

Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

Sobre a geometria de ferraduras em dimensão 3

Waliston Luiz Lopes Rodrigues Silva

Sob orientação de Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira

Tese apresentada para obtenção do título de Doutor em Ciências

Agradecimentos

Decidi, como a maioria, seguir a tradição e externar meus agradecimentos. Não porque seria uma coisa decente a se fazer ou porque quem faz - eu - seria, assim, decente, mas porque é uma obrigação com cada um que passou pela minha convivência e mudou profundamente meu jeito de ser. É claro que não citarei todos porque escrevo esse agradecimento hoje - um dia comum. E além disso, escrevo. Apenas.

Tenho, sobretudo, uma dívida com quem me deixou ser bem nascido, seja lá o que ou quem for - ainda que seja o acaso -, e a quem dedico com prazer meu trabalho. Aliás, esse foi um dos motivos que me fez deixar minha mãe, Odete, e meu irmão, Wladir, lá em Contagem. Por sorte encontrei Camila no Rio, que me guiou para novos mundos - dentre eles aquele em que Tanatos conduz a carruagem de Eros segundo Bauman - e conseqüentemente me despertou para a atenção que preciso dar a minha própria família. Eu tenho um dever com eles, e com Camila.

Tenho dever, também, com meu orientador de mestrado e doutorado - o Gugu - com quem tive e tenho o prazer em conversar sobre Lenin, autonomia universitária e as interseções estáveis de conjuntos de Cantor. Sobre as interseções, tremendo “ensinador”, sobre os outros, não trivial - como se diz e deve ser. É preciso agradecer, ainda, meu orientador de iniciação científica na UFMG, Mário Jorge, que me ensinou a desenhar - essa lição me marcou, ainda que eu não tenha conseguido colocar em prática como talvez devesse.

O momento me faz recordar de uma pessoa que também me mudou - menino Flaviano. Aprendi com ele que devo escrever isso, sim. A esse agradeço por todo o companheirismo e discussões. Ainda leio hoje pensando em argumentar com ele. Recentemente, convidei-o para uma partida de paintball na qual não pôde comparecer - mas ele está em todas, como não convidá-lo?

Esses são os agradecimentos que faria neste momento, certamente seriam outros em momentos diferentes. Não se excluem, se somam.

Resumo

O conceito de compacto recorrente foi introduzido por Moreira e Yoccoz para provar que as interseções estáveis de conjuntos de Cantor regulares são densas na região onde a soma das dimensões de Hausdorff é maior do que 1. Adaptaremos este conceito para o contexto de ferraduras em dimensão 3 e provaremos que as ferraduras com dimensão superior estável maior que 1 possuem, tipicamente e persistentemente, compacto recorrente. Como consequência, apresentaremos algumas propriedades geométricas dessas ferraduras. Entre elas, destacamos que, tipicamente e persistentemente, as ferraduras com dimensão superior estável maior que 1 possuem blenders.

Palavras chaves: ferradura, compacto recorrente, blender

Sumário

1	Introdução	6
2	Contexto e notações	9
3	Dimensão superior estável	12
4	Critério do compacto recorrente e suas consequências	16
4.1	Critério do compacto recorrente	16
4.2	Blenders	18
4.3	Outras consequências do critério do compacto recorrente	19
4.4	Teorema principal - tipicamente existem compactos recorrentes quando as ferraduras têm dimensão superior estável maior que 1	20
4.5	Demonstração das consequências do critério do compacto recorrente	21
5	Resumo da demonstração do teorema 4.8	24
6	Preparação para os argumentos do tipo Marstrand e probabilístico	29
6.1	Algumas notações	29
6.2	Perturbações, não recorrências e influência das perturbações sobre peças e folhas não recorrentes	30
7	Argumento do tipo Marstrand	36
7.1	Demonstração da proposição 7.1	39
7.1.1	Preparação	39
7.1.2	Hipóteses do teorema 3.2 (ii) de [32]	40
7.1.3	Fim da Demonstração - Uma versão do teorema de Simon-Solomyak- Urbański	44
8	Argumento probabilístico	48
8.1	Família de perturbações	48
8.2	Fim da demonstração	48
8.3	Construção do candidato a compacto recorrente, K	50
8.3.1	Seleção de folhas e peças boas	51
8.3.2	Sequência de acavalamentos e primeiro lema sobre acavalamentos	55
8.3.3	Acavalamentos bem espaçados para f_0	56
8.3.4	Acavalamentos folgados bem espaçados para f_ω	59
8.4	Demonstração da propriedade 8.2	62

1 Introdução

Dimensões fractais, principalmente a dimensão de Hausdorff, têm desempenhado um papel central em Sistemas Dinâmicos nas últimas décadas. Trabalhos de Palis, Takens, Moreira e Yoccoz ([19],[20],[23], [24] e [26]), mostram que, em dimensão 2, para primeiras bifurcações homoclínicas associadas a uma ferradura Λ , há prevalência de hiperbolicidade se, e somente se, a dimensão de Hausdorff de Λ é menor que 1. Caso a dimensão de Hausdorff seja maior que 1, haverá tipicamente tangências persistentes para uma proporção positiva dos parâmetros próximos e após a bifurcação. Moreira, Palis e Viana trataram em [18] da extensão desses resultados para dimensões superiores.

Em todos os trabalhos mencionados acima em dimensão 2, o entendimento de propriedades geométricas da ferradura e de suas interseções com variedades estáveis e instáveis teve importância central. Uma característica de ferraduras em dimensão 2 que contribui bastante para este entendimento é o fato de as holonomias das folheações estável e instável serem diferenciáveis, o que é falso em dimensões superiores, quando essas folheações, em geral, são, no máximo, Hölder-contínuas.

Usaremos neste trabalho o conceito de **dimensão superior estável**, introduzido em [18]. De manipulação mais simples que a dimensão de Hausdorff neste contexto a dimensão superior estável é uma cota superior para as dimensões de Hausdorff (e as capacidades limite) de todos os conjuntos de Cantor estáveis de uma ferradura. Mostraremos que, tipicamente, ferraduras em dimensão 3 com dimensão superior estável maior que 1 são tais que a imagem de quaisquer de seus conjuntos de Cantor estáveis por funções reais genéricas de classe C^1 contém intervalos persistentemente. Para isso, desenvolvemos uma versão do **critério do compacto recorrente**, introduzido em [19] para provar que interseções estáveis de conjuntos de Cantor regulares na reta são típicas quando a soma de suas dimensões de Hausdorff é maior que um, e mostraremos que esse critério é tipicamente satisfeito para ferraduras com dimensão superior estável maior que um. A rigor, para realizar esta tarefa, supomos que o fibrado tangente da ferradura admite uma decomposição fina - em direções estável-forte, estável-fraca e instável. Essa hipótese é aberta, e uma técnica descrita em [18] permite mostrar que ferraduras com dimensão superior estável maior que um tipicamente contêm subferraduras ainda com dimensão superior estável maior que um e com decomposição fina do fibrado tangente, o que permite estender nossos resultados em geral. Não discutiremos essa técnicas neste trabalho. Por outro lado, esperamos em um futuro próximo, adaptar as técnicas deste trabalho para mostrar resultados análogos em dimensões ambiente superiores.

Dentre as propriedade geométricas relevantes que ferraduras em dimensão 3 com compacto recorrente podem possuir, destacaremos a existência de blenders. Esse dispositivo foi

construído por Bonatti e Díaz em [1] para apresentar exemplos, com características inéditas até o momento, de difeomorfismos C^1 -robustamente transitivos. Desde então eles têm sido construídos para se obter conclusões topológicas e ergódicas sobre Sistemas Dinâmicos. Uma breve pesquisa na bibliografia nos revela trabalhos como [3] em que se obtém genericidade C^1 -local de coexistência de infinidade de poços e fontes para difeomorfismos em dimensão 3 e como [30], no qual os autores estabelecem uma resposta positiva para a conjectura de Pugh-Shub sobre estabilidade ergódica no caso C^1 com dimensão central 2. Até o momento - pelo que sabemos - esse dispositivo tem sido construído e sua aparição estava sujeita à presença de algum ciclo heterodimensional próximo. Neste trabalho - como consequência do critério do compacto recorrente - estabelecemos um critério típico para a ocorrência de blenders: ferraduras típicas em dimensão 3 com dimensão superior estável maior que 1 são blenders. Uma boa referência que abrange, dentre outros temas que estão ‘além da hiperbolicidade’, o blender, destacamos [5]. Agradecemos aos professores Ali Tahzibi, Christian Bonatti e Lorenzo Díaz pelos esclarecimentos prestados sobre este assunto.

Para demonstrarmos que o critério do compacto recorrente ocorre tipicamente, adaptaremos duas técnicas encontradas na literatura: o argumento probabilístico e um argumento do tipo Marstrand. A primeira técnica foi introduzida por P. Erdős e utilizada originalmente em teoria dos grafos, mas posteriormente se tornou uma ferramenta valiosa em diversas áreas da matemática. Uma boa referência para ilustrar o argumento probabilístico funcionando em teoria dos grafos pode ser encontrada em [16]. Esta técnica foi também utilizada em [19] para provar existência típica de compactos recorrentes para pares de conjuntos de Cantor.

Marstrand provou que, genericamente, a projeção ao longo de retas de um conjunto compacto no plano com dimensão de Hausdorff maior que 1 tem medida de Lebesgue positiva ([13]). Uma nova prova deste resultado foi dada por Kaufmann ([11]). Argumentos desse tipo são o que chamamos de tipo Marstrand. O argumento que adaptaremos é, especificamente, um resultado de [32] que estabelece que famílias de perturbações de um sistema de funções iteradas (IFS no inglês) com uma certa dimensão fractal (similar à dimensão superior estável) maior que 1 exibe conjunto invariante com medida de Lebesgue positiva. Agradecemos ao professor Károly Simon pelos esclarecimentos prestados sobre seu resultado. Encontramos aí - em [32] -, um problema interessante: Os conjuntos invariantes dessa família de perturbações do SIF que têm medida de Lebesgue positiva tipicamente contêm intervalos? Acreditamos ser possível atacar este problema com as técnicas desenvolvidas neste trabalho.

Outras questões que acreditamos que nossos métodos podem ajudar a compreender melhor estão relacionadas à geometria fractal das ferraduras em dimensão 3. Lembramos que é mais difícil calcular a dimensão de Hausdorff de um conjunto de Cantor estável - interseção

da ferradura com uma variedade estável local - do que calcular a dimensão superior estável de uma ferradura. Podemos citar alguns problemas interessantes: não sabemos se a dimensão de Hausdorff de ferraduras estáveis se mantêm constante ao mudarmos a variedade estável em que o Cantor estável mora; seria interessante saber se, tipicamente, as dimensões de Hausdorff dos conjuntos de Cantor estáveis variam continuamente com a ferradura (isto é falso se omitirmos a palavra tipicamente, em [4] é exibido um exemplo de que a dimensão de Hausdorff de ferraduras não variam continuamente com o difeomorfismo que a define). Esses problemas para ferraduras em dimensão 2 já foram resolvidos, em [15] e [25] é demonstrado que a dimensão de Hausdorff de ferraduras C^1 em dimensão 2 varia continuamente na topologia C^1 .

Iniciaremos nosso trabalho na próxima seção, na qual serão estabelecidas as notações e o contexto desse trabalho. Vamos, então, introduzir o conceito de dimensão superior estável na seção 3 e enunciaremos o resultado principal e alguns de seus corolários na seção 4. O restante do trabalho será dedicado à demonstração do teorema principal - as ferraduras em dimensão 3 com dimensão superior estável maior que 1 e com decomposição fina do fibrado tangente satisfazem o critério do compacto recorrente tipicamente e robustamente.

2 Contexto e notações

Seja M uma variedade com dimensão três, $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo C^k ($k \in \mathbb{N}^* \cup \infty$) e $\Lambda \in M$ uma **feradura** - conjunto hiperbólico, localmente isolado e transitivo - misturadora, com índice 1.

Observação 2.1. Dizemos que Λ é **misturadora** se existe partição de Markov, $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_N\}$, e $n > 0$ inteiro de modo que $f^n(P) \cap Q \neq \emptyset$ para todos P e Q em \mathcal{P} .

Observação 2.2. Dizemos que o conjunto hiperbólico Λ tem **índice** 1 quando seu fibrado tangente, $T_\Lambda M = E^u \oplus E^s$, é decomposto em dois subfibrados, E^u e E^s , com dimensões 1 e 2 respectivamente.

Observação 2.3. Dizemos que o fibrado tangente de $T_\Lambda M$ tem **decomposição fina** se pode ser decomposto em três subfibrados, $T_\Lambda M = E^{ss} \oplus E^{ws} \oplus E^u$, satisfazendo:

$$\begin{aligned} df|_{E^{ss}}(x)v &= \lambda^{ss}(x)v, \text{ para } v \in E^{ss}(x), \\ df|_{E^{ws}}(x)v &= \lambda^{ws}(x)v, \text{ para } v \in E^{ws}(x), \\ df|_{E^u}(x)v &= \lambda^u(x)v, \text{ para } v \in E^u(x), \\ \text{onde } 0 < |\lambda^{ss}(x)| &< |\lambda^{ws}(x)| < 1 < |\lambda^u(x)| \text{ para todo } x \in \Lambda. \end{aligned}$$

Observamos que se $f \in C^\infty$, existem folheação estável forte, \mathcal{F}^{ss} , $C^{1+\varepsilon}$, e folheação estável, \mathcal{F}^s , $C^{1+\varepsilon}$. Além disso, a decomposição fina é uma propriedade C^1 -robusta pelo argumento de campo de cones.

Seja $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ o subdeslocamento de tipo finito misturador associado a uma partição de Markov, $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_N\}$, conjugado a f^{-1} . Ou seja, existe uma matriz $A_{N \times N} \in \{0, 1\}^{N \times N}$ tal que $\theta \in \Sigma$ se e só se $A_{\theta_i, \theta_{i+1}} = 1$ para todo $i \in \mathbb{Z}$ e, além disso, existe n , tal que $A_{i,j}^n > 0$ para todo i, j entre 1 e N .

Fixaremos algumas notações que serão úteis ao longo desse trabalho. Nas definições a seguir fizemos um abuso de notação: quando escrevemos uma palavra com índices nas letras, estamos fixando a posição da palavra através desses índices, ou seja, a notação $(\theta_m, \theta_{m+1}, \dots, \theta_n)$ representa, na verdade, a função $\theta : \{m, m+1, \dots, n\} \rightarrow \Sigma^1$, com $\theta(j) = \theta_j$ para $m \leq j \leq n$, e não apenas o vetor $(\theta_m, \theta_{m+1}, \dots, \theta_n)$.

Observamos que consideramos que \mathbb{N} possui 0.

$\Sigma^- := \left\{ \theta^- := (\dots, \theta_{-n}, \dots, \theta_0); A_{\theta_{-i}, \theta_{-i+1}} = 1 \text{ para todo } i \in \mathbb{N}^* \right\}$ são as palavras infinitas para trás.

$\Sigma^+ := \left\{ \theta := (\theta_1, \dots, \theta_m, \dots); A_{\theta_i, \theta_{i+1}} = 1 \text{ para todo } i \in \mathbb{N}^* \right\}$ são as palavras infinitas para frente.

$\Sigma^{+*} := \left\{ \underline{\theta} := (\theta_1, \dots, \theta_m); m \in \mathbb{N}, A_{\theta_i, \theta_{i+1}} = 1 \text{ para todo } i \in \{1, \dots, m-1\} \right\}$ são as palavras finitas para frente.

$\Sigma^m := \left\{ \underline{\theta} := (\theta_1, \dots, \theta_m); A_{\theta_i, \theta_{i+1}} = 1 \text{ para todo } i \in \{1, \dots, m-1\} \right\}$ são as palavras finitas para frente com tamanho m .

$\Sigma^{-*} := \left\{ \underline{\theta}^- := (\theta_{-m}, \dots, \theta_0); m \in \mathbb{N}, A_{\theta_{-i}, \theta_{-i+1}} = 1 \text{ para todo } i \in \{1, \dots, m\} \right\}$ são as palavras finitas para trás.

$\Sigma^* := \left\{ \underline{\theta} := (\theta_m, \dots, \theta_n); m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, A_{\theta_i, \theta_{i+1}} = 1 \text{ para todo } i \in \{m, \dots, n-1\} \right\}$ são as palavras finitas.

$\Sigma_k := \left\{ \underline{\theta} := (\theta_1, \dots, \theta_m, \dots); A_{k, \theta_1} = 1 \text{ e } A_{\theta_i, \theta_{i+1}} = 1 \text{ para todo } i \in \mathbb{N}^* \right\}$ são as palavras infinitas para frente que seguem a letra k .

$\Sigma_k^* := \left\{ \underline{\theta} := (\theta_1, \dots, \theta_m); m \in \mathbb{N}, A_{k, \theta_1} = 1 \text{ e } A_{\theta_i, \theta_{i+1}} = 1 \text{ para todo } i \in \{1, \dots, m-1\} \right\}$ são as palavras finitas para frente que seguem k .

Notamos que quando um símbolo que se refere a uma palavra estiver sublinhado, como em $\underline{\theta}$, queremos nos referir a uma palavra finita, caso contrário a uma palavra infinita. Quando falarmos de uma letra de uma palavra finita, omitiremos o sublinhado.

Para cada g em uma C^1 -vizinhança suficientemente pequena de f , denotaremos por $E^{g,ss}$, p^g , $W^{g,s}$ e Λ^g as continuções hiperbólicas de E^{ss} , p , W^s e Λ .

Ao longo deste trabalho, criaremos famílias de perturbações a vários parâmetros para certos difeomorfismos. O objetivo disso será esclarecido em seguida. Dizemos que $\{\phi^\gamma : M \rightarrow M\}_{\gamma \in \Gamma}$ é uma família C^k contínua de difeomorfismos se ϕ^γ é C^k e ϕ^γ varia C^k -continuamente ao variarmos γ .

Como indicado na definição acima, o parâmetro de perturbação será indicado em superescrito. Ao longo desse trabalho, serão feitas duas perturbações - a primeira nos moldes de um teorema do “tipo Marstrand”, quando se toma como base o trabalho de [32] e a segunda ao se procurar um compacto recorrente (a técnica do argumento probabilístico adaptada de [19]). Para a primeira perturbação utilizaremos o símbolo \underline{t} como parâmetro, enquanto que para a segunda utilizaremos o símbolo $\underline{\omega}$ como parâmetro e Ω como espaço de parâmetros. Os símbolos $\underline{\gamma}$ e Γ serão utilizados genericamente como parâmetro e espaço de parâmetros respectivamente. Essas notações serão introduzidas em seus devidos momentos. O objetivo é não causar confusão ao longo da leitura deste trabalho.

Dada uma família de perturbações contínua, $\{f^\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$, dentro de uma C^1 -vizinhança de f suficientemente pequena, denotaremos por $E^{\underline{\gamma},ss}$, $p^{\underline{\gamma}}$, $W^{\underline{\gamma},s}$ e $\Lambda^{\underline{\gamma}}$ as continuções hiperbólicas de E^{ss} , p , W^s e Λ . Observamos que se $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_N\}$ é partição de Markov para f , então,

sem perda de generalidade, também é para qualquer difeomorfismo suficientemente próximo de f , basta considerar suas vizinhanças compactas.

Denotaremos por $W_{loc}^s(p)$ a componente conexa de $W_{loc}^s(p) \cap P$ que possui p , onde $P \in \mathcal{P}$.

Para todo g suficientemente C^1 -próximo de f existe um homeomorfismo $h^g : \Sigma \rightarrow \Lambda^g$ tal que a cada palavra infinita θ de Σ , associa

$$h^g(\theta) := \bigcap_{j \geq 0} g^{-j}(P_{\theta_{-j}}) \cap \bigcap_{j \geq 1} g^j(P_{\theta_j}).$$

Observamos que $h^g(\underline{\theta}) := \bigcap_{j=k_1}^{k_2} g^j(P_{\theta_j})$ para qualquer palavra finita $\underline{\theta} := (\theta_{k_1}, \dots, \theta_{k_2}) \in \Sigma^*$.

Além disso, $g^{-1} \circ h^g(\theta) = h^g \circ \sigma(\theta)$, onde σ é o deslocamento, i.e., $\sigma(\theta)_i = \theta_{i+1}$.

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^g & \xrightarrow{g} & \Lambda^g \\ h^g \downarrow & & \downarrow h^g \\ \Sigma & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma \end{array}$$

Fixado $\theta^- \in \Sigma^-$, vale observar que $h^g(\theta^-) = W_{loc}^{g,s}(p^g)$, para algum $p^g \in \Lambda^g$, onde p^g é a continuação hiperbólica de $p \in h(\theta^-)$.

Frequentemente falaremos da ferradura e do seu conjugado simbólico. Iremos transitar entre esses dois contextos livremente sem nos preocupar com a sintaxe das nossas frases. Diremos por exemplo que $\theta^- \in \Sigma^-$ é uma folha (porque seu conjugado, na ferradura, é uma folha); diremos que $\underline{\theta} \in \Sigma^*$ é um cilindro (pela mesma razão); diremos que $\theta^- \in \underline{\theta}^-$ (significando que $h(\theta^-) \subset h(\underline{\theta})^-$ - isso significa dizer que θ^- termina com $\underline{\theta}^-$);

Nota: Ao longo desse trabalho, o símbolo \asymp utilizado entre duas funções ($r(x) \asymp s(x)$) significa que existe uma constante, $k > 1$, tal que $k^{-1} \leq \frac{|r(x)|}{|s(x)|} \leq k$, para todo x nos domínios das duas funções.

3 Dimensão superior estável

A seguir apresentaremos a dimensão superior estável de Λ . Esse conceito de dimensão - retirado de [18] - é de manipulação mais fácil do que o de dimensão de Hausdorff. Em geral, sabe-se cotar a dimensão de Hausdorff por cima, mas encontrar uma cota por baixo para a dimensão de Hausdorff é difícil - seria necessário, em princípio, ter em mãos informações adicionais sobre a geometria de Λ (posições relativas dos pontos de Λ). Nesse sentido, esse trabalho disponibiliza um indício da utilidade de ferramentas - teoremas do tipo Marstrand, critério de compacto recorrente e argumento probabilístico - para o tratamento da questão da dimensão de Hausdorff para conjuntos hiperbólicos de dimensão 3, já que trata da descrição das posições relativas de pontos de Λ .

É possível, como em [4], mostrar que a dimensão de Hausdorff de ferraduras em dimensão superior a 2 pode não variar continuamente. Entretanto, não se sabe se as descontinuidades da dimensão de Hausdorff são proibidas de ocorrerem robustamente. Além disso, também não sabemos se a dimensão de Hausdorff de conjuntos de Cantor estáveis (interseção da ferradura com variedade estável local) em dimensão superior a 2 depende da variedade estável. Em dimensão 2 estes dois problemas estão resolvidos. Em particular, o fato de a dimensão de Hausdorff dos Cantor estáveis de ferraduras em dimensão 2 se manterem constante quando se varia a variedade estável foi útil para estabelecer um critério (dimensão de Hausdorff da ferradura original menor que 1) para prevalência de hiperbolicidade em bifurcações homoclínicas em dimensão 2. Para saber mais sobre isso, sugerimos o livro [23].

Vale lembrar que chamamos $\underline{\theta} := (\theta_1, \dots, \theta_n) \in \Sigma^{+*}$ de cilindro (vertical) - o nome é uma referência a $V_{\underline{\theta}} := \bigcap_{i=1}^n f^i(P_{\theta_i})$.

A definição de dimensão superior estável (proposta em [18]) consiste em adaptar a fórmula da dimensão (ver [27]) de conjunto de Cantor dinamicamente definido em dimensão 1.

Definição 3.1. *Dimensão superior estável*

Dado um cilindro vertical $\underline{\theta} \in \Sigma^{+*}$, definimos seu diâmetro por $D_s(\underline{\theta}) := \sup_{\theta^- : \underline{\theta} \in \Sigma_{\theta^-}^-} \left\{ d_s(\theta^-, \underline{\theta}) \right\}$, onde $d_s(\theta^-, \underline{\theta}) := \text{diam}(W_{\theta^-} \cap V_{\underline{\theta}})$.

Feito isso, definimos λ_n por $\sum_{\underline{\theta} \in \Sigma^{+n}} D_s(\underline{\theta})^{\lambda_n} = 1$ e a **dimensão superior estável** de Λ por $\bar{d}_s(\Lambda) := \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n$ (ver [18]).

Para simplificar, diremos que uma ferradura em dimensão 3, (f, Λ) , satisfaz a propriedade *A* se $T_{\Lambda}M = E_{\Lambda}^s \oplus E_{\Lambda}^u$ ($\dim(E_{\Lambda}^u) = 1$) e $\bar{d}_s(\Lambda) > 1$.

Também diremos que uma ferradura em dimensão 3, (f, Λ) , satisfaz a propriedade *B* se $T_{\Lambda}M = E_{\Lambda}^s \oplus E_{\Lambda}^u$ ($\dim(E_{\Lambda}^u) = 1$), $\bar{d}_s(\Lambda) > 1$ e $E_{\Lambda}^s = E_{\Lambda}^{ss} \oplus E_{\Lambda}^{ws}$ onde a direção E_{Λ}^{ss} tem

contração mais forte que a direção E_Λ^{ws} .

De acordo com [18], \bar{d}_s é semicontínua superiormente. Provaremos que \bar{d}_s é contínua nas ferraduras de B . A principal razão para isso é que os autovalores contratores não se misturam já que existe uma direção estável-forte.

Proposição 3.2.

A dimensão superior estável, \bar{d}_s , é contínua nas ferraduras que satisfazem a propriedade B .

Demonstração:

Primeiro, vamos mostrar que \bar{d}_s é semicontínua superiormente em $(f, \Lambda) \in B$. Para isso, temos que mostrar que para todo $n \geq 1$, $\lambda_n \geq \bar{d}_s$. Feito isto, basta observar que λ_n^g varia continuamente com g , que $\bar{d}_s(\Lambda^g) \leq \lambda_n^g$ e que $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^f = \bar{d}_s(\Lambda)$ para concluir que \bar{d}_s é semicontínua superiormente em (f, Λ) .

Pela definição de λ_n , $\sum_{\underline{\theta} \in \Sigma^n} D_s(\underline{\theta})^{\lambda_n} = 1$. Portanto, $\left(\sum_{\underline{\theta} \in \Sigma^n} D_s(\underline{\theta})^{\lambda_n} \right)^k = 1$, de modo que $\sum_{\underline{\theta} \in \Sigma^{kn}} D_s(\underline{\theta})^{\lambda_n} \leq 1$, já que $D_s(\underline{\theta}^1 \dots \underline{\theta}^k) \leq D_s(\underline{\theta}^1) \dots D_s(\underline{\theta}^k)$ para todo $\underline{\theta}^1, \dots, \underline{\theta}^k \in \Sigma^n$ satisfazendo $\underline{\theta}^1 \dots \underline{\theta}^k \in \Sigma^{kn}$.

Portanto, já que λ_{kn} satisfaz $\sum_{\underline{\theta} \in \Sigma^{kn}} D_s(\underline{\theta})^{\lambda_{kn}} = 1$, então $\lambda_{kn} \leq \lambda_n$. Isso prova que $\lambda_n \geq \bar{d}_s$.

Agora, vamos provar que \bar{d}_s é semicontínua inferiormente. Para isso, vamos criar uma sequência, $(\tilde{\lambda}_n)_{n \geq 1}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\lambda}_n = \bar{d}_s$ e que para qualquer $\varepsilon > 0$, se n for suficientemente grande e g suficientemente C^1 -próximo de f , então $(1 - \varepsilon)\tilde{\lambda}_n^g < \bar{d}_s(\Lambda^g)$. Feito isso, basta observar, como anteriormente, que $\tilde{\lambda}_n^g$ varia continuamente para concluir que $\bar{d}_s(\Lambda^g)$ é semicontínua inferiormente.

Seja $r \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de modo que para todo c e d em Σ^1 , exista uma palavra admissível com r letras começando com c e terminando com d e sejam $a, b \in \Sigma^1$ de modo que ba seja admissível em Σ . Definimos $\tilde{\lambda}_n$ de modo que satisfaça

$$\sum_{\substack{\underline{\theta} \in \Sigma^n \\ \theta_1 = a, \theta_n = b}} D_s(\underline{\theta})^{\tilde{\lambda}_n} = 1, \text{ para todo } n \geq 2r.$$

Vamos provar que $(1 - \varepsilon)\tilde{\lambda}_n^g \leq \bar{d}_s(\Lambda^g)$ se n for suficientemente grande e se g estiver suficientemente C^1 -próximo de f .

Como $\sum_{\substack{\theta \in \Sigma^{n-2} \\ a\theta b \in \Sigma^n}} D_s(a\theta b)^{\tilde{\lambda}_n} = 1$, então, para todo $k \geq 1$, $\left(\sum_{\substack{\theta \in \Sigma^{n-2} \\ a\theta b \in \Sigma^n}} D_s(a\theta b)^{\tilde{\lambda}_n} \right)^k = 1$.

Ou seja, para todo $k \geq 1$, $\sum_{\substack{\theta^1, \dots, \theta^k \in \Sigma^{n-2} \\ a\theta^1 b, \dots, a\theta^k b \in \Sigma^n}} D_s(a\theta^1 b)^{\tilde{\lambda}_n} \dots D_s(a\theta^k b)^{\tilde{\lambda}_n} = 1$.

Observamos que, de acordo com o apêndice na seção 9, $D_s(\underline{c})D_s(\underline{d}) \asymp D_s(\underline{cd})$, visto que $D_s(\underline{\tau}) \asymp d_s(\theta^-, \underline{\tau})$, para todo $\underline{\tau}$ e θ^- tais que $\underline{\tau} \in \Sigma_{\theta^-}^*$ (ver lema 9.1 e a observação que o antecede). Logo, existe c com $0 < c < 1$ tal que $cD_s(\underline{c})D_s(\underline{d}) \leq D_s(\underline{cd})$.

Como $a\theta^1 b \dots a\theta^k b$ é admissível (já que ba é), então

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\theta^1, \dots, \theta^k \in \Sigma^{n-2} \\ a\theta^1 b, \dots, a\theta^k b \in \Sigma^n}} D_s(a\theta^1 b)^{\tilde{\lambda}_n} \dots D_s(a\theta^k b)^{\tilde{\lambda}_n} &\leq \sum_{\substack{\theta^1, \dots, \theta^k \in \Sigma^{n-2} \\ a\theta^1 b, \dots, a\theta^k b \in \Sigma^n}} \left(c^{-(k-1)} D_s(a\theta^1 b \dots a\theta^k b) \right)^{\tilde{\lambda}_n} \\ &\leq \sum_{\substack{\theta \in \Sigma^{kn-2} \\ a\theta b \in \Sigma^{kn}}} c^{-(k-1)\tilde{\lambda}_n} D_s(a\theta b)^{\tilde{\lambda}_n}. \end{aligned}$$

Portanto, se n for suficientemente grande, de modo que $D_s(a\theta b)^{-\varepsilon} > c^{-(k-1)}$ (isso é robusto em $g \in C^1$), então $\sum_{\substack{\theta \in \Sigma^{kn-2} \\ a\theta b \in \Sigma^{kn}}} D_s(a\theta b)^{\tilde{\lambda}_n(1-\varepsilon)} \geq 1$ e, já que

$$\sum_{\substack{\theta \in \Sigma^{kn-2} \\ a\theta b \in \Sigma^{kn}}} D_s(a\theta b)^{\tilde{\lambda}_{kn}} = 1, \text{ então } \tilde{\lambda}_{kn} \geq \tilde{\lambda}_n(1-\varepsilon) \text{ para todo } k \geq 1.$$

Como $\tilde{\lambda}_n^g$ depende continuamente de g na topologia C^1 , então, sem perda de generalidade, $\tilde{\lambda}_{kn}^g \geq \tilde{\lambda}_n^g(1-\varepsilon)$ para todo $k \geq 1$, para todo n suficientemente grande e para todo g suficientemente C^1 -próximo de f . Logo, $\tilde{\lambda}_n^g(1-\varepsilon) \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \tilde{\lambda}_{kn}^g$ para todo g suficientemente C^1 -próximo de f .

Dado que $\tilde{\lambda}_n \leq \lambda_n$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \bar{d}_s$, isto prova que $\tilde{\lambda}_n^g(1-\varepsilon) \leq \bar{d}_s(g)$ para todo g suficientemente C^1 -próximo de f e n suficientemente grande.

Agora vamos provar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\lambda}_n = \bar{d}_s$. Para isso vamos provar que para todo $\varepsilon > 0$, $\tilde{\lambda}_n \geq \lambda_{n-2r}(1-\varepsilon)$ se n for suficientemente grande. Isso é o mesmo que dizer que $\tilde{\lambda}_n > \bar{d}_s(1-\varepsilon)$ se n for suficientemente grande, visto que $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \bar{d}_s$.

Existe $0 < c < 1$ tal que $\sum_{\theta \in \Sigma^{n-2r}} (cD_s(\theta))^{\tilde{\lambda}_n} \leq \sum_{\theta \in \Sigma^{n-2r}} D_s(\underline{a}^\theta \theta \underline{b}^\theta)^{\tilde{\lambda}_n}$, onde $\underline{a}^\theta, \underline{b}^\theta \in \Sigma^r$ com $a_1^\theta = a$, $b_r^\theta = b$ e $\underline{a}^\theta \theta \underline{b}^\theta$ é admissível, pois $D_s(\underline{c})D_s(\underline{d}) \asymp D_s(\underline{cd})$ e r é constante.

Portanto, como $\sum_{\underline{\theta} \in \Sigma^{n-2r}} D_s(\underline{\theta})^{\tilde{\lambda}_n(1+\varepsilon)} \leq \sum_{\underline{\theta} \in \Sigma^{n-2r}} (cD_s(\underline{\theta}))^{\tilde{\lambda}_n}$ se n for escolhido suficientemente grande, então $\sum_{\underline{\theta} \in \Sigma^{n-2r}} D_s(\underline{\theta})^{\tilde{\lambda}_n(1+\varepsilon)} \leq 1$, o que implica que $(1+\varepsilon)\tilde{\lambda}_n \geq \lambda_{n-2r}$. ■

4 Critério do compacto recorrente e suas consequências

Enunciaremos nessa seção o nosso resultado principal. Ele garante que próximo de qualquer ferradura, (f, Λ) , C^k ($k \in \mathbb{N}^* \cup \infty$) satisfazendo $\bar{d}_s(\Lambda) > 1$ existe uma continuação hiperbólica de classe C^∞ , (g, Λ^g) , que está C^k -próxima da ferradura original que satisfaz o critério do compacto recorrente (precisaremos este conceito mais adiante). Isso nos garantirá, algumas propriedades geométricas como a existência de blenders.

4.1 Critério do compacto recorrente

Este critério foi introduzido em [19] para provar que ‘interseções estáveis de conjuntos de Cantor regulares são densas na região onde a soma das dimensões de Hausdorff é maior do que 1.’¹ Faremos uma versão deste critério no contexto deste trabalho e veremos que ele nos possibilitará concluir algumas propriedades geométricas sobre ferraduras que o satisfazem - dentre elas a existência de blenders. No nosso caso, este critério significa que podemos utilizar o operador de renormalização - que essencialmente amplia as peças (interseções de variedades estáveis locais com tubos verticais) pela aplicação da inversa do difeomorfismo e as projeta ao longo da folheação estável forte - indefinidamente. Isso significa que estamos localizando - nos locais dessas ampliações - algum ponto da ferradura.

Antes de enunciarmos o critério precisaremos estabelecer alguns conceitos utilizados para defini-lo.

Seja (f, Λ) uma ferradura C^∞ . Para cada elemento P da partição, \mathcal{P} , para essa ferradura fixamos um ponto $x_P \in P \cap \Lambda$ e uma subvariedade, \mathcal{H}_P , de dimensão 2 transversal a $E^{ss}(x_P)$ tal que para todo $x \in P$, $\mathcal{F}_{loc}^{ss}(x) \cap \mathcal{H}_P = \mathcal{F}_{loc}^{ss} \pitchfork \mathcal{H}_P$ e seja exatamente um ponto no interior de \mathcal{H}_P . Observamos que se g estiver C^1 -próximo de f e se a partição \mathcal{P} for composta por elementos suficientemente pequenos, então $\mathcal{F}_{loc}(x) \cap \mathcal{H}_P$ é exatamente um ponto no interior de \mathcal{H}_P para qualquer folheação \mathcal{F} suficientemente C^1 -próxima de \mathcal{F}^{ss} e para todo $x \in P$. Denotamos a união dessas subvariedades por $\mathcal{H} := \bigcup_{P \in \mathcal{P}} \mathcal{H}_P$, a qual chamaremos de parede.

Denotamos $\mathcal{H} \cap W_{loc}^{g,ss}(\Lambda)$ por H^g , $\mathcal{H} \cap W_{\theta-}^g$ por $H_{\theta-}^g$ e a projeção de $W_{\theta-}^g$ sobre $H_{\theta-}^g$ ao longo da folheação estável forte de g por $\Pi_{\theta-}^g$.

Observamos que H é homeomorfo ao produto cartesiano de um conjunto de Cantor por um intervalo e que $H_{\theta-}^g$ está C^1 -próximo de $H_{\theta-}$ para todo g suficientemente C^1 -próximo de f . Consideraremos, sob este ponto de vista, que $H = H^g = \mathcal{I} \times \mathcal{K}$ para todo g suficientemente C^1 -próximo de f , onde \mathcal{K} é conjunto de Cantor e $\mathcal{I} = H_{\theta-} = H_{\theta-}^g$ é intervalo.

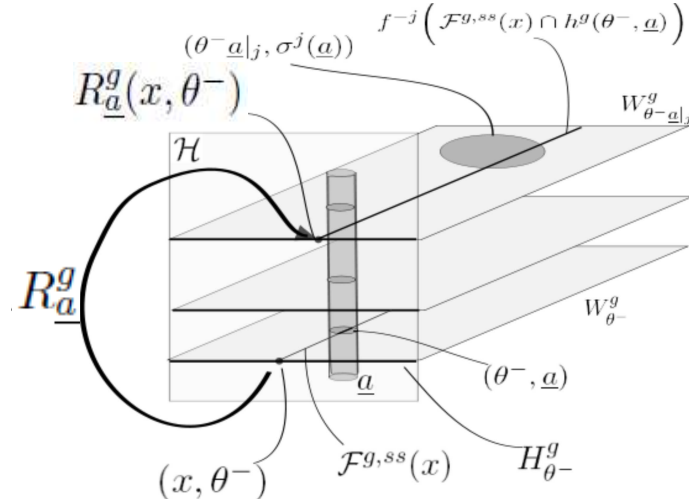
¹Para uma discussão eleitoral sobre este assunto veja a Revista Piauí 40 - Artur tem um problema por João Moreira Salles

Agora definiremos o operador de renormalização que desempenhará papel central no critério do compacto recorrente que explicaremos mais adiante.

Definição 4.1. *Operador de renormalização*

O **operador de renormalização** correspondente ao tubo $\underline{a} \in \Sigma^{+*}$ de g é definido por $R_{\underline{a}}^g : H \rightarrow H$, onde

$$R_{\underline{a}}^g(x, \theta^-) = \begin{cases} \Pi_{\theta^- \underline{a}}^g \left(g^{-|\underline{a}|} \left((\Pi_{\theta^-}^g)^{-1}(x) \cap h_{\theta^-}^g(\underline{a}) \right) \right), & \text{se } x \in \text{int} \left(\Pi_{\theta^-}^g \left(h_{\theta^-}^g(\underline{a}) \right) \right) \\ \infty, & \text{caso contrário} \end{cases}$$



Agora vamos introduzir o conceito de compacto recorrente.

Definição 4.2. *Compacto recorrente*

Um subconjunto compacto K de H é dito **compacto recorrente** para g se para qualquer $(x, \theta^-) \in K$, existe $\underline{a} \in \Sigma_{\theta_0^-}^*$ tal que $R_{\underline{a}}^g(x, \theta^-) \in \text{int}(K)$.

Utilizaremos a notação K_{θ^-} para representar $K \cap H_{\theta^-}$.

Proposição 4.3. *Robustez do compacto recorrente*

O critério do compacto recorrente é robusto, i.e., qualquer ferradura de classe C^∞ que esteja suficientemente C^1 -próxima da original satisfaz o critério do compacto recorrente para o mesmo compacto recorrente original.

Demonstração:

Para qualquer $p \in K$, existe cilindro vertical $\underline{a} = \underline{a}(p)$ tal que $R_{\underline{a}}(p)$ está em $\text{int}(K)$. Por continuidade de $R_{\underline{a}}$, existe vizinhança $W(p)$ de p tal que $R_{\underline{a}}(W(p)) \subset \text{int}(K)$. Como K é compacto, então existe cobertura finita, $\{W(p_1), \dots, W(p_m)\}$, para K tal que se denotarmos por $C := \{\underline{a}(p_j), 1 \leq j \leq m\}$ os cilindros verticais associados aos pontos de cada aberto da cobertura finita fixada, então para todo $p \in K$, existe cilindro vertical $\underline{a} \in C$ tal que $R_{\underline{a}}(p) \subset \text{int}(K)$.

Agora, fixados $\underline{a} \in \Sigma^{+*}$ e $(x, \theta^-) \in H$, $R_{\underline{a}}^g(x, \theta^-)$ varia continuamente com respeito a $g \in C^1$. Isso significa que para cada $\underline{a} = \underline{a}(p_i) \in C$, existe $\tilde{\delta}(p_i) > 0$, tal que se $\|f - g\|_{C^1} < \tilde{\delta}(p_i)$, então $R_{\underline{a}(p_i)}^g(x, \theta^-) \in \text{int}(K)$ para todo $(x, \theta^-) \in W(p_i)$. Logo, definindo $\tilde{\delta} := \min\{\tilde{\delta}(p_i), 1 \leq i \leq m\}$, se $\|f - g\|_{C^1} < \tilde{\delta}$, então $R_{\underline{a}(p_i)}^g(x, \theta^-) \in \text{int}(K)$ para todo $1 \leq i \leq m$ e $(x, \theta^-) \in W_i$. Isso significa, já que $\{W(p_j), 1 \leq j \leq m\}$ é cobertura para K , que K é compacto recorrente para todo g que esteja $\tilde{\delta}$ C^1 -próximo de f . ■

Agora, enunciaremos algumas consequências da existência de compacto recorrente.

4.2 Blenders

Os blenders foram utilizados em [1] para exibir uma nova classe de difeomorfismos C^1 robustamente transitivos e não-hiperbólicos. Desde então, os blenders têm se mostrado úteis para se obter propriedades ergódicas (ver [30]) e topológicas de difeomorfismos. Enunciaremos abaixo uma definição de blender - observamos que este enunciado foi influenciado pelo comentário que segue o tópico 'The main local property of the cs-blender' que está na seção 1 de [1].

Definição 4.4. *Blender*

Consideremos uma ferradura, (f, Λ) , de modo que seu fibrado tangente tem decomposição fina, $T_\Lambda M = E_\Lambda^{ss} \oplus E_\Lambda^{ws} \oplus E_\Lambda^u$, e um aberto, U , em M . Dizemos que (f, Λ, U) é blender se existe um campo de cones, C^{ss} , contínuo em U tal que qualquer curva tangente a C^{ss} intersecta $W^{g,u}(\Lambda^g)$ para qualquer ferradura (g, Λ^g) suficientemente C^1 -próxima de (f, Λ) .

Pelo que sabemos, os blenders conhecidos foram construídos através de um tipo de skew-horseshoe (ver [1]) e aparecem próximo de ciclos heterodimensionais ([2]). Estabelecemos, aqui, um critério para a existência de blenders - o critério do compacto recorrente.

Teorema 4.5. *Critério para existência de Blender*

Seja (f, Λ) ferradura em dimensão 3, C^∞ , com decomposição fina do fibrado tangente, $T_\Lambda M = E_\Lambda^{ss} \oplus E_\Lambda^{ws} \oplus E_\Lambda^u$, e com compacto recorrente K .

Então, para qualquer ferradura, (g, Λ^g) , C^1 -próxima de f e qualquer curva C^1 , ℓ , suficientemente C^1 -próxima de alguma folha de \mathcal{F}_{loc}^{ss} que passa por algum ponto de K , vale $\ell \cap W^{g,u}(\Lambda) \neq \emptyset$.

Em particular, existe aberto U em M na vizinhança de $\mathcal{F}_{loc}^{ss}(K)$ tal que (g, Λ^g, U) é blender.

Uma consequência deste teorema é que o compacto recorrente está contido na projeção ao longo da folheação estável-forte da ferradura, já que se $x \in K_{\theta^-}$ e $y := \mathcal{F}_{loc}^{ss}(x) \cap W^u(\Lambda)$, então $y \in \Lambda$, já que $\mathcal{F}_{loc}^{ss} \subset W_{loc}^s(\Lambda)$, o que implica que $y \in W_{loc}^s(\Lambda) \cap W_{loc}^u(\Lambda)$.

4.3 Outras consequências do critério do compacto recorrente

Enunciaremos, em seguida, mais algumas consequências do critério do compacto recorrente.

Teorema 4.6.

Seja (f, Λ) ferradura em dimensão 3, C^∞ , com decomposição fina do fibrado tangente, $T_\Lambda M = E_\Lambda^{ss} \oplus E_\Lambda^{ws} \oplus E_\Lambda^u$, e com compacto recorrente, K .

Então, para qualquer ferradura, (g, Λ^g) , C^1 -próxima de f , para todo $x \in \Lambda^g$ e qualquer função C^1 , $P : W_{loc}^{g,s}(x) \rightarrow \mathbb{R}$, satisfazendo $P'(x)v \neq 0$ para $v \in E^{ws}(x) \setminus \{0\}$ ($P'(x) \neq 0$ e de modo que sua curva de nível de P passando por x seja transversal a $E^{ws}(x)$), o conjunto $\text{int}(P(\Lambda^g \cap W_\varepsilon^s(x)))$ é não-vazio para todo $\varepsilon > 0$. ($W_\varepsilon^s(x)$ é vizinhança, em $W_{loc}^s(x)$, de tamanho ε em torno de x .)

Sejam (f, Λ) uma ferradura C^1 com decomposição fina $T_\Lambda M = E_\Lambda^{ss} \oplus E_\Lambda^{ws} \oplus E_\Lambda^u$, uma partição de Markov suficientemente fina de modo que tenhamos uma parede, \mathcal{H} . Dizemos que uma folheação C^0 com folhas C^1 , \mathcal{F} , é “transversal” para f se é transversal a E_Λ^{ws} , $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}^s$

(cada folha de \mathcal{F} está contida em alguma folha de \mathcal{F}^s) e cada folha de \mathcal{F} passa por \mathcal{H} uma e apenas uma vez.

O próximo corolário afirma que perto (e na mesma folha) da projeção de qualquer ponto da ferradura, existe um intervalo de projeções da ferradura.

Teorema 4.7.

Seja (f, Λ) ferradura em dimensão 3, C^∞ , com decomposição fina do fibrado tangente, $T_\Lambda M = E_\Lambda^{ss} \oplus E_\Lambda^{ws} \oplus E_\Lambda^u$, e com compacto recorrente, K .

Então, para qualquer ferradura, (g, Λ^g) , C^1 -próxima de (f, Λ) , a projeção ao longo de qualquer folheação \mathcal{F} transversal para g contém intervalo densamente em $\mathcal{F}_{loc}(\Lambda^g) \cap H_{\theta^-}$ para todo $\theta^- \in \Sigma^-$.

4.4 Teorema principal - tipicamente existem compactos recorrentes quando as ferraduras têm dimensão superior estável maior que 1

Agora podemos enunciar o principal teorema deste trabalho. Ele garantirá, tipicamente nas ferraduras com dimensão superior estável maior que 1 os resultados enunciados nas seções 4.2 e 4.3.

Teorema 4.8. Teorema principal

Seja (f, Λ) ferradura em dimensão 3, de classe C^∞ , com decomposição fina do fibrado tangente, $T_\Lambda M = E_\Lambda^{ss} \oplus E_\Lambda^{ws} \oplus E_\Lambda^u$, e satisfazendo $\bar{d}_s(\Lambda) > 1$.

Então, existe uma ferradura, (g, Λ^g) , C^∞ -próximo de f que possui compacto recorrente.

Deixaremos a demonstração do teorema 4.8 para as seções finais deste trabalho - seções 5, 6, 7 e 8.

Observamos que o teorema 4.8 garante o seguinte corolário para os teoremas 4.5, 4.6 e 4.7.

Corolário 4.9.

Seja (f, Λ) ferradura em dimensão 3, C^k ($k \in \mathbb{N}^ \cup \infty$), com decomposição fina do fibrado tangente, $T_\Lambda M = E_\Lambda^{ss} \oplus E_\Lambda^{ws} \oplus E_\Lambda^u$, e satisfazendo $\bar{d}_s(\Lambda) > 1$. Então, existe um C^1 -aberto, C^k -próximo de f tal que para qualquer ferradura (g, Λ^g) neste aberto, vale:*

- *para todo $x \in \Lambda^g$ e qualquer função C^1 , $P : W_{loc}^{g,s}(x) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo $P'(x)v \neq 0$ para $v \in E^{ws}(x) \setminus \{0\}$ ($P'(x) \neq 0$ e de modo que sua curva de nível de P passando por x seja transversal a $E^{ws}(x)$), então $\text{int}(P(\Lambda^g \cap W_\varepsilon^s(x))) \neq \emptyset$ para todo $\varepsilon > 0$.*
- *A projeção ao longo de qualquer folheação \mathcal{F} transversal para g contém intervalo de H densamente em $\mathcal{F}(\Lambda^g) \cap H_{\theta^-}$ para todo $\theta^- \in \Sigma^-$.*

- para qualquer curva C^1 , ℓ , suficientemente C^1 -próxima de alguma folha de \mathcal{F}_{loc}^{ss} que passa por algum ponto de K , vale $\ell \cap W^u(\Lambda) \neq \emptyset$. Em outras palavras, existe um aberto U em M na vizinhança de $\mathcal{F}_{loc}^{ss}(K)$ tal que (g, Λ^g, U) é blender.

O argumento da seção 4 de [18] garante que se uma ferradura (f, Λ) de classe C^∞ em dimensão 3 com índice 1 satisfaz $\bar{d}_s(\Lambda) > 1$, então existe alguma continuação hiperbólica dela, (g, Λ^g) , C^∞ -próxima da original que possui uma subferradura $(g, \tilde{\Lambda}^g)$ satisfazendo $\bar{d}_s(\tilde{\Lambda}^g) > 1$ e com decomposição do subfibrado tangente fina, $T_\Lambda M = E_\Lambda^{ss} \oplus E_\Lambda^{ws} \oplus E_\Lambda^u$. Dessa forma, as mesmas conclusões enunciadas nesta seção podem ser estabelecidas para continuações hiperbólicas de alguma subferradura $\tilde{\Lambda}$ de Λ .

Observamos também que o caso $\bar{d}_s(\Lambda) < 1$ é bastante diferente. De fato, neste caso a dimensão de Hausdorff da projeção de Λ ao longo de \mathcal{F}^{ss} em cada folha seria menor que 1, já que a projeção é Lipschitz e $HD(\Lambda \cap W_{loc}^s(x)) \leq \bar{d}_s(\Lambda) < 1$, para todo $x \in \Lambda$. O que significa que a projeção não contém intervalos.

4.5 Demonstração das consequências do critério do compacto recorrente

Agora, demonstraremos os teoremas 4.5, 4.6 e 4.7.

Demonstração do teorema 4.5:

Suponhamos que ℓ esteja C^1 suficientemente ε -próxima de $\mathcal{F}_{loc}^{ss}(x, \theta^-)$, onde $(x, \theta^-) \in K$. Vamos provar que para todo g C^1 suficientemente δ -próximo de f , $W_{loc}^{g,u}(\Lambda^g) \cap \ell \neq \emptyset$.

Para qualquer $p \in K$, existem $\delta = \delta(p) > 0$ e cilindro vertical $\underline{a} = \underline{a}(p)$ tais que a bola de raio $\delta > 0$ em torno de $R_{\underline{a}}(p)$ (denotada por $B_\delta(R_{\underline{a}}(p))$), está contida em K . Por continuidade de $R_{\underline{a}}$, existe vizinhança $W(p)$ de p tal que $B_{\frac{\delta}{2}}(R_{\underline{a}}(W(p))) \subset K$. Como K é compacto, então existe cobertura finita, $\{W(p_1), \dots, W(p_m)\}$, para K tal que se $n_0 := \max\{|\underline{a}(p_j)|, 1 \leq j \leq m\}$, $\eta := \min\{\frac{\delta(p_j)}{2}, 1 \leq j \leq m\}$ e $C := \{\underline{a}(p_j), 1 \leq j \leq m\}$ são os cilindros verticais associados aos pontos de cada aberto da cobertura finita fixada, então para todo $p \in K$, existe cilindro vertical $\underline{a} \in C$ com $|\underline{a}| < n_0$ tal que $B_\eta(R_{\underline{a}}(p)) \subset \text{int}(K)$.

Portanto, se $\varepsilon > 0$ for escolhido suficientemente pequeno, então qualquer curva, $\tilde{\ell}$, C^1 ε -próxima de $\mathcal{F}_{loc}^{ss}(x, \theta^-)$ tem interseção não vazia com o mesmo cilindro, $\underline{a} \in C$, correspondente ao aberto $W(p_j)$ a que (x, θ^-) pertence.

Além disso, se $\delta > 0$ for escolhido suficientemente pequeno, então para qualquer difeomorfismo, g , C^1 δ -próximo de f e para qualquer $(x, \theta^-) \in K$, afirmamos que se $\underline{a} \in C$ é um cilindro vertical correspondente ao aberto da cobertura fixada que possui (x, θ^-) , então $(g^{-|\underline{a}|}(\ell))_{loc}$ está C^1 ε -próximo de $\mathcal{F}_{loc}^{ss}(\tilde{x}, \theta^-_{\underline{a}})$ para algum $\tilde{x} \in K_{\theta^-_{\underline{a}}}$.

Para ver isso basta observar que a folheação estável-forte atrai qualquer folha transversal à direção estável-fraca, de modo que existe constante $0 < \lambda < 1$ tal que $(f^{-|\underline{a}|}(\ell))_{loc}$ está C^1 $\lambda\varepsilon$ -próximo de alguma folha da folheação estável-forte passando por $B_{\frac{\eta}{2}}(R_{\underline{a}}(p))$ se ε for escolhido suficientemente pequeno, já que $|\underline{a}| < n_0$ e portanto $dist_{C^0}((f^{-|\underline{a}|}(\ell))_{loc}, f^{-|\underline{a}|}(\mathcal{F}^{ss}(x, \theta^-))) < c\varepsilon$ para alguma constante $c > 0$ e $c\varepsilon < \frac{\eta}{2}$ se ε for suficientemente pequeno. Portanto, $(g^{-|\underline{a}|}(\ell))_{loc}$ está C^1 $(\lambda\varepsilon + \delta)$ -próximo de alguma folha da folheação estável-forte de f passando por algum ponto de $B_{\eta}(R_{\underline{a}}(p))$ se δ e ε forem escolhidos suficientemente pequenos, já que $|\underline{a}| < n_0$ e portanto $dist_{C^0}((f^{-|\underline{a}|}(\ell))_{loc}, g^{-|\underline{a}|}(\ell)_{loc}) < \tilde{c}\varepsilon$ para alguma constante $\tilde{c} > 0$ e $\tilde{c}\varepsilon < \frac{\eta}{2}$ se ε for suficientemente pequeno. Portanto, se $\delta > 0$ for escolhido suficientemente pequeno de modo que $\lambda\varepsilon + \delta < \varepsilon$, podemos concluir que $(g^{-|\underline{a}|}(\ell))_{loc}$ está C^1 ε -próximo de $\mathcal{F}_{loc}^{ss}(\tilde{x}, \theta^-_{\underline{a}})$ para algum $\tilde{x} \in K_{\theta^-_{\underline{a}}}$, já que $B_{\eta}(R_{\underline{a}}(p)) \subset int(K)$.

Como (x, θ^-) está em K , existe $\underline{a}^0 \in C$ tal que $x_1 := R_{\underline{a}^0}(x_0, \theta^-) \in int(K_{\theta^-_{\underline{a}^0}})$. Ou seja, $\mathcal{F}_{loc}^{ss}(x, \theta^-) \cap \underline{a}^0 \neq \emptyset$ e $f^{-|\underline{a}^0|}(\mathcal{F}_{loc}^{ss}(x, \theta^-) \cap \underline{a}^0)_{loc} = \mathcal{F}_{loc}^{ss}(x_1, \theta^-_{\underline{a}^0})$.

Isto implica que existe $\tilde{x}_1 \in K_{\theta^-_{\underline{a}^0}}$ tal que $\mathcal{F}_{loc}^{ss}(\tilde{x}_1, \theta^-_{\underline{a}^0})$ está C^1 ε -próximo de $g^{-|\underline{a}^0|}(\ell)_{loc}$.

Como $\tilde{x}_1 \in K_{\theta^-_{\underline{a}^0}}$, existe cilindro \underline{a}^1 tal que $x_2 := R_{\underline{a}^1}(\tilde{x}_1, \theta^-_{\underline{a}^1}) \in int(K_{\theta^-_{\underline{a}^1 \underline{a}^2}})$. Ou seja, $\mathcal{F}_{loc}^{ss}(\tilde{x}_1, \theta^-_{\underline{a}^0}) \cap \underline{a}^1 \neq \emptyset$. Isto implica que $g^{-|\underline{a}^0|}(\ell \cap \underline{a}^0)_{loc} \cap \underline{a}^1 \neq \emptyset$.

Argumentando recursivamente, existe seqüência de cilindros verticais em Σ^{+*} , $(\underline{a}^j)_{j \geq 0}$, satisfazendo $g^{-\sum_{j=0}^l |\underline{a}^j|}(\ell \cap \underline{a}^0 \dots \underline{a}^{l-1})_{loc} \cap \underline{a}^j \neq \emptyset$ para todo $l \in \mathbb{N}$, onde $\underline{a}^0 \dots \underline{a}^{l-1} \in \Sigma^{+*}$. Portanto, $\bigcap_{j \geq 0} \underline{a}^0 \dots \underline{a}^j \cap \ell \neq \emptyset$, onde $\underline{a}^0 \dots \underline{a}^j \in \Sigma^{-*}$. Isto implica que $\ell \cap W_{loc}^{g,u}(\Lambda^g) \neq \emptyset$. ■

Demonstração do teorema 4.7:

Observamos que se a folheação \mathcal{F} fosse C^1 , esse resultado seria um corolário do teorema 4.6. Basta olharmos para a folheação \mathcal{F} localmente como uma folheação por curvas de nível de uma função que satisfaz as hipóteses do teorema 4.5. Isso significa que a projeção de $\Lambda_{\theta^-}^g$ ao longo de \mathcal{F} contém intervalo densamente em $\mathcal{F}_{loc}(\Lambda^g) \cap H_{\theta^-}$.

Para provarmos o resultado no caso em que a folheação \mathcal{F} é C^0 com folhas C^1 , precisamos utilizar o teorema 4.5.

Sejam $y \in \mathcal{F}_{loc}(x) \cap H_{\theta^-}$, onde $x \in \Lambda^g \cap W_{\theta^-}$ e V um aberto em H_{θ^-} em torno de y . Provaremos que $\mathcal{F}_{loc}(\Lambda^g)$ contém intervalo em V para qualquer g suficientemente C^1 -próximo de f . Para isso, fixaremos uma vizinhança U de x em W_{θ^-} tal que $\mathcal{F}_{loc}(U) \cap H_{\theta^-} \subset V$ e provaremos que $\mathcal{F}_{loc}(\Lambda^g \cap U)$ contém intervalo.

Sejam $\tilde{x} \in \Lambda^g$ tal que $\{g^n(\tilde{x})\}_{n \in \mathbb{Z}}$ seja denso em Λ^g e $n_0 \in \mathbb{Z}$ tais que $g^{n_0}(\tilde{x})$ esteja suficientemente próximo de x de modo que $W_{loc}^{g,u}(\tilde{x}) \cap W_{\theta^-}^g$ seja exatamente um ponto, \hat{x} , de $\Lambda^g \cap U$. Observamos que $\{g^{-n}(\hat{x})\}_{n \in \mathbb{N}}$ é denso em Λ^g , pois $\hat{x} \in W^u(\tilde{x})$ e $\{g^n(\tilde{x})\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é denso

em Λ^g .

Se g estiver suficientemente C^1 -próximo de f , então existe $n_1 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $g^{-n_1}(\mathcal{F}(\hat{x}))_{loc}$ está suficientemente C^1 -próximo de alguma folha de \mathcal{F}_{loc}^{ss} passando por $\text{int}(K)$ de modo que valha o teorema 4.5 para $g^{-n_1}(\mathcal{F}(\hat{x}))_{loc}$ (e portanto, para um aberto da folheação $g^{-n_1}(\mathcal{F})_{loc}$ em torno da folha $g^{-n_1}(\mathcal{F}(\hat{x}))_{loc}$).

Portanto, qualquer folha desse aberto de $g^{-n_1}(\mathcal{F})_{loc}$ intersecta $W^u(\Lambda^g)$. Mas, como qualquer folha dessas está em $W_{loc}^{g,s}(g^{-n_1}(\hat{x}))$ (lembramos que $\hat{x} \in \Lambda^g$), então qualquer folha dessas intersecta Λ^g . Isso significa que qualquer folha de algum aberto da folheação \mathcal{F}_{loc} em torno da folha $\mathcal{F}_{loc}(\hat{x})$ intersecta Λ^g . Ou seja, $\mathcal{F}_{loc}(U \cap \Lambda^g)$ contem intervalo em V , já que $\hat{x} \in U$ e $\mathcal{F}_{loc}(U) \cap H_{\theta^-} \subset V$.

■

Demonstração do teorema 4.6:

Observamos que as curvas de nível, $\tilde{\mathcal{F}}$, de $P|_{W_\varepsilon^s(x)}$ em $W_\varepsilon^s(x)$ são transversais à direção estável-fraca para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Observe que se $n \in \mathbb{N}$ for suficientemente grande, então $\mathcal{F} := g^{-n}(\tilde{\mathcal{F}})_{loc} \cap W_{loc}^{g,s}(g^{-n}(x))$ é uma folheação C^1 para $W_{loc}^{g,s}(g^{-n}(x))$ tal que suas folhas passando por Λ são transversais a E^{ws} . Podemos proceder, portanto, da mesma maneira que fizemos na demonstração do teorema 4.7 para demonstrar que $\mathcal{F}(\Lambda^g)$ contem intervalo e que, portanto, $P(W_\varepsilon^s(x) \cap \Lambda^g)$ contem intervalo.

■

5 Resumo da demonstração do teorema 4.8

Vamos provar que para qualquer $k \geq 2$, existe ferradura (g, Λ^g) C^k -próxima de (f, Λ) e que tenha compacto recorrente.

Para qualquer folha estável e para cada $\rho > 0$, obtemos da ordem de $\rho^{-\bar{d}_s}$ peças disjuntas de ordem $\rho > 0$ - peças com diâmetro aproximadamente ρ - em cada uma dessas folhas. Feito isso, conseguimos escolher uma fração positiva dessas peças (e portanto da ordem de $\rho^{-\bar{d}_s}$ peças de ordem ρ) de modo que todas estão em algum acavalamento - um acavalamento é um conjunto de peças que intersectam a mesma folha estável forte - com pelo menos $\rho^{-(\bar{d}_s-1)}$ peças. Podemos ainda considerar, sem perda de generalidade - após uma perturbação C^k -pequena (argumento do tipo Marstrand) - que para a maioria das folhas estáveis a projeção das peças desses acavalamentos ao longo da folheação estável-forte tem medida de Lebesgue limitada por baixo por alguma constante positiva. Definimos o candidato a compacto recorrente como a projeção sobre a parede ao longo da folheação estável forte dessas peças.

Agora, criaremos uma família de perturbações, $\{f^\omega\}_{\omega \in \Omega}$ ($\Omega := [-1, 1]^{\Sigma_1}$), a $|\Sigma_1|$ parâmetros ($|\Sigma_1| \gg 1$), C^k -pequena e adaptaremos o argumento probabilístico para essa família de perturbações para provar que a probabilidade, em Ω , de que $K = K(\rho)$ seja compacto recorrente para f^ω converge para 1 quando ρ se aproxima de 0.

Essa família de perturbações será tal que para todo $(x, \theta^-) \in K_{\theta^-}$ e $\underline{a} \in \Sigma^{+*}$ de modo que $(x, \theta^-) \in \text{int}(\Pi_{\theta^-}(\underline{a}))$, os eventos $\{\underline{\omega} \in \Omega \text{ tais que } R_{\underline{a}}^{\underline{\omega}}(x, \theta^-) \in K_{-\rho^2}\}$, (onde $K_{-\delta}$ é o conjunto $\{(x, \theta^-) \in K \text{ tais que suas vizinhanças de raio } \delta \text{ em } H \text{ estão contidas em } K\}$ são essencialmente mutuamente independentes para pelo menos $\rho^{-\frac{c}{k}(\bar{d}_s-1)}$ (para algum $c > 0$) daquelas $\rho^{-(\bar{d}_s-1)}$ peças \underline{a} 's em um mesmo acavalamento e que $P_\Omega\left(\underline{\omega} \in \Omega \text{ tal que } R_{\underline{a}}^{\underline{\omega}}(x, \theta^-) \in K_{-\rho^2}\right) > P$ para cada um desses \underline{a} 's, onde $P > 0$ está fixado. Isso é possível fazendo com que cada coordenada da família de perturbações corresponda a deslocar da ordem de ρ e com velocidade aproximadamente constante cada bloco de uma partição de Λ formada por blocos com diâmetro da ordem de $\rho^{\frac{1}{k}}$. Esses deslocamentos têm que ser independentes para as peças no mesmo acavalamento. Feito isso, como o operador de renormalização leva cada peça dessas em uma folha, então a pré-imagem correspondente da folha estável-forte de (x, θ^-) se desloca com velocidade aproximadamente constante ao longo de toda a folha estável em que cai. Dessa forma, como a projeção das peças de ordem ρ que se projetam no candidato a compacto recorrente nessa folha em que o operador de renormalização cai tem medida de Lebesgue limitada por baixo por uma constante positiva, então a probabilidade de que o operador de renormalização caia no interior ρ^2 -folgado dessa projeção - que é um

pedaço do conjunto $K_{-\rho^2}$ - é maior que algum número positivo, $P > 0$.

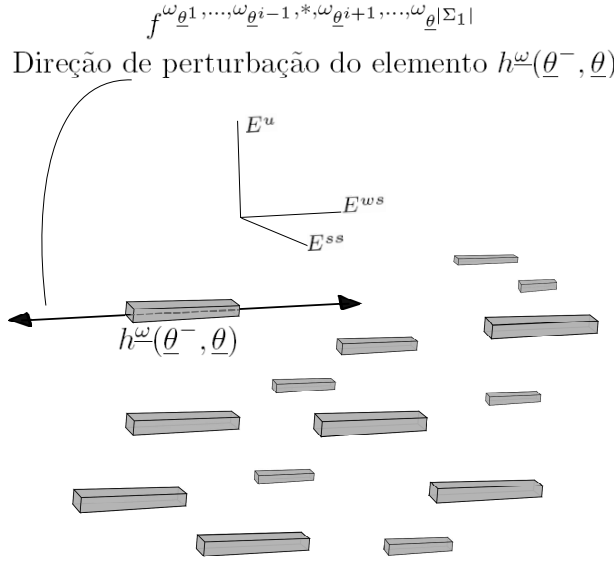


Figura 1: Perturbação do argumento probabilístico

Vamos descrever o argumento probabilístico para essa família de perturbações. Pela independência, a probabilidade de $R_{\underline{a}}^{\omega}(x, \theta^-)$ não cair em $K_{-\rho^2}$ para todas aquelas $\rho^{-\frac{c}{k}(\bar{d}_s-1)}$ peças \underline{a} 's em cima de (x, θ^-) (as peças que intersectam a folha estável-forte de (x, θ^-)) é menor que algo da ordem de $(1 - P)^{-\left(\rho^{-\frac{c}{k}(\bar{d}_s-1)}\right)}$.

Podemos decompor o conjunto K em aproximadamente ρ^{-5} retângulos de lados ρ^4 por ρ de modo que se $R_{\underline{a}}^{\omega}(x, \theta^-) \in K_{-\rho^2}$, então $R_{\underline{a}}^{\omega}(\tilde{x}, \tilde{\theta}^-) \in \text{int}(K)$, para todo $(\tilde{x}, \tilde{\theta}^-)$ no retângulo correspondente dessa decomposição contendo (x, θ^-) . Dessa forma, a probabilidade de existir $\omega \in \Omega$ tal que para todo $(x, \theta^-) \in K$, existe alguma peça, \underline{a} , de modo que $R_{\underline{a}}^{\omega}(x) \in \text{int}(K)$ é maior que $1 - \rho^{-5}(1 - P)^{-\left(\rho^{-\frac{c}{k}(\bar{d}_s-1)}\right)}$. Essa probabilidade converge para 1 quando a escala ρ converge para zero. Dessa forma, para a maioria dos $\omega \in \Omega$, K é compacto recorrente para f^{ω} . Isso finaliza a demonstração do teorema principal.

Vamos agora discutir alguns atalhos que utilizamos neste resumo. Queremos que as perturbações sejam C^k -pequenas ($\forall k \geq 2$) e que as peças no mesmo acavalamento se movam de forma essencialmente independente. Para conseguirmos isso teremos que garantir que essas peças estejam distanciadas uma das outras da ordem de $\rho^{\frac{1}{k}}$. Para isso, encontramos, antes, acavalamentos com peças de ordem $\rho^{\frac{c}{k}}$ (para algum $0 < c < 1$ dependendo apenas da não-conformalidade de $df|_{E^s}$) e, posteriormente, criamos acavalamentos com peças da ordem de ρ , contidas nos acavalamentos anteriores e de modo que para cada acavalamento desses de ordem ρ , conseguimos encontrar $\rho^{-\frac{c}{k}(\bar{d}_s-1)}$ de suas peças distribuídas em $\rho^{-\frac{c}{k}(\bar{d}_s-1)}$ peças

disjuntas dos acavalamentos de ordem $\rho^{\frac{c}{k}}$ que já haviam sido construídos.

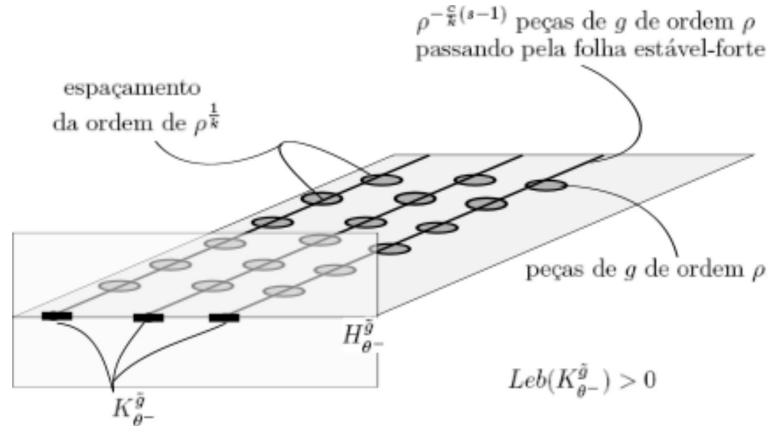


Figura 2: Acavalamentos bem espaçados

Além disso, como vamos analisar o deslocamento de peças com respeito às folhas estável-fortes, retiraremos de nossas considerações as folhas estáveis muito recorrentes - aquelas que em um curto intervalo de tempo retornam próximas delas mesmas pelas iteradas para frente do difeomorfismo. Observamos que eliminaremos poucas folhas. Ainda teremos outro problema: temos que evitar - para conseguirmos a independência dos deslocamentos das peças no mesmo acavalamento - que não teremos nos acavalamentos peças muito recorrentes, pois elas podem sofrer efeito duplo da perturbação do parâmetro correspondente a ela mesma ou sofrer efeito de perturbações em parâmetros correspondentes a outras peças do mesmo acavalamento. Para isso, eliminamos as peças de ordem ρ cujas pré-imagens retornam por um intervalo de tempo curto em uma vizinhança da folha em que mora. Essas peças formam uma fração pequena das $\rho^{-\bar{d}_s}$ peças que estavam na folha antes de contruirmos os acavalamentos, de modo que ainda conseguiremos construir os acavalamentos mencionados acima com essas peças pouco recorrentes. Observamos que podemos escolher essas peças pouco recorrentes de modo que ainda retornem, pela ‘renormalização’ em folhas que não tinham sido eliminadas, já que sobraram uma proporção positiva das folhas iniciais.

Descrevemos agora o argumento do tipo Marstrand. Este é o nome que damos àquela primeira perturbação que faremos. Ela nos servirá para encontrarmos um difeomorfismo, \tilde{g} , C^k -próximo do original, f , que satisfaz a propriedade que chamaremos de **tipo Marstrand**: para uma boa parte das folhas estáveis $\theta^- \in \Sigma^-$, existe uma medida $\nu_{\theta^-}^{\tilde{g}}$ em H_{θ^-} suportada na projeção de Λ tal que sua derivada de Radon-Nykodin com respeito à medida de Lebesgue, Leb , em H_{θ^-} é L_2 e têm norma L_2 limitada superiormente para todas essas folhas θ^- , uniformemente (em particular as projeções da ferradura sobre as paredes H_{θ^-} têm medida

de Lebesgue não-nula).

Para realizarmos a primeira perturbação - argumento do tipo Marstrand - procedemos segundo o trabalho [32]. Aí os autores exibem condições suficientes - transversalidade e continuidade de distorção (esses conceitos serão introduzidos mais adiante) - para que uma família a multi-parâmetros de sistema de funções iteradas (SFI) de contrações com distorções limitadas em um intervalo da reta tenham conjuntos invariantes com medida de Lebesgue positiva para quase todos os multi-parâmetros. Criaremos uma família a N -parâmetros de perturbações, $\{f^t\}_{t \in I^N}$, na qual variar cada coordenada desse multi-parâmetro corresponde a mover, na direção estável-fraca, cada elemento da partição de Markov da ferradura, que será escolhida suficientemente fina se necessário.

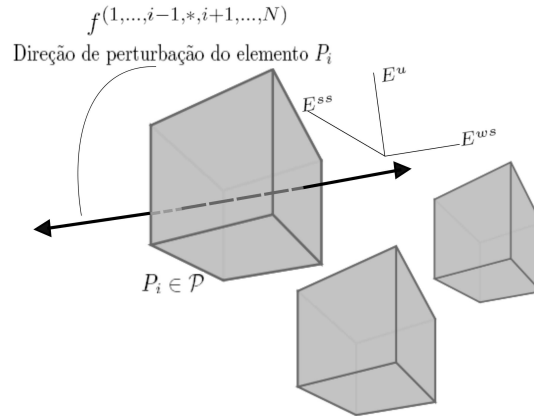
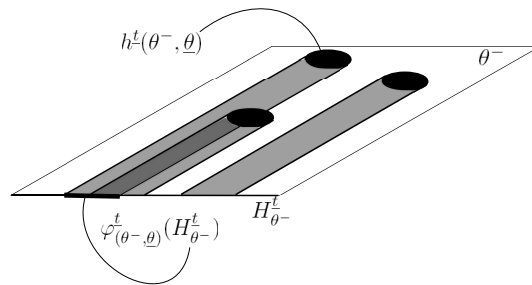


Figura 3: Perturbação que propicia a argumentação do tipo Marstrand

Desta família, e para cada $\theta^- \in \Sigma^-$, criaremos uma família a N -parâmetros de sistema de funções, $\{\Phi_{\theta^-}^t\}_{t \in I^N}$, em que cada $\Phi_{\theta^-}^t$ é um sistema de funções $\{\varphi_{(\theta^-, \underline{\theta})}^t\}_{\underline{\theta} \in \Sigma_{\theta_0^-}^*}$ que consiste, basicamente, em que cada função, $\varphi_{(\theta^-, \underline{\theta})}^t$, seja uma contração em H_{θ^-} cuja imagem é a projeção da peça correspondente à palavra $\underline{\theta}$ para f^t .



Alterando um pouco os argumentos de [32] conseguiremos adaptar seu resultado para o nosso caso e concluir que para boa parte das folhas $\theta^- \in \Sigma^-$ e dos parâmetros $\underline{t} \in I^N$, existem medidas $\nu_{\theta^-}^{\underline{t}}$ suportadas na projeção da ferradura tais que suas derivadas de Radon-Nykodin são L_2 com normas L_2 limitadas uniformemente por cima. Feito isso, escolheremos um $\underline{t} \in I^N$ de modo que as normas L_2 dessas derivadas de Radon-Nykodin sejam limitadas por cima para uma boa parte das folhas $\theta^- \in \Sigma^-$. Ao f^t correspondente a esse \underline{t} fixado daremos o nome de \tilde{g} , sob o qual iniciaremos o argumento probabilístico.

6 Preparação para os argumentos do tipo Marstrand e probabilístico

6.1 Algumas notações

Para cada elemento $P \in \mathcal{P}$ fixamos uma variedade instável local, $W_{loc}^u(x_P)$, de algum ponto de $x_P \in P$.

Definimos a distância de duas folhas em uma mesma partição por $dist^-(\theta^-, \tilde{\theta}^-) := l(W_{\theta^-, \tilde{\theta}^-}^u(x_P))$, onde l é o comprimento e $W_{\theta^-, \tilde{\theta}^-}^u(x_P)$ é o pedaço de $W_{loc}^u(x_P)$ que está entre as folhas θ^- e $\tilde{\theta}^-$.

Observamos que a folheação estável é C^1 de modo que podemos garantir que $l(\underline{\theta}^- \cap W_{loc}^u(\theta)) \asymp l(\underline{\theta}^- \cap W_{loc}^u(\hat{\theta}))$ para quaisquer $\theta, \hat{\theta}$ em $\Sigma \cap \underline{\theta}^-$, com $\underline{\theta}^- \in \Sigma^{*-}$.

Fixado $c_1 > 1$, definimos o conjunto das palavras finitas para trás de ordem $\rho > 0$ (podemos, também, chamar esse conjunto por blocos de ordem ρ de folhas) por

$$\Sigma^-(\rho) := \{\underline{\theta}^- \in \Sigma^{*-}; c_1^{-1}\rho \leq diam^-(\underline{\theta}^-) \leq c_1\rho\}.$$

Denotaremos por $\Sigma^-\Sigma^{+*} := \bigcup_{\theta^- \in \Sigma^-} \bigcup_{\underline{\theta} \in \Sigma_{\theta^-}^{+*}} (\theta^-, \underline{\theta})$ o conjunto de todas as peças.

Denotaremos a projeção pelo difeomorfismo $g \in C^\infty$ de uma peça $(\theta^-, \underline{\theta}) \in \Sigma^-\Sigma^{+*}$ por $I_{(\theta^-, \underline{\theta})}^g := \Pi_{\theta^-}^g(\underline{\theta})$, onde $\Pi_{\theta^-}^g$ é a projeção ao longo da folheação estável forte de g sobre a parede H_{θ^-} .

Dada uma família a multi-parâmetros, $\{f_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$, denotaremos as peças da folha θ^- de ordem ρ por $\Sigma_{\theta^-}(\rho)$. Estas são as peças de $\Sigma_{\theta^-}^{+*}$ tais que $c_1^{-1}\rho \leq |I_{(\theta^-, \underline{\theta})}^\gamma| \leq c_1\rho$ para toda folha $\tilde{\theta}^- \in \Sigma^-$ tal que $\theta_0^- = \tilde{\theta}_0^-$ e para todo $\gamma \in \Gamma$.

Dizemos que um cilindro tem ordem ρ - a notação para esses cilindros será $\Sigma^+(\rho)$ - se a interseção dele com alguma folha estável (e portanto com qualquer que o intersecta) tem ordem ρ .

Observamos que utilizando a mesma técnica para demonstrar o lema 9.1 do apêndice, podemos demonstrar que dada uma ferradura (f, Λ) de classe C^k ($k \geq 2$ ou $k = \infty$), $d_s(h(\theta^-, \underline{\theta})) \asymp d_s(h^g(\theta^-, \underline{\theta}))$ para todo $\underline{\theta}$ com diâmetro ρ e qualquer g de classe C^k satisfazendo $\|g - f\|_k < \rho$. Portanto, já que \mathcal{F}^{ss} é C^1 , $I_{(\theta^-, \underline{\theta})} \asymp I_{(\theta^-, \underline{\theta})}^\gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$, $\theta^- \in \Sigma^-$ e $\tilde{\theta}^- \in \Sigma^-$ com $\theta_0^- = \tilde{\theta}_0^-$ para as duas famílias de perturbações que faremos ao longo da demonstração do teorema.

6.2 Perturbações, não recorrências e influência das perturbações sobre peças e folhas não recorrentes

Ao desenvolvermos os argumentos do tipo Marstrand e probabilístico, utilizaremos em dois momentos os lemas que serão enunciadas nesta seção. Eles dizem respeito ao efeito sobre os movimentos das peças quando o difeomorfismo está sujeito a uma família de perturbações. A dificuldade é que podem haver peças tão recorrentes de modo que os parâmetros que desejamos que tenham influência sobre elas não exerçam o efeito desejado sobre elas ou, ao contrário, que os parâmetros que desejamos que não tenham influência, exerçam influência sobre outras peças. Resolveremos este problema retirando de nossas considerações tais peças (que chamaremos de - e são - recorrentes). O mesmo ocorre para as folhas estável-fortes - suas imprevisibilidades podem ser da mesma ordem que a dos deslocamentos desejados das peças. Como nosso objetivo será deslocarmos as peças com relação às folheações estável-fortes, vamos precisar eliminar ou reduzir as dispersões das folhas estável-fortes. Isso será feito eliminando-se de nossas considerações as folhas estáveis muito recorrentes.

Para realizarmos as perturbações necessárias, consideraremos que cada elemento P da partição \mathcal{P} esteja escrito, via alguma parametrização C^k , de modo que P seja a caixa $[-1, 1]^3$ e denotaremos por $e(P)$ um vetor unitário de $E^{ws}(x_P) \setminus \{0\}$, onde x_P é algum ponto fixado de $\Lambda \cap P$, para todo $P \in \mathcal{P}$. Observamos que a partição de Markov para g é, sem perda de generalidade, a mesma de f se as perturbações forem suficientemente pequenas. Para ver isso, basta pegar a partição formada pelas vizinhanças compactas dos elementos da partição, \mathcal{P} , original.

Sejam, fixadas constantes $c_2 > 1$ e $c_3 > 0$. Definiremos, em seguida, o modelo de família de perturbações que utilizaremos em dois momentos ao longo deste trabalho. Consideramos $\Sigma^-(\alpha)\Sigma(\tilde{\alpha}) := \bigcup_{\underline{\theta}^- \in \Sigma^-(\alpha)} \bigcup_{\underline{\theta} \in \Sigma_{\theta_0^-}(\tilde{\alpha})} (\underline{\theta}^-, \underline{\theta})$

Definição 6.1. *Modelo de família de perturbações*

Sejam fixados $\alpha > 0$, $\tilde{\alpha} > 0$, $\rho > 0$ e uma partição, $\tilde{\Sigma}$, para Σ formada por peças, $(\underline{\theta}^-, \underline{\theta})$, de $\Sigma^-(\alpha)\Sigma(\tilde{\alpha})$. Dizemos que uma família de perturbações - $\{f^\underline{\gamma}\}_{\underline{\gamma} \in \Gamma}$, onde $\Gamma := [-1, 1]^{\tilde{\Sigma}}$ - é do tipo $(\tilde{\Sigma}, \alpha, \tilde{\alpha}, \rho)$ se para cada $\underline{\gamma} := (\gamma_{\underline{a}})_{\underline{a} \in \tilde{\Sigma}}$,

$$f^\underline{\gamma}(x) = (id + \gamma_{\underline{a}} X_{\underline{a}}) \circ f(x), \text{ se } x \in f^{-1}(h(\underline{a})),$$

onde $X_{\underline{a}}(x) = c_3 \rho \chi(T(x))e(P(x))$ e $P(x)$ é o elemento da partição \mathcal{P} que possui x , T é uma transformação afim de $h(\underline{a})$ em $[-1, 1]^3$ e χ é uma função C^∞ que satisfaz

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } \|x\| \leq c_2 \\ 0, & \text{se } \|x\| \geq c_2^2 \end{cases}$$

Observação 6.2. *Assumindo-se $0 < c < 1$, se α e $\tilde{\alpha}$ forem escolhidos da ordem de $\rho^{\frac{c}{k}}$, então esse tipo de perturbação é C^{k-1} -pequena desde que a escala $\rho > 0$ seja escolhida suficientemente pequena, pois*

$$\left\| \frac{\partial^j}{\partial e_{i_1} \dots \partial e_{i_j}} X_a \right\| \leq \frac{\partial^j}{\partial e_{i_1} \dots \partial e_{i_j}} \chi(T(x)) \rho^{1-\frac{j}{k}} \text{ é pequeno para todo } j \leq k.$$

A definição a seguir nos servirá para controlar a dispersão dos deslocamentos das peças que desejamos perturbar e as interferências exercidas sobre as peças que não desejamos perturbar. Ela será útil tanto no argumento do tipo Marstrand quanto no probabilístico. Nos dois casos, ela impedirá que perturbações em peças de uma folha influenciem, consideravelmente, nas outras peças da mesma folha e que haja influência duplicada nelas mesmas, já que ela significa que as iteradas para trás, pelo difeomorfismo, da peça $(\theta^-, \underline{\theta})$ não retornarão próximas à folha θ^- por um tempo suficientemente grande para que as influências (secundárias) devidas às perturbações propagadas por tão longo tempo nessa peça sejam pequenas.

Definição 6.3. *Palavra (α, β) -não recorrente*

Dizemos que uma palavra $\underline{\theta} \in \Sigma_{\theta_0^-}(\beta)$ é (α, β) -não-recorrente na folha θ^- se qualquer palavra final, $\underline{\theta}^-$ de θ^- , em $\Sigma^-(\alpha)$, não aparece em $\underline{\theta}^- \underline{\theta} \in \Sigma^{-}$ novamente.*

Denotamos esse conjunto de palavras não recorrentes na folha θ^- por $\Sigma_{(\alpha, \beta), \theta^-}^$ ou $\Sigma_{(\alpha, \beta), \theta^-}(\beta)$.*

Ao fazermos passar pelo difeomorfismo original, f , uma família de perturbações, podemos eventualmente fazer a folheação estável-forte variar. Não desejamos que ela varie muito em qualquer lugar, pois estaremos interessados nos deslocamentos das peças relativamente à folheação estável-forte. Resolveremos este problema em breve.

A proposição a seguir, 6.4, estabelece qual é o efeito das perturbações sobre o deslocamento das peças que estão nas iteradas para frente dos blocos perturbadas. Observamos que as peças pouco recorrentes apresentarão deslocamentos previsíveis - essencialmente da ordem do tamanho da perturbação da família de perturbações se elas demorarem pouco tempo para chegar, mediante iterados para trás, na peça que está sendo perturbada, caso contrário, elas se deslocarão, no máximo, por uma fração pequena do tamanho das perturbações (afirmamos ainda que suas fronteiras se permanecerão imóveis caso esse tempo seja tão longo de modo que as peças virem folhas e durante este percurso não tenham caído dentro da peças que estão sendo perturbadas). As peças pouco recorrentes são, portanto, previsíveis.

Precisamos definir os extremos das peças com relação à folheação estável-forte para enunciarmos a próxima proposição. Denotaremos por $\partial^\gamma(\theta^-, \underline{\theta})$ qualquer ponto ‘extremo esquerdo

ou direito' de $h^{\underline{\gamma}}(\theta^-, \underline{\theta})$ com respeito a $\mathcal{F}^{\underline{\gamma}, ss}$.

Definimos $\Sigma_{(\alpha, \beta), \theta^-}^* := \Sigma_{(\alpha, \beta), \theta^-}^* \cap \Sigma_{\theta^-}(\beta)$.

Lema 6.4. *Controle da dispersão da velocidade do deslocamento das peças*

Existem λ e $\hat{\lambda}$ satisfazendo $0 < \lambda < \hat{\lambda} < 1$ e $\tilde{c}_4 > 0$ tais que para todo $L \in \mathbb{N}$ e $\hat{c}_5 > 1$, existem $0 < \kappa < 1$, $\beta_0 > 0$ e $\alpha_0 > 0$ tais que se $0 < \alpha < \alpha_0$, $0 < \tilde{\alpha} < \alpha_0$ e $0 < \beta < \beta_0$, então para qualquer família de perturbações, $\{f^{\underline{\gamma}}\}_{\underline{\gamma} \in \Gamma}$, do tipo $(\tilde{\Sigma}, \kappa\alpha, \tilde{\alpha}, \rho)$:

(a) Se $(\theta^-, \underline{\theta}) \in \Sigma^- \times \Sigma_{(\alpha, \beta), \theta^-}^*$, então para qualquer $\theta \in (\theta^-, \underline{\theta})$, $\sigma^j(\theta)$ cai em um mesmo elemento, \underline{a} , da partição $\tilde{\Sigma}$, no máximo, uma vez para todos os $0 \leq j \leq |\underline{\theta}|$.

(b) Se $(\theta^-, \underline{\theta}) \in \Sigma^- \times \Sigma_{(\alpha, \beta), \theta^-}^*$ é tal que $\sigma^j(\theta^-, \underline{\theta}) \subset \underline{a} \in \tilde{\Sigma}$ com $0 \leq j \leq L$, então

$$c_5 c_4 (\underline{\gamma}^0)^{\lambda^j} c_3 \rho < \left| \frac{\partial}{\partial \gamma_{\underline{a}}} \Pi_{\theta^-}^{\underline{\gamma}^0} (\partial^{\underline{\gamma}}(\theta^-, \underline{\theta})) (\underline{\gamma}^0) \right| < \hat{c}_5 c_4 c_4 (\underline{\gamma}^0)^{\hat{\lambda}^j} c_3 \rho, \text{ para todo } \underline{\gamma}^0 \in \Gamma,$$

onde $c_5 = \hat{c}_5^{-1}$ e $\tilde{c}_4 < c_4(\underline{\gamma}^0)$

(c) Se $(\theta^-, \underline{\theta}) \in \Sigma^- \times \Sigma_{(\alpha, \beta), \theta^-}^*$ é tal que $\sigma^i(\theta^-, \underline{\theta}) \subsetneq \underline{a} \in \tilde{\Sigma}$ para todo $0 \leq i \leq j$, onde $L + 1 \leq j \leq |\underline{\theta}| - 1$, então

$$\left| \frac{\partial}{\partial \gamma_{\underline{a}}} \Pi_{\theta^-}^{\underline{\gamma}^0} (\partial^{\underline{\gamma}}(\theta^-, \underline{\theta})) (\underline{\gamma}^0) \right| < \hat{c}_5 c_4 (\underline{\gamma}^0)^{\hat{\lambda}^j} c_3 \rho, \text{ para todo } \underline{\gamma}^0 \in \Gamma,$$

onde $c_5 = \hat{c}_5^{-1}$ e $\tilde{c}_4 < c_4(\underline{\gamma}^0)$

(d) Se $(\theta^-, \underline{\theta}) \in \Sigma^- \times \Sigma_{(\alpha, \beta), \theta^-}^*$ é tal que $\sigma^i(\theta^-, \underline{\theta}) \subsetneq \underline{a} \in \tilde{\Sigma}$ para todo $0 \leq i \leq |\underline{\theta}|$, então

$$\frac{\partial}{\partial \gamma_{\underline{a}}} \Pi_{\theta^-}^{\underline{\gamma}^0} (\partial^{\underline{\gamma}}(\theta^-, \underline{\theta})) (\underline{\gamma}^0) = 0, \text{ para todo } \underline{\gamma}^0 \in \Gamma, \text{ onde } c_5 = \hat{c}_5^{-1}$$

Demonstração:

Vamos demonstrar a parte (a). Seja $0 < \kappa < 1$ tal que $\sigma^i(\theta^-, \underline{\theta})$ é $(\kappa\alpha, \tilde{\beta}_i)$ –não recorrente para todo $1 \leq i \leq L$, onde $\tilde{\beta}_i$ é tal que $\sigma^i(\underline{\theta}) \in \Sigma_{\theta_i}(\tilde{\beta}_i)$.

Suponha que θ está em um bloco, \underline{a} , da partição $\tilde{\Sigma}$. Para mostrar que $\sigma^j(\theta)$ não volta em \underline{a} para $1 \leq j \leq |\underline{\theta}|$, basta observar que a definição de palavra (α, β) –não recorrente implica que se θ está em um elemento, \underline{a} , da partição $\tilde{\Sigma}$, então, para todo $1 \leq j \leq |\underline{\theta}|$, $\sigma^j(\theta)$ está, pelo menos, α –longe da folha θ^- , que intercepta \underline{a} já que $\theta \in \underline{a}$. Como o bloco \underline{a} está contido em um bloco de folhas de ordem α que contem a folha θ^- (já que $\kappa\alpha < \alpha$), então $\sigma^j(\theta)$ não volta nesse bloco no intervalo de tempo $1 \leq j \leq |\underline{\theta}|$.

Agora, suponha que $\sigma^i(\theta)$ está em um elemento, \underline{a} , da partição $\tilde{\Sigma}$ para algum $1 \leq i \leq L$. Para demonstrar que $\sigma^j(\theta)$ não volta em \underline{a} para qualquer $i < j \leq L$, basta observar que pela escolha de κ , $\sigma^k(\sigma^i(\theta))$ não volta em um bloco da ordem de $\kappa\alpha$ em torno de folha que contem $\sigma^i(\theta)$ e que corta \underline{a} para qualquer $1 \leq k \leq |\underline{\theta}| - i$. Isso significa que $\sigma^k(\sigma^i(\theta))$ não volta em \underline{a} para qualquer $1 \leq k \leq |\underline{\theta}| - i$.

Agora vamos demonstrar a parte (b). Demonstraremos que se $(\theta^-, \underline{\theta}) \in \Sigma^- \times \Sigma_{(\alpha, \beta), \theta^-}^*$ é tal que $(\theta^-, \underline{\theta}) \subset \underline{a} \in \tilde{\Sigma}$, então $c_5 c_4 c_3 \rho < \left| \frac{\partial}{\partial \gamma_{\underline{a}}} \Pi_{\theta^-}^{\gamma^0}(\partial^{\underline{\gamma}}(\theta^-, \underline{\theta}))(\underline{\gamma}^0) \right|$ e observamos que os outros casos são análogos.

Basta provar que se $\theta \in (\theta^-, \underline{\theta})$, então $c'_5 c_4 c_3 \rho < \left| \frac{\partial}{\partial \gamma_{\underline{a}}} \left(\Pi_{\theta^-}^{\gamma^0} \circ h^{\underline{\gamma}}(\theta) \right) (\underline{\gamma}^0) \right|$, se β_0 for escolhido suficientemente pequeno, onde $c_5 < c'_5 < 1$. Isso é suficiente porque dado $\varepsilon > 0$, $e^{-\varepsilon} \leq \frac{\left| \frac{\partial}{\partial \gamma_{\underline{a}}} \Pi_{\theta^-}^{\underline{\gamma}}(x) \right|}{\left| \frac{\partial}{\partial \gamma_{\underline{a}}} \Pi_{\theta^-}^{\underline{\gamma}}(y) \right|} \leq e^{\varepsilon}$, se x e y estão em uma mesma peça de $\Sigma_{(\alpha, \beta), \theta^-}^*$ e α_0 e β_0 forem suficientemente pequenos.

Vamos provar que $c'_5 c_4 c_3 \rho < \left| \frac{\partial}{\partial \gamma_{\underline{a}}} \left(\Pi_{\theta^-}^{\gamma^0} \circ h^{\underline{\gamma}}(\theta) \right) (\underline{\gamma}^0) \right|$. Sejam $p^{\underline{\gamma}} := h^{\underline{\gamma}}(\theta)$ e $p^{\underline{\gamma}, ws} := \Pi_{\theta^-}^{\gamma^0}(p^{\underline{\gamma}})$. Temos que provar que $\left| \frac{\partial}{\partial \gamma_{\underline{a}}} p^{\underline{\gamma}, ws} \right| > c'_5 c_4 c_3 \rho$.

Sejam $p_{-n}^{\underline{\gamma}} := (f^{\underline{\gamma}})^{-n}(p^{\underline{\gamma}})$ e $p_{-n}^{\underline{\gamma}} := \Pi_{\theta^-}^{\gamma^0}|_n(p_{-n}^{\underline{\gamma}})$. Pela invariância da decomposição do fibrado tangente, $T_{\Lambda} M = E_{\Lambda}^{ss} \oplus E_{\Lambda}^{ws} \oplus E_{\Lambda}^u$,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial}{\partial \gamma_{\underline{a}}} p^{\gamma^0, ws} \right| &= \left| \frac{\partial}{\partial \gamma_{\underline{a}}} \left(\Pi_{\theta^- \theta_1}^{\gamma^0} \circ f^{\gamma^0}(p_{-1}^{\gamma^0}) \right) \right. \\
&\quad + \sum_{k=1}^{|\underline{\theta}|-1} \frac{\partial}{\partial \gamma_{\underline{a}}} p_{k+1}^{\gamma^0, ws} \prod_{j=1}^k \frac{\partial}{\partial ws} \left(\Pi_{\theta^- \theta_{|j}}^{\gamma^0} \circ f^{\gamma^0}(p_{-j}^{\gamma^0}) \right) \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \gamma_{\underline{a}}} p_{|\underline{\theta}|}^{\gamma^0, ws} \prod_{j=1}^{|\underline{\theta}|} \frac{\partial}{\partial ws} \left(\Pi_{\theta^- \theta_{-j}}^{\gamma^0} \circ f^{\gamma^0}(p_{-j}^{\gamma^0}) \right) \right| \\
&= \left| \frac{\partial}{\partial \gamma_{\underline{a}}} \left(\Pi_{\theta^- \theta_1}^{\gamma^0} \circ f^{\gamma^0}(p_{-1}^{\gamma^0}) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \gamma_{\underline{a}}} p_{|\underline{\theta}|}^{\gamma^0, ws} \prod_{j=1}^{|\underline{\theta}|} \frac{\partial}{\partial ws} \left(\Pi_{\theta^- \theta_{-j}}^{\gamma^0} \circ f^{\gamma^0}(p_{-j}^{\gamma^0}) \right) \right|, \text{ pela não recorrência (ver item (a)).} \\
&\geq \tilde{c}_4 c_3 \rho - \left| \frac{\partial}{\partial \gamma_{\underline{a}}} p_{|\underline{\theta}|}^{\gamma^0, ws} \prod_{j=1}^{|\underline{\theta}|} \frac{\partial}{\partial ws} \left(\Pi_{\theta^- \theta_{-j}}^{\gamma^0} \circ f^{\gamma^0}(p_{-j}^{\gamma^0}) \right) \right|, \\
&\quad \text{se } \alpha_0 \text{ for escolhido suficientemente pequeno, para alguma constante } c_4 > 0 \\
&\geq c_4 c_3 \rho - c_4 \frac{1 - c_5}{2} c_3 \rho, \text{ se } \beta_0 \text{ for escolhido suficientemente pequeno} \\
&\geq c_4 c_5' c_3 \rho, \text{ para algum } c_5' \text{ em } (c_5, 1).
\end{aligned}$$

A parte (c) tem demonstração análoga. Para demonstrar a parte (d) basta observar que $\sigma^j(\theta^-, \underline{\theta}) \subsetneq \underline{a}$ para todo $0 \leq j \leq |\underline{\theta}|$ já que é não recorrente e $(\theta^-, \underline{\theta}) \subsetneq \underline{a}$. Portanto, a borda de $\sigma^j(\theta^-, \underline{\theta})$ não está contida em \underline{a} para todo $j \geq 0$.

■

A definição a seguir nos servirá para controlar as dispersões das velocidades das folhas estável-fortes ao perturbarmos o difeomorfismo original pelas famílias de perturbações. Exigiremos, para que possamos controlar essas dispersões, que as folhas estáveis com as quais trabalharemos sejam pouco recorrentes, ou seja, que retornem próximo delas mesmas, mediante iterados para frente, apenas depois de um tempo determinado (a proximidade e este tempo determinado especificarão o quão não recorrente essas folhas serão.) Mais para frente - no argumento probabilístico - será conveniente trabalhar com folhas nunca recorrentes (folhas que nunca voltam perto delas mesmas, sendo que a noção de proximidade, neste caso, será dada por quão perto delas mesmas elas nunca voltam). A ideia é que a folheação estável-forte nas folhas pouco recorrentes se move pouco.

Definição 6.5. *Folha (α, β) -não-recorrente*

Dizemos que uma folha, $\theta^- \in \Sigma^-$ é (α, β) -não recorrente se qualquer palavra finita final, $\underline{\theta}^-$, de θ^- em $\Sigma^-(\alpha)$ não se repete em qualquer subpalavra finita final de ordem β em θ^- .

Denotamos esse conjunto de folhas por $\Sigma_{(\alpha, \beta)}^-$.

Denotaremos por $\Sigma_{(\alpha, \beta)}^-(\rho)$ o conjunto do bloco de folhas de $\Sigma_{(\alpha, \beta)}^-$ de ordem ρ .

A proposição a seguir controla a dispersão da folheação estável-forte enquanto se perturba o difeomorfismo ao longo da família de perturbações fixada. Para isso é preciso saber como são as iteradas para frente das folhas estáveis em que as folhas estável-fortes que queremos controlar moram já que a folheação estável-forte depende de iterados para frente das folhas estáveis que as contem. Queremos, portanto, que as folhas estáveis que contêm aquelas folhas estável-fortes sejam suficientemente não-recorrentes para conseguirmos controlar o erro daquelas folhas estável-fortes quando perturbamos parâmetros associados a peças que intersectam a folha estável. Observamos que esses parâmetros (e alguns outros que intersectam poucos iterados para trás da folha estável) farão as peças não recorrentes se movimentarem previsivelmente e com que a parte da folheação estável-forte contida naquela folha estável não se mova muito. Assim, conseguiremos controlar o deslocamento das peças com respeito à folheação estável-forte.

Lema 6.6. *Controle da dispersão da folheação estável forte*

Para todo $c_6 > 0$, existe $\beta_0 > 0$ tal que para qualquer família de perturbações do tipo $(\tilde{\Sigma}, \alpha, \tilde{\alpha}, \rho)$ e qualquer folha estável (α, β) -não recorrente, $\theta^- \in \Sigma_{\alpha, \beta}^-$ com $\beta < \beta_0$, então

$$\left\| \left(\Pi_{\theta^-}^{\underline{\gamma}} \right)' (z) \underline{\bar{\gamma}} \right\| < c_6 \rho,$$

para todo $z \in W_{\theta^-}$, $\underline{\gamma} \in \Gamma$ e $\underline{\bar{\gamma}} \in W_{\theta^-, \underline{\gamma}}$, onde $\Gamma_{\theta^-, \underline{\gamma}}$ são parâmetros $\underline{\bar{\gamma}}$ tais que os valores das coordenadas correspondentes às peças que não intersectam W_{θ^-} estão fixadas nos valores das coordenadas correspondentes de $\underline{\gamma}$.

Demonstração:

Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $(\sigma^n(\theta^-), \theta^-|_n)$ seja da ordem de β . Como a folheação estável-forte varia de maneira C^1 com os parâmetros, então $dist_{C^1}(\mathcal{F}^{\underline{\gamma}, ss}(f^n(z)), \mathcal{F}^{\underline{\bar{\gamma}}, ss}(f^n(z))) < C\rho|\underline{\gamma} - \underline{\bar{\gamma}}|$ para algum $C > 0$. Além disso, quaisquer subvariedades, S e \bar{S} , passando por um mesmo ponto e transversais a $E^{\underline{\gamma}, ws}$, satisfazem $dist_{C^1}(S, \bar{S}) < \lambda dist_{C^1}(f^{\underline{\gamma}}(S), f^{\underline{\bar{\gamma}}}(S))$ para algum $0 < \lambda < 1$, já que a direção estável-fraca contrai com menos força que a estável-forte.

Portanto, já que $f^{\underline{\bar{\gamma}}}|_{(\sigma^j(\theta^-), \theta^-|_j)} = f^{\underline{\gamma}}|_{(\sigma^j(\theta^-), \theta^-|_j)}$ para todo $0 \leq j \leq n$, visto que $\theta^- \in \Sigma_{\alpha, \beta}^-$ e $\underline{\gamma}$ e $\underline{\bar{\gamma}}$ são os parâmetros cujas coordenadas se diferenciam apenas naquelas correspondentes aos blocos que intersectam a folha θ^- , então $dist_{C^1}(\mathcal{F}^{\underline{\gamma}, ss}(z), \mathcal{F}^{\underline{\bar{\gamma}}, ss}(z)) < C\rho|\underline{\gamma} - \underline{\bar{\gamma}}|\lambda^n$

Logo, se $\beta > 0$ for escolhido suficientemente pequeno, então n vai ser suficientemente grande de modo que $\text{dist}_{C^1}(\mathcal{F}^{\underline{\gamma}, ss}(z), \mathcal{F}^{\bar{\gamma}, ss}(z)) < c_6 \rho |\underline{\gamma} - \bar{\gamma}|$.

Isso implica que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\substack{0 < |\underline{\gamma} - \bar{\gamma}| < \varepsilon \\ \underline{\gamma}, \bar{\gamma} \in W_{\theta^-}}} \frac{\left| \Pi_{\theta^-}^{\underline{\gamma}}(z) - \Pi_{\theta^-}^{\bar{\gamma}}(z) \right|}{|\underline{\gamma} - \bar{\gamma}|} < c_6 \rho.$$

Como a folheação estável-forte é C^1 ao longo dos parâmetros, então

$$\left\| \left(\Pi_{\theta^-}^{\underline{\gamma}} \right)'(z) \underline{\gamma} \right\| < c_6 \rho.$$

■

7 Argumento do tipo Marstrand

Enunciaremos a propriedade do tipo Marstrand que satisfaz uma família de perturbações a N parâmetros para o difeomorfismo f . Para isso, vamos introduzir algumas notações.

Fixado $A > 0$, consideraremos os conjuntos $\Sigma_{(A, A^2)}^-$ e $\Sigma_{(A, A^2), \theta^-}^*$, denotados, de agora em diante, por Σ_A^- e Σ_{A, θ^-}^* .

Fixada uma medida, μ , em Σ , definimos a medida, μ^- em Σ^- por

$$\mu^-(X) := \mu(\theta \in \Sigma \text{ tais que } h(\theta) \in h(X))$$

para qualquer boreliano, X , de Σ^- .

Definimos a medida, $\mu_{\theta_0^-}$, em $\Sigma_{\theta_0^-}$ por

$$\mu_{\theta_0^-}(X) := \mu(\hat{\theta} \in \Sigma \text{ tais que } h(\hat{\theta}) \in h(X)).$$

Precisaremos também da medida, $\nu_{\theta_0^-}^g$, em $H_{\theta_0^-}$ definida por

$$\nu_{\theta_0^-}^g := \mu_{\theta_0^-} \circ \left(h^g \circ \Pi_{\theta_0^-}^g \Big|_{\Sigma_{A, \theta_0^-}} \right)^{-1}.$$

Proposição 7.1.

Dada uma ferradura (f, Λ) satisfazendo a propriedade B , existem uma partição $\mathcal{P} := \{P_1, \dots, P_N\}$ suficientemente fina, uma família C^k -contínua de difeomorfismos a N parâmetros, $\{f^{\underline{t}}\}_{\underline{t} \in I^N}$, uma medida de probabilidade invariante, μ , em Σ , $c_7 > 1$, $\tilde{K}_1 > 0$, $\delta > 0$ e uma bola aberta de raio δ em torno de $\underline{0}$, $B_\delta \subset I^N$, tais que

- (i) $f^{\underline{0}} = f$
- (ii) $c_7^{-1} \rho^{\bar{d}_s} \leq \mu(\theta) \leq c_7 \rho^{\bar{d}_s}$, para todo cilindro, $\theta \in \Sigma^+(\rho)$, de ordem ρ .
- (iii) Para Lebesgue quase todo $\underline{t} \in B_\delta$ e toda folha $\theta^- \in \Sigma_A^-$, $\nu_{\theta_0^-}^{\underline{t}} \ll \text{Leb}$ e

$$\int_{B_\delta(\underline{0})} \left\| \frac{d\nu_{\theta_0^-}^{\underline{t}}}{d\text{Leb}} \right\|_{L_2}^2 dt < \tilde{K}_1.$$

Em particular, como consequência desta proposição, já obtemos um resultado do tipo Marstrand - o resultado que procuramos é mais forte, e para isso precisaremos dos argumentos probabilístico e do critério do compacto recorrente. Para podermos adaptar essas duas técnicas estaremos interessados no seguinte resultado que é consequência da proposição 7.1.

Proposição 7.2. *Propriedade do tipo Marstrand*

Para todo $\xi > 0$, existe um parâmetro $\underline{t} \in I^N$, uma constante $K_1 > 0$ e um subconjunto Σ_{MB}^- de Σ_A^- com $\mu^-(\Sigma_A^- \setminus \Sigma_{MB}^-) < \frac{\xi}{2}$ tais que para todo $\theta^- \in \Sigma_{MB}^-$,

$$\left\| \frac{d\nu_{\theta^-}^{\underline{t}}}{dLeb} \right\|_{L_2}^2 \leq K_1.$$

Demonstração:

Pela proposição 7.1, $\int_{\Sigma^-} \int_{B_\delta(0)} \left\| \frac{d\nu_{\theta^-}^{\underline{t}}}{dLeb} \right\|_{L_2}^2 dt d\mu^-(\theta^-) < \tilde{K}_1$. Portanto, existe alguma constante $K_1 > 0$ tal que $\left\| \frac{d\nu_{\theta^-}^{\underline{t}}}{dLeb} \right\|_{L_2}^2 \leq K_1$ para algum $\underline{t} \in B_\delta(0)$ e para todo $\theta^- \in \Sigma_{MB}^-$, onde $\Sigma_{MB}^- \subset \Sigma_A^-$ e satisfaz $\mu(\Sigma_A^- \setminus \Sigma_{MB}^-) < \frac{\xi}{2}$. ■

Pode-se encontrar em [32] uma definição de **sistema de funções iteradas (SFI)**, a dizer: é uma coleção de funções, $\Phi := \{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$, de um intervalo fechado I da reta nele mesmo. Observa-se que $\varphi_l(I)$ e $\varphi_j(I)$ podem se sobrepor. Lá mesmo observa-se que sob certas circunstâncias existe um único conjunto invariante I_Φ de Φ ($I_\Phi = \bigcup_{j=1}^k \varphi_j(I_\Phi)$), compacto e não-vazio.

Além disso, prova-se, naquele trabalho, que ao considerar-se famílias a vários parâmetros de SFI's, $\{\Phi^\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} := \{\varphi_1^\gamma, \dots, \varphi_k^\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$, satisfazendo alguma restrição relativa à geometria fractal de Φ^0 (dentre outras), então quase todos SFI's desta família exibem conjuntos invariantes com medida de Lebesgue positiva. Um problema interessante enunciado naquele trabalho segue transcrito (com tradução nossa) abaixo.

Problema 7.3. *“É um problema aberto o fato de o conjunto limite ser um conjunto de cantor gordo ou este conter, necessariamente, intervalos.”*

Pensamos que a solução deste problema segue - assim como fazemos neste trabalho - de adaptações de teoremas do tipo Marstrand, critério do compacto recorrente e argumento probabilístico. Outro problema interessante que pode estar relacionado à extensão dos resultados deste trabalho para dimensão superior a três é o seguinte.

Problema 7.4. *Descrever, tipicamente, as propriedades métricas e topológicas das projeções dos conjuntos invariantes de SFI's em dimensões ambiente superiores a 1.*

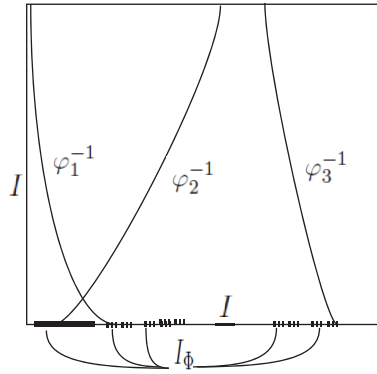


Figura 4: Sistema de funções iteradas (SFI)

Um SFI pode ser visto como as projeções ao longo da folheação estável forte de um SFI em dimensão 2. Essa maneira de ver um SFI será útil ao resultado desejado guardado o fato de não termos neste trabalho um SFI de dimensão 2 - mas sim um sistema de funções (SF), não necessariamente iteradas, infinito. A projeção de Λ ao longo da folheação estável-forte pode ser interpretada como um SF a ser definido mais pela frente.

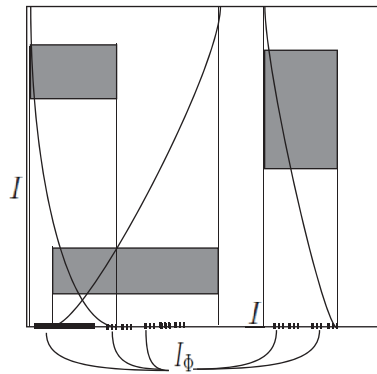


Figura 5: Um SFI de dimensão 2 que poderia ser representado pelo SFI de dimensão 1 da figura anterior

Para demonstrar a propriedade do tipo Marstrand, construiremos uma família a vários parâmetros de perturbações onde cada parâmetro refere-se ao deslocamento de, essencialmente, um elemento da partição de Markov suficientemente fina transversalmente à folheação estável-forte e à folheação instável. Assim, cairemos em um problema similar ao resolvido por [32] e, dessa forma, nos restringiremos, basicamente, a adaptar a demonstração do Teorema 3.1 de [32] para obtermos a propriedade do tipo Marstrand para alguma perturbação de f - como consequência, por curiosidade, obteremos o fato de que a projeção de uma ferradura restrita a uma folha estável contém subconjunto com medida de Lebesgue positiva.

Tendo em vista que foram necessárias algumas alterações nos argumentos de [32], talvez seja razoável estender os seus resultados para SF's satisfazendo algumas restrições mais fracas do que serem sistemas de funções iteradas.

7.1 Demonstração da proposição 7.1

7.1.1 Preparação

Construiremos, seguindo o modelo da definição 6.1, uma família C^k -contínua de difeomorfismos a N parâmetros - $\{f_{\underline{t}}\}_{\underline{t} \in I^N}$, onde I é um intervalo da reta - de modo que ao variarmos a i -ésima coordenada da família de difeomorfismos, deslocaremos a imagem da componente, P_i , da partição, \mathcal{P} , transversalmente a $E^{ss} \oplus E^u$.

Seguindo a notação de 6.1, faremos uma perturbação do tipo (\mathcal{P}, A, A, A) , onde $A > 0$ será escolhido suficientemente pequeno de modo que essa família de perturbações seja C^k -pequena.

Vale observar que $f_{\underline{t}}$ é C^k , que essa é uma família C^k -contínua e que $\|f - f_{\underline{t}}\|_{C^k}$ pode ser feito suficientemente pequeno para todo $\underline{t} \in I^N$, bastando, para isso, escolher $A > 0$ suficientemente pequeno.

Seja Σ_{A, θ^-} os elementos de Σ^+ iniciando com algum elemento de Σ_{A, θ^-}^* . Para cada $\theta^- \in \Sigma_A^-$ e para cada $\underline{\theta}$ em Σ_{A, θ^-}^* , definimos a família de **sistema de funções**, Φ_{θ^-} , de modo que Φ_{θ^-} seja composta por famílias de funções representando, cada família, a projeção de uma peça $\underline{\theta} \in \Sigma_{A, \theta^-}^*$ sobre H_{θ^-} (identificado com $\mathcal{I} = [-1, 1]$) ao longo da folheação estável forte para $f_{\underline{t}}$.

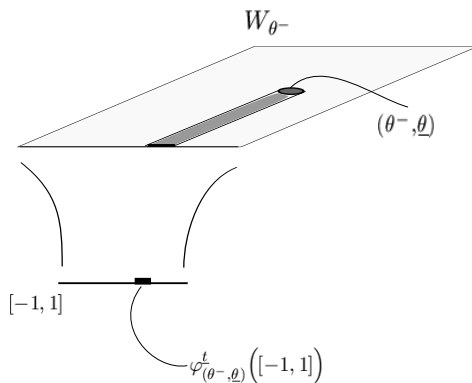
Definição 7.5. *Sistema de funções*

Fixados $\theta^- \in \Sigma_A^-$, a família de **sistema de funções**, Φ_{θ^-} , é $\Phi_{\theta^-} := \{\Phi_{(\theta^-, \underline{\theta})}\}_{\underline{\theta} \in \Sigma_{A, \theta^-}^*}$, onde cada família de funções, $\Phi_{(\theta^-, \underline{\theta})} := \left\{ \varphi_{(\theta^-, \underline{\theta})}^{\underline{t}} \right\}_{\underline{t} \in I^N}$ é composta pelas funções definidas por:

Se $\underline{\theta} := (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \in \Sigma_{A, \theta^-}^*$, então $\varphi_{(\theta^-, \underline{\theta})}^{\underline{t}} : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ é a transformação afim, crescente, que leva $[-1, 1]$ em $\Pi_{\theta^-}^{\underline{t}}(\underline{\theta})$.

Esse não é um sistema de funções iteradas, como em [32], por isso será refeita a demonstração do teorema 3.2 (ii) de [32], com algumas modificações.

Na próxima seção - seção 7.1.2 - serão garantidas algumas condições - continuidade e limitação da distorção e transversalidade - para a família de perturbações referente ao teorema 3.2 (ii) de [32]. Essas condições serão utilizadas na demonstração da proposição 7.1. Precisamente, nos referimos às proposições 7.7, 7.9 e 7.14.



Em seguida, na seção 7.1.3, escreveremos a demonstração do teorema 3.2 (ii) de [32], levando em conta as devidas alterações.

7.1.2 Hipóteses do teorema 3.2 (ii) de [32]

Em [32], utiliza-se o conceito de continuidade de distorção. Eles utilizam isso para transferir a informação fractal do SFI original para os seus vizinhos na família de perturbação do SFI. Observamos que $\varphi_{\theta^-}^{\underline{t}}$ não tem distorção (em particular, tem distorção limitada) de modo que o termo ‘continuidade da distorção’ perde seu sentido. Mas a noção a que o termo se refere significa que, além de as distorções variarem continuamente, as taxas de contrações dos SFI’s também variam continuamente - nossa família de sistema de funções satisfaz essa propriedade. Apesar de o termo parecer vazio para o nosso caso, continuaremos utilizando essa expressão para seguir o trabalho dos autores de [32] mais de perto.

Definição 7.6. *Continuidade da distorção*

As famílias a N parâmetros de sistema de funções (SF), $\{\Phi_{\theta^-}\}_{\theta^- \in \Sigma_A^-}$, têm distorção contínua uniforme se para todo $\eta > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $\theta^- \in \Sigma_A^-$ e $\underline{t}^1, \underline{t}^2 \in I^N$ com $|\underline{t}^1 - \underline{t}^2| < \delta$, então, para todo $\underline{\theta} \in \Sigma_{A, \theta^-}^*$,

$$e^{-|\underline{\theta}| \eta} \leq \frac{\left\| \left(\varphi_{(\theta^-, \underline{\theta})}^{\underline{t}^1} \right)' \right\|}{\left\| \left(\varphi_{(\theta^-, \underline{\theta})}^{\underline{t}^2} \right)' \right\|} \leq e^{|\underline{\theta}| \eta}$$

A continuidade da distorção segue do fato de $\varphi_{(\theta^-, \underline{\theta})}^{\underline{t}}$ ser linear, de f ser C^1 e de \mathcal{F}^{ss} ser C^1 e variar de maneira Lipschitz com $\underline{t} \in I^N$.

Proposição 7.7. $\{\Phi\}_{\theta^- \in \Sigma_A^-}$ satisfaz a propriedade de distorção contínua uniformemente.

A próxima condição - de transversalidade - garante, tipicamente, em termos de medida de Lebesgue em I^N , que as peças da construção do Cantor estável (interseção da ferradura com variedades estáveis locais) não se acumulam excessivamente ao longo da direção estável

forte por muito tempo ao variarmos o multiparâmetro $\underline{t} \in I^N$. Isto é útil para obtermos uma cota inferior para a medida de Lebesgue da projeção da ferradura estável ao longo da folheação estável forte para a maioria dos parâmetros da família de perturbação. Para garantirmos a condição de transversalidade precisamos que as peças que definem os Cantors estáveis se movem umas com respeito a outras com velocidades limitadas por baixo enquanto \underline{t} varia. É por isso que nos restringimos a folhas de Σ_A^- e peças de Σ_{A,θ^-}^* - elas apresentam comportamento previsível.

Vamos introduzir a seguinte notação de [32] para facilitar a exposição:

$$\left\{ \pi_{\theta^-}^{\underline{t}}(\theta) \right\} := \bigcap_{i=1}^{\infty} \varphi_{(\theta^-, \theta^+ | i)}^{\underline{t}}([-1, 1]),$$

para todo $\theta = (\theta^-, \theta^+) \in \Sigma$.

Definição 7.8. *Condição de transversalidade*

$\{\Phi_{\theta^-}\}_{\theta^- \in \Sigma_A^-}$ satisfazem a condição de transversalidade uniformemente se existe uma constante $C > 0$, tal que para todo $\theta^- \in \Sigma_A^-$ e para todo $\theta, \tau \in \Sigma_{A,\theta^-}$ com $\theta_1 \neq \tau_1$, então

$$\text{Leb} \left\{ \underline{t} \in I^N; \left| \pi_{\theta^-}^{\underline{t}}(\theta) - \pi_{\theta^-}^{\underline{t}}(\tau) \right| \leq r \right\} \leq Cr, \text{ para todo } r > 0.$$

Proposição 7.9. *Condição de transversalidade*

Se $A > 0$ for escolhido suficientemente pequeno, então $\{\Phi_{\theta^-}\}_{\theta^- \in \Sigma_A^-}$ satisfaz a condição de transversalidade uniformemente.

Demonstração:

Sejam $\theta^- \in \Sigma_A^-$ e θ e τ em Σ_{A,θ^-} com $\theta_1 \neq \tau_1$. De acordo com os lemas 6.4 e 6.6, existe constante $c_8 > 0$ tal que para todo $\underline{t} \in [-1, 1]^N$, $\left| \frac{d(\pi_{\theta^-}^{\underline{t}}(\theta) - \pi_{\theta^-}^{\underline{t}}(\tau))}{dt_{\theta_1}} \right| \geq c_8 A$, se $A > 0$ for suficientemente pequeno (basta escolher A de modo que $A < \alpha_0$ e $A^2 < \beta_0$ dados pelo lema 6.4 para as constantes $1 > c_5 > 0$ escolhida suficientemente próxima de 1 de modo que $c_5 > \hat{c}_5 \lambda$).

Assim, $\left\{ \underline{t} \in I^N; \left| \pi_{\theta^-}^{\underline{t}}(\theta) - \pi_{\theta^-}^{\underline{t}}(\tau) \right| \leq r \right\}$ é o produto de I^{N-1} por intervalos J_r 's satisfazendo $\text{Leb}(J_r) < Cr$. Portanto, $\text{Leb} \left\{ \underline{t} \in I; \left| \pi_{\theta^-}^{\underline{t}}(\theta) - \pi_{\theta^-}^{\underline{t}}(\tau) \right| \leq r \right\} \leq Cr$. ■

Usaremos, agora, para garantir a existência da medida, μ , enunciada na proposição 7.1 um teorema que pode ser encontrado em [6].

Seja $\Sigma_{A,\theta^-}^n := \{\underline{\theta} \in \Sigma_{A,\theta^-}^*; |\underline{\theta}| = n\}$.

Teorema 7.10. *Existência de estado de Gibbs [6]*

Sejam (σ, Σ) topologicamente misturador e $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ um potencial hölder contínuo. Então, existe uma única medida de probabilidade Borel, μ , σ -invariante em Σ satisfazendo a condição de Gibbs, a saber: existem constantes positivas $d_1 > 0$ e $d_2 > 0$, tais que

$$d_1 \leq \frac{\mu\{\theta; \theta_i = \tau_i \text{ para todo } i \in [1, m]\}}{\exp(-P(\psi)m + S_m(\psi, \tau))} \leq d_2 \text{ para todo } \tau \in \Sigma^+ \text{ e } m \geq 1,$$

$$\text{onde } P(\phi) := \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \left(\sum_{\underline{\theta} \in \Sigma^m} \exp \left(\sup_{\theta \in \Sigma; \theta|_m = \underline{\theta}} \{S_m(\theta)\} \right) \right) \text{ e } S_m(\psi, \theta) := \sum_{k=1}^m \psi(\sigma^k(\theta)).$$

Consideraremos, ao longo da argumentação do tipo Marstrand, o seguinte potencial Hölder contínuo para o subshift $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ dado por $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, onde

$$\phi(\theta) := \bar{d}_s \log (|\lambda^{ws}(h^0 \circ \sigma)(\theta)|).$$

Lema 7.11.

Existe constante $c_9 > 1$ tal que para todo $\theta^- \in \Sigma_A^-$ e $\underline{\theta} \in \Sigma_{A, \theta^-}^*$, vale

$$c_9^{-1} \leq \frac{D_s(V)}{\|(\varphi_{(\theta^-, \underline{\theta})})'\|} \leq c_9.$$

Demonstração:

Lembramos que pela observação do apêndice, existe constante positiva $0 < \tilde{K} < 1$ tal que para todo $x \in \Lambda \cap V_{\underline{\theta}}$, $\text{diam}(W_{loc}^s(x) \cap V_{\underline{\theta}}) > \tilde{K} D_s(V_{\underline{\theta}})$.

Em particular, $D_s(V_{\underline{\theta}}) > \text{diam}(W_{loc}^s \cap V_{\underline{\theta}}) > \tilde{K} D_s(V_{\underline{\theta}})$.

Pelo teorema do valor médio, pelo fato de $\varphi_{(\theta^-, \underline{\theta})}$ ser linear e de $\text{diam}(\varphi_{(\theta^-, \underline{\theta})}([-1, 1]))$ diferenciar-se de $\text{diam}(W_{\theta^-} \cap V_{\underline{\theta}})$ por uma constante multiplicativa independente de $\underline{\theta}$, concluimos que $\hat{K}^{-1} \leq \frac{\text{diam}(W_{\theta^-} \cap V_{\underline{\theta}})}{\|(\varphi_{(\theta^-, \underline{\theta})})'\|} \leq \hat{K}$ para alguma constante $\hat{K} > 1$.

$$\text{Portanto, } \hat{K}^{-1} \leq \frac{D_s(V)}{\|(\varphi_{(\theta^-, \underline{\theta})})'\|} \leq \tilde{K}^{-1} \hat{K}.$$

Basta escolher, $c_9 := \tilde{K}^{-1} \hat{K}$.

■

Lema 7.12. $P(\phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log W_n(\bar{d}_s)$, onde $W_n(d) := \sum_{\underline{\theta} \in \Sigma^n} D_s(V_{\underline{\theta}})^d$.

Demonstração:

Para qualquer conjunto Θ contendo exatamente um símbolo de Σ^- terminando com cada $i \in \{1, \dots, N\}$, vale:

$$\begin{aligned} W_n(\bar{d}_s) &:= \sum_{\underline{\theta} \in \Sigma^n} D_s(V)^{\bar{d}_s} \\ &\asymp \sum_{(\theta^-, \underline{\theta}) \in \Theta \Sigma_{\theta_0^-}^n} \|(\varphi_{\theta^-, \underline{\theta}}^0)'\|^{\bar{d}_s}, \text{ pelo lema 7.11,} \end{aligned}$$

onde $\Sigma_{\theta_0^-}^n := \Sigma^n \cap \Sigma_{\theta_0^-}^*$ e $\Theta \Sigma_{\theta_0^-}^n := \bigcup_{\theta^- \in \Theta} \bigcup_{\underline{\theta} \in \Sigma_{\theta_0^-}^n} (\theta^-, \underline{\theta})$.

Por outro lado, dado que $\phi(\theta) := \bar{d}_s \log(|\lambda^{ws}(h^0 \circ \sigma)(\theta)|)$, temos

$$e^{S_m(\phi, \theta)} = \left(\prod_{i=1}^m |\lambda^{ws}(h^0 \circ \sigma^i)(\theta)| \right)^{\bar{d}_s} \\ \asymp \|(\varphi_{(\theta^-, \theta|_m)})'\|^{\bar{d}_s},$$

pela distorção limitada das derivadas de f nas direções transversais à estável-forte (ver apêndice).

Assim, para qualquer $\underline{\theta} \in \Sigma_{\theta_0}^m$, $\exp\left(\sup_{\theta: \theta|_m = \underline{\theta}} \{S_m(\theta)\}\right) \asymp \|(\varphi_{(\theta^-, \theta|_m)})'\|^{\bar{d}_s}$.

Agora,

$$\sum_{\underline{\theta} \in \Sigma^m} \exp\left(\sup_{\theta: \theta|_m = \underline{\theta}} \{S_n(\theta)\}\right) = \sum_{(\theta^-, \underline{\theta}) \in \Theta \Sigma_{\theta_0}^m} \|(\varphi_{\theta^-, \underline{\theta}}^0)'\|^{\bar{d}_s} \\ \asymp W_n(\bar{d}_s).$$

Dessa forma, $P(\phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log W_n(\bar{d}_s)$.

■

Lema 7.13. $P(\phi) = 0$.

Demonstração:

Como \bar{d}_s é dimensão superior estável de Λ , vale $\sum_{\underline{\theta} \in \Sigma^n} D_s(V_{\underline{\theta}})^{\lambda^n} = 1$ para todo $n > 0$, e portanto, $W_n(\bar{d}_s) \asymp 1$ para todo $n > 0$. Isso implica que $P(\phi) = 0$.

■

Lema 7.14.

Existe constante $c_{10} > 1$ e uma medida de probabilidade, borel, μ , σ -invariante em Σ , tal que para toda folha $\theta^- \in \Sigma_A^-$ e $\underline{\theta} \in \Sigma_{A, \theta^-}^*$,

$$c_{10}^{-1} \leq \frac{\mu_{\theta_0^-}(\underline{\theta})}{\|(\varphi_{(\theta^-, \underline{\theta})})'\|^{\bar{d}_s}} \leq c_{10}.$$

Demonstração:

Pelo teorema 7.10 e pelo lema 7.13, existe medida de probabilidade, μ , que satisfaz a conclusão desejada, visto que,

$$\exp\left(-P(\phi)m + \sum_{k=1}^m \phi(\sigma^k(x))\right) = \exp(-P(\phi)m) \cdot \|(\varphi_{(\theta^-, \underline{\theta})})'\|^{\bar{d}_s} = \|(\varphi_{(\theta^-, \underline{\theta})})'\|^{\bar{d}_s}.$$

■

Como consequência deste lema, podemos enunciar o resultado a seguir, que também nos será útil no argumento do compacto recorrente quando tivermos a necessidade de contar as peças em uma folha.

Lema 7.15.

Se $c_1 > 0$ for escolhido suficientemente grande, existe constante $c_{11} > 1$ tal que para toda folha $\theta^- \in \Sigma_A^-$ e $\underline{\theta} \in \Sigma_{A,\theta^-}^*$ de ordem ρ ,

$$c_{11}^{-1} \leq \frac{\mu_{\theta_0^-}(\underline{\theta})}{\rho^{\bar{d}_s}} \leq c_{11}.$$

Demonstração:

Basta observar que se $c_1 > 0$ for suficientemente grande, isso significa que se $\underline{\theta} \in \Sigma_{\theta^-}(\rho)$, então $d_s(\theta^-, \underline{\theta}) \asymp \rho$ para qualquer $\theta^- \in \Sigma^-$ tal que $\underline{\theta} \in \Sigma_{\theta_0^-}^*$. Logo, $\mu(\underline{\theta}) \asymp d_s(\theta^-, \underline{\theta})^{\bar{d}_s} \asymp \rho^{\bar{d}_s}$. ■

7.1.3 Fim da Demonstração - Uma versão do teorema de Simon-Solomyak-Urbański

Lema 7.16. *Existem constantes $\delta > 0$ e $K_3 > 0$, tais que para todo $\theta^- \in \Sigma_A^-$,*

$$X := \int_{B_\delta(0)} \int_{\Pi_{\theta^-}^{\underline{t}}(\Sigma_{A,\theta^-})} \underline{D}(\nu_{\theta^-}^{\underline{t}}, x) d\nu_{\theta^-}^{\underline{t}}(x) dt < K_3,$$

onde $\underline{D}(\nu_{\theta^-}^{\underline{t}}, x) = \liminf_{r \downarrow 0} \frac{\nu_{\theta^-}^{\underline{t}}(x-r, x+r)}{2r}$ é a densidade inferior de $\nu^{\underline{t}}$ em x e $B_\delta(0)$ é a bola, em I^N , centrada em 0 , de raio δ .

Agora, podemos demonstrar a proposição 7.1.

Demonstração da proposição 7.1:

Pelo lema 7.16, $\int_{\Pi_{\theta^-}^{\underline{t}}(\Sigma_{A,\theta^-})} \underline{D}(\nu_{\theta^-}^{\underline{t}}, x) d\nu_{\theta^-}^{\underline{t}} < \infty$ para quase todo $\underline{t} \in B_\delta(0)$.

Portanto, pelo Teorema 2.12 (1) de [14], para quase todo $\underline{t} \in B_\delta(0)$, a densidade de $\nu_{\theta^-}^{\underline{t}}$, $D(\nu_{\theta^-}^{\underline{t}}, x) := \lim_{r \downarrow 0} \frac{\nu_{\theta^-}^{\underline{t}}(B_r(x))}{2r}$ existe para Lebesgue quase todo ponto x de $\Pi_{\theta^-}^{\underline{t}}(\Sigma_{A,\theta^-})$.

Além disso, pelo Teorema 2.12 (2), $D(\nu_{\theta^-}^{\underline{t}}, \cdot)$ é a derivada de Radon-Nykodin $\frac{d\nu_{\theta^-}^{\underline{t}}}{dLeb}(\cdot)$ para Lebesgue quase todo ponto x de $\Pi_{\theta^-}^{\underline{t}}(\Sigma_{A,\theta^-})$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{\Pi_{\theta^-}^{\underline{t}}(\Sigma_{A,\theta^-})} \left| \frac{d\nu_{\theta^-}^{\underline{t}}}{dLeb}(x) \right|^2 dLeb(x) &= \int_{\Pi_{\theta^-}^{\underline{t}}(\Sigma_{A,\theta^-})} D(\nu_{\theta^-}^{\underline{t}}, x) \frac{d\nu_{\theta^-}^{\underline{t}}}{dLeb}(x) dLeb(x) \\ &= \int_{\Pi_{\theta^-}^{\underline{t}}(\Sigma_{A,\theta^-})} \underline{D}(\nu_{\theta^-}^{\underline{t}}, x) d\nu_{\theta^-}^{\underline{t}}(x) \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\int_{B_\delta(0)} \int_{\Pi_{\theta^-}^{\underline{t}}(\Sigma_{A,\theta^-})} \left| \frac{d\nu_{\theta^-}^{\underline{t}}}{dLeb}(x) \right|^2 dLeb(x) dt \leq K_3 =: \tilde{K}_1. \quad \blacksquare$$

Demonstração do lema 7.16:

Vamos seguir as linhas, com as devidas alterações, da demonstração do teorema 3.2 (ii) de [32].

Pelo Lema de Fatou, $X \leq \liminf_{r \rightarrow 0} \int_{B_\delta(0)} \int_{\Pi_{\theta^-}^{\underline{t}}(\Sigma_{A, \theta^-})} \frac{\nu_{\theta^-}^{\underline{t}}(x-r, x+r)}{2r} d\nu_{\theta^-}^{\underline{t}} dt$.

Agora,

$$\begin{aligned} \int_{\Pi_{\theta^-}^{\underline{t}}(\Sigma_{A, \theta^-})} \nu_{\theta^-}^{\underline{t}}(B_r(x)) d\nu_{\theta^-}^{\underline{t}}(x) &= \int_{\Pi_{\theta^-}^{\underline{t}}(\Sigma_{A, \theta^-})} \int_{\Sigma_{A, \theta^-}} \chi_{\{\theta \in \Sigma_{A, \theta^-}; |\pi_{\theta^-}^{\underline{t}}(\theta) - x| \leq r\}}(\theta) d\mu_{\theta_0^-}(\theta) d\nu_{\theta^-}^{\underline{t}}(x) \\ &= \int_{\Sigma_{A, \theta^-}} \int_{\Sigma_{A, \theta^-}} \chi_r(\theta, \tau) d\mu_{\theta_0^-}(\theta) d\mu_{\theta_0^-}(\tau), \end{aligned}$$

onde $\chi_A(\cdot)$ denota a função característica de A e

$$\chi_r^{\underline{t}}(\theta, \tau) := \chi_{\{(\theta, \tau) \in \Sigma_{A, \theta^-} \times \Sigma_{A, \theta^-}; |\pi_{\theta^-}^{\underline{t}}(\theta) - \pi_{\theta^-}^{\underline{t}}(\tau)| \leq r\}}(\theta, \tau).$$

Logo, pelo teorema de Fubini,

$$\begin{aligned} X_r &:= \int_{B_\delta(t_0)} \int_{\Sigma_{A, \theta^-}} \int_{\Sigma_{A, \theta^-}} \chi_r^{\underline{t}}(\theta, \tau) d\mu_{\theta_0^-}(\theta) d\mu_{\theta_0^-}(\tau) dt \\ &= \int_{\Sigma_{A, \theta^-}} \int_{\Sigma_{A, \theta^-}} \int_{B_\delta(t_0)} \chi_r^{\underline{t}}(\theta, \tau) dt d\mu_{\theta_0^-}(\theta) d\mu_{\theta_0^-}(\tau) \\ &= \int_{\Sigma_{A, \theta^-}} \int_{\Sigma_{A, \theta^-}} \text{Leb}\{\underline{t} \in B_\delta(t_0); |\pi_{\theta^-}^{\underline{t}}(\theta) - \pi_{\theta^-}^{\underline{t}}(\tau)| \leq r\} d\mu_{\theta_0^-}(\theta) d\mu_{\theta_0^-}(\tau). \end{aligned}$$

Agora, consideramos a seguinte partição de $\Sigma_{A, \theta^-} \times \Sigma_{A, \theta^-}$:

$$A_\beta = \left\{ (\theta, \tau) \in \Sigma_{A, \theta^-} \times \Sigma_{A, \theta^-}; \theta|_{|\beta|} = \tau|_{|\beta|} = \beta \text{ e } \theta|_{|\beta|+1} \neq \tau|_{|\beta|+1} \right\}.$$

Então,

$$X_r = \sum_{n \geq 0} \sum_{\beta \in \Sigma_{A, \theta^-}^n} \int \int_{A_\beta} \text{Leb}\{\underline{t} \in B_\delta(0); |\pi_{\theta^-}^{\underline{t}}(\theta) - \pi_{\theta^-}^{\underline{t}}(\tau)| \leq r\} d\mu_{\theta_0^-}(\theta) d\mu_{\theta_0^-}(\tau)$$

Agora, fixado $n > 0$,

$$\begin{aligned} \left| \pi_{\theta^-}^{\underline{t}}(\theta) - \pi_{\theta^-}^{\underline{t}}(\tau) \right| &= \lim_{i \rightarrow \infty} \left| \varphi_{(\theta^-, \theta|_i)}^{\underline{t}}(1) - \varphi_{(\theta^-, \tau|_i)}^{\underline{t}}(1) \right| \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \left| \varphi_{(\theta^-, \theta|_n)}^{\underline{t}}(\varphi_{(\theta^-, \theta|_n, \sigma^n(\theta|_i))}^{\underline{t}}(1)) - \varphi_{(\theta^-, \theta|_n)}^{\underline{t}}(\varphi_{(\theta^-, \theta|_n, \sigma^n(\tau|_i))}^{\underline{t}}(1)) \right| \\ &= \left| \varphi_{(\theta^-, \theta|_n)}^{\underline{t}}(\pi_{\theta^-, \theta|_n}^{\underline{t}}(\sigma^n(\theta))) - \varphi_{(\theta^-, \theta|_n)}^{\underline{t}}(\pi_{\theta^-, \theta|_n}^{\underline{t}}(\sigma^n(\tau))) \right| \\ &= \left| (\varphi_{(\theta^-, \theta|_n)}^{\underline{t}})'(c) \right| \left| \pi_{\theta^-, \theta|_n}^{\underline{t}}(\sigma^n(\theta)) - \pi_{\theta^-, \theta|_n}^{\underline{t}}(\sigma^n(\tau)) \right|, \end{aligned}$$

para algum $c \in [-1, 1]$, pelo teorema do valor médio.

Portanto, pela linearidade de $\varphi_{(\theta^-, \theta|_n)}^{\underline{t}}$,

$$\left| \pi_{\theta^-}^{\underline{t}}(\theta) - \pi_{\theta^-}^{\underline{t}}(\tau) \right| \geq \|(\varphi_{(\theta^-, \theta|_n)}^{\underline{t}})'\| \left| \pi_{\theta^-, \theta|_n}^{\underline{t}}(\sigma^n(\theta)) - \pi_{\theta^-, \theta|_n}^{\underline{t}}(\sigma^n(\tau)) \right|, \text{ para todo } \theta^- \in \Sigma_A^-.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
X_r &\leq \sum_{n \geq 0} \sum_{\beta \in \Sigma_{A, \theta^-}^n} \int \int_{A_\beta} \tilde{L}_r(\theta, \tau) d\mu_{\theta_0^-}(\theta) d\mu_{\theta_0^-}(\tau) \\
&= \sum_{n \geq 0} \sum_{\beta \in \Sigma_{A, \theta^-}^n} \int \int_{A_\beta} \hat{L}_r(\theta, \tau) d\mu_{\theta_0^-}(\theta) d\mu_{\theta_0^-}(\tau),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{onde } \tilde{L}_r(\theta, \tau) &:= Leb\left\{ \underline{t} \in B_\delta(0); \|(\varphi_{(\theta^-, \theta|_n)}^{\underline{t}})'\| |\pi_{\theta^-, \theta|_n}^{\underline{t}}(\sigma^n(\theta)) - \pi_{\theta^-, \theta|_n}^{\underline{t}}(\sigma^n(\tau))| \leq r \right\} \\
\text{e } \hat{L}_r(\theta, \tau) &:= Leb\left\{ \underline{t} \in B_\delta(0); |\pi_{\theta^-, \theta|_n}^{\underline{t}}(\sigma^n(\theta)) - \pi_{\theta^-, \theta|_n}^{\underline{t}}(\sigma^n(\tau))| \leq \frac{r}{\|(\varphi_{(\theta^-, \theta|_n)}^{\underline{t}})'\|} \right\}
\end{aligned}$$

Agora, vamos usar a continuidade da distorção para transferir a propriedade fraccal de φ_0^0 para $\varphi^{\underline{t}}$ para \underline{t} próximos de 0 .

Seja $\epsilon_0 > 0$ tal que $\epsilon_0 < \bar{d}_s - 1$. Pela continuidade da distorção, para qualquer $\eta > 0$ existe uma constante $\delta > 0$ tal que se \underline{t} satisfaz $|\underline{t}| \leq \delta$,

$$\begin{aligned}
\|(\varphi_{(\theta^-, \theta|_n)}^{\underline{t}})'\|^{(1+\frac{\epsilon_0}{4})} &\leq (e^{|\theta|_n} |\eta| \|(\varphi_{(\theta^-, \theta|_n)}^{\underline{t}})'\|)^{(1+\frac{\epsilon_0}{4})} \\
&\leq (e^{|\theta|_n} |\eta|)^{(1+\frac{\epsilon_0}{4})} \lambda^{\frac{\epsilon_0}{4} |\theta|_n} \|(\varphi_{(\theta^-, \theta|_n)}^{\underline{t}})'\|, \text{ para algum } 0 < \lambda < 1.
\end{aligned}$$

Então, ao escolhermos $\eta > 0$ tal que $(1 + \frac{\epsilon_0}{4})\eta + \frac{\epsilon_0}{4} \log(\lambda) = 0$,

$$\begin{aligned}
\|(\varphi_{(\theta^-, \theta|_n)}^{\underline{t}})'\|^{(1+\frac{\epsilon_0}{4})} &\leq (e^{|\theta|_n} |\eta|)^{((1+\frac{\epsilon_0}{4})\eta + \frac{\epsilon_0}{4} \log(\lambda))} \|(\varphi_{(\theta^-, \theta|_n)}^{\underline{t}})'\| \\
&= \|(\varphi_{(\theta^-, \theta|_n)}^{\underline{t}})'\|.
\end{aligned}$$

Denotando $L_r(\theta, \tau) := Leb\left\{ \underline{t} \in B_\delta(0); |\pi_{\theta^-, \theta|_n}^{\underline{t}}(\sigma^n(\theta)) - \pi_{\theta^-, \theta|_n}^{\underline{t}}(\sigma^n(\tau))| \leq \frac{r}{\|(\varphi_{(\theta^-, \theta|_n)}^{\underline{t}})'\|^{(1+\frac{\epsilon_0}{4})}} \right\}$

e escolhido tal $\eta > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$$\begin{aligned}
X_r &\leq \sum_{n \geq 0} \sum_{\beta \in \Sigma_{A, \theta^-}^n} \int \int_{A_\beta} L_r(\theta, \tau) d\mu_{\theta_0^-}(\theta) d\mu_{\theta_0^-}(\tau) \\
&\leq \sum_{n \geq 0} \sum_{\beta \in \Sigma_{A, \theta^-}^n} \int \int_{A_\beta} \frac{Cr}{\|(\varphi_{(\theta^-, \theta|_n)}^{\underline{t}})'\|^{(1+\frac{\epsilon_0}{4})}} d\mu_{\theta_0^-}(\theta) d\mu_{\theta_0^-}(\tau),
\end{aligned}$$

pela condição de transversalidade.

Agora, pelo lema 7.14, $\|(\varphi_{(\theta^-, \theta|_n)}^{\underline{t}})'\|^{\bar{d}_s} \geq c_{10}^{-1} \mu(\theta|_n)$.

$$\text{Então, } \frac{1}{\|(\varphi_{(\theta^-, \theta|_n)}^{\underline{t}})'\|^{1+\frac{\epsilon_0}{4}}} \leq (c_{10}^{-1} \mu(\theta|_n))^{-\frac{1+\frac{\epsilon_0}{4}}{\bar{d}_s}}.$$

Agora, como $\bar{d}_s > 1$ e $\epsilon_0 < \bar{d}_s - 1$, então

$$\frac{1 + \frac{\epsilon_0}{4}}{\bar{d}_s} < \frac{1 + \frac{\bar{d}_s - 1}{4}}{\bar{d}_s} = \frac{1}{\bar{d}_s} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4\bar{d}_s} = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{\bar{d}_s} - \frac{1}{4\bar{d}_s}\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4\bar{d}_s} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$$

Portanto, existe um número $x > 0$ tal que $\frac{1 + \frac{\epsilon_0}{4}}{\bar{d}_s} < 1 - x$.

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|(\varphi_{(\theta^-, \theta|_n)})'\|^{1+\frac{\epsilon_0}{4}}} &\leq \frac{1}{(c_{10}^{-1}\mu(\theta|_n))^{1-x}} \\
&= \frac{1}{(c_{10}^{-1}\mu(\theta|_n))} (c_{10}^{-1}\mu(\theta|_n))^x \\
&\leq \frac{1}{(c_{10}^{-1}\mu(\theta|_n))} (c_{10}\lambda^n)^x \\
&= c_{10}^{x-1}\lambda^{nx} \frac{1}{\mu(\theta|_n)}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
X &= \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{X_r}{2r} \\
&\leq \sum_{n \geq 0} \sum_{\beta \in \Sigma_{A, \theta^-}^n} \frac{\int \int_{A_\beta} C r c_{10}^{x-1} \lambda^{nx} \frac{1}{\mu(\theta|_n)} d\mu_{\theta_0^-}(\theta) d\mu_{\theta_0^-}(\tau)}{2r} \\
&= \frac{C}{2} c_{10}^{x-1} \sum_{n \geq 0} \lambda^{nx} \sum_{\beta \in \Sigma_{A, \theta^-}^n} \frac{1}{\mu_{\theta_0^-}(\beta)} \mu_{\theta_0^-} \times \mu_{\theta_0^-}(\beta \times \beta) \\
&= \frac{C}{2} c_{10}^{x-1} \sum_{n \geq 0} \lambda^{nx} \sum_{\beta \in \Sigma_{A, \theta^-}^n} \mu_{\theta_0^-}(\beta) \\
&\leq \frac{C}{2} c_{10}^{x-1} \sum_{n \geq 0} \lambda^{nx} =: K_3 < \infty.
\end{aligned}$$

■

8 Argumento probabilístico

8.1 Família de perturbações

A partir de agora fixaremos um N -parâmetro, \underline{t} , dado pela proposição 7.2 e trabalharemos com $f^{\underline{t}}$. Consideraremos, sem perda de generalidade, que $f^{\underline{t}} = f$. Nesta seção, criaremos uma nova família de perturbações sobre f .

Seja $c > 0$ suficientemente pequeno de modo a garantir que as peças de ordem $\rho^{\frac{c}{k}}$ estejam distantes uma das outras da ordem de $\rho^{\frac{1}{k}}$. Esse relaxamento é devido à falta de conformalidade de $df|_{E^s}$, medida por c .

A família de perturbações utilizada nesta segunda perturbação, referente ao argumento probabilístico, será feita sob a família $\Omega := [-1, 1]^{\Sigma_1}$ onde suas coordenadas estão indexadas por blocos (iterados avançados da partição de Markov fixada) que formam uma partição de Σ . Esses blocos tem diâmetro da ordem de $\rho^{\frac{1}{k}}$ (distância entre suas folhas da ordem de $\rho^{\frac{1}{k}}$ e com peças da ordem de $\rho^{\frac{c}{k}}$). Mais especificamente, $\Sigma_1 \subset \left\{ \underline{\theta} = (\underline{\theta}^-, \underline{\theta}^+) \in \Sigma^*; \underline{\theta}^- \in \Sigma^-(\rho^{\frac{1}{k}}), \underline{\theta}^+ \in \Sigma_{\theta^-}^{+*}(\rho^{\frac{c}{k}}) \right\}$.

Esta família de perturbações, $\{f^{\underline{\omega}}\}_{\underline{\omega} \in \Omega}$, será do tipo $(\Sigma_1, \kappa \rho^{\frac{1}{k}}, \rho^{\frac{c}{k}}, \rho)$, para algum $0 < \kappa < 1$ dependendo apenas de f . Isso significa que faremos perturbações da ordem de ρ em blocos de diâmetro $\kappa \rho^{\frac{1}{k}}$ - e portanto distanciados da ordem de $\kappa \rho^{\frac{1}{k}}$. Tais perturbações são transversais a $E^{ss} \oplus E^u$ (a idéia é que estejam na direção de E^{ws}).

Já vimos na observação 6.2 que essa perturbação é C^{k-1} pequena se a escala $\rho > 0$ for escolhida suficientemente pequena.

8.2 Fim da demonstração

Assumimos que o conjunto candidato a compacto recorrente, K , já tenha sido construído e que satisfaça a propriedade 8.2 que será enunciada nesta seção. Provamos, aqui, que ele é, de fato, um compacto recorrente para algum, de fato vários, $f^{\underline{\omega}}$.

Definimos, para cada $(x, \theta^-) \in H$, os parâmetros para os quais existe alguma peça de ordem ρ tal que a renormalização de (x, θ^-) referente a tal parâmetro, caia no candidato a compacto recorrente, K ,

$$\Omega_0(x, \theta^-) = \left\{ \underline{\omega} \in \Omega \text{ tais que existe } \underline{a} \in \Sigma_{\theta^-}(\rho) \text{ de modo que } R_{\underline{a}}^{\underline{\omega}}(x, \theta^-) \in \text{int}(K) \right\}.$$

Dizemos que (x, θ^-) é recorrente para $f^{\underline{\omega}}$ se $\underline{\omega} \in \Omega_0(x, \theta^-)$.

Definição 8.1.

- Para cada $\delta > 0$, $K_{-\delta}$ é dito **interior δ -folgado de K** se a vizinhança de raio δ de $K_{-\delta}$ está contida em K .
- Definimos, para cada $(x, \theta^-) \in H$,

$$\Omega_{0,\rho^2}(x, \theta^-) = \left\{ \underline{\omega} \in \Omega \text{ tais que existe } \underline{a} \in \Sigma_{\theta_0^-}(\rho) \text{ de modo que } R_{\underline{a}}^{\underline{\omega}}(x, \theta^-) \in K_{-\rho^2} \right\}.$$

O conjunto K , candidato a compacto recorrente, que será construído em outra seção, satisfaz a propriedade a seguir. Nos dedicaremos a construir o conjunto K que satisfaça essa propriedade a partir da próxima seção.

Propriedade 8.2. *Propriedade principal*

Existem constantes positivas $c_{13} > 0$ e $c_{14} > 0$ tais que para todo $\rho > 0$ suficientemente pequeno, existe $K \subset H$ e um subconjunto de folhas, \mathcal{W}^- , $c_{14}\rho$ -denso nas folhas cujas projeções contêm K tais que se $(x, \theta^-) \in K \cap \mathcal{W}^-$, então

$$\mathbb{P}\left(\Omega \setminus \Omega_{0,\rho^2}(x, \theta^-)\right) < \exp(-c_{13}\rho^{-\frac{\varepsilon}{k}(\bar{d}_s-1)}).$$

Isto significa que existem muitos parâmetros $\underline{\omega} \in \Omega$ tais que $\underline{\omega} \in \Omega_{0,\rho^2}(x, \theta^-)$. A proposição a seguir mostra que basta provar que existe um conjunto, K , satisfazendo a propriedade principal - 8.2 - para garantirmos a existência de um compacto recorrente C^k -próximo de uma ferradura, (f, Λ) , satisfazendo a propriedade B .

Proposição 8.3.

Se $\rho > 0$ for escolhido suficientemente pequeno, então se K satisfaz a propriedade principal, 8.2, existe $\underline{\omega} \in \Omega$ tal que K é compacto recorrente para $f^{\underline{\omega}}$.

Demonstração:

Denotaremos o conjunto dos pontos de H para os quais existe uma peça de ordem ρ tal que a renormalização referente ao parâmetro $\underline{\omega}$ de tais pontos caia em $K_{-\rho^2}$, por

$$\Omega_{0,\rho^2}^{-1}(\underline{\omega}) := \left\{ (x, \theta^-) \in H; \exists \underline{a} \in \Sigma_{\theta_0^-}(\rho), R_{\underline{a}}^{\underline{\omega}}(x, \theta^-) \in K_{-\rho^2} \right\}.$$

Sejam $B_x(r)$ bola de centro x e raio r em \mathbb{R} e $\mathcal{B}_{\theta^-}(\rho)$ um cilindro de folhas, $\mathcal{B}_{\theta^-}(\rho) \in \Sigma^-(\rho)$, de ordem ρ contendo θ^- .

Faremos a seguinte decomposição de $\Omega_{0,\rho^2}^{-1}(\underline{\omega})$: Existe constante positiva $c_{12} > 0$ tal que para todo $\underline{\omega} \in \Omega$ e $\rho > 0$, $\Omega_{0,\rho^2}^{-1}(\underline{\omega})$ é vazio ou é $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha \cap \Omega_{0,\rho^2}^{-1}(\underline{\omega})$, onde \mathcal{A} é um conjunto com, no máximo, $c_{12}\rho^{-5}$ índices e $U_\alpha = B_{x_\alpha}(\rho^4) \times \mathcal{B}_{\theta_\alpha^-}(c_{14}\rho)$.

Fixado $(x, \theta^-) \in K$, pela propriedade 8.2, $\mathbb{P}_\Omega\left(\Omega \setminus \Omega_{0,\rho^2}(x, \theta^-)\right) < \exp(-c_{13}\rho^{-\frac{\varepsilon}{k}(\bar{d}_s-1)})$. Ou seja, $\mathbb{P}_\Omega\left(\Omega_{0,\rho^2}(x, \theta^-)\right) \geq 1 - \exp(-c_{13}\rho^{-\frac{\varepsilon}{k}(\bar{d}_s-1)})$.

Além disso, pela propriedade 8.2, se $\underline{\omega} \in \Omega_{0,\rho^2}(x, \theta^-)$ e $(x, \theta^-) \in U_\alpha$, então se $c_{14} > 0$ for escolhido suficientemente pequeno, $\underline{\omega} \in \Omega_0(\tilde{x}, \tilde{\theta}^-)$ para todo $(\tilde{x}, \tilde{\theta}^-) \in U_\alpha$, já que existe $\underline{a} \in \Sigma_{\theta_0}^-(\rho)$ tal que o operador de renormalização correspondente a \underline{a} leva (x, θ^-) em $K_{-\rho^2}$. Isso se deve ao fato que o operador de renormalização associado a um cilindro vertical de ordem $\rho > 0$ expande da ordem de ρ^{-1} na direção \mathcal{I} e contrai da ordem de ρ na direção de \mathcal{K} ($H = \mathcal{I} \times \mathcal{K}$). Isso significa que o operador de renormalização correspondente a \underline{a} leva $(\tilde{x}, \tilde{\theta}^-)$ em $\text{int}(K)$ se ρ e c_{14} forem escolhidos suficientemente pequenos.

$$\text{Portanto, } \mathbb{P}_\Omega \left(\bigcap_{(\tilde{x}, \tilde{\theta}^-) \in U_\alpha} \Omega_0(\tilde{x}, \tilde{\theta}^-) \right) \geq 1 - \exp(-c_{13}\rho^{-\frac{\epsilon}{k}(\bar{d}_s-1)}), \text{ se } (x, \theta^-) \in K \cap \mathcal{W}^- \cap \mathcal{U}_\alpha.$$

$$\text{Logo, } \mathbb{P}_\Omega \left(\bigcup_{(\tilde{x}, \tilde{\theta}^-) \in U_\alpha} (\Omega \setminus \Omega_0(\tilde{x}, \tilde{\theta}^-)) \right) < \exp(-c_{13}\rho^{-\frac{\epsilon}{k}(\bar{d}_s-1)}).$$

Daí segue que, já que \mathcal{W}^- é $c_{14}\rho$ -denso nas folhas cujas projeções contêm K , então

$$\mathbb{P}_\Omega \left(\bigcup_{\substack{\alpha \in \mathcal{A} \\ (\tilde{x}, \tilde{\theta}^-) \in U_\alpha}} \Omega \setminus \Omega_0(\tilde{x}, \tilde{\theta}^-) \right) < c_{14}^{-1} c_{12} \rho^{-5} \exp(-c_{13}\rho^{-\frac{\epsilon}{k}(\bar{d}_s-1)}), \text{ ou seja,}$$

$$\mathbb{P}_\Omega \left(\bigcup_{(\tilde{x}, \tilde{\theta}^-) \in K} \Omega \setminus \Omega_0(\tilde{x}, \tilde{\theta}^-) \right) < c_{14}^{-1} c_{12} \rho^{-5} \exp(-c_{13}\rho^{-\frac{\epsilon}{k}(\bar{d}_s-1)}) \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0.$$

Dessa forma, existe (em abundância) $\underline{\omega} \in \Omega$ tal que K é compacto recorrente para f^ω . ■

8.3 Construção do candidato a compacto recorrente, K

Para finalizar, precisamos construir um candidato a compacto recorrente, K , e garantir que ele satisfaz a propriedade principal - 8.2. Faremos isso aqui e na seção 8.4.

Seja θ^- uma folha. Será construído um subconjunto K_{θ^-} de H_{θ^-} que possui uma propriedade de acavalamentos para f - isso será precisado mais adiante, com isso queremos dizer que, essencialmente, em cima de cada ponto de K (i.e., ao longo de sua folha estável-forte) existem muitas peças de ordem ρ .

Estaremos preocupados, de agora em diante, em preparar as bases da demonstração do lema 8.19, que afirma, essencialmente, que para cada (x, θ^-) , existem da ordem de $\rho^{-(\bar{d}_s-1)\frac{\epsilon}{k}}$ peças de tamanho da ordem de ρ cujas projeções ao longo da folheação estável forte de f contenham (x, θ^-) , sendo que cada uma dessas peças estão em peças diferentes de tamanho da ordem de $\rho^{\frac{\epsilon}{k}}$ - o que significa dizer que estão bem separados, da ordem de $\rho^{\frac{1}{k}}$ - umas das outras. Além disso, a medida de Lebesgue da projeção dessas peças ao longo da folheação

estável forte sobre H_{θ^-} é limitada inferiormente por uma constante positiva independente de θ^- . Sobre a separação entre essas peças - da ordem de $\rho^{\frac{1}{k}}$ - observamos que isso é necessário para que os parâmetros da família de perturbações referentes a uma peça não exerçam influência em outras peças - vamos precisar da independência dos deslocamentos de peças que estão numa mesma folha estável-forte (fato é que garantiremos independência de peças que estão em uma mesma folha estável). Lembre-se do nosso comentário sobre peças e folhas não recorrentes - elas são previsíveis.

8.3.1 Seleção de folhas e peças boas

Agora, definiremos as folhas com as quais trabalharemos. Elas estão na vizinhança de uma folha muito boa e nunca-recorrente (esta nunca retorna próximo dela mesma). Em seguida, definiremos as peças que utilizaremos.

Definição 8.4. *Folha muito boa*

Vamos fixar uma constante $0 < \xi < 1$ e chamar de **folhas muito boas** as folhas do conjunto $\Sigma_{MB}^- \in \Sigma^-$, dado pela proposição 7.2 aplicada para ξ . Lembramos que isso significa que se $\theta^- \in \Sigma_{MB}$, então

$$\left\| \frac{d\nu_{\theta^-}}{dLeb} \right\|_{L_2}^2 < K_1$$

Definição 8.5. *Folha nunca recorrente*

Iremos considerar as folhas de Σ^- que são nunca recorrente para palavras de ordem $\rho^{\frac{\epsilon}{k}}$, ou seja, as folhas de $\bigcap_{\beta > 0} \Sigma_{(\rho^{\frac{\epsilon}{k}}, \beta)}^-$.

Denotaremos essas folhas pelo símbolo \mathcal{W}^- e as chamaremos de folhas nunca-recorrentes.

As folhas que definiremos a seguir são aquelas em que o candidato a compacto recorrente será definido.

Definição 8.6. *Folha boa não recorrente*

Fixado $c_{14} > 0$, dizemos que $\theta^- \in \Sigma^-$ é uma **folha boa não recorrente** se θ^- está em algum bloco, $\underline{\theta}^-$, de $\Sigma_{(\rho^{\frac{\epsilon}{k}}, c_{14}\rho)}^-$ que está contido em algum bloco de Σ_A^- tal que $\underline{\theta}^- \cap \Sigma_{MB}^- \neq \emptyset$. Denotaremos o conjunto dos blocos de ordem $c_{14}\rho$ de folhas boas não recorrentes por $\mathcal{W}^-(c_{14}\rho)$.

Observamos que cada bloco de folhas boas não recorrentes, $\underline{\theta}^- \in \mathcal{W}^-(c_{14}\rho)$, possui folha boa nunca recorrente de \mathcal{W}^- .

Lema 8.7.

Para todo $c_{14} > 0$, existe $\rho_0 > 0$ tal que se $0 < \rho < \rho_0$, então $\mu(\Sigma^- \setminus \mathcal{W}^-(\frac{1}{2}c_{14}\rho)) < \xi$.

Para demonstrar este lema, precisaremos do lema a seguir.

Lema 8.8.

Para todo $\varepsilon > 0$, $\mu^- \left(\Sigma^- \setminus \Sigma^-_{\left(\rho^{\frac{\varepsilon}{k}}, \frac{1}{2}c_{14}\rho\right)} \right) < \varepsilon$, se $\rho > 0$ for escolhido suficientemente pequeno.

Demonstração:

Sejam $\tilde{C} > 0$ e $m := - \left\lceil \tilde{C} \log \left(\frac{1}{2}c_{14}\rho \right) \right\rceil$. Observamos que se \tilde{C} for escolhido suficientemente grande, então qualquer folha de ordem $\frac{1}{2}c_{14}\rho$, $\underline{\theta}^- \in \Sigma^- \left(\frac{1}{2}c_{14}\rho \right)$, satisfaz $|\underline{\theta}^-| \leq m$.

Para cada $(i, j, k, l) \in \mathbb{N}^4$, definimos

$$T_{(i,j,k,l)} := \left\{ \underline{abcbe} \in \Sigma^- \left(\frac{1}{2}c_{14}\rho \right) \text{ tais que } |\underline{a}| = i, |\underline{b}| = j, |\underline{c}| = k, |\underline{e}| = l \text{ e } \underline{b} \in \Sigma^- \left(\rho^{\frac{\varepsilon}{k}} \right) \right\}.$$

Observamos que $\bigcup_{\substack{(i,j,k,l) \in \mathbb{N}^4 \\ i+2j+k+l \leq m}} T_{(i,j,k,l)}$ é o conjunto de todas as palavras de ordem $\frac{1}{2}c_{14}\rho$ que possuem uma subpalavra de ordem $\rho^{\frac{\varepsilon}{k}}$ se repetindo em dois intervalos disjuntos de índices. Provaremos que esse conjunto tem medida μ^- pequena. Depois provaremos que também tem medida pequena o conjunto das palavras que possuem subpalavra de ordem $\rho^{\frac{\varepsilon}{k}}$ se repetindo em intervalos de índices que se intersectam. Concluídos esses dois passos, teremos o nosso lema.

Notamos que existe constante $\hat{C} > 1$ tal que $\hat{C}^{-1} \leq \frac{\mu^-(\underline{abcbe})}{\mu^-(\underline{a})\mu^-(\underline{b})\mu^-(\underline{c})\mu^-(\underline{b})\mu^-(\underline{e})} \leq \hat{C}$, porque $\mu^-(\underline{\theta}) \asymp \rho^{\bar{d}_s}$ se $\underline{\theta} \in \Sigma^-(\rho)$ e $d_s(ab) \asymp d_s(a)d_s(b)$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \mu^-(T_{(i,j,k,l)}) &\leq \sum_{\underline{a} \in \Sigma^{i-}} \sum_{\underline{b} \in \Sigma^{j-}} \sum_{\underline{c} \in \Sigma^{k-}} \sum_{\underline{e} \in \Sigma^{l-}} \hat{C} \mu^-(\underline{a})\mu^-(\underline{b})\mu^-(\underline{c})\mu^-(\underline{b})\mu^-(\underline{e}) \\ &= \hat{C} \mu^-(\underline{b}) \sum_{\underline{a} \in \Sigma^{i-}} \mu^-(\underline{a}) \sum_{\underline{b} \in \Sigma^{j-}} \mu^-(\underline{b}) \sum_{\underline{c} \in \Sigma^{k-}} \mu^-(\underline{c}) \sum_{\underline{e} \in \Sigma^{l-}} \mu^-(\underline{e}) \\ &= \hat{C} \mu^-(\underline{b}) \\ &\leq \bar{C} \rho^{\frac{\varepsilon}{k} \bar{d}_s}, \text{ para alguma constante } \bar{C} > 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \mu^- \left(\bigcup_{\substack{(i,j,k,l) \in \mathbb{N}^4 \\ i+2j+k+l \leq m}} T_{(i,j,k,l)} \right) &\leq \sum_{\substack{(i,j,k,l) \in \mathbb{N}^4 \\ i+2j+k+l \leq m}} \mu^-(T_{(i,j,k,l)}) \\ &\leq (m+1)^4 \bar{C} \rho^{\frac{\varepsilon}{k} \bar{d}_s} \\ &= (\tilde{C} \lceil \log \left(\frac{1}{2}c_{14}\rho \right) \rceil)^4 \bar{C} \rho^{\frac{\varepsilon}{k} \bar{d}_s} \\ &= \tilde{C}^4 \bar{C} \lceil \log \left(\frac{1}{2}c_{14}\rho \right) \rceil^4 \rho^{\frac{\varepsilon}{k} \bar{d}_s} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando ρ converge para zero.

Agora, vamos provar que é pequena a medida das palavras que possuem subpalavra de

ordem $\rho^{\frac{c}{k}}$ se repetindo em intervalos que se intersectam. Isso finaliza a demonstração do lema.

Antes, observamos que essas são as palavras do tipo \underline{acbe} tais que existe algum \tilde{c} com $\underline{cb} = \underline{b\tilde{c}}$ com $|\tilde{c}| < |b|$. Isso implica que existem $l \geq 2$ e \hat{c} tais que $\underline{acbe} = \underline{ac^l\hat{c}e}$, onde $\underline{c^l} \in \bigcup_{1 \leq \beta \leq 2} \Sigma^-(\rho^{\beta \frac{c}{k}})$.

Para cada $(i, j, k, r, l) \in \mathbb{N}^4 \times (\mathbb{N}^* \setminus \{1\})$, definimos

$$\hat{T}_{(i,j,k,r,l)} := \left\{ \underline{ac^l\hat{c}e} \in \Sigma^- \left(\frac{1}{2} c_{14} \rho \right) \text{ tais que } |\underline{a}| = i, |\underline{c}| = j, |\underline{e}| = k, |\underline{\hat{c}}| = r \text{ e } \underline{c^l} \in \bigcup_{1 \leq \beta \leq 2} \Sigma^-(\rho^{\beta \frac{c}{k}}) \right\}.$$

Observamos que $\bigcup_{\substack{(i,j,k,l,r) \in \mathbb{N}^4 \times (\mathbb{N}^* \setminus \{1\}) \\ i+j+l+k+r \leq m}} \hat{T}_{(i,j,k,l,r)}$ é o conjunto de todas as palavras de ordem $\frac{1}{2} c_{14} \rho$ que possuem subpalavra de ordem $\rho^{\frac{c}{k}}$ se repetindo em intervalos que se intersectam.

Notamos que existe constante $\hat{D} > 1$ tal que $\hat{D}^{-1} \leq \frac{\mu^-(\underline{ac^l\hat{c}e})}{\mu^-(\underline{a})\mu^-(\underline{c^l})\mu^-(\underline{\hat{c}})\mu^-(\underline{e})} \leq \hat{D}$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \mu^-(\hat{T}_{(i,j,k,l,r)}) &\leq \sum_{\underline{a} \in \Sigma^{i-}} \sum_{\underline{c} \in \Sigma^{j-}} \sum_{\underline{\hat{c}} \in \Sigma^{r-}} \sum_{\underline{e} \in \Sigma^{k-}} \hat{D} \mu^-(\underline{a}) \mu^-(\underline{c^l}) \mu^-(\underline{\hat{c}}) \mu^-(\underline{e}) \\ &= \hat{D} \mu^-(\underline{c^l}) \sum_{\underline{a} \in \Sigma^{i-}} \mu^-(\underline{a}) \sum_{\underline{c} \in \Sigma^{j-}} \mu^-(\underline{c}) \sum_{\underline{\hat{c}} \in \Sigma^{r-}} \mu^-(\underline{\hat{c}}) \sum_{\underline{e} \in \Sigma^{k-}} \mu^-(\underline{e}) \\ &= \hat{D} \mu^-(\underline{c^l}) \\ &\leq \bar{D} \rho^{\frac{1}{4} \frac{c}{k} \bar{d}_s}, \text{ para algum } \bar{D} > 0. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \mu^- \left(\bigcup_{\substack{(i,j,k,l) \in \mathbb{N}^4 \times (\mathbb{N}^* \setminus \{1\}) \\ i+j+l+k+r \leq m}} T_{(i,j,k,l)} \right) &\leq \sum_{\substack{(i,j,k,l) \in \mathbb{N}^4 \times (\mathbb{N}^* \setminus \{1\}) \\ i+j+l+k+r \leq m}} \mu^-(T_{(i,j,k,l)}) \\ &\leq (m+1)^4 \bar{D} \rho^{\frac{c}{k} \bar{d}_s} \\ &= (\tilde{C} \lceil \log(\frac{1}{2} c_{14} \rho) \rceil)^4 \bar{D} \rho^{\frac{1}{4} \frac{c}{k} \bar{d}_s} \\ &= \tilde{C}^4 \bar{D} \lceil \log(\frac{1}{2} c_{14} \rho^2) \rceil^4 \rho^{\frac{1}{4} \frac{c}{k} \bar{d}_s} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando ρ converge para zero. ■

Agora, voltamos à demonstração do lema 8.7;

Demonstração do lema 8.7:

Observamos que analogamente ao lema anterior, podemos provar que para todo $\varepsilon > 0$, $\mu^-(\Sigma^- \setminus \Sigma_A^-) < \varepsilon$, se $A > 0$ tiver sido escolhido suficientemente pequeno.

Feito isso, basta observar que $\mu^-(\Sigma^- \setminus \Sigma_{MB}^-) \leq \frac{\xi}{2}$. Ou seja, $\mu^-(\Sigma^- \setminus \mathcal{W}^-(c_{14} \rho)) < \xi$ se ρ for escolhido suficientemente pequeno. ■

Definição 8.9. *Peça boa*

Dizemos que $(\theta^-, \underline{\theta}) \in \mathcal{W}^-(c_{14}\rho) \times \Sigma_{\theta^-}^*$ é uma **peça boa** se $\theta^- \underline{\theta} \in \mathcal{W}^-(\frac{1}{2}c_{14}\rho)$.

Denotaremos essas peças por $\Sigma_{B, \theta^-}(c_{14}\rho)$.

Agora vamos definir as peças com as quais trabalharemos para construir o candidato a compacto recorrente na projeção de $\mathcal{W}^-(c_{14}\rho)$. O candidato a compacto recorrente será essencialmente a projeção de algumas dessas peças. Elas terão duas propriedades importantes: ‘evitar certas recorrências’ e ‘tornarem-se uma folha boa não-recorrente, com folga’.

Definição 8.10. *Peça boa não-recorrente*

Dizemos que $(\theta^-, \underline{\theta}) \in \mathcal{W}^-(c_{14}\rho) \times (\Sigma_{(\frac{\varepsilon}{\rho^k}, \rho), \theta^-}^* \cap \Sigma_{A, \theta^-}^*)$ é uma **peça boa não-recorrente** se $\theta^- \underline{\theta} \in \mathcal{W}^-(\frac{1}{2}c_{14}\rho)$.

Denotaremos este conjunto de peças boas não-recorrentes que estão na folha $\theta^- \in \Sigma^-$ por $\Theta_{\theta^-}(c_{14}\rho)$.

Lema 8.11.

Seja $X \subset W_{\theta^-}$ união disjunta de peças de ordem ρ satisfazendo $\mu_{\theta_0^-}(X) > 0$. Então X tem entre $c_{11}^{-1}\mu_{\theta_0^-}(X)\rho^{-\bar{d}_s}$ e $c_{11}\mu_{\theta_0^-}(X)\rho^{-\bar{d}_s}$ peças de ordem ρ .

Demonstração:

Denotamos $X = \bigcup_{\underline{\theta} \in \tilde{X}} \theta^-$ a união disjunta do enunciado do lema. Como $\mu_{\theta_0^-}(X) = \sum_{\underline{\theta} \in \tilde{X}} \mu_{\theta_0^-}(\theta^-)$, então, pelo corolário 7.15, $c_{11}^{-1}\rho^{\bar{d}_s} \leq \mu_{\theta_0^-}(\theta^-) \leq c_{11}\rho^{\bar{d}_s}$ para toda peça de ordem ρ . Logo, existem entre $c_{11}^{-1}\mu_{\theta_0^-}(X)\rho^{-\bar{d}_s}$ e $c_{11}\mu_{\theta_0^-}(X)\rho^{-\bar{d}_s}$ peças de ordem ρ . ■

Lema 8.12.

Existe constante $c_{15} > 0$ tal que para toda folha boa não recorrente $\theta^- \in \mathcal{W}^-(c_{14}\rho)$, $\#\Theta_{\theta^-}(\rho) \geq c_{15}\rho^{-\bar{d}_s}$, se $\rho > 0$ for escolhido suficientemente pequeno.

Antes de demonstrarmos este resultado, precisaremos do próximo lema que tem demonstração análoga à do lema 8.8

Lema 8.13.

(i) $\mu_{\theta_0^-}(\Sigma_{\theta^-} \setminus \Sigma_{(\frac{\varepsilon}{\rho^k}, \beta), \theta}^-)$ é tão pequeno quanto se queira se $\beta > 0$ for escolhido suficientemente pequeno.

(ii) $\mu_{\theta_0^-}(\Sigma_{\theta^-} \setminus \Sigma_{A, \theta^-}^-)$ é tão pequeno quanto se queira se $A > 0$ tiver sido escolhido suficientemente pequeno.

Demonstração do lema 8.12:

Denotando-se $A_k := \left\{ \underline{\theta} \in \Sigma_{(\frac{\varepsilon}{\rho^k}, \rho), \theta^-}^-; |\underline{\theta}| = k \right\}$, tem-se $\Sigma_{(\frac{\varepsilon}{\rho^k}, \rho), \theta^-}^- = \bigcup_{k \geq 0} A_k$.

Como, $\sigma^{-k}(\sigma^k(A_k) \setminus \mathcal{W}^-(\frac{1}{2}c_{14}\rho)) = A_k \setminus \Theta_{\theta^-}(\rho)$ e μ é σ -invariante, então

$$\mu^-\left(\bigcup_{k \geq 0} \sigma^k(A_k) \setminus \mathcal{W}^-(\frac{1}{2}c_{14}\rho)\right) = \mu_{\theta_0^-}\left(\bigcup_{k \geq 0} A_k \setminus \Theta_{\theta^-}(\rho)\right).$$

Mas, pelo lema 8.7, $\mu^-\left(\bigcup_{k \geq 0} \sigma^k(A_k) \setminus \mathcal{W}^-(\frac{1}{2}c_{14}\rho)\right)$ é menor que ξ , e portanto, $\mu_{\theta_0^-}\left(\bigcup_{k \geq 0} A_k \setminus \Theta_{\theta^-}(\rho)\right)$ é menor que ξ . Portanto, $\mu_{\theta_0^-}\left(\Sigma_{(\rho^{\frac{c}{k}}, \rho), \theta^-} \setminus \Theta_{\theta^-}(\rho)\right)$ é menor que ξ .

Dessa forma, utilizando a afirmação 8.13, $\mu_{\theta_0^-}(\Sigma_{\theta^-} \setminus \Theta_{\theta^-}(\rho))$ é, ainda, menor que ξ , desde que ρ seja suficientemente pequeno. Portanto $\mu_{\theta_0^-}(\Theta_{\theta^-}(\rho)) > 1 - \xi$.

Agora, pelo lema 8.11, $\Theta_{\theta^-}(\rho)$ tem, pelo menos, $c_{11}^{-1}\mu_{\theta_0^-}(\Theta_{\theta^-}(\rho))\rho^{-\bar{d}_s}$ peças de ordem ρ , e portanto, pelo menos, $(1 - \xi)c_{11}^{-1}\rho^{-\bar{d}_s}$ peças de ordem ρ . Basta escolher, portanto, $c_{15} := (1 - \xi)c_{11}^{-1}$.

■

8.3.2 Sequência de acavalamentos e primeiro lema sobre acavalamentos

Um acavalamento é um conjunto de peças cujas projeções ao longo da folheação estável forte são essencialmente iguais.

Seja dada uma escala $\rho > 0$, denotamos os intervalos fundamentais para a escala $\rho > 0$ por $I_i := [(i-1)\rho, i\rho]$ para $i \in \{1, \dots, \lceil \rho^{-1} \rceil\}$ e $I_{\lceil \rho^{-1} \rceil + 1} := [(\lceil \rho^{-1} \rceil)\rho, 1]$.

Definição 8.14. Acavalamento

Seja X um conjunto de peças disjuntas de alguma folha θ^- . Diz-se que $A \subset X$ é um acavalamento com intervalos fundamentais para a escala $\rho > 0$ se existe algum $i \in \{1, \dots, \lceil \rho^{-1} \rceil + 1\}$ tal que se $\underline{\theta} \in A$, então $I_{(\underline{\theta}, \underline{\theta})}^0 \cap I_i \neq \emptyset$.

Definição 8.15. Conjunto de acavalamentos

Dizemos que $S := \{A_j\}_{j=1}^J$ é um **conjunto de acavalamentos para f^0 de X , com intervalos fundamentais para a escala $\rho > 0$ e com, pelo menos, x peças contidas na folha θ^- , - denotado por $CA(X, \rho, x, \theta^-, \underline{\theta})$ - se A_k são acavalamentos com, pelo menos, x peças de X para todo $k \in \{1, \dots, J\}$ e $\bigcup_{j=1}^J A_j$ é formado por peças disjuntas.**

O lema seguinte servirá para separarmos as peças de ordem ρ , que iremos fazer movimentar depois, por distâncias da ordem de $\rho^{\frac{1}{k}}$. Essa separação será importante para conseguirmos alguma independência dos movimentos delas exercidos pela família de perturbações que construímos.

Lema 8.16. *Primeiro acavalamento (de ordem $\rho^{\frac{c}{k}}$)*

Existem constantes $c_{16} > 0$ e $c_{17} > 0$, independentes de ρ tais que para toda folha $\theta^- \in \mathcal{W}^-(c_{14}\rho)$ f , existe um CA $(\Theta_{\theta^-}(\rho^{\frac{\varepsilon}{k}}), \rho^{\frac{\varepsilon}{k}}, c_{16}\rho^{-\frac{\varepsilon}{k}(\bar{d}_s-1)}, \theta^-, \underline{0})$, $S = \{A_i\}_{i=1}^J$, tal que

$$\sum_{i=1}^J \#A_i \geq c_{17}\rho^{-\frac{\varepsilon}{k}\bar{d}_s}.$$

Demonstração:

Para demonstrar isso, jogamos os acavalamentos pequenos fora e consideramos apenas os grandes. Ao jogarmos os acavalamentos pequenos fora, não restarão poucas peças nos acavalamentos grandes já que os acavalamentos pequenos têm poucas peças. Dessa forma, ainda restam em torno de $\rho^{-\frac{\varepsilon}{k}\bar{d}_s}$ peças de ordem $\rho^{\frac{\varepsilon}{k}}$ nos acavalamentos grandes. Abaixo, estão os detalhes.

Pela proposição 8.12, existem, pelo menos, $c_{15}^{-1}\rho^{-\frac{\varepsilon}{k}\bar{d}_s}$ peças de $\Theta_{\theta^-}(\rho^{\frac{\varepsilon}{k}})$ de ordem $\rho^{\frac{\varepsilon}{k}}$ disjuntas.

Fixaremos constante $\tilde{Q} > 0$ a ser escolhida suficientemente pequena em breve e consideraremos $\hat{S} := \{\underline{\theta} \in \Theta_{\theta^-}(\rho^{\frac{\varepsilon}{k}})$ tais que $Y(\hat{S}) < \tilde{Q}\rho^{-\frac{\varepsilon}{k}(\bar{d}_s-1)}$ para todo $1 \leq i \leq \lceil \rho^{-\frac{\varepsilon}{k}} \rceil + 1\}$, onde $Y(\hat{S}) := \#\{\tilde{\theta} \in \Theta_{\theta^-}(\rho^{\frac{\varepsilon}{k}})$ tais que $I_{(\theta^-, \tilde{\theta})} \cap I_i \neq \emptyset\}$.

$$\text{Agora, } \#\hat{S} \leq \sum_{i=1}^{\rho^{-\frac{\varepsilon}{k}}} \tilde{Q}\rho^{-\frac{\varepsilon}{k}(\bar{d}_s-1)} \leq \rho^{-\frac{\varepsilon}{k}}\tilde{Q}\rho^{-\frac{\varepsilon}{k}(\bar{d}_s-1)} = \tilde{Q}\rho^{-\frac{\varepsilon}{k}\bar{d}_s}.$$

Seja $\tilde{S} \subset \Theta_{\theta^-}(\rho^{\frac{\varepsilon}{k}}) \setminus \hat{S}$ uma partição, por elementos de $\Theta_{\theta^-}(\rho^{\frac{\varepsilon}{k}}) \setminus \hat{S}$ para $\Theta_{\theta^-}(\rho^{\frac{\varepsilon}{k}}) \setminus \hat{S}$. Por definição de \tilde{S} , existem, pelo menos, $(c_{15}^{-1} - \tilde{Q})\rho^{-\frac{\varepsilon}{k}\bar{d}_s}$ peças em \tilde{S} .

Definimos o conjunto de acavalamentos $S := \{A_i\}_{i=1}^J$, de modo que cada acavalamento seja composto de $c_{16}\rho^{-\frac{\varepsilon}{k}(\bar{d}_s-1)}$ peças de $\Theta_{\theta^-}(\rho^{\frac{\varepsilon}{k}})$ de modo que os acavalamentos não compartilhem peças, onde c_{16} é alguma fração positiva de $c_{15} - \tilde{Q}$.

Escolhendo $\tilde{Q} > 0$ suficientemente pequeno, e.g. $\tilde{Q} < c_{15}^{-1}$, $\sum_{i=1}^J \#A_i \geq (c_{15}^{-1} - \tilde{Q})\rho^{-\frac{\varepsilon}{k}\bar{d}_s}$.

Basta escolher $c_{17} := c_{15}^{-1} - \tilde{Q}$ e observar que S é a sequência de acavalamentos procurada. ■

8.3.3 Acavalamentos bem espaçados para f^0

Nessa seção construiremos um conjunto de acavalamentos com, pelo menos, $\rho^{-(\bar{d}_s-1)}$ peças de ordem ρ em cada acavalamento de modo que $\rho^{-\frac{\varepsilon}{k}(\bar{d}_s-1)}$ estão bem espaçados (estão contidos em peças de ordem $\rho^{\frac{\varepsilon}{k}}$ diferentes) e cujas projeções têm medida de Lebesgue limitada por baixo por alguma constante positiva independente de ρ .

Lema 8.17. *Utilizando o argumento do tipo Marstrand*

Existe constante $c_{21} > 0$ tal que se $\theta^- \in \mathcal{W}^-(c_{14}\rho)$ é uma folha e X é um conjunto composto por, pelo menos, $z\rho^{-\bar{d}_s}$ peças de $\Sigma_{(\rho^{\frac{c}{k}}, \rho), \theta^-}^*$ que estão contidas em peças de Σ_{A, θ^-}^* , disjuntas, então $\text{Leb}(\pi_{\theta^-}^{\underline{\omega}}(X)) \geq c_{21}z^{-2}$ para todo $\underline{\omega} \in \Omega$.

Demonstração:

Dado $\theta^- \in \mathcal{W}^-(c_{14}\rho)$, vale $\mu_{\theta_0^-}(X) \leq \nu_{\theta^-}^0(\pi_{\theta^-}^0(X)) \leq \int_{\pi_{\theta^-}^0(X)} \frac{d\nu_{\theta^-}^0}{d\text{Leb}} d\text{Leb}$.

Portanto, pelo teorema de Cauchy-Schwarz e devido ao fato de as peças em considerações estarem contidas em peças de Σ_{A, θ^-}^* , então se ρ for escolhido suficientemente pequeno, vale

$$\mu_{\theta_0^-}(X) \leq \text{Leb}(\pi_{\theta^-}^0(X))^{\frac{1}{2}} \cdot \left\| \frac{d\nu_{\theta^-}^0}{d\text{Leb}} \right\|_{L_2}, \text{ e, portanto,}$$

$$\begin{aligned} \text{Leb}(\pi_{\theta^-}(X)) &\geq \mu(X)^2 \cdot \left\| \frac{d\nu_{\theta^-}^0}{d\text{Leb}} \right\|_{L_2}^{-2} \\ &\geq ((z\rho^{-\bar{d}_s}) \cdot c_{11}^{-1} \rho^{\bar{d}_s})^2 \cdot K_1^{-1}, \text{ pelo lema 7.15} \\ &\geq (z\rho^{-\bar{d}_s} c_{11}^{-1} \rho^{\bar{d}_s})^2 \cdot K_1^{-1} \\ &= (zc_{11}^{-1})^2 K_1^{-1}. \end{aligned}$$

Definimos $\tilde{c}_{21} := c_{11}^2 K_1^{-1}$.

Portanto, existe uma fração positiva de \tilde{c}_{21} , digamos c_{21} , tal que $\text{Leb}(\pi_{\theta^-}^{\underline{\omega}}(X)) \geq c_{21}$ para todo $\theta^- \in \mathcal{W}^-(c_{14}\rho)$ e $\underline{\omega} \in \Omega$. ■

Denotamos as peças de $\Theta_{\theta^-}(\rho)$ que começam com $\underline{\theta}$ por $\Theta_{(\theta^-, \underline{\theta})}(\rho)$.

Lema 8.18. *Subacavalamentos*

Existem constantes $c_{19} > c_{18} > 0$, e $c_{20} > 0$ tais que se $\rho > 0$ for escolhido suficientemente pequeno, então para toda folha $\theta^- \in \mathcal{W}^-(c_{14}\rho)$ e qualquer peça $\underline{\theta} \in \Sigma_{\theta_0^-}^*(\rho^{\frac{c}{k}})$, existe um

$$CA\left(\Theta_{(\theta^-, \underline{\theta})}(\rho), \rho, c_{18}\rho^{-(1-\frac{c}{k})(\bar{d}_s-1)}, \theta^-, \underline{\theta}\right),$$

$S = \{A_i\}_{i=1}^J$, satisfazendo:

$$(i) \sum_{i=1}^J \#A_i \geq c_{20}\rho^{-(1-\frac{c}{k})\bar{d}_s}$$

$$(ii) \#A_i \leq c_{19}\rho^{-(1-\frac{c}{k})(\bar{d}_s-1)}.$$

Demonstração:

Analogamente à demonstração do lema 8.16, podemos considerar que $\Theta_{(\theta^-, \underline{\theta})}(\rho)$ tem um $CA\left(\Theta_{(\theta^-, \underline{\theta})}(\rho), \rho, c_{18}\rho^{-(1-\frac{c}{k})(\bar{d}_s-1)}, \theta^-, \underline{\theta}\right)$, $S = \{A_i\}_{i=1}^J$, satisfazendo $\sum_{i=1}^J \#A_i \geq \tilde{c}_{20}\rho^{-(1-\frac{c}{k})\bar{d}_s}$, para alguma constante $\tilde{c}_{20} > 0$.

Vamos mostrar que podemos considerar que esse acavalamento satisfaz, também, a propriedade (ii).

Se iterarmos esse acavalamento para trás, pelo difeomorfismo, f , até que a peça $(\theta^-, \underline{\theta})$ vire a folha $\theta^- \underline{\theta}$, obteremos um $CA(\tilde{\Sigma}_{\theta^- \underline{\theta}}(\rho^{1-\frac{\epsilon}{k}}, \rho^{1-\frac{\epsilon}{k}}, c_{18}\rho^{-(1-\frac{\epsilon}{k})(\bar{d}_s-1)}, \theta^- \underline{\theta}, \underline{0}), \tilde{S} = \{\tilde{A}_i\}_{i=1}^J$, satisfazendo $\sum_{i=1}^J \#\tilde{A}_i \geq c_{20}\rho^{-(1-\frac{\epsilon}{k})\bar{d}_s}$, onde $\tilde{\Sigma}_{\theta^-}(\rho)$ são as peças de ordem afrouxada ρ , ou seja, é o mesmo que $\Sigma_{\theta^-}(\rho)$ com uma constante $C > c_1$ suficientemente grande no lugar de c_1 que define $\Sigma_{\theta^-}(\rho)$. Essa constante é escolhida de modo que qualquer palavra de ordem ρ seja transformada, por aquelas iteradas para trás pelo difeomorfismo f , em peças de ordem afrouxada de $\rho^{1-\frac{\epsilon}{k}}$. Isto é possível porque o diâmetro da peça é, essencialmente, o diâmetro de peças que são suas pré-imagens por f multiplicada pela derivada de f na direção estável-fraca de algum ponto de suas pré-imagens. Como a direção estável-fraca é Hölder e f é C^∞ , então essas derivadas satisfazem a propriedade da distorção limitada. Isso significa que os diâmetros das peças distorcem pouco perante f .

Dado esse acavalamento \tilde{S} , o lema 8.17 garante que a projeção desse acavalamento é limitado por baixo por alguma constante positiva, digamos $\tilde{C} > 0$. Logo, se admitirmos que esses acavalamentos \tilde{A}_i , tenham menos que $c_{19}\rho^{-(1-\frac{\epsilon}{k})(\bar{d}_s-1)}$ peças - bastando para isso retirar as excedentes - as que restarem formarão um novo acavalamento, $\{\tilde{B}_i\}_{i=1}^J$, com peças contidas nos acavalamentos anteriores e de modo que a projeção da nova sequência de acavalamentos ainda tenha medida de Lebesgue limitada por baixo por uma fração positiva da constante \tilde{C} . Portanto, este acavalamento terá $c_{20}\rho^{-1}\rho^{-(1-\frac{\epsilon}{k})(\bar{d}_s-1)} = c_{20}\rho^{-\frac{\epsilon}{k}(\bar{d}_s-1)}$ peças, onde c_{20} é alguma constante positiva.

Agora, basta iterarmos para frente, pelo difeomorfismo f , esses acavalamentos \tilde{B}_j até que suas peças voltem à folha θ^- , para obtermos uma sequência de acavalamentos, cujos acavalamentos são subconjuntos dos acavalamentos A_j e de modo que satisfaçam a propriedade (ii). ■

O próximo lema é o objetivo dessa seção. Na próxima seção estenderemos este lema para perturbações de f na família de perturbações fixada.

Lema 8.19. *Acavalamentos de ordem ρ bem distribuídos*

Existem constantes positivas $c_{22} > 0$, $c_{23} > 0$ e $c_{24} > 0$ tais que para todo $\theta^- \in \mathcal{W}^-(c_{14}\rho)$, existe um $CA(\Theta_{\theta^-}(\rho), \rho, c_{22}\rho^{-(\bar{d}_s-1)}, \theta^-, \underline{0}), T$, sendo que em cada acavalamento, as peças de ordem ρ estão bem distribuídas, i.e., estão distribuídas em pelo menos $c_{24}\rho^{-\frac{\epsilon}{k}(\bar{d}_s-1)}$ peças, de ordem $\rho^{\frac{\epsilon}{k}}$, distintas.

Além disso, a medida de Lebesgue da projeção das peças dos acavalamentos desse conjunto de acavalamento, ao longo da folheação estável forte, é limitada inferiormente por c_{23} .

Demonstração:

Denotemos por S_{θ^-} e por $S_{\theta^-, \underline{\theta}}$ os acavalamentos referentes aos lemas 8.16 e 8.18 respectivamente.

Seja $Z_{\theta^-} := \{\underline{\beta} \in A_{\underline{\theta}}; A_{\underline{\theta}} \in S_{(\theta^-, \underline{\theta})}, \underline{\theta} \in A, A \in S_{\theta^-}\}$.

Pelos lemas 8.16 e 8.18, existem, pelo menos, $(c_{20}\rho^{-\bar{d}_s(1-\frac{c}{k})})\#S_{\theta^-} \geq c_{20}\rho^{-\bar{d}_s(1-\frac{c}{k})}c_{17}\rho^{-\frac{c}{k}\bar{d}_s}$ peças em Z_{θ^-} . Dessa forma, existem, pelo menos, $c_{20}c_{17}\rho^{-\bar{d}_s}$ peças em Z_{θ^-} .

A sequência de acavalamentos enunciada nesse lema será uma sequência, T , de palavras dentro de Z_{θ^-} .

Com argumentos análogos ao da demonstração do lema 8.16, mostramos que existe um $CA(\Theta_{\theta^-}(\rho), \rho, c_{22}\rho^{-(\bar{d}_s-1)}, \theta^-, \underline{0})$, T , com peças de Z_{θ^-} para algum $c_{22} > 0$ satisfazendo

$$\#T \geq \tilde{c}_{23}\rho^{-\bar{d}_s} \text{ para algum } \tilde{c}_{23} > 0.$$

Para mostrar que $Leb(\Pi_{\theta^-}^{\omega}(T)) \geq c_{23} > 0$ para algum $c_{23} > 0$, basta observar que pelo lema 8.17, já que existem, pelo menos, $\tilde{c}_{23}\rho^{-\bar{d}_s}$ peças de ordem ρ (ver lema 8.16), para alguma constante $\tilde{c}_{23} > 0$, então

$$Leb(T) \geq \tilde{c}_{23}^{-2}c_{21}. \text{ Agora, escolha-se } c_{23} := c_{21}\tilde{c}_{23}^{-2} > 0.$$

Além disso, pelo item (ii) do lema 8.18, elas estão bem distribuídas, i.e., para cada acavalamento existe, pelo menos, uma peça de ordem ρ em $c_{24}\rho^{-(\bar{d}_s-1)\frac{c}{k}}$ peças diferentes de ordem $\rho^{\frac{c}{k}}$, já que $\frac{c_{22}\rho^{-(\bar{d}_s-1)}}{c_{19}\rho^{-(\bar{d}_s-1)(1-\frac{c}{k})}} = \frac{c_{22}}{c_{19}}\rho^{-\frac{c}{k}(\bar{d}_s-1)} = c_{24}\rho^{-\frac{c}{k}(\bar{d}_s-1)}$, bastando escolher $c_{24} := \frac{c_{22}}{c_{19}}$.

■

8.3.4 Acavalamentos folgados bem espaçados para f^{ω}

Fixamos uma constante $c_{25} > 0$. Dado o intervalo I , chamamos o intervalo com o mesmo centro que I e largura c vezes largura de I por cI .

Definição 8.20. *Acavalamento folgado*

Seja X um conjunto de peças disjuntas de alguma folha θ^- . Diz-se que $A \subset X$ é um acavalamento folgado na escala ρ para f^{ω} se existe algum $i \in \{1, \dots, \lceil \rho^{-1} \rceil + 1\}$ tal que se $\underline{\theta} \in A$, então $I_{\underline{\theta}}^{\omega} \cap c_{25}I_i \neq \emptyset$.

Definição 8.21. *Conjunto de acavalamentos folgados*

Diz-se que $S := \{A_j\}_{j=1}^J$ é um **conjunto de acavalamentos folgados para f^{ω} de X com intervalos fundamentais de escala ρ e com, pelo menos, x peças contidas na folha θ^- , - denotado por $CAf(X, \rho, x, \theta^-, \underline{\omega})$ - se A_k são acavalamentos folgados com, pelo menos, x peças de X para todo $k \in \{1, \dots, J\}$ e $\bigcup_{k=1}^J A_k$ é formado por peças disjuntas.**

Para demonstrar a propriedade 8.2 para o candidato a compacto recorrente que iremos construir, não é suficiente perturbar a primeira pré-imagem da peça de ordem $\rho^{\frac{c}{k}}$ que contem

a peça de ordem ρ que se deseja mover, pois as contribuições ao deslocamento dessa peça devidas a outras peças na sua pré-imagem - esse deslocamento pode ser consequência da perturbação da primeira pré-imagem ou de perturbações em outras peças de outras folhas - podem ser da mesma ordem que a contribuição devida à primeira pré-imagem. Isso poderia anular o efeito que se deseja - deslocamentos da ordem de um múltiplo fixado grande de ρ são suficientes para que o operador de renormalização aplicado em (x, θ^-) retorne em um interior folgado de K e o atravesse (Lembramos que precisamos voltar em um interior folgado de K para que o argumento probabilístico funcione).

Como é necessário deslocar as peças de um acavalamento, independentemente, perturbamos as primeiras (da ordem de alguma constante $L \in \mathbb{N}$) pré-imagens da peça que desejamos deslocar. Se essa constante for suficientemente grande (dependendo apenas de f), as contribuições devidas às outras pré-imagens serão da ordem de um fator bem pequeno de ρ , de modo que o efeito das perturbações da ordem de ρ nas primeiras L pré-imagens de (x, θ^-) seja suficientemente forte para que $R_{\underline{a}}^{\underline{\omega}}(x, \theta^-)$ volte em um interior folgado de K e o atravesse.

Vamos, daqui para frente, considerar $L \in \mathbb{N}$ a ser fixado em breve, dependendo apenas de f - mais especificamente da derivada de f na direção estável-fracá. Após isso, fixaremos $0 < \kappa < 1$ dado pelo lema 6.4.

Para cada $(\theta^-, \theta^+) \in \Sigma$, definiremos, em seguida, as coordenadas do multiparâmetro $\underline{\omega}$ que irão influenciar, consideravelmente, no movimento de (θ^-, θ^+) ao perturbarmos as peças de ordem $\rho^{\frac{\kappa}{k}}$ cuja trajetória, para frente, com extensão de no máximo L iteradas, contem (θ^-, θ^+) .

Definição 8.22.

$\Sigma_1(\theta^-, \theta^+) := \left\{ \underline{a}^i := (\underline{a}^{i-}, \underline{a}^{i+}) \in \Sigma_1; f^{-i}(h(\theta^-, \theta^+)) \in h(\underline{a}^i) \right\}$ (ver definição de Σ_1 na seção 8.1).

Essas são as coordenadas dos multiparâmetros $\underline{\omega} \in \Omega$ que exercem influência considerável nos deslocamentos das peças associadas às suas iteradas, isto é, às peças dentro do conjunto $\bigcap_{i=0}^L f^i(h(\underline{a}^i))$. Um histórico, para trás, de uma peça tem influência considerável mas só até uma iterada, digamos, L , que independe de ρ .

Agora definiremos os parâmetros que serão perturbados para influenciar o movimento de (θ^-, θ^+) .

Definição 8.23.

$$\Omega_1^\omega(\theta^-, \theta^+) := \{\underline{\omega} \in \Omega \text{ tais que } \tilde{\omega}_a = \omega_a \text{ para todo } a \in \Sigma_1 \setminus \Sigma_1(\theta^-, \theta^+)\}.$$

Observação 8.24.

$\Sigma_1(\theta^-, \theta^+) = \Sigma_1(\tilde{\theta}^-, \tilde{\theta}^+)$ e, portanto, $\Omega_1^\omega(\theta^-, \theta^+) = \Omega_1^\omega(\tilde{\theta}^-, \tilde{\theta}^+)$ se θ^+ e $\tilde{\theta}^+$ possuem um início comum de ordem ρ , θ^- e $\tilde{\theta}^-$ possuem um final comum de ordem ρ e se ρ for suficientemente pequeno.

Definição 8.25.

Para cada $\underline{\theta}^+ \in \Sigma(\rho)$, define-se $\Sigma_1(\theta^-, \underline{\theta}^+) := \Sigma_1(\theta^-, \theta^+)$ e $\Omega_1^\omega(\theta^-, \underline{\theta}^+) := \Omega_1^\omega(\theta^-, \theta^+)$, onde θ^+ começa com $\underline{\theta}^+$.

Agora definiremos os parâmetros que fixam na posição zero os que têm influência considerável nas peças de um mesmo conjunto de acavalamentos, S .

Definição 8.26.

$$\Omega_0(S) := \{\underline{\omega} \in \Omega \text{ tais que } \tilde{\omega}_a = 0, \forall a \in \Sigma_1(S)\}.$$

Lema 8.27.

Se S é um $CA(\Theta_{\theta^-}(\rho), \rho, x, \theta^-, \underline{0})$ para f^0 de uma folha $\theta^- \in \mathcal{W}^-$, então S é um $CAf(\Theta_{\theta^-}(\rho), \rho, x, \theta^-, \underline{\omega})$ para todo $\underline{\omega} \in \Omega_0(S)$, se L for escolhido suficientemente grande.

Demonstração:

Basta aplicar as partes (c) e (d) do lema 6.4 e o lema 6.5 para concluir que as peças de um mesmo acavalamento de uma folha de \mathcal{W}^- se movem no máximo da ordem de $c_{25}\rho$ umas com relação às outras. Para isso, teremos que escolher L suficientemente grande, dependendo de c_3 (o tamanho da perturbação) e c_{25} (a folga do acavalamento). ■

A próxima proposição é consequência dos lemas 8.27 e 8.19.

Proposição 8.28. *Acavalamentos folgados para f^ω , de ordem ρ e bem distribuídos*

Existem constantes positivas $c_{26} > 0$, $c_{27} > 0$ e $c_{28} > 0$ tais que para quaisquer $\underline{\omega} \in \Omega$ e $\theta^- \in \mathcal{W}^-(c_{14}\rho)$, o conjunto de acavalamentos, $S := \bigcup_{i=1}^J A_i$, dado pelo lema 8.19, é um $CAf(\Theta_{\theta^-}(\rho), \rho, c_{26}\rho^{-(\bar{d}_s-1)}, \theta^-, \underline{\omega})$ para f^ω , para todo $\underline{\omega} \in \Omega_0(S)$, sendo que em cada acavalamento, as peças de ordem ρ estão bem distribuídas, i.e., estão distribuídas em, pelo menos, $c_{28}\rho^{-\frac{\epsilon}{k}(\bar{d}_s-1)}$ peças, de ordem $\rho^{\frac{\epsilon}{k}}$, distintas.

Além disso, se ρ for escolhido suficientemente pequeno e se θ^- e $\tilde{\theta}^-$ estiverem no mesmo bloco de $\mathcal{W}^-(c_{14}\rho)$, então os conjuntos de acavalamentos folgados para elas podem ser considerados formados com os mesmos cilindros. Também, a medida de Lebesgue da projeção das peças dos acavalamentos dessa sequência de acavalamentos folgados, ao longo da folheação estável forte, é limitada inferiormente por $c_{27} > 0$.

Para cada $\theta^- \in \mathcal{W}^-(c_{14}\rho)$, denotamos os acavalamentos dados pelo lema 8.28 por

$$S_{\theta^-} := \left\{ A_{\theta^-}(i) \right\}_{i=1}^{J_{\theta^-}}.$$

Definição 8.29. *Candidato a compacto recorrente, K*

Sejam $I_{\alpha_{\theta^-}(i)}$ os intervalos padrões referentes aos acavalamentos $A_{\theta^-}(i)$ para cada $i \in \{1, \dots, J_{\theta^-}\}$. Para todo $\theta^- \in \mathcal{W}^-(c_{14}\rho)$, definimos $K_{\theta^-} := \bigcup_{i=1}^{J_{\theta^-}} I_{\alpha_{\theta^-}(i)}$.

O candidato a compacto recorrente é

$$K := \bigcup_{\theta^- \in \mathcal{W}^-(c_{14}\rho)} K_{\theta^-}.$$

Denotamos $K \cap H_{\theta^-}$ por K_{θ^-} e observamos que $Leb(K_{\theta^-}) > c_{27}$ para todo $\theta^- \in \mathcal{W}^-(c_{14}\rho)$ e que $K_{\theta^-} = K_{\tilde{\theta}^-}$ para quaisquer folhas θ^- e $\tilde{\theta}^-$ de um mesmo bloco de $\mathcal{W}^-(c_{14}\rho)$. Isso é importante para conseguirmos a folga $K_{-\rho^2}$ de K .

8.4 Demonstração da propriedade 8.2

Vamos reenunciar a propriedade 8.2.

Proposição 8.30. *Proposição principal*

Existem constantes positivas $c_{13} > 0$ e $c_{14} > 0$ tais que para todo $\rho > 0$ suficientemente pequeno, existe $K \subset H$ e um subconjunto de folhas, \mathcal{W}^- , $c_{14}\rho$ -denso nas folhas cujas projeções contêm K tais que se $(x, \theta^-) \in K \cap \mathcal{W}^-$, então

$$\mathbb{P}\left(\Omega \setminus \Omega_{0, \rho^2}(x, \theta^-)\right) \leq \exp(-c_{13}\rho^{-\frac{c}{k}(\bar{d}_s - 1)}).$$

O lema a seguir é consequência do lema 6.6

Lema 8.31. *Controle da dispersão da folheação estável-forte em folhas nunca recorrentes*

Para qualquer $\theta^- \in \mathcal{W}^-$,

$$\left(\Pi_{\theta^-}^{\underline{\omega}}\right)'(z)\underline{\omega} = 0,$$

para todo $z \in W_{\theta^-}$, $\underline{\omega} \in \Omega$ e $\underline{\omega} \in \Gamma_{\theta^-, \underline{\omega}}$, onde $\Gamma_{\theta^-, \underline{\omega}}$ são parâmetros $\underline{\omega}$ tais que os valores das coordenadas correspondentes às L primeiras pré-imagens das peças de Σ_1 que não intersectam W_{θ^-} estão fixadas nos valores das coordenadas correspondentes de $\underline{\omega}$.

Demonstração:

Basta observar que as pré-imagens (até iterada L) das peças de Σ_1 que interceptam θ^- também não interceptam θ^- , pela não recorrência de θ^- . Em seguida aplicamos o lema 6.6. ■

O lema a seguir nos ajudará a provar que peças não recorrentes nas folhas nunca recorrentes, $\theta^- \in \mathcal{W}^-$, se movem independentemente com relação a $\mathcal{F}^{ss} \cap W_{\theta^-}$.

Lema 8.32.

$\mathcal{F}_{\theta^- \underline{\theta}}^{\omega', ss} = \mathcal{F}_{\theta^- \underline{\theta}}^{\omega, ss}$ para todo $\theta^- \in \mathcal{W}^-$, $\underline{\theta} \in \Theta_{\theta^-}(\rho)$ e $\underline{\omega}, \underline{\omega}'$ em Ω satisfazendo $\omega_{\underline{a}} = \omega'_{\underline{a}}$ para todo $\underline{a} \in (\Sigma_1(\theta^-, \underline{\theta}) \cup (\Sigma_1 \setminus \Sigma_1(W_{\theta^-})))$.

Demonstração:

Análoga à demonstração do lema 6.6. Basta observar que $\underline{\theta}$ é peça não recorrente em θ^- , que θ^- é folha nunca recorrente em θ^- e que, portanto, não estamos mexendo nos parâmetros que exercem influência nas iteradas para frente de $\theta^- \underline{\theta}$. ■

Lema 8.33.

Existe constante $c_{32} > 0$ tal que para L como fixado no lema 8.27 e κ dado pelo lema 6.4 referente a esse L , existe ρ_0 tal que se $0 < \rho < \rho_0$, então:

(a) Se $(\theta^-, \underline{\theta}) \in \mathcal{W}^-(c_{14}\rho) \times \Theta_{\theta^-}(\rho)$, e $\theta \in (\theta^-, \underline{\theta})$, então $\sigma^j(\theta)$ cai em um mesmo elemento \underline{a} da partição Σ_1 no máximo uma vez para todos os $0 \leq j \leq |\underline{\theta}|$.

(b) Se $(\theta^-, \underline{\theta}) \in \mathcal{W}^-(c_{14}\rho) \times \Theta_{\theta^-}(\rho)$ é tal que $\sigma^j(\theta^-, \underline{\theta}) \subset \underline{a} \in \Sigma_1$ com $0 \leq j \leq L$, então

$$\lambda^j c_3 c_{32} < \left| \frac{\partial}{\partial \omega_{\underline{a}}} R_{\underline{\theta}}^{\omega}(x, \theta^-) \right| < \hat{\lambda}^j c_3 c_{32}, \text{ para todo } x \in H_{\theta^-}.$$

(c) Se $(\theta^-, \underline{\theta}) \in \mathcal{W}^-(c_{14}\rho) \times \Theta_{\theta^-}(\rho)$ é tal que $\sigma^i(\theta^-, \underline{\theta}) \subset \underline{a} \in \Sigma_1$ para todo $0 \leq i \leq L$, então

$$\left| \frac{\partial}{\partial \omega_{\underline{a}}} R_{\underline{\theta}}^{\omega}(x, \theta^-) \right| < \hat{\lambda}^i c_{32} c_3, \text{ para todo } x \in H_{\theta^-}.$$

(d) Se $(\theta^-, \underline{\theta}) \in \mathcal{W}^- \times \Theta_{\theta^-}(\rho)$ e $\underline{a} \in \Sigma_1$ são tais que $\underline{a} \in \Sigma_1(W_{\theta^-}) \setminus \Sigma_1(\theta^-, \underline{\theta})$, então

$$\frac{\partial}{\partial \omega_{\underline{a}}} R_{\underline{\theta}}^{\omega}(x, \theta^-) = 0 \text{ para todo } x \in H_{\theta^-}.$$

Demonstração:

A parte (a) segue da mesma parte do lema 6.4. As partes (b) e (c) seguem das mesmas partes respectivas dos lemas 6.4, 8.31 e do fato que o operador de renormalização associado a peças de ordem ρ as expande até ordem 1. Isso significa que se a peça de ordem ρ se move com velocidade da ordem de ρ com respeito a uma folha estável-forte, então a iterada

correspondente para trás dessa folha estável-forte se move com velocidade da ordem de 1. A parte (d) segue do lema 8.32, da parte (d) do lema 6.4 e do fato de que $\underline{\theta} \in \Sigma_{\theta^-}(\rho)$ não volta na folha θ^- por iteradas para trás até $(\theta^-, \underline{\theta})$ que vire uma folha. ■

Teorema 8.34.

Se $c_3 > 0$ for suficientemente grande, existe constante $P > 0$, tal que para todo $\rho > 0$ suficientemente pequeno, $\theta^- \in \mathcal{W}^-(c_{14}\rho)$, $x \in H_{\theta^-}$, $\underline{\theta} \in \Theta_{\theta^-}(\rho)$ e $\underline{\omega} \in \Omega$ com $x \in \text{int}(\Pi_{\underline{\theta}^-}^{\underline{\omega}}(\underline{\theta}))$, então

$$\mathbb{P}_{\Omega_1^{\underline{\omega}}(\theta^-, \underline{\theta})} \left(R_{\underline{\theta}}^{\underline{\omega}}(x, \theta^-) \in K_{-\rho^2} \right) > P.$$

Demonstração:

Seja $\tilde{\Omega}_1^{\underline{\omega}}(\theta^-, \underline{\theta}) \subset \Omega_1^{\underline{\omega}}(\theta^-, \underline{\theta})$ um tubo fino (por exemplo, de largura ρ) em torno de $\underline{\theta}$ nas direções $\underline{a}^i \in \Sigma_1(\theta^-, \underline{\theta})$ para cada i entre 1 e L .

Ou seja, $\tilde{\Omega}_1^{\underline{\omega}}(\theta^-, \underline{\theta}) := \left([-1, 1] \underline{a}^0 \times \prod_{i=1}^L [-\rho, \rho] \underline{a}^i \times \prod_{\underline{b} \notin \{\underline{a}^0, \underline{a}^1, \dots, \underline{a}^L\}} [-1, 1] \underline{b} \right) \cap \Omega_1^{\underline{\omega}}(\theta^-, \underline{\theta})$.

Como $R_{\underline{\theta}}^0(x, \theta^-) \in H_{\theta^-}$ se $x \in \Pi_{\underline{\theta}^-}^0(\underline{\theta})$, então $R_{\underline{\theta}}^{\tilde{\omega}}(x, \theta^-)$ está suficientemente próximo de H_{θ^-} para todo $\tilde{\omega} \in 0 \underline{a}^0 \times \prod_{i=1}^L 0 \underline{a}^i \times \prod_{\underline{b} \in \{\underline{a}^0, \underline{a}^1, \dots, \underline{a}^L\}} [-1, 1] \underline{b}$ (bastando, para isso, escolher L suficientemente grande). Além disso, $\theta^- \underline{\theta}$ está em algum bloco de $\mathcal{W}^-(\frac{1}{2}c_{14}\rho)$, pela definição de $\Theta_{\theta^-}(\rho)$.

Portanto, $P_{\tilde{\Omega}_1^{\underline{\omega}}(\theta^-, \underline{\theta})} \left(R_{\underline{\theta}}^{\underline{\omega}}(x, \theta^-) \in K_{-\rho^2} \right) > \tilde{P}$ para alguma constante positiva $\tilde{P} > 0$, se $\rho > 0$ for escolhido suficientemente grande de modo que possamos aplicar o lema 8.33 e se $c_3 > 0$ for escolhido suficientemente grande de modo que as peças atravessem as folhas estável-fortes.

Logo, $P_{\Omega_1^{\underline{\omega}}(\theta^-, \underline{\theta})} \left(R_{\underline{\theta}}^{\underline{\omega}}(x, \theta^-) \in K_{-\rho^2} \right) > P$. ■

Agora podemos demonstrar que o candidato a compato recorrente, K , satisfaz a propriedade 8.2.

Demonstração da proposição 8.30:

Como, pelo lema 8.28, cada um dos acavalamentos que definem K possuem $c_{28}\rho^{-(\bar{d}_s-1)\frac{c}{k}}$ peças de ordem ρ bem separadas, então qualquer $x \in K$ está na projeção folgada de $c_{28}\rho^{-(\bar{d}_s-1)\frac{c}{k}}$ peças de ordem ρ , bem separadas.

Seja $\Omega_1^{\underline{\omega}}(S) := \{ \tilde{\omega} \in \Omega \text{ tais que } \tilde{\omega}_{\underline{a}} = \omega_{\underline{a}} \text{ para todo } \underline{a} \in \Sigma \setminus \Sigma_1(S) \}$.

Então, para todo $\underline{\omega} \in \Omega$, $\theta^- \in \mathcal{W}^-$, $(x, \theta^-) \in K$ e $1 \leq i \leq J_{\theta^-}$, os eventos

$$\left\{ \tilde{\omega} \in \Omega_1^{\underline{\omega}}(A_{\theta^-}(i)) \text{ tais que } R_{\underline{a}}^{\tilde{\omega}}(x, \theta^-) \in K_{-\rho^2} \right\}_{\underline{a} \in A_{\theta^-}(i)}$$

são mutuamente independentes e, além disso,

$$\mathbb{P}_{\Omega_1^\omega(\theta^-, \underline{a})} \left(R_{\underline{a}}^\omega(x, \theta^-) \in K_{-\rho^2} \right) > P,$$

para alguma constante $P > 0$.

Para ver isso basta utilizar o item (d) do lema 8.33 e o lema 8.34. (É necessário utilizar o item (d) do lema 8.33 porque ao perturbarmos uma peça, essa perturbação não pode exercer influência da ordem de ρ^2 nos operadores de renormalização associados a outras peças do mesmo acavalamento, isso acarretaria em falta de independência dos eventos, já que as larguras dos intervalos que formam K são da ordem de ρ).

Dessa forma, para todo $(x, \theta^-) \in K \cap \mathcal{W}^-$, existe algum i com $1 \leq i \leq J_{\theta^-}$, tal que

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\Omega \setminus \Omega_{0, \rho^2}(x, \theta^-) \right) &= \mathbb{P} \left(\bigcap_{\underline{a} \in A_{\theta^-}(i)} \left\{ \tilde{\omega} \in \Omega_1^\omega(A_{\theta^-}(i)) \text{ tais que } R_{\underline{a}}^{\tilde{\omega}}(x, \theta^-) \notin K_{-\rho^2} \right\} \right) \\ &= \prod_{\underline{a} \in A_{\theta^-}(i)} \mathbb{P}_{\Omega_1^\omega(\theta^-, \underline{a})} \left(R_{\underline{a}}^\omega(x, \theta^-) \in K_{-\rho^2} \right) \\ &\leq (1 - P)^{c_{28} \rho^{-\frac{(\bar{d}_s - 1)}{k}}} \\ &\leq \exp \left(-c_{13} \rho^{-\frac{c}{k}(\bar{d}_s - 1)} \right), \end{aligned}$$

para alguma constante $c_{13} > 0$ independente de ρ .

■

9 Apêndice

Mostraremos que df tem distorção limitada em direções transversais à estável-forte (com ângulo mínimo positivo com respeito à direção estável-forte). Como consequência disso observamos que $d_s(\theta^-, \underline{\theta}) \asymp d_s(\tilde{\theta}^-, \underline{\theta})$ para quaisquer folhas θ^- e $\tilde{\theta}^-$ em Σ^- com $\theta_0^- = \tilde{\theta}_0^-$ e qualquer cilindro, $\underline{\theta} \in \Sigma_{\theta_0^-}^{+*}$, que corta essas folhas. Outra consequência é que $d_s(\theta^-, \underline{\theta}) \asymp d_s(\theta^-, \underline{\theta}) d_s(\theta^-, \underline{\tau})$, já que, como teremos distorção limitada nas transversais à estável-forte, o diâmetro de cada uma dessas peças será dado, a menos de uma constante positiva multiplicativa, pela derivada na direção estável-fraca da iterada de f correspondente à construção da peça.

Lema 9.1. *Distorção limitada em transversais*

Existe $D > 0$ tal que se $x, y \in \Lambda$ estão na mesma variedade estável e $|x - y|$ é suficientemente pequeno, então para quaisquer v_x e v_y vetores de E_x^s e E_y^s respectivamente, com norma 1 e ângulo com a direção estável-forte limitado por baixo por alguma constante positiva fixada,

$$e^{-D} \leq \frac{|df_x^n(v_x)|}{|df_y^n(v_y)|} \leq e^D, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração:

Usaremos a notação $v = (v^s, v^w, v^u) \in E_x$ para representar o vetor que tem componentes v^s na direção E^{ss} , v^w na direção E^{ws} e v^u na direção E^u .

Para cada $v = (v^s, v^w, 0) \in E_x \setminus E_x^{ss}$ ($v^w \neq 0$) com $|v| = 1$, podemos afirmar que

$d(f)_x^n(v) = (\lambda_n^{ss}(x)v^s, \lambda_n^{ws}(x)v^w, \lambda_n^u(x)v^u)$, onde

$$\lambda_n^{ss} := \prod_{i=0}^{n-1} \lambda^{ss}((f)^i(x)), \lambda_n^{ws} := \prod_{i=0}^{n-1} \lambda^{ws}((f)^i(x)) \text{ e } \lambda_n^u := \prod_{i=0}^{n-1} \lambda^u((f)^i(x)).$$

Daqui em diante, supõe-se que $f^j(x)$ e $f^j(y)$ estão no mesmo elemento da partição de Markov, \mathcal{P} , para todo $j \in \{0, \dots, n\}$. Para isso basta supor que $|x - y|$ é suficientemente pequeno.

Utilizando a norma dos máximos, obtemos

$$\begin{aligned} \log \left| \frac{|df_x^n(v)|}{|df_y^n(v)|} \right| &= \left| \log \max\{|\lambda_n^{ws}(x)v^w|, |\lambda_n^{ss}(x)v^s|\} - \log \max\{|\lambda_n^{ws}(y)v^{ws}|, |\lambda_n^{ss}(y)v^{ss}|\} \right| \\ &= \left| \log |\lambda_n^{ws}(x)v^w| - \log |\lambda_n^{ws}(y)v^w| \right|, \text{ se } n \text{ for suficientemente grande.} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \left| \log \frac{|df_x^n(v)|}{|df_y^n(v)|} \right| &\leq \left| \sum_{i=0}^{n-1} \log(|\lambda^{ws}(f^i(y))|) - \log(|\lambda^{ws}(f^i(x))|) \right| |v^w| \\ &\leq \tilde{C} \sum_{i=0}^{n-1} |f^i(y) - f^i(x)|^\varepsilon |v^w|, \end{aligned}$$

para alguma constante positiva, \tilde{C} independente de n , já que E^{ws} é Hölder, e portanto, $df|_{E^{ws}} \in C^\varepsilon$.

Logo, existe $C > 0$ independente de n tal que $\left| \log \frac{|df_x^n(v)|}{|df_y^n(v)|} \right| \leq C|x - y|^\varepsilon$.

Além disso,

$$\begin{aligned} \left| \log \frac{|df_y^n(v)|}{|df_y^n(w)|} \right| &\leq \left| \log \max\{|\lambda_n^{ws}(y)v^w|, |\lambda_n^{ss}(y)v^s|\} - \log \max\{|\lambda_n^{ws}(y)w^w|, |\lambda_n^{ss}(y)w^s|\} \right| \\ &= \left| \log |\lambda_n^{ws}(y)v^w| - \log |\lambda_n^{ws}(y)w^w| \right| \\ &= \left| \log |v^w| - \log |w^w| \right| \\ &\leq C \end{aligned}$$

para todo $n > 0$, já que v^w e w^w estão limitados por baixo por uma constante positiva, pois $|v| = |w| = 1$ e os ângulos de v e w estão limitados por baixo por alguma constante positiva.

Portanto, $\log \left| \frac{|df_x^n(v_x)|}{|df_y^n(v_x)|} \right| \leq C|x - y|^\varepsilon$ e $\log \left| \frac{|df_x^n(v_y)|}{|df_y^n(v_y)|} \right| \leq C|x - y|^\varepsilon$, se n for suficientemente grande e $|x - y|$ suficientemente pequeno.

Logo, neste caso, $\log \left| \frac{|df_x^n(v_x)|}{|df_y^n(v_y)|} \right| \leq C|x - y|^\varepsilon + C + C|x - y|^\varepsilon$.

Dessa forma, existe constante $D > 0$ tal que $\log \left| \frac{|df_x^n(v_x)|}{|df_y^n(v_y)|} \right| \leq D$, se $|x - y|$ for suficientemente pequeno.

Invertendo os termos da última desigualdade, obtemos $D^{-1} \leq \log \left| \frac{|df_x^n(v_x)|}{|df_y^n(v_y)|} \right| \leq D$.

Dessa forma, $e^{-D} \leq \frac{|df_x^n(v_x)|}{|df_y^n(v_y)|} \leq e^D$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e x e y na mesma folha tais que $|x - y|$ seja suficientemente pequeno. ■

Referências

- [1] Bonatti, C., Díaz, L., Persistent nonhyperbolic transitive diffeomorphisms, *Annals of Mathematics*, 0 (1995), 357-396
- [2] Bonatti, C., Díaz, L., Robust heterodimensional cycles and C^1 -genericity dynamics, *J. Inst. Math. Jussieu* 7 2008 469-525
- [3] Bonatti, C., Díaz, L., Connexions hétéroclines et généricité d'une infinité de puits et de sources, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* 32 (1999), no.1, 135-150.
- [4] Bonatti, C., Díaz, L., Viana, M., Discontinuity of Hausdorff dimension of hyperbolic sets, *C. R. Acad. Sciencas Paris* 320(1995), 713-718.
- [5] Bonatti, C., Díaz, L. Viana, M., Dynamics beyond uniform hyperbolicity: A global geometric and probabilistic perspective, *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, 102. *Mathematical Physics*, III. 2005.
- [6] Bowen, R., *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*, *Lecture Notes on Mathematics*, 470
- [7] Bowen, R., A Horseshoe with Positive Measure, *Inventiones math.* 29, 203-204 (1975)
- [8] Díaz, L., Nogueira, A., Pujals, E., Heterodimensional tangencies, *Nonlinearity* 19 (2006) 2543-2566.
- [9] Hasselblatt, B., Pesin, Y., *Partially hyperbolic dynamical systems - 2005*
- [10] Hirsch, M. W.; Pugh, C. C.; Shub, M. *Invariant manifolds. Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 583. Springer-Verlag, 1977. ii+49 pp.
- [11] Kaufman, R. On Hausdorff dimension of projections. *Mathematika* 15 1968 153-155
- [12] Manning, A., A relation between Lyapunov exponents, Hausdorff dimension and entropy. *Ergod. Th. Dynam. Sys.* (1981), 1, 451-459
- [13] Marstrand, J., The dimension of Cartesian product sets. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 50, (1954) 198-202
- [14] Mattila, P., *Geometry of sets and measures in Euclidean Spaces*, 1995
- [15] McCluskey, H., Manning, A., Hausdorff dimension for horseshoes, *Ergod. Th. Dynam. Sys.* (1983), 3, 251-260.
- [16] Moreira, C. O teorema de Ramsey, *Revista Eureka*. Número 6, pp.23-29
- [17] Moreira, C. Stable intersections of Cantor sets and homoclinic bifurcations, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 13 (1996), No. 6, 741-781

- [18] Moreira, C., Palis, J., Viana, M., Homoclinic tangencies and fractal invariants in arbitrary dimension, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 333, Série I, p. 475-480, 2001
- [19] Moreira, C., Yoccoz, J-C. Stable intersections of regular Cantor sets with large Hausdorff dimensions, *Annals of Mathematics*, 154 (2001), 45-96
- [20] Moreira, C. G. T. A.; Yoccoz, J.C.. Tangences homoclines stables pour les ensembles hyperboliques de grande dimension fractale. *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, v.43, p. 1-68, 2010.
- [21] Palis, J. Homoclinic orbits, hyperbolic dynamics and dimension of Cantor sets. *The Lefschetz centennial conference, Part III (Mexico City, 1984)*, 203–216, *Contemp. Math.*, 58, III, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987
- [22] Palis, J. Homoclinic bifurcations, sensitive-chaotic dynamics and strange attractors. *Dynamical systems and related topics (Nagoya, 1990)*, 466–472, *Adv. Ser. Dynam. Systems*, 9, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1991.
- [23] Palis, J., Takens, F., *Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations. Fractal dimensions and infinitely many attractors. Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, 35. Cambridge University Press, 1993.
- [24] Palis J., Takens F., Hyperbolicity and the creation of homoclinic orbits, *Ann. Math.* 125 (1987) 337-374.
- [25] Palis, J., Viana, M., On the continuity of Hausdorff dimension and limit capacity for horseshoes. *Dynamical systems, Valparaiso 1986*, 150-160, *Lecture Notes in Math.*, 1331, 1988.
- [26] Palis, J., Yoccoz, J-C, Homoclinic tangencies for hyperbolic sets of large Hausdorff dimension. *Acta Math.* 172 (1994), no.1, 91 - 136.
- [27] Pesin, Y., *Dimension Theory in Dynamical Systems* (1997)
- [28] Pugh, C., Shub, M., Stable Ergodicity, *Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol. 41, Number 1, Pages 1-41, 2003
- [29] Pugh, C., Shub, M., Wilkinson, A., Hölder Foliations, *Duke Mathematical Journal*, Vol. 86, No. 3, Pages 517-546, 1997
- [30] Rodriguez Hertz, F., Rodriguez Hertz, M., Tahzibi, A., Ures, R., A criterion for ergodicity of non-uniformly hyperbolic diffeomorphisms. *Electron. Res. Announc. Math. Sci.* 14 (2007), 74-81.
- [31] Simon, K., Solomyak, B., Hausdorff dimension for horseshoes in \mathbb{R}^3 , *Ergod. Th. Dynam. Sys.* (1999), 19, 1343-1363.

- [32] Simon, K., Solomyak, B., Urbański, M., Hausdorff Dimension of limit sets for parabolic IFS with overlaps, *Pacific Journal of Mathematics*, 201, No. 2, 2001