Portanto $s \in V_{\mathcal{L}}$. Isto mostra que o módulo $H^0(S,\mathcal{L})/V_{\mathcal{L}}$ é livre de torção e podemos obter a inclusão $V_{\mathcal{L}} \otimes k(s) \subset H^0(S,\mathcal{L}) \otimes k(s)$. Por outro lado, como s é o ponto especial de B e corresponde a um divisor principal, o mapa $H^0(S,\mathcal{L}) \longrightarrow H^0(S(s), \mathcal{L}(s))$ tensorizado por $k(s)$ origina o mapa injetivo

$$H^0(S,\mathcal{L}) \otimes k(s) \longrightarrow H^0(S(s), \mathcal{L}(s)).$$

Obtemos o homomorfismo injetivo

$$V_{\mathcal{L}}(s) \longrightarrow H^0(S,\mathcal{L})(s) \longrightarrow H^0(S(s), \mathcal{L}(s)).$$

Desta forma, mostramos que, dada uma extensão $\mathcal{L}$ de L_ξ a S, o sistema linear (V_ξ, L_ξ) em $S(\xi)$ se estende ao sistema linear $(V_{\mathcal{L}}, \mathcal{L})$ em S, e a restrição deste a $S(s)$ é o sistema linear $(V_{\mathcal{L}}(s), \mathcal{L}(s))$.

Definição 1.1. Diz-se que $(V_{\mathcal{L}}(s), \mathcal{L}(s))$ é um *sistema linear limite*.

Lema 1.2. *Sejam C uma curva nodal e $\pi : S \longrightarrow B$ uma suavização regular de C. Sejam Y uma componente irredutível de C, e L_ξ um feixe invertível em $S(\xi)$. Então, existe uma extensão $\mathcal{L}$ de L_ξ a S tal que o mapa*

$$V_{\mathcal{L}}(s) \longrightarrow H^0(Y, \mathcal{L}(s)|_Y)$$

é injetivo.

Demonstração: Sejam $C_1, \ldots, C_m$ as componentes irredutíveis de C. Podemos supor $Y = C_1$. Seja $\mathcal{E}$ uma extensão de L_ξ a S. Para qualquer sequência de inteiros $n_1, \ldots, n_m$, o feixe $\mathcal{F} := \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_S(n_1C_1 + \cdots + n_mC_m)$ também é uma extensão de L_ξ a S. É possível encontrar $n_1, \ldots, n_m$ tais que grau$(\mathcal{F}(s)|_{C_i}) < 0$ para todo $2 \leq i \leq m$. Seja $\mathcal{L}$ este feixe. Então $H^0(C_i, \mathcal{L}(s)|_{C_i}) = 0$ para todo $i \neq 1$ e obtemos as inclusões

$$V_{\mathcal{L}}(s) \subset H^0(S(s), \mathcal{L}(s)) \subset \bigoplus_{i=1}^{m} H^0(C_i, \mathcal{L}(s)|_{C_i}) = H^0(Y, \mathcal{L}(s)|_Y),$$

onde a segunda inclusão é dada pelo mapa

$$\begin{array}{ccc} H^0(S(s), \mathcal{L}(s)) & \longrightarrow & H^0(C_1, \mathcal{L}(s)|_{C_1}) \oplus \cdots \oplus H^0(C_m, \mathcal{L}(s)|_{C_m}) \\ t & \longmapsto & (t|_{C_1}, \ldots, t|_{C_m}).\Box \end{array}$$

Lema 1.3. *Sejam C uma curva nodal, $\pi : S \longrightarrow B$ uma suavização regular de C e Y uma componente de C. Fixe um feixe invertível L_ξ em $S(\xi)$. Suponha que $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ sejam extensões de L_ξ a S tais que os mapas $V_{\mathcal{L}_i}(s) \longrightarrow H^0(Y, \mathcal{L}_i(s)|_Y)$ sejam injetivos para $i = 1, 2$. Então existe uma extensão $\mathcal{L}$ de L_ξ a S tal que $\mathcal{L}_i \cong \mathcal{L}(D_i)$, onde D_i é um divisor de Cartier em S efetivo, suportado em C, tal que $Y \not\subseteq |D_i|$ e $V_{\mathcal{L}} \longrightarrow V_{\mathcal{L}_i}$ é um isomorfismo para $i = 1, 2$.*

Demonstração: Como $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ são extensões de L_ξ a S, existe um divisor de Cartier $D = n_1C_1 + \cdots + n_mC_m$ em S, suportado em C, tal que $\mathcal{L}_1 \cong \mathcal{L}_2(D)$. Por outro lado,

$C_1 + \cdots + C_m$ é um divisor principal. Portanto, para todo inteiro n, o divisor $D - n(C_1 + \cdots + C_m)$ é linearmente equivalente a D. Escolhendo um n conveniente, podemos supor $Y \nsubseteq |D|$. Faça $D = D_1 - D_2$, onde D_1 e D_2 são divisores de Cartier efetivos e disjuntos.

Seja $\mathcal{F} := \mathcal{L}_1(D_2)$. Observe que $\mathcal{F} \cong \mathcal{L}_2(D_1)$. Além disso,

$$\mathcal{L}_i(D_{3-i})(s)|_Y = \mathcal{L}_i(s)|_Y(D_{3-i} \cdot Y)$$

para $i = 1, 2$, onde $D_{3-i} \cdot Y$ é a restrição de D_{3-i} a Y, o qual é um divisor de Cartier efetivo pois $Y \nsubseteq |D_{3-i}|$. As inclusões de feixes $\mathcal{L}_i(s)|_Y \hookrightarrow \mathcal{F}(s)|_Y$ geram os mapas injetivos $H^0(Y, \mathcal{L}_i(s)|_Y) \longrightarrow H^0(Y, \mathcal{F}(s)|_Y)$ para $i = 1, 2$. Do diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} V_{\mathcal{L}_i}(s) & \longrightarrow & H^0(Y, \mathcal{L}_i(s)|_Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ V_{\mathcal{F}}(s) & \longrightarrow & H^0(Y, \mathcal{F}(s)|_Y), \end{array}$$

onde o mapa horizontal superior é injetivo por hipótese, concluímos que o mapa vertical à esquerda é injetivo. Como $V_{\mathcal{F}}$ e $V_{\mathcal{L}_i}$ são R-módulos livres e ambos têm posto igual à dimensão de V_ξ, segue que $V_{\mathcal{F}} = V_{\mathcal{L}_i}$ para $i = 1, 2$.

Por outro lado, temos que $\mathcal{L}_1(-D_1) \cong \mathcal{L}_2(-D_2)$. Denote este feixe por $\mathcal{G}$. No diagrama comutativo

$$\begin{array}{cccc} & \mathcal{G} & \xrightarrow{+D_1} & \mathcal{L}_1 & \\ +D_2 & \downarrow & & \downarrow & +D_2 \\ & \mathcal{L}_2 & \xrightarrow{+D_1} & \mathcal{F} & \end{array}$$

todos os mapas são injetivos, o que também vale para o diagrama induzido

$$\begin{array}{ccc} H^0(S, \mathcal{G}) & \longrightarrow & H^0(S, \mathcal{L}_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^0(S, \mathcal{L}_2) & \longrightarrow & H^0(S, \mathcal{F}). \end{array}$$

Como D_1 e D_2 são disjuntos, concluímos que

$$H^0(S,\mathcal{G}) = H^0(S,\mathcal{L}_1) \cap H^0(S,\mathcal{L}_2) \subset H^0(S,\mathcal{F}).$$

Portanto

$$V_{\mathcal{L}_1} \cap V_{\mathcal{L}_2} = (V_\xi \cap H^0(S,\mathcal{L}_1)) \cap (V_\xi \cap H^0(S,\mathcal{L}_2)) = V_\xi \cap H^0(S,\mathcal{G}) = V_{\mathcal{G}} \subset V_{\mathcal{F}}$$

e $V_{\mathcal{L}_1} = V_{\mathcal{G}} = V_{\mathcal{L}_2}$. Faça $\mathcal{L} := \mathcal{G}$.$\square$

Proposição 1.4. *Sejam C uma curva nodal, $\pi : S \longrightarrow B$ uma suavização regular de C e Y uma componente de C. Fixe L_ξ um feixe invertível em $S(\xi)$. Existe uma única extensão $\mathcal{L}$ de L_ξ a S tal que, se $\mathcal{M}$ é outra extensão de L_ξ a S tal que o homomorfismo induzido*

$$V_{\mathcal{M}}(s) \longrightarrow H^0(Y, \mathcal{M}(s)|_Y)$$

é injetivo, então existe um divisor de Cartier efetivo D em S, suportado em C, com $Y \nsubseteq |D|$, tal que $\mathcal{M} \cong \mathcal{L}(D)$ e o mapa injetivo induzido $V_{\mathcal{L}} \longrightarrow V_{\mathcal{M}}$ é um isomorfismo.

Demonstração: Pelo Lema 1.2, existe uma extensão $\mathcal{E}_1$ de L_ξ a S tal que o mapa $V_{\mathcal{E}_1} \to H^0(Y, \mathcal{E}_1(s)|_Y)$ é injetivo. Se $\mathcal{E}_1$ satisfaz o afirmado, faça $\mathcal{L} := \mathcal{E}_1$. Senão, existe uma extensão $\mathcal{M}$ de L_ξ a S tal que o homomorfismo $V_{\mathcal{M}}(s) \to H^0(Y, \mathcal{M}(s)|_Y)$ é injetivo mas não existe um divisor de Cartier efetivo D em S, suportado em C, com $Y \nsubseteq |D|$, tal que $\mathcal{M} \cong \mathcal{E}_1(D)$. Considerando os feixes $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{M}$, segue do Lema 1.3 que existe uma extensão $\mathcal{E}_2$ de L_ξ a S e um divisor de Cartier efetivo D_1 em S, suportado em C tal que $Y \nsubseteq |D_1|$, $\mathcal{E}_2 \cong \mathcal{E}_1(-D_1)$ e $V_{\mathcal{E}_2} \longrightarrow V_{\mathcal{E}_1}$ é isomorfismo. Observe que o homomorfismo natural $V_{\mathcal{E}_2}(s) \longrightarrow H^0(Y, \mathcal{E}_2(s)|_Y)$ é injetivo. Se $\mathcal{E}_2$ satisfaz o afirmado, faça $\mathcal{L} := \mathcal{E}_2$. Senão, podemos repetir o argumento acima, encontrando extensões $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n$ de L_ξ e divisores de Cartier efetivos $D_1, D_2, \ldots, D_{n-1}$ em S, suportados em C, tais que $Y \nsubseteq |D_i|$, $\mathcal{E}_{i+1} \cong \mathcal{E}_i(-D_i)$ e $V_{\mathcal{E}_{i+1}} \longrightarrow V_{\mathcal{E}_i}$ é um isomorfismo para cada $1 \leq i \leq n-1$. Em particular

$$V_{\mathcal{E}_1} \cong V_{\mathcal{E}_n} \subseteq H^0(S, \mathcal{E}_1(-D_1 - \cdots - D_n)).$$

Como $V_{\mathcal{E}_1}$ é não nulo, este processo tem de parar para algum valor de n. Então existe n tal que $\mathcal{L} := \mathcal{E}_n$ é como afirmado.$\square$

Observação 1.5. Se $\mathcal{M}$ é uma extensão de L_ξ a S tal que $V_{\mathcal{M}}(s) \longrightarrow H^0(Y, \mathcal{M}(s)|_Y)$ é injetivo, então, pela Proposição 1.4, existe um divisor de Cartier efetivo D em S, suportado em C, com $Y \nsubseteq |D|$, tal que $\mathcal{M} \cong \mathcal{L}(D)$. Portanto existe um mapa injetivo natural $\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{M}$. Dizemos que $\mathcal{L}$ é uma *extensão minimal* de L_ξ a S tal que o mapa $V_{\mathcal{L}} \longrightarrow H^0(Y, \mathcal{L}(s)|_Y)$ é injetivo.

Definição 1.6. Sejam C uma curva nodal, $\pi : S \longrightarrow B$ uma suavização regular de C e $\omega_{S(\xi)}$ o feixe canônico da fibra genérica de π. Seja $\mathcal{L}$ uma extensão invertível de $\omega_{S(\xi)}$ a S. Diz-se que $\mathcal{L}$ é um *feixe canônico* de π.

O Teorema que se segue está em [17] e [9].

Teorema 1.7. *Seja C uma curva nodal com componentes irredutíveis $C_1, \ldots, C_m$. Sejam $\pi : S \longrightarrow B$ uma suavização regular de C e s o ponto especial de B. Para cada l em $\{1, \ldots, m\}$ existe um único feixe canônico $\mathcal{L}^{(l)}$ de π com as seguintes propriedades:*

1. *O homomorfismo canônico induzido $V_{\mathcal{L}^{(l)}}(s) \longrightarrow H^0(C_l, \mathcal{L}^{(l)}(s)|_{C_l})$ é injetivo;*

2. *Para cada componente irredutível C_i de C, com $i \neq l$, o homomorfismo canônico induzido $V_{\mathcal{L}^{(l)}}(s) \longrightarrow H^0(C_i, \mathcal{L}^{(l)}(s)|_{C_i})$ não é identicamente nulo.*

Demonstração: Existência: Considere $\mathcal{L}^{(l)}$ a extensão dada pela Proposição 1.4. O mapa $V_{\mathcal{L}^{(l)}}(s) \longrightarrow H^0(C_l, \mathcal{L}^{(l)}(s)|_{C_l})$ é injetivo. Suponha, por absurdo, que exista uma componente irredutível C_i de C, com $i \neq l$, tal que o mapa $V_{\mathcal{L}^{(l)}}(s) \longrightarrow H^0(C_i, \mathcal{L}^{(l)}(s)|_{C_i})$ é identicamente nulo. Então $V_{\mathcal{L}^{(l)}(-C_i)} \cong V_{\mathcal{L}^{(l)}}$, contradizendo a minimalidade de $\mathcal{L}^{(l)}$. Portanto $V_{\mathcal{L}^{(l)}}(s) \to H^0(C_i, \mathcal{L}^{(l)}(s)|_{C_i})$ é não nulo para cada i.

Unicidade: Suponha que $\mathcal{E}$ seja um feixe canônico de π tal que $V_{\mathcal{E}}(s) \longrightarrow H^0(C_l, \mathcal{E}(s)|_{C_l})$ é injetivo e, para cada componente irredutível C_i de C, com $i \neq l$, o homomorfismo canônico induzido $V_{\mathcal{E}}(s) \longrightarrow H^0(C_i, \mathcal{E}(s)|_{C_i})$ não é identicamente nulo. Pela Proposição 1.4, existe um divisor de Cartier efetivo D em S, suportado em C, tal que $C_l \nsubseteq |D|$, $\mathcal{E} \cong \mathcal{L}^{(l)}(D)$ e o homomorfismo induzido $V_{\mathcal{L}^{(l)}} \longrightarrow V_{\mathcal{E}}$ é um isomorfismo. Então

$$V_{\mathcal{E}} \cong V_{\mathcal{L}^{(l)}} \subseteq H^0(S, \mathcal{L}^{(l)}) \cong H^0(S, \mathcal{E}(-D)).$$

Observe que cada seção de $V_{\mathcal{E}}(s)$ se anula em D. Como $V_{\mathcal{E}}(s) \longrightarrow H^0(C_i, \mathcal{E}(s)|_{C_i})$ não é identicamente nulo para todo $i \neq l$ e $C_l \nsubseteq |D|$, então $D = 0$ e $\mathcal{E} \cong \mathcal{L}^{(l)}$.$\square$

Definição 1.8. Para cada $l = 1, \ldots, m$, dizemos que $\mathcal{L}^{(l)}$ é o feixe canônico de π com foco em C_l. O sistema linear limite $(H^0(S, \mathcal{L}^{(l)})(s), \mathcal{L}^{(l)}(s))$ é chamado o *sistema canônico limite de π com foco em C_l.*

Para cada $l \in \{1, \ldots, m\}$, ambos os feixes $\mathcal{L}^{(l)}$ e ω_π são extensões do feixe canônico da fibra genérica de S/B. Portanto, existem inteiros $n_1^{(l)}, \ldots, n_m^{(l)}$ tais que

$$\mathcal{L}^{(l)} \cong \omega_\pi(n_1^{(l)} C_1 + \cdots + n_m^{(l)} C_m).$$

Além disso, como $V_{\mathcal{L}^{(l)}}(s) \longrightarrow H^0(C_l, \mathcal{L}^{(l)}(s)|_{C_l})$ é injetivo, podemos supor $n_l^{(l)} = 0$. Desta forma obtemos a unicidade dos inteiros $n_1^{(l)}, \ldots, n_m^{(l)}$.

O seguinte resultado está em [6], página 277.

Proposição 1.9. *Sejam C uma curva nodal e $C_1, \ldots, C_m$ suas componentes irredutíveis. Seja $\pi : S \longrightarrow B$ uma suavização regular de C. Se $\mathcal{M}$ é um feixe canônico de π tal que a restrição $H^0(S, \mathcal{M}) \longrightarrow H^0(C_j, \mathcal{M}(s)|_{C_j})$ é não nula para cada $j = 1, \ldots, m$, então, para cada $l = 1, \ldots, m$, existem inteiros não negativos $n_1^{(l)}, \ldots, n_m^{(l)}$ únicos, com $n_l^{(l)} = 0$, tais que*

$$\mathcal{L}^{(l)} \cong \mathcal{M}(n_1^{(l)} C_1 + \cdots + n_m^{(l)} C_m),$$

onde $\mathcal{L}^{(l)}$ é o feixe canônico de π com foco em C_l.

Demonstração: Fixe $l \in \{1, \ldots, m\}$. Como $\mathcal{M}$ é um feixe canônico de π, existem inteiros $n_1^{(l)}, \ldots, n_m^{(l)}$, com $n_l^{(l)} = 0$, tais que $\mathcal{L}^{(l)} \cong \mathcal{M}(n_1^{(l)} C_1 + \cdots + n_m^{(l)} C_m)$. Sejam

$$D_1 := \sum_{n_i^{(l)} \geq 0} n_i^{(l)} C_i \quad \text{e} \quad D_2 := -\sum_{n_i^{(l)} < 0} n_i^{(l)} C_i.$$

Desta forma, D_j é um divisor de Cartier em S efetivo, suportado em C, tal que $C_l \nsubseteq |D_j|$ para $j = 1, 2$. Além disso, $\mathcal{L}^{(l)} \cong \mathcal{M}(D_1 - D_2)$, onde D_1 e D_2 são disjuntos. Denote $\mathcal{F} := \mathcal{L}^{(l)}(D_2)$ e $\mathcal{G} := \mathcal{L}^{(l)}(-D_1)$. Observe que $\mathcal{F} \cong \mathcal{M}(D_1)$ e $\mathcal{G} \cong \mathcal{M}(-D_2)$. Seja ξ o ponto genérico de S. Faça $V_\xi := H^0(S(\xi), \omega_{S(\xi)})$. Como $C_l \nsubseteq |D_2|$, o mapa $V_{\mathcal{F}}(s) \to H^0(C_l, \mathcal{F}(s)|_{C_l})$ é injetivo e, pela Proposição 1.4, temos a igualdade $V_{\mathcal{L}^{(l)}} = V_{\mathcal{F}}$. Como D_1 e D_2 são disjuntos, por procedimento análogo ao aplicado na demonstração do Lema 1.3, obtemos que

$$V_{\mathcal{G}} = V_{\mathcal{L}^{(l)}} \cap V_{\mathcal{M}} \subset V_{\mathcal{F}}.$$

Portanto $V_{\mathcal{G}} \cong V_{\mathcal{M}}$ e o homomorfismo injetivo $V_{\mathcal{M}}(s) \longrightarrow H^0(C, \mathcal{M}(s))$ se fatora

$$\begin{array}{ccc} V_{\mathcal{M}(-D_2)}(s) & \xrightarrow{\sim} & V_{\mathcal{M}}(s) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^0(C, \mathcal{M}(-D_2)(s)) & \longrightarrow & H^0(C, \mathcal{M}(s)). \end{array}$$

Por hipótese, $V_{\mathcal{M}}(s) \longrightarrow H^0(C_j, \mathcal{M}(s)|_{C_j})$ é não nulo para cada $j = 1, \ldots, m$. Concluímos que $D_2 = 0$.$\square$

1.2 Estruturas enriquecidas

Seja C uma curva nodal com componentes irredutíveis $C_1, \ldots, C_m$. Para cada $p \in |\Delta|$, existem únicos $i_p, j_p \in \{1, \ldots, m\}$, com $i_p < j_p$, tais que $p \in C_{i_p} \cap C_{j_p}$. Tome parâmetros locais t_{i_p} e t_{j_p} de C_{i_p} e C_{j_p} em p, respectivamente. Dado $\lambda \in \mathbb{Z}^m$, seja $\lambda_p := \lambda_{j_p} - \lambda_{i_p}$. Para cada $a \in \mathbb{K}^*_\Delta$, defina o mapa $E_a : \mathbb{Z}^m \longrightarrow \mathrm{Div}(C)$ onde associamos $\lambda \in \mathbb{Z}^m$ ao divisor de Cartier em C definido pela equação $a_p^{\lambda_p}(t_{i_p})^{\lambda_p} + (t_{j_p})^{-\lambda_p} = 0$ em cada $p \in |\Delta|$ e trivial nos pontos fora de $|\Delta|$. Então E_a é um homomorfismo de grupos denotado *estrutura pré-enriquecida de C*. Por construção, E_a depende da escolha de parâmetros locais para cada $p \in |\Delta|$, mas o conjunto formado por todas as estruturas pré-enriquecidas de C não depende, como mostrado em [6], página 291.

Definição 1.10. Um homomorfismo de grupos $L : \mathbb{Z}^m \longrightarrow \mathrm{Pic(C)}$ é chamado uma *estrutura enriquecida* em C se existe uma estrutura pré-enriquecida $E : \mathbb{Z}^m \longrightarrow \mathrm{Div(C)}$ tal que $L(\lambda) \cong \mathcal{O}_C(E(\lambda))$ para todo $\lambda \in \mathbb{Z}^m$.

Exemplo 1.11. (Cf. [6], página 291.) Seja C uma curva nodal e $C_1, \ldots, C_m$ suas componentes irredutíveis. Tome S/B uma suavização regular de C. Para cada $p \in |\Delta|$, sejam $\tilde{u}_p = 0$ e $\tilde{v}_p = 0$ equações locais para C_{i_p} e C_{j_p} em $\mathcal{O}_{S,p}$, respectivamente. Sejam u_p e v_p as restrições de $\tilde{u}_p$ a C_{j_p} e de $\tilde{v}_p$ a C_{i_p}. Desta forma, u_p e v_p são parâmetros locais de C_{i_p} e C_{j_p} em p. Seja t um parâmetro local de B em seu ponto especial. Existe uma unidade $\tilde{\nu} \in \mathcal{O}^*_{S,p}$ tal que $t = \tilde{\nu}_p \tilde{u}_p \tilde{v}_p$. Seja ν_p a restrição de $\tilde{\nu}_p$ a C. Considere o elemento $a \in \mathbb{K}^*_\Delta$

cuja coordenada correspondente ao ponto p é $\nu_p(p)$. A estrutura enriquecida determinada pela estrutura pré-enriquecida $E_a : \mathbb{Z}^m \longrightarrow \mathrm{Div}(C)$ é

$$\begin{array}{rcl} L: \ \mathbb{Z}^m & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(C) \\ e_i & \longmapsto & \mathcal{O}_S(C_i)|_C. \end{array}$$

A sequência $\mathcal{O}_S(C_1)|_C, \ldots, \mathcal{O}_S(C_m)|_C$ é chamada uma base ordenada para a estrutura enriquecida, cf. [12]. Como $C_1 + \cdots + C_m$ é a fibra especial de S/B, temos que $\mathcal{O}_S(C_1 + \cdots + C_m) \cong \mathcal{O}_S$. Isto nos permite calcular a autointerseção de C_i. Para cada $i = 1, \ldots, m$, fazendo $\widehat{C}_i := \overline{C - C_i}$, obtemos

$$\mathcal{O}_S(C_i)|_{C_i} \cong \mathcal{O}_{C_i}(-\Delta_i) \quad \text{e} \quad \mathcal{O}_S(C_i)|_{\widehat{C}_i} \cong \mathcal{O}_{\widehat{C}_i}(\Delta_i). \tag{1.1}$$

Esteves e Medeiros provam em [6], página 291, que toda estrutura enriquecida é do tipo apresentado no Exemplo 1.11:

Teorema 1.12. *Seja C uma curva nodal e $C_1, \ldots, C_m$ suas componentes irredutíveis. Então, para cada suavização regular S/B de C, existe uma estrutura enriquecida L de C tal que*

$$L(\lambda) \cong \mathcal{O}_S(\lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_m C_m)|_C \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{Z}^m. \tag{1.2}$$

Reciprocamente, para cada estrutura enriquecida L de C existe uma suavização regular S/B de C satisfazendo (1.2).■

1.2.1 Suavizações ao longo de direções gerais

Fixe uma curva nodal C. Seja $\mathcal{V}_C$ o espaço versal de deformações de C. Denote por N_C o espaço normal em $[C] \in \mathcal{V}_C$ ao espaço das deformações equissingulares de C. Uma suavização S/B de C está associada a um arco μ_S em N_C que passa pela origem. O seguinte Teorema está em [12], página 14.

Teorema 1.13. *Dada uma suavização regular $\pi : S \longrightarrow B$ de uma curva nodal C, seja μ_S o arco correspondente a S/B no espaço normal N_C. Então a estrutura enriquecida induzida em C por S/B depende apenas da direção tangente ao arco μ_S na origem em N_C.*■

Para $i = 1, \ldots, \dim(N_C)$, seja H_i o i-ésimo hiperplano coordenado de N_C. Defina $N_C^* := N_C - \bigcup H_i$. Usando o Teorema 1.13, Laila Mainò demonstra o seguinte resultado na página 18 de [12]:

Proposição 1.14. *Fixe uma curva nodal C. Existe uma correspondência bijetiva entre estruturas enriquecidas em C e classes de equivalência de deformações de primeira ordem em $N_C^*/\sim$.*■

Na Proposição 1.14, $\sim$ é uma relação de equivalência para direções lineares em N_C.

1.3 Interseções em posição geral

Seja C uma curva nodal com componentes irredutíveis $C_1, \ldots, C_m$. Nesta seção, denotaremos o conjunto $\{1, \ldots, m\}$ por Λ. Fixe uma m-upla de inteiros $\underline{n} := (n_1, \ldots, n_m)$. Um subconjunto $I \subseteq \Lambda$ será chamado *$\underline{n}$-balanceado* se n_i é constante para $i \in I$. Neste caso, faça $n_I := n_i$ para qualquer $i \in I$. O inteiro n_I é chamado o $\underline{n}$-peso de I. Qualquer subconjunto não vazio $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ pode ser decomposto, de forma única, em subconjuntos maximais $\underline{n}$-balanceados. Estes subconjuntos são chamados as $\underline{n}$-componentes de I.

Reproduziremos a argumentação de [14], página 19. Para cada $i, j \in \Lambda$ distintos, seja Σ_j^i um conjunto ordenado com $\delta_{i,j}$ pontos simples de C_i. Escolha os Σ_j^i de forma que $\Sigma_j^i \cap \Sigma_l^i = \varnothing$ para $i, j, l \in \Lambda$ distintos. Seja $\tilde{C}$ a curva nodal obtida pela união de $C_1, \ldots, C_m$ com a identificação ordenada de Σ_j^i e Σ_i^j para todo i e j. Seja $\Sigma_{i,j}$ o divisor de Weil reduzido em $\tilde{C}$ com suporte $C_i \cap C_j$. Para cada $I \subseteq \Lambda$ não vazio, seja $\tilde{C}_I \subseteq \tilde{C}$ a união das componentes C_i para $i \in I$ e $\tilde{\omega}_I$ o feixe canônico de $\tilde{C}_I$.

Faça os conjuntos Σ^i_j variar. Diremos que *as componentes de C se intersectam em pontos em $\underline{n}$-posição geral* se, para cada divisor efetivo $D = \sum_{i<j} D_{i,j}$, com $0 \leq D_{i,j} \leq \Delta_{i,j}$, e cada subconjunto $\underline{n}$-balanceado $I \subseteq \Lambda$,

$$h^0(C_I, \omega_I(\sum_{\substack{i \in I \\ j \notin I}} (1 + n_j - n_i)\Delta_{i,j} - D_{i,j})) \leq h^0(\tilde{C}_I, \tilde{\omega}_I(\sum_{\substack{i \in I \\ j \notin I}} (1 + n_j - n_i)\Sigma_{i,j} - E_{i,j}))$$

para todas as possíveis escolhas de Σ^i_j e dos divisores efetivos $E_{i,j}$ tais que $E_{i,j} \leq \Sigma_{i,j}$ e $\text{grau}(E_{i,j}) = \text{grau}(D_{i,j})$ para todo i e j. Por semicontinuidade, se os Σ^i_j são escolhidos genericamente, então as componentes de $\tilde{C}$ se intersectam em pontos em $\underline{n}$-posição geral. Portanto a condição é geral.

1.4 Feixes gerais

Seja C uma curva nodal, $D \subset C$ uma coleção de nós e $f : \tilde{C} \longrightarrow C$ a normalização parcial de C ao longo de D. Existe um mapa natural $\Phi : \text{Pic}(C) \longrightarrow \text{Pic}(\tilde{C})$ definido por *pullback* via f. Fixe $[\tilde{L}] \in \text{Pic}(\tilde{C})$ e defina $S := \Phi^{-1}([\tilde{L}])$. Considere o seguinte subconjunto de S

$$S^0 := \{[N] \in S | h^0(C, N) \text{ é mínimo}\}.$$

Por semicontinuidade, S^0 é um subconjunto aberto não trivial de S. Além disso, como S é um toro, S é irredutível. Portanto S^0 é um subconjunto denso de S. O seguinte Lema pode ser encontrado em [7], página 5039.

Lema 1.15. *Seja C uma curva projetiva, reduzida, definida sobre um corpo algebricamente fechado $\mathbb{K}$ de característica zero. Seja $D \subset C$ uma coleção de nós e $f : \tilde{C} \longrightarrow C$ a normalização parcial de C ao longo de D. Sejam $\tilde{L}$ um feixe invertível em $\tilde{C}$ e L um feixe invertível geral em C tal que $f^*L \cong \tilde{L}$. Se, para cada $p \in D$, existe uma seção $s \in H^0(C, L)$ tal que $s(p) \neq 0$, então*

$$h^0(C, L) = h^0(\tilde{C}, \tilde{L}) - \#D.\blacksquare$$

1.5 O problema da degeneração

E. Esteves e P. Salehyan apresentam em [7] uma resposta parcial para a pergunta proposta por Eisenbud e Harris (veja página 9 do Prefácio). Eles usam os resultados de [9] para encontrar sistemas canônicos limites quando as componentes da curva limite se intersectam em posição geral e a degeneração ocorre ao longo de uma direção geral. Em seguida eles usam os sistemas canônicos limites para encontrar os divisores de Weierstrass limites. Em [7] são tratados pontos de Weierstrass de ordem superior. No entanto, para aqueles de ordem um, os autores supõem que cada componente da curva limite intersecta todas as outras componentes.

1.5.1 O Lema numérico

Seja Γ um grafo conexo, não orientado, com m vértices. Ordene os vértices. Para todos $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ distintos, seja $\delta_{i,j}$ o número de arestas entre o i-ésimo e o j-ésimo vértice. Seja $\delta := \sum_{i<j} \delta_{i,j}$. Dados subconjuntos $I, J \subseteq \{1, \ldots, m\}$ disjuntos e não vazios, seja $\delta_{I,J} := \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \delta_{i,j}$. Se $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ é um subconjunto, denote $I^c := \{1, \ldots, m\} - I$.

Para cada par de m-uplas de inteiros $\underline{e} = (e_1, \ldots, e_m)$ e $\underline{n} = (n_1, \ldots, n_m)$, defina

$$\epsilon_i^{\underline{e},\underline{n}} := e_i + \sum_{j \neq i} (n_j - n_i)\delta_{i,j} \text{ para cada } i = 1, \ldots, m.$$

Fixado um subconjunto não vazio $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$, seja

$$\epsilon_I^{\underline{e},\underline{n}} := \sum_{i \in I} \epsilon_i^{\underline{e},\underline{n}} - \sum_{\substack{i,j \in I \\ i<j}} \delta_{i,j}.$$

Para cada m-upla de inteiros $\underline{n} = (n_1, \ldots, n_m)$ e cada subconjunto não vazio I de $\{1, \ldots, m\}$, seja $m_I^{\underline{n}} := \text{máx}\{n_i | i \in I\}$. Faça $m_\varnothing^{\underline{n}} := -\infty$. Se $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ é não vazio, faça $\gamma_I^{\underline{n}} := 0$ se $m_{I^c}^{\underline{n}} \geq m_I^{\underline{n}}$ e $\gamma_I^{\underline{n}} := 1$ caso contrário.

Fixado um subconjunto $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$, defina $h_i^I := 1$ se $i \in I$ e $h_i^I := 0$ caso contrário. Seja $\underline{h}^I$ a m-upla $(h_1^I, \ldots, h_m^I)$.

Em [7], página 5046, E. Esteves e P. Salehyan demonstram o seguinte resultado.

Lema 1.16. *Assuma $\delta_{i,j} \neq 0$ para todo i e j. Fixe um inteiro $l \in \{1, \ldots, m\}$. Seja $\underline{e} = (e_1, \ldots, e_m)$ uma m-upla de inteiros tal que $e_1 + \cdots + e_m = \delta$. Então existe uma única m-upla de inteiros $\underline{n} = (n_1, \ldots, n_m)$, com $n_l = 0$, tal que para todo $I \subset \{1, \ldots, m\}$ próprio e não vazio,*

$$\gamma_{I^c}^{\underline{n}+\underline{h}^{I^c}} \leq \epsilon_I^{\underline{e},\underline{n}} \leq \delta_{I,I^c} - \gamma_I^{\underline{n}+\underline{h}^I}. \blacksquare$$

A prova deste Lema é essencialmente algorítmica. No Capítulo 6 apresentamos um algoritmo baseado em sua demonstração.

1.5.2 Divisores de Weierstrass limites

Seja C uma curva nodal com componentes irredutíveis $C_1, \ldots, C_m$, as quais possuem gêneros $g_1, \ldots, g_m$, respectivamente. Sejam ω o feixe canônico de C e g o gênero de C. Para cada $l = 1, \ldots, m$, seja $\underline{e}^{(l)} = (e_1^{(l)}, \ldots, e_m^{(l)})$ a m-upla de inteiros definida por

$$e_j^{(l)} := \begin{cases} g_j - 1 + \delta_j & \text{se } j \neq l \\ \\ g_l - g + \delta_l & \text{se } j = l. \end{cases} \tag{1.3}$$

Observe que, para cada l, $e_1^{(l)} + \cdots + e_m^{(l)} = \delta$. Assuma que $\delta_{i,j} \geq 1$ para todo i e j.

Seja Γ o grafo dual de C, com os vértices ordenados de acordo com a ordem das componentes irredutíveis de C. Para cada $l = 1, \ldots, m$, seja $\underline{n}^{(l)} = (n_1^{(l)}, \ldots, n_m^{(l)})$ a única m-upla de inteiros $\underline{n}^{(l)}$ dada pelo Lema 1.16. Defina

$$\mathcal{L}_\pi^{\underline{n}^{(l)}} := \omega_\pi(n_1^{(l)} C_1 + \cdots + n_m^{(l)} C_m).$$

Denote por $L_\pi^{\underline{n}^{(l)}}$ e $L_{\pi,I}^{\underline{n}^{(l)}}$ as restrições $\mathcal{L}_\pi^{\underline{n}^{(l)}}|_C$ e $\mathcal{L}_\pi^{\underline{n}^{(l)}}|_{C_I}$, respectivamente. Recorde a notação estabelecida na Seção Terminologia. A Proposição seguinte pode ser encontrada em [7], página 5051.

Proposição 1.17. *Fixe $l \in \{1, \ldots, m\}$. Assuma que as componentes de C se intersectem em pontos em $\underline{n}^{(l)}$-posição geral. Seja $\pi : S \longrightarrow B$ uma suavização regular de C ao longo de uma direção geral. Assuma $\delta_{i,j} \neq 0$ para todo i e j. Então:*

1. $h^0(C_{\{l\}^c}, L_{\pi,\{l\}^c}^{\underline{n}^{(l)}}(-\Delta_l)) = 0$;

2. $h^0(C_{\{i\}^c}, L_{\pi,\{i\}^c}^{\underline{n}^{(l)}}(-\Delta_i)) < g$ *para cada* $i \in \{l\}^c$;

3. $h^0(C, L_\pi^{\underline{n}^{(l)}}) = g$.■

Seja $\pi : S \longrightarrow B$ uma suavização regular de C. Faça $V_\xi := H^0(S(\xi), \omega(\xi))$. Para cada extensão invertível $\mathcal{L}$ de $\omega(\xi)$ a S, seja $(V_\mathcal{L}(s), \mathcal{L}(s))$ o sistema linear limite induzido por V_ξ em C.

Definição 1.18. O divisor de Weierstrass do sistema canônico completo da fibra genérica de π, i.e. o sistema completo de seções de $\omega(\xi)$, se estende a um único subesquema fechado $\mathcal{W} \subset S$ que é plano sobre B. Dizemos que a fibra especial W_π de $\mathcal{W}$ é o *divisor de Weierstrass limite* de π.

O seguinte Teorema é o principal resultado mostrado por Esteves e Saleyhan em [7].

Teorema 1.19. *Para cada $l = 1, \ldots, m$, seja $\underline{e}^{(l)}$ a m-upla de inteiros dada por* (1.3) e $\underline{n}^{(l)} = (n_1^{(l)}, \ldots, n_m^{(l)})$ a única m-upla de inteiros estabelecida pelo Lema 1.16. Assuma que as componentes de C se intersectem em pontos em $\underline{n}^{(l)}$-posição geral, para cada $l = 1, \ldots, m$. Assuma que $\delta_{i,j} \neq 0$ para todo i e j. Então:

1. Seja $\pi : S \longrightarrow B$ uma suavização regular de C ao longo de uma direção geral. Para cada $l = 1, \ldots, m$, denote por W_l o divisor de ramificação em C_l do sistema linear das seções de $L_{\pi,l}^{\underline{n}^{(l)}}$ gerado por $H^0(C, L_\pi^{\underline{n}^{(l)}})$. Então, como divisor de Weil, $W_\pi = W$, onde
$$W = \sum_{l=1}^{m} W_l + \sum_{i<j} g(g - 1 - n_j^{(i)} - n_i^{(j)})\Delta_{i,j}.$$

2. Reciprocamente, seja $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_m$ uma coleção de feixes gerais invertíveis em C satisfazendo

   (a) $\mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_m \cong \mathcal{O}_C$,

   (b) $\mathcal{M}_i|_{C_{\{i\}^c}} \cong \mathcal{O}_{C_{\{i\}^c}}(\Delta_i)$ para cada $i = 1, \ldots, m$.

   Para cada $l = 1, \ldots, m$, seja W_l o divisor de ramificação em C_l do sistema linear de seções de $L^{(l)}|_{C_l}$ gerado por $H^0(C, L^{(l)})$, onde
$$L^{(l)} := \omega \otimes \mathcal{M}_1^{\otimes n_1^{(l)}} \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_m^{\otimes n_m^{(l)}}.$$

Então W, como dado acima, é o ciclo fundamental de um divisor de Weierstrass limite.■

O Lema 1.15 é necessário para a demonstração do Teorema 1.19. Portanto, de acordo com a Seção 1.4, é necessário que os feixes $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_m$ sejam gerais.

Capítulo 2

Estruturas enriquecidas e suavizações regulares

Seja C uma curva nodal com componentes irredutíveis $C_1, \ldots, C_m$. Recorde a notação usada no Capítulo 1, Seção 1.2. Uma *estrutura enriquecida* em C é um homomorfismo de grupos $L : \mathbb{Z}^m \longrightarrow \mathrm{Pic(C)}$ para o qual existe uma estrutura pré-enriquecida $E : \mathbb{Z}^m \longrightarrow \mathrm{Div(C)}$ satisfazendo $L(\lambda) \cong \mathcal{O}_C(E(\lambda))$ para todo $\lambda \in \mathbb{Z}^m$. Neste capítulo seguiremos na mesma direção de [6], Seção 6.

2.1 Divisores de Cartier e ideais fracionários

Seja C uma curva nodal com m componentes irredutíveis. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, seja K_i o corpo de funções racionais da i-ésima componente irredutível de C. Faça $K := K_1 \oplus \cdots \oplus K_m$ e veja cada K_i dentro de K de forma natural. Para cada i em $\{1, \ldots, m\}$, seja $\mathcal{K}_i$ o feixe constante sobre C_i associado a K_i e $\mathcal{K} := \mathcal{K}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{K}_m$. A ação de $(\mathbb{K}^*)^m$ em $K_1 \oplus \cdots \oplus K_m$

dada por

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{K}^*)^m & \times & K_1 \oplus \cdots \oplus K_m & \longrightarrow & K_1 \oplus \cdots \oplus K_m \\ ((c_1, \ldots, c_m) & , & (f_1, \ldots, f_m)) & \longmapsto & (c_1 f_1, \ldots, c_m f_m) \end{array}$$

induz uma ação em $\mathcal{K}$. Seja $\mathrm{Div}(C)$ o grupo dos divisores de Cartier em C e $\mathrm{Frac}(C)$ o grupo dos ideais fracionários localmente principais em C. O mapa abaixo é um isomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathrm{Div}(C) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Frac}(C) \\ & D & \longmapsto & \mathcal{I}(D) \end{array}$$

onde $\mathcal{I}(D) \subset \mathcal{K}$ é o ideal fracionário gerado em cada ponto $p \in C$ pelo inverso de uma equação local de D em p. Via o isomorfismo Φ, a ação de $(\mathbb{K}^*)^m$ em $\mathcal{K}$ induz uma ação natural em $\mathrm{Div}(C)$. Para cada $c \in (\mathbb{K}^*)^m$ e $D \in \mathrm{Div}(C)$, esta ação será denotada por $c \cdot D$.

Observação 2.1. Recorde a notação da Seção 1.3. Dado λ em $\mathbb{Z}^m$, seja I um subconjunto de $\{1, \ldots, m\}$ λ-balanceado. Seja $E : \mathbb{Z}^m \longrightarrow \mathrm{Div}(C)$ uma estrutura pré-enriquecida em C. Afirmamos que $\mathcal{O}_C(E(\lambda))|_{C_I} \cong \mathcal{O}_{C_I}(\sum_{i \in I} \sum_{j \notin I} (\lambda_j - \lambda_i)\Delta_{i,j})$. De fato, considere o isomorfismo $\Phi : \mathrm{Div}(C) \longrightarrow \mathrm{Frac}(C)$. Fixe $p \in |\Delta|$. Sejam $i_p, j_p \in \{1, \ldots, m\}$, com $i_p < j_p$, os únicos índices tais que $p \in C_{i_p} \cap C_{j_p}$. Faça $\lambda_p := \lambda_{j_p} - \lambda_{i_p}$. Por definição, a equação de $E(\lambda)$ em p é $a_p^{\lambda_p}(t_{i_p})^{\lambda_p} + (t_{j_p})^{-\lambda_p} = 0$ para algum $a_p \in \mathbb{K}^*$. Se $\{i_p, j_p\} \subset I$, então $\lambda_p = 0$ e teremos que $E(\lambda)$ é trivial em p. Se $i_p \in I$ e $j_p \notin I$, então o ideal $\mathcal{I}(E(\lambda)|_{C_I})_p$ é gerado pelo inverso da equação local de $E(\lambda)$ em p, ou seja, por $t_{i_p}^{-\lambda_p}$.

A seguinte Proposição está em [6], página 289.

Proposição 2.2. *Seja C uma curva nodal com componentes irredutíveis $C_1, \ldots, C_m$. Suponha que D e $\tilde{D}$ são divisores de Cartier em C tais que $D|_{C_i} = \tilde{D}|_{C_i}$ para cada $i = 1, \ldots, m$. Então $D \equiv \tilde{D}$ se, e somente se, existe $c \in (\mathbb{K}^*)^m$ tal que $D = c \cdot \tilde{D}$.*

Demonstração: Sejam $\mathcal{I}(D) \subset \mathcal{K}$ e $\mathcal{I}(\tilde{D}) \subset \mathcal{K}$ os ideais fracionários associados a D e $\tilde{D}$. Como $D|_{C_i} = \tilde{D}|_{C_i}$ para cada $i = 1, \ldots, m$, então $\mathcal{I}(D)\mathcal{O}_{C_i} = \mathcal{I}(\tilde{D})\mathcal{O}_{C_i}$ para todo i. Segue que

$$\mathcal{I}(D)\mathcal{O}_{C_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{I}(D)\mathcal{O}_{C_m} = \mathcal{I}(\tilde{D})\mathcal{O}_{C_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{I}(\tilde{D})\mathcal{O}_{C_m} \subset \mathcal{K}. \tag{2.1}$$

Sabemos que $D \equiv \tilde{D}$ se, e somente se, $\mathcal{I}(D) \cong \mathcal{I}(\tilde{D})$. Pela relação (2.1) isto ocorre se, e somente se, existem automorfismos ψ_i de $\mathcal{I}(D)\mathcal{O}_{C_i}$ tais que $\psi(\mathcal{I}(D)) = \mathcal{I}(\tilde{D})$, onde $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_m)$. Como $\mathcal{I}(D)\mathcal{O}_{C_i}$ é um feixe invertível, temos que

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{I}(D)\mathcal{O}_{C_i}, \mathcal{I}(D)\mathcal{O}_{C_i}) \cong \mathbb{K},$$

para cada $i = 1, \ldots, m$. Então ψ_i é a multiplicação por algum $c_i \in \mathbb{K}^*$.$\square$

2.2 Sobre a existência de estruturas enriquecidas

Fixe um homomorfismo de grupos $\Psi : \mathbb{Z}^d \longrightarrow \mathrm{Pic}(C)$. Nesta seção, discutiremos condições sobre um homomorfismo $\lambda : \mathbb{Z}^d \longrightarrow \mathbb{Z}^m$ para que exista uma estrutura enriquecida $L : \mathbb{Z}^m \longrightarrow \mathrm{Pic}(C)$ satisfazendo

$$\Psi = L \circ \lambda. \tag{2.2}$$

Na análise que se segue, reduziremos esta questão a outra puramente algébrica, cf. [6], páginas 293-295. Nesta seção, o conjunto $\{1, \ldots, m\}$ é denotado por Λ.

Fixe um homomorfismo de grupos $\lambda : \mathbb{Z}^d \longrightarrow \mathbb{Z}^m$. Para cada $I \subseteq \Lambda$, defina o grupo abeliano

$$H_I := \{l \in \mathbb{Z}^d | \lambda(l)_i = \lambda(l)_j \text{ para todo } i, j \in I\}.$$

Suponha que exista uma estrutura enriquecida $L : \mathbb{Z}^m \longrightarrow \mathrm{Pic}(C)$ satisfazendo a Equação (2.2). De acordo com a Observação 2.1, para cada $I \subseteq \Lambda$,

$$\Psi(l)|_{C_I} \cong \mathcal{O}_{C_I}(\sum_{i \in I} \sum_{j \notin I} (\lambda(l)_j - \lambda(l)_i)\Delta_{i,j}) \text{ para cada } l \in H_I. \tag{2.3}$$

Considerando conjuntos unitários $\{i\} \subset \Lambda$, obtemos

$$\Psi(l)|_{C_i} \cong \mathcal{O}_{C_i}(\sum_{j \neq i} (\lambda(l)_j - \lambda(l)_i)\Delta_{i,j}) \text{ para cada } l \in \mathbb{Z}^d.$$

Esteves e Medeiros provaram em [6], página 294, que existe um homomorfismo $\tilde{\Psi} : \mathbb{Z}^d \longrightarrow \mathrm{Div}(C)$ tal que

$$\Psi(l) \cong \mathcal{O}_C(\tilde{\Psi}(l)) \text{ para cada } l \in \mathbb{Z}^d \tag{2.4}$$

e

$$\tilde{\Psi}(l)|_{C_i} = \sum_{j \neq i} (\lambda(l)_j - \lambda(l)_i)\Delta_{i,j} \tag{2.5}$$

para cada $l \in \mathbb{Z}^d$ e $i \in \Lambda$.

Pela definição de estrutura enriquecida, existe $L : \mathbb{Z}^m \longrightarrow \mathrm{Pic}(C)$ satisfazendo (2.2) se, e somente se, existe uma estrutura pré-enriquecida $E : \mathbb{Z}^m \longrightarrow \mathrm{Div}(C)$ tal que

$$\Psi(l) \cong \mathcal{O}_C(E \circ \lambda(l)) \text{ para cada } l \in \mathbb{Z}^d. \tag{2.6}$$

Por raciocínio análogo ao da Observação 2.1, para qualquer estrutura pré-enriquecida $E : \mathbb{Z}^m \longrightarrow \mathrm{Div}(C)$ também temos que

$$E \circ \lambda(l)|_{C_i} = \sum_{j \neq i} (\lambda(l)_j - \lambda(l)_i)\Delta_{i,j},$$

para todo $l \in \mathbb{Z}^d$. Como $\tilde{\Psi}(l)|_{C_i} = E\lambda(l)|_{C_i}$ para cada $i = 1, \ldots, m$, as condições da Proposição 2.2 são satisfeitas. Portanto, dada uma estrutura pré-enriquecida

$E : \mathbb{Z}^m \longrightarrow \mathrm{Div}(C)$, a Equação (2.6) é satisfeita se, e somente se, existe um homomorfismo $c : \mathbb{Z}^d \longrightarrow \mathbb{K}^*_\Lambda$ tal que

$$E \circ \lambda(l) = c(l) \cdot \tilde{\Psi}(l) \text{ para cada } l \in \mathbb{Z}^d. \tag{2.7}$$

Podemos fazer uma análise mais detalhada considerando parâmetros locais. Para cada $p \in |\Delta|$, seja $i_p, j_p \in \Lambda$, com $i_p < j_p$, os únicos índices tais que $p \in C_{i_p} \cap C_{j_p}$. Defina $\lambda(l)_p := \lambda(l)_{j_p} - \lambda(l)_{i_p}$. Sejam t_{i_p} e t_{j_p} parâmetros locais de C_{i_p} e C_{j_p} em p, respectivamente. A Equação (2.5) indica que existe um único homomorfismo $\phi : \mathbb{Z}^d \longrightarrow \mathbb{K}^*_\Delta$ tal que $\phi(l)_p(t_{i_p})^{\lambda(l)_p} + (t_{j_p})^{-\lambda(l)_p} = 0$ é uma equação local para $\tilde{\Psi}(l)$ em p, para cada $p \in |\Delta|$ e $l \in \mathbb{Z}^d$. Usando este homomorfismo, obtemos a seguinte equivalência: existe um homomorfismo $c : \mathbb{Z}^d \longrightarrow \mathbb{K}^*_\Lambda$ e uma estrutura pré-enriquecida $E : \mathbb{Z}^m \longrightarrow \mathrm{Div}(C)$ tal que a Condição (2.7) é satisfeita se, e somente se, existem $a \in \mathbb{K}^*_\Delta$ e um homomorfismo $c : \mathbb{Z}^d \longrightarrow \mathbb{K}^*_\Lambda$ tal que

$$a_p^{\lambda(l)_p} = \frac{c(l)_{i_p}}{c(l)_{j_p}} \phi(l)_p \text{ para cada } p \in |\Delta| \text{ e } l \in \mathbb{Z}^d. \tag{2.8}$$

Seja I um subconjunto de Λ. Suponha que a Condição (2.3) seja válida. Defina $\Psi_I := \Psi|_{H_I}$ e $\lambda_I := \lambda|_{H_I}$. Existem isomorfismos

$$\Psi_I(l) \cong \mathcal{O}_{C_I}(\tilde{\Psi}(l)|_{C_I}) \text{ e } \Psi_I(l) \cong \mathcal{O}_{C_I}(E \circ \lambda_I(l))$$

para cada $l \in H_I$. Observe que, novamente pela Observação 2.1, para qualquer estrutura pré-enriquecida $E : \mathbb{Z}^m \longrightarrow \mathrm{Div}(C)$ temos que

$$E \circ \lambda(l)|_{C_I} = \sum_{i \in I} \sum_{j \notin I} (\lambda(l)_j - \lambda(l)_i) \Delta_{i,j},$$

para todo $l \in H_I$. Portanto, pela Proposição 2.2, o isomorfismo $\mathcal{O}_{C_I}(\tilde{\Psi}(l)|_{C_I}) \cong \mathcal{O}_{C_I}(E\lambda_I(l))$ é equivalente à existência de um homomorfismo $c_I : H_I \longrightarrow \mathbb{K}_I^*$ tal que

$$E \circ \lambda_I(l) = c_I(l) \cdot \tilde{\Psi}(l)|_{C_I} \text{ para cada } l \in H_I. \tag{2.9}$$

Além disso, por argumento similar ao apresentado no parágrafo anterior, existe um homomorfismo $c_I : H_I \longrightarrow \mathbb{K}_I^*$ e uma estrutura pré-enriquecida $E : \mathbb{Z}^m \longrightarrow \mathrm{Div(C)}$ tal que (2.9) é satisfeita se, e somente se, existem $a \in \mathbb{K}_{\Delta_I}^*$, onde Δ_I é o divisor de Weil reduzido correspondente à soma dos nós redutíveis de C_I, e um homomorfismo $c_I : H_I \longrightarrow \mathbb{K}_I^*$ tal que

$$a_p^{\lambda(l)_p} = \frac{c_I(l)_{i_p}}{c_I(l)_{j_p}}\phi(l)_p \text{ para cada } p \in |\Delta_I| \text{ e } l \in H_I.$$

Para cada nó redutível p de C_I temos $\lambda(l)_p = 0$, portanto a Equação (2.9) é válida se, e somente se,

$$\frac{c_I(l)_{i_p}}{c_I(l)_{j_p}}\phi(l)_p = 1 \tag{2.10}$$

para cada $l \in H_I$ e p nó redutível de C_I.

Se (2.8) é satisfeita para certos $a \in \mathbb{K}_\Delta^*$ e $c : \mathbb{Z}^d \longrightarrow \mathbb{K}_\Lambda^*$, então

$$\frac{c(l)_{i_p}}{c(l)_{j_p}}\phi(l)_p = 1 \text{ para cada } p \in |\Delta| \text{ e } l \in H_{\{i_p,j_p\}}. \tag{2.11}$$

Como podemos ver em [6], página 295, a recíproca desta afirmação também é verdadeira, i.e. dado um homomorfismo $c : \mathbb{Z}^d \longrightarrow \mathbb{K}_\Lambda^*$ tal que (2.11) é válida, então existe $a \in \mathbb{K}_\Delta^*$ tal que (2.8) é satisfeita.

Tendo em vista as considerações desta seção, a existência de uma estrutura enriquecida $L : \mathbb{Z}^m \longrightarrow \mathrm{Pic}(C)$, tal que a condição

$$\Psi = L \circ \lambda$$

é satisfeita, é consequência de uma resposta afirmativa à seguinte Pergunta:

Pergunta 2.3. *Seja $\phi : \mathbb{Z}^d \longrightarrow \mathbb{K}^*_\Delta$ um homomorfismo de grupos. Suponha que, para cada $I \subseteq \Lambda$, exista um homomorfismo de grupos $c_I : H_I \longrightarrow \mathbb{K}^*_I$ tal que*

$$\frac{c_I(l)_{i_p}}{c_I(l)_{j_p}}\phi(l)_p = 1 \text{ para todo } p \in |\Delta_I| \text{ e } l \in H_I.$$

Existe um homomorfismo $c : \mathbb{Z}^d \longrightarrow \mathbb{K}^*_\Lambda$ tal que

$$\frac{c(l)_{i_p}}{c(l)_{j_p}}\phi(l)_p = 1 \text{ para todo } p \in |\Delta_{\{i_p,j_p\}}| \text{ e } l \in H_{\{i_p,j_p\}}?$$

O resultado abaixo está em [6], página 295. Ele foi mostrado usando o raciocínio desenvolvido nesta seção. Além disso, ele foi utilizado por Esteves e Medeiros para a obtenção de estruturas enriquecidas em reduções semi-estáveis de curvas com duas componentes irredutíveis.

Proposição 2.4. *Seja $\lambda : \mathbb{Z}^d \longrightarrow \mathbb{Z}^m$ um homomorfismo de grupos. Para cada $I \subset \Lambda$ seja*

$$H_I := \{l \in \mathbb{Z}^d | \lambda(l)_i = \lambda(l)_j \text{ para todo } i, j \in I\}.$$

Seja $\mathcal{P}$ uma coleção de subconjuntos não vazios de Λ. Para cada $I \in \mathcal{P}$, seja h_I o menor inteiro em Λ para o qual $h_I \in I$. Faça $\mathcal{T} := \mathcal{P} \cup \{\{i\} | i \in \Lambda\}$. Assuma as seguintes condições:

1. *Para cada par $i, j \in \Lambda$ de elementos distintos com $C_i \cap C_j \neq \varnothing$, o subgrupo $H_{\{i,j\}} \subseteq \mathbb{Z}^d$ é gerado por todos os H_I com $I \in \mathcal{P}$ tais que $i, j \in I$.*

2. *Para cada $h \in \Lambda$, os H_I, para todo $I \in \mathcal{P}$ com $h \in I$ e $h_I < h$, são distintos e linearmente dependentes.*

Então um homomorfismo de grupos $\Psi : \mathbb{Z}^d \longrightarrow \mathrm{Pic(C)}$ *satisfaz*

$$\Psi(l)|_{C_I} \cong \mathcal{O}_{C_I}(\sum_{i\in I}\sum_{j\notin I}(\lambda(l)_j - \lambda(l)_i)\Delta_{i,j}) \tag{2.12}$$

para cada $I \in \mathcal{T}$ *e* $l \in H_I$ *se, e somente se, existe uma suavização regular* $\pi : S \longrightarrow B$ *de* C *tal que*

$$\Psi(l) \cong \mathcal{O}_S(\lambda(l)_1 C_1 + \cdots + \lambda(l)_m C_m)|_C$$

para cada $l \in H_I$.■

O Corolário seguinte está em [6], página 297.

Corolário 2.5. *Seja* $\mathcal{N}$ *um feixe invertível em* C *e* $l \in \mathbb{Z}^m$. *Seja* $\mathcal{P}$ *a partição de* Λ *definida pela seguinte propriedade: para cada* $i, j \in \Lambda$, *existe* $I \in \mathcal{P}$ *tal que* $i, j \in I$ *se, e somente se,* $l_i = l_j$. *Então existe uma suavização regular* $\pi : S \longrightarrow B$ *de* C *tal que*

$$\mathcal{N} \cong \mathcal{O}_S(l_1 C_1 + \cdots + l_m C_m)|_C$$

se, e somente se,

$$\mathcal{N}|_{C_I} \cong \mathcal{O}_{C_I}(\sum_{i\in I}\sum_{j\notin I}(l_j - l_i)\Delta_{i,j}) \tag{2.13}$$

para cada $I \in \mathcal{P}$.

Demonstração: Defina $\lambda : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}^m$ e $\Psi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Pic}(C)$ por $\lambda(1) = l$ e $\Psi(1) = \mathcal{N}$, respectivamente. Para cada $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, se $i, j \in I$ para um certo $I \in \mathcal{P}$ temos que $H_I = H_{\{i,j\}} = \mathbb{Z}$; caso contrário, $H_{\{i,j\}} = 0$. Portanto a Condição 1 do enunciado da Proposição 2.4 é satisfeita. A Condição 2 também é satisfeita pois cada $h \in \Lambda$ está contido em um único $I \in \mathcal{P}$. Além disso, como $H_I = \mathbb{Z}$ para cada $I \in \mathcal{P}$, a Condição (2.13) é equivalente a (2.12). Então o resultado segue da Proposição 2.4.□

Neste capítulo será apresentada uma resposta parcial para a Pergunta 2.3. Ela será útil para encontrar estruturas enriquecidas em curvas com três componentes irredutíveis, nas quais cada componente intersecta todas as outras.

2.3 Propriedades dos grupos H_I

Dados dois vetores $l_1 = (l_{1,1}, \ldots, l_{1,m})$ e $l_2 = (l_{2,1}, \ldots, l_{2,m})$ em $\mathbb{Z}^m$, defina o produto interno

$$\langle l_1, l_2 \rangle := \sum_{i=1}^{m} l_{1,i} l_{2,i}.$$

Seja M um subgrupo de $\mathbb{Z}^m$. Defina

$$\overline{M} := \{l \in \mathbb{Z}^m | nl \in M \text{ para algum } n \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}\}$$

e

$$M^{\perp} := \{l \in \mathbb{Z}^m | \langle l, v \rangle = 0 \text{ para todo } v \in M\}.$$

Proposição 2.6. *Seja M um subgrupo de $\mathbb{Z}^m$. Então* posto$(M^{\perp})$ =posto$(\mathbb{Z}^m/\overline{M})$.

Demonstração: Considere a sequência exata

$$0 \longrightarrow \overline{M} \longrightarrow \mathbb{Z}^m \longrightarrow \frac{\mathbb{Z}^m}{\overline{M}} \longrightarrow 0. \tag{2.14}$$

O grupo $\mathbb{Z}^m/\overline{M}$ é livre de torção. Então a sequência (2.14) cinde e temos que $\mathbb{Z}^m$ é isomorfo a $\overline{M} \oplus (\mathbb{Z}^m/\overline{M})$. Além disso, existe um isomorfismo $(\mathbb{Z}^m/\overline{M}) \cong \mathbb{Z}^k$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Este isomorfismo induz um produto interno em $\mathbb{Z}^m/\overline{M}$. Dados os elementos $(u_1, \overline{v}_1)$ e $(u_2, \overline{v}_2)$ em $\overline{M} \oplus (\mathbb{Z}^m/\overline{M})$, defina o seguinte produto interno:

$$\langle (u_1, \overline{v}_1), (u_2, \overline{v}_2) \rangle := \langle u_1, u_2 \rangle + \langle \overline{v}_1, \overline{v}_2 \rangle.$$

Podemos considerar M como um subgrupo de $\overline{M} \oplus (\mathbb{Z}^m/\overline{M})$. Observe que $M^\perp = \overline{M}^\perp$. Então basta mostrar que $\overline{M}^\perp = \mathbb{Z}^m/\overline{M}$. Considere $\overline{M}^\perp \subset \overline{M} \oplus (\mathbb{Z}^m/\overline{M})$ via o isomorfismo $\mathbb{Z}^m \cong \overline{M} \oplus (\mathbb{Z}^m/\overline{M})$. Se $(u, \overline{v}) \in \overline{M}^\perp$, então $\langle u, u\rangle = \langle (u, \overline{v}), (u, \overline{0})\rangle = 0$ e concluímos que $u = 0$. Por outro lado, se $(0, \overline{v}) \in \mathbb{Z}^m/\overline{M}$ e $(u, \overline{0}) \in \overline{M}$, então $\langle (0, \overline{v}), (u, \overline{0})\rangle = 0$ e concluímos que $(0, \overline{v}) \in \overline{M}^\perp$.$\square$

Fixe um homomorfismo de grupos $\lambda : \mathbb{Z}^m \longrightarrow \mathbb{Z}^m$. Para cada subconjunto $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$, defina o subgrupo

$$H_I := \{l \in \mathbb{Z}^m | \lambda(l)_i = \lambda(l)_j, \text{ para todo } i, j \in I\}.$$

O homomorfismo λ pode ser representado por uma matriz $m \times m$ com entradas inteiras. Seja L_i a i-ésima linha desta matriz. Para cada subconjunto $I := \{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, m\}$, defina por $\lambda_I : \mathbb{Z}^m \longrightarrow \mathbb{Z}^k$ o homomorfismo de grupos determinado pela matriz

$$\begin{pmatrix} L_{i_1} \\ \vdots \\ L_{i_k} \end{pmatrix}.$$

Proposição 2.7. *Seja $\lambda : \mathbb{Z}^m \longrightarrow \mathbb{Z}^m$ um homomorfismo de grupos e I um subconjunto não vazio de $\{1, \ldots, m\}$. Se* posto$(\lambda_I) = \#I$, então posto$(H_I) = \#I^c + 1$.

Demonstração: Sejam A e B automorfismos de $\mathbb{Z}^m$ tais que $\lambda = ADB$, onde $D : \mathbb{Z}^m \longrightarrow \mathbb{Z}^m$ é um homomorfismo de grupos representado por uma matriz diagonal

$$\begin{pmatrix} n_1 & & \\ & \ddots & \\ & & n_m \end{pmatrix},$$

onde $n_1, \ldots, n_m$ são inteiros ([8], página 281). Seja (a_{ij}) a matriz que representa A. Então a matriz que representa o homomorfismo AD é $(n_j a_{ij})$. Desta forma teremos que $\lambda(l)_i = \lambda(l)_j$ se, e somente se,

$$\langle((a_{i1} - a_{j1})n_1, \ldots, (a_{im} - a_{jm})n_m), B(l)\rangle = 0.$$

Fixe um subconjunto não vazio I de $\{1, \ldots, m\}$. Então

$$H_I = \{l \in \mathbb{Z}^m | \langle((a_{i1} - a_{j1})n_1, \ldots, (a_{im} - a_{jm})n_m), B(l)\rangle = 0 \text{ para todo } i, j \in I\}$$

e

$$B(H_I) = \{l \in \mathbb{Z}^m | \langle((a_{i1} - a_{j1})n_1, \ldots, (a_{im} - a_{jm})n_m), l\rangle = 0 \text{ para todo } i, j \in I\}.$$

Como B é um automorfismo de $\mathbb{Z}^m$, posto(H_I) =posto$(B(H_I))$. Fixe $i_0 \in I$. Suponha que posto$(\lambda_I) = \#I$. O conjunto

$$\{((a_{i_01} - a_{j1})n_1, \ldots, (a_{i_0m} - a_{jm})n_m) | j \in I - \{i_0\}\}$$

é linearmente independente. Logo

$$B(H_I) = \left(\bigoplus_{j \in I - \{i_0\}} \mathbb{Z}((a_{i_01} - a_{j1})n_1, \ldots, (a_{i_0m} - a_{jm})n_m) \right)^{\perp}.$$

Pela Proposição 2.6 concluímos que posto$(B(H_I)) = \#I^c + 1$.$\square$

Dado um subconjunto I de $\{1, \ldots, m\}$, seja $D_I := \{l \in \mathbb{Z}^m | l_i = l_j \text{ para todo } i, j \in I\}$ o I-ésimo subgrupo diagonal de $\mathbb{Z}^m$. Observe que $H_I = \lambda^{-1}(D_I)$.

Proposição 2.8. *Sejam I e J subconjuntos não vazios de $\{1, \ldots, m\}$. Se $I \subseteq J$ então:*

1. *$H_J \subseteq H_I$ e H_I/H_J é livre de torção;*

2. Posto$(H_I)-$posto$(H_J) \leq \#J - \#I$.

Demonstração:

1. Se $I \subseteq J$, então $H_J \subset H_I$. Defina o homomorfismo

$$\overline{\lambda} : \frac{H_I}{H_J} \longrightarrow \frac{D_I}{D_J}$$

por $\overline{\lambda}(\overline{a}) := \overline{\lambda(a)}$. Observe que este homomorfismo é injetivo. Além disso, D_I/D_J é livre de torção. Logo, H_I/H_J também é livre de torção.

2. Considere o homomorfismo do Item (1). Como ele é injetivo temos que

$$\text{posto}(H_I/H_J) \leq \text{posto}(D_I/D_J).$$

Sabemos que

$$\text{posto}(H_I/H_J) = \text{posto}(H_I) - \text{posto}(H_J)$$

e

$$\text{posto}(D_I/D_J) = \text{posto}(D_I) - \text{posto}(D_J) = \#J - \#I.$$

Portanto, $\text{posto}(H_I) - \text{posto}(H_J) \leq \#J - \#I.\square$

2.4 Suavizações regulares de curvas com três componentes

Denote por Λ o conjunto $\{1, 2, 3\}$.

Proposição 2.9. *Seja $\lambda : \mathbb{Z}^3 \longrightarrow \mathbb{Z}^3$ um homomorfismo de grupos de posto máximo. Existem vetores w_0, w_1, w_2 e w_3 em $\mathbb{Z}^3$ tais que*

$$H_\Lambda = \mathbb{Z}w_0 \quad e \quad H_{\{i\}^c} = \mathbb{Z}w_0 \oplus \mathbb{Z}w_i$$

para todo $i \in \{1,2,3\}$*. Além disso, para quaisquer* $i, j \in \Lambda$ *distintos, o conjunto* $\{w_0, w_i, w_j\}$ *é linearmente independente.*

Demonstração: Como $\lambda : \mathbb{Z}^3 \longrightarrow \mathbb{Z}^3$ tem posto máximo, segue da Proposição 2.7 que posto$(H_\Lambda) = 1$ e posto$(H_{\{i\}^c}) = 2$, para $i = 1,2,3$. Além disso, pela Proposição 2.8, o grupo $H_{\{i\}^c}/H_\Lambda$ é livre de torção e posto$(H_{\{i\}^c})-$posto$(H_\Lambda) = 1$. Então existem vetores w_0 e w_i em $\mathbb{Z}^3$ tais que $H_\Lambda = \mathbb{Z}w_0$ e $H_{\{i\}^c} = \mathbb{Z}w_0 \oplus \mathbb{Z}w_i$, para $i \in \Lambda$.

Fixe i e j distintos em $\{1,2,3\}$. Vamos verificar que $\{w_0, w_i, w_j\}$ é linearmente independente. Suponha que $nw_j \in H_{\{i\}^c}$ para algum $n \in \mathbb{Z}$. Então

$$nw_j \in H_{\{j\}^c} \cap H_{\{i\}^c} = H_\Lambda = \mathbb{Z}w_0.$$

Como $\{w_0, w_j\}$ é linearmente independente, concluímos que $n = 0$.$\square$

Recorde a notação da Seção 2.2. A seguinte proposição é uma resposta parcial para a Pergunta 2.3. Nela, de acordo com a Seção Terminologia, $|\Delta|$ é o conjunto de nós redutíveis de uma curva nodal C. Denotamos por $p_{i,j} \in |\Delta|$, com $i < j$, um ponto que está em $C_i \cap C_j$.

Proposição 2.10. *Seja* C *uma curva nodal com três componentes irredutíveis. Sejam* $\lambda : \mathbb{Z}^3 \longrightarrow \mathbb{Z}^3$ *um homomorfismo de grupos de posto máximo e* $\phi : \mathbb{Z}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^*_\Delta$ *um homomorfismo de grupos. Suponha que, para todo* $I \subset \Lambda$ *não vazio exista um homomorfismo de grupos* $c_I : H_I \longrightarrow \mathbb{K}^*_I$ *tal que* $\dfrac{c_I(l)_i}{c_I(l)_j}\phi(l)_{p_{i,j}} = 1$ *para todo* $p_{i,j} \in |\Delta_I|$ *e* $l \in H_I$*. Então existe um homomorfismo de grupos* $c : \mathbb{Z}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^*_\Lambda$ *tal que, para todo* $i, j \in \Lambda$ *distintos, temos* $\dfrac{c(l)_i}{c(l)_j}\phi(l)_{p_{i,j}} = 1$*, para todo* $p_{i,j} \in |\Delta_{\{i,j\}}|$ *e* $l \in H_{\{i,j\}}$*.*

Demonstração: Afirmamos que, para cada par $i, j \in \Lambda$ de elementos distintos, basta considerar um único p em $|\Delta_{i,j}|$. De fato, se $p, q \in |\Delta_{i,j}|$, com $i < j$, então

$$\phi(l)_p = c_{\{i,j\}}(l)_j c_{\{i,j\}}(l)_i^{-1} = \phi(l)_q$$

para $l \in H_{\{i,j\}}$. Assim, se existe $c : \mathbb{Z}^3 \longrightarrow \mathbb{K}_\Lambda^*$ tal que $c(l)_j c(l)_i^{-1} = \phi(l)_p$ para $l \in H_{\{i,j\}}$, então $c(l)_j c(l)_i^{-1} = \phi(l)_q$.

Denote por $\{e_1, e_2, e_3\}$ a base canônica de $\mathbb{Z}^3$ e $c_{i,j}$ as incógnitas $c(e_i)_j$. Para qualquer $l = (l_1, l_2, l_3) \in \mathbb{Z}^3$, observe que $c(l)_j = \prod_{i=1}^3 c_{ij}^{l_i}$. Pela Proposição 2.9, existem $w_k \in \mathbb{Z}^3$, para $k = 0, 1, 2, 3$, tais que $H_\Lambda = \mathbb{Z}w_0$ e $H_{\{k\}^c} = \mathbb{Z}w_0 \oplus \mathbb{Z}w_k$.

Devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} c(w_0)_2 c(w_0)_1^{-1} & = & \phi(w_0)_{p_{1,2}} \\ c(w_0)_3 c(w_0)_1^{-1} & = & \phi(w_0)_{p_{1,3}} \\ c(w_0)_3 c(w_0)_2^{-1} & = & \phi(w_0)_{p_{2,3}} \\ c(w_1)_3 c(w_1)_2^{-1} & = & \phi(w_1)_{p_{2,3}} \\ c(w_2)_3 c(w_2)_1^{-1} & = & \phi(w_2)_{p_{1,3}} \\ c(w_3)_2 c(w_3)_1^{-1} & = & \phi(w_3)_{p_{1,2}}. \end{cases} \tag{2.15}$$

Por hipótese

$$\phi(w_0)_{p_{1,2}} \phi(w_0)_{p_{2,3}} = \frac{c_\Lambda(w_0)_2}{c_\Lambda(w_0)_1} \cdot \frac{c_\Lambda(w_0)_3}{c_\Lambda(w_0)_2} = \frac{c_\Lambda(w_0)_3}{c_\Lambda(w_0)_1} = \phi(w_0)_{p_{1,3}}.$$

Portanto, se existe $c : \mathbb{Z}^3 \longrightarrow \mathbb{K}_\Lambda^*$ tal que $c(w_0)_2 c(w_0)_1^{-1} = \phi(w_0)_{p_{1,2}}$ e $c(w_0)_3 c(w_0)_1^{-1} = \phi(w_0)_{p_{1,3}}$, então

$$\frac{c(w_0)_3}{c(w_0)_1} = \frac{c(w_0)_2}{c(w_0)_1} \cdot \frac{c(w_0)_3}{c(w_0)_2} = \phi(w_0)_{p_{1,2}} \phi(w_0)_{p_{2,3}} = \phi(w_0)_{p_{1,3}}.$$

Concluímos que a equação $c(w_0)_3 c(w_0)_1^{-1} = \phi(w_0)_{p_{1,3}}$ no Sistema (2.15) é redundante. Reordenando as equações no sistema (2.15) e excluindo uma equação redundante, chegamos ao sistema equivalente

$$\left\{\begin{array}{rcl} c(w_0)_2 c(w_0)_1^{-1} & = & \phi(w_0)_{p_{1,2}} \\ c(w_3)_2 c(w_3)_1^{-1} & = & \phi(w_3)_{p_{1,2}} \\ c(w_0)_3 c(w_0)_2^{-1} & = & \phi(w_0)_{p_{2,3}} \\ c(w_1)_3 c(w_1)_2^{-1} & = & \phi(w_1)_{p_{2,3}} \\ c(w_2)_3 c(w_2)_1^{-1} & = & \phi(w_2)_{p_{1,3}}. \end{array}\right. \quad (2.16)$$

Cada uma das equações $c(w_k)_j c(w_k)_i^{-1} = \phi(w_k)_{p_{i,j}}$, com $i < j$, torna-se

$$\prod_{m=1}^{3} c_{mj}^{w_{k,m}} \prod_{m=1}^{3} c_{mi}^{-w_{k,m}} = \phi(w_k)_{p_{i,j}},$$

para $k = 0, 1, 2, 3$. Após tomar o logaritmo, a matriz do sistema (2.15) nas incógnitas c_{ij} é

$$(2.17) \qquad \begin{pmatrix} -w_{0,1} & -w_{0,2} & -w_{0,3} & w_{0,1} & w_{0,2} & w_{0,3} & 0 & 0 & 0 \\ -w_{3,1} & -w_{3,2} & -w_{3,3} & w_{3,1} & w_{3,2} & w_{3,3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -w_{0,1} & -w_{0,2} & -w_{0,3} & w_{0,1} & w_{0,2} & w_{0,3} \\ 0 & 0 & 0 & -w_{1,1} & -w_{1,2} & -w_{1,3} & w_{1,1} & w_{1,2} & w_{1,3} \\ -w_{2,1} & -w_{2,2} & -w_{2,3} & 0 & 0 & 0 & w_{2,1} & w_{2,2} & w_{2,3} \end{pmatrix}.$$

Pela Proposição 2.9, o conjunto $\{w_0, w_1, w_2\}$ é linearmente independente. Logo, o determinante do menor 3×3 formado pelas linhas 3, 4 e 5 e colunas 7, 8 e 9 é não nulo. Além disso, como $\{w_0, w_3\}$ é linearmente independente, a menos de uma permutação, podemos considerar não nulo o determinante do menor 2×2 formado pelas linhas 1 e 2 e colunas 5 e 6 da matriz (2.17). Concluímos que a matriz (2.17) possui posto máximo e portanto o Sistema (2.16) possui solução.

Se $l \in H_{\{k\}^c}$, onde $\{k\}^c = \{i, j\}$ com $i < j$, então existem $n_0, n_k \in \mathbb{Z}$ tais que

$l = n_0w_0 + n_kw_k$. Por (2.15):

$$\frac{c(l)_j}{c(l)_i} = \frac{c(n_0w_0 + n_kw_k)_j}{c(n_0w_0 + n_kw_k)_i} = \frac{c(w_0)_j^{n_0}}{c(w_0)_i^{n_0}} \cdot \frac{c(w_k)_j^{n_k}}{c(w_k)_i^{n_k}} = \phi(w_0)_{p_{i,j}}^{n_0} \cdot \phi(w_k)_{p_{i,j}}^{n_k} = \phi(l)_{p_{i,j}}. \square$$

Teorema 2.11. *Seja C uma curva nodal com três componentes irredutíveis. Seja $\lambda : \mathbb{Z}^3 \longrightarrow \mathbb{Z}^3$ um homomorfismo de grupos de posto máximo. Então um homomorfismo de grupos $\Psi : \mathbb{Z}^3 \longrightarrow \mathrm{Pic(C)}$ satisfaz*

$$\Psi(l)|_{C_I} \cong \mathcal{O}_{C_I}(\sum_{i\in I}\sum_{j\notin I}(\lambda(l)_j - \lambda(l)_i)\Delta_{i,j}) \tag{2.18}$$

para cada $I \subset \Lambda$ e $l \in H_I$ se, e somente se, existe uma suavização regular $\pi : S \longrightarrow B$ de C ao longo de uma direção geral tal que

$$\Psi(l) \cong \mathcal{O}_S(\lambda(l)_1C_1 + \lambda(l)_2C_2 + \lambda(l)_3C_3)|_C \tag{2.19}$$

para cada $l \in \mathbb{Z}^3$.

Demonstração: Suponha que exista uma suavização $\pi : S \longrightarrow B$ de C tal que (2.19) seja verdadeira. Pelo Teorema 1.12, existe uma estrutura enriquecida $L : \mathbb{Z}^3 \longrightarrow \mathrm{Pic}(C)$ de C tal que $\Psi = L\lambda$. De acordo com a Observação 2.1, para cada $I \subseteq \Lambda$, a condição (2.18) é satisfeita.

Agora mostraremos a outra direção. Como a condição (2.18) é válida, podemos usar os objetos definidos na Seção 2.2. Portanto, existe um homomorfismo $\phi : \mathbb{Z}^d \longrightarrow \mathbb{K}_\Delta^*$ representando Ψ. Além disso, como (2.18) é satisfeita, para cada $I \subseteq \Lambda$ não vazio existe um homomorfismo de grupos $c_I : H_I \longrightarrow \mathbb{K}_I^*$ tal que

$$\frac{c_I(l)_i}{c_I(l)_j}\phi(l)_{p_{i,j}} = 1 \text{ para todo } p_{i,j} \in |\Delta_I| \text{ e } l \in H_I.$$

Como o posto de λ é máximo, segue da Proposição 2.10 que existe um homomorfismo de grupos $c : \mathbb{Z}^3 \longrightarrow \mathbb{K}_\Lambda^*$ tal que

$$\frac{c(l)_i}{c(l)_j}\phi(l)_{p_{i,j}} = 1 \text{ para todo } p \in |\Delta_{\{i,j\}}| \text{ e } l \in H_{\{i,j\}}.$$

De acordo com a discussão na Seção 2.2, existe uma estrutura enriquecida $L : \mathbb{Z}^3 \longrightarrow \operatorname{Pic}(C)$ tal que $\Psi = L\lambda$. Aplicando o Teorema 1.12, encontramos uma suavização regular $\pi : S \longrightarrow B$ com a propriedade (2.19).$\square$

Capítulo 3

Espaços de seções de feixes canônicos

Recorde a notação fixada na Seção Terminologia e na Subseção 1.5.2. Seja C uma curva nodal com m componentes irredutíveis. Para cada $l \in \{1, \ldots, m\}$, seja $\underline{e}^{(l)} = (e_1^{(l)}, \ldots, e_m^{(l)})$ a m-upla de inteiros definida por

$$e_j^{(l)} := \begin{cases} g_j - 1 + \delta_j & \text{se } j \neq l, \\ g_l - g + \delta_l & \text{se } j = l. \end{cases} \tag{3.1}$$

Observe que, para cada $l \in \{1, \ldots, m\}$, a m-upla $\underline{e}^{(l)}$ definida acima coincide com aquela definida na página 30. Como C é conexa, temos que $\sum_{i=1}^{m} e_i^{(l)} = \delta$ para todo $l = 1, \ldots, m$. Seja $\underline{n}^{(l)} = (n_1^{(l)}, \ldots, n_m^{(l)})$ a única m-upla de inteiros estabelecida pelo Lema 1.16.

Definição 3.1. Diremos que $\underline{n}^{(l)}$ é a m-upla de inteiros associada a $\underline{e}^{(l)}$.

Fixe uma suavização $\pi : S \longrightarrow B$ de C. Defina

$$\mathcal{L}_{\pi}^{\underline{n}^{(l)}} := \omega_\pi(n_1^{(l)} C_1 + \cdots + n_m^{(l)} C_m).$$

Denote por $L_{\pi}^{\underline{n}^{(l)}}$ e $L_{\pi,I}^{\underline{n}^{(l)}}$ as restrições $\mathcal{L}_{\pi}^{\underline{n}^{(l)}}|_C$ e $\mathcal{L}_{\pi}^{\underline{n}^{(l)}}|_{C_I}$, respectivamente, onde $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ é um subconjunto próprio. Recorde a Seção 1.3. Se I é $\underline{n}^{(l)}$-balanceado, segue de (1) e (1.1) que

$$L^{\underline{n}^{(l)}}_{\pi,I} \cong \omega_I(\sum_{i\in I}\sum_{j\notin I}(1+n_j^{(l)}-n_i^{(l)})\Delta_{i,j}). \tag{3.2}$$

Fixe $l \in \{1,\ldots,m\}$. De agora em diante, assuma que as componentes de C se intersectem em pontos em $\underline{n}^{(l)}$-posição geral, de acordo com a Seção 1.3. Assuma ainda que $\delta_{i,j} \neq 0$ para todos i e j distintos em $\{1,\ldots,m\}$. Se a suavização $\pi : S \longrightarrow B$ de C é tomada ao longo de uma direção geral, a Proposição 1.17 afirma que

1. $h^0(C_{\{l\}^c}, L^{\underline{n}^{(l)}}_{\pi,\{l\}^c}(-\Delta_l)) = 0$;
2. $h^0(C_{\{i\}^c}, L^{\underline{n}^{(l)}}_{\pi,\{i\}^c}(-\Delta_i)) < g$ para cada $i \in \{l\}^c$;
3. $h^0(C, L^{\underline{n}^{(l)}}_{\pi}) = g$.

Para cada $i = 1,\ldots,m$, defina o mapa de restrição

$$\rho_{\pi,l,i} : H^0(C, L^{\underline{n}^{(l)}}_{\pi}) \longrightarrow H^0(C_i, L^{\underline{n}^{(l)}}_{\pi,i}).$$

Denote por $V_{\pi,l}$ a imagem de $\rho_{\pi,l,l}$. Considere a sequência exata

$$0 \longrightarrow L^{\underline{n}^{(l)}}_{\pi,\{i\}^c}(-\Delta_i) \longrightarrow L^{\underline{n}^{(l)}}_{\pi} \longrightarrow L^{\underline{n}^{(l)}}_{\pi,i} \longrightarrow 0. \tag{3.3}$$

Segue da Proposição 1.17, item (1), que o mapa $\rho_{\pi,l,l}$ é injetivo. Se $i \neq l$, segue da mesma Proposição, itens (2) e (3), que o mapa $\rho_{\pi,l,i}$ é não nulo. De acordo com a Definição 1.8, o feixe $\mathcal{L}^{\underline{n}^{(l)}}_{\pi}$ é o feixe canônico de π com foco em C_l e $(H^0(C, L^{\underline{n}^{(l)}}_{\pi}), L^{\underline{n}^{(l)}}_{\pi})$ é o sistema canônico limite de π com foco em C_l.

3.1 Positividade

Lema 3.2. *Seja C uma curva nodal com componentes irredutíveis $C_1, \ldots, C_m$. Suponha que o gênero de cada componente de C seja positivo. Assuma que $\delta_{i,j} \neq 0$ para todos i e j distintos em $\{1, \ldots, m\}$. Seja $\pi : S \longrightarrow B$ uma suavização regular de C. Então, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$:*

1. *O mapa natural $H^0(S, \omega_\pi(-C_i)) \longrightarrow H^0(C, \omega_\pi(-C_i)|_C)$ é sobrejetivo;*

2. *Para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, o mapa natural $H^0(C, \omega_\pi(-C_i)|_C) \longrightarrow H^0(C_j, \omega_\pi(-C_i)|_{C_j})$ é não nulo.*

Demonstração: Sem perda de generalidade, podemos supor $i = 1$.

1. Considere a sequência exata

$$0 \longrightarrow \omega_1(\Delta_1) \longrightarrow \omega_\pi(-C_1)|_C \longrightarrow \omega_{\{1\}^c} \longrightarrow 0.$$

Usando Dualidade de Serre temos que

$$H^1(\omega_1(\Delta_1))^* \cong \mathrm{Hom}(\omega_1(\Delta_1), \omega_1) \cong H^0(\mathcal{O}_{C_1}(-\Delta_1)) = 0.$$

Então a sequência

$$0 \longrightarrow H^0(\omega_1(\Delta_1)) \longrightarrow H^0(\omega_\pi(-C_1)|_C) \longrightarrow H^0(\omega_{\{1\}^c}) \longrightarrow 0 \tag{3.4}$$

é exata. Por hipótese, temos que $\delta_{i,j} \geq 1$ para todos i e j em $\{1, \ldots, m\}$. Isto significa que cada componente irredutível de C intersecta todas as outras componentes. Portanto a curva $C_{\{1\}^c}$ é conexa e temos que

$$h^0(\omega_\pi(-C_1)|_C) = h^0(\omega_1(\Delta_1)) + h^0(\omega_{\{1\}^c}) = g. \tag{3.5}$$

Observe que $h^0(S(\xi), \omega_\pi(-C_1)|_{S(\xi)}) = h^0(S(\xi), \omega_{S(\xi)}) = g$ e B é um esquema integral. Usando o Teorema de Grauert ([15], página 288, Corolário 12.9), obtemos que o mapa

$$H^0(S, \omega_\pi(-C_1)) \otimes k(s) \longrightarrow H^0(C, \omega_\pi(-C_1)|_C)$$

é sobrejetivo. Concluímos que $H^0(S, \omega_\pi(-C_1)) \longrightarrow H^0(C, \omega_\pi(-C_1)|_C)$ é sobrejetivo.

2. (a) *Caso* $j = 1$. Considere a sequência exata

$$0 \longrightarrow \omega_\pi(-C_1)|_{C_{\{1\}^c}}(-\Delta_1) \longrightarrow \omega_\pi(-C_1)|_C \longrightarrow \omega_\pi(-C_1)|_{C_1} \longrightarrow 0.$$

A sequência longa em cohomologia associada é

$$(3.6) \quad 0 \to H^0(\omega_\pi(-C_1)|_{C_{\{1\}^c}}(-\Delta_1)) \to H^0(\omega_\pi(-C_1)|_C) \xrightarrow{\phi} H^0(\omega_\pi(-C_1)|_{C_1}) \to \cdots .$$

Considere o isomorfismo $\omega_\pi(-C_1)|_{C_{\{1\}^c}}(-\Delta_1) \cong \omega_{\{1\}^c}(-\Delta_1)$. Do fato de $\delta_{i,k} \geq 1$ para todos i e k em $\{1, \dots, m\}$, segue que a curva C é conexa. Portanto $g = g_{\{1\}^c} + g_1 + \delta_1 - 1$ e podemos observar que $g_{\{1\}^c} < g$. Chegamos à desigualdade

$$h^0(\omega_{\{1\}^c}(-\Delta_1)) \leq h^0(\omega_{\{1\}^c}) = g_{\{1\}^c} < g.$$

Da Equação (3.5) temos que $h^0(\omega_\pi(-C_1)|_C) = g$. Logo o mapa ϕ na sequência (3.6) é não nulo.

(b) *Caso* $j \neq 1$. O mapa $\omega_\pi(-C_1)|_C \longrightarrow \omega_\pi|_C$ induz o mapa h no seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} H^0(\omega_\pi(-C_1)|_C) & \xrightarrow{\phi} & H^0(\omega_\pi(-C_1)|_{C_j}) \\ h \downarrow & & \downarrow \\ H^0(\omega_\pi|_C) & \xrightarrow{g} & H^0(\omega_\pi|_{C_j}). \end{array}$$

Considere os isomorfismos $\omega_\pi(-C_1)|_{C_j} \cong \omega_j(\Delta_j - \Delta_{1,j})$ e $\omega_\pi|_{C_j} \cong \omega_j(\Delta_j)$. O mapa vertical à direita é equivalente ao mapa injetivo

$$H^0(\omega_j(\Delta_j - \Delta_{1,j})) \longrightarrow H^0(\omega_j(\Delta_j)).$$

A fim de mostrar que ϕ é não nulo, basta mostrar que a função composta $g \circ h$ é não nula. De acordo com o diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^0(\omega_\pi(-C_1)|_C) & \xrightarrow{\overline{h}} & H^0(\omega_{\{1\}^c}) \\ h\downarrow & \swarrow f & \\ H^0(\omega_\pi|_C) & \xrightarrow{g} & H^0(\omega_\pi|_{C_j}), \end{array}$$

o mapa h se fatora pelo mapa $\overline{h}$. Temos que f é injetiva e, por (3.4), o mapa $\overline{h}$ é sobrejetivo. A fim de mostrar que $g \circ h$ é não nula, basta mostrar que $f \circ g$ é não nula. Considere a sequência exata

$$0 \longrightarrow \omega_{\{1,j\}^c} \longrightarrow \omega_{\{1\}^c} \longrightarrow \omega_j(\Delta_j - \Delta_{1,j}) \longrightarrow 0$$

e a sequência exata longa de cohomologia

$$(3.7) \qquad 0 \longrightarrow H^0(\omega_{\{1,j\}^c}) \longrightarrow H^0(\omega_{\{1\}^c}) \xrightarrow{e} H^0(\omega_j(\Delta_j - \Delta_{1,j})) \longrightarrow \cdots .$$

Temos que $\omega_\pi|_{C_j} \cong \omega_j(\Delta_j)$. Usando o mapa e e a função injetiva

$$H^0(\omega_j(\Delta_j - \Delta_{1,j})) \longrightarrow H^0(\omega_j(\Delta_j)),$$

podemos fatorar $f \circ g$:

$$\begin{array}{ccc} H^0(\omega_{\{1\}^c}) & \xrightarrow{f\circ g} & H^0(\omega_j(\Delta_j)) \\ e\downarrow & \nearrow & \\ H^0(\omega_j(\Delta_j - \Delta_{1,j})) & & \end{array} .$$

Basta mostrar que e é não nulo. Como $\delta_{i,k} \geq 1$ para todo i e k em $\{2, \ldots, m\}$, temos que $C_{\{1,j\}^c}$ é conexa e $g_{\{1\}^c} = g_{\{1,j\}^c} + g_j + \delta_j - \delta_{1,j} - 1$. Portanto $g_{\{1,j\}} < g_{\{1\}^c}$ e segue que $h^0(\omega_{\{1,j\}^c}) < h^0(\omega_{\{1\}^c})$. Da sequência (3.7), concluímos que o mapa e é não nulo.$\square$

Proposição 3.3. *Seja C uma curva nodal com m componentes irredutíveis. Assuma que as componentes de C se intersectem em pontos em $\underline{n}^{(l)}$-posição geral. Suponha que o gênero de cada componente de C seja positivo. Assuma que $\delta_{i,j} \neq 0$ para todos i e j distintos. Então $n_i^{(l)} > 0$ para cada $1 \leq i, l \leq m$, com $l \neq i$.*

Demonstração: Considere $\pi : S \longrightarrow B$ uma suavização regular de C ao longo de uma direção geral. Para cada $l \in \{1, \ldots, m\}$, seja $\underline{e}^{(l)}$ a m-upla de inteiros definida em (3.1) e $\underline{n}^{(l)}$ a m-upla de inteiros associada a $\underline{e}^{(l)}$. Fixe $l \in \{1, \ldots, m\}$. A discussão no início deste capítulo mostra que $\mathcal{L}_{\pi}^{\underline{n}^{(l)}} = \omega_\pi(n_1^{(l)} C_1 + \cdots + n_m^{(l)} C_m)$ é o feixe canônico de π com foco em C_l. Pelo Lema 3.2, itens (1) e (2), o mapa $H^0(S, \omega_\pi(-C_l)) \longrightarrow H^0(C_i, \omega_\pi(-C_l)|_{C_i})$ é não nulo para todo $l, i \in \{1, \ldots, m\}$. Pela Proposição 1.9, existem inteiros não negativos $t_1^{(l)}, \ldots, t_m^{(l)}$, com $t_l^{(l)} = 0$, tais que

$$\mathcal{L}_{\pi}^{\underline{n}^{(l)}} = \omega_\pi(-C_l)\left(\sum_{i \neq l} t_i^{(l)} C_i + \sum_{i=1}^{m} C_i\right) = \omega_\pi\left(\sum_{i \neq l} (t_i^{(l)} + 1) C_i\right).$$

Segue da unicidade da m-upla $\underline{n}^{(l)}$ que $n_i^{(l)} > 0$ para cada $i = 1, \ldots, m$, com $i \neq l$.$\square$

Seja C uma curva nodal com componentes $C_1, \ldots, C_m$. Para cada $l \in \{1, \ldots, m\}$, seja $\underline{e}^{(l)}$ a m-upla definida por (3.1) e $\underline{n}^{(l)}$ a m-upla associada a $\underline{e}^{(l)}$. Seja M_C a matriz $m \times m$

cuja l-ésima coluna é a m-upla $\underline{n}^{(l)}$

$$M_C := \begin{pmatrix} 0 & n_1^{(2)} & \cdots & n_1^{(m)} \\ n_2^{(1)} & 0 & \cdots & n_2^{(m)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_m^{(1)} & n_m^{(2)} & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Definição 3.4. Diremos que M_C é a matriz associada à curva C.

Corolário 3.5. *Seja C uma curva nodal com três componentes irredutíveis. Assuma que as componentes de C se intersectem em pontos em $\underline{n}^{(l)}$-posição geral para cada $l \in \{1, 2, 3\}$. Suponha que o gênero de cada componente de C seja positivo. Assuma que $\delta_{i,j} \neq 0$ para todo i e j distintos. Então o determinante da matriz associada à curva C é não nulo.*

Demonstração: Segue trivialmente do cálculo do determinante da matriz associada à curva C.$\square$

Se C é uma curva nodal com três componentes irredutíveis e $\lambda : \mathbb{Z}^3 \longrightarrow \mathbb{Z}^3$ o homomorfismo de grupos induzido por M_C, segue do Corolário 3.5 que λ tem posto máximo. Seja I um subconjunto de $\{1, 2, 3\}$. Definimos na Seção 2.2 o grupo

$$H_I := \{l \in \mathbb{Z}^3 | \lambda(l)_i = \lambda(l)_j \text{ para todo } i, j \in I\}.$$

Como λ tem posto máximo, segue da Proposição 2.7 que posto$(H_I) = \#I^c + 1$.

Lema 3.6. *Seja C uma curva nodal com três componentes irredutíveis. Assuma que as componentes de C se intersectem em pontos em $\underline{n}^{(l)}$-posição geral para cada $l \in \{1, 2, 3\}$. Suponha que o gênero de cada componente de C seja positivo. Assuma que $\delta_{i,j} \neq 0$ para todo i e j distintos. Fixe $I := \{i, j\}$, com $i \neq j$, um subconjunto de $\{1, 2, 3\}$. Denote*

$\{i,j\}^c = \{k\}$. Seja $\lambda : \mathbb{Z}^3 \longrightarrow \mathbb{Z}^3$ o homomorfismo de grupos determinado pela matriz M_C. Tome $\{u,v\} \in H_I$ um subconjunto linearmente independente. Então os determinantes das matrizes 2×2

$$\begin{pmatrix} u_i & u_k \\ v_i & v_k \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} u_j & u_k \\ v_j & v_k \end{pmatrix}$$

são diferentes de zero.

Demonstração: Suponha, por absurdo, que exista $n \in \mathbb{Q}$ tal que $n(u_i, u_k) = (v_i, v_k)$. Então $\lambda(v)_j = n(n_j^{(i)} u_i + n_j^{(k)} u_k)$ e $\lambda(v)_i = n_i^{(j)} v_j + n n_i^{(k)} u_k$. Observe que $\lambda(v)_j = n\lambda(u)_j$. Como $u, v \in H_{\{i,j\}}$, temos que $\lambda(v)_i = \lambda(v)_j$ e $\lambda(u)_i = \lambda(u)_j$. Portanto

$$\lambda(v)_i = \lambda(v)_j = n\lambda(u)_j = n\lambda(u)_i$$

o que produz

$$n_i^{(j)} v_j + n n_i^{(k)} u_k = n(n_j^{(i)} u_i + n_j^{(k)} u_k) = n(n_i^{(j)} u_j + n_i^{(k)} u_k).$$

Pela Proposição 3.3, temos que $n_i^{(j)} > 0$. Então $v_j = nu_j$ e chegamos a $v = nu$, o que é um absurdo pois $\{u,v\}$ é linearmente independente. Por procedimento similar mostra-se que os vetores (u_j, u_k) e (v_j, v_k) são linearmente independentes.$\square$

3.2 Dimensões

Recorde a notação fixada no início deste capítulo. Fixe $l \in \{1, \ldots, m\}$ e isomorfismos $L_{\pi,l}^{n^{(l)}}|_{\Delta_l} \cong \mathcal{O}_{\Delta_l}$ e $L_{\pi,\{l\}^c}^{n^{(l)}}|_{\Delta_l} \cong \mathcal{O}_{\Delta_l}$. A restrição $L_{\pi,l}^{n^{(l)}} \longrightarrow L_{\pi,l}^{n^{(l)}}|_{\Delta_l}$ induz o mapa

$$e_{l,l} : H^0(L_{\pi,l}^{n^{(l)}}) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_{\Delta_l}).$$

A restrição $L^{\underline{n}^{(l)}}_{\pi,\{l\}^c} \longrightarrow L^{\underline{n}^{(l)}}_{\pi,\{l\}^c}|_{\Delta_l}$ induz o mapa

$$e_{l,\{l\}^c} : H^0(L^{\underline{n}^{(l)}}_{\pi,\{l\}^c}) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_{\Delta_l}).$$

Para cada $l \in \{1, \dots, m\}$ defina $m_l := g_{\{l\}^c} + \sum_{j=1}^{m}(1 - n_j^{(l)})\delta_{l,j}$.

Proposição 3.7. *Seja C uma curva nodal com m componentes irredutíveis. Suponha que o gênero de cada componente irredutível de C seja positivo. Fixe $l \in \{1, \dots, m\}$. Assuma que as componentes de C se intersectem em pontos em $\underline{n}^{(l)}$-posição geral. Assuma que $\delta_{i,j} \neq 0$ para todos i e j distintos. Seja $\pi : S \longrightarrow B$ uma suavização regular de C ao longo de uma direção geral. Então:*

1. *A dimensão de $V_{\pi,l}$ é g;*

2. *A codimensão de $V_{\pi,l}$ em $H^0(L^{\underline{n}^{(l)}}_{\pi,l})$ é $\delta_l - m_l$;*

3. *O mapa $e_{l,l}$ é sobrejetivo;*

4. *O mapa $e_{l,\{l\}^c}$ é injetivo;*

5. *$h^0(L^{\underline{n}^{(l)}}_{\pi,\{l\}^c}) = m_l$;*

6. *Para todo $i = 1, \dots, m$ tem-se $n_i^{(l)} \leq g_{\{l\}^c}$.*

Demonstração:

1. Pela Proposição 1.17, afirmação (1), temos que $h^0(L^{\underline{n}^{(l)}}_{\pi,\{l\}^c}(-\Delta_l)) = 0$. Segue da sequência exata (3.3) que $\rho_{\pi,l,l}$ é injetivo. Ainda pela Proposição 1.17, item (3), sabemos que $h^0(L^{\underline{n}^{(l)}}_{\pi}) = g$. Concluímos que a dimensão de $V_{\pi,l}$ é g.

2. Observe que $L_{\pi,l}^{\underline{n}^{(l)}} \cong \omega_l(\sum_{j\neq l}(1+n_j^{(l)})\Delta_{l,j})$. Pelo Teorema de Riemann-Roch

$$h^0(L_{\pi,l}^{\underline{n}^{(l)}}) = g_l + \delta_l + \sum_{j\neq l} n_j^{(l)}\delta_{l,j} - 1. \tag{3.8}$$

Sabemos que $g = g_{\{l\}^c} + g_l + \delta_l - 1$. Então, pelo item anterior, a codimensão de $V_{\pi,l}$ em $H^0(L_{\pi,l}^{\underline{n}^{(l)}})$ é

$$h^0(L_{\pi,l}^{\underline{n}^{(l)}}) - g = \sum_{j\neq l} n_j^{(l)}\delta_{l,j} - g_{\{l\}^c},$$

de onde o resultado segue pela definição de m_l.

3. Pela sequência exata

$$0 \longrightarrow L_{\pi,l}^{\underline{n}^{(l)}}(-\Delta_l) \longrightarrow L_{\pi,l}^{\underline{n}^{(l)}} \longrightarrow L_{\pi,l}^{\underline{n}^{(l)}}|_{\Delta_l} \longrightarrow 0$$

basta mostrar que $H^1(L_{\pi,l}^{\underline{n}^{(l)}}(-\Delta_l)) = 0$. Usando Dualidade de Serre temos

$$H^1(L_{\pi,l}^{\underline{n}^{(l)}}(-\Delta_l))^* \cong \mathrm{Hom}(L_{\pi,l}^{\underline{n}^{(l)}}(-\Delta_l), \omega_l) \cong H^0(\mathcal{O}_{C_l}(-\sum_{j\neq l} n_j^{(l)}\Delta_{l,j})).$$

Pela Proposição 3.3 sabemos que $n_j^{(l)} > 0$ para todo $j \neq l$. Portanto $H^0(\mathcal{O}_l(-\sum_{j\neq l} n_j^{(l)}\Delta_{l,j})) = 0$.

4. Considere a sequência exata

$$0 \longrightarrow L_{\pi,\{l\}^c}^{\underline{n}^{(l)}}(-\Delta_l) \longrightarrow L_{\pi,\{l\}^c}^{\underline{n}^{(l)}} \longrightarrow L_{\pi,\{l\}^c}^{\underline{n}^{(l)}}|_{\Delta_l} \longrightarrow 0.$$

A Proposição 1.17, item (1), afirma que $h^0(L_{\pi,\{l\}^c}^{\underline{n}^{(l)}}(-\Delta_l)) = 0$. Portanto $e_{l,\{l\}^c}$ é injetivo.

5. Considere a sequência exata

$$0 \longrightarrow L_{\pi}^{\underline{n}^{(l)}} \longrightarrow L_{\pi,l}^{\underline{n}^{(l)}} \oplus L_{\pi,\{l\}^c}^{\underline{n}^{(l)}} \longrightarrow L_{\pi}^{\underline{n}^{(l)}}|_{\Delta_l} \longrightarrow 0.$$

Como $e_{l,l}$ é sobrejetivo, a sequência

$$0 \longrightarrow H^0(L_{\pi}^{\underline{n}^{(l)}}) \longrightarrow H^0(L_{\pi,l}^{\underline{n}^{(l)}}) \oplus H^0(L_{\pi,\{l\}^c}^{\underline{n}^{(l)}}) \xrightarrow{e_{l,l}+e_{l,\{l\}^c}} H^0(L_{\pi}^{\underline{n}^{(l)}}|_{\Delta_l}) \longrightarrow 0$$

é exata. Então $h^0(L^{\underline{n}^{(l)}}_{\pi,l}) + h^0(L^{\underline{n}^{(l)}}_{\pi,\{l\}^c}) = g + \delta_l$ e chegamos a

$$h^0(L^{\underline{n}^{(l)}}_{\pi,\{l\}^c}) = \delta_l - (h^0(L^{\underline{n}^{(l)}}_{\pi,l}) - g) = m_l.$$

6. Faça $I := \{l\}^c$, $e_i := e_i^{(l)}$ e $n_i := n_i^{(l)}$ para $i = 1, \ldots, m$. Recorde a notação da Subseção 1.5.1. Temos que

$$\epsilon_i^{\underline{e},\underline{n}} := e_i + \sum_{j \neq i} (n_j - n_i)\delta_{i,j},$$

e

$$\epsilon_I^{\underline{e},\underline{n}} := \sum_{i \in I} \epsilon_i^{\underline{e},\underline{n}} - \sum_{\substack{i,j \in I \\ i<j}} \delta_{i,j}.$$

Então

$$\epsilon_I^{\underline{e},\underline{n}} = \sum_{i \neq l} g_i + \sum_{\substack{i,j \neq l \\ i<j}} \delta_{i,j} - (m-1) - \sum_{i \neq l} n_i \delta_{i,l} + \delta_l.$$

Pelo Lema 1.16 temos a desigualdade $0 \leq \epsilon_I^{\underline{e},\underline{n}}$. Portanto

$$\sum_{i \neq l} n_i \delta_{i,l} + 1 \leq g_{\{l\}^c} + \delta_l.$$

Pela Proposição 3.3, sabemos que $n_i \geq 1$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$. Além disso, $\delta_{i,l} \geq 1$ para todos i e l. Concluímos que

$$n_i \leq \frac{g_{\{l\}^c} + \delta_{i,l} - 1}{\delta_{i,l}} \leq \frac{g_{\{l\}^c} - 1}{\delta_{i,l}} + 1 \leq g_{\{l\}^c}$$

para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$.$\square$

3.3 Ações de toros

Recorde a notação da Seção 3.2. Seja C uma curva nodal com m componentes irredutíveis. Fixe $l \in \{1, \ldots, m\}$. Assuma que as componentes de C se intersectem em pontos em $\underline{n}^{(l)}$-posição geral. Seja $\pi : S \longrightarrow B$ uma suavização de C ao longo de uma direção geral.

Considere o mapa $e_{l,\{l\}^c} : H^0(L^{\underline{n}^{(l)}}_{\pi,\{l\}^c}) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_{\Delta_l})$. A Proposição 3.7, item (4), afirma que ele é um mapa injetivo de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais. Já o item (5) da mesma proposição nos diz que $h^0(L^{\underline{n}^{(l)}}_{\pi,\{l\}^c}) = m_l$. Denote por W_l a imagem do mapa $e_{l,\{l\}^c}$. Seja $G_l := \mathrm{Grass}_{m_l}(H^0(\mathcal{O}_{\Delta_l}))$ a Grassmanniana dos subespaços de dimensão m_l de $H^0(\mathcal{O}_{\Delta_l})$. No que se segue faremos $l := 1$, contudo o caso geral pode ser analisado de forma análoga. Tome $\{s_1, \dots, s_{m_1}\}$ uma base de W_1. Faça $\Delta_{k,1} = p^k_1 + \cdots + p^k_{\delta_{k,1}}$ para $k = 2, \dots, m$. As coordenadas de Plücker de W_1 em G_1 são os determinantes dos menores $m_1 \times m_1$ da matriz

$$\begin{pmatrix} s_1(p^2_1) & \dots & s_1(p^2_{\delta_{1,2}}) & \cdots & s_1(p^m_1) & \dots & s_1(p^m_{\delta_{1,m}}) \\ s_2(p^2_1) & \dots & s_2(p^2_{\delta_{1,2}}) & \cdots & s_2(p^m_1) & \dots & s_2(p^m_{\delta_{1,m}}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{m_1}(p^2_1) & \dots & s_{m_1}(p^2_{\delta_{1,2}}) & \cdots & s_{m_1}(p^m_1) & \dots & s_{m_1}(p^m_{\delta_{1,m}}) \end{pmatrix}.$$

Dado um divisor efetivo $D = \sum_{k=2}^m D_{1,k}$ em $C_{\{1\}^c}$, com $0 \leq D_{1,k} \leq \Delta_{1,k}$ para $k = 2, \dots, m$, onde $D_{1,k} = p^k_{\alpha^k_1} + \cdots + p^k_{\alpha^k_{r_k}}$ e $\sum_{k=2}^m r_k = m_1$, denote por P_D o determinante do menor

$$\begin{pmatrix} s_1(p^2_{\alpha^2_1}) & \dots & s_1(p^2_{\alpha^2_{r_1}}) & \cdots & s_1(p^m_{\alpha^m_1}) & \dots & s_1(p^m_{\alpha^m_{r_m}}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{m_1}(p^2_{\alpha^2_1}) & \dots & s_{m_1}(p^2_{\alpha^2_{r_1}}) & \cdots & s_{m_1}(p^m_{\alpha^m_1}) & \dots & s_{m_1}(p^m_{\alpha^m_{r_m}}) \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Proposição 3.8. *Seja C uma curva nodal com m componentes irredutíveis. Fixe $l \in \{1, \dots, m\}$. Assuma que as componentes de C se intersectem em pontos em $\underline{n}^{(l)}$-posição geral. Seja $\pi : S \longrightarrow B$ uma suavização regular de C ao longo de uma direção geral. Seja $D = \sum_{k\in\{l\}^c} D_{k,l}$ um divisor em $C_{\{l\}^c}$ efetivo tal que $0 \leq D_{k,l} \leq \Delta_{k,l}$ para todo k. Então $P_D = 0$ se, e somente se, $h^0(L^{\underline{n}^{(l)}}_{\pi,\{l\}^c}(-D)) \neq 0$.*

Demonstração: Se P_D é nulo, então as linhas da matriz em (3.9) são linearmente dependentes. Usando operações elementares, podemos encontrar um elemento não nulo em W_l que induz uma seção não nula em $H^0(L^{\underline{n}^{(l)}}_{\pi,\{l\}^c}(-D))$. Reciprocamente, se s é uma seção não nula em $H^0(L^{\underline{n}^{(l)}}_{\pi,\{l\}^c}(-D))$, segue da inclusão

$$L^{\underline{n}^{(l)}}_{\pi,\{l\}^c}(-D) \longrightarrow L^{\underline{n}^{(l)}}_{\pi,\{l\}^c}$$

que $s \in H^0(L^{\underline{n}^{(l)}}_{\pi,\{l\}^c})$. Tome uma base $\{s_1, \ldots, s_{m_l}\}$ de W_l tal que $s_1 = e_{l,\{l\}^c}(s)$. Teremos $P_D = 0$, provando a proposição.$\square$

Fixe $l \in \{1, \ldots, m\}$. Denote por T_l o toro $H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_l})$. Considere a ação de T_l em $H^0(\mathcal{O}_{\Delta_l})$ definida por

$$\begin{array}{ccc} T_l \times H^0(\mathcal{O}_{\Delta_l}) & \longrightarrow & H^0(\mathcal{O}_{\Delta_l}) \\ ((\ldots, c_p, \ldots), (\ldots, d_p, \ldots)) & \longmapsto & (\ldots, c_p d_p, \ldots) \end{array},$$

onde p varia no $|\Delta_l|$. Esta ação induz uma ação $\phi_l : T_l \times G_l \longrightarrow G_l$. Seja $\mathbb{O}_l$ a órbita de W_l em G_l. Existe um mapa sobrejetivo $\psi_l : T_l \longrightarrow \mathbb{O}_l$ que se fatora pelo isomorfismo

$$T_l/\mathrm{Est}_{\phi_l}(W_l) \xrightarrow{\sim} \mathbb{O}_l,$$

onde $\mathrm{Est}_{\phi_l}(W_l)$ é o estabilizador de W_l sob a ação de ϕ_l.

Faça $l := 1$. O caso geral é feito de forma similar. As coordenadas de Plücker do espaço vetorial

$$\phi_1((c_{p_1^2}, \ldots, c_{p^2_{\delta_{1,2}}}, \cdots, c_{p_1^m}, \ldots, c_{p^m_{\delta_{1,m}}}), W_1)$$

são os menores $m_1 \times m_1$ da matriz

$$\begin{pmatrix} c_{p_1^2} s_1(p_1^2) & \ldots & c_{p^2_{\delta_{1,2}}} s_1(p^2_{\delta_{1,2}}) & \cdots & c_{p_1^m} s_1(p_1^m) & \ldots & c_{p^m_{\delta_{1,m}}} s_1(p^m_{\delta_{1,m}}) \\ c_{p_1^2} s_2(p_1^2) & \ldots & c_{p^2_{\delta_{1,2}}} s_2(p^2_{\delta_{1,2}}) & \cdots & c_{p_1^m} s_2(p_1^m) & \ldots & c_{p^m_{\delta_{1,m}}} s_2(p^m_{\delta_{1,m}}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{p_1^2} s_{m_1}(p_1^2) & \ldots & c_{p^2_{\delta_{1,2}}} s_{m_1}(p^2_{\delta_{1,2}}) & \cdots & c_{p_1^m} s_{m_1}(p_1^m) & \ldots & c_{p^m_{\delta_{1,m}}} s_{m_1}(p^m_{\delta_{1,m}}) \end{pmatrix}.$$

Fixando um divisor $D = \sum_{k=2}^{m} D_{1,k}$ em $C_{\{1\}^c}$, com $0 \leq D_{1,k} \leq \Delta_{1,k}$ para $k = 2, \ldots, m$, onde $D_{1,k} = p^k_{\alpha^k_1} + \cdots + p^k_{\alpha^k_{r_k}}$ e $\sum_{k=2}^{m} r_k = m_1$, temos que o determinante do menor

$$\begin{pmatrix} c_{p^2_{\alpha^2_1}} s_1(p^2_{\alpha^2_1}) & \ldots & c_{p^2_{\alpha^2_{r_2}}} s_1(p^2_{\alpha^2_{r_2}}) & \cdots & c_{p^m_{\alpha^m_1}} s_1(p^m_{\alpha^m_1}) & \ldots & c_{p^m_{\alpha^m_{r_m}}} s_1(p^m_{\alpha^m_{r_m}}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{p^2_{\alpha^2_1}} s_{m_1}(p^2_{\alpha^2_1}) & \ldots & c_{p^2_{\alpha^2_{r_2}}} s_{m_1}(p^2_{\alpha^2_{r_2}}) & \cdots & c_{p^m_{\alpha^m_1}} s_{m_1}(p^m_{\alpha^m_1}) & \ldots & c_{p^m_{\alpha^m_{r_m}}} s_{m_1}(p^m_{\alpha^m_{r_m}}) \end{pmatrix}$$

é

$$c_{p^2_{\alpha^2_1}} \ldots c_{p^2_{\alpha^2_{r_2}}} \cdots c_{p^m_{\alpha^m_1}} \ldots c_{p^m_{\alpha^m_{r_m}}} P_D.$$

Chegamos ao seguinte resultado.

Proposição 3.9. *Seja C uma curva nodal com m componentes irredutíveis. Um ponto*

$$(c_{p^2_1}, \ldots, c_{p^2_{\delta_{1,2}}}, \cdots, c_{p^m_1}, \ldots, c_{p^m_{\delta_{1,m}}}) \in T_1$$

está no estabilizador de W_1 se, e somente se,

$$c_{p^2_{\alpha^2_1}} \ldots c_{p^2_{\alpha^2_{r_2}}} \cdots c_{p^m_{\alpha^m_1}} \ldots c_{p^m_{\alpha^m_{r_m}}} = c_{p^2_{\beta^2_1}} \ldots c_{p^2_{\beta^2_{t_2}}} \cdots c_{p^m_{\beta^m_1}} \ldots c_{p^m_{\beta^m_{t_m}}} \tag{3.10}$$

para qualquer par de divisores $D = \sum_{j=2}^{m} \sum_{k=1}^{r_j} p^j_{\alpha^j_k}$ e $E = \sum_{j=2}^{m} \sum_{k=1}^{t_j} p^j_{\beta^j_k}$, com $\displaystyle\sum_{k=2}^{m} r_k = \sum_{k=2}^{m} t_k = m_1$ e P_D e P_E ambos não nulos.■

Este raciocínio será usado nos Capítulos 4 e 5 para encontrar $\mathrm{Est}_{\phi_l}(W_l)$, os estabilizadores de W_l sob a ação de ϕ_l, em curvas nodais com três e quatro componentes irredutíveis.

Capítulo 4

Curvas com três componentes

Recorde a notação da Seção 1.3.

Definição 4.1. Seja C uma curva nodal com componentes irredutíveis $C_1, \ldots, C_m$. Fixe $l \in \{1, \ldots, m\}$. Seja $\underline{e}^{(l)}$ a m-upla definida por (3.1) e $\underline{n}^{(l)}$ a m-upla associada a $\underline{e}^{(l)}$. Diremos que a componente C_l é *balanceada* se algum subconjunto não unitário de $\{l\}^c$ for $\underline{n}^{(l)}$-balanceado. Uma componente C_l que não é balanceada é dita *desbalanceada*.

4.1 Estabilizadores

Proposição 4.2. *Seja C uma curva nodal com três componentes irredutíveis. Fixe $l \in \{1, 2, 3\}$. Assuma que as componentes de C se intersectem em pontos em $\underline{n}^{(l)}$-posição geral. Seja $\pi : S \longrightarrow B$ uma suavização regular de C ao longo de uma direção geral. Assuma que $\delta_{1,2}, \delta_{1,3}, \delta_{2,3} > 0$. Suponha que C_l seja uma componente desbalanceada de C. Seja $D = \sum_{i \in \{l\}^c} D_{i,l}$ um divisor em $C_{\{l\}^c}$ tal que $0 \le D_{i,l} \le \Delta_{i,l}$, para todo $i \in \{l\}^c$. Suponha que* $\mathrm{grau}(D) = h^0(L^{\underline{n}^{(l)}}_{\pi,\{l\}^c})$. *Então $h^0(L^{\underline{n}^{(l)}}_{\pi,\{l\}^c}(-D)) = 0$ se, e somente se, $h^0(L^{\underline{n}^{(l)}}_{\pi,i}) \ge$*$\mathrm{grau}(D_{i,l})$, *para cada $i \in \{l\}^c$.*

Demonstração: Sem perda de generalidade podemos supor $l = 3$. Fixe a notação $n_i := n_i^{(3)}$ para $i = 1, 2, 3$. Observe que, como C_3 é uma componente desbalanceada de C, temos que $n_1 \neq n_2$. Lembre-se que $n_3 = 0$.

De acordo com (3.2), a restrição do feixe $L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,\{3\}^c}$ à componente C_i é

$$L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,i} = \omega_i(\sum_{j\neq i}(1 + n_j - n_i)\Delta_{i,j}),$$

para $i = 1, 2$. Como as componentes da curva C se intersectam em pontos em posição geral, usando Riemann-Roch temos que

$$\begin{aligned}
&h^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,1}) + h^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,2}) \\
&= g_1 + g_2 + \delta_{1,2} - 1 + \textstyle\sum_{i=1}^{2}(1 - n_i)\delta_{i,3} + \delta_{1,2} \\
&= g_{\{3\}^c} + \textstyle\sum_{i=1}^{2}(1 - n_i)\delta_{i,3} + \delta_{1,2}.
\end{aligned}$$

Pela Proposição 3.7, afirmação (5), sabemos que

$$h^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,\{3\}^c}) = g_{\{3\}^c} + \sum_{i=1}^{2}(1 - n_i)\delta_{i,3}.$$

Logo, chegamos à igualdade

$$h^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,1}) + h^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,2}) = h^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,\{3\}^c}) + \delta_{1,2}. \tag{4.1}$$

Vamos provar a direção "somente se". Suponha que $h^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,2}) < \mathrm{grau}(D_{2,3})$. Por hipótese, temos que $\mathrm{grau}(D) = h^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,\{3\}^c})$. Substituindo na Equação (4.1) obtemos

$$h^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,1}) - \mathrm{grau}(D_{1,3}) - \delta_{1,2} = \mathrm{grau}(D_{2,3}) - h^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,2}) > 0. \tag{4.2}$$

Como as componentes da curva C se intersectam em pontos em posição geral, usando Riemann-Roch chegamos a

$$h^0(L_{\pi,1}^{\underline{n}^{(3)}}(-D_{1,3}-\Delta_{1,2}))$$
$$= h^0(\omega_1((1+n_2-n_1)\Delta_{1,2}+(1-n_1)\Delta_{1,3}-D_{1,3}-\Delta_{1,2}))$$
$$= h^0(L_{\pi,1}^{\underline{n}^{(3)}})-\mathrm{grau}(D_{1,3})-\delta_{1,2}.$$

Por (4.2), temos que $h^0(L_{\pi,1}^{\underline{n}^{(3)}}(-D_{1,3}-\Delta_{1,2}))>0$. Segue da inclusão

$$L_{\pi,1}^{\underline{n}^{(3)}}(-D_{1,3}-\Delta_{1,2}) \longrightarrow L_{\pi,\{3\}^c}^{\underline{n}^{(3)}}(-D)$$

que existe uma seção não nula em $H^0(L_{\pi,\{3\}^c}^{\underline{n}^{(3)}}(-D))$.

Agora vamos mostrar a outra direção. Por hipótese, temos que $h^0(L_{\pi,i}^{\underline{n}^{(3)}})\geq \mathrm{grau}(D_{i,3})$ para $i=1,2$. Logo

$$h^0(L_{\pi,i}^{\underline{n}^{(3)}}(-D_{i,3}))=h^0(L_{\pi,i}^{\underline{n}^{(3)}})-\mathrm{grau}(D_{i,3})$$

para $i=1,2$. Substituindo na Equação (4.1) obtemos

$$h^0(L_{\pi,1}^{\underline{n}^{(3)}}(-D_{1,3}))+h^0(L_{\pi,2}^{\underline{n}^{(3)}}(-D_{2,3}))=h^0(L_{\pi,1}^{\underline{n}^{(3)}})+h^0(L_{\pi,2}^{\underline{n}^{(3)}})-\mathrm{grau}(D)=\delta_{1,2}. \tag{4.3}$$

Note que, como n_1 é diferente de n_2, pode ocorrer um dos casos abaixo:

$$1+n_1-n_2\leq 0 \text{ se, e somente se, } 1+n_2-n_1\geq 2 \tag{4.4}$$

ou

$$1+n_1-n_2\geq 2 \text{ se, e somente se, } 1+n_2-n_1\leq 0. \tag{4.5}$$

No que se segue vamos assumir que ocorra o caso (4.4). O caso (4.5) pode ser tratado de forma similar. Como as componentes de C se intersectam em pontos em posição geral, usando Riemann-Roch obtemos que

$$h^0(L_{\pi,2}^{\underline{n}^{(3)}}(-D_{2,3}-\Delta_{1,2}))=\mathrm{máx}\{0,h^0(L_{\pi,2}^{\underline{n}^{(3)}}(-D_{2,3}))-\delta_{1,2}\}. \tag{4.6}$$

Segue de (4.3) que

$$h^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,2}(-D_{2,3})) - \delta_{1,2} = -h^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,1}(-D_{1,3})). \tag{4.7}$$

Substituindo (4.7) em (4.6) concluímos que

$$h^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,2}(-D_{2,3} - \Delta_{1,2})) = 0. \tag{4.8}$$

Da sequência exata

$$0 \longrightarrow L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,2}(-D_{2,3} - \Delta_{1,2}) \longrightarrow L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,\{3\}^c}(-D) \longrightarrow L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,1}(-D_{1,3}) \longrightarrow 0 \tag{4.9}$$

obtemos que

$$h^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,\{3\}^c}(-D)) \leq h^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,1}(-D_{1,3})).$$

Se $h^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,1}(-D_{1,3})) = 0$, então $h^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,\{3\}^c}(-D)) = 0$ e o resultado está provado. Suponha que $h^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,1}(-D_{1,3})) > 0$. Dividiremos o restante da prova em dois casos.

Caso 1: Suponha que, para todo $p \in |\Delta_{1,2}|$, exista uma seção $s \in H^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,\{3\}^c}(-D))$ tal que $s(p) \neq 0$. Como a deformação ocorre ao longo de uma direção geral, segue do Lema 1.15 que

$$h^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,\{3\}^c}(-D)) = h^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,1}(-D_{1,3})) + h^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,2}(-D_{2,3})) - \delta_{1,2}. \tag{4.10}$$

Substituindo (4.3) em (4.10) obtemos

$$h^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,\{3\}^c}(-D)) = 0.$$

Caso 2: Suponha que exista $p \in |\Delta_{1,2}|$ tal que $s(p) = 0$ para toda seção $s \in H^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,\{3\}^c}(-D))$. Neste caso $H^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,\{3\}^c}(-D)) = H^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,\{3\}^c}(-D) \otimes \mathcal{I}_p)$, onde $\mathcal{I}_p$ é o feixe de ideais do ponto p. Sejam $f : \tilde{C}_{\{3\}^c} \longrightarrow C_{\{3\}^c}$ a normalização de $C_{\{3\}^c}$ em p, $\tilde{C}_i$ a componente irredutível de

$\tilde{C}_{\{3\}^c}$ tal que $f(\tilde{C}_i) = C_i$ e $p_i := \tilde{C}_i \cap f^{-1}(p)$, para $i = 1, 2$. Como assumimos que ocorre o caso (4.4), temos que $1 + n_2 - n_1 \geq 2$ e segue que

$$h^0(L_{\pi,1}^{\underline{n}^{(3)}}(-D_{1,3} - p_1)) = h^0(L_{\pi,1}^{\underline{n}^{(3)}}(-D_{1,3})) - 1. \tag{4.11}$$

Ainda pela assunção (4.4), temos que $1 + n_1 - n_2 \leq 0$. Usando Riemann-Roch, obtemos que

$$h^0(L_{\pi,2}^{\underline{n}^{(3)}}(-D_{2,3} - p_2)) = \text{máx}\{0, h^0(L_{\pi,2}^{\underline{n}^{(3)}}(-D_{2,3})) - 1\}. \tag{4.12}$$

Somando (4.11) com (4.12) e substituindo (4.3), chegamos a

$$h^0(L_{\pi,1}^{\underline{n}^{(3)}}(-D_{1,3} - p_1)) + h^0(L_{\pi,2}^{\underline{n}^{(3)}}(-D_{2,3} - p_2)) \leq \delta_{1,2} - 1.$$

Da sequência exata

$$0 \to L_{\pi,2}^{\underline{n}^{(3)}}(-D_{2,3} - \Delta_{1,2}) \to f^*(L_{\pi,\{3\}^c}^{\underline{n}^{(3)}}(-D))(-p_1 - p_2) \to L_{\pi,1}^{\underline{n}^{(3)}}(-D_{1,3} - p_1) \to 0$$

e das Equações (4.8) e (4.11) obtemos

$$h^0(f^*(L_{\pi,\{3\}^c}^{\underline{n}^{(3)}}(-D))(-p_1 - p_2)) \leq h^0(L_{\pi,1}^{\underline{n}^{(3)}}(-D_{1,3})) - 1.$$

Se $h^0(L_{\pi,1}^{\underline{n}^{(3)}}(-D_{1,3})) - 1 = 0$, como

$$H^0(L_{\pi,\{3\}^c}^{\underline{n}^{(3)}}(-D) \otimes \mathcal{I}_p) = H^0(f^*(L_{\pi,\{3\}^c}^{\underline{n}^{(3)}}(-D))(-p_1 - p_2)),$$

obtemos o resultado desejado. Se $h^0(L_{\pi,1}^{\underline{n}^{(3)}}(-D_{1,3})) - 1 > 0$ e para todo $q \in |\Delta_{1,2} - p|$ existir uma seção $s \in H^0(f^*(L_{\pi,\{3\}^c}^{\underline{n}^{(3)}}(-D))(-p_1 - p_2))$ tal que $s(q) \neq 0$, repetimos o procedimento do *Caso 1* com o feixe $f^*(L_{\pi,\{3\}^c}^{\underline{n}^{(3)}}(-D))(-p_1 - p_2)$. Caso $h^0(L_{\pi,1}^{\underline{n}^{(3)}}(-D_{1,3})) - 1 > 0$ e existir $q \in |\Delta_{1,2} - p|$ tal que $s(q) = 0$ para toda seção $s \in H^0(f^*(L_{\pi,\{3\}^c}^{\underline{n}^{(3)}}(-D))(-p_1 - p_2))$, repetimos o procedimento do *Caso 2*. Observe que, por (4.3), $h^0(L_{\pi,1}^{\underline{n}^{(3)}}(-D_{1,3})) < \delta_{1,2}$. Portanto, repetindo o processo acima no máximo $\delta_{1,2}$ vezes obtemos $H^0(L_{\pi,\{3\}^c}^{\underline{n}^{(3)}}(-D)) = 0$.$\square$

Observação 4.3. Na demonstração da Proposição 4.2, caso a componente C_3 seja balanceada temos $n_1 = n_2$ e a Equação (4.1) torna-se

$$h^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,1}) + h^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,2}) = h^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,\{3\}^c}) + \delta_{1,2} - 1.$$

A demonstração da direção "somente se"da Proposição permanece válida. Quanto à outra direção, a Equação (4.3) torna-se

$$h^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,1}(-D_{1,3})) + h^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,2}(-D_{2,3})) = \delta_{1,2} - 1.$$

Suponha $\delta_{1,2} \leq 2$. Então $h^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,1}(-D_{1,3})) = 0$ ou $h^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,2}(-D_{2,3})) = 0$. Além disso, a Equação (4.8) permanece verdadeira ou temos $h^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,1}(-D_{1,3} - \Delta_{1,2})) = 0$. Segue da Sequência Exata (4.9) que $h^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,\{3\}^c}(-D)) = 0$. Concluímos que, se C_3 é uma componente irredutível de C balanceada e $\delta_{1,2} \leq 2$, a Proposição 4.2 permanece válida.

Observação 4.4. Na demonstração da Proposição 4.2, caso a componente C_3 seja balanceada temos que

$$L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,\{3\}^c} \cong \omega_{\{3\}^c}((1-n)\Delta_3 - D),$$

onde $n := n_1 = n_2$. Portanto $L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,\{3\}^c}$ não é um feixe geral. Logo, não podemos usar o Lema 1.15 para obter a Equação (4.10).

Seja C uma curva nodal com três componentes irredutíveis. Fixe $l \in \{1, 2, 3\}$. Assuma que as componentes de C se intersectem em pontos em $\underline{n}^{(l)}$-posição geral. Seja $\pi : S \longrightarrow B$ uma suavização de C ao longo de uma direção geral. Recorde a Seção 3.3. De acordo com ela, $e_{l,\{l\}^c} : H^0(L^{\underline{n}^{(l)}}_{\pi,\{l\}^c}) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_{\Delta_l})$ é um mapa injetivo de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais cuja imagem é W_l. Recorde que $\dim(W_l) = m_l$ e G_l é a Grassmanniana $\mathrm{Grass}_{m_l}(H^0(\mathcal{O}_{\Delta_l}))$. Além disso, a ação de $T_l = H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_l})$ em $H^0(\mathcal{O}_{\Delta_l})$ induz uma ação $\phi_l : T_l \times G_l \longrightarrow G_l$. Vimos que

$$T_l/\mathrm{Est}_{\phi_l}(W_l) \xrightarrow{\sim} \mathbb{O}_l,$$

onde $\mathbb{O}_l$ é a órbita de W_l e $\mathrm{Est}_{\phi_l}(W_l)$ é o estabilizador de W_l sob a ação de ϕ_l.

Das Proposições 3.8 e 4.2, concluímos que

$$P_D \neq 0 \text{ se, e somente se, } h^0(L^{\underline{n}^{(l)}}_{\pi,k}) \geq \mathrm{grau}(D_{k,l}) \tag{4.13}$$

para todo $k \in \{l\}^c$.

Para cada $l \in \{1, 2, 3\}$, defina

$$\chi^l_k := \mathrm{mín}\{h^0(L^{\underline{n}^{(l)}}_{\pi,k}), \delta_{k,l}\}$$

para todo $k \in \{l\}^c$. Observe que $\sum_{k\in\{l\}^c} \chi^l_k \geq h^0(L^{\underline{n}^{(l)}}_{\pi,\{l\}^c})$. De fato, fazendo $l := 3$ para simplificar a notação, temos que: se $\chi^3_k = \delta_{k,3}$ para $k = 1, 2$, então, como o mapa $e_{l,\{l\}^c}$ é injetivo, a desigualdade é válida; se $\chi^3_k = h^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,k})$ para $k = 1, 2$, é claro que a desigualdade também é válida. Agora faça $\chi^3_1 = h^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,1})$, $\chi^3_2 = \delta_{2,3}$ e suponha por absurdo que $\chi^3_1 + \chi^3_2 < h^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,\{3\}^c})$. Vamos analisar as coordenadas de Plücker de W_3 neste caso. Seja $D = D_{1,3} + D_{2,3}$ um divisor efetivo tal que $0 \leq D_{k,3} \leq \Delta_{k,3}$, para $k = 1, 2$, e $\mathrm{grau}(D) = m_3$. Pela hipótese de absurdo temos que

$$h^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,1}) + \delta_{2,3} < \mathrm{grau}(D_{1,3}) + \mathrm{grau}(D_{2,3}).$$

Sabemos que $\mathrm{grau}(D_{2,3}) \leq \delta_{2,3}$. Logo obtemos que $h^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,1}) <\mathrm{grau}(D_{1,3})$ e concluímos de (4.13) que $P_D = 0$. Como isto é válido para todo divisor D nas condições acima, obtemos que todas as coordenadas de Plücker do espaço W_3 são nulas, o que é um absurdo.

Os números χ^l_k satisfazem a desigualdade $1 \leq \chi^l_k \leq h^0(L^{\underline{n}^{(l)}}_{\pi,k})$, para $k \in \{l\}^c$. Além disso, se $\mathrm{grau}(D) = m_l$ e $\mathrm{grau}(D_{k,l}) \leq \chi_k^l$ para todo $k \in \{l\}^c$, então $P_D \neq 0$. Concluímos que, se $D = \sum_{k \in \{l\}^c} D_{k,l}$, onde $\mathrm{grau}(D_{k,l}) = r_k$, então

$$P_D \neq 0 \text{ se, e somente se, } r_k \leq \chi_k^l \text{ para todo } k \in \{l\}^c. \tag{4.14}$$

No Lema que se segue, d_{ij} é o mapa diagonal

$$\begin{aligned} d_{ij} : \ \mathbb{K}^* &\longrightarrow H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_{i,j}}) \\ a &\longmapsto (a, \ldots, a), \end{aligned}$$

para $i, j \in \{1, 2, 3\}$ distintos. O símbolo $\hat{}$ indica que o termo está sendo omitido de uma soma ou produto.

Lema 4.5. *Fixe $l \in \{1, 2, 3\}$. Faça $\{l\}^c = \{i, j\}$. Seja $\phi_l : T_l \times G_l \longrightarrow G_l$ a ação de T_l em G_l. O estabilizador de W_l sob a ação ϕ_l é o toro dado em cada caso abaixo:*

1. *Se $\chi_i^l + \chi_j^l > m_l$, então*

$$\mathrm{Est}_{\phi_l}(W_l) = \{(d_{il}(a), d_{jl}(a)) \in H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_{i,l}}) \oplus H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_{j,l}}) | a \in \mathbb{K}^*\}.$$

2. *Se $\chi_i^l + \chi_j^l = m_l$, então:*

   (a) *se $\chi_k^l = \delta_{k,l}$ para todo $k \in \{l\}^c$, então $\mathrm{Est}_{\phi_l}(W_l) = T_l$;*

   (b) *se $\chi_i^l < \delta_{i,l}$ e $\chi_j^l = \delta_{j,l}$, então*

$$\mathrm{Est}_{\phi_l}(W_l) = \{(d_{il}(a), (c_{p_1^j}, \ldots, c_{p^j_{\delta_{j,l}}})) \in H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_{i,l}}) \oplus H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_{j,l}}) | a \in \mathbb{K}^*\}.$$

   (c) *se $\chi_k^l < \delta_{k,l}$ para todo $k \in \{l\}^c$, então*

$$\mathrm{Est}_{\phi_l}(W_l) = \{(d_{il}(a), d_{jl}(b)) \in H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_{i,l}}) \oplus H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_{j,l}}) | a, b \in \mathbb{K}^*\}.$$

Demonstração: Sem perda de generalidade, podemos supor $l = 3, i = 1$ e $j = 2$. Fixe coordenadas $(c_{p_1^1}, \ldots, c_{p^1_{\delta_{1,3}}}, c_{p_1^2}, \ldots, c_{p^2_{\delta_{2,3}}})$ em T_3.

1. $\chi_1^3 + \chi_2^3 > m_3$. De acordo com a Condição (4.14), temos que $P_D \neq 0$ para todo divisor $D = D_{1,3} + D_{2,3}$ com $0 \leq D_{k,3} \leq \Delta_{k,3}$ para $k = 1, 2$. A demonstração deste caso está dividida em 3 passos.

   Passo 1: Mostraremos que $c_{p_1^1} = c_{p_2^1} = \cdots = c_{p^1_{\delta_{1,3}}}$. De fato, como $\chi_1^3 + \chi_2^3 > m_3$, existem $r_1 < \chi_1^3$ e $r_2 \leq \chi_2^3$ não-negativos tais que $r_1 + r_2 = m_3$. Vamos considerar divisores com graus r_1 e r_2 tais que as coordenadas de Plücker de W_3 associada a eles é não-nula. Considere os divisores

$$D_k := p_1^1 + \cdots + \widehat{p_k^1} + \cdots + p^1_{r_1+1} + p_1^2 + \cdots + p^2_{r_2}$$

   onde $k \in \{1, \ldots, r_1 + 1\}$. Recorde o raciocínio usado para encontrar a Equação (3.10). Fixando $k_1, k_2 \in \{1, \ldots, r_1 + 1\}$ distintos, os divisores D_{k_1} e D_{k_2} geram a equação

$$c_{p_1^1} \cdots \widehat{c_{p^1_{k_1}}} \cdots c_{p^1_{r_1+1}} c_{p_1^2} \cdots c_{p^2_{r_2}} = c_{p_1^1} \cdots \widehat{c_{p^1_{k_2}}} \cdots c_{p^1_{r_1+1}} c_{p_1^2} \cdots c_{p^2_{r_2}}$$

   que, após simplificações, torna-se $c_{p^1_{k_2}} = c_{p^1_{k_1}}$. Variando k_1 e k_2 em $\{1, \ldots, r_1 + 1\}$ obtemos

$$c_{p_1^1} = c_{p_2^1} = \cdots = c_{p^1_{r_1+1}}.$$

   Considere agora os divisores

$$E_k := p_1^1 + \cdots + p^1_{r_1-1} + p^1_k + p_1^2 + \cdots + p^2_{r_2},$$

   para $k = r_1 + 2, \ldots, \delta_{1,3}$. Para $k_1, k_2 \in \{r_1 + 2, \ldots, \delta_{1,3}\}$ distintos, os divisores E_{k_1} e E_{k_2} geram a equação

$$c_{p_1^1} \cdots c_{p^1_{r_1-1}} c_{p^1_{k_1}} c_{p_1^2} \cdots c_{p^2_{r_2}} = c_{p_1^1} \cdots c_{p^1_{r_1-1}} c_{p^1_{k_2}} c_{p_1^2} \cdots c_{p^2_{r_2}}$$

que torna-se $c_{p^1_{k_1}} = c_{p^1_{k_2}}$. Variando k_1 e k_2 em $\{r_1+2,\ldots,\delta_{1,3}\}$ obtemos

$$c_{p^1_{r_1+2}} = \cdots = c_{p^1_{\delta_{1,3}}}.$$

Por fim, os divisores D_1 e $E_{\delta_{1,3}}$ geram a igualdade $c_{p^1_1} = c_{p^1_{\delta_{1,3}}}$. Concluímos que

$$c_{p^1_1} = c_{p^1_2} = \cdots = c_{p^1_{\delta_{1,3}}}.$$

Passo 2: Mostraremos que $c_{p^2_1} = c_{p^2_2} = \cdots = c_{p^2_{\delta_{2,3}}}$. Fixe $s_1 \leq \chi^3_1$ e $s_2 < \chi^3_2$ não-negativos tais que $s_1 + s_2 = m_3$. Repita o procedimento descrito no *Passo 1*.

Passo 3: Mostraremos que $c_{p^1_1} = \cdots = c_{p^1_{\delta_{1,3}}} = c_{p^2_1} = \cdots = c_{p^2_{\delta_{2,3}}}$. Os divisores

$$p^1_1 + \cdots + p^1_{r_1} + p^2_1 + \cdots + p^2_{r_2}$$

e

$$p^1_1 + \cdots + p^1_{r_1+1} + p^2_1 + \cdots + p^2_{r_2-1}$$

geram a igualdade $c_{p^1_{r_1+1}} = c_{p^2_{r_2}}$. Usando esta equação e os resultados dos *Passos 1* e *2* obtemos o afirmado.

2. $\chi^3_1 + \chi^3_2 = m_3$:

   (a) Suponha $\chi^3_i = \delta_{i,3}$ para $i = 1,2$. Neste caso, $m_3 = \delta_{1,3} + \delta_{2,3} = \delta_3 = h^0(\mathcal{O}_{\Delta_3})$. Portanto o mapa $e_{3,\{3\}^c}$ é sobrejetivo e $W_3 = H^0(\mathcal{O}_{\Delta_3})$. O estabilizador de W_3 é todo o toro T_3.

   (b) Suponha $\chi^3_1 = h^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,1}) < \delta_{1,3}$ e $\chi^3_2 = \delta_{2,3}$. De acordo com a Condição (4.14), temos que $P_D \neq 0$ se, e somente se, $D = D_{1,3} + D_{2,3}$ onde $0 \leq D_{1,3} < \Delta_{1,3}$, $\mathrm{grau}(D_{1,3}) = \chi^3_1$ e $D_{2,3} = \Delta_{2,3}$. Repetindo o procedimento do *Passo 1* obtemos

$$c_{p^1_1} = c_{p^1_2} = \cdots = c_{p^1_{\delta_{1,3}}}.$$

Como a condição $D_{2,3} = \Delta_{2,3}$ é rígida, isto é, $D_{2,3}$ não pode variar, não há mais condições sobre os $c_{p_i^k}$'s. Então o estabilizador de W_3 é

$$\mathrm{Est}_{\phi_3}(W_3) = \{(d_{13}(a), (t_1, \ldots, t_{\delta_{2,3}})) \in H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_{1,3}}) \oplus H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_{2,3}}) | a \in \mathbb{K}^*\}.$$

No caso em que $\chi_1^3 = \delta_{1,3}$ e $\chi_2^3 = h^0(L_{\pi,2}^{\underline{n}^{(3)}}) < \delta_{2,3}$, o raciocínio é análogo.

(c) Suponha $\chi_k^3 = h^0(L_{\pi,k}^{\underline{n}^{(3)}}) < \delta_{k,3}$ para $k = 1, 2$. Como no caso (2b), $P_D \neq 0$ se, e somente se, $D = D_{1,3} + D_{2,3}$ onde $0 \leq D_{k,3} < \Delta_{k,3}$ e $\mathrm{grau}(D_{k,3}) = \chi_k^3$ para $k = 1, 2$. Fixe $D_{2,3} = p_1^2 + \cdots + p_{\chi_2^3}^2$. Variando $D_{1,3}$ e repetindo o procedimento do *Passo 1* encontramos

$$c_{p_1^1} = c_{p_2^1} = \cdots = c_{p^1_{\delta_{1,3}}}.$$

Agora fixe $D_{1,3} = p_1^1 + \cdots + p_{\chi_1^3}^1$. Variando $D_{2,3}$, por procedimento análogo ao do *Passo 1*, encontramos

$$c_{p_1^2} = c_{p_2^2} = \cdots = c_{p^2_{\delta_{2,3}}}.$$

Se tomarmos divisores $D = D_{1,3} + D_{2,3}$ com $\mathrm{grau}(D_{k,3}) > h^0(L_{\pi,k}^{\underline{n}^{(3)}})$, para $k = 1$ ou $k = 2$, então $P_D = 0$. Logo não existem outras condições sobre os $c_{p_i^k}$'s. Portanto o $\mathrm{Est}_{\phi_3}(W_3)$ é o toro

$$\{(d_{13}(a), d_{23}(b)) \in H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_{1,3}}) \oplus H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_{2,3}}) | a, b \in \mathbb{K}^*\}.$$

Observação 4.6. Fixe $l \in \{1, 2, 3\}$. Seja $G^{(l)} := \mathrm{Grass}_{m_l}(H^0(\mathcal{O}_\Delta))$ a Grassmanniana dos subespaços de dimensão m_l de $H^0(\mathcal{O}_\Delta)$. Podemos considerar $W_l \in G^{(l)}$ via o mergulho natural de G_l em $G^{(l)}$. Seja T o toro $H^0(\mathcal{O}^*_\Delta)$. A ação de T em $H^0(\mathcal{O}_\Delta)$ induz uma ação $\phi^{(l)} : T \times G^{(l)} \longrightarrow G^{(l)}$ de T em $G^{(l)}$. Denote por $\mathrm{Est}_{\phi^{(l)}}(W_l)$ o estabilizador de W_l sob a ação de $\phi^{(l)}$. Faça $\{l\}^c = \{i, j\}$. Então $\mathrm{Est}_{\phi^{(l)}}(W_l) = \mathrm{Est}_{\phi_l}(W_l) \oplus H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_{i,j}})$ e $T/\mathrm{Est}_{\phi^{(l)}}(W_l) \cong \mathbb{O}_l$.

4.2 A variedade de sistemas canônicos limites com foco em uma componente

Recorde a notação usada na Seção 3.2.

Proposição 4.7. *Seja C uma curva nodal com m componentes irredutíveis. Fixe $l \in \{1, \ldots, m\}$. Seja L um feixe invertível em C. Existe uma suavização regular $\pi : S \longrightarrow B$ de C tal que $\mathcal{L}_{\pi}^{\underline{n}^{(l)}}|_C \cong L$ se, e somente se, para todo subconjunto $\underline{n}^{(l)}$-balanceado $I \subset \{1, \ldots, m\}$ temos*

$$L|_{C_I} \cong K_I, \tag{4.15}$$

onde $K_I = \omega_I(\sum_{m\in I}\sum_{k\notin I}(1 + n_k^{(l)} - n_m^{(l)})\Delta_{m,k})$.

Demonstração: Suponha que exista uma suavização regular $\pi : S \longrightarrow B$ tal que $\mathcal{L}_{\pi}^{\underline{n}^{(l)}}|_C \cong L$. Se $I \subset \{1, \ldots, m\}$ é um subconjunto $\underline{n}^{(l)}$-balanceado, então

$$L|_{C_I} = L_{\pi,I}^{\underline{n}^{(l)}} \cong \omega_{C_I}(\sum_{m\in I}\sum_{k\notin I}(1 + n_k^{(l)} - n_m^{(l)})\Delta_{m,k}).$$

Por outro lado, seja L um feixe invertível em C que satisfaça (4.15) para todo subconjunto $\underline{n}^{(l)}$-balanceado $I \subset \{1, \ldots, m\}$. Defina $\mathcal{N} := L \otimes \omega^{-1}$. Então

$$\mathcal{N}|_{C_I} \cong L|_{C_I} \otimes \omega^{-1}|_{C_I} \cong \mathcal{O}_{C_I}(\sum_{m\in I}\sum_{k\notin I}(n_k^{(l)} - n_i^{(l)})\Delta_{k,m}).$$

Pelo Corolário 2.5, existe uma suavização regular $\pi : S \longrightarrow B$ de C tal que

$$\mathcal{N} \cong \mathcal{O}_S(n_1^{(l)}C_1 + \cdots + n_m^{(l)}C_m)|_C.$$

Concluímos que $L \cong \omega_{\pi}(n_1^{(l)}C_1 + \cdots + n_3^{(l)}C_3)|_C$.$\square$

Seja C uma curva nodal com m componentes irredutíveis. Recorde a Seção 1.3. Fixe $l \in \{1, \ldots, m\}$. Assuma que as componentes de C se intersectem em pontos em $\underline{n}^{(l)}$-posição geral. Seja $\pi : S \longrightarrow B$ uma suavização de C ao longo de uma direção geral. De acordo com (3.2), temos que

$$L_{\pi,l}^{\underline{n}^{(l)}} \cong \omega_l(\sum_{i\neq l}(1+n_i^{(l)})\Delta_{i,l}).$$

Pela Proposição 3.7, afirmação (1), a dimensão da imagem do mapa

$$\rho_{\pi,l,l} : H^0(L_\pi^{\underline{n}^{(l)}}) \longrightarrow H^0(L_{\pi,l}^{\underline{n}^{(l)}})$$

é g. Tal imagem é denotada $V_{\pi,l}$.

Seja $\mathbb{G}_l := \mathrm{Grass}_g(H^0(\omega_l(\sum_{i\neq l}(1+n_i^{(l)})\Delta_{i,l})))$ a Grassmanniana dos subespaços vetoriais de dimensão g de $H^0(\omega_l(\sum_{i\neq l}(1+n_i^{(l)})\Delta_{i,l}))$. Um subespaço vetorial $V_l \in \mathbb{G}_l$ é chamado *regularmente suavizável* se existe uma suavização regular $\pi : S \longrightarrow B$ de C tal que $V_l = V_{\pi,l}$.

Definição 4.8. O conjunto

$$\mathbb{V}_l := \{V_{\pi,l} \in \mathbb{G}_l \,|\, \pi \text{ é uma suavização regular de } C\}$$

é chamado a *variedade de sistemas canônicos limites de C com foco em C_l.*

Recorde a notação da Seção 3.3. No seguinte Teorema, denotamos por t_{ij} um elemento de $H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_{i,j}})$. Escreveremos $\underline{1}$ para o elemento $(1,\dots,1) \in H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_{i,j}})$.

Teorema 4.9. *Seja C uma curva nodal com três componentes irredutíveis. Assuma que o gênero de cada componente de C seja positivo. Fixe $l \in \{1,2,3\}$. Assuma que as componentes de C se intersectem em pontos em $\underline{n}^{(l)}$-posição geral. Assuma que $\delta_{1,2}, \delta_{1,3}, \delta_{2,3} > 0$. Se C_l for uma componente balanceada de C, suponha $\delta_{i,j} \leq 2$, onde $\{l\}^c = \{i,j\}$. Então, a variedade dos sistemas canônicos limites de C com foco em C_l é um ponto ou birracional a um dos seguintes toros: $\mathbb{K}^{*\delta_l-1}, \mathbb{K}^{*\delta_l-2}$ ou $\mathbb{K}^{*\delta_{i,l}-1}$, para algum $i \in \{l\}^c$.*

Demonstração: Tome uma suavização $\tilde{\pi} : S \longrightarrow B$ de C ao longo de uma direção geral. Sejam $\tilde{\xi}_{i,j} : L_{\tilde{\pi},i}^{\underline{n}^{(l)}}|_{\Delta_{i,j}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\Delta_{i,j}}$ as trivializações do feixe $L_{\tilde{\pi}}^{\underline{n}^{(l)}}$. Se $I \subset \{1,2,3\}$ é um subconjunto $\underline{n}^{(l)}$-balanceado, então $L_{\tilde{\pi},I}^{\underline{n}^{(l)}} \cong K_I$ pela Proposição 4.7. Seja

$$L_k := \omega_k(\sum_{m \neq k}(1 + n_m^{(l)} - n_k^{(l)})\Delta_{m,k})$$

para cada $k = 1,2,3$. Defina mapas $\xi_{i,j} : L_i|_{\Delta_{i,j}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\Delta_{i,j}}$ da seguinte forma

$$\xi_{i,j} := \begin{cases} t_{ij}\tilde{\xi}_{i,j} & \text{se } i < j \\ \tilde{\xi}_{i,j} & \text{se } i > j. \end{cases}$$

Seja L o feixe invertível em C obtido identificando L_1, L_2 e L_3 em Δ via os $\xi_{i,j}$. Se $n_i^{(l)} = n_j^{(l)}$, onde $\{l\}^c = \{i,j\}$, faça $t_{ij} := \underline{1}$. Neste caso

$$L|_{C_{\{l\}^c}} \cong L_{\tilde{\pi},\{l\}^c}^{\underline{n}^{(l)}} \cong K_{\{l\}^c}.$$

Pela Proposição 4.7, existe uma suavização $\pi : S \longrightarrow B$ de C tal que $\mathcal{L}_{\pi}^{\underline{n}^{(l)}}|_C \cong L$. Seja W_l a imagem do mapa $e_{l,\{l\}^c} : H^0(L_{\tilde{\pi},\{l\}^c}^{\underline{n}^{(l)}}) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_{\Delta_l})$. Recorde que $G_l = \mathrm{Grass}_{m_l}(H^0(\mathcal{O}_{\Delta_l}))$ e $T_l = H^0(\mathcal{O}_{\Delta_l}^*)$. Considere a ação de T_l em $H^0(\mathcal{O}_{\Delta_l})$ e a ação induzida $\phi_l : T_l \times G_l \longrightarrow G_l$. Pela Proposição 3.7, item (3), o mapa $e_{l,l} : H^0(\omega_l(\sum_{i \neq l}(1 + n_i^{(l)})\Delta_{i,l})) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_{\Delta_l})$ é sobrejetivo. Se $t_l \in T_l$, então a codimensão do espaço $\phi_l(t_l, W_l)$ em $H^0(\mathcal{O}_{\Delta_l})$ é $\delta_l - m_l$. Pela Proposição 3.7, itens (1) e (2), a dimensão de $e_{l,l}^{-1}(\phi_l(t_l, W_l))$ é g. Seja $\mathbb{O}_l$ a órbita de W_l em G_l. Pela discussão na Seção 3.3, sabemos que $T_l/\mathrm{Est}_{\phi_l}(W_l) \cong \mathbb{O}_l$. Pelo Lema 4.5, o estabilizador de W_l é o próprio T_l ou isomorfo a $\mathbb{K}^*$, $\mathbb{K}^{*2}$ ou $\mathbb{K}^{*\delta_{k,l}+1}$, onde $k \in \{l\}^c$. Portanto $\mathbb{O}_l$ é o ponto $\{H^0(\omega_l(\sum_{k \neq l}(1 + n_k^{(l)})\Delta_{k,l}))\}$ ou isomorfo a $\mathbb{K}^{*\delta_l - 1}$, $\mathbb{K}^{*\delta_l - 2}$ ou $\mathbb{K}^{*\delta_{m,l} - 1}$, onde $\{m\} = \{l,k\}^c$.$\square$

4.3 A variedade de sistemas canônicos limites

Sejam C uma curva nodal com três componentes irredutíveis e M_C a matriz associada a C, de acordo com a Definição 3.4. Seja $\lambda : \mathbb{Z}^3 \longrightarrow \mathbb{Z}^3$ o homomorfismo de grupos determinado pela matriz M_C.

Proposição 4.10. *Seja C uma curva nodal com três componentes irredutíveis. Suponha que as componentes de C se intersectem em pontos em $\underline{n}^{(l)}$-posição geral, para cada $l \in \{1,2,3\}$. Assuma $\delta_{1,2}, \delta_{1,3}, \delta_{2,3} > 0$. Sejam $L^{(1)}, L^{(2)}$ e $L^{(3)}$ feixes invertíveis em C. Existe uma suavização regular $\pi : S \longrightarrow B$ de C ao longo de uma direção geral tal que $\mathcal{L}_\pi^{\underline{n}^{(l)}}|_C = L^{(l)}$ para $l = 1,2,3$ se, e somente se,*

$$L^{(l)}|_{C_i} \cong \omega_i(\sum_{m \neq i}(1 + n_m^{(l)} - n_i^{(l)})\Delta_{i,m})$$

para todos $l, i \in \{1,2,3\}$ e

$$(L^{(1)})^{u_1}(L^{(2)})^{u_2}(L^{(3)})^{u_3}|_{C_{\{i,j\}}} \cong K^u_{\{i,j\}}$$

para todo subconjunto $\{i,j\} \subseteq \{1,2,3\}$ e $u \in H_{\{i,j\}}$, onde

$$K^u_{\{i,j\}} := \omega_{\{i,j\}}^{\sum_{r=1}^3 u_r}((\sum_{r=1}^{3} u_r + \lambda(u)_k - \lambda(u)_i)\Delta_k),$$

$\{i,j\}^c = \{k\}$ e $H_{\{i,j\}} = \{u \in \mathbb{Z}^3 \mid \lambda(u)_i = \lambda(u)_j\}$.

Demonstração: Mostraremos primeiro a direção "somente se". Suponha que exista uma suavização regular $\pi : S \longrightarrow B$ de C tal que $\mathcal{L}_\pi^{\underline{n}^{(l)}}|_C = L^{(l)}$ para $l = 1,2,3$, onde $\mathcal{L}_\pi^{\underline{n}^{(l)}} = \omega_\pi(n_1^{(l)}C_1 + n_2^{(l)}C_2 + n_3^{(l)}C_3)$. Calculando a restrição a cada componente, obtemos

$$L^{(l)}|_{C_i} = L_{\pi,i}^{\underline{n}^{(l)}} = \omega_i(\sum_{m \neq i}(1 + n_m^{(l)} - n_i^{(l)})\Delta_{i,m}).$$

Além disso,

$$(\mathcal{L}_{\pi}^{\underline{n}^{(1)}})^{u_1}(\mathcal{L}_{\pi}^{\underline{n}^{(2)}})^{u_2}(\mathcal{L}_{\pi}^{\underline{n}^{(3)}})^{u_3}=\omega_{\pi}^{\sum_{r=1}^{3}u_r}(\lambda(u)_1C_1+\lambda(u)_2C_2+\lambda(u)_3C_3).$$

Se $u\in H_{\{i,j\}}$, então

$$(\mathcal{L}_{\pi}^{\underline{n}^{(1)}})^{u_1}(\mathcal{L}_{\pi}^{\underline{n}^{(2)}})^{u_2}(\mathcal{L}_{\pi}^{\underline{n}^{(3)}})^{u_3}|_{C_{\{i,j\}}}\cong\omega_{\{i,j\}}^{\sum_{r=1}^{3}u_r}((\sum_{r=1}^{3}u_r+\lambda(u)_k-\lambda(u)_i)\Delta_k).$$

Provaremos agora a outra direção. Defina $\Psi:\mathbb{Z}^3\longrightarrow \mathrm{Pic}(C)$ por

$$\Psi(u)=(L^{(1)}\omega^{-1})^{u_1}(L^{(2)}\omega^{-1})^{u_2}(L^{(3)}\omega^{-1})^{u_3}.$$

Para quaisquer $i,j\in\{1,2,3\}$ distintos temos

$$\Psi(u)|_{C_{\{i,j\}}}\cong(L^{(1)})^{u_1}(L^{(2)})^{u_2}(L^{(3)})^{u_3}\omega^{-\sum_{r=1}^{3}u_r}|_{C_{\{i,j\}}}$$

Se $u\in H_{\{i,j\}}$, segue da hipótese que

$$\Psi(u)|_{C_{\{i,j\}}}\cong\mathcal{O}_{C_{\{i,j\}}}((\lambda(u)_k-\lambda(u)_i)\Delta_k).$$

Pelo Corolário 3.5, o determinante da matriz M_C é não nulo. Portanto o homomorfismo $\lambda:\mathbb{Z}^3\longrightarrow\mathbb{Z}^3$ tem posto máximo. De acordo com a Observação 2.1, para cada $I\subseteq\Lambda$,

$$\Psi(l)|_{C_I}\cong\mathcal{O}_{C_I}(\sum_{i\in I}\sum_{j\notin I}(\lambda(l)_j-\lambda(l)_i)\Delta_{i,j})\text{ para cada }l\in H_I.$$

Segue do Teorema 2.11 que existe uma suavização $\pi:S\longrightarrow B$ de C ao longo de uma direção geral tal que

$$\Psi(u)\cong\mathcal{O}_S(\lambda(u)_1C_1+\lambda(u)_2C_2+\lambda(u)_3C_3)|_C,$$

para todo $u\in\mathbb{Z}^3$. Tomando $u:=e_l$ obtemos $L^{(l)}\cong\omega_\pi(n_1^{(l)}C_1+n_2^{(l)}C_2+n_3^{(l)}C_3)|_C$, finalizando a demonstração.$\square$

Recorde a notação da Seção 4.2. Seja C uma curva nodal com m componentes irredutíveis. Faça $\mathbb{G} := \mathbb{G}_1 \times \cdots \times \mathbb{G}_m$. Dizemos que $\nu := (V_1, \ldots, V_m) \in \mathbb{G}$ é *regularmente suavizável* se existe uma suavização regular $\pi : S \longrightarrow B$ de C tal que $V_l = V_{\pi,l}$ para $l = 1, \ldots, m$. Neste caso, denotamos $\nu = \nu_\pi$.

Definição 4.11. O conjunto

$$\mathbb{V} := \{\nu_\pi \in \mathbb{G} \,|\, \pi \text{ é uma suavização regular de } C\}$$

é chamado a *variedade de sistemas canônicos limites de C.*

No seguinte Teorema, fixado $l \in \{1, 2, 3\}$, denotamos por $\underline{t}_{ij}^{(l)}$ um elemento de $H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_{i,j}})$. Chamaremos de $\underline{t}_{ij}$ uma $(3\delta_{i,j})$-upla da forma

$$(\underline{t}_{ij}^{(1)}, \underline{t}_{ij}^{(2)}, \underline{t}_{ij}^{(3)}) \in H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_{i,j}})^{\oplus 3}.$$

Se $a = (a_1, \ldots, a_{\delta_{i,j}}) \in \mathbb{K}^{\delta_{i,j}}$ e $b \in \mathbb{Z}$, escrevemos a^b para $(a_1^b, \ldots, a_{\delta_{i,j}}^b)$. Se $u \in \mathbb{Z}^3$, denotamos

$$\underline{t}_{ij}^u := (\underline{t}_{ij}^{(1)})^{u_1} (\underline{t}_{ij}^{(2)})^{u_2} (\underline{t}_{ij}^{(3)})^{u_3}.$$

Teorema 4.12. *Seja C uma curva nodal com três componentes irredutíveis. Assuma que o gênero de cada componente seja positivo. Assuma que as componentes de C se intersectem em pontos em $\underline{n}^{(l)}$-posição geral, para cada $l = 1, 2, 3$. Assuma que $\delta_{1,2}, \delta_{1,3}, \delta_{2,3} > 0$. Se, para algum $l \in \{1, 2, 3\}$, C_l for uma componente balanceada de C, suponha $\delta_{i,j} \leq 2$, onde $\{l\}^c = \{i, j\}$. Então, a variedade dos sistemas canônicos limites de C é um ponto ou birracional a um dos seguintes toros: $\mathbb{K}^{*\delta-1}, \mathbb{K}^{*\delta-2}, \mathbb{K}^{*\delta-3}, \mathbb{K}^{*\delta_l-1}, \mathbb{K}^{*\delta_l-2}, \mathbb{K}^{*\delta_{l,i}-1}$ onde $l, i \in \{1, 2, 3\}$ são distintos.*

Demonstração: Tome uma suavização $\tilde{\pi} : S \longrightarrow B$ de C ao longo de uma direção geral. Para cada $l \in \{1,2,3\}$, sejam $\tilde{\xi}^{(l)}_{i,j} : L^{\underline{n}^{(l)}}_{\tilde{\pi},i}|_{\Delta_{i,j}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\Delta_{i,j}}$ as trivializações do feixe $L^{\underline{n}^{(l)}}_{\tilde{\pi}}$. Para todo subconjunto $\{i,j\}$ de $\{1,2,3\}$, se $u \in H_{\{i,j\}}$, então, pela Proposição 4.10,

$$(L^{\underline{n}^{(1)}}_{\tilde{\pi}})^{u_1}(L^{\underline{n}^{(2)}}_{\tilde{\pi}})^{u_2}(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\tilde{\pi}})^{u_3}|_{C_{\{i,j\}}} \cong K^{u}_{\{i,j\}}.$$

Seja $L^{(l)}_i := \omega_i(\sum_{k\neq i}(1+n^{(l)}_k - n^{(l)}_i)\Delta_{i,k})$, para $l, i \in \{1,2,3\}$. Defina mapas $\xi^{(l)}_{ij} : L^{(l)}_i|_{\Delta_{i,j}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\Delta_{i,j}}$ por

$$\xi^{(l)}_{i,j} := \begin{cases} \underline{t}^{(l)}_{ij}\tilde{\xi}^{(l)}_{i,j} & \text{se } i < j \\ \tilde{\xi}^{(l)}_{i,j} & \text{se } i > j. \end{cases}$$

Para cada $l \in \{1,2,3\}$, seja $L^{(l)}$ o feixe em C obtido identificando os feixes $L^{(l)}_i$, $i = 1,2,3$, ao longo de Δ via $\xi^{(l)}_{i,j}$. Pela Proposição 2.9, existem w_0, w_1, w_2 e w_3 em $\mathbb{Z}^3$ tais que $H_{\{k\}^c} = \mathbb{Z}w_0 \oplus \mathbb{Z}w_k$. De acordo com a Proposição 4.10, para que exista uma suavização $\pi : S \longrightarrow B$ de C ao longo de uma direção geral tal que $\mathcal{L}^{\underline{n}^{(l)}}_{\pi}|_C \cong L^{(l)}$ para $l = 1,2,3$, é necessário que tenhamos, para todo subconjunto $\{i,j\} \subseteq \{1,2,3\}$,

$$(L^{(1)})^{w_{k,1}}(L^{(2)})^{w_{k,2}}(L^{(3)})^{w_{k,3}}|_{C_{\{i,j\}}} \cong K^{w_k}_{\{i,j\}},$$

onde $k \in \{i,j\}^c \cup \{0\}$. Esta condição é equivalente a

$$\underline{t}^{w_k}_{ij} = \underline{1}, \text{ onde } k \in \{i,j\}^c \cup \{0\},$$

para todo par de elementos distintos $i, j \in \{1,2,3\}$.

Para $i, j \in \{1,2,3\}$ com $i < j$, seja

$$\mathbb{T}_{ij} := \{\underline{t}_{ij} \in H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_{i,j}})^{\oplus 3} | \underline{t}^{w_0}_{ij} = \underline{1} \text{ e } \underline{t}^{w_k}_{ij} = \underline{1}, \text{ onde } \{i,j\}^c = \{k\}\}.$$

Desta forma, $\mathbb{T}_{ij}$ é um toro de dimensão $\delta_{i,j}$. Defina $\Upsilon := \bigoplus_{\substack{i,j\in\{1,2,3\}\\ i<j}} H^0(\mathcal{O}_{\Delta_{i,j}})^{\oplus 3}$. Fixe

coordenadas $(\underline{t}_{12}, \underline{t}_{13}, \underline{t}_{23})$ em Υ. Faça

$$\mathbb{T} := \mathbb{T}_{12} \oplus \mathbb{T}_{13} \oplus \mathbb{T}_{23}.$$

O toro $\mathbb{T}$ tem dimensão δ. Para cada $l \in \{1,2,3\}$, seja W_l a imagem do mapa

$$e_{l,\{l\}^c} : H^0(L^{\underline{n}^{(l)}}_{\tilde{\pi},\{l\}^c}) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_{\Delta_l}).$$

Considere o mergulho natural de W_l em $H^0(\mathcal{O}_\Delta)$. Seja

$G^{(l)} := \mathrm{Grass}_{m_l}(H^0(\mathcal{O}_\Delta))$ a Grassmanniana dos subespaços de dimensão m_l de $H^0(\mathcal{O}_\Delta)$. Defina $G := G^{(1)} \times G^{(2)} \times G^{(3)}$. Temos que $(W_1, W_2, W_3) \in G$. Considere a ação de $\mathbb{T}$ em Υ definida por

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T} \times \Upsilon & \longrightarrow & \Upsilon \\ ((\dots, c_p, \dots), (\dots, d_p, \dots)) & \longmapsto & (\dots, c_p d_p, \dots) \end{array}$$

onde p varia no $|\Delta|$. Esta ação induz uma ação $\phi : \mathbb{T} \times G \longrightarrow G$. Seja $\mathbb{O}$ a órbita de (W_1, W_2, W_3) em G e $\mathrm{Est}(W_1, W_2, W_3)$ o estabilizador da ação ϕ. Existe um mapa sobrejetivo $\psi : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{O}$ que se fatora pelo isomorfismo

$$\mathbb{T}/\mathrm{Est}(W_1, W_2, W_3) \longrightarrow \mathbb{O}.$$

Recorde a Observação 4.6. Faça $E_l := \mathrm{Est}_{\phi^{(l)}}(W_l)$ para $l = 1, 2, 3$. Defina $Z := E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$. Temos que $\mathrm{Est}(W_1, W_2, W_3) = \mathbb{T} \cap Z$. De acordo com o Lema 4.5, fixado l, o estabilizador E_l é $H^0(\mathcal{O}^*_\Delta)$ ou um dos três toros abaixo:

- $D^1_{ij} := \{(d_{il}(a), d_{jl}(a), \underline{t}^{(l)}_{ij}) \in H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_{i,l}}) \oplus H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_{j,l}}) \oplus H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_{i,j}}) \,|\, a \in \mathbb{K}^*\}$;

- $D^2_{ij} := \{(d_{il}(a), \underline{t}^{(l)}_{jl}, \underline{t}^{(l)}_{ij}) \in H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_{i,l}}) \oplus H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_{j,l}}) \oplus H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_{i,j}}) \,|\, a \in \mathbb{K}^*\}$;

- $D^3_{ij} := \{(d_{il}(a), d_{jl}(b), \underline{t}^{(l)}_{ij}) \in H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_{i,l}}) \oplus H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_{j,l}}) \oplus H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_{i,j}}) \,|\, a, b \in \mathbb{K}^*\}$.

Dividiremos o restante da demonstração em sete casos.

Caso 1: Suponha $E_l = H^0(\mathcal{O}^*_\Delta)$, *para* $l = 1,2,3$. Neste caso $Z = \Upsilon$, e o estabilizador da ação de $\mathbb{T}$ em G é todo o toro $\mathbb{T}$. Então $\mathbb{O}$ é um ponto.

Caso 2: Suponha $E_1 = D^2_{23}, E_2 = D^2_{13}$ *e* $E_3 = H^0(\mathcal{O}^*_\Delta)$. Temos

$$Z = \{((d_{12}(a), d_{12}(b), \underline{t}^{(3)}_{12}), \underline{t}_{13}, \underline{t}_{23}) \in \Upsilon | a, b \in \mathbb{K}^*\}.$$

Para encontrar $\mathbb{T} \cap Z$ observe que, fixando $a \in \mathbb{K}^*$, chegamos ao sistema

$$\begin{aligned}(d_{12}(a))^{w_{0,1}}(d_{12}(b))^{w_{0,2}}(t^{(3)}_{12})^{w_{0,3}} &= 1\\ (d_{12}(a))^{w_{3,1}}(d_{12}(b))^{w_{3,2}}(t^{(3)}_{12})^{w_{3,3}} &= 1.\end{aligned}$$

Pelo Corolário 3.6, as duas equações acima são linearmente independentes. Então, fixado um valor para a, o sistema acima possui um número finito não nulo de soluções. Portanto o valor de a determina os valores de b e $\underline{t}^{(3)}_{12}$. Como não há restrições para as uplas $\underline{t}_{13}$ e $\underline{t}_{23}$, não há mais equações que determinem $\mathbb{T} \cap Z$. Logo, $\mathbb{T} \cap Z = \mathbb{K}^* \oplus \mathbb{T}_{13} \oplus \mathbb{T}_{23}$. Concluímos que $\mathbb{O}$ é um aberto de $\mathbb{T}_{12}/\mathbb{K}^*$ e $\dim(\mathbb{O}) = \delta_{1,2} - 1$.

Caso 3: Suponha $E_1 = D^2_{23}, E_2 = D^2_{13}$ *e* $E_3 = D^2_{21}$. Obtemos

$$Z = \{((d_{12}(a), d_{12}(b), \underline{t}^{(3)}_{12}), \underline{t}_{13}, (\underline{t}^{(1)}_{23}, \underline{t}^{(2)}_{23}, d_{23}(c)) \in \Upsilon | a, b, c \in \mathbb{K}^*\}.$$

Para encontrar $\mathbb{T} \cap Z$, como no *Caso 2*, chegamos a um sistema onde a determina os valores de b e $\underline{t}^{(3)}_{12}$. Da mesma forma, c determina $\underline{t}^{(1)}_{23}$ e $\underline{t}^{(2)}_{23}$. Então $\mathbb{T} \cap Z = \mathbb{K}^* \oplus \mathbb{T}_{13} \oplus \mathbb{K}^*$ e $\mathbb{O}$ é um aberto de $\mathbb{T}_{12}/\mathbb{K}^* \oplus \mathbb{T}_{23}/\mathbb{K}^*$. Portanto $\dim(\mathbb{O}) = \delta_2 - 2$.

Caso 4: Suponha $E_1 = D^2_{32}, E_2 = D^2_{31}$ *e* $E_3 = D^1_{12}$. Considere o toro

$$\{(\underline{t}_{12}, (d_{13}(a), \underline{t}^{(2)}_{13}, d_{13}(b_1)), (\underline{t}^{(1)}_{23}, d_{23}(c), d_{23}(b_2)))| a, b_1, b_2, c \in \mathbb{K}^*\}. \tag{4.16}$$

Como no *Caso 2*, ao interceptar com $\mathbb{T}$, o valor de a determina os valores de $\underline{t}^{(2)}_{13}$ e b_1. Da mesma forma, o valor de c determina os valores de $\underline{t}^{(1)}_{23}$ e b_2. Além disso, como E_3 é o toro

D_{12}^1, para chegar a $\mathbb{T}\cap Z$ precisamos interceptar o toro (4.16) com um hiperplano de equação $t_{13,p}^{(3)} = t_{23,q}^{(3)}$ para obter $b_1 = b_2$. Desta forma chegamos a $\mathbb{T}\cap Z = \mathbb{T}_{12} \oplus \mathbb{K}^*$, onde

$$\mathbb{K}^* = \{(b, \dots, b) \in \mathbb{T}_{13} \oplus \mathbb{T}_{23} | b \in \mathbb{K}^*\}.$$

Concluímos que $\mathbb{O} \subseteq (\mathbb{T}_{13} \oplus \mathbb{T}_{23})/\mathbb{K}^*$ e $\dim(\mathbb{O}) = \delta_3 - 1$.

Caso 5: Suponha $E_1 = D_{23}^2, E_2 = D_{13}^2$ *e* $E_3 = D_{12}^3$. Temos

$$Z = \{((d_{12}(a), d_{12}(b), \underline{t}_{12}^{(3)}), (\underline{t}_{13}^{(1)}, \underline{t}_{13}^{(2)}, d_{13}(c)), (\underline{t}_{23}^{(1)}, \underline{t}_{23}^{(2)}, d_{23}(d))) | a, b, c, d \in \mathbb{K}^*\}.$$

Interceptando Z com $\mathbb{T}$ chegamos a três sistemas similares ao do *Caso 2*. Em um deles, a determina os valores de b e $\underline{t}_{12}^{(3)}$. No outro, c determina $\underline{t}_{13}^{(1)}$ e $\underline{t}_{13}^{(2)}$. No terceiro, d determina $\underline{t}_{23}^{(1)}$ e $\underline{t}_{23}^{(2)}$. Portanto $\mathbb{T}\cap Z = \mathbb{K}^* \oplus \mathbb{K}^* \oplus \mathbb{K}^*$ e $\mathbb{O}$ é um aberto de $\mathbb{T}_{12}/\mathbb{K}^* \oplus \mathbb{T}_{13}/\mathbb{K}^* \oplus \mathbb{T}_{23}/\mathbb{K}^*$. Calculando a dimensão de $\mathbb{O}$ chegamos a $\delta - 3$.

Caso 6: Suponha $E_1 = D_{23}^1, E_2 = D_{31}^2$ *e* $E_3 = D_{12}^3$. Considere o toro

$$\{((d_{12}(a_1), \underline{t}_{12}^{(2)}, \underline{t}_{12}^{(3)}), (d_{13}(a_2), \underline{t}_{13}^{(2)}, d_{13}(b)), (\underline{t}_{23}^{(1)}, d_{23}(c), d_{23}(d))) | a_1, a_2, b, c, d \in \mathbb{K}^*\}.$$

Interceptando com $\mathbb{T}$, de forma análoga ao *Caso 2*, chegamos a três sistemas onde: a_1 determina os valores de $\underline{t}_{12}^{(2)}$, $\underline{t}_{12}^{(3)}$; a_2 determina $\underline{t}_{13}^{(2)}$ e b; e c determina $\underline{t}_{23}^{(1)}$ e d. O fato de E_1 ser o toro D_{23}^1, impõe a condição $a_1 = a_2$. Portanto devemos interceptar o toro acima com um hiperplano de equação $t_{12,p}^{(1)} = t_{13,q}^{(1)}$. Desta forma, fazendo $a := a_1$, temos que o valor de a determina $\underline{t}_{12}^{(2)}, \underline{t}_{12}^{(3)}, \underline{t}_{13}^{(2)}$ e b. Portanto $\mathbb{T}\cap Z = \mathbb{K}^* \oplus \mathbb{K}^* \subset (\mathbb{T}_{12} \oplus \mathbb{T}_{13}) \oplus \mathbb{T}_{23}$ e $\mathbb{O} \subseteq (\mathbb{T}_{12} \oplus \mathbb{T}_{13})/\mathbb{K}^* \oplus \mathbb{T}_{23}/\mathbb{K}^*$. Concluímos que $\dim(\mathbb{O}) = \delta - 2$.

Caso 7: Suponha $E_1 = D_{23}^1, E_2 = D_{13}^1$ *e* $E_3 = D_{12}^1$. Considere o toro

$$\{((d_{12}(a_1), d_{12}(b_1), \underline{t}_{12}^{(3)}), (d_{13}(a_2), \underline{t}_{13}^{(2)}, d_{13}(c_1)), (\underline{t}_{23}^{(1)}, d_{23}(b_2), d_{23}(c_2))) | a_i, b_i, c_i \in \mathbb{K}^*\}.$$

Como nos casos anteriores, ao interceptar o toro acima com $\mathbb{T}$, chegamos a sistemas de equações onde: a_1 determina b_1 e $\underline{t}_{12}^{(3)}$; a_2 determina $\underline{t}_{13}^{(2)}$ e c_1; e b_2 determina $\underline{t}_{23}^{(1)}$ e c_2. Além disso, como devemos ter $a_1 = a_2$ e $b_1 = b_2$, a fim de obter $\mathbb{T} \cap Z$ devemos interceptar o toro acima com dois hiperplanos. Obtemos $\mathbb{T} \cap Z = \mathbb{K}^*$. Teremos que $\mathbb{O}$ é um aberto de $(\mathbb{T}_{12} \oplus \mathbb{T}_{13} \oplus \mathbb{T}_{23})/\mathbb{K}^*$. Concluímos que $\dim(\mathbb{O}) = \delta - 1$.

A demonstração para uma combinação qualquer de toros E_1, E_2 e E_3 é análoga a um dos casos apresentados acima.$\square$

Capítulo 5

Curvas com quatro componentes

Acreditamos que vários resultados apresentados nos Capítulos 2 e 4 podem ser generalizados para curvas com mais de três componentes irredutíveis. Neste capítulo serão discutidas dificuldades que surgem na tentativa de tratar curvas com quatro componentes.

5.1 Estabilizadores

Recorde a notação da Seção 3.2. Seja C uma curva nodal com quatro componentes irredutíveis. Fixe $l \in \{1,2,3,4\}$. Assuma que as componentes de C se intersectem em pontos em $\underline{n}^{(l)}$-posição geral. Seja $\pi : S \longrightarrow B$ uma suavização de C ao longo de uma direção geral. Seja W_l a imagem do mapa $e_{l,\{l\}^c} : H^0(L^{\underline{n}^{(l)}}_{\pi,\{l\}^c}) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_{\Delta_l})$. Pela Proposição 3.7, afirmações (4) e (5), temos que $\dim(W_l) = m_l$, onde $m_l = g_{\{l\}^c} + \sum_{j=1}^{m}(1-n_j^{(l)})\delta_{l,j}$. Seja $G_l := \mathrm{Grass}_{m_l}(H^0(\mathcal{O}_{\Delta_l}))$, a Grassmanniana dos subespaços de dimensão m_l de $H^0(\mathcal{O}_{\Delta_l})$. Segundo a Seção 3.3, as coordenadas de Plücker do espaço $W_l \in G_l$ estão associadas a divisores efetivos $D := \sum_{i\in\{l\}^c} D_{i,l}$ em $C_{\{l\}^c}$ tais que $0 \le D_{i,l} \le \Delta_{i,l}$, para todo $i \in \{l\}^c$, e

$\mathrm{grau}(D) = m_l$. A coordenada de Plücker associada ao divisor D é denotada P_D. Segue da Proposição 3.8 que

$$P_D = 0 \text{ se, e somente se, } h^0(L^{\underline{n}^{(l)}}_{\pi,\{l\}^c}(-D)) \neq 0.$$

A definição abaixo exclui um tipo de curva para o qual a demonstração que apresentaremos não é válida.

Definição 5.1. Seja C uma curva nodal com quatro componentes irredutíveis. Fixe $l \in \{1,2,3,4\}$. Suponha que exista um divisor efetivo $D = \sum_{i\in\{l\}^c} D_{i,l}$ em $C_{\{l\}^c}$, com $0 \le D_{i,l} \le \Delta_{i,l}$ para cada $i \in \{l\}^c$ e $\mathrm{grau}(D) = m_l$, tal que

$$h^0(L^{\underline{n}^{(l)}}_{\pi,i}) - \mathrm{grau}(D_{i,l}) < 0$$

para algum $i \in \{l\}^c$, e

$$h^0(L^{\underline{n}^{(l)}}_{\pi,j}) - \mathrm{grau}(D_{j,l}) - \delta_{j,\{j,l\}^c} \le 0$$

para cada $j \in \{i,l\}^c$. Neste caso, dizemos que C_l *é uma componente especial de C com respeito a D*. Se C_l é uma componente especial de C com respeito a algum divisor D nas condições acima, dizemos que C_l *é uma componente especial de C*.

Exemplo 5.2. Seja C uma curva nodal com quatro componentes irredutíveis cujos gêneros são $g_1 = 71, g_2 = 67, g_3 = 78$ e $g_4 = 51$. Suponha que elas se intersectam segundo os números de interseção $\delta_{1,2} = 53, \delta_{1,3} = 12, \delta_{1,4} = 19, \delta_{2,3} = 63, \delta_{2,4} = 40$ e $\delta_{3,4} = 90$. Então o gênero de C é $g = 541$ e $\underline{e}^{(4)} = (154, 222, 242, -341)$. Usando o algoritmo descrito na Seção 6.1 obtemos $\underline{n}^{(4)} = (4,3,2,0)$. Portanto $h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,\{4\}^c}) = 115, h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,1}) = 2, h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,2}) = 92$ e $h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,3}) = 149$. Tome um divisor $D \subset C_{\{4\}^c}$, com $0 \le D_{i,l} \le \Delta_{i,l}$ para $i = 1,2,3$, tal que $\mathrm{grau}(D_{1,4}) = 3$, $\mathrm{grau}(D_{2,4}) = 22$ e $D_{3,4} = \Delta_{3,4}$. Então $\mathrm{grau}(D) = 115$, $h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,1}) - \mathrm{grau}(D_{1,4}) = -1$,

$h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,2}) - \text{grau}(D_{2,4}) - \delta_{2,\{1,3\}} = -46$ e $h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,3}) - \text{grau}(D_{3,4}) - \delta_{3,\{1,2\}} = -16$. Portanto C_4 é uma componente especial de C com respeito a D.

Recorde a Definição 4.1.

Proposição 5.3. *Seja C uma curva nodal com quatro componentes irredutíveis. Fixe $l \in \{1,2,3,4\}$. Assuma que as componentes de C se intersectem em pontos em $\underline{n}^{(l)}$-posição geral. Seja $\pi : S \longrightarrow B$ uma suavização regular de C ao longo de uma direção geral. Suponha que C_l seja uma componente desbalanceada de C. Seja $D = \sum_{i\in\{l\}^c} D_{i,l}$ um divisor efetivo em $C_{\{l\}^c}$ tal que $0 \leq D_{i,l} \leq \Delta_{i,l}$ para todo $i \in \{l\}^c$. Suponha que $\text{grau}(D) = h^0(L^{\underline{n}^{(l)}}_{\pi,\{l\}^c})$. Se*

$$0 \leq h^0(L^{\underline{n}^{(l)}}_{\pi,i}) - \text{grau}(D_{i,l}) \leq \delta_{i,\{i,l\}^c}$$

para todo $i \in \{l\}^c$, então $h^0(L^{\underline{n}^{(l)}}_{\pi,\{l\}^c}(-D)) = 0$. Além disso, se C_l não é uma componente especial de C com respeito a D, então a recíproca é verdadeira.

Demonstração: Sem perda de generalidade podemos supor $l = 4$. Fixe a notação $n_i := n_i^{(4)}$ para $i = 1,2,3,4$. Suponha primeiro que C_4 não é uma componente especial de C com respeito a D. Mostraremos que, se $h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,\{4\}^c}(-D)) = 0$, então

$$0 \leq h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,i}) - \text{grau}(D_{i,4}) \leq \delta_{i,\{i,4\}^c}$$

para todo $i \in \{4\}^c$. De fato, se $h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,i}) - \text{grau}(D_{i,4}) < 0$ para algum $i \in \{4\}^c$, então, como C_4 não é uma componente especial de C com respeito a D, existe $j \in \{i,4\}^c$ tal que

$$h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,j}) - \text{grau}(D_{j,4}) - \delta_{j,\{j,4\}^c} > 0.$$

Como existe um mapa injetivo

$$L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,j}(-D_{j,4} - \Delta_{j,\{j,4\}^c}) \longrightarrow L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,\{4\}^c}(-D),$$

existe uma seção não nula $s \in H^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,\{4\}^c}(-D))$. Se $0 \leq h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,i}) - \text{grau}(D_{i,4})$ para todo $i \in \{4\}^c$, mas $h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,i}) - \text{grau}(D_{i,4}) > \delta_{i,\{i,4\}^c}$ para algum $i \in \{4\}^c$, o resultado segue de forma similar.

Vamos mostrar agora a afirmação principal. Observe que, como C_4 é uma componente desbalanceada de C, temos que $n_i \neq n_j$ para quaisquer $i, j \in \{1,2,3\}$ distintos. Se $i, j \in \{1,2,3\}$, temos que

$$1 + n_i - n_j \leq 0 \text{ se, e somente se, } 1 + n_j - n_i \geq 2. \tag{5.1}$$

Além disso, de acordo com (3.2), a restrição do feixe $L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,\{4\}^c}$ à componente C_j, para $j = 1,2,3$, é

$$L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,j} = \omega_j\Big(\sum_{i\neq j}(1 + n_i - n_j)\Delta_{i,j}\Big).$$

Se, para algum $1 \leq j \leq 3$, tivermos

$$1 + n_i - n_j \leq 0 \text{ para todo } i \in \{j,4\}^c,$$

defina $\varepsilon := \delta_{1,2} + \delta_{1,3} + \delta_{2,3}$. Caso isto não ocorra, defina $\varepsilon := \delta_{1,2} + \delta_{1,3} + \delta_{2,3} - 1$. Como as componentes da curva C se intersectam em pontos em posição geral, usando Riemann-Roch temos que

$$\begin{aligned}
&h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,1}) + h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,2}) + h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,3})\\
&= g_1 + g_2 + g_3 + \delta_{1,2} + \delta_{1,3} + \delta_{2,3} - 2 + \textstyle\sum_{i=1}^{3}(1 - n_i)\delta_{i,4} + \varepsilon\\
&= g_{\{4\}^c} + \textstyle\sum_{i=1}^{3}(1 - n_i)\delta_{i,4} + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Pela Proposição 3.7, afirmação (5), sabemos que

$$h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,\{4\}^c}) = g_{\{4\}^c} + \sum_{i=1}^{3}(1 - n_i)\delta_{i,4}.$$

Logo, chegamos à igualdade

$$h^0(L_{\pi,1}^{\underline{n}^{(4)}}) + h^0(L_{\pi,2}^{\underline{n}^{(4)}}) + h^0(L_{\pi,3}^{\underline{n}^{(4)}}) = h^0(L_{\pi,\{4\}^c}^{\underline{n}^{(4)}}) + \varepsilon. \tag{5.2}$$

Por hipótese, temos que $h^0(L_{\pi,i}^{\underline{n}^{(4)}}) \geq \mathrm{grau}(D_{i,4})$ para $i = 1, 2, 3$. Logo

$$h^0(L_{\pi,i}^{\underline{n}^{(4)}}(-D_{i,4})) = h^0(L_{\pi,i}^{\underline{n}^{(4)}}) - \mathrm{grau}(D_{i,4})$$

para $i = 1, 2, 3$. Substituindo na Equação (5.2) e usando a hipótese de que $\mathrm{grau}(D) = h^0(L_{\pi,\{4\}^c}^{(4)})$, obtemos

$$h^0(L_{\pi,1}^{\underline{n}^{(4)}}(-D_{1,4})) + h^0(L_{\pi,2}^{\underline{n}^{(4)}}(-D_{2,4})) + h^0(L_{\pi,3}^{\underline{n}^{(4)}}(-D_{3,4})) = \varepsilon. \tag{5.3}$$

Dividiremos o restante da demonstração em dois casos.

Caso 1: Suponha que, para todo $q \in |\Delta_{\{1,2\},3}|$, *exista uma seção* $s \in H^0(L_{\pi,\{4\}^c}^{\underline{n}^{(4)}}(-D))$ *tal que* $s(q) \neq 0$. Como a deformação ocorre ao longo de uma direção geral, segue do Lema 1.15 que

$$h^0(L_{\pi,\{4\}^c}^{\underline{n}^{(4)}}(-D)) = h^0(L_{\pi,\{1,2\}}^{\underline{n}^{(4)}}(-D_{\{1,2\},4})) + h^0(L_{\pi,3}^{\underline{n}^{(4)}}(-D_{3,4})) - \delta_{\{1,2\},3}. \tag{5.4}$$

Se $h^0(L_{\pi,\{1,2\}}^{\underline{n}^{(4)}}(-D_{\{1,2\},4})) = 0$, então

$$h^0(L_{\pi,\{4\}^c}^{\underline{n}^{(4)}}(-D)) = h^0(L_{\pi,3}^{\underline{n}^{(4)}}(-D_{3,4})) - \delta_{\{1,2\},3}.$$

Por hipótese, temos que $h^0(L_{\pi,3}^{\underline{n}^{(4)}}(-D_{3,4})) - \delta_{\{1,2\},3} \leq 0$. Logo $h^0(L_{\pi,\{4\}^c}^{\underline{n}^{(4)}}(-D)) = 0$. Por outro lado, se $h^0(L_{\pi,\{1,2\}}^{\underline{n}^{(4)}}(-D_{\{1,2\},4})) > 0$, seja $P := \{p^1, \ldots, p^t\} \subseteq |\Delta_{1,2}|$ o subconjunto dos pontos $p \in |\Delta_{1,2}|$ tais que $s(p) = 0$ para todo s em $H^0(L_{\pi,\{1,2\}}^{\underline{n}^{(4)}}(-D_{\{1,2\},4}))$. Seja $g : \tilde{C}_{\{1,2\}} \longrightarrow C_{\{1,2\}}$ a normalização de $C_{\{1,2\}}$ em P, $\tilde{C}_j$ a componente irredutível de $\tilde{C}_{\{1,2\}}$ tal que $g(\tilde{C}_j) = C_j$ e $p_j^i = g^{-1}(p^i) \cap \tilde{C}_j$, para $j = 1, 2$ e $i = 1, \ldots, t$. Então

$$H^0(L_{\pi,\{1,2\}}^{\underline{n}^{(4)}}(-D_{\{1,2\},4}))$$

$$= H^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,\{1,2\}}(-D_{\{1,2\},4}) \otimes \mathcal{I}_P)$$
$$= H^0(g^*(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,\{1,2\}}(-D_{\{1,2\},4}))(-\textstyle\sum_{i=1}^t p_1^i + p_2^i)),$$

onde $\mathcal{I}_P$ é o feixe de ideais de P. Pelo Lema 1.15 temos

$$h^0(g^*(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,\{1,2\}}(-D_{\{1,2\},4}))(-\textstyle\sum_{i=1}^t p_1^i + p_2^i))$$
$$= h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,1}(-D_{1,4} - \textstyle\sum_{i=1}^t p_1^i)) + h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,2}(-D_{2,4} - \textstyle\sum_{i=1}^t p_2^i)) - (\delta_{1,2} - t).$$

Como supomos $h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,\{1,2\}}(-D_{\{1,2\},4})) > 0$, segue que

$$h^0(g^*(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,\{1,2\}}(-D_{\{1,2\},4}))(-(\sum_{i=1}^t p_i^1 + p_i^2))) > 0.$$

Logo $h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,k}(-D_{k,4} - \displaystyle\sum_{i=1}^t p_i^k)) > 0$ para $k = 1$ ou 2. Portanto

$$h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,\{1,2\}}(-D_{\{1,2\},4})) + h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,3}(-D_{3,4})) - \delta_{\{1,2\},3}$$
$$= h^0(g^*(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,\{1,2\}}(-D_{\{1,2\},4}))(-(\textstyle\sum_{i=1}^t p_i^1 + p_i^2))) + h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,3}(-D_{3,4})) - \delta_{\{1,2\},3}$$
$$\leq h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,1}(-D_{1,4})) + h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,2}(-D_{2,4})) - t - (\delta_{1,2} - t) + h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,3}(-D_{3,4})) - \delta_{\{1,2\},3}$$
$$= \varepsilon - \delta_{1,2} - \delta_{1,3} - \delta_{2,3},$$

onde usamos (5.3) na última igualdade. Voltando à Expressão (5.4), obtemos

$$h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,\{4\}^c}(-D)) \leq \varepsilon - \delta_{1,2} - \delta_{1,3} - \delta_{2,3} \leq 0,$$

pela definição de ε. Logo $h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,\{4\}^c}(-D)) = 0$, concluindo a demonstração do *Caso 1.*

Caso 2: Suponha que exista $q \in |\Delta_{\{1,2\},3}|$ tal que $s(q) = 0$ para toda seção $s \in H^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,\{4\}^c}(-D))$.

Dividiremos a demonstração deste caso em três passos.

Passo 1: Mostraremos que existe um subconjunto $Q := \{q^1, \ldots, q^k\} \subseteq |\Delta_{\{1,2\},3}|$ tal que, se $f : \tilde{C}_{\{4\}^c} \longrightarrow C_{\{4\}^c}$ é a normalização de $C_{\{4\}^c}$ ao longo de Q, $\tilde{C}_I$ é a subcurva de $\tilde{C}_{\{4\}^c}$ tal *que $f(\tilde{C}_I) = C_I$ e $q_I^i = f^{-1}(q^i) \cap \tilde{C}_I$, onde $I = \{1,2\}$ ou $I = \{3\}$, então ocorre um dos itens abaixo:*

1. $H^0(L_{\pi,\{4\}^c}^{\underline{n}^{(4)}}(-D)) = 0$;

2. $H^0(L_{\pi,\{4\}^c}^{\underline{n}^{(4)}}(-D)) = H^0(f^*(L_{\pi,\{4\}^c}^{\underline{n}^{(4)}}(-D))(-\sum_{i=1}^k q_{\{1,2\}}^i + q_3^i))$ *e*

$$H^0(L_{\pi,3}^{\underline{n}^{(4)}}(-D_{3,4} - \sum_{i=1}^k q_3^i)) = 0.$$

Se $h^0(L_{\pi,3}^{\underline{n}^{(4)}}(-D_{3,4})) = 0$, basta tomar $Q := \varnothing$ e o resultado está provado. Suponha que $h^0(L_{\pi,3}^{\underline{n}^{(4)}}(-D_{3,4})) > 0$. Tome $q^1 \in |\Delta_{\{1,2\},3}|$ tal que $s(q^1) = 0$ para toda seção $s \in H^0(L_{\pi,\{4\}^c}^{\underline{n}^{(4)}}(-D))$. Neste caso $H^0(L_{\pi,\{4\}^c}^{\underline{n}^{(4)}}(-D)) = H^0(L_{\pi,\{4\}^c}^{\underline{n}^{(4)}}(-D) \otimes \mathcal{I}_{q^1})$, onde $\mathcal{I}_{q^1}$ é o ideal do ponto q^1. Seja $f : \tilde{C}_{\{4\}^c} \longrightarrow C_{\{4\}^c}$ a normalização de $C_{\{4\}^c}$ em q^1. Temos que

$$H^0(L_{\pi,\{4\}^c}^{\underline{n}^{(4)}}(-D) \otimes \mathcal{I}_{q^1}) = H^0(f^*(L_{\pi,\{4\}^c}^{\underline{n}^{(4)}}(-D))(-q_{\{1,2\}}^1 - q_3^1)).$$

Além disso, usando (5.1) e Riemann-Roch temos que

$$h^0(L_{\pi,3}^{\underline{n}^{(4)}}(-D_{3,4} - q_3^1)) = h^0(L_{\pi,3}^{\underline{n}^{(4)}}(-D_{3,4})) - 1.$$

Se $h^0(L_{\pi,3}^{\underline{n}^{(4)}}(-D_{3,4} - q_3^1)) = 0$, então chegamos ao *Item* (2). Se $h^0(L_{\pi,3}^{\underline{n}^{(4)}}(-D_{3,4} - q_3^1)) > 0$ e para todo $q \in |\Delta_{\{1,2\},3} - q^1|$ existe uma seção

$$s \in H^0(f^*(L_{\pi,\{4\}^c}^{\underline{n}^{(4)}}(-D))(-q_{\{1,2\}}^1 - q_3^1))$$

tal que $s(q) \neq 0$, então repetimos o procedimento do *Caso 1* com o espaço vetorial

$$H^0(f^*(L_{\pi,\{4\}^c}^{\underline{n}^{(4)}}(-D))(-q_{\{1,2\}}^1 - q_3^1))$$

e concluímos que ele é zero. Como

$$H^0(L_{\pi,\{4\}^c}^{\underline{n}^{(4)}}(-D)) = H^0(f^*(L_{\pi,\{4\}^c}^{\underline{n}^{(4)}}(-D))(-q_{\{1,2\}}^1 + q_3^1)),$$

chegamos ao *Item* (1). Se $h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,3}(-D_{3,4}-q^3_1))>0$ e existe $q\in|\Delta_{\{1,2\},3}-q^1|$ tal que $s(q)=0$ para toda seção

$$s\in H^0(f^*(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,\{4\}^c}(-D))(-q^1_{\{1,2\}}-q^1_3)),$$

repetimos o procedimento acima com o espaço vetorial

$$H^0(f^*(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,\{4\}^c}(-D))(-q^1_{\{1,2\}}-q^1_3)).$$

Observe que, por hipótese, temos que $h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,3}(-D_{3,4}))\le\delta_{3,\{1,2\}}$. A dimensão de $H^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,3}(-D_{3,4}))$ decresce a cada etapa deste processo. Então podemos encontrar os pontos $q^1,\dots,q^k$ em no máximo $\delta_{\{1,2\},3}$ etapas. Isto termina a demonstração do *Passo 1*.

Passo 2: Mostraremos que $H^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,\{1,2\}}(-D_{\{1,2\},4}-\Delta_{\{1,2\},3}))=0$. Como as componentes de C se intersectam em pontos em posição geral, usando Riemann-Roch temos que

$$h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,2}(-D_{2,4}-\Delta_{2,\{1,3\}}))=\text{máx}\{0,h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,2}(-D_{2,4}))-\delta_{2,\{1,3\}}\}. \tag{5.5}$$

Por hipótese, temos que $h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,2}(-D_{2,4}))-\delta_{2,\{1,3\}}\le0$. Logo

$$h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,2}(-D_{2,4}-\Delta_{2,\{1,3\}}))=0. \tag{5.6}$$

Da sequência exata

$$0\to L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,2}(-D_{2,4}-\Delta_{2,\{1,3\}})\to L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,\{1,2\}}(-D_{\{1,2\},4}-\Delta_{\{1,2\},3})\to L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,1}(-D_{1,4}-\Delta_{1,3})\to0$$

obtemos

$$h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,\{1,2\}}(-D_{\{1,2\},4}-\Delta_{\{1,2\},3}))\le h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,1}(-D_{1,4}-\Delta_{1,3})).$$

Se $h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,1}(-D_{1,4}-\Delta_{1,3}))=0$, então $h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,\{1,2\}}(-D_{\{1,2\},4}-\Delta_{\{1,2\},3}))=0$ e o resultado está provado.

Suponha $h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,1}(-D_{1,4}-\Delta_{1,3}))>0$. Se, para todo $p\in|\Delta_{1,2}|$ existir uma seção

$$s\in H^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,\{1,2\}}(-D_{\{1,2\},4}-\Delta_{\{1,2\},3}))$$

tal que $s(p)\neq 0$, como a deformação ocorre ao longo de uma direção geral, segue do Lema 1.15 que

$$h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,\{1,2\}}(-D_{\{1,2\},4}-\Delta_{\{1,2\},3}))=h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,1}(-D_{1,4}-\Delta_{1,3}))+h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,2}(-D_{2,4}-\Delta_{2,3}))-\delta_{1,2}.$$

Se $h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,2}(-D_{2,4}-\Delta_{2,3}))=0$, então

$$h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,\{1,2\}}(-D_{\{1,2\},4}-\Delta_{\{1,2\},3}))=h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,1}(-D_{1,4}))-\delta_{1,\{2,3\}}\leq 0$$

por hipótese. Se $h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,2}(-D_{2,4}-\Delta_{2,3}))>0$, então

$$\begin{aligned}
&h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,1}(-D_{1,4}-\Delta_{1,3}))+h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,2}(-D_{2,4}-\Delta_{2,3}))-\delta_{1,2}\\
&=h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,1}(-D_{1,4}))+h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,2}(-D_{2,4}))-\varepsilon\\
&=-h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,3}(-D_{3,4}))\leq 0,
\end{aligned}$$

onde usamos (5.3). Logo, obtemos $h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,\{1,2\}}(-D_{\{1,2\},4}-\Delta_{\{1,2\},3}))=0$.

Se existir $p\in|\Delta_{1,2}|$ tal que $s(p)=0$ para toda seção $s\in H^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,\{1,2\}}(-D_{\{1,2\},4}-\Delta_{\{1,2\},3}))$, considere $v:\tilde{C}_{\{1,2\}}\longrightarrow C_{\{1,2\}}$ a normalização de $C_{\{1,2\}}$ em p, $\tilde{C}_i$ a componente irredutível de $\tilde{C}_{\{1,2\}}$ tal que $v(\tilde{C}_i)=C_i$ e $p_i:=\tilde{C}_i\cap v^{-1}(p)$, para $i=1,2$. Observe que

$$H^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,\{1,2\}}(-D_{\{1,2\},4}-\Delta_{\{1,2\},3}))=H^0(v^*(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,\{1,2\}}(-D_{\{1,2\},4}-\Delta_{\{1,2\},3}))(-p_1-p_2)).\tag{5.7}$$

Como ocorre (5.1), segue que

$$h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,1}(-D_{1,4}-\Delta_{1,3}-p_1))=h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,1}(-D_{1,4}-\Delta_{1,3}))-1.\tag{5.8}$$

Da sequência exata

$$0 \to L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,2}(-D_{2,3}-\Delta_{2,\{1,3\}}) \to v^*(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,\{1,2\}}(-D_{\{1,2\},4}-\Delta_{\{1,2\},3}))(-p_1-p_2) \to L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,1}(-D_{1,4}-\Delta_{1,3}-p_1) \to 0$$

e das Equações (5.6) e (5.8) temos que

$$h^0(v^*(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,\{1,2\}}(-D_{\{1,2\},4} - \Delta_{\{1,2\},3}))(-p_1 - p_2)) \leq h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,1}(-D_{1,4} - \Delta_{1,3})) - 1.$$

Se $h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,1}(-D_{1,4} - \Delta_{1,3})) - 1 = 0$, usamos (5.7) para obter o resultado desejado. Se

$$h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,1}(-D_{1,4} - \Delta_{1,3})) - 1 > 0$$

e para todo $q \in |\Delta_{1,2} - p|$ existir uma seção

$$s \in H^0(v^*(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,\{1,2\}}(-D_{\{1,2\},4} - \Delta_{\{1,2\},3}))(-p_1 - p_2))$$

tal que $s(q) \neq 0$, repetimos o procedimento do parágrafo anterior com o feixe

$$v^*(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,\{1,2\}}(-D_{\{1,2\},4} - \Delta_{\{1,2\},3}))(-p_1 - p_2).$$

Caso $h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,1}(-D_{1,4} - \Delta_{1,3})) - 1 > 0$ e existir $q \in |\Delta_{1,2} - p|$ tal que $s(q) = 0$ para toda seção

$$s \in H^0(v^*(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,\{1,2\}}(-D_{\{1,2\},4} - \Delta_{\{1,2\},3}))(-p_1 - p_2)),$$

repetimos o procedimento deste parágrafo. Observe que, por hipótese,

$$h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,1}(-D_{1,4} - \Delta_{1,3})) < \delta_{1,2}.$$

Portanto, repetindo no máximo $\delta_{1,2}$ vezes obtemos

$$H^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,\{1,2\}}(-D_{\{1,2\},4} - \Delta_{\{1,2\},3})) = 0.$$

Passo 3: Mostraremos que $H^0(L_{\pi,\{4\}^c}^{\underline{n}^{(4)}}(-D))=0$*.* Recorde do *Passo 1* que $f:\tilde{C}_{\{4\}^c}\longrightarrow C_{\{4\}^c}$ é a normalização de $C_{\{4\}^c}$ em $Q=\{q^1,\ldots,q^k\}$. Segue dos *Passos 1* e *2* e da sequência exata

$$0\to L_{\pi,\{1,2\}}^{\underline{n}^{(4)}}(-D_{\{1,2\},4}-\Delta_{\{1,2\},3})\to f^*(L_{\pi,\{4\}^c}^{\underline{n}^{(4)}}(-D))(-\sum_{i=1}^{k}(q_{\{1,2\}}^i+q_3^i))\to L_{\pi,3}^{\underline{n}^{(4)}}(-D_{3,4}-\sum_{i=1}^{k}q_i^3)\to 0$$

que $H^0(f^*(L_{\pi,\{4\}^c}^{\underline{n}^{(4)}}(-D))(-\sum_{i=1}^k(q_{\{1,2\}}^i+q_3^i)))=0$. Como

$$H^0(L_{\pi,\{4\}^c}^{\underline{n}^{(4)}}(-D))=H^0(f^*(L_{\pi,\{4\}^c}^{\underline{n}^{(4)}}(-D))(-\sum_{i=1}^{k}(q_{\{1,2\}}^i+q_3^i))),$$

obtemos o resultado desejado.□

Observação 5.4. Seja C uma curva com três componentes irredutíveis e $\pi:S\longrightarrow B$ uma suavização de C ao longo de uma direção geral. Fixe $l\in\{1,2,3\}$. Faça $\{l\}^c=\{i,j\}$. Recorde a Proposição 4.2. Uma hipótese equivalente à da Proposição 5.3 para uma curva com três componentes seria

$$0\le h^0(L_{\pi,k}^{\underline{n}^{(l)}})-\text{grau}(D_{k,l})\le\delta_{k,\{k,l\}^c}=\delta_{i,j}\tag{5.9}$$

para $k=i,j$. De acordo com a Equação (4.3), se $0\le h^0(L_{\pi,k}^{\underline{n}^{(l)}})-\text{grau}(D_{k,l})$, para todo $k\in\{l\}^c$, então $h^0(L_{\pi,k}^{\underline{n}^{(l)}})-\text{grau}(D_{k,l})\le\delta_{i,j}$ para $k=i,j$. Portanto, para curvas com três componentes, não é necessário incluir a segunda desigualdade em (5.9) como uma hipótese.

Exemplo 5.5. Seja C uma curva nodal com quatro componentes irredutíveis com gêneros $g_1=17$, $g_2=90$, $g_3=34$ e $g_4=18$. Suponha que $\delta_{1,2}=\delta_{1,3}=1$, $\delta_{1,4}=\delta_{2,3}=2$ e $\delta_{2,4}=\delta_{3,4}=3$. O gênero de C é $g=168$ e $\underline{e}^{(4)}=(20,95,39,-142)$. A 4-upla associada a $\underline{e}^{(4)}$ é $\underline{n}^{(4)}=(14,23,16,0)$. Calculando as dimensões dos espaços de seções dos feixes canônicos obtemos $h^0(L_{\pi,\{4\}^c}^{\underline{n}^{(4)}})=6$, $h^0(L_{\pi,1}^{\underline{n}^{(4)}})=3$, $h^0(L_{\pi,2}^{\underline{n}^{(4)}})=4$ e $h^0(L_{\pi,3}^{\underline{n}^{(4)}})=3$. Observe que $h^0(L_{\pi,i}^{\underline{n}^{(4)}})\ge\delta_{i,4}$ para $i=1,2,3$, logo C_4 não é uma componente especial de C. Tome

$D := \Delta_{2,4} + \Delta_{3,4}$. Então o $\operatorname{grau}(D) = 6$ e $0 \leq h^0(L_{\pi,k}^{\underline{n}^{(4)}}) - \operatorname{grau}(D_{k,4}) \leq \delta_{k,\{k,4\}^c}$ para $k = 2, 3$. No entanto, $h^0(L_{\pi,1}^{\underline{n}^{(4)}}) - \operatorname{grau}(D_{1,4}) > \delta_{1,\{2,3\}}$. Portanto a curva C não satisfaz as hipóteses da Proposição 5.3

Fixe $l \in \{1, 2, 3, 4\}$. Recorde da Seção 3.3 que $T_l = H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_l})$. A ação de T_l em $H^0(\mathcal{O}_{\Delta_l})$ induz uma ação de T_l em G_l. A órbita de W_l em G_l é $\mathbb{O}_l$. Existe um isomorfismo

$$T_l/\operatorname{Est}_{\phi_l}(W_l) \longrightarrow \mathbb{O}_l,$$

onde $\operatorname{Est}_{\phi_l}(W_l)$ é o estabilizador de W_l em G_l.

Suponha que C_l seja uma componente desbalanceada de C e que não seja uma componente especial de C. Das Proposições 3.8 e 5.3, concluímos que

$$P_D \neq 0 \text{ se, e somente se, } 0 \leq h^0(L_{\pi,i}^{\underline{n}^{(l)}}) - \operatorname{grau}(D_{i,l}) \leq \delta_{i,\{i,l\}^c} \tag{5.10}$$

para todo $i \in \{l\}^c$. Defina

$$\chi_i^l := \text{mín}\{h^0(L_{\pi,i}^{\underline{n}^{(l)}}), \delta_{i,l}\},$$

e

$$\sigma_i^l := \text{máx}\{0, h^0(L_{\pi,i}^{\underline{n}^{(l)}}) - \delta_{i,\{i,l\}^c}\}$$

para $i \in \{l\}^c$.

Proposição 5.6. *Seja C uma curva nodal com quatro componentes irredutíveis. Fixe $l \in \{1, 2, 3, 4\}$. Suponha que C_l seja uma componente desbalanceada de C e que não seja uma componente especial de C. Então:*

1. $\sum_{i \in \{l\}^c} \chi_i^l \geq h^0(L_{\pi,\{l\}^c}^{\underline{n}^{(l)}})$;

2. $\sigma_i^l \leq \chi_i^l$ *para todo* $i \in \{l\}^c$;

3. *Se* $\sigma_i^l = \chi_i^l$ *para algum* $i \in \{l\}^c$*, então* $\chi_i^l = \delta_{i,l}$.

Demonstração: Sem perda de generalidade, podemos supor $l = 4$.

1. Se $\chi_i^4 = \delta_{i,4}$ para $i = 1,2,3$, então, como o mapa $e_{l,\{l\}^c}$ é injetivo, a desigualdade é válida. Se $\chi_i^4 = h^0(L_{\pi,i}^{\underline{n}^{(4)}})$ para $i = 1,2,3$, é claro que a desigualdade também é válida. Agora, faça $\chi_1^4 = h^0(L_{\pi,1}^{\underline{n}^{(4)}})$ e $\chi_i^4 = \delta_{i,4}$ para $i = 2,3$. Suponha, por absurdo, que $\sum_{k=1}^3 \chi_k^4 < h^0(L_{\pi,\{4\}^c}^{\underline{n}^{(4)}})$. Vamos analisar as coordenadas de Plücker de W_4 neste caso. Seja $D = D_{1,4} + D_{2,4} + D_{3,4}$ um divisor efetivo tal que $0 \leq D_{k,4} \leq \Delta_{k,4}$, para $k = 1,2,3$, e grau$(D) = m_4$. Pela hipótese de absurdo temos que
$$h^0(L_{\pi,1}^{\underline{n}^{(4)}}) + \delta_{2,4} + \delta_{3,4} < \sum_{k=1}^{3} \mathrm{grau}(D_{k,4}).$$
Sabemos que grau$(D_{k,4}) \leq \delta_{k,4}$ para $k = 2,3$. Logo, chegamos a $h^0(L_{\pi,1}^{\underline{n}^{(4)}}) < \mathrm{grau}(D_{1,4})$ e concluímos, por (5.10), que $P_D = 0$. Como isto é válido para todo divisor D, obtemos todas as coordenadas de Plücker do espaço W_4 nulas, o que é um absurdo. Se supomos $\chi_i^4 = h^0(L_{\pi,i}^{\underline{n}^{(4)}})$ para $i = 1,2$ e $\chi_3^4 = \delta_{3,4}$, chegaremos a um absurdo de forma análoga.

2. Se $\sigma_i^4 > \chi_i^4$ para algum $i \in \{1,2,3\}$, então não existe divisor efetivo $D = D_{1,4} + D_{2,4} + D_{3,4}$, com $0 \leq D_{i,4} \leq \Delta_{i,4}$, tal que
$$\sigma_i^4 \leq \mathrm{grau}(D_{i,4}) \leq \chi_i^4$$
e portanto não existe $D_{i,4}$ com
$$0 \leq h^0(L_{\pi,i}^{\underline{n}^{(4)}}) - \mathrm{grau}(D_{i,4}) \leq \delta_{i,\{i,4\}^c}.$$
Por (5.10), teríamos $P_D = 0$ para todo divisor D, o que é um absurdo.

3. Sabemos que $\mathcal{L}_{\pi}^{\underline{n}^{(4)}}$ é o feixe canônico de π com foco em C_4. Logo $h^0(L_{\pi,i}^{\underline{n}^{(4)}}) > 0$ e temos que $\chi_i^4 \geq 1$ para $i = 1, 2, 3$. Portanto, se $\sigma_i^4 = \chi_i^4$, devemos ter $\sigma_i^4 = h^0(L_{\pi,i}^{\underline{n}^{(4)}}) - \delta_{i,\{i,4\}^c} > 0$. Se $\chi_i^4 = h^0(L_{\pi,i}^{\underline{n}^{(4)}})$, então chegamos a

$$h^0(L_{\pi,i}^{\underline{n}^{(4)}}) - \delta_{i,\{i,4\}^c} = h^0(L_{\pi,i}^{\underline{n}^{(4)}})$$

de onde obtemos $\delta_{i,\{i,4\}^c} = 0$, o que é um absurdo. Concluímos que se $\sigma_i^4 = \chi_i^4$, então $\chi_i^4 = \delta_{i,4}$.$\square$

De acordo com (5.10), se $D = \sum_{i \in \{l\}^c} D_{i,l}$, onde grau$(D_{i,l}) = r_i$ e $\sum_{i \in \{l\}^c} r_i = m_l$, então

$$P_D \neq 0 \text{ se, e somente se, } \sigma_i^l \leq r_i \leq \chi_i^l \text{ para todo } k \in \{l\}^c. \tag{5.11}$$

No seguinte Lema, fixados $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, denotamos por $\underline{t}_{ij}$ um elemento de $H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_{i,j}})$. Recorde que d_{ij} é o mapa diagonal

$$\begin{array}{rccc} d_{ij}: & \mathbb{K}^* & \longrightarrow & H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_{i,j}}) \\ & a & \longmapsto & (a, \dots, a). \end{array}$$

Lema 5.7. *Seja C uma curva nodal com quatro componentes. Fixe $l \in \{1, 2, 3, 4\}$. Suponha que C_l seja uma componente desbalanceada de C. Suponha que C_l não seja uma componente especial de C. Faça $\{l\}^c = \{i, j, k\}$. O estabilizador de W_l sob a ação de ϕ_l é o toro dado em cada caso abaixo:*

1. *Se $\chi_i^l + \chi_j^l + \chi_k^l > m_l$, então:*

   (a) *se $\sigma_s^l < \chi_s^l$ para $s = i, j, k$, então*

$$Est_{\phi_l}(W_l) = \{(d_{il}(a), d_{jl}(a), d_{kl}(a)) \in H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_{i,l}}) \oplus H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_{j,l}}) \oplus H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_{k,l}}) | a \in \mathbb{K}^*\};$$

(b) *se* $\sigma_i^l = \chi_i^l$ *e* $\sigma_s^l < \chi_s^l$ *para* $s = j, k$, *então*

$$Est_{\phi_l}(W_l) = \{(\underline{t}_{il}, d_{jl}(a), d_{kl}(a)) \in H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_{i,l}}) \oplus H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_{j,l}}) \oplus H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_{k,l}}) | a \in \mathbb{K}^*\};$$

(c) *se* $\sigma_s^l = \chi_s^l$ *para* $s = i, j$ *e* $\sigma_k^l < \chi_k^l$, *então*

$$Est_{\phi_l}(W_l) = \{(\underline{t}_{il}, \underline{t}_{jl}, d_{kl}(a)) \in H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_{i,l}}) \oplus H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_{j,l}}) \oplus H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_{k,l}}) | a \in \mathbb{K}^*\}.$$

(d) *se* $\sigma_s^l = \chi_s^l$ *para todo* $s = i, j, k$, *então* $Est_{\phi_l}(W_l) = T_l$;

2. *Se* $\chi_i^l + \chi_j^l + \chi_k^l = m_l$, *então:*

(a) *se* $\chi_s^l = \delta_{s,l}$ *para todo* $s = i, j, k$, *então* $Est_{\phi_l}(W_l) = T_l$;

(b) *se* $\chi_i^l < \delta_{i,l}$ *e* $\chi_s^l = \delta_{s,l}$ *para* $s = j, k$, *então*

$$Est_{\phi_l}(W_l) = \{(d_{il}(a), \underline{t}_{jl}, \underline{t}_{kl}) \in H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_{i,l}}) \oplus H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_{j,l}}) \oplus H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_{k,l}}) | a \in \mathbb{K}^*\}.$$

(c) *se* $\chi_s^l < \delta_{s,l}$ *para* $s = i, j$ *e* $\chi_k^l = \delta_{k,l}$, *então*

$$Est_{\phi_l}(W_l) = \{(d_{il}(a), d_{jl}(b), \underline{t}_{kl}) \in H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_{i,l}}) \oplus H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_{j,l}}) \oplus H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_{k,l}}) | a, b \in \mathbb{K}^*\}.$$

(d) *se* $\chi_s^l < \delta_{s,l}$ *para todo* $s \in \{l\}^c$, *então*

$$Est_{\phi_l}(W_l) = \{(d_{il}(a), d_{jl}(b), d_{kl}(c)) \in H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_{i,l}}) \oplus H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_{j,l}}) \oplus H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_{k,l}}) | a, b, c \in \mathbb{K}^*\}.$$

Demonstração: A demonstração deste Lema é análoga à demonstração do Lema 4.5. Como exemplo, demonstraremos apenas o Caso (1b). Sem perda de generalidade, podemos supor $l = 4, i = 1, j = 2$ e $k = 3$. Fixe coordenadas

$$\underline{t}_{n4} := (c_{p_1^n}, \ldots, c_{p_{\delta_{n,4}}^n})$$

em $H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_{n,4}})$, para $n = 1, 2, 3$. De acordo com a Condição (5.11), temos que $P_D \neq 0$ para todo divisor

$$D = D_{1,4} + D_{2,4} + D_{3,4}$$

com $0 \leq D_{n,4} \leq \Delta_{n,4}$ e $\sigma^4_n \leq \mathrm{grau}(D_{n,4}) \leq \chi^4_n$, para $n = 1, 2, 3$. Como $\sigma^4_1 = \chi^4_1$, segue do Lema 5.6, item 3, que $\chi^4_1 = \delta_{1,4}$. Logo, para que $P_D \neq 0$, é necessário que

$$D_{1,4} = p^1_1 + \cdots + p^1_{\delta_{1,4}}.$$

A demonstração está dividida em 3 passos.

Passo 1: Mostraremos que $c_{p^2_1} = c_{p^2_2} = \cdots = c_{p^2_{\delta_{2,4}}}$. Faça $r_1 = \delta_{1,4}$. Como $\chi^4_1 + \chi^4_2 + \chi^4_3 > m_4$, existem $r_2 < \chi^4_2$ e $r_3 \leq \chi^4_3$ não-negativos tais que $r_1 + r_2 + r_3 = m_4$. Vamos considerar divisores com graus r_1, r_2 e r_3 tais que as coordenadas de Plücker de W_4 associada a eles é não-nula. Logo, o valor de r_1 não pode ser alterado. Considere os divisores

$$D_n := p^1_1 + \cdots + p^1_{r_1} + p^2_1 + \cdots + \widehat{p^2_n} + \cdots + p^2_{r_2+1} + p^3_1 + \cdots + p^3_{r_3}$$

onde $n \in \{1, \ldots, r_2 + 1\}$. Recorde o raciocínio usado para encontrar a Equação (3.10). Fixando $n_1, n_2 \in \{1, \ldots, r_2 + 1\}$ distintos, os divisores D_{n_1} e D_{n_2} geram a equação

$$c_{p^2_{n_2}} = c_{p^2_{n_1}}.$$

Variando n_1 e n_2 em $\{1, \ldots, r_2 + 1\}$ obtemos

$$c_{p^2_1} = c_{p^2_2} = \cdots = c_{p^2_{r_2+1}}.$$

Considere agora os divisores

$$E_n := p^1_1 + \cdots + p^1_{r_1} + p^2_1 + \cdots + p^2_{r_2-1} + p^2_n + p^3_1 + \cdots + p^3_{r_3},$$

para $n = r_2+2, \ldots, \delta_{2,4}$. Para $n_1, n_2 \in \{r_2+2, \ldots, \delta_{2,4}\}$ distintos, os divisores E_{n_1} e E_{n_2} geram a equação

$$c_{p^2_{n_1}} = c_{p^2_{n_2}}.$$

Variando n_1 e n_2 em $\{r_2+2, \ldots, \delta_{2,4}\}$ obtemos

$$c_{p^2_{r_2+2}} = \cdots = c_{p^2_{\delta_{2,4}}}.$$

Por fim, os divisores D_1 e $E_{\delta_{2,4}}$ geram a igualdade $c_{p^2_1} = c_{p^2_{\delta_{2,4}}}$. Concluímos que

$$c_{p^2_1} = c_{p^2_2} = \cdots = c_{p^2_{\delta_{2,4}}}.$$

Passo 2: Mostraremos que $c_{p^3_1} = c_{p^3_2} = \cdots = c_{p^3_{\delta_{3,4}}}$. Fixe $s_2 \leq \chi^4_2$ e $s_3 < \chi^4_3$ não-negativos tais que $r_1 + s_2 + s_3 = m_4$. Repita o procedimento descrito no *Passo 1*.

Passo 3: Mostraremos que $c_{p^2_1} = \cdots = c_{p^2_{\delta_{2,4}}} = c_{p^3_1} = \cdots = c_{p^3_{\delta_{3,4}}}$. Os divisores

$$p^1_1 + \cdots + p^1_{r_1} + p^2_1 + \cdots + p^2_{r_2} + p^3_1 + \cdots + p^3_{r_3}$$

e

$$p^1_1 + \cdots + p^1_{r_1} + p^2_1 + \cdots + p^2_{r_2+1} + p^3_1 + \cdots + p^3_{r_3-1}$$

geram a igualdade $c_{p^2_{r_2+1}} = c_{p^3_{r_3}}$. Usando esta equação e os resultados dos *Passos 1* e *2* obtemos o afirmado.$\square$

5.2 A variedade de sistemas canônicos limites com foco em uma componente

Recorde a notação usada nas Seções 1.3 e 3.2 e a Seção 4.2.

Teorema 5.8. *Seja C uma curva nodal com quatro componentes irredutíveis. Fixe $l \in \{1,2,3,4\}$. Assuma que as componentes de C se intersectem em pontos em $\underline{n}^{(l)}$-posição geral. Suponha que $\delta_{i,j} > 0$ para todo i e j em $\{1,2,3,4\}$ distintos. Suponha que C_l não é uma componente especial de C. Suponha que C_l seja uma componente desbalanceada de C. Então a variedade de sistemas canônicos limites de C com foco em C_l é um ponto ou birracional a um dos seguintes toros: $\mathbb{K}^{*\delta_l - 1}, \mathbb{K}^{*\delta_l - 3}, \mathbb{K}^{*\delta_{\{i,j\},l} - 1}, \mathbb{K}^{*\delta_{\{i,j\},l} - 2}$ ou $\mathbb{K}^{*\delta_{i,l} - 1}$ onde $i, j \in \{l\}^c$ são distintos.*

Demonstração: Tome uma suavização $\tilde{\pi} : S \longrightarrow B$ de C ao longo de uma direção geral. Sejam $\tilde{\xi}_{i,j} : L^{\underline{n}^{(l)}}_{\tilde{\pi},i}|_{\Delta_{i,j}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\Delta_{i,j}}$ as trivializações do feixe $L^{\underline{n}^{(l)}}_{\tilde{\pi}}$. Seja

$$L_k := \omega_k(\sum_{m \neq k}(1 + n^{(l)}_m - n^{(l)}_k)\Delta_{m,k})$$

para cada $k \in \{1,2,3,4\}$. Defina mapas $\xi_{i,j} : L_i|_{\Delta_{i,j}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\Delta_{i,j}}$ da seguinte forma

$$\xi_{i,j} := \begin{cases} t_{ij}\tilde{\xi}_{i,j} & \text{se } i < j \\ \tilde{\xi}_{i,j} & \text{se } i > j. \end{cases}$$

Seja L o feixe invertível em C obtido identificando L_1, L_2, L_3 e L_4 em Δ via $\xi_{i,j}$. Pela Proposição 4.7, existe uma suavização regular $\pi : S \longrightarrow B$ de C ao longo de uma direção geral tal que $\mathcal{L}^{\underline{n}^{(l)}}_{\pi}|_C \cong L$. Seja W_l a imagem do mapa $e_{l,\{l\}^c} : H^0(L^{\underline{n}^{(l)}}_{\tilde{\pi},\{l\}^c}) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_{\Delta_l})$. Considere a ação de T_l em $H^0(\mathcal{O}_{\Delta_l})$ e a ação induzida em G_l. Seja $\mathbb{O}_l$ a órbita de W_l em G_l. Pela discussão na Seção 3.3, sabemos que $T_l/\mathrm{Est}_{\phi_l}(W_l) \cong \mathbb{O}_l$. Pelo Lema 5.7, o estabilizador de W_l é isomorfo a $\mathbb{K}^*$, $\mathbb{K}^{*3}$, $\mathbb{K}^{*\delta_{\{i,j\},l}+1}$, $\mathbb{K}^{*\delta_{i,l}+1}$, $\mathbb{K}^{*\delta_{i,l}+2}$, onde $i, j \in \{l\}^c$, ou é o próprio T_l. Portanto $\mathbb{O}_l$ é isomorfo a um aberto de $\mathbb{K}^{*\delta_l - 1}, \mathbb{K}^{*\delta_l - 3}, \mathbb{K}^{*\delta_{k,l} - 1}, \mathbb{K}^{*\delta_{\{j,k\},l} - 1}, \mathbb{K}^{*\delta_{\{j,k\},l} - 2}$, onde $\{i,j,k\} = \{l\}^c$, ou é o ponto $\{H^0(\omega_l(\sum_{i \in \{l\}^c}(1 - n^{(l)}_i)\Delta_{i,l})\}.\Box$

5.3 Sobre outras generalizações

Acreditamos que os resultados discutidos nas Seções 4.2 e 5.2 podem ser estendidos para curvas nodais com m componentes irredutíveis, onde cada componente intersecta todas as outras. Como exemplificado na Seção 5.2, deve haver um aumento das dificuldades de ordem técnica. Já o cálculo combinatório presente nos Lemas 4.5 e 5.7 deve ser similar para o caso de m componentes, aumentando apenas o número de variáveis envolvidas e as possibilidades para o estabilizador em questão.

No Capítulo 2, temos a impressão que as Proposições 2.9 e 2.10 possam ser estendidas para homomorfismos $\lambda : \mathbb{Z}^m \longrightarrow \mathbb{Z}^m$ de posto máximo. Consequentemente, poderíamos generalizar o Teorema 2.11. Exemplos calculados com o auxílio do computador indicam que o determinante da matriz associada à curva C é sempre diferente de zero. Mais ainda, nos exemplos computados, $\det(M_C) < 0$ se m par e $\det(M_C) > 0$ para m ímpar. Portanto, uma generalização do Teorema 2.11 juntamente com uma extensão do Corolário 3.5 levaria a uma versão da Proposição 4.10 para curvas com m componentes. Então poderíamos encontrar a variedade dos sistemas canônicos limites para uma curva nodal com m componentes onde $\delta_{i,j} \neq 0$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ distintos.

Capítulo 6

Métodos computacionais e exemplos

6.1 Algoritmo

Nesta seção discutiremos o algoritmo que possibilita o cálculo das m-uplas $\underline{n}^{(l)}$, onde $l \in \{1, \ldots, m\}$. Elas foram definidas no Capítulo 1, Subseção 1.5.2. Sua existência é comprovada no Lema 1.16, demonstrado por E. Esteves e P. Salehyan em [7]. A prova deste Lema é essencialmente algorítmica. Tendo isto em mente, elaboramos um algoritmo baseado nos passos de sua demonstração.

Dados o número de componentes da curva C, uma componente fixa C_l, os gêneros das componentes irredutíveis de C e a quantidade de pontos $\delta_{i,j}$ na interseção das componentes, o algoritmo que se segue calcula a m-upla $\underline{n}^{(l)}$. O algoritmo é composto por dois procedimentos. O PROCEDIMENTO 1 calcula um candidato para a m-upla. O PROCEDIMENTO 2 executa uma série de testes na m-upla previamente calculada no PROCEDIMENTO 1 e, se for o caso, faz modificações. Interessante ressaltar que o algoritmo calcula uma m-upla mesmo que não haja a hipótese de que cada componente da curva C intersecta todas as outras.

PROCEDIMENTO 1

ENTRADA:

m =número de componentes irredutíveis da curva C

l = componente irredutível fixada

$g_1, \ldots, g_m$ gêneros das componentes irredutíveis de C

$d = (\delta_{i,j})_{m \times m}$ matriz simétrica, onde $\delta_{i,j} = \delta_{j,i}$ para qualquer $i < j$

SAÍDA:

m-upla $\underline{n}^{(l)}$

CONSTRUA V O CONJUNTO DE ÍNDICES DAS COMPONENTES IRREDUTÍVEIS DE C

ENCONTRE UMA PARTIÇÃO $I_1 \cup \cdots \cup I_q$ DE $V - \{l\}$ DA SEGUINTE FORMA:

$I_1 := \{j \in V - \{l\} | \delta_{j,l} > 0\}$

PARA $r > 1$: $I_r := \{j \in V - (\{l\} \cup I_1 \cup \cdots \cup I_{r-1}) | \delta_{j,i} > 0$ para algum $i \in I_r\}$

CALCULE A m-UPLA $\underline{e}^{(l)}$

S:=array(1..q)

PARA r DE 1 ATÉ q FAÇA

$S_r := -(\sum_{i=1}^{m} |e_i^{(l)}| + \sum_{i,j \in V} \delta_{i,j})^{q-r+1}$

FIM PARA

$\underline{n}^s$:=array(1..m,1..q)

PARA r DE 1 ATÉ q FAÇA

PARA i DE 1 ATÉ m FAÇA

SE $i \in I_r \cup \cdots \cup I_q$ ENTÃO $\underline{n}^s_{i,r} := S_r$ SENÃO $\underline{n}^s_{i,j} := 0$ FIM SE

FIM PARA

FIM PARA

$\underline{n}^s$:=array(1..m)

PARA i DE 1 ATÉ m FAÇA

PARA r DE 1 ATÉ q FAÇA

$\underline{n}^s_i := \underline{n}^s_i + \underline{n}^s_{i,r}$

FIM PARA

FIM PARA

$\underline{n}^{(l)}$:=array(1..m)

teste:=true

ENQUANTO teste FAÇA

teste:=false

$\underline{n}^{(l)}$:=PROCEDIMENTO 2 (V,m,l,$\underline{n}^s$, $\underline{e}^{(l)}$)

SE $\underline{n}^{(l)} \neq \underline{n}^s$ ENTÃO teste:=true FIM SE

$\underline{n}^s := \underline{n}^{(l)}$

FIM ENQUANTO

RETORNA $\underline{n}^{(l)}$

FIM PROCEDIMENTO 1

PROCEDIMENTO 2

ENTRADA:

V =conjunto de índices das componentes irredutíveis de C

m =número de componentes irredutíveis de C

l =componente irredutível fixada

$\underline{n}^{\underline{s}} = m$-upla candidata a $\underline{n}^{(l)}$

$\underline{e}^{(l)} = m$-upla $(e_1^{(l)}, \ldots, e_m^{(l)})$

SAÍDA:

m-upla $\underline{n}^{\underline{s}}$ após possíveis modificações

PARA CADA SUBCONJUNTO $I \subset \{1, \ldots, m\} - \{l\}$ COM $\#I = 1$ FAÇA

SE $\epsilon_I^{\underline{e},\underline{n}} \geq \delta_{I,I^c} - \gamma_I^{\beta,l,\underline{n}+\underline{h}^I} + 1$ ENTÃO $\underline{n}^{\underline{s}} := \underline{n}^{\underline{s}} + \underline{h}^I$ FIM SE

FIM PARA

PARA CADA SUBCONJUNTO $I \subset \{1, \ldots, m\} - \{l\}$ COM $\#I = 2$ FAÇA

SE $\epsilon_I^{\underline{e},\underline{n}} \geq \delta_{I,I^c} - \gamma_I^{\beta,l,\underline{n}+\underline{h}^I} + 1$ ENTÃO $\underline{n}^{\underline{s}} := \underline{n}^{\underline{s}} + \underline{h}^I$ FIM SE

FIM PARA

PARA CADA SUBCONJUNTO $I \subset \{1, \ldots, m\} - \{l\}$ COM $\#I = 3$ FAÇA

SE $\epsilon_I^{\underline{e},\underline{n}} \geq \delta_{I,I^c} - \gamma_I^{\beta,l,\underline{n}+\underline{h}^I} + 1$ ENTÃO $\underline{n}^{\underline{s}} := \underline{n}^{\underline{s}} + \underline{h}^I$ FIM SE

FIM PARA

$\vdots$

PARA CADA SUBCONJUNTO $I \subset \{1, \dots, m\} - \{l\}$ COM $\#I = m - 1$ FAÇA

SE $\epsilon_I^{e,\underline{n}} \geq \delta_{I,I^c} - \gamma_I^{\beta,l,\underline{n}+\underline{h}^I} + 1$ ENTÃO $\underline{n}^s := \underline{n}^s + \underline{h}^I$ FIM SE

FIM PARA

FIM PROCEDIMENTO 2

Uma implementação deste algoritmo usando MAPLE está no Apêndice. Usando este programa foi possível calcular vários exemplos, os quais são apresentados na Seção 6.2.

6.2 Exemplos

6.2.1 Curvas com três componentes

Nos exemplos desta seção, C é uma curva nodal com componentes irredutíveis C_1, C_2 e C_3. Denotaremos por g_1, g_2 e g_3, respectivamente, os gêneros das componentes. Assuma que as componentes de C se intersectem em pontos em $\underline{n}^{(l)}$-posição geral, para $l = 1, 2, 3$. O número $\delta_{i,j}$, para i e j em $\{1, 2, 3\}$ distintos, é o grau do divisor de Weil reduzido cujo suporte é $C_i \cap C_j$. O mapa $\pi : S \longrightarrow B$ é uma suavização regular de C ao longo de uma direção geral. Recorde da Seção 4.1 que $\chi_i^l := \text{mín}\{h^0(L_{\pi,i}^{\underline{n}^{(l)}}), \delta_{i,l}\}$, para $i, l \in \{1, 2, 3\}$ distintos. Para $l = 1, 2, 3$, seja W_l a imagem do mapa

$$e_{l,\{l\}^c} : H^0(L_{\pi,\{l\}^c}^{\underline{n}^{(l)}}) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_{\Delta_l}),$$

definido na Seção 3.2, e ϕ_l a ação de $H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_l})$ na Grassmanniana $\mathrm{Grass}_{m_l}(H^0(\mathcal{O}_{\Delta_l}))$, definida na Seção 3.3. A variedade de sistemas canônicos limites com foco em C_l é denotada $\mathbb{V}_l$ e a variedade de sistemas canônicos limites de C é $\mathbb{V}$. O símbolo $' \cong '$ denota equivalência birracional.

Exemplo 6.1. Seja C uma curva nodal com três componentes irredutíveis cujos gêneros são $g_1 = 93, g_2 = 45$ e $g_3 = 96$. Suponha que $\delta_{1,2} = 6, \delta_{1,3} = 34$ e $\delta_{2,3} = 44$. Usando o algoritmo apresentado na Seção 6.1, obtemos $\underline{n}^{(1)} = (0, 6, 5)$, $\underline{n}^{(2)} = (7, 0, 5)$ e $\underline{n}^{(3)} = (3, 2, 0)$. Usando Riemann-Roch, encontramos $h^0(L^{\underline{n}^{(1)}}_{\pi,2}) = 15$, $h^0(L^{\underline{n}^{(1)}}_{\pi,3}) = 47$, $h^0(L^{\underline{n}^{(2)}}_{\pi,1}) = 23$, $h^0(L^{\underline{n}^{(2)}}_{\pi,3}) = 21$, $h^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,1}) = 25$ e $h^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,2}) = 12$. Observe que $\chi^1_i = \delta_{1,i}$, para $i = 2, 3$, $\chi^2_1 = \delta_{1,2}$, $\chi^2_3 = h^0(L^{\underline{n}^{(2)}}_{\pi,3})$ e $\chi^3_i = h^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,i})$, para $i = 1, 2$. Usando a fórmula encontrada na Proposição 3.7, obtemos $h^0(L^{\underline{n}^{(1)}}_{\pi,\{1\}^c}) = 18$, $h^0(L^{\underline{n}^{(2)}}_{\pi,\{2\}^c}) = 10$ e $h^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,\{3\}^c}) = 31$. Observe que, para $l = 1, 2, 3$ temos $\chi^l_i + \chi^l_j > h^0(L^{\underline{n}^{(l)}}_{\pi,\{l\}^c})$, onde $\{l\}^c = \{i, j\}$. De acordo com o Lema 4.5, temos que $\mathrm{Est}_{\phi_l}(W_l) = \mathbb{K}^*$ para $l = 1, 2, 3$. Portanto, de acordo com o Teorema 4.9, temos que $\mathbb{V}_l \cong \mathbb{K}^{*\delta_l - 1}$ para $l = 1, 2, 3$. Além disso, este é um exemplo do *Caso 7* do Teorema 4.12. Concluímos que $\mathbb{V} \cong \mathbb{K}^{*\delta-1}$.

Exemplo 6.2. Seja C uma curva nodal com três componentes irredutíveis cujos gêneros são $g_1 = 15, g_2 = 8$ e $g_3 = 10$. Suponha que $\delta_{1,2} = 3$ e $\delta_{1,3} = \delta_{2,3} = 1$. Usando o algoritmo apresentado na Seção 6.1, obtemos $\underline{n}^{(1)} = (0, 4, 7)$, $\underline{n}^{(2)} = (6, 0, 8)$ e $\underline{n}^{(3)} = (13, 12, 0)$. Usando Riemann-Roch, encontramos $h^0(L^{\underline{n}^{(1)}}_{\pi,2}) = h^0(L^{\underline{n}^{(1)}}_{\pi,3}) = h^0(L^{\underline{n}^{(2)}}_{\pi,1}) = h^0(L^{\underline{n}^{(2)}}_{\pi,3}) = 2$, $h^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,1}) = 3$ e $h^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,2}) = 2$. Observe que $\chi^l_3 = \delta_{l,3}$, para $l = 1, 2$, $\chi^1_2 = h^0(L^{\underline{n}^{(1)}}_{\pi,2})$, $\chi^2_1 = h^0(L^{\underline{n}^{(2)}}_{\pi,1})$, e $\chi^3_i = \delta_{i,3}$, para $i = 1, 2$. Usando a fórmula encontrada na Proposição 3.7, obtemos

$$h^0(L^{\underline{n}^{(1)}}_{\pi,\{1\}^c}) = h^0(L^{\underline{n}^{(2)}}_{\pi,\{2\}^c}) = 3$$

e $h^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,\{3\}^c}) = 2$. Observe que $\chi^1_2 + \chi^1_3 = h^0(L^{\underline{n}^{(1)}}_{\pi,\{1\}^c})$. Além disso, $\chi^1_2 < \delta_{1,2}$ e $\chi^1_3 = \delta_{1,3}$. Pelo Lema 4.5, $\mathrm{Est}_{\phi_1}(W_1) = \mathbb{K}^{*\delta_{1,3}+1}$ e segue do Teorema 4.9 que $\mathbb{V}_1 \cong \mathbb{K}^{*\delta_{1,2}-1}$. Para a componente C_2 temos $\chi^2_1 + \chi^2_3 = h^0(L^{\underline{n}^{(2)}}_{\pi,\{2\}^c})$, $\chi^2_1 < \delta_{1,2}$ e $\chi^2_3 = \delta_{2,3}$, portanto $\mathrm{Est}_{\phi_2}(W_2) = \mathbb{K}^{*\delta_{2,3}+1}$ e $\mathbb{V}_2 \cong \mathbb{K}^{*\delta_{1,2}-1}$. Já para a componente C_3 temos $\chi^3_1 + \chi^3_2 = h^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,\{3\}^c})$. Como $\chi^3_i = \delta_{i,3}$ para $i = 1, 2$, segue que $\mathrm{Est}_{\phi_3}(W_3) = H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_3})$ e $\mathbb{V}_3 = \{H^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,3})\}$. Este exemplo corresponde ao *Caso 2* do Teorema 4.12 e portanto $\mathbb{V} \cong \mathbb{K}^{*\delta_{1,2}-1}$.

Exemplo 6.3. Seja C uma curva nodal com três componentes irredutíveis cujos gêneros são $g_1 = 7, g_2 = 10$ e $g_3 = 6$. Suponha que $\delta_{1,2} = \delta_{2,3} = 2$ e $\delta_{1,3} = 1$. Usando o algoritmo apresentado na Seção 6.1, obtemos $\underline{n}^{(1)} = (0, 6, 6)$, $\underline{n}^{(2)} = (4, 0, 3)$ e $\underline{n}^{(3)} = (7, 6, 0)$. Usando Riemann-Roch, encontramos $h^0(L^{\underline{n}^{(1)}}_{\pi,2}) = h^0(L^{\underline{n}^{(2)}}_{\pi,1}) = h^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,1}) = 1$, $h^0(L^{\underline{n}^{(1)}}_{\pi,3}) = 2$ e $h^0(L^{\underline{n}^{(2)}}_{\pi,3}) = h^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,2}) = 3$. Observe que $\chi^l_3 = \delta_{l,3}$, para $l = 1, 2$, $\chi^1_2 = h^0(L^{\underline{n}^{(1)}}_{\pi,2})$, $\chi^2_1 = h^0(L^{\underline{n}^{(2)}}_{\pi,1})$, e $\chi^3_i = \delta_{i,3}$, para $i = 1, 2$. Usando a fórmula encontrada na Proposição 3.7, obtemos

$$h^0(L^{\underline{n}^{(1)}}_{\pi,\{1\}^c}) = h^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,\{3\}^c}) = 2$$

e $h^0(L^{\underline{n}^{(2)}}_{\pi,\{2\}^c}) = 3$. Observe que $\chi^1_2 + \chi^1_3 = h^0(L^{\underline{n}^{(1)}}_{\pi,\{1\}^c})$. Além disso, $\chi^1_2 < \delta_{1,2}$ e $\chi^1_3 = \delta_{1,3}$. Pelo Lema 4.5 temos que $\mathrm{Est}_{\phi_1}(W_1) = \mathbb{K}^{*\delta_{1,3}+1}$. Como $\delta_{2,3} \leq 2$, podemos usar o Teorema 4.9 e segue que $\mathbb{V}_1 \cong \mathbb{K}^{*\delta_{1,2}-1}$. Para a componente C_2 temos $\chi^2_1 + \chi^2_3 = h^0(L^{\underline{n}^{(2)}}_{\pi,\{2\}^c})$, $\chi^2_1 < \delta_{1,2}$ e $\chi^2_3 = \delta_{2,3}$, portanto $\mathrm{Est}_{\phi_2}(W_2) = \mathbb{K}^{*\delta_{2,3}+1}$ e $\mathbb{V}_2 \cong \mathbb{K}^{*\delta_{1,2}-1}$. Já para a componente C_3 temos $\chi^3_1 + \chi^3_2 > h^0(L^{\underline{n}^{(3)}}_{\pi,\{3\}^c})$, logo $\mathrm{Est}_{\phi_3}(W_3) = \mathbb{K}^*$ e $\mathbb{V}_3 = \mathbb{K}^{*\delta_3-1}$. Este exemplo corresponde ao *Caso 4* do Teorema 4.12 e portanto $\mathbb{V} \cong \mathbb{K}^{*\delta_2-1}$.

Exemplo 6.4. Seja C uma curva nodal com três componentes irredutíveis cujos gêneros são $g_1 = g_2 = g_3 = 10$. Suponha que $\delta_{1,2} = 1$ e $\delta_{1,3} = \delta_{2,3} = 2$. Usando o algoritmo obtemos $\underline{n}^{(1)} = (0, 8, 7)$, $\underline{n}^{(2)} = (8, 0, 7)$ e $\underline{n}^{(3)} = (5, 5, 0)$. Usando Riemann-Roch, encontramos

$h^0(L_{\pi,2}^{\underline{n}^{(1)}}) = h^0(L_{\pi,1}^{\underline{n}^{(2)}}) = 3,\ h^0(L_{\pi,3}^{\underline{n}^{(1)}}) = h^0(L_{\pi,3}^{\underline{n}^{(2)}}) = 1$ e $h^0(L_{\pi,i}^{\underline{n}^{(3)}}) = 2$ para $i = 1,2$. Observe que $\chi_3^l = h^0(L_{\pi,3}^{\underline{n}^{(l)}})$, para $l = 1,2$, $\chi_2^1 = \chi_1^2 = \delta_{1,2}$ e $\chi_i^3 = \delta_{i,3}$, para $i = 1,2$. Usando a fórmula encontrada na Proposição 3.7, obtemos

$$h^0(L_{\pi,\{1\}^c}^{\underline{n}^{(1)}}) = h^0(L_{\pi,\{2\}^c}^{\underline{n}^{(2)}}) = 2$$

e $h^0(L_{\pi,\{3\}^c}^{\underline{n}^{(3)}}) = 4$. Observe que $\chi_2^1 + \chi_3^1 = h^0(L_{\pi,\{1\}^c}^{\underline{n}^{(1)}})$. Além disso, $\chi_2^1 = \delta_{1,2}$ e $\chi_3^1 < \delta_{1,3}$. Pelo Lema 4.5, $\mathrm{Est}_{\phi_1}(W_1) = \mathbb{K}^{*\delta_{1,2}+1}$. Como $\delta_{1,2} \leq 2$, podemos usar o Teorema 4.9 e obtemos $\mathbb{V}_1 \cong \mathbb{K}^{*\delta_{1,3}-1}$. Para a componente C_2 temos $\chi_1^2 + \chi_3^2 = h^0(L_{\pi,\{2\}^c}^{\underline{n}^{(2)}})$, $\chi_1^2 = \delta_{1,2}$ e $\chi_3^2 < \delta_{2,3}$, portanto $\mathrm{Est}_{\phi_2}(W_2) = \mathbb{K}^{*\delta_{1,2}+1}$ e $\mathbb{V}_2 \cong \mathbb{K}^{*\delta_{2,3}-1}$. Já para a componente C_3 temos $\chi_1^3 + \chi_2^3 = h^0(L_{\pi,\{3\}^c}^{\underline{n}^{(3)}})$ onde $\chi_i^3 = \delta_{i,3}$ para $i = 1,2$. Então $\mathrm{Est}_{\phi_3}(W_3) = H^0(\mathcal{O}_{\Delta_3}^*)$ e $\mathbb{V}_3 = \{H^0(L_{\pi,3}^{\underline{n}^{(3)}})\}$. Recorde a notação usada na demonstração do Teorema 4.12. Segundo ela, $\Upsilon := \bigoplus_{\substack{i,j\in\{1,2,3\}\\ i<j}} H^0(\mathcal{O}_{\Delta_{i,j}})^{\oplus 3}$. Fixe coordenadas $(\underline{t}_{12}, \underline{t}_{13}, \underline{t}_{23})$ em Υ, onde $\underline{t}_{ij} = (\underline{t}_{ij}^{(1)}, \underline{t}_{ij}^{(2)}, \underline{t}_{ij}^{(3)})$. Para $i,j \in \{1,2,3\}$ com $i<j$

$$\mathbb{T}_{ij} = \{\underline{t}_{ij} \in H^0(\mathcal{O}_{\Delta_{i,j}}^*)^{\oplus 3} | \underline{t}_{ij}^{w_0} = 1 \text{ e } \underline{t}_{ij}^{w_k} = 1, \text{ onde } \{i,j\}^c = \{k\}\},$$

onde w_0, w_1, w_2 e $w_3 \in \mathbb{Z}^3$ são tais que $H_{\{i\}^c} = \mathbb{Z}w_0 \oplus \mathbb{Z}w_i$. Faça

$$\mathbb{T} := \mathbb{T}_{12} \oplus \mathbb{T}_{13} \oplus \mathbb{T}_{23}.$$

Recorde que $G^{(l)} = \mathrm{Grass}_{m_l}(H^0(\mathcal{O}_\Delta))$ para $l = 1,2,3$, e $G = G^{(1)} \times G^{(2)} \times G^{(3)}$. Temos que $(W_1, W_2, W_3) \in G$. Considere a ação $\phi : \mathbb{T} \times G \longrightarrow G$. Seja $\mathbb{O}$ a órbita de (W_1, W_2, W_3) em G e $\mathrm{Est}(W_1, W_2, W_3)$ o estabilizador da ação ϕ. Temos o isomorfismo

$$\mathbb{T}/\mathrm{Est}(W_1, W_2, W_3) \longrightarrow \mathbb{O}.$$

Faça $Z = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$ onde

$$E_1 = \{(\underline{t}_{12}^{(1)}, d_{13}(a), \underline{t}_{23}^{(1)}) \in H^0(\mathcal{O}_{\Delta_{1,2}}^*) \oplus H^0(\mathcal{O}_{\Delta_{1,3}}^*) \oplus H^0(\mathcal{O}_{\Delta_{2,3}}^*) \,|\, a \in \mathbb{K}^*\},$$

$$E_2 = \{(\underline{t}_{12}^{(2)}, \underline{t}_{13}^{(2)}, d_{23}(b)) \in H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_{1,2}}) \oplus H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_{1,3}}) \oplus H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_{2,3}}) \,|\, b \in \mathbb{K}^*\}$$

e $E_3 = H^0(\mathcal{O}^*_\Delta)$. Como na demonstração do Teorema 4.12, $\mathrm{Est}(W_1, W_2, W_3) = \mathbb{T} \cap Z$. Para encontrar $\mathbb{T} \cap Z$ chegamos a dois sistemas: em um o valor de a determina os valores de $\underline{t}_{12}^{(1)}$ e $\underline{t}_{23}^{(1)}$; no outro o valor de b determina nos valores de $\underline{t}_{12}^{(2)}$ e $\underline{t}_{13}^{(2)}$. Então $\mathbb{T} \cap Z = \mathbb{T}_{12} \oplus \mathbb{K}^* \oplus \mathbb{K}^*$ e concluímos que a órbita $\mathbb{O}$ é isomorfa a

$$\mathbb{T}/(\mathbb{T}_{12} \oplus \mathbb{K}^* \oplus \mathbb{K}^*).$$

Logo $\mathbb{V} \cong \mathbb{K}^{*\delta_3 - 2}$.

Exemplo 6.5. Seja C uma curva nodal com três componentes irredutíveis cujos gêneros são $g_1 = 8, g_2 = 10, g_3 = 3$. Suponha que $\delta_{1,2} = \delta_{1,3} = 1$ e $\delta_{2,3} = 3$. Neste caso encontramos $\underline{n}^{(1)} = (0, 8, 7), \underline{n}^{(2)} = (5, 0, 2)$ e $\underline{n}^{(3)} = (6, 4, 0)$. Calculando as dimensões dos espaços de seções chegamos a

$$h^0(L_{\pi,2}^{\underline{n}^{(1)}}) = h^0(L_{\pi,3}^{\underline{n}^{(2)}}) = h^0(L_{\pi,2}^{\underline{n}^{(3)}}) = 3$$

e

$$h^0(L_{\pi,3}^{\underline{n}^{(1)}}) = h^0(L_{\pi,1}^{\underline{n}^{(2)}}) = h^0(L_{\pi,1}^{\underline{n}^{(3)}}) = 2.$$

Usando a fórmula encontrada na Proposição 3.7, obtemos $h^0(L_{\pi,\{1\}^c}^{\underline{n}^{(1)}}) = 2$, $h^0(L_{\pi,\{3\}^c}^{\underline{n}^{(3)}}) = 4$ e $h^0(L_{\pi,\{2\}^c}^{\underline{n}^{(2)}}) = 4$. Observe que $\chi_i^l + \chi_j^l = h^0(L_{\pi,\{l\}^c}^{\underline{n}^{(l)}})$ para qualquer $l \in \{1, 2, 3\}$, onde $\{l\}^c = \{i, j\}$. Além disso, $\chi_i^l = \delta_{i,l}$ para todo par $i, l \in \{1, 2, 3\}$ de elementos distintos. Este exemplo corresponde ao *Caso 1* do Teorema 4.12. Portanto $\mathbb{V}_l = \{H^0(\omega_l(\sum_{i \neq l}(1 - n_i^{(l)})\Delta_{i,l}))\}$ para $l = 1, 2, 3$ e $\mathbb{V} = \{(H^0(L_{\pi,1}^{\underline{n}^{(1)}}), H^0(L_{\pi,2}^{\underline{n}^{(2)}}), H^0(L_{\pi,3}^{\underline{n}^{(3)}})\}$.

Exemplo 6.6. Seja C uma curva nodal com três componentes irredutíveis cujos gêneros são $g_1 = 4, g_2 = 2$ e $g_3 = 3$. Suponha que $\delta_{1,2} = 3, \delta_{1,3} = 5$ e $\delta_{2,3} = 1$. Neste caso encontramos

$\underline{n}^{(1)} = (0,1,1), \underline{n}^{(2)} = (3,0,3)$ e $\underline{n}^{(3)} = (2,2,0)$, então todas as componentes irredutíveis da curva C são balanceadas. Como $\delta_{2,3} \leq 2$, podemos usar o Teorema 4.9 para encontrar a variedade de sistemas canônicos limites com foco em C_1. Calculando as dimensões dos espaços de seções chegamos a $h^0(L^{\underline{n}^{(1)}}_{\pi,2}) = 2, h^0(L^{\underline{n}^{(1)}}_{\pi,3}) = 3$ e $h^0(L^{\underline{n}^{(1)}}_{\pi,\{1\}^c}) = 5$. Observe que $\chi^1_i = h^0(L^{\underline{n}^{(1)}}_{\pi,i})$ para $i = 1,2$ e $\chi^1_2 + \chi^1_3 = h^0(L^{\underline{n}^{(1)}}_{\pi,\{1\}^c})$. Além disso, $\chi^1_i < \delta_{1,i}$ para $i = 2,3$. Pelo Lema 4.5, $\mathrm{Est}_{\phi_1}(W_1) = \mathbb{K}^{*2}$. Portanto $\mathbb{V}_1 \cong \mathbb{K}^{*\delta_1 - 2}$.

6.2.2 Curvas com quatro componentes

Nos exemplos desta seção, C é uma curva nodal com quatro componentes irredutíveis. Denotaremos por g_1, g_2, g_3 e g_4 os gêneros das componentes. Assuma que as componentes de C se intersectem em pontos em $\underline{n}^{(4)}$-posição geral. O número $\delta_{i,j}$, para i e j em $\{1,2,3,4\}$ distintos, é o grau do divisor $C_i \cap C_j$. O mapa $\pi : S \longrightarrow B$ é uma suavização regular de C ao longo de uma direção geral. Recorde da Seção 5.1 que $\chi^4_i := \mathrm{mín}\{h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,i}), \delta_{i,4}\}$ e $\sigma^4_i := \mathrm{máx}\{0, h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,i}) - \delta_{i,\{i,4\}^c}\}$, para $i = 1,2,3$. Seja W_4 a imagem do mapa

$$e_{4,\{4\}^c} : H^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,\{4\}^c}) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_{\Delta_4}),$$

definido na Seção 3.2, e ϕ_4 a ação de $H^0(\mathcal{O}^*_{\Delta_4})$ na Grassmanniana $\mathrm{Grass}_{m_4}(H^0(\mathcal{O}_{\Delta_4}))$, definida na Seção 3.3. A variedade de sistemas canônicos limites com foco em C_4 é denotada $\mathbb{V}_4$. Através de cálculos simples pode-se verificar que, em nenhum dos exemplos abaixo, a componente C_4 é uma componente especial da curva C.

Exemplo 6.7. Seja C uma curva nodal com quatro componentes irredutíveis cujos gêneros são $g_1 = 49, g_2 = 3$ e $g_3 = g_4 = 37$. Suponha que $\delta_{1,2} = \delta_{1,3} = 10, \delta_{1,4} = 2, \delta_{2,3} = 8, \delta_{2,4} = 20$ e $\delta_{3,4} = 15$. Usando o algoritmo apresentado na Seção 6.1, obtemos $\underline{n}^{(4)} = (6,3,4,0)$. Observe que C_4 é uma componente irredutível desbalanceada de C. Usando Riemann-Roch, encontramos $h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,1}) = 9$, $h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,2}) = 18$ e $h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,3}) = 21$. Observe que $\chi_i^4 = \delta_{i,4}$, para $i = 1, 3$, e $\chi_2^4 = h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,2})$. Além disso, $\sigma_i^4 = 0$, para $i = 1, 2$, e $\sigma_3^4 = 3$. Usando a fórmula encontrada na Proposição 3.7, obtemos $h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,\{4\}^c}) = 20$. Temos que $\chi_1^4 + \chi_2^4 + \chi_3^4 > h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,\{4\}^c})$ e $\sigma_i^4 < \chi_i^4$ para $i = 1, 2, 3$. Pelo Lema 4.5, temos que $\mathrm{Est}_{\phi_4}(W_4) = \mathbb{K}^*$. Portanto, de acordo com o Teorema 5.8, temos que $\mathbb{V}_4 \cong \mathbb{K}^{*\delta_4 - 1}$.

Exemplo 6.8. Seja C uma curva nodal com quatro componentes irredutíveis cujos gêneros são $g_1 = 59, g_2 = 16, g_3 = 1$ e $g_4 = 70$. Suponha que $\delta_{1,2} = \delta_{2,3} = \delta_{3,4} = 5$, $\delta_{1,3} = 4$ e $\delta_{1,4} = \delta_{3,4} = 3$. Usando o algoritmo apresentado na Seção 6.1, obtemos $\underline{n}^{(4)} = (11, 9, 7, 0)$. Observe que C_4 é uma componente desbalanceada de C. Usando Riemann-Roch, encontramos $h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,1}) = 12$, $h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,2}) = 1$ e $h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,3}) = 5$. Observe que $\chi_i^4 = \delta_{i,4}$, para $i = 1, 3$, e $\chi_2^4 = h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,2})$. Além disso, $\sigma_1^4 = 3$ e $\sigma_i^4 = 0$, para $i = 2, 3$. Usando a fórmula encontrada na Proposição 3.7, obtemos $h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,\{4\}^c}) = 4$. Temos que $\chi_1^4 + \chi_2^4 + \chi_3^4 > h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,\{4\}^c})$, $\sigma_1^4 = \chi_1^4$ e $\sigma_i^4 < \chi_i^4$ para $i = 2, 3$. De acordo com o Lema 4.5, temos que $\mathrm{Est}_{\phi_4}(W_4) = \mathbb{K}^{*\delta_{1,4}+1}$. Portanto, pelo Teorema 5.8, temos que $\mathbb{V}_4 \cong \mathbb{K}^{*\delta_{\{2,3\},4} - 1}$.

Exemplo 6.9. Seja C uma curva nodal com quatro componentes irredutíveis cujos gêneros são $g_1 = 50, g_2 = 41, g_3 = 48$ e $g_4 = 37$. Suponha que $\delta_{1,2} = 10$, $\delta_{1,3} = \delta_{2,4} = 3$, $\delta_{1,4} = \delta_{2,3} = 1$ e $\delta_{3,4} = 5$. Usando o algoritmo apresentado na Seção 6.1, obtemos $\underline{n}^{(4)} = (21, 19, 15, 0)$. Observe que C_4 é uma componente desbalanceada de C. Usando Riemann-Roch, encontramos $h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,1}) = 5$, $h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,2}) = 13$ e $h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,3}) = 3$. Observe que $\chi_i^4 = \delta_{i,4}$, para $i = 1, 2$, e $\chi_3^4 = h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,3}) < \delta_{3,4}$. Usando a fórmula encontrada na Proposição 3.7, obtemos $h^0(L^{\underline{n}^{(4)}}_{\pi,\{4\}^c}) =$

4. Temos que $\chi_1^4 + \chi_2^4 + \chi_3^4 = h^0(L_{\pi,\{4\}^c}^{\underline{n}^{(4)}})$. De acordo com o Lema 4.5, temos que

$$\mathrm{Est}_{\phi_4}(W_4) = \mathbb{K}^{*\delta_{\{1,2\},4}+1}.$$

Portanto, segue do Teorema 5.8 que $\mathbb{V}_4 \cong \mathbb{K}^{*\delta_{1,4}-1}$.

Exemplo 6.10. Seja C uma curva nodal com quatro componentes irredutíveis cujos gêneros são $g_1 = 12, g_2 = 19, g_3 = 63$ e $g_4 = 40$. Suponha que $\delta_{1,2} = 2$, $\delta_{1,3} = \delta_{2,4} = 3$, $\delta_{1,4} = \delta_{2,3} = 1$ e $\delta_{3,4} = 5$. O algoritmo produz $\underline{n}^{(4)} = (11, 9, 12, 0)$, portanto C_4 é uma componente desbalanceada de C. Usando Riemann-Roch encontramos $h^0(L_{\pi,1}^{\underline{n}^{(4)}}) = 5$, $h^0(L_{\pi,2}^{\underline{n}^{(4)}}) = 4$ e $h^0(L_{\pi,3}^{\underline{n}^{(4)}}) = 6$. Temos que $\chi_i^4 = \delta_{i,4}$ para $i = 1, 2, 3$. Além disso, $h^0(L_{\pi,\{4\}^c}^{\underline{n}^{(4)}}) = 9$. Observe que $\chi_1^4 + \chi_2^4 + \chi_3^4 = h^0(L_{\pi,\{4\}^c}^{\underline{n}^{(4)}})$. De acordo com o Lema 4.5, temos que $\mathrm{Est}_{\phi_4}(W_4) = H^0(\mathcal{O}_{\Delta_4}^*)$. Pelo Teorema 5.8, $\mathbb{V}_4 = \{H^0(L_{\pi,4}^{\underline{n}^{(4)}})\}$.

Apêndice

Neste Apêndice apresentamos uma implementação do algoritmo descrito no Capítulo 6, Seção 6.1, para curvas com três componentes irredutíveis. Usamos o software Maple para esta implementação.

```
Procedure 1:=proc(t,l,g,d)
# t=number of vertices, l=fixed vertice, g=genus of the curves,d=intersection matrix
local genus,e,i,j,aux,k,V,J,mJ,q,teste,Somad,Somae,S,n,r,Uniao,ns,oldns,dim11,dim12,dim21,dim22:
# local variables
genus := g[1]+g[2]+g[3]+d[1, 2]+d[1, 3]+d[2, 3]-2:
e := array(1 .. t, 1 .. t):
for i to t do for j to t do e[i, j] := 0 end do: end do:
for i from 1 to t
aux := 0:
for k to t do if k <> i then aux := aux+d[i, k]: end if: end do:
if i<>l then e[l,i]:=g[i]-1+aux: else e[l,i]:=g[i]-genus+aux: end if:
end do:
V := {}:
```

```
for i to t do V := union(V, i) end do:

J[0] := minus(V, l): mJ[0] := t-1: q := 1: J[q] := : mJ[q] := 0:

for j from 1 to mJ[0] do if d[l,J[0][j]]>0 then J[q]:=J[q] union J[0][j]:mJ[q]:=mJ[q]+1: end if: end do:

J[0] := minus(J[0], J[q]): mJ[0] := mJ[0]-mJ[q]: teste := evalb(mJ[0] <> 0):

while teste do

q:=q+1: J[q]:=: mJ[q] := 0:

for i from 1 to mJ[q-1] do

for j from 1 to mJ[0] do

if d[J[0][j],J[q-1][i]]>=1 then

if J[0][j] intersect J[q]= then J[q]:=J[q] union J[0][j]: mJ[q] := mJ[q]+1: end if: end if:

end do: end do:

J[0] := minus(J[0], J[q]): mJ[0] := mJ[0]-mJ[q]: teste:=evalb(mJ[0]¡¿0):

end do: # while

print(Partitions of V:): for j to q do print(J[j]) end do:

Somad := 0; Somae := 0:

for i from 1 to t do

Somae:=Somae+abs(e[l,i]):

for j to t do Somad := Somad+d[i, j] end do:

end do:

S := array(1 .. q): for r from 1 to q do S[r]:=-((Somae+Somad)^((q-r+1))):end do:

n := array(1 .. t, 1 .. q): Uniao := {}:

for r from 1 to q do

for j from r to q do Uniao:=Uniao union J[j]: end do:
```

```
for i to t do if in(i, Uniao) then n[i, r] := S[r]: else n[i, r] := 0: end if: end do:

Uniao:={}:

end do:

ns := array(1 .. t): for i to t do ns[i] := 0 end do:

for i to t do for r to q do ns[i] := ns[i]+n[i, r]: end do: end do:

teste:=true:

while teste do

for i from 1 to t do oldns[i]:=ns[i]: end do:

n := Procedure 2(V, t, l, ns, e):

teste := false:

for i to t do if oldns[i] <> n[i] then teste := true: end if: end do:

for i from 1 to t do ns[i]:=n[i]: end do:

end do: # while

return n:

end: # Procedure


Procedure 2:=proc(V,t,l,ns,e)

# V:set of vertices, t:number of vertices, l:fixed vertice, ns:m−tuple, e:vector e^(l)

local u,w,K,mK,Kc,mKc,i,hK,dKKc,j,nshK,maxnshK,maxnshKc,gamanshK,aux1,aux2,epsilonKns;

# local variables for u from 1 to t do

if u<>l then

K := u: mK:=1: Kc := minus(V, K): mKc := t-mK: hK := array(1 .. t):

for i from 1 to t do if in(i, K) then hK[i] := 1 else hK[i] := 0 end if: end do:
```

```
dKKc := 0:

for i to mK do for j to mKc do dKKc := dKKc+d[K[i], Kc[j]]: end do: end do:

nshK := array(1 .. t):

for i to t do nshK[i] := ns[i]+hK[i] end do:

maxnshK := nshK[K[1]]:

for j from 1 to mK do if nshK[K[j]] > maxnshK then maxnshK := nshK[K[j]] end if: end do:

maxnshKc := nshK[Kc[1]]:

for j from 1 to mKc do if nshK[Kc[j]]>maxnshKc then maxnshKc:=nshK[Kc[j]]: end if: end do:

if maxnshK <= maxnshKc then gamanshK := 0: else gamanshK := 1: end if:

aux1 := array(1 .. t): for i to t do aux1[i] := 0 end do:

for i to mK do

for j to t do if K[i] <> j then aux1[K[i]] := aux1[K[i]]+(ns[j]-ns[K[i]])*d[K[i], j]: end if: end do:

aux1[K[i]] := aux1[K[i]]+e[l, K[i]]:

end do:

aux2 := 0:

for i to mK do

for j to mK do

if K[i] < K[j] then aux2 := aux2+d[K[i], K[j]]: end if:

end do:

end do:

epsilonKns := 0:

for i to t do epsilonKns := epsilonKns+aux1[i] end do:

epsilonKns := epsilonKns-aux2:
```

```
if (epsilonKns>=dKKc-gamanshK+1) then

for i to t do ns[i] := ns[i]+hK[i] end do:

return ns:

end if:

end if:

end if:

end do:

for u from 1 to t do

for w from u+1 to t do

if (u<>l) and (w<>l) then

K := u, w: mK := 2: Kc:=V minus K: mKc:=t-mK:

for i from 1 to t do

if in(i, K) then hK[i] := 1: else hK[i] := 0: end if:

end do:

dKKc := 0:

for i to mK do

for j to mKc do

dKKc := dKKc+d[K[i], Kc[j]]:

end do:

end do:

for i to t do nshK[i] := ns[i]+hK[i] end do:

maxnshK := nshK[K[1]]:

for j from 1 to mK do if nshK[K[j]]>maxnshK then maxnshK:=nshK[K[j]]: end if: end do:
```

```
maxnshKc:=nshK[Kc[1]]:

for j from 1 to mKc do if nshK[Kc[j]]>maxnshKc then maxnshKc:=nshK[Kc[j]]: end if: end do:

if maxnshK <= maxnshKc then gamanshK := 0 else gamanshK := 1 end if

aux1 := array(1 .. t): for i to t do aux1[i] := 0 end do:

for i from 1 to mK do

for j from 1 to t do if K[i]<>j then aux1[K[i]]:=aux1[K[i]]+(ns[j]-ns[K[i]])*d[K[i],j]: end if: end do:

aux1[K[i]] := aux1[K[i]]+e[l, K[i]]:

end do:

aux2 := 0:

for i to mK do for j to mK do if K[i] < K[j] then aux2 := aux2+d[K[i], K[j]] end if: end do: end do:

epsilonKns := 0:

for i to t do epsilonKns := epsilonKns+aux1[i] end do:

epsilonKns := epsilonKns-aux2:

if (epsilonKns>=dKKc-gamanshK+1) then

for i from 1 to t do ns[i]:=ns[i]+hK[i]: end do:

return ns:

end if:

end if:

end do:

end do:

return ns:

end: #Procedure
```

Referências Bibliográficas

[1] A.D.Centina. Weierstrass points and their impact in the study of algebraic curves: a historical account from the "lückensatz" to the 1970s. *Ann. Univ. Ferrara*, 54:37–59, 2008.

[2] A.Hürwitz. Über algebraische gebilde mit eindeutigen transformationen in sich. *Math. Ann.*, 41:391–430, 1893.

[3] D.Eisenbud e J.Harris. Limit linear series: Basic theory. *Invent. Math.*, 85:337–371, 1986.

[4] D.Eisenbud e J.Harris. Existence, decomposition, and limits of certain weierstrass points. *Invent. Math.*, 87:495–515, 1987.

[5] D.Eisenbud e J.Harris. The monodromy of weierstrass points. *Invent. Math.*, 90:333–341, 1987.

[6] E.Esteves e N.Medeiros. Limit canonical systems on curves with two components. *Invent. Math.*, 87:267–338, 2002.

[7] E.Esteves e P.Salehyan. Limit weierstrass points on nodal reducible curves. *Transactions of the AMS*, 359:5035–5056, 2007.

[8] A.Garcia e Y.Lequain. *Elementos de Álgebra.* Projeto Euclides. IMPA, 2008.

[9] E.Esteves. Linear systems and ramification points on reducible nodal curves. *Matemática Comtemporânea 14*, 1996.

[10] F.Catanese. Pluricanonical-gorenstein-curves. *Progr. Math.*, 24:51–95, 1981.

[11] K.Weierstrass. *Mathematische Werke, (1894-1927)*, volume 3. Reprint by G.Olms, Hildesheim, 1967.

[12] L.Mainò. *Moduli space of enriched stable curves.* Harvard University, 1998.

[13] M.M.Haure. Recherches sur les points de weierstrass d'une curbe plane algébriques. *Ann. École Nor. Sup.*, 32:115–196, 1896.

[14] P.Saleyhan. *Limit Weierstrass points in nodal curves.* IMPA, 2003.

[15] R.Hartshorne. *Algebraic Geometry.* Springer Verlag, 1978.

[16] S.Kleiman. Relative duality for quasi-coherent sheaves. *Compositio Mathematica*, 41:39–60, 1980.

[17] Z.Ran. Degenerations of linear systems. *Unpublished*, 1985.