



impa Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

---

# Estratégias de Execução Ótima em Tempo Discreto

Autor: **Rodrigo Pereira Maranhão**

Orientador: **Jorge P. Zubelli**

Rio de Janeiro  
Fevereiro de 2013



Para Laura e Catarina.



## Agradecimentos

Agradeço a todos aqueles que me ajudaram e contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

Faço menção especial a Laura, minha mulher, que me deu todo o apoio necessário para que eu conseguisse fazer o mestrado, tendo cuidado sozinha de nossa filha Catarina quando eu precisei estudar. Agradeço do fundo do coração a essa mulher amada que me apoiou em cada decisão tomada ao longo dessa jornada.

Agradeço ainda ao meu Pai e à minha Mãe, que me criaram ensinando todos os valores que acredito e que sempre me estimularam a estudar. Sou muito grato a eles por hoje ser quem sou.

Agradeço à minha filha Catarina, que apesar de ser um bebê, com seu sorriso inocente me deu forças para seguir adiante nas dificuldades encontradas ao longo do caminho.

Finalmente agradeço ao Sérgio, Osvaldo, Carlos, Cristiane, Matheus e Vinícius, além dos demais colegas de curso, pelas diversas vezes que me ajudaram a solucionar problemas e tirar dúvidas.

A todos os professores e monitores do curso, em especial ao Paulo César, Jorge Zubelli, Vinícius Albani e Alan Prata, agradeço pelos conhecimentos transmitidos.



## Resumo

O problema de encontrar uma estratégia de execução ótima associada a uma operação é um problema conhecido por gestores. O impacto das execuções no mercado está associado ao custo de execução. Assim, seguindo o modelo proposto por Almgren e Chriss em 2000, encontramos uma estratégia ótima associada a execução. Além disso, encontramos uma fronteira eficiente de estratégias. Também fazemos ajustes do modelo a dados reais de execução no Contrato Futuro de Índice Bovespa, encontrando evidências estatísticas de que o modelo funciona.

**Palavras-chave:** Impacto de ordens, estratégias de execução, fronteira eficiente.

## **Abstract**

The problem of finding an optimal strategy to execute a trade is well-known to portfolio managers. The market impact of the execution is associated with transaction costs to the manager. Following the model proposed by Almgren and Chriss in 2000 , we find an optimal strategy associated with the trade execution in a mean-variance sense. Moreover, we find an efficient frontier of strategies. We also fit the model to Ibovespa Future's real trade data, and find statistical evidence that the model works.

**Key words:** Market impact, trading strategy, efficient frontier.







# Sumário

<b>Sumário</b>	<b>viii</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>x</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xi</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Definições e Solução do Problema</b>	<b>3</b>
2.1 Conceitos Iniciais . . . . .	3
2.2 O Modelo de Execução . . . . .	4
2.3 O Problema da Execução Ótima . . . . .	7
2.4 Microestrutura de Mercado . . . . .	9
2.5 Resolução do Problema Estático . . . . .	10
<b>3 Aplicações</b>	<b>15</b>
3.1 Fronteira Eficiente . . . . .	15
3.2 Análise de Sensibilidade da Estratégia Ótima . . . . .	16
3.3 Estimação dos Parâmetros do Modelo . . . . .	17
3.3.1 Índice Bovespa Futuro . . . . .	17
3.3.2 Dados Utilizados . . . . .	17
3.3.3 Primeiro Ajuste . . . . .	20
3.3.4 Segundo Ajuste . . . . .	23
3.3.5 Terceiro Ajuste . . . . .	26
3.3.6 Variância do Custo e Eventos Extremos . . . . .	29
3.3.7 Quarto Ajuste . . . . .	33
3.3.8 Quinto Ajuste . . . . .	36
3.3.9 Sexto Ajuste . . . . .	38
3.3.10 Fronteira Eficiente, Estratégia Ótima e Outros Resultados do Ajuste 4 . . . . .	40
<b>4 Conclusão</b>	<b>45</b>
<b>A Código dos Ajustes do Modelo</b>	<b>49</b>

**Referências Bibliográficas**

**61**

# Lista de Figuras

3.1	Diagrama de Dispersão do Custo Para o Ajuste 1 . . . . .	23
3.2	Diagrama de Dispersão do Custo Para o Ajuste 2 . . . . .	26
3.3	Diagrama de Dispersão do Custo Para o Ajuste 3 . . . . .	29
3.4	Gráfico do Índice Bovespa com Volatilidade Histórica . . . . .	30
3.5	Fronteira Eficiente de Estratégias - Variância x Valor Esperado . . . . .	41
3.6	Fronteira Eficiente de Estratégias - Desvio Padrão x Valor Esperado . . . . .	42
3.7	Estratégia Ótima . . . . .	43
3.8	Fronteira Eficiente Para 400 Contratos . . . . .	44



# Lista de Tabelas

3.1	Contrato Futuro de Índice Bovespa - Características Principais [BMF]	18
3.2	Dados de Custo de Execuções do Índice Futuro	19
3.3	Divisão dos Contratos Entre as Janelas de execução	20
3.4	Ajuste 1 - Resultados Obtidos	21
3.5	Valores Estimados no Primeiro Ajuste	22
3.6	Ajuste 2 - Resultados Obtidos	24
3.7	Valores Estimados no Segundo Ajuste	25
3.8	Ajuste 3 - Resultados Obtidos	27
3.9	Valores Estimados no Terceiro Ajuste	28
3.10	Z-Score e Contagem de Dados Extremos	31
3.10	Z-Score e Contagem de Dados Extremos	32
3.10	Z-Score e Contagem de Dados Extremos	33
3.11	Ajuste 4 - Resultados Obtidos	34
3.12	Ajuste 4 - Valores Estimados para o Z-Score	35
3.13	Ajuste 5 - Resultados Obtidos	36
3.14	Ajuste 5 - Valores Estimados Para o Z-Score	37
3.15	Ajuste 6 - Resultados Obtidos	38
3.16	Ajuste 6 - Valores Estimados Para o Z-Score	39
3.17	Correspondências Entre o Parâmetro $\lambda$ , Valor Esperado do Custo, Desvio Padrão do Custo e, Intervalo de Confiança do Custo	40





# Capítulo 1

## Introdução

Um dos problemas mais comuns no dia a dia de um gestor de um fundo de investimentos é decidir qual a melhor maneira de executar uma determinada operação, seja ela uma compra ou uma venda de ativos. Muitas vezes uma boa execução pode determinar se a operação será ganhadora ou não. Assim, temos uma motivação prática ao estudarmos a execução de ordens. Em particular, estudaremos o problema de encontrar a melhor execução a ser realizada em um intervalo de tempo dado.

Dimitris Bertsimas e Andrew Lo [BL98] definem a estratégia de execução ótima como aquela que minimiza o valor esperado dos custos do trading. Entretanto, Robert Almgren e Neil Chriss [AC99] argumentam que a execução ótima deve penalizar a incerteza em relação aos custos de execução. Em outras palavras, a execução ótima será aquela que minimiza o valor esperado dos custos do trading, penalizando a variância dos mesmos dado o nível de aversão a risco do investidor. Esse tipo de raciocínio é coerente com uma função de utilidade quadrática do investidor. A maneira como o problema é proposto [AC00] leva à uma solução analítica do mesmo e à existência de uma fronteira eficiente de estratégias.

Assim, o objetivo deste trabalho será formalizar o modelo proposto e os resultados encontrados em [AC00], relaxando algumas das hipóteses feitas pelos mesmos. Além disso, este trabalho se propõe a implementar o modelo, fazendo ajustes dos parâmetros do mesmo a dados reais e, mostrando algumas aplicações.

Inicialmente é proposta uma dinâmica de preços para o ativo negociado do tipo passeio aleatório aritmético discreto com incrementos independentes identicamente distribuídos. Note que essa dinâmica de preços é razoável, principalmente quando se trata de execuções "intraday", que ocorrem durante intervalos de tempo pequenos, não durando mais que alguns minutos ou horas. Nesses casos, na prática, não há incidência de taxas de juros (uma vez que essas são capitalizadas diariamente), taxas de aluguel, chamadas de margem ou outros custos do tipo.

Assume-se ainda que o impacto das ordens de execução divide-se em dois tipos: impactos temporários e impactos permanentes. Vale ressaltar que considerou-se neste trabalho que o impacto temporário basicamente refere-se à diferença em cada etapa de execução entre o preço que o ativo estava ao iniciarmos a etapa e, o preço que efetivamente conseguimos executar.

Considerou-se ainda que o impacto permanente refere-se à diferença de preços do ativo entre os instantes que realizamos as etapas da execução da ordem.

Neste trabalho é proposta uma microestrutura de mercado na qual as funções que representam os impactos são lineares em relação à velocidade de execução das ordens.

Dentro deste modelo, é encontrada uma solução analítica para a estratégia ótima e uma fronteira eficiente de estratégias.

No Capítulo 2 serão desenvolvidas as definições necessárias para a construção do modelo e demonstrações, além de introduzirmos a notação utilizada. Além disso, encontraremos a melhor estratégia estática dado o nível de aversão ao risco do investidor.

No Capítulo 3 estudaremos a solução encontrada no Capítulo 2, construindo a fronteira eficiente, além de analisar a sensibilidade da solução aos parâmetros estimados. Em seguida faremos o ajuste do modelo em relação a um conjunto de dados reais de execuções de ordens no Índice Bovespa Futuro. Serão feitos seis ajustes diferentes do modelo.

Finalmente, no Capítulo 4, discutiremos o que foi feito nos capítulos anteriores, comentando resultados encontrados, fazendo as críticas referentes ao modelo.

# Capítulo 2

## Definições e Solução do Problema

Ao longo desse capítulo faremos as definições necessárias para o desenvolvimento do trabalho e apresentaremos o ferramental necessário para o desenvolvimento dos próximos capítulos. Na Seção 2.1 definiremos os conceitos básicos. Na Seção 2.2 explicaremos as hipóteses adotadas, definiremos os tipos de estratégias de trading, a dinâmica assumida para o ativo negociado e o tipo de microestrutura assumida para o mercado. Finalmente, definiremos o problema que desejamos resolver na Seção 2.3. Na Seção 2.4 discutimos sobre a microestrutura de mercado assumida e, na Seção 2.5, o problema definido na Seção 2.3 é resolvido.

### 2.1 Conceitos Iniciais

O primeiro passo para se trabalhar com incerteza é definir o espaço de probabilidade. No que se segue, faremos uso da terminologia e definições de [Bar95] e [Shr04].

Inicialmente definiremos uma  $\sigma$  – álgebra e um espaço mensurável.

**Definição 1.** *Dado um conjunto  $\Omega$  não vazio, dizemos que uma família  $\mathcal{F}$  de subconjuntos de  $\Omega$  é uma  $\sigma$  – álgebra se:*

*i*  $\emptyset \in \mathcal{F}, \Omega \in \mathcal{F}.$

*ii* Se  $A \in \mathcal{F}$ , então seu complementar,  $C(A) \in \mathcal{F}.$

*iii* Seja  $\{A_j\}$  uma sequência em  $\mathcal{F}$ , então qualquer união enumerável  $\cup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}.$

**Definição 2.** *Dado um conjunto  $\Omega$  não vazio e uma  $\sigma$  – álgebra  $\mathcal{F}$ , dizemos que o par  $(\Omega, \mathcal{F})$  é um espaço mensurável.*

Com esses conceitos em mente, podemos definir nossa medida de probabilidade e consequentemente, o espaço de probabilidade.

**Definição 3.** *Seja  $(\Omega, \mathcal{F})$  um espaço mensurável. A medida de probabilidade  $\mathbb{P}$  é uma função que leva cada  $A \in \mathcal{F}$  a um número no intervalo  $[0, 1]$ , chamado de probabilidade de  $A$  e denotado por  $\mathbb{P}(A)$ . A medida de probabilidade possui as seguintes propriedades:*

i  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

ii Para qualquer sequência enumerável disjunta  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ ,

$$\mathbb{P}(\cup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j)$$

A tripla  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  é um espaço de probabilidade.

Finalmente, definimos uma filtração e um processo adaptado à filtração.

**Definição 4.** Seja  $(\Omega, \mathcal{F})$  um espaço mensurável. Seja  $T > 0$  e, assuma que para cada  $t \in [0, T]$  existe uma  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}_t$ . Quando para quaisquer  $s$  e  $t$ ,  $T > s > t > 0$  temos que  $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_s$ , então a família  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{I}}$  de  $\sigma$ -álgebra é chamada de filtração.

Convencionamos chamar  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ .

Do ponto de vista de finanças, podemos entender uma filtração como a ordenação da informação que temos disponível ao longo do tempo. Assim, com o passar do tempo, a  $\sigma$ -álgebra anterior é subconjunto da nova  $\sigma$ -álgebra, uma vez que teremos disponíveis não só as novas informações, como também as informações que já tínhamos anteriormente.

**Definição 5.** Um processo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{I}}$  é dito adaptado à filtração  $\{\mathcal{F}_t\}$  se para todo  $t$ ,  $X_t$  é  $\mathcal{F}_t$  mensurável.

Por fim, definiremos um ruído branco. Como trabalharemos em tempo discreto, a definição proposta por [Tsa05] é suficientemente precisa.

**Definição 6** (Ruído Branco). Dizemos que o processo  $\{\xi_k\}_{k=1}^{\mathcal{N}}$  é um ruído branco quando possui as seguintes propriedades:

i  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{\mathcal{N}}$  são independentes e identicamente distribuídos

ii  $\mathbb{E}[\xi_k] = 0$

iii  $\text{Var}[\xi_k] = 1$

## 2.2 O Modelo de Execução

Uma vez tendo os conceitos iniciais em mente, é possível construir o modelo adotado. Denotaremos por  $\mathcal{X}$  a quantidade inicial do ativo a ser liquidado antes do instante  $\mathcal{T}$ . Dividimos o tempo  $\mathcal{T}$  em  $\mathcal{N}$  intervalos idênticos, de comprimento  $\tau = \mathcal{T}/\mathcal{N}$  e, assim, definimos os instantes  $t_k = k\tau$ .

Ao falarmos que  $\mathcal{X}$  é a quantidade do ativo a ser liquidado, devemos atentar para a convenção de sinais. Um sinal positivo significa que o gestor deseja vender o ativo. Um sinal negativo

por outro lado equivale a dizer que o gestor deseja realizar uma compra do ativo. Perceba que podemos dizer então que o sinal positivo equivale à liquidação de uma posição "long" e o sinal negativo equivale à liquidação de uma posição "short". Note ainda que estamos construindo um modelo onde as negociações ocorrerão em intervalos de tempo discretos.

**Definição 7** (Posições). *Dado o espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , definimos o processo estocástico  $\{x_k\}_{k=0}^{\mathcal{N}}$ , onde  $x_k(\omega)$  é a quantidade que ainda falta liquidar no instante  $t_k$ , dada a realização  $\omega$ . Chamamos esse processo de posições. Esse processo é adaptado à filtração  $\{\mathcal{F}_t\}$  e  $x_0(\omega) = \mathcal{X}$ .*

Uma vez que clarificado o significado das posições, a idéia da estratégia de operação surge naturalmente. A operação realizada em cada instante é nada mais que a compra ou venda do ativo responsável pela mudança na posição.

**Definição 8** (Estratégia de Operação). *Definimos o processo estocástico  $\pi = \{n_k\}_{k=0}^{\mathcal{N}-1}$ , onde  $n_k(\omega) = x_{k+1}(\omega) - x_k(\omega)$  é o trade realizado. Esse processo é adaptado à filtração  $\{\mathcal{F}_t\}$ . Chamamos esse processo de estratégia de operação.*

*Dada uma estratégia de operação  $\pi$ , dizemos que ela é uma estratégia estática se ela é  $\mathcal{F}_0$  mensurável.*

*Chamamos de estratégia dinâmica toda estratégia de operação que não é estática.*

*Ainda classificamos as estratégias como simples ou complicadas. As estratégias simples são aquelas nas quais  $\text{Sgn}[n_i] = \text{Sgn}[n_j]$  para quaisquer  $i, j \in \{0, \dots, \mathcal{N} - 1\}$ . As estratégias complicadas são as estratégias que não são simples.*

Note que essas definições foram feitas de forma a manter a coerência da convenção de sinais. A função  $\text{Sgn}[\cdot]$  é uma função que captura o sinal da entrada, isto é, se a entrada for positiva, ela retorna +1, e se a entrada for negativa, ela retorna -1. Assim, uma compra terá sinal positivo enquanto uma venda terá sinal negativo. Perceba ainda que a restrição da estratégia de operação ser adaptada à filtração tem uma explicação prática: não faria sentido utilizar uma estratégia que precisasse de informações que ainda não temos disponíveis quando a executamos.

Quando dizemos que a estratégia do gestor é estática, significa que ele já sabe como irá executar a ordem desde o momento que a inicia. Ele irá liquidar o ativo da mesma maneira, independentemente do ativo estar se movendo a seu favor ou contra ele. Por outro lado, se ele possui uma estratégia dinâmica, ele vai observar o mercado e decidir a cada momento o quanto da posição será liquidada naquele instante.

Seja  $\mathcal{S}_0$  o preço do ativo no instante inicial. A riqueza inicial será  $\mathcal{X}\mathcal{S}_0$ . A necessidade de ter uma estratégia para executar a operação surge do fato que, no momento em que ele decide liquidar a operação, o gestor possui uma riqueza inicial mas, ao terminar de liquidar a posição, sua riqueza será outra. Assim, surge o conceito de custo de execução.

**Definição 9** (Custo de Execução). *Definimos como custo de execução a diferença entre a riqueza inicial e a riqueza após a execução da operação.*

Os motivos de existirem custos de execução são diversos: diferenças entre o preço de compra e o preço de venda do ativo, falta de liquidez para a execução imediata da liquidação, movimentos do preço do ativo durante a execução, etc. Em um caso extremo, no qual o gestor quisesse executar imediatamente a sua ordem, ainda assim ele teria um custo associado a isso. Dependendo do tamanho de sua posição, poderia acontecer, por exemplo, dele precisar agredir não só a melhor oferta de compra (ou de venda), mas também outras subsequentes, a fim de ter o lote todo executado. De fato, como veremos no Capítulo 3, esse tipo de estratégia possui um valor esperado muito alto para o custo de execução e variância pequena desse mesmo custo de execução.

Note que o custo de execução será uma variável aleatória. Conforme demonstraremos mais adiante, ele é em particular, uma variável aleatória  $\mathcal{F}_T$  mensurável.

Nesse ponto, falta ainda definirmos a dinâmica do ativo negociado e de que forma a execução das ordens afeta essa dinâmica. Para tal definiremos primeiramente o que é um movimento aleatório aritmético discreto.

**Definição 10** (Movimento Aleatório Aritmético Discreto). *Seja  $\{\xi_k\}_{k=1}^N$  um ruído branco. Definimos como Movimento Aleatório Aritmético Discreto o processo  $\{\mathcal{S}_k\}_{k=0}^N$ , onde  $\mathcal{S}_k(\omega) = \mathcal{S}_{k-1}(\omega) + \sigma\sqrt{\tau}\xi_k(\omega)$ .*

Assumimos que o ativo que queremos negociar possui uma dinâmica conforme descrita acima quando não estamos liquidando uma posição. Entretanto, conforme já foi discutido, a execução da estratégia provoca impactos nos preços desse ativo. Esse impacto se divide em dois tipos, chamados de impacto permanente e impacto temporário.

O impacto permanente é aquele que realmente altera a trajetória de preços do ativo. De acordo com [AC00], esse impacto representa mudanças no equilíbrio de mercado devido à operação e, essa mudança permanecerá pelo menos até o final da liquidação. Seja  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função que descreve o impacto permanente dos tradings no preço do ativo negociado, é razoável admitir que é uma função da taxa média de operações no intervalo de tempo,  $v_k = n_k/\tau$ . Assim, quando levamos em conta impactos dessa natureza, temos a dinâmica final dos preços do ativo  $\{\mathcal{S}_k\}_{k=0}^N$ , onde

$$\mathcal{S}_k(\omega) = \mathcal{S}_{k-1}(\omega) + \sigma\sqrt{\tau}\xi_k(\omega) - \tau g(v_{k-1}(\omega)) \quad (2.2.1)$$

Além do impacto permanente, também consideraremos que a execução das ordens provoca impactos temporários no mercado. Os impactos temporários são desequilíbrios temporários entre demanda e oferta causados pela execução da operação. O equilíbrio é restabelecido após o intervalo de tempo. Assim, o impacto temporário não afeta o processo  $\{\mathcal{S}_k\}_{k=0}^N$ . Denotando por  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função que descreve o impacto temporário, temos o processo de preços de execução  $\{\underline{\mathcal{S}}_k\}_{k=1}^N$ , onde

$$\underline{\mathcal{S}}_k(\omega) = \mathcal{S}_{k-1}(\omega) - h(v_{k-1}(\omega)) \quad (2.2.2)$$

Esse processo de preços de execução nos dá os preços que efetivamente conseguimos executar nossas ordens. Utilizando-o podemos portanto calcular facilmente o custo de execução.

Matematicamente, seja  $C$  o custo de execução, temos

$$C(X, \mathcal{N}, \pi) = \mathcal{X}\mathcal{S}_0 - \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} (x_{k-1} - x_k) \underline{S}_k = \mathcal{X}\mathcal{S}_0 + \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} n_{k-1} \underline{S}_k. \quad (2.2.3)$$

Obviamente, nem sempre saberemos o custo de execução antes de terminá-la. Entretanto, conforme demonstrado no Lema 1, sempre o conheceremos ao concluir a estratégia.

**Lema 1.** *O custo de execução é uma variável aleatória  $\mathcal{F}_T$  mensurável.*

*Demonstração.* De fato, para cada  $k \in \{1, 2, \dots, \mathcal{N}\}$ ,  $n_{k-1}$  e  $\underline{S}_k$  são  $\mathcal{F}_{t_k}$  mensuráveis. Como  $\{\mathcal{F}_t\}_t$  é uma filtração,  $\mathcal{F}_{t_k} \subseteq \mathcal{F}_{t_{\mathcal{N}}} = \mathcal{F}_T$ . Logo, em particular,  $n_{k-1}$  e  $\underline{S}_k$  são  $\mathcal{F}_T$  mensuráveis.

Consequentemente,  $\sum_{k=1}^{\mathcal{N}} n_{k-1} \underline{S}_k$  é  $\mathcal{F}_T$  mensurável e  $C$  também o será.  $\square$

## 2.3 O Problema da Execução Ótima

Conforme já explicado, o problema que queremos resolver é encontrar a estratégia de execução ótima. Por estratégia ótima entendemos como aquela que minimiza o custo de execução, limitando a incerteza do mesmo. Assim, o passo seguinte é encontrar uma expressão para o valor esperado do custo de execução e sua variância.

Substituindo as Equações (2.2.1) e (2.2.2) em (2.2.3) e, usando o fato que  $x_{\mathcal{N}} = 0$  (pois a posição ao final do tempo deve estar liquidada), chegamos à seguinte equação para o custo:

$$C(X, \mathcal{N}, \pi) = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}-1} [x_k(\omega)(\tau g(v_{k-1}(\omega)) - \sigma\sqrt{\tau}\xi_k(\omega))] - \sum_{k=0}^{\mathcal{N}-1} [n_k(\omega)h(v_k(\omega))] \quad (2.3.1)$$

Assim, podemos verificar que o valor esperado do custo de execução será:

$$\mathbb{E}[C|\pi] = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}-1} \mathbb{E}[x_k \tau g(v_{k-1})] - \sum_{k=1}^{\mathcal{N}-1} \mathbb{E}[x_k \sigma \sqrt{\tau} \xi_k] - \sum_{k=0}^{\mathcal{N}-1} \mathbb{E}[n_k h(v_k)] \quad (2.3.2)$$

Como  $\xi_k$  é ruído branco e, tanto a posição quanto  $\sigma$  são sempre finitos, temos que quando a estratégia for estática  $\mathbb{E}[x_k \sigma \sqrt{\tau} \xi_k] = 0$ . Ficamos portanto com a expressão:

$$\mathbb{E}[C|\pi] = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}-1} \mathbb{E}[x_k \tau g(v_{k-1})] - \sum_{k=0}^{\mathcal{N}-1} \mathbb{E}[n_k h(v_k)] \quad (2.3.3)$$

Usando novamente a hipótese da estratégia ser estática, a expressão pode ser reescrita:

$$\mathbb{E}[C|\pi] = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}-1} [x_k \tau g(v_{k-1})] - \sum_{k=0}^{\mathcal{N}-1} [n_k h(v_k)] \quad (2.3.4)$$

Queremos calcular agora a variância do custo, dada a estratégia adotada. Fazemos as seguintes substituições:

$$\begin{aligned} a &= \sum_{k=1}^{\mathcal{N}-1} x_k \tau g(v_{k-1}) \\ b &= \sum_{k=1}^{\mathcal{N}-1} x_k \sigma \sqrt{\tau} \xi_k \\ c &= \sum_{k=0}^{\mathcal{N}-1} n_k h(v_k) \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Assim temos:

$$\begin{aligned} V[C|\pi] &= V[a - b - c|\pi] = \\ &= V[a|\pi] + V[b|\pi] + V[c|\pi] - 2\text{cov}[(a, b)|\pi] - 2\text{cov}[(a, c)|\pi] + 2\text{cov}[(b, c)|\pi] \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Em particular, se a estratégia for estática, a expressão da variância fica :

$$V[C|\pi] = \mathbb{E}[(C - \mathbb{E}[C|\pi])^2|\pi] = \mathbb{E}[b^2|\pi] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{\mathcal{N}-1} x_k \sigma \sqrt{\tau} \xi_k\right)^2|\pi\right] = \sigma^2 \tau \sum_{k=1}^{\mathcal{N}-1} x_k^2 \quad (2.3.7)$$

Agora que definimos o valor esperado do custo de execução de uma determinada estratégia e sua respectiva variância, devemos definir o que torna uma estratégia melhor (usualmente, em teoria de finanças, diz-se que uma estratégia é preferida às demais). Se por um lado queremos uma estratégia que minimize o valor esperado do custo de execução, por outro lado, não queremos ter surpresas de eventualmente termos um custo muito alto (o que se reflete em desejarmos limitar a variância do custo, dada a estratégia).

Finalmente definimos nosso problema de otimização:

$$\begin{aligned} \min_{\pi} \quad & \mathbb{E}[C|\pi] \\ \text{s.a.} \quad & V[C|\pi] = K^2 \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Vamos enunciar agora o teorema de Weierstrass, que nos dará condições suficientes para garantir que existir uma solução do problema acima, ao menos na família de estratégias estáticas, num contexto de tempo discreto.

**Teorema 1** (Weierstrass). *Seja  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  compacto. Se  $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função real contínua, então existem  $x_0, x_1 \in \mathcal{K}$  tais que  $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$  para todo  $x \in \mathcal{K}$ .*

*Demonstração.* Ver a demonstração na página 321 de [Apo69]. □

É trivial verificar que o conjunto de estratégias estáticas que obedecem à restrição do problema (2.3.8) é um compacto (pois é fechado e limitado). Assim, para que o problema tenha solução, é suficiente que o valor esperado do custo seja uma função contínua.



## 2.4 Microestrutura de Mercado

Na seção anterior definimos a dinâmica do ativo negociado e o custo de execução. Além disso definimos o que é o impacto definitivo e o impacto temporário da execução. Falta ainda explicitarmos como são essas funções que representam esses impactos. O ramo de finanças que estuda os impactos das ordens nos preços se chama Teoria da Microestrutura de Mercado [O'H96]. Poderíamos escolher quaisquer funções para representar  $g$  e  $h$ , de acordo com o nosso modelo preferido para a microestrutura, desde que certas condições sejam obedecidas, de forma que o problema representado na Equação (2.3.8) tenha uma solução. Conforme já argumentado, é suficiente para a existência de solução que o valor esperado do custo, representado a Equação (2.3.3), seja contínuo.

Por simplicidade, assumimos que as funções do impacto permanente e do impacto temporário serão ambas lineares por partes em relação à taxa média de operações  $v_k$ .

Assim para o impacto permanente, temos:

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ g : v_k &\mapsto \gamma v_k, \gamma < 0 \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

Supondo essa forma para o impacto permanente, implica que a cada  $n$  unidades liquidadas, o preço do ativo será afetado em  $\gamma n$ , independentemente do intervalo de tempo  $\tau$ .

Assim, a Equação (2.2.1) se torna:

$$\mathcal{S}_k(\omega) = \mathcal{S}_{k-1}(\omega) + \sigma\sqrt{\tau}\xi_k(\omega) - \gamma n_{k-1}(\omega) = \mathcal{S}_0 + \sigma\sqrt{\tau} \sum_{j=1}^k \xi_j(\omega) + \gamma(\mathcal{X} - x_k(\omega)) \quad (2.4.2)$$

De maneira análoga definimos a função que representa o impacto temporário:

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ h : v_k &\mapsto \eta v_k + \epsilon \text{Sgn}[v_k], \quad \eta < 0, \quad \epsilon < 0 \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

O termo  $\epsilon$  poderia ser interpretado como custos fixos que incorrem em uma operação, tais como corretagem, emolumentos, taxas de registro e metade da diferença entre as ofertas de compra e de venda do livro de ofertas do ativo (chamado usualmente de bid-ask spread).

Já o termo  $\eta$  tem uma interpretação mais complicada nessa Equação. De acordo com [AC00] ele depende de aspectos internos e transientes da microestrutura de mercado. Note que o valor estimado dele poderá depender inclusive dos tipos de ordens que são permitidas na bolsa que o ativo está sendo negociado. Por exemplo, se não forem permitidas ordens com lote aparente (um tipo de ordem na qual apenas uma parte da quantidade apregoada é mostrada no livro de ofertas e, o restante da ordem é mostrada apenas quando a ordem original já foi totalmente executada), uma maneira de estimar esse parâmetro seria fazendo uma regressão linear entre

do preço médio apregoado no livro de ofertas em função do lote. Entretanto essa abordagem pode ser bastante falha, uma vez que novas ordens poderiam ser colocadas no livro de ofertas enquanto a nossa execução estivesse sendo realizada. Além disso, ordens com lote aparente são permitidas em diversas bolsas (inclusive na BMF BOVESPA) e são bastante utilizadas.

Uma outra crítica possível a essa expressão escolhida para representar o impacto temporário é que na prática, esse tipo de impacto tem influência de ordens superiores à primeira. Entretanto, acreditamos que o benefício da simplicidade desse modelo para fins didáticos e de elaboração de uma metodologia supera o prejuízo por falta de realismo no modelo.

Considerando o impacto temporário descrito pela Equação (2.4.3), o processo dos preços de execução da Equação (2.2.2) fica portanto o seguinte:

$$\underline{S}_k(\omega) = S_{k-1}(\omega) - \eta v_{k-1}(\omega) - \epsilon \text{Sgn}[v_{k-1}(\omega)] \quad (2.4.4)$$

Dessa forma, considerando as Equações (2.4.2) e (2.4.4), além de

$$\sum_{k=0}^{\mathcal{N}-1} n_k = -\mathcal{X};$$

$$\begin{aligned} a &= \gamma \sum_{k=1}^{\mathcal{N}-1} (n_{k-1} x_k) = -\gamma \sum_{k=1}^{\mathcal{N}-1} [(x_{k-1} - x_k) x_k] = -\frac{\gamma}{2} \sum_{k=1}^{\mathcal{N}-1} [-x_k^2 + x_{k-1}^2 - (x_{k-1} - x_k)^2] = \\ &= \frac{\gamma}{2} \sum_{k=1}^{\mathcal{N}-1} [x_k^2 - x_{k-1}^2] + \frac{\gamma}{2} \sum_{k=1}^{\mathcal{N}-1} (x_k - x_{k-1})^2 = -\frac{\gamma}{2} \mathcal{X}^2 + \frac{\gamma}{2} \sum_{k=1}^{\mathcal{N}-1} n_k^2; \end{aligned}$$

e

$$c = \sum_{k=0}^{\mathcal{N}-1} n_k [\eta v_k + \epsilon \text{Sgn}(v_k)] = \frac{\eta}{\tau} \sum_{k=0}^{\mathcal{N}-1} n_k^2 + \epsilon \sum_{k=0}^{\mathcal{N}-1} |n_k|$$

podemos recalcular o custo de execução,  $C(X, \mathcal{N}, \pi)$ , chegando na seguinte expressão:

$$C(X, \mathcal{N}, \pi) = \sigma \sqrt{\tau} \sum_{k=1}^{\mathcal{N}-1} n_k \left[ \sum_{j=1}^k \xi_j \right] - \frac{\gamma}{2} \mathcal{X}^2 - \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \epsilon |n_{k-1}| - \left( \eta - \frac{\gamma \tau}{2} \right) \sum_{k=0}^{\mathcal{N}-1} \frac{n_k^2}{\tau} \quad (2.4.5)$$

Assim, também podemos reescrever a Equação (2.3.4) como

$$\mathbb{E}[C|\pi] = -\frac{1}{2} \gamma \mathcal{X}^2 - \epsilon \sum_{k=0}^{\mathcal{N}-1} |n_k| - \left( \eta - \frac{\gamma \tau}{2} \right) \sum_{k=0}^{\mathcal{N}-1} \frac{n_k^2}{\tau} \quad (2.4.6)$$

## 2.5 Resolução do Problema Estático

Nessa seção iremos resolver o problema de encontrar a estratégia estática que minimiza o valor esperado do custo de execução (definido na Equação (2.4.6)), dada uma variância que o

investidor aceita no custo. Matematicamente o problema a ser resolvido é:

$$\begin{aligned} \min_{\pi} \quad & -\frac{1}{2}\gamma\mathcal{X}^2 - \epsilon \sum_{k=0}^{\mathcal{N}-1} |n_k| - \left(\eta - \frac{\gamma\tau}{2}\right) \sum_{k=0}^{\mathcal{N}-1} \frac{n_k^2}{\tau} \\ \text{s.a.} \quad & \sigma^2\tau \sum_{k=1}^{\mathcal{N}-1} x_k^2 = K^2 \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

Vamos agora enunciar um teorema que nos dará condições de garantir que a estratégia estática que resolve o problema da Equação (2.5.1) é uma estratégia simples.

**Teorema 2.** *Para qualquer estratégia estática complicada, existe alguma estratégia estática simples que é melhor tanto no sentido de estar associado a um custo esperado mais baixo, como no sentido da variância do custo associado ser menor.*

*Demonstração.* Seja  $\pi_C = \{n_{C,k}\}_{k=0}^{\mathcal{N}-1}$  uma estratégia complicada qualquer. Sem perda de generalidade, suponha que a posição a ser liquidada é uma posição *short* e que portanto

$$\sum_{k=0}^{\mathcal{N}-1} n_{C,k} = -\mathcal{X} > 0.$$

Denotamos por  $\{x_{C,k}\}_{k=0}^{\mathcal{N}}$  as posições associadas a essa estratégia. Definimos então a sequência de posições associadas a uma estratégia simples  $\{x_{S,k}\}_{k=0}^{\mathcal{N}}$ , onde

$$x_{S,i} = \max\left[\left(\sup_{0 \leq k < i} x_{S,k}\right), x_{C,i}\right] \mathbf{1}_{\sup_{0 \leq k \leq i} x_{S,k} \leq 0}.$$

Assim, é trivial verificar que a estratégia  $\pi_S = \{n_{S,k}\}_{k=0}^{\mathcal{N}-1}$  definida por

$$n_{S,i} = x_{S,i+1} - x_{S,i}$$

é uma estratégia simples. Notando ainda que  $|n_{S,k}| \leq |n_{C,k}|$  e  $|x_{S,k}| \leq |x_{C,k}|$ , percebe-se que  $\pi_S$  terá um valor esperado de custo menor e, uma variância de custo menor que a estratégia complicada  $\pi_C$ .  $\square$

Esse teorema facilita as contas do valor esperado do custo, uma vez que, sabendo o sinal de  $\mathcal{X}$ , poderemos definir o  $|n_k|$ . Assim, sem perda de generalidade, podemos fazer  $n_k < 0$ .

O Lagrangeano do problema definido na Equação (2.5.1) é portanto:

$$\begin{aligned} L(\pi, \lambda) &= -\frac{1}{2}\gamma\mathcal{X}^2 - \epsilon \sum_{k=0}^{\mathcal{N}-1} |n_k| - \left(\eta - \frac{\gamma\tau}{2}\right) \sum_{k=0}^{\mathcal{N}-1} \frac{n_k^2}{\tau} + \lambda(\sigma^2\tau \sum_{k=1}^{\mathcal{N}-1} x_k^2 - K^2) \\ &= -\frac{1}{2}\gamma\mathcal{X}^2 + \epsilon \sum_{k=0}^{\mathcal{N}-1} n_k - \left(\eta - \frac{\gamma\tau}{2}\right) \sum_{k=0}^{\mathcal{N}-1} \frac{n_k^2}{\tau} + \lambda(\sigma^2\tau \sum_{k=1}^{\mathcal{N}-1} x_k^2 - K^2) \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

Conforme havíamos adiantado na Seção 2.3, uma possível interpretação para esse lagrangeano é de que a preferência do investidor sob condições de incerteza é quadrática, no sentido de média-variância.

Aplicando as condições de primeira ordem,

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} = 0, k = 1, \dots, \mathcal{N} - 1$$

temos:

$$\sum_{k=1}^{\mathcal{N}-1} x_k^2 = \frac{K^2}{\sigma^2 \tau} \quad (2.5.3)$$

e

$$\begin{aligned} 2\lambda\sigma^2\tau x_k &= \left(\eta - \frac{\gamma\tau}{2}\right) \frac{1}{\tau} \left( \frac{\partial(n_{k-1}^2 + n_k^2)}{\partial x_k} \right) \\ &= \left(\eta - \frac{\gamma\tau}{2}\right) \frac{2}{\tau} \left( n_{k-1} \frac{\partial n_{k-1}}{\partial x_k} + n_k \frac{\partial n_k}{\partial x_k} \right) \\ &= \left(\eta - \frac{\gamma\tau}{2}\right) \frac{2}{\tau} (n_{k-1} - n_k) \\ &= \left(\eta - \frac{\gamma\tau}{2}\right) \frac{2}{\tau} (2x_k - x_{k-1} - x_{k+1}) \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

Podemos reescrever como

$$x_k = -\frac{\left(\eta - \frac{\gamma\tau}{2}\right)}{\lambda\sigma^2} \frac{(x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}))}{\tau^2} \quad (2.5.5)$$

Fazemos a hipótese  $|\eta| \geq |\gamma\tau|$  e vamos enunciar uma proposição.

**Proposição 1.** *Dado o modelo de mercado já definido, temos*

$$-\frac{\left(\eta - \frac{\gamma\tau}{2}\right)}{\lambda\sigma^2} \geq 0.$$

*Assim sendo, definimos a constante*

$$\kappa^2 = -\frac{\lambda\sigma^2}{\left(\eta - \frac{\gamma\tau}{2}\right)}$$

*Demonstração.* Temos  $\eta < 0, \gamma < 0, \lambda > 0$  e  $\sigma > 0$ . Assim

$$-\frac{\lambda\sigma^2}{\left(\eta - \frac{\gamma\tau}{2}\right)} = -\frac{\lambda\sigma^2}{\eta\left(1 - \frac{\gamma\tau}{2\eta}\right)} > 0 \iff 2|\eta| > |\gamma\tau|.$$

Note entretanto que quando  $v_k \rightarrow -\infty$ , o impacto temporário será quase certamente maior que o impacto permanente, se e somente se,

$$|\eta| > |\gamma\tau|.$$

□

Assim, chegamos à equação

$$\kappa^2 x_k = \frac{(x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}))}{\tau^2} \quad (2.5.6)$$

Note que a equação (2.5.6) é uma equação linear de diferenças. Fazendo  $x_k = z(\tau k)$  e, supondo que  $z \in C^2$ , temos portanto,

$$\kappa^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + O(\tau^2) \quad (2.5.7)$$

Resolvendo essa equação, temos

$$z(t) = Ae^{-\kappa t} + Be^{\kappa t} + O(\tau) \quad (2.5.8)$$

As condições de contorno são  $z(0) = \mathcal{X}$  e  $z(T) = 0$ . Assim

$$X = A + B + O(\tau)$$

e

$$0 = Ae^{-\kappa T} + Be^{\kappa T} + O(\tau).$$

Finalmente, chegamos à solução:

$$x_k = \mathcal{X} \left(1 - \frac{e^{-\kappa T}}{e^{-\kappa T} - e^{\kappa T}}\right) e^{-\kappa t_k} + \mathcal{X} \left(\frac{e^{-\kappa T}}{e^{-\kappa T} - e^{\kappa T}}\right) e^{\kappa t_k} + O(\tau) \quad (2.5.9)$$

Reescrevendo:

$$x_k = \mathcal{X} \left(\frac{e^{-\kappa(T-t_k)} - e^{\kappa(T-t_k)}}{e^{-\kappa T} - e^{\kappa T}}\right) + O(\tau) = \mathcal{X} \frac{\sinh[\kappa(T-t_k)]}{\sinh[\kappa T]} + O(\tau) \quad (2.5.10)$$



# Capítulo 3

## Aplicações

No Capítulo 2 apresentamos todas as definições necessárias para a modelagem da execução de operações. Além disso, definimos o problema de encontrar a estratégia ótima, num sentido de média-variância. Finalmente, encontramos uma solução do problema.

Agora, neste Capítulo iremos explorar o resultado da Equação (2.5.10). Em particular, iremos construir uma fronteira de estratégias ótimas. Em seguida iremos analisar a sensibilidade das estratégias ótimas em relação aos seus parâmetros. Finalmente, utilizando dados reais, iremos fazer ajustes do modelo, estimando os parâmetros.

### 3.1 Fronteira Eficiente

A expressão encontrada na Equação (2.5.10) nos fornece a estratégia que, dada uma variância do custo aceita pelo investidor, irá minimizar o valor esperado do custo de execução. Assim, é natural querermos saber quanto é a variância e quanto é o valor esperado do custo. De fato, a Equação (2.5.10) implica em

$$n_k = \mathcal{X} \frac{\sinh[\kappa(T - t_{k+1})]}{\sinh[\kappa T]} - \mathcal{X} \frac{\sinh[\kappa(T - t_k)]}{\sinh[\kappa T]} + O(\tau) \quad (3.1.1)$$

Assim, quando substituímos a Equação (3.1.1) nas Equações (2.4.6) e (2.3.7), encontramos respectivamente  $\mathbb{E}^*$  e  $V^*$ .

$$\mathbb{E}^*[C] = -\frac{1}{2}\gamma\mathcal{X}^2 - \epsilon|\mathcal{X}| - \left(\eta - \frac{\gamma\tau}{2}\right)\mathcal{X}^2 \frac{\tanh\left(\frac{\kappa\tau}{2}\right)[\tau \sinh(2\kappa T) + 2T \sinh(\kappa\tau)]}{2\tau^2 \sinh^2(\kappa T)} \quad (3.1.2)$$

$$V^*[C] = \frac{1}{2}\sigma^2\mathcal{X}^2 \frac{\tau \sinh(\kappa T) \cosh[\kappa(T - \tau)] - T \sinh(\kappa\tau)}{\sinh^2(\kappa T) \sinh(\kappa\tau)} \quad (3.1.3)$$

Podemos então definir a Fronteira Eficiente.

**Definição 11** (Fronteira Eficiente). *Chamamos de Fronteira Eficiente o conjunto de pares*

variância do custo e valor esperado do custo, de todas as estratégias ótimas

$$\mathcal{B}_E = \{(V^*, \mathbb{E}^*)\}$$

### 3.2 Análise de Sensibilidade da Estratégia Ótima

Nosso objetivo agora é avaliar o quão sensível a solução é aos parâmetros que deverão ser estimados. Para isso, calcularemos as derivadas parciais da Equação (2.5.10) para fazer essa análise. Note que o que estamos querendo medir é o quão longe da solução ótima estaremos caso algum dos parâmetros tenha sido mal estimado. Essa questão é diferente de analisar quanto o custo será mal estimado se estimarmos mal algum dos parâmetros.

De maneira geral, denotando o conjunto de parâmetros por  $\theta$ , temos

$$\frac{\partial x_k}{\partial \theta_i} = \mathcal{X} \frac{(T - t_k) \frac{\partial \kappa}{\partial \theta_i} \cosh[\kappa(T - t_k)] \sinh[\kappa T] - T \frac{\partial \kappa}{\partial \theta_i} \sinh[\kappa(T - t_k)] \cosh[\kappa T]}{\sinh^2[\kappa T]} \quad (3.2.1)$$

Agora calculamos  $\frac{\partial \kappa}{\partial \theta_i}$  para cada um dos parâmetros  $\theta_i$ .

Primeiramente vamos calcular a sensibilidade da estratégia ótima em relação à volatilidade  $\sigma$  do ativo negociado.

$$\frac{\partial \kappa}{\partial \sigma} = \sqrt{\frac{-\lambda}{(\eta - \frac{\gamma T}{2})}} \quad (3.2.2)$$

Assim, ao substituir a Equação (3.2.2) em (3.2.1) temos a medida de sensibilidade em relação à volatilidade  $\sigma$ .

$$\frac{\partial x_k}{\partial \sigma} = \mathcal{X} \frac{(T - t_k) \cosh[\kappa(T - t_k)] \sinh[\kappa T] - T \sinh[\kappa(T - t_k)] \cosh[\kappa T]}{\sinh^2[\kappa T]} \sqrt{\frac{-\lambda}{(\eta - \frac{\gamma T}{2})}} \quad (3.2.3)$$

Em seguida, calculamos a sensibilidade em relação à medida de aversão ao risco  $\lambda$ .

$$\frac{\partial \kappa}{\partial \lambda} = \frac{-\sigma^2}{2\sqrt{(\eta - \frac{\gamma T}{2})(-\sigma^2 \lambda)}} \quad (3.2.4)$$

$$\frac{\partial x_k}{\partial \lambda} = \mathcal{X} \frac{(T - t_k) \cosh[\kappa(T - t_k)] \sinh[\kappa T] - T \sinh[\kappa(T - t_k)] \cosh[\kappa T]}{\sinh^2[\kappa T]} \frac{\partial \kappa}{\partial \lambda} \quad (3.2.5)$$

Continuando, calculamos a sensibilidade em relação ao parâmetro de impacto temporário



$\eta$ .

$$\frac{\partial \kappa}{\partial \eta} = \frac{\lambda \sigma^2}{2(\eta - \frac{\gamma \tau}{2}) \sqrt{-(\eta - \frac{\gamma \tau}{2}) \lambda \sigma^2}} \quad (3.2.6)$$

$$\frac{\partial x_k}{\partial \eta} = \mathcal{X} \frac{(T - t_k) \cosh[\kappa(T - t_k)] \sinh[\kappa T] - T \sinh[\kappa(T - t_k)] \cosh[\kappa T]}{\sinh^2[\kappa T]} \frac{\partial \kappa}{\partial \eta} \quad (3.2.7)$$

Finalmente, calculamos a sensibilidade em relação ao parâmetro de impacto permanente  $\gamma$ .

$$\frac{\partial \kappa}{\partial \gamma} = - \frac{\lambda \sigma^2 \tau}{4(\eta - \frac{\tau \gamma}{2}) \sqrt{-(\eta - \frac{\tau \gamma}{2}) \lambda \sigma^2}} \quad (3.2.8)$$

$$\frac{\partial x_k}{\partial \gamma} = \mathcal{X} \frac{(T - t_k) \cosh[\kappa(T - t_k)] \sinh[\kappa T] - T \sinh[\kappa(T - t_k)] \cosh[\kappa T]}{\sinh^2[\kappa T]} \frac{\partial \kappa}{\partial \gamma} \quad (3.2.9)$$

### 3.3 Estimação dos Parâmetros do Modelo

Até o presente momento, desenvolvemos toda a teoria do modelo de custo de execução, levantando as equações e soluções do modelo. Na presente Seção, nosso objetivo será estimar os parâmetros do modelo. Especificamente, pretendemos estimar os parâmetros para o Índice Bovespa Futuro.

#### 3.3.1 Índice Bovespa Futuro

O principal índice de ações no Brasil é o Índice Bovespa. Ele é calculado através de uma cesta de ações, divulgada trimestralmente pela Bolsa de Valores de São Paulo, ponderada por liquidez. Entretanto, para replicar essa cesta de ações, o investidor necessita de um grande desembolso de caixa. Além disso, a execução de ordens em diversos ativos (ações) ao mesmo tempo pode ser bastante problemática devido inclusive à questões de liquidez. Assim, é negociado na BMF (Bolsa de Mercadorias e Futuros) o Contrato Futuro de Índice Bovespa.

O Contrato Futuro de Ibovespa permite ao investidor replicar o comportamento do Índice com uma maior facilidade. Ele não precisa ter o desembolso financeiro e os custos de transação do mercado à vista. Além disso o Índice Bovespa Futuro é um contrato altamente líquido, que dá uma maior agilidade ao investidor que deseja investir em ações.

As principais características desse contrato estão sumarizadas na Tabela 3.1 .

#### 3.3.2 Dados Utilizados

Os dados utilizados no ajuste dos parâmetros estão compilados na Tabela 3.2. Relembrando: valores positivos na posição inicial significam que o participante estava comprado e precisou

Tabela 3.1: Contrato Futuro de Índice Bovespa - Características Principais [BMF]

Objeto de negociação	Índice de ações da Bolsa de Valores de São Paulo denominado Índice Bovespa (Ibovespa)
Código	IND
Tamanho do contrato	Ibovespa Futuro multiplicado pelo valor em reais de cada ponto, estabelecido pela BM&FBOVESPA.
Variação mínima de apregoação	5 pontos de Índice
Cotação	Pontos de Índice, sendo cada ponto equivalente ao valor em reais estabelecido pela BM&FBOVESPA
Oscilação máxima diária	10% sobre o preço de ajuste do dia anterior do vencimento negociado. Para o 1º vencimento em aberto, o limite de oscilação será suspenso nos três últimos dias de negociação.
Lote padrão	5
Limites de posição	10.000 contratos ou 20% das posições em aberto por vencimento, dos dois o maior.
Último dia de negociação	Quarta-feira mais próxima do dia 15 do mês de vencimento. Se nesse dia for feriado ou não houver pregão na BM&FBOVESPA, a data de vencimento será o dia útil subsequente.
Meses de vencimento	Meses pares. A BM&FBOVESPA poderá, a seu critério, quando as condições de mercado assim exigirem, autorizar a negociação de vencimentos em meses ímpares.
Liquidação	Financeira no dia útil seguinte ao último dia de negociação, pelo preço de liquidação do último dia de negociação, conforme definido no contrato.
Margem de garantia	Será exigida margem de garantia de todos os comitentes com posição em aberto, cujo valor será atualizado diariamente pela Bolsa, de acordo com critérios de apuração de margem para contratos Futuros

vender aquela posição para ficar zerado; valores negativos na posição inicial significam que o participante estava vendido a descoberto (*short*) e precisou comprar aquela posição para ficar zerado; valores positivos de custo significam que o preço médio de execução foi pior que o preço de abertura do Índice Futuro naquele dia (menor no caso de uma venda ou maior no caso de uma compra) e; valores negativos de custo significam que o preço médio de execução foi melhor que o preço de abertura do Índice Futuro naquele dia (maior no caso de uma venda ou menor no caso de uma compra).

Os dados foram obtidos com um participante do mercado, que nos forneceu o custo de 79 execuções realizadas entre janeiro e maio de 2012, totalizando 12955 contratos de Índice Futuro negociados no período. Por razões pessoais, esse participante preferiu não ser identificado, apesar de ter liberado o uso dos dados. Em determinadas datas, ele realizou operações no início do dia. Em particular, ele "zerou" posições nos primeiros 15 minutos de mercado, em ordens divididas em janelas de 30 segundos. A Tabela 3.3 mostra como os contratos foram divididos entre as janelas, para cada quantidade de contratos inicial.

Tabela 3.2: Dados de Custo de Execuções do Índice Futuro

Data	Posição Inicial	custo (R\$)	Data	Posição Inicial	custo (R\$)	Data	Posição Inicial	custo (R\$)
03/01/12	-430	0.00	17/02/12	-345	-8050.00	19/04/12	-50	425.00
04/01/12	-35	2430.00	23/02/12	85	23625.00	20/04/12	110	5200.00
06/01/12	35	875.00	27/02/12	100	150.00	23/04/12	105	-18755.00
09/01/12	250	43675.00	28/02/12	120	2450.00	24/04/12	100	-10175.00
11/01/12	240	2000.00	29/02/12	-30	2625.00	25/04/12	-35	175.00
12/01/12	-305	-26925.00	14/03/12	-225	-8080.00	26/04/12	245	28175.00
13/01/12	155	-7230.00	19/03/12	60	175.00	27/04/12	-85	10480.00
16/01/12	350	75150.00	20/03/12	-155	41500.00	30/04/12	75	6700.00
17/01/12	-330	-33625.00	21/03/12	-30	-280.00	02/05/12	70	-4055.00
18/01/12	-45	-250.00	22/03/12	225	-21555.00	03/05/12	-105	18005.00
19/01/12	-365	-37225.00	23/03/12	280	35275.00	04/05/12	120	6325.00
20/01/12	-30	-875.00	26/03/12	-195	-5850.00	09/05/12	75	5400.00
23/01/12	-460	32005.00	27/03/12	-280	9600.00	10/05/12	-100	-775.00
24/01/12	-255	-4200.00	28/03/12	280	39800.00	11/05/12	70	5865.00
26/01/12	-445	-36500.00	29/03/12	265	-50925.00	14/05/12	-40	-75.00
27/01/12	500	69550.00	30/03/12	-180	29305.00	15/05/12	120	-8630.00
31/01/12	-595	26705.00	02/04/12	460	87525.00	16/05/12	20	13325.00
01/02/12	-5	0.00	03/04/12	-120	6450.00	17/05/12	50	6550.00
02/02/12	-300	68030.00	04/04/12	120	9500.00	18/05/12	55	7200.00
06/02/12	-105	1130.00	05/04/12	-70	-9905.00	21/05/12	-20	-50.00
07/02/12	5	0.00	09/04/12	-25	-1675.00	22/05/12	-75	-2250.00
08/02/12	-490	67130.00	10/04/12	-185	11955.00	23/05/12	75	-2300.00
09/02/12	-5	0.00	11/04/12	120	11600.00	24/05/12	-20	-75.00
10/02/12	300	-59305.00	12/04/12	120	11325.00	25/05/12	55	4855.00
13/02/12	265	13325.00	13/04/12	-110	575.00	28/05/12	-25	-400.00
15/02/12	215	15375.00	16/04/12	30	-1005.00			
16/02/12	265	8340.00	17/04/12	60	-2605.00			

Tabela 3.3: Divisão dos Contratos Entre as Janelas de execução

Contratos	Janela																														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
5	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	5	5	5	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25	5	5	5	5	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30	5	5	5	5	5	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
35	5	5	5	5	5	5	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
40	5	5	5	5	5	5	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
45	5	5	5	5	5	5	5	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
50	5	5	5	5	5	5	5	5	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
55	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
60	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
70	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
75	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
85	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
100	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
105	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
110	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
120	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
155	10	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
180	10	10	10	10	10	10	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
185	10	10	10	10	10	10	10	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
195	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
215	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
225	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
240	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
245	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
250	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
255	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
265	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
280	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
300	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
305	15	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
330	15	15	15	15	15	15	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
345	15	15	15	15	15	15	15	15	15	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
350	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
365	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
430	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15
445	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15
460	20	20	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15
490	20	20	20	20	20	20	20	20	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15
500	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15
595	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	15

### 3.3.3 Primeiro Ajuste

A primeira forma que o ajuste dos parâmetros foi realizado foi resolvendo o problema

$$\min_{(\gamma, \epsilon, \eta)} F_{obj} = \sum_{j=1}^{79} (C_j - \mathbb{E}[C_j])^2$$

$$s.a. \gamma \leq 0, \eta \leq 0, \epsilon \leq 0, \left(\frac{\gamma_T}{2} - \eta\right) \geq 0$$

onde  $\mathbb{E}[C_j]$  é determinado pela Equação (2.4.6) e cada  $C_j$  é um dos custos da Tabela 3.2.

Essa metodologia tem uma grande restrição pois ignora a variância do custo de execução. Nessa metodologia, nem todos os parâmetros do modelo são estimados. Em particular, o parâmetro  $\sigma$ , que mede a volatilidade do Índice Futuro, não é estimado. Entretanto, a volatilidade do Índice Futuro pode ser estimada de diversas outras maneiras, como por exemplo, usando-se a volatilidade implícita das opções ou, calculando-se a volatilidade histórica.

Outro problema desse método é que ele acaba dando um peso maior para o ajuste dos dados

dos dias que foram negociados mais contratos.

Contudo, apesar das restrições da metodologia, ela é facilmente implementada. No Apêndice A, é possível verificar um código da mesma em R. O ajuste também pode ser feito no Excel ou no Matlab.

Os parâmetros estimados estão apresentados na Tabela 3.4 e os resultados encontrados estão sumarizados na Tabela 3.5.

Tabela 3.4: Ajuste 1 - Resultados Obtidos

<b>Parâmetros Ajustados</b>	
$\gamma$	0.0000
$\epsilon$	0.0000
$\eta$	-1.8520
Número de Dados	79
$R^2$	0.1157
<b>Estatísticas dos Erros</b>	
Média	9.9670
Mediana	-13.2932
desvio padrão	121.4543
Curtose	11.2528
Assimetria	1.7884
<b>Teste T Para O Erro Médio</b>	
t	0.7294
P-Valor	0.4679

Conforme podemos observar, o algoritmo de otimização acabou "zerando" dois dos três termos que estava ajustando. O termo  $\gamma$  corresponde ao impacto permanente das ordens. Já o termo  $\epsilon$  corresponde ao custo fixo do impacto temporário das ordens. Assim, utilizando-se a metodologia proposta, o único parâmetro é o  $\eta$ .

Observa-se ainda que apesar do coeficiente de determinação  $R^2$  ser bastante baixo, ao aplicarmos o Teste T (para verificar se a hipótese nula de que a média dos erros de estimação do custo por contrato é igual a zero) encontramos um p-valor bastante alto. Isso é uma evidência de que a parametrização encontrada nos fornece estimativas razoáveis para o valor esperado do custo de execução por contrato. O fato do coeficiente de determinação  $R^2$  ser baixo, indica que o custo é uma variável aleatória que possui uma variância bastante alta.

Analisando ainda os resultados encontrados, note que o erro médio foi inferior a 10. Lembrando que, de acordo com a Tabela 3.1 o Contrato de Índice Futuro possui como unidade de variação de preço 5.00. Dessa forma, o erro médio é inferior a 2 unidades de negociação!

O diagrama de dispersão está representado na Figura 3.1.

Assim, consideramos que os resultados desse primeiro ajuste foram satisfatórios.

Tabela 3.5: Valores Estimados no Primeiro Ajuste

Data	Quantidade	custo	E[custo]	Erro	Erro /Contrato	Data	Quantidade	custo	E[custo]	Erro	Erro /Contrato
03/01/2012	-430	0	23,150.60	- 23,150.60	- 53.84	28/03/2012	280	39800	10,001.06	29,798.94	106.42
04/01/2012	-35	2430	648.22	1,781.78	50.91	29/03/2012	265	-50925	9,167.64	- 60,092.64	- 226.76
06/01/2012	35	875	648.22	226.78	6.48	30/03/2012	-180	29305	4,444.92	24,860.08	138.11
09/01/2012	250	43675	8,334.22	35,340.78	141.36	02/04/2012	460	87525	26,299.09	61,225.91	133.10
11/01/2012	240	2000	7,778.60	- 5,778.60	- 24.08	03/04/2012	-120	6450	2,222.46	4,227.54	35.23
12/01/2012	-305	-26925	11,575.30	- 38,500.30	- 126.23	04/04/2012	120	9500	2,222.46	7,277.54	60.65
13/01/2012	155	-7230	3,055.88	- 10,285.88	- 66.36	05/04/2012	-70	-9905	1,296.43	- 11,201.43	- 160.02
16/01/2012	350	75150	15,742.41	59,407.59	169.74	09/04/2012	-25	-1675	463.01	- 2,138.01	- 85.52
17/01/2012	-330	-33625	13,890.36	- 47,515.36	- 143.99	10/04/2012	-185	11955	4,722.72	7,232.28	39.09
18/01/2012	-45	-250	833.42	- 1,083.42	- 24.08	11/04/2012	120	11600	2,222.46	9,377.54	78.15
19/01/2012	-365	-37225	17,131.45	- 54,356.45	- 148.92	12/04/2012	120	11325	2,222.46	9,102.54	75.85
20/01/2012	-30	-875	555.61	- 1,430.61	- 47.69	13/04/2012	-110	575	2,037.25	- 1,462.25	- 13.29
23/01/2012	-460	32005	26,299.09	5,705.91	12.40	16/04/2012	30	-1005	555.61	- 1,560.61	- 52.02
24/01/2012	-255	-4200	8,612.02	- 12,812.02	- 50.24	17/04/2012	60	-2605	1,111.23	- 3,716.23	- 61.94
26/01/2012	-445	-36500	24,539.64	- 61,039.64	- 137.17	19/04/2012	-50	425	926.02	- 501.02	- 10.02
27/01/2012	500	69550	31,484.82	38,065.18	76.13	20/04/2012	110	5200	2,037.25	3,162.75	28.75
31/01/2012	-595	26705	43,800.94	- 17,095.94	- 28.73	23/04/2012	105	-18755	1,944.65	- 20,699.65	- 197.14
01/02/2012	-5	0	92.60	- 92.60	- 18.52	24/04/2012	100	-10175	1,852.05	- 12,027.05	- 120.27
02/02/2012	-300	68030	11,112.29	56,917.71	189.73	25/04/2012	-35	175	648.22	- 473.22	- 13.52
06/02/2012	-105	1130	1,944.65	- 814.65	- 7.76	26/04/2012	245	28175	8,056.41	20,118.59	82.12
07/02/2012	5	0	92.60	- 92.60	- 18.52	27/04/2012	-85	10480	1,574.24	8,905.76	104.77
08/02/2012	-490	67130	30,188.39	36,941.61	75.39	30/04/2012	75	6700	1,389.04	5,310.96	70.81
09/02/2012	-5	0	92.60	- 92.60	- 18.52	02/05/2012	70	-4055	1,296.43	- 5,351.43	- 76.45
13/02/2012	265	13325	9,167.64	4,157.36	15.69	03/05/2012	-105	18005	1,944.65	16,060.35	152.96
15/02/2012	215	15375	6,389.57	8,985.43	41.79	04/05/2012	120	6325	2,222.46	4,102.54	34.19
16/02/2012	265	8340	9,167.64	- 827.64	- 3.12	09/05/2012	75	5400	1,389.04	4,010.96	53.48
17/02/2012	-345	-8050	15,279.40	- 23,329.40	- 67.62	10/05/2012	-100	-775	1,852.05	- 2,627.05	- 26.27
23/02/2012	85	23625	1,574.24	22,050.76	259.42	11/05/2012	70	5865	1,296.43	4,568.57	65.27
27/02/2012	100	150	1,852.05	- 1,702.05	- 17.02	14/05/2012	-40	-75	740.82	- 815.82	- 20.40
28/02/2012	120	2450	2,222.46	227.54	1.90	15/05/2012	120	-8630	2,222.46	- 10,852.46	- 90.44
29/02/2012	-30	2625	555.61	2,069.39	68.98	16/05/2012	20	13325	370.41	12,954.59	647.73
14/03/2012	-225	-8080	6,945.18	- 15,025.18	- 66.78	17/05/2012	50	6550	936.02	5,623.98	112.48
19/03/2012	60	175	1,111.23	- 936.23	- 15.60	18/05/2012	55	7200	1,018.63	6,181.37	112.39
20/03/2012	-155	41500	3,055.88	38,444.12	248.03	21/05/2012	-20	-50	370.41	- 420.41	- 21.02
21/03/2012	-30	-280	555.61	- 835.61	- 27.85	22/05/2012	-75	-2250	1,389.04	- 3,639.04	- 48.52
22/03/2012	225	-21555	6,945.18	- 28,500.18	- 126.67	23/05/2012	75	-2300	1,389.04	- 3,689.04	- 49.19
23/03/2012	280	35275	10,001.06	25,273.94	90.26	24/05/2012	-20	-75	370.41	- 445.41	- 22.27
26/03/2012	-195	-5850	5,278.34	- 11,128.34	- 57.07	25/05/2012	55	4855	1,018.63	3,836.37	69.75
						28/05/2012	-25	-400	463.01	- 863.01	- 34.52

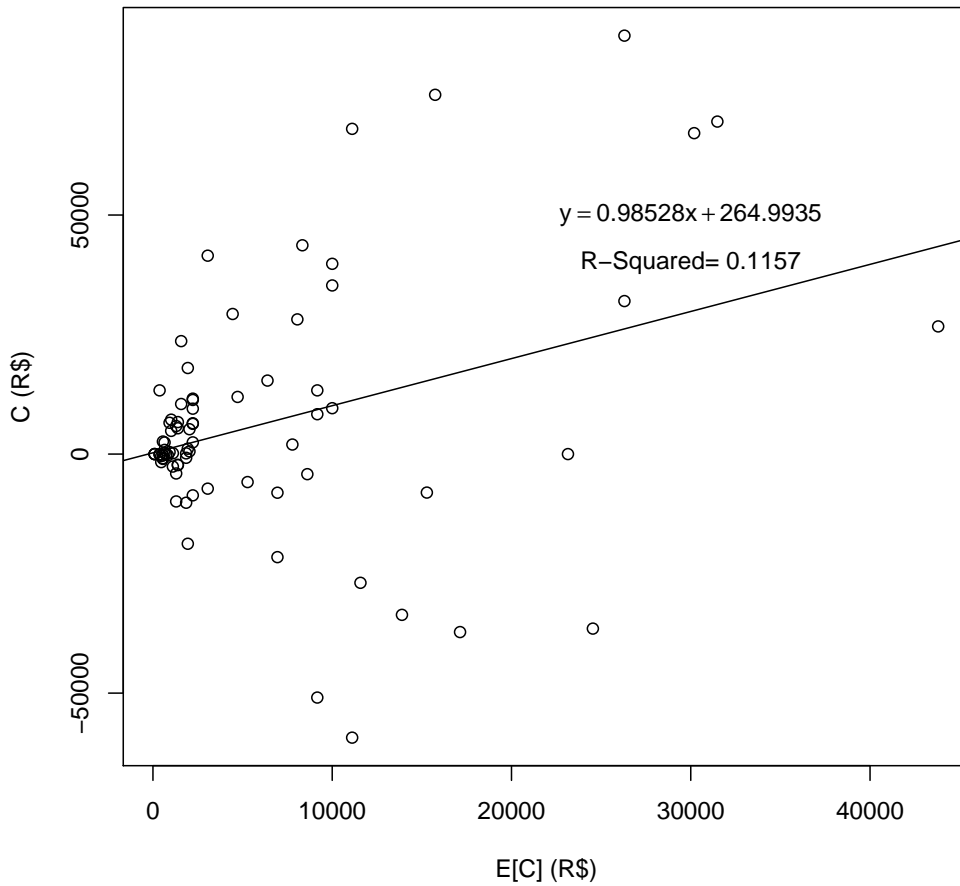


Figura 3.1: Diagrama de Dispersão do Custo Para o Ajuste 1

### 3.3.4 Segundo Ajuste

Na segunda metodologia de ajuste dos parâmetros, tentamos eliminar o problema de dar um peso muito alto às execuções de ordens grandes. Esse problema foi verificado na Subseção 3.3.3. Para tal, dividimos as diferenças entre os custos e seus respectivos valores esperados, pela quantidade de contratos que estava sendo liquidada. Assim, o problema resolvido nessa metodologia de ajuste foi

$$\min_{(\gamma, \epsilon, \eta)} F_{obj2} = \sum_{j=1}^{79} \left( \frac{C_j - \mathbb{E}[C_j]}{|\mathcal{X}_j|} \right)^2$$

$$s.a. \gamma \leq 0, \eta \leq 0, \epsilon \leq 0, \left( \frac{\gamma \tau}{2} - \eta \right) \geq 0$$

onde  $\mathbb{E}[C_j]$  é determinado pela Equação (2.4.6), cada  $C_j$  e  $\mathcal{X}_j$  são um dos custos e quantidades da Tabela 3.2.

Essa metodologia corrige apenas um dos problemas do primeiro método de ajuste, continu-

ando a ignorar a variância do custo de execução e, não calculando o parâmetro  $\sigma$ . Contudo, da mesma forma que o primeiro método de ajuste, ele é extremamente simples de ser implementado e um código em R da implementação encontra-se no Apêndice A.

Os parâmetros estimados estão apresentados na Tabela 3.6 e os resultados encontrados estão sumarizados na Tabela 3.7.

Tabela 3.6: Ajuste 2 - Resultados Obtidos

<b>Parâmetros Ajustados</b>	
$\gamma$	0.0000
$\epsilon$	-29.9101
$\eta$	-0.4846
Número de Dados	79
$R^2$	0.1016
<b>Estatísticas dos Erros</b>	
Média	0.0000
Mediana	-26.2560
desvio padrão	121.0610
Curtose	10.9604
Assimetria	1.7823
<b>Teste T Para O Erro Médio</b>	
t	0.0000
P-Valor	1.0000

Ao contrário da primeira metodologia de ajuste, o algoritmo de otimização dessa vez zerou apenas o termo  $\gamma$ , o qual corresponde ao impacto permanente da execução.

Novamente, embora o coeficiente de determinação  $R^2$  seja bastante baixo, ao aplicarmos o Teste T (para verificar se a hipótese nula de que a média dos erros de estimação do custo por contrato é igual a zero), o p-valor foi ainda mais alto, com uma estatística t de aproximadamente 0.0000. Como já foi discutido, essa é uma evidência bastante forte de que a estimação do valor esperado do custo de execução foi boa. De fato, a média dos erros foi de 0.0000, com um desvio padrão dos erros bem próximo do encontrado no primeiro ajuste.

O diagrama de dispersão do segundo ajuste está representado na Figura 3.2.

Assim, consideramos que o resultado desse ajuste foi ainda melhor que o resultado do Ajuste 1.



Tabela 3.7: Valores Estimados no Segundo Ajuste

Data	Quantidade	custo	E[custo]	Erro	Erro /Contrato	Data	Quantidade	custo	E[custo]	Erro	Erro /Contrato
03/01/2012	-430	0	18,918.72	-18,918.72	-43,99702774	28/03/2012	280	39800	10,991.62	28,808.38	102.8870785
04/01/2012	-35	2430	1216.461	1,213.54	34,67255211	29/03/2012	265	-50925	10,324.90	-61,249.90	-231.1317015
06/01/2012	35	875	1216.461	-341.4607	-9,756019318	30/03/2012	-180	29305	6,546.84	22,758.16	126.434238
09/01/2012	250	43675	9,658.18	34,016.82	136,067265	02/04/2012	460	87525	20,639.83	66,885.17	145.4025484
11/01/2012	240	2000	9,213.71	-7,213.71	-30,05710698	03/04/2012	-120	6450	4,170.72	2,279.28	18.99398068
12/01/2012	-305	-26925	12,151.27	-39,076.27	-128,1189252	04/04/2012	120	9500	4,170.72	5,329.28	44.41064735
13/01/2012	155	-7230	5,435.64	-12,665.64	-81,71381897	05/04/2012	-70	-9905	2,432.92	-12,337.92	-176.2560193
16/01/2012	350	75150	14,587.55	60,562.45	173,0355597	09/04/2012	-25	-1675	868.9005	-2,543.90	-101.7560193
17/01/2012	-330	-33625	13,504.76	-47,129.76	-142,817461	10/04/2012	-185	11955	6,769.08	5,185.92	28.03202054
18/01/2012	-45	-250	1564.021	-1,814.02	-40,31157487	11/04/2012	120	11600	4,170.72	7,429.28	61.91064735
19/01/2012	-365	-37225	15,399.65	-52,624.65	-144,177118	12/04/2012	120	11325	4,170.72	7,154.28	59.61898068
20/01/2012	-30	-875	1042.681	-1,917.68	-63,92268598	13/04/2012	-110	575	3,823.16	-3,248.16	-29.52874639
23/01/2012	-460	32005	20,639.83	11,365.17	24,70689618	16/04/2012	30	-1005	1042.681	-2,047.68	-68.25601932
24/01/2012	-255	-4200	9,880.42	-14,080.42	-55,21734433	17/04/2012	60	-2605	2,085.36	-4,690.36	-78.17268598
26/01/2012	-445	-36500	19,730.82	-56,230.82	-126,361384	19/04/2012	-50	425	1737.801	-1312.801	-26.25601932
27/01/2012	500	69550	23,193.08	46,356.92	92,7138335	20/04/2012	110	5200	3,823.16	1,376.84	12.51670796
31/01/2012	-595	26705	29,257.07	-2,552.07	-4,289184939	23/04/2012	105	-18755	3,649.38	-22,404.38	-213.37506669
01/02/2012	-5	0	173.7801	-173.7801	-34,75601932	24/04/2012	100	-10175	3,475.60	-13,650.60	-136.5060193
02/02/2012	-300	68030	11,880.57	56,149.43	187,1647527	25/04/2012	-35	175	1216.461	-1041.461	-29.75601932
06/02/2012	-105	1130	3,649.38	-2519.382	-23,9914156	26/04/2012	245	28175	9,435.94	18,739.06	76.48593993
07/02/2012	5	0	173.7801	-173.7801	-34,75601932	27/04/2012	-85	10480	2,954.26	7,525.74	88.53809833
08/02/2012	-490	67130	22,554.77	44,575.23	90,96985842	30/04/2012	75	6700	2,606.70	4,093.30	54.57731402
09/02/2012	-5	0	173.7801	-173.7801	-34,75601932	02/05/2012	70	-4055	2,432.92	-6,487.92	-92.68459075
10/02/2012	300	-59305	11,880.57	-71,185.57	-237,2852473	03/05/2012	-105	18005	3,649.38	14,355.62	136.7201712
13/02/2012	265	13325	10,324.90	3,000.10	11,32112872	04/05/2012	120	6325	4,170.72	2,154.28	17.95231402
15/02/2012	215	15375	8,102.51	7,272.49	33,82553275	09/05/2012	75	5400	2,606.70	2,793.30	37.24398068
16/02/2012	265	8340	10,324.90	-1984.901	-7,49019204	10/05/2012	-100	-775	3,475.60	-4,250.60	-42.50601932
17/02/2012	-345	-8050	14,316.86	-22,366.86	-64,83146696	11/05/2012	70	5865	2,432.92	3,432.08	49.02969497
23/02/2012	85	23625	2,954.26	20,670.74	243,1851572	14/05/2012	-40	-75	1390.241	-1,465.241	-36.63101932
27/02/2012	100	150	3,475.60	-3,325.60	-33,25601932	15/05/2012	120	-8630	4,170.72	-12,800.72	-106.672686
28/02/2012	120	2450	4,170.72	-1720.722	-14,33935265	16/05/2012	20	13325	695.1204	12,629.88	631.4939807
29/02/2012	-30	2625	1042.681	1,582.32	52,74398068	17/05/2012	50	6550	1737.801	4,812.20	96.24398068
14/03/2012	-225	-8080	8,546.99	-16,626.99	-73,89772687	18/05/2012	55	7200	1,911.58	5,288.42	96.15307159
19/03/2012	60	175	2,085.36	-1910.361	-31,83935265	21/05/2012	-20	-50	695.1204	-745.1204	-37.25601932
20/03/2012	-155	41500	5,435.64	36,064.36	232,6732778	22/05/2012	-75	-2250	2,606.70	-4,856.70	-64.75601932
21/03/2012	-30	-280	1042.681	-1322.681	-44,08935265	23/05/2012	75	-2300	2,606.70	-4,906.70	-65.42268598
22/03/2012	225	-21555	8,546.99	-30,101.99	-133,7866158	24/05/2012	-20	-75	695.1204	-770.1204	-38.50601932
23/03/2012	280	35275	10,991.62	24,283.38	86,72636421	25/05/2012	55	4855	1,911.58	2,943.42	53.51670796
26/03/2012	-195	-5850	7,213.55	-13,063.55	-66,99258608	28/05/2012	-25	-400	868.9005	-1268.9	-50.75601932
27/03/2012	-280	9600	10,991.62	-1391.618	-4,970064357						

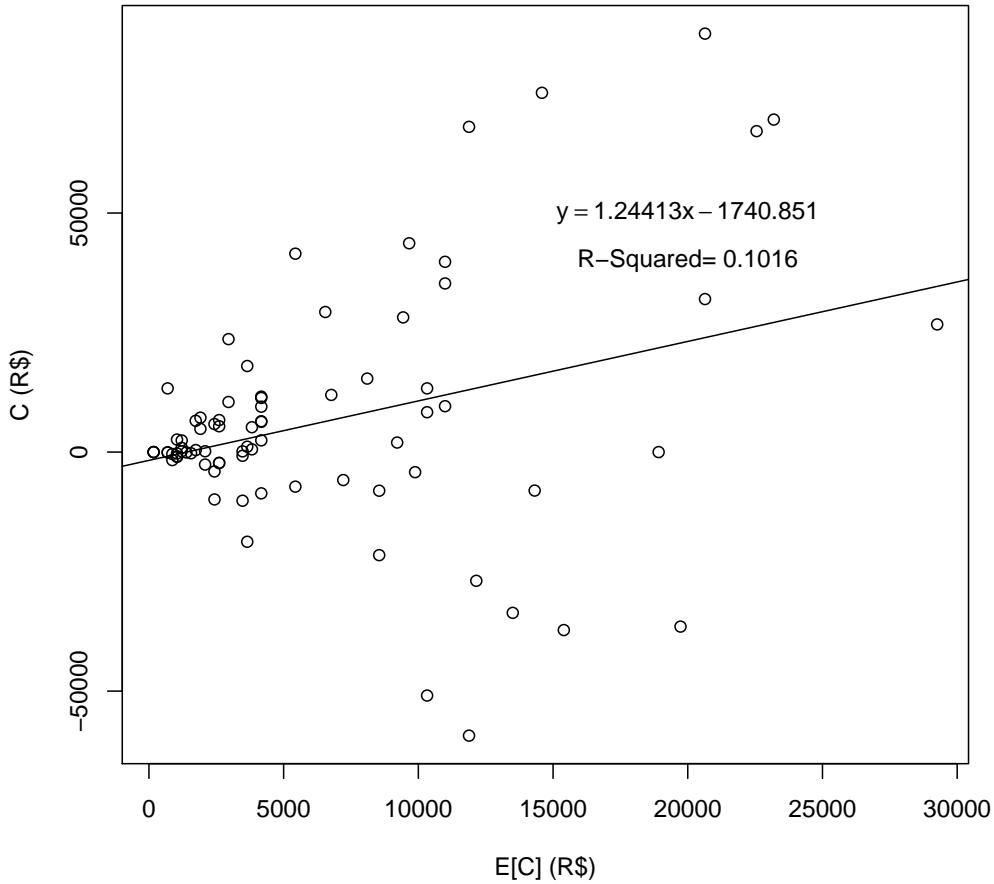


Figura 3.2: Diagrama de Dispersão do Custo Para o Ajuste 2

### 3.3.5 Terceiro Ajuste

Conforme percebemos, a estatística  $R^2$  dos ajustes feitos nas Subseções 3.3.3 e 3.3.4 foi bastante baixa. Assim, uma pergunta que surge naturalmente e a qual tenta-se responder nesta Subseção é: qual o maior coeficiente  $R^2$  que conseguiremos ao ajustar os parâmetros do modelo aos dados. Assim, a terceira metodologia de ajuste tentou maximizar o coeficiente  $R^2$ . Em outras palavras, o problema resolvido nessa metodologia de ajuste foi

$$\max_{(\gamma, \epsilon, \eta)} R^2 = 1 - \frac{\sum_{j=1}^{79} (C_j - \mathbb{E}[C_j])^2}{\sum_{j=1}^{79} (C_j - \sum_{k=1}^{79} \frac{C_k}{79})^2}$$

$$s.a. \gamma \leq 0, \eta \leq 0, \epsilon \leq 0, (\frac{\gamma^T}{2} - \eta) \geq 0$$

onde  $\mathbb{E}[C_j]$  é determinado pela Equação (2.4.6), cada  $C_j$  e  $\mathcal{X}_j$  são um dos custos e quantidades da Tabela 3.2.

Os parâmetros estimados estão apresentados na Tabela 3.8 e os resultados encontrados estão sumarizados na Tabela 3.9, além do gráfico de dispersão, o qual está apresentado na Figura 3.3

Tabela 3.8: Ajuste 3 - Resultados Obtidos

<b>Parâmetros Ajustados</b>	
$\gamma$	0.0000
$\epsilon$	0.0000
$\eta$	-26.9862
Número de Dados	79
$R^2$	0.1157
<b>Estatísticas dos Erros</b>	
Média	-356.5926
Mediana	-299.8620
desvio padrão	224.6837
Curtose	4.5081
Assimetria	-0.4794
<b>Teste T Para O Erro Médio</b>	
t	-14.1063
P-Valor	0.0000

Tabela 3.9: Valores Estimados no Terceiro Ajuste

Data	Quantidade	custo	Er[custo]	Erro	Erro /Contrato	Data	Quantidade	custo	Er[custo]	Erro	Erro /Contrato
03/01/2012	-430	0	337,327.52	-337,327.52	-784.4826154	28/03/2012	280	39800	145,725.49	-105,925.49	-378.3053237
04/01/2012	-35	2430	9445.170689	-7,015.17	-200.4334483	29/03/2012	265	-50925	133,581.70	-184,506.70	-696.2516972
06/01/2012	35	875	9445.170689	-8570.170689	-244.8620197	30/03/2012	-180	29305	64,766.88	-35,461.88	-197.0104707
09/01/2012	250	43675	121,437.91	-77,762.91	-311.0516354	02/04/2012	460	87525	383,204.07	-295,679.07	-642.7805825
11/01/2012	240	2000	113,342.05	-111,342.05	-463.9252011	03/04/2012	-120	6450	32,383.44	-25,933.44	-216.1120197
12/01/2012	-305	-26925	168,663.76	-195,588.76	-641.2746305	04/04/2012	120	9500	32,383.44	-22,883.44	-190.6953533
13/01/2012	155	-7230	44,527.23	-51,757.23	-333.9176339	05/04/2012	-70	-9905	18,890.34	-28,795.34	-411.3620197
16/01/2012	350	75150	229,382.72	-154,232.72	-440.664905	09/04/2012	-25	-1675	6746.550492	-8,421.55	-336.8620197
17/01/2012	-330	-33625	202,396.51	-236,021.51	-715.2167114	10/04/2012	-185	11955	68,814.82	-56,859.82	-307.3503515
18/01/2012	-45	-250	12143,79089	-12,393.79	-275.4175752	11/04/2012	120	11600	32,383.44	-20,783.44	-173.195353
19/01/2012	-365	-37225	249,622.37	-286,847.37	-785.8832006	12/04/2012	120	11325	32,383.44	-21,058.44	-175.4870197
20/01/2012	-30	-875	8095,860591	-8,970.86	-299.0286864	13/04/2012	-110	575	29,684.82	-29,109.82	-264.634747
23/01/2012	-460	32005	383,204.07	-351,199.07	-763.4762347	16/04/2012	30	-1005	8095,860591	-9,100.86	-303.3620197
24/01/2012	-255	-4200	125,485.84	-129,685.84	-508.5719183	17/04/2012	60	-2605	16,191.72	-18,796.72	-313.2786864
26/01/2012	-445	-36500	357,567.18	-394,067.18	-885.5442159	19/04/2012	-50	425	13493,10098	-13068.10098	-261.3620197
27/01/2012	500	69550	458,765.43	-389,215.43	-778.430867	20/04/2012	110	5200	29,684.82	-24,484.82	-222.5892924
31/01/2012	-595	26705	638,223.68	-611,518.68	-1027,762482	23/04/2012	105	-18755	28,335.51	-47,090.51	-448.4810673
01/02/2012	-5	0	1349,310098	-1349,310098	-269,8620197	24/04/2012	100	-10175	26,986.20	-37,161.20	-371.6120197
02/02/2012	-300	68030	161,917.21	-93,887.21	-312,9573727	25/04/2012	-35	175	9445,170689	-9270,170689	-264,8620197
06/02/2012	-105	1130	28,335.51	-27205,51207	-259,1001149	26/04/2012	245	28175	117,389.98	-89,214.98	-364,1427697
07/02/2012	5	0	1349,310098	-1349,310098	-269,8620197	27/04/2012	-85	10480	22,938.27	-12,458.27	-146,567902
08/02/2012	-490	67130	439,875.09	-372,745.09	-760,7042696	30/04/2012	75	6700	20,239.65	-13,539.65	-180,5286864
09/02/2012	-5	0	1349,310098	-1349,310098	-269,8620197	02/05/2012	70	-4055	18,890.34	-22,945.34	-327,7905911
10/02/2012	300	-59305	161,917.21	-221,222.21	-737,4073727	03/05/2012	-105	18005	28,335.51	-10,330.51	-98,38582922
13/02/2012	265	13325	133,581.70	-120,256.70	-453,798867	04/05/2012	120	6325	32,383.44	-26,058.44	-217,1536864
15/02/2012	215	15375	93,102.40	-77,727.40	-361,5227758	09/05/2012	75	5400	20,239.65	-14,839.65	-197,8620197
16/02/2012	265	8340	133,581.70	-125,241,6997	-472,6101877	10/05/2012	-100	-775	26,986.20	-27,761.20	-277,6120197
17/02/2012	-345	-8050	222,636.17	-230,686.17	-668,6555543	11/05/2012	70	5865	18,890.34	-13,025.34	-186,0763054
23/02/2012	85	23625	22,938.27	686.73	8,079156778	14/05/2012	-40	-75	10794,48079	-10869,48079	-271,7370197
27/02/2012	100	150	26,986.20	-26,836.20	-268,3620197	15/05/2012	120	-8630	32,383.44	-41,013.44	-341,7786864
28/02/2012	120	2450	32,383.44	-299,33,44236	-249,445353	16/05/2012	20	13325	5397,240394	7,927.76	396,3879803
29/02/2012	-30	2625	8095,860591	-5,470.86	-182,3620197	17/05/2012	50	6550	13493,10098	-6,943.10	-138,8620197
14/03/2012	-225	-8080	101,198.26	-109,278.26	-485,6811439	18/05/2012	55	7200	14,842.41	-7,642.41	-138,9529288
19/03/2012	60	175	16,191.72	-16016,72118	-266,945353	21/05/2012	-20	-50	5397,240394	-5447,240394	-272,3620197
20/03/2012	-155	41500	44,527.23	-3,027.23	-19,53053709	22/05/2012	-75	-2250	20,239.65	-22,489.65	-299,8620197
21/03/2012	-30	-280	8095,860591	-8375,860591	-279,195353	23/05/2012	75	-2300	20,239.65	-22,539.65	-300,5286864
22/03/2012	225	-21555	101,198.26	-110,450.49	-545,3700328	24/05/2012	-20	-75	5397,240394	-5472,240394	-273,6120197
23/03/2012	280	35275	145,725.49	-122,753.26	-394,466038	25/05/2012	55	4855	14,842.41	-9,987.41	-181,5892924
26/03/2012	-195	-5850	76,910.68	-82,760.68	-424,4137211	28/05/2012	-25	-400	6746,550492	-7146,550492	-285,8620197
27/03/2012	-280	9600	145,725.49	-136125,4906	-486,1624665						

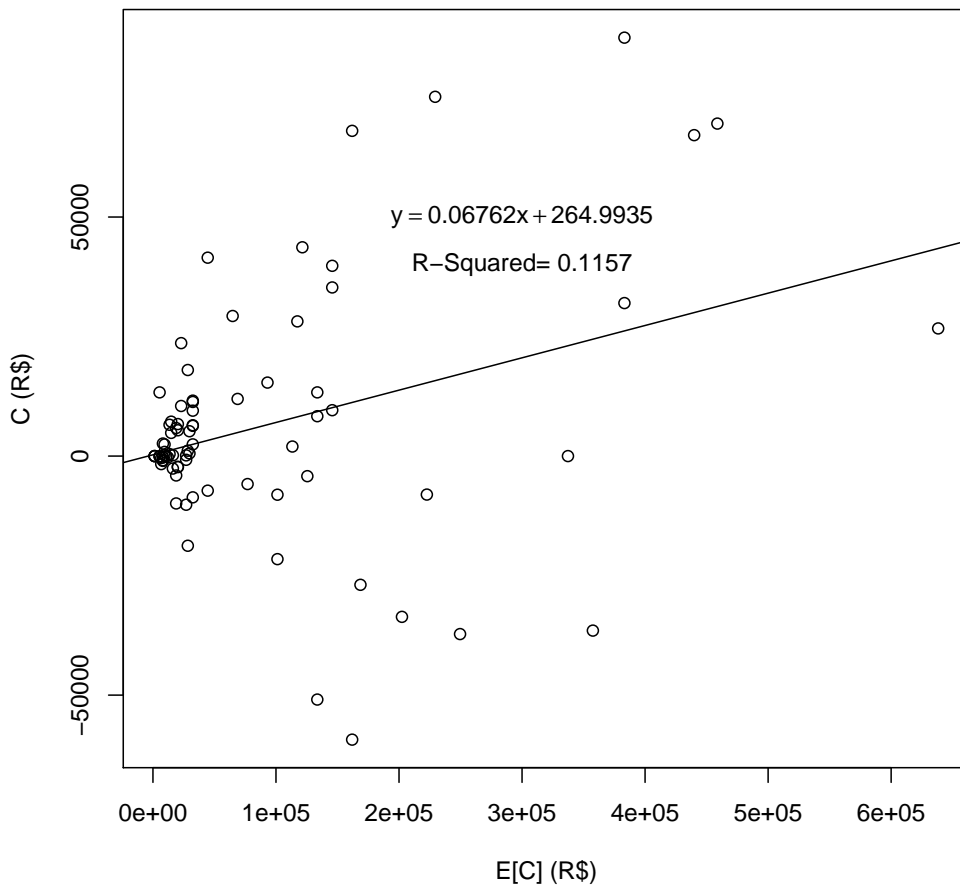


Figura 3.3: Diagrama de Dispersão do Custo Para o Ajuste 3

Ora, esse resultado é bastante revelador, uma vez que nos mostra que o coeficiente  $R^2$  na verdade não pode ser muito melhorado em relação aos valores encontrados nas metodologias anteriores. De fato, o valor encontrado para o  $R^2$  desse terceiro ajuste é muito próximo do valor encontrado no Ajuste 1.

Além disso, com os parâmetros estimados nesse terceiro ajuste, verificamos que podemos rejeitar que a média dos erros médios por contrato seja igual zero.

Assim, consideramos que o conjunto de parâmetros encontrados nesse terceiro ajuste não são razoáveis para prevermos o valor esperado do custo. Falta ainda fazermos o ajuste de forma que possamos prever a variância do custo.

### 3.3.6 Variância do Custo e Eventos Extremos

Nas Subseções 3.3.3, 3.3.4 e 3.3.5 utilizamos 3 metodologias para fazer o ajuste dos parâmetros  $\eta, \gamma$  e  $\epsilon$  do modelo. Esses parâmetros são aqueles que determinam o valor esperado do custo, conforme a Equação (2.4.6). Entretanto o modelo prevê um quarto parâmetro,  $\sigma$ , o

qual, segundo a Equação (2.3.7), determinará a variância desse custo de execução. Esse  $\sigma$  é interpretado como a volatilidade do ativo negociado, medida em reais.

Uma das muitas medidas de volatilidade utilizadas no mercado é a volatilidade histórica. Normalmente essa volatilidade é expressa em termos percentuais anualizados. Essa volatilidade histórica nada mais é do que o desvio padrão dos log-retornos diários do Índice Bovespa, multiplicados por  $\sqrt{252}$ , para anualizar os dados.

A Figura 3.4 contém um gráfico diário do Índice Bovespa entre outubro de 2007 e janeiro de 2013, além da volatilidade histórica anualizada, calculada em janelas de 30 dias. Essa Figura foi retirada do software AE Broadcast.



Figura 3.4: Gráfico do Índice Bovespa com Volatilidade Histórica

Observe que nesse período, do final de 2007 até o início de 2013, a volatilidade histórica do Índice Bovespa oscilou entre 12.10% e 105.67%, sendo mais usual ficar próxima de 20%.

Conforme foi discutido na Subseção 3.3.4, os parâmetros encontrados no segundo ajuste parecem ser bastante razoáveis para se estimar o valor esperado do custo. Usando esse conjunto de parâmetros e variando o parâmetro  $\sigma$  de 10% até 105% do preço de abertura do Índice Futuro em cada dia, calculamos a quantidade de dados cujo módulo do z-score é superior a 2, 3, 4 e 5. Os resultados desse experimento estão apresentados na Tabela 3.10. Lembrando que o z-score de uma variável aleatória  $x$  é calculado como

$$z = \frac{x - \mathbb{E}[x]}{\sqrt{\text{Var}[x]}}$$

Obviamente, os dados cujas posições iniciais eram de apenas 5 contratos não poderão ser utilizados na determinação do parâmetro  $\sigma$ , já que pelo modelo, a variância do custo seria zero. Assim, o total de dados utilizados nesse experimento foi 76.

Tabela 3.10: Z-Score e Contagem de Dados Extremos

Vol	10%	25%	40%	55%	70%	85%	100%
03/01/2012	-1.141	-0.457	-0.285	-0.208	-0.163	-0.134	-0.114
04/01/2012	1.965	0.786	0.491	0.357	0.281	0.231	0.196
06/01/2012	-0.557	-0.223	-0.139	-0.101	-0.080	-0.065	-0.056
09/01/2012	3.761	1.504	0.940	0.684	0.537	0.442	0.376
11/01/2012	-0.834	-0.334	-0.209	-0.152	-0.119	-0.098	-0.083
12/01/2012	-3.197	-1.279	-0.799	-0.581	-0.457	-0.376	-0.320
13/01/2012	-2.088	-0.835	-0.522	-0.380	-0.298	-0.246	-0.209
16/01/2012	4.727	1.891	1.182	0.859	0.675	0.556	0.473
17/01/2012	-3.761	-1.504	-0.940	-0.684	-0.537	-0.442	-0.376
18/01/2012	-1.914	-0.766	-0.479	-0.348	-0.273	-0.225	-0.191
19/01/2012	-3.765	-1.506	-0.941	-0.685	-0.538	-0.443	-0.376
20/01/2012	-3.844	-1.538	-0.961	-0.699	-0.549	-0.452	-0.384
23/01/2012	0.599	0.240	0.150	0.109	0.086	0.071	0.060
24/01/2012	-1.437	-0.575	-0.359	-0.261	-0.205	-0.169	-0.144
26/01/2012	-2.987	-1.195	-0.747	-0.543	-0.427	-0.351	-0.299
27/01/2012	2.319	0.928	0.580	0.422	0.331	0.273	0.232
31/01/2012	-0.102	-0.041	-0.025	-0.018	-0.015	-0.012	-0.010
02/02/2012	4.308	1.723	1.077	0.783	0.615	0.507	0.431
06/02/2012	-0.666	-0.266	-0.166	-0.121	-0.095	-0.078	-0.067
08/02/2012	2.168	0.867	0.542	0.394	0.310	0.255	0.217
10/02/2012	-5.458	-2.183	-1.364	-0.992	-0.780	-0.642	-0.546
13/02/2012	0.278	0.111	0.070	0.051	0.040	0.033	0.028
15/02/2012	0.887	0.355	0.222	0.161	0.127	0.104	0.089
16/02/2012	-0.182	-0.073	-0.045	-0.033	-0.026	-0.021	-0.018
17/02/2012	-1.573	-0.629	-0.393	-0.286	-0.225	-0.185	-0.157
23/02/2012	7.366	2.946	1.841	1.339	1.052	0.867	0.737
27/02/2012	-0.927	-0.371	-0.232	-0.169	-0.132	-0.109	-0.093
28/02/2012	-0.362	-0.145	-0.091	-0.066	-0.052	-0.043	-0.036
29/02/2012	2.935	1.174	0.734	0.534	0.419	0.345	0.293
14/03/2012	-1.831	-0.732	-0.458	-0.333	-0.262	-0.215	-0.183
19/03/2012	-1.152	-0.461	-0.288	-0.209	-0.165	-0.136	-0.115
20/03/2012	5.304	2.122	1.326	0.964	0.758	0.624	0.530
21/03/2012	-2.420	-0.968	-0.605	-0.440	-0.346	-0.285	-0.242
22/03/2012	-3.424	-1.370	-0.856	-0.623	-0.489	-0.403	-0.342

*Continua na Próxima Página...*

Tabela 3.10: Z-Score e Contagem de Dados Extremos

Vol	10%	25%	40%	55%	70%	85%	100%
23/03/2012	2.035	0.814	0.509	0.370	0.291	0.239	0.204
26/03/2012	-1.749	-0.700	-0.437	-0.318	-0.250	-0.206	-0.175
27/03/2012	-0.115	-0.046	-0.029	-0.021	-0.016	-0.014	-0.011
28/03/2012	2.410	0.964	0.603	0.438	0.344	0.284	0.241
29/03/2012	-5.641	-2.256	-1.410	-1.026	-0.806	-0.664	-0.564
30/03/2012	3.276	1.310	0.819	0.596	0.468	0.385	0.328
02/04/2012	3.427	1.371	0.857	0.623	0.490	0.403	0.343
03/04/2012	0.488	0.195	0.122	0.089	0.070	0.057	0.049
04/04/2012	1.167	0.467	0.292	0.212	0.167	0.137	0.117
05/04/2012	-6.249	-2.500	-1.562	-1.136	-0.893	-0.735	-0.625
09/04/2012	-6.784	-2.713	-1.696	-1.233	-0.969	-0.798	-0.678
10/04/2012	0.767	0.307	0.192	0.139	0.110	0.090	0.077
11/04/2012	1.670	0.668	0.418	0.304	0.239	0.197	0.167
12/04/2012	1.619	0.647	0.405	0.294	0.231	0.190	0.162
13/04/2012	-0.828	-0.331	-0.207	-0.151	-0.118	-0.097	-0.083
16/04/2012	-4.091	-1.637	-1.023	-0.744	-0.584	-0.481	-0.409
17/04/2012	-3.077	-1.231	-0.769	-0.560	-0.440	-0.362	-0.308
19/04/2012	-1.118	-0.447	-0.280	-0.203	-0.160	-0.132	-0.112
20/04/2012	0.345	0.138	0.086	0.063	0.049	0.041	0.035
23/04/2012	-6.157	-2.463	-1.539	-1.119	-0.880	-0.724	-0.616
24/04/2012	-4.044	-1.618	-1.011	-0.735	-0.578	-0.476	-0.404
25/04/2012	-1.591	-0.636	-0.398	-0.289	-0.227	-0.187	-0.159
26/04/2012	2.033	0.813	0.508	0.370	0.290	0.239	0.203
27/04/2012	2.848	1.139	0.712	0.518	0.407	0.335	0.285
30/04/2012	1.907	0.763	0.477	0.347	0.272	0.224	0.191
02/05/2012	-3.351	-1.340	-0.838	-0.609	-0.479	-0.394	-0.335
03/05/2012	3.905	1.562	0.976	0.710	0.558	0.459	0.390
04/05/2012	0.483	0.193	0.121	0.088	0.069	0.057	0.048
09/05/2012	1.342	0.537	0.335	0.244	0.192	0.158	0.134
10/05/2012	-1.299	-0.520	-0.325	-0.236	-0.186	-0.153	-0.130
11/05/2012	1.852	0.741	0.463	0.337	0.265	0.218	0.185
14/05/2012	-1.926	-0.771	-0.482	-0.350	-0.275	-0.227	-0.193
15/05/2012	-3.079	-1.232	-0.770	-0.560	-0.440	-0.362	-0.308
16/05/2012	54.396	21.759	13.599	9.890	7.771	6.400	5.440

*Continua na Próxima Página...*



Tabela 3.10: Z-Score e Contagem de Dados Extremos

Vol	10%	25%	40%	55%	70%	85%	100%
<b>17/05/2012</b>	4.700	1.880	1.175	0.855	0.671	0.553	0.470
<b>18/05/2012</b>	4.541	1.817	1.135	0.826	0.649	0.534	0.454
<b>21/05/2012</b>	-3.326	-1.330	-0.831	-0.605	-0.475	-0.391	-0.333
<b>22/05/2012</b>	-2.465	-0.986	-0.616	-0.448	-0.352	-0.290	-0.247
<b>23/05/2012</b>	-2.591	-1.036	-0.648	-0.471	-0.370	-0.305	-0.259
<b>24/05/2012</b>	-3.450	-1.380	-0.862	-0.627	-0.493	-0.406	-0.345
<b>25/05/2012</b>	2.547	1.019	0.637	0.463	0.364	0.300	0.255
<b>28/05/2012</b>	-3.872	-1.549	-0.968	-0.704	-0.553	-0.456	-0.387
<b><math>Z \geq 2</math></b>	42	8	1	1	1	1	1
<b><math>Z \geq 3</math></b>	29	1	1	1	1	1	1
<b><math>Z \geq 4</math></b>	14	1	1	1	1	1	1
<b><math>Z \geq 5</math></b>	8	1	1	1	1	1	1

Conforme podemos perceber nos resultados apresentados na Tabela 3.10, um dos dados (o dado do dia 16/05/2012) utilizados aparentemente é um valor-extremo, pois, mesmo utilizando uma volatilidade de 100%, seu z-score tem modulo superior a 5. Se o custo seguisse uma distribuição normal, a probabilidade de pelo menos 1 dos 76 dados utilizados ter z-score com modulo superior a 5 é de aproximadamente 0.00436%! Dessa forma, consideramos desnecessário tentar ajustar uma distribuição normal para o custo de execução.

Nas três Subseções seguintes, tentaremos fazer um ajuste utilizando distribuições t-Student, pois as mesmas possuem caudas mais "pesadas" que distribuições normais, sendo que na última, iremos descartar o dado do dia 16/05/2012.

### 3.3.7 Quarto Ajuste

Na Subseção anterior, discutiu-se sobre o fato de que aparentemente muitos dos custos dos dados seriam "valores extremos" se considerássemos uma distribuição normal para o custo de execução. Dentre os ajustes anteriores, aquele que pareceu prever melhor o valor esperado do custo foi o Ajuste 2. O próximo ajuste terá como função objetivo a log-verossimilhança dos z-scores, considerando uma distribuição t-Student, mantendo os coeficientes estimados no Ajuste 2. Serão portanto estimados dois parâmetros: a volatilidade do Índice Futuro e o número de graus de liberdade da distribuição t-Student.

Os parâmetros estimados estão apresentados na Tabela 3.11 e os resultados encontrados estão sumarizados na Tabela 3.12. Além disso, realizou-se um teste de Kolmogorov-Smirnov [Mas51], para verificar-se a hipótese nula de que os z-scores dos dados seguem a distribuição estimada. O código do ajuste está no apêndice A.

Conforme observado na Tabela 3.11, o p-valor do teste Kolmogorov-Smirnov foi superior a 27%. Dessa forma, não podemos rejeitar a hipótese de que os z-scores calculados utilizando-se uma volatilidade de 40% e demais parâmetros de acordo com o segundo ajuste, seguem uma distribuição t-Student com 4.5121 graus de liberdade.

O resultado foi bastante satisfatório, uma vez que conseguimos determinar um conjunto de parâmetros para o qual os dados utilizados apresentam evidências estatísticas de seguirem o modelo proposto.

Tabela 3.11: Ajuste 4 - Resultados Obtidos

<b>Parâmetros Ajustados</b>	
$\gamma$	0.0000
$\epsilon$	-29.9101
$\eta$	-0.4846
Graus de Liberdade	4.5121
Volatilidade	40%
Número de Dados	76
<b>Teste Kolmogorov-Smirnov (GoF)</b>	
Estatística	0.1160
P-Valor	0.2778

Tabela 3.12: Ajuste 4 - Valores Estimados para o Z-Score

Data	Quantidade	custo	$\sigma$	Z-Score	Data	Quantidade	custo	$\sigma$	Z-Score
03/01/2012	-430	18918.72	72.42	-0.29	29/03/2012	265	10324.90	80.16	-1.41
04/01/2012	-35	1216.46	73.25	0.49	30/03/2012	-180	6546.84	80.90	0.82
06/01/2012	35	1216.46	72.74	-0.14	02/04/2012	460	20639.83	79.48	0.86
09/01/2012	250	9658.18	72.79	0.94	03/04/2012	-120	4170.72	80.34	0.12
11/01/2012	240	9213.71	73.80	-0.21	04/04/2012	120	4170.72	78.55	0.29
12/01/2012	-305	12151.27	74.75	-0.80	05/04/2012	-70	2432.92	78.05	-1.56
13/01/2012	155	5435.64	74.19	-0.52	09/04/2012	-25	868.90	77.46	-1.70
16/01/2012	350	14587.55	73.17	1.18	10/04/2012	-185	6769.08	77.33	0.19
17/01/2012	-330	13504.76	74.79	-0.94	11/04/2012	120	4170.72	76.52	0.42
18/01/2012	-45	1564.02	75.06	-0.48	12/04/2012	120	4170.72	76.05	0.40
19/01/2012	-365	15399.65	76.46	-0.94	13/04/2012	-110	3823.16	77.09	-0.21
20/01/2012	-30	1042.68	76.11	-0.96	16/04/2012	30	1042.68	76.35	-1.02
23/01/2012	-460	20639.83	77.23	0.15	17/04/2012	60	2085.36	76.66	-0.77
24/01/2012	-255	9880.42	76.59	-0.36	19/04/2012	-50	1737.80	78.69	-0.28
26/01/2012	-445	19730.82	78.07	-0.75	20/04/2012	110	3823.16	78.38	0.09
27/01/2012	500	23193.08	77.85	0.58	23/04/2012	105	3649.38	76.84	-1.54
31/01/2012	-595	29257.07	77.82	-0.03	24/04/2012	100	3475.60	76.84	-1.01
02/02/2012	-300	11880.57	79.71	1.08	25/04/2012	-35	1216.46	77.66	-0.40
06/02/2012	-105	3649.38	79.89	-0.17	26/04/2012	245	9435.94	76.37	0.51
08/02/2012	-490	22554.77	81.38	0.54	27/04/2012	-85	2954.26	77.30	0.71
10/02/2012	300	11880.57	79.77	-1.36	30/04/2012	75	2606.70	76.24	0.48
13/02/2012	265	10324.90	79.67	0.07	02/05/2012	70	2432.92	76.54	-0.84
15/02/2012	215	8102.51	80.90	0.22	03/05/2012	-105	3649.38	77.64	0.98
16/02/2012	265	10324.90	80.58	-0.05	04/05/2012	120	4170.72	76.72	0.12
17/02/2012	-345	14316.86	82.22	-0.39	09/05/2012	75	2606.70	73.92	0.34
23/02/2012	85	2954.26	82.09	1.84	10/05/2012	-100	3475.60	74.50	-0.32
27/02/2012	100	3475.60	81.66	-0.23	11/05/2012	70	2432.92	73.28	0.46
28/02/2012	120	4170.72	81.74	-0.09	14/05/2012	-40	1390.24	72.73	-0.48
29/02/2012	-30	1042.68	82.25	0.73	15/05/2012	120	4170.72	71.53	-0.77
14/03/2012	-225	8546.99	84.59	-0.46	16/05/2012	20	695.12	70.21	13.60
19/03/2012	60	2085.36	83.42	-0.29	17/05/2012	50	1737.80	68.62	1.17
20/03/2012	-155	5435.64	83.16	1.33	18/05/2012	55	1911.58	67.14	1.14
21/03/2012	-30	1042.68	83.38	-0.61	21/05/2012	-20	695.12	67.75	-0.83
22/03/2012	225	8546.99	81.89	-0.86	22/05/2012	-75	2606.70	69.96	-0.62
23/03/2012	280	10991.62	81.07	0.51	23/05/2012	75	2606.70	67.25	-0.65
26/03/2012	-195	7213.55	81.76	-0.44	24/05/2012	-20	695.12	67.50	-0.86
27/03/2012	-280	10991.62	82.25	-0.03	25/05/2012	55	1911.58	66.64	0.64
28/03/2012	280	10991.62	81.21	0.60	28/05/2012	-25	868.90	67.68	-0.97

### 3.3.8 Quinto Ajuste

No ajuste anterior, feito na Subseção 3.3.7, mantivemos os parâmetros estimados no segundo ajuste (Subseção 3.3.4), estimando apenas a volatilidade e o número de graus de liberdade da distribuição, utilizando-se um critério de máxima verossimilhança. Conforme já discutido, os resultados foram bastante satisfatórios. Contudo, utilizando-se ainda um critério de máxima verossimilhança, resolveu-se estimar todos os parâmetros do modelo simultaneamente.

Os parâmetros estimados estão apresentados na Tabela 3.13 e os resultados encontrados estão sumarizados na Tabela 3.14. O código do quinto ajuste também está no apêndice A.

Conforme observado na Tabela 3.13, o p-valor do teste Kolmogorov-Smirnov foi ligeiramente inferior ao encontrado no quarto ajuste. Ainda assim, o valor foi bastante alto, sendo superior a 26%. Dessa forma, não podemos rejeitar a hipótese de que os z-scores calculados para os parâmetros estimados, seguem uma distribuição t-Student com 4.3515 graus de liberdade.

Analisando-se os parâmetros estimados nesse quinto ajuste, verifica-se que o termo  $\eta$  foi zerado, enquanto os termos  $\gamma$  e  $\epsilon$  não foram. Isso significa que para esse ajuste o impacto permanente das ordens não pode ser desprezado e, o impacto temporário é devido apenas aos custos fixos. Comparando-se com o Ajuste 4, o qual havia zerado o termo referente ao impacto permanente, percebe-se que não ouve nenhuma vantagem nesse quinto ajuste em relação ao ajuste anterior. Dessa forma, como o Ajuste 4 nos permite ignorar o impacto permanente das ordens sem nenhum prejuízo, entendemos que o mesmo foi melhor que o quinto ajuste. Mesmo assim, o resultado do quinto ajuste foi satisfatório.

Tabela 3.13: Ajuste 5 - Resultados Obtidos

<b>Parâmetros Ajustados</b>	
$\gamma$	-0.2413
$\epsilon$	-6.3724
$\eta$	0.0000
Graus de Liberdade	4.3515
Volatilidade	40%
Número de Dados	76
<b>Teste Kolmogorov-Smirnov (GoF)</b>	
Estatística	0.1170
P-Valor	0.2688

Tabela 3.14: Ajuste 5 - Valores Estimados Para o Z-Score

Data	Quantidade	custo	$\sigma$	Z-Score	Data	Quantidade	custo	$\sigma$	Z-Score
03/01/2012	-430	24297.99	72.42	-0.37	29/03/2012	265	9864.14	80.16	-1.40
04/01/2012	-35	349.74	73.25	0.84	30/03/2012	-180	4911.96	80.90	0.88
06/01/2012	35	349.74	72.74	0.21	02/04/2012	460	27608.50	79.48	0.77
09/01/2012	250	8863.52	72.79	0.96	03/04/2012	-120	2429.95	80.34	0.22
11/01/2012	240	8226.61	73.80	-0.18	04/04/2012	120	2429.95	78.55	0.39
12/01/2012	-305	12791.89	74.75	-0.81	05/04/2012	-70	995.12	78.05	-1.38
13/01/2012	155	3787.29	74.19	-0.45	09/04/2012	-25	219.65	77.46	-1.26
16/01/2012	350	16499.67	73.17	1.14	10/04/2012	-185	5155.00	77.33	0.25
17/01/2012	-330	14791.44	74.79	-0.97	11/04/2012	120	2429.95	76.52	0.52
18/01/2012	-45	503.97	75.06	-0.20	12/04/2012	120	2429.95	76.05	0.50
19/01/2012	-365	17844.20	76.46	-0.98	13/04/2012	-110	2094.71	77.09	-0.10
20/01/2012	-30	281.67	76.11	-0.58	16/04/2012	30	281.67	76.35	-0.64
23/01/2012	-460	27608.50	77.23	0.06	17/04/2012	60	780.56	76.66	-0.56
24/01/2012	-255	9191.03	76.59	-0.34	19/04/2012	-50	590.13	78.69	-0.04
26/01/2012	-445	25932.13	78.07	-0.83	20/04/2012	110	2094.71	78.38	0.19
27/01/2012	500	32328.22	77.85	0.47	23/04/2012	105	1936.15	76.84	-1.42
31/01/2012	-595	45085.16	77.82	-0.18	24/04/2012	100	1783.61	76.84	-0.89
02/02/2012	-300	12410.09	79.71	1.07	25/04/2012	-35	349.74	77.66	-0.07
06/02/2012	-105	1936.15	79.89	-0.05	26/04/2012	245	8542.05	76.37	0.53
08/02/2012	-490	31112.09	81.38	0.44	27/04/2012	-85	1362.22	77.30	0.86
10/02/2012	300	12410.09	79.77	-1.37	30/04/2012	75	1111.45	76.24	0.65
13/02/2012	265	9864.14	79.67	0.08	02/05/2012	70	995.12	76.54	-0.65
15/02/2012	215	6739.92	80.90	0.26	03/05/2012	-105	1936.15	77.64	1.09
16/02/2012	265	9864.14	80.58	-0.03	04/05/2012	120	2429.95	76.72	0.22
17/02/2012	-345	16063.56	82.22	-0.42	09/05/2012	75	1111.45	73.92	0.52
23/02/2012	85	1362.22	82.09	1.98	10/05/2012	-100	1783.61	74.50	-0.20
27/02/2012	100	1783.61	81.66	-0.11	11/05/2012	70	995.12	73.28	0.66
28/02/2012	120	2429.95	81.74	0.00	14/05/2012	-40	423.83	72.73	-0.16
29/02/2012	-30	281.67	82.25	1.09	15/05/2012	120	2429.95	71.53	-0.67
14/03/2012	-225	7316.49	84.59	-0.42	16/05/2012	20	163.65	70.21	14.17
19/03/2012	60	780.56	83.42	-0.09	17/05/2012	50	590.13	68.62	1.46
20/03/2012	-155	3787.29	83.16	1.39	18/05/2012	55	682.33	67.14	1.40
21/03/2012	-30	281.67	83.38	-0.26	21/05/2012	-20	163.65	67.75	-0.24
22/03/2012	225	7316.49	81.89	-0.82	22/05/2012	-75	1111.45	69.96	-0.43
23/03/2012	280	10919.06	81.07	0.51	23/05/2012	75	1111.45	67.25	-0.45
26/03/2012	-195	5659.17	81.76	-0.39	24/05/2012	-20	163.65	67.50	-0.27
27/03/2012	-280	10919.06	82.25	-0.03	25/05/2012	55	682.33	66.64	0.90
28/03/2012	280	10919.06	81.21	0.60	28/05/2012	-25	219.65	67.68	-0.47

### 3.3.9 Sexto Ajuste

Apesar de tanto o quarto como o quinto ajuste terem sido considerados satisfatórios (uma vez que ao aplicarmos o teste de Kolmogorov-Smirnov não descartamos a hipótese nula), em ambos o dado do dia 16/05/2012 parece pouco provável de acontecer sob hipótese dos z-scores seguirem as distribuições propostas. De fato, para a distribuição do Ajuste 4, a probabilidade de pelo menos 1 dos 76 dados ter z-score maior ou igual a 13.60 é de aproximadamente 0.296%. Assim no sexto ajuste, estimou-se todos os parâmetros utilizando-se um critério de máxima verossimilhança para os z-score, excluindo-se o dado do dia 16/05/2012.

Os parâmetros estimados estão apresentados na Tabela 3.15 e os resultados encontrados estão sumarizados na Tabela 3.16. O código do sexto ajuste também está no apêndice A.

Conforme observado na Tabela 3.15, o p-valor do teste Kolmogorov-Smirnov foi superior aos encontrados nos últimos ajustes. Analisando-se os parâmetros estimados nesse quinto ajuste, verifica-se que o termo  $\eta$  foi zerado, enquanto os termos  $\gamma$  e  $\epsilon$  não foram. Isso significa que para esse ajuste o impacto permanente das ordens não pode ser desprezado e, o impacto temporário é devido apenas aos custos fixos. Esse resultado foi similar ao encontrado no Ajuste 5. Entretanto, por termos eliminado o dado do dia 16/05/2012, o número de graus de liberdade estimado "explode", indo para o limite permitido no algoritmo de otimização (100 graus de liberdade). Isso faz a distribuição aproximar-se bastante de uma normal. Assim, conclui-se que esse dado realmente é responsável por não podermos supor que a distribuição dos z-scores é uma normal. Isso está em linha com o apresentado na Tabela 3.10 e discutido na Subseção 3.3.6. Uma vez que esse resultado foi realmente observado, o sexto ajuste teve uma utilidade apenas didática.

Tabela 3.15: Ajuste 6 - Resultados Obtidos

<b>Parâmetros Ajustados</b>	
$\gamma$	-0.2340
$\epsilon$	-7.2349
$\eta$	0.0000
Graus de Liberdade	100
Volatilidade	40%
Número de Dados	75
<b>Teste Kolmogorov-Smirnov (GoF)</b>	
Estatística	0.1083
P-Valor	0.3643

Tabela 3.16: Ajuste 6 - Valores Estimados Para o Z-Score

Data	Quantidade	custo	$\sigma$	Z-Score	Data	Quantidade	custo	$\sigma$	Z-Score
03/01/2012	-430	24013.55	72.42	-0.36	29/03/2012	265	9844.19	80.16	-1.40
04/01/2012	-35	376.08	73.25	0.83	30/03/2012	-180	4952.77	80.90	0.88
06/01/2012	35	376.08	72.74	0.20	02/04/2012	460	27255.12	79.48	0.77
09/01/2012	250	8858.15	72.79	0.96	03/04/2012	-120	2482.83	80.34	0.21
11/01/2012	240	8230.03	73.80	-0.18	04/04/2012	120	2482.83	78.55	0.38
12/01/2012	-305	12725.20	74.75	-0.81	05/04/2012	-70	1038.81	78.05	-1.39
13/01/2012	155	3835.88	74.19	-0.46	09/04/2012	-25	239.37	77.46	-1.28
16/01/2012	350	16367.80	73.17	1.15	10/04/2012	-185	5193.70	77.33	0.25
17/01/2012	-330	14690.36	74.79	-0.96	11/04/2012	120	2482.83	76.52	0.51
18/01/2012	-45	536.18	75.06	-0.21	12/04/2012	120	2482.83	76.05	0.50
19/01/2012	-365	17687.30	76.46	-0.98	13/04/2012	-110	2147.22	77.09	-0.10
20/01/2012	-30	304.80	76.11	-0.59	16/04/2012	30	304.80	76.35	-0.65
23/01/2012	-460	27255.12	77.23	0.06	17/04/2012	60	820.20	76.66	-0.56
24/01/2012	-255	9180.98	76.59	-0.34	19/04/2012	-50	625.00	78.69	-0.04
26/01/2012	-445	25613.86	78.07	-0.82	20/04/2012	110	2147.22	78.38	0.19
27/01/2012	500	31873.62	77.85	0.47	23/04/2012	105	1988.20	76.84	-1.43
31/01/2012	-595	44343.11	77.82	-0.18	24/04/2012	100	1835.02	76.84	-0.89
02/02/2012	-300	12349.71	79.71	1.07	25/04/2012	-35	376.08	77.66	-0.08
06/02/2012	-105	1988.20	79.89	-0.06	26/04/2012	245	8541.16	76.37	0.53
08/02/2012	-490	30683.90	81.38	0.44	27/04/2012	-85	1410.59	77.30	0.86
10/02/2012	300	12349.71	79.77	-1.37	30/04/2012	75	1156.88	76.24	0.65
13/02/2012	265	9844.19	79.67	0.08	02/05/2012	70	1038.81	76.54	-0.66
15/02/2012	215	6762.13	80.90	0.26	03/05/2012	-105	1988.20	77.64	1.09
16/02/2012	265	9844.19	80.58	-0.03	04/05/2012	120	2482.83	76.72	0.22
17/02/2012	-345	15939.66	82.22	-0.42	09/05/2012	75	1156.88	73.92	0.51
23/02/2012	85	1410.59	82.09	1.98	10/05/2012	-100	1835.02	74.50	-0.20
27/02/2012	100	1835.02	81.66	-0.12	11/05/2012	70	1038.81	73.28	0.65
28/02/2012	120	2482.83	81.74	0.00	14/05/2012	-40	453.20	72.73	-0.17
29/02/2012	-30	304.80	82.25	1.08	15/05/2012	120	2482.83	71.53	-0.67
14/03/2012	-225	7331.74	84.59	-0.42	17/05/2012	50	625.00	68.62	1.45
19/03/2012	60	820.20	83.42	-0.10	18/05/2012	55	719.68	67.14	1.39
20/03/2012	-155	3835.88	83.16	1.38	21/05/2012	-20	179.80	67.75	-0.26
21/03/2012	-30	304.80	83.38	-0.27	22/05/2012	-75	1156.88	69.96	-0.43
22/03/2012	225	7331.74	81.89	-0.82	23/05/2012	75	1156.88	67.25	-0.46
23/03/2012	280	10882.89	81.07	0.51	24/05/2012	-20	179.80	67.50	-0.29
26/03/2012	-195	5693.11	81.76	-0.39	25/05/2012	55	719.68	66.64	0.89
27/03/2012	-280	10882.89	82.25	-0.03	28/05/2012	-25	239.37	67.68	-0.49
28/03/2012	280	10882.89	81.21	0.60					

### 3.3.10 Fronteira Eficiente, Estratégia Ótima e Outros Resultados do Ajuste 4

Conforme já discutido, dentre os ajustes realizados, o Ajuste 4 foi o que atendeu os critérios estatísticos com a menor complexidade, uma vez que ele zera o termo correspondente ao impacto permanente. Agora iremos apresentar mais alguns resultados referentes a esse ajuste.

Primeiramente apresentaremos a Fronteira Eficiente de estratégias. Para conseguirmos calcular a mesma, assumimos a hipótese que o preço inicial do Índice Futuro é de 60,000. A Figura 3.5 apresenta a Fronteira Eficiente de Estratégias para quantidade inicial de contratos variando de 100 a 800, com um passo de 100. A abcissa corresponde à variância do custo de execução e a ordenada corresponde ao valor esperado do custo de execução. A Figura 3.6 também representa essa mesma Fronteira Eficiente, trocando apenas a variância pelo desvio padrão na abcissa.

Em seguida, iremos ilustrar graficamente a estratégia ótima, para 400 contratos, variando o  $\lambda$  de 0.00001 até 0.01. Note que a quantidade inicial de contratos não tem muita importância para fins ilustrativos, pois de acordo com a Equação (2.5.10), a posição remanescente a cada instante na estratégia ótima será diretamente proporcional a essa posição inicial. A estratégia está ilustrada na Figura 3.7.

Note que cada um dos valores de  $\lambda$  da Figura 3.7 tem um e apenas um desvio padrão do custo de execução associado. A Tabela 3.17 mostra quais são esses valores. Note ainda que, uma vez que determinamos a distribuição do custo de execução, podemos determinar intervalos de confiança para o mesmo. Assim, a Tabela 3.17 ainda apresenta valores máximos para o custo para um intervalo de 95% de confiança. A Figura 3.8 identifica as estratégias na Fronteira Eficiente correspondente, além do intervalo de confiança do custo de execução. A interpretação desse intervalo de confiança que construímos seria equivalente a um conceito de Value-At-Risk[Hul09] ajustado pela liquidez. Esse conceito já foi amplamente discutido por Robert Almgren e Neil Chriss [AC00] e, dessa forma, nos restringimos a ilustrá-lo.

Tabela 3.17: Correspondências Entre o Parâmetro  $\lambda$ , Valor Esperado do Custo, Desvio Padrão do Custo e, Intervalo de Confiança do Custo

$\lambda$	E[custo]	SD[custo]	Intervalo de Confiança <sup>1</sup>
1.000E-06	R\$ 17,612.04	R\$ 55,389.29	R\$ 131,946.46
1.437E-04	R\$ 59,623.01	R\$ 13,034.98	R\$ 86,529.78
2.864E-04	R\$ 77,180.88	R\$ 9,321.51	R\$ 96,422.32
4.291E-04	R\$ 89,443.34	R\$ 7,384.97	R\$ 104,687.37
5.719E-04	R\$ 98,879.09	R\$ 6,124.64	R\$ 111,521.56
7.146E-04	R\$ 106,486.64	R\$ 5,217.44	R\$ 117,256.46
8.573E-04	R\$ 112,795.92	R\$ 4,525.16	R\$ 122,136.75
1.000E-03	R\$ 118,130.39	R\$ 3,976.26	R\$ 126,338.18



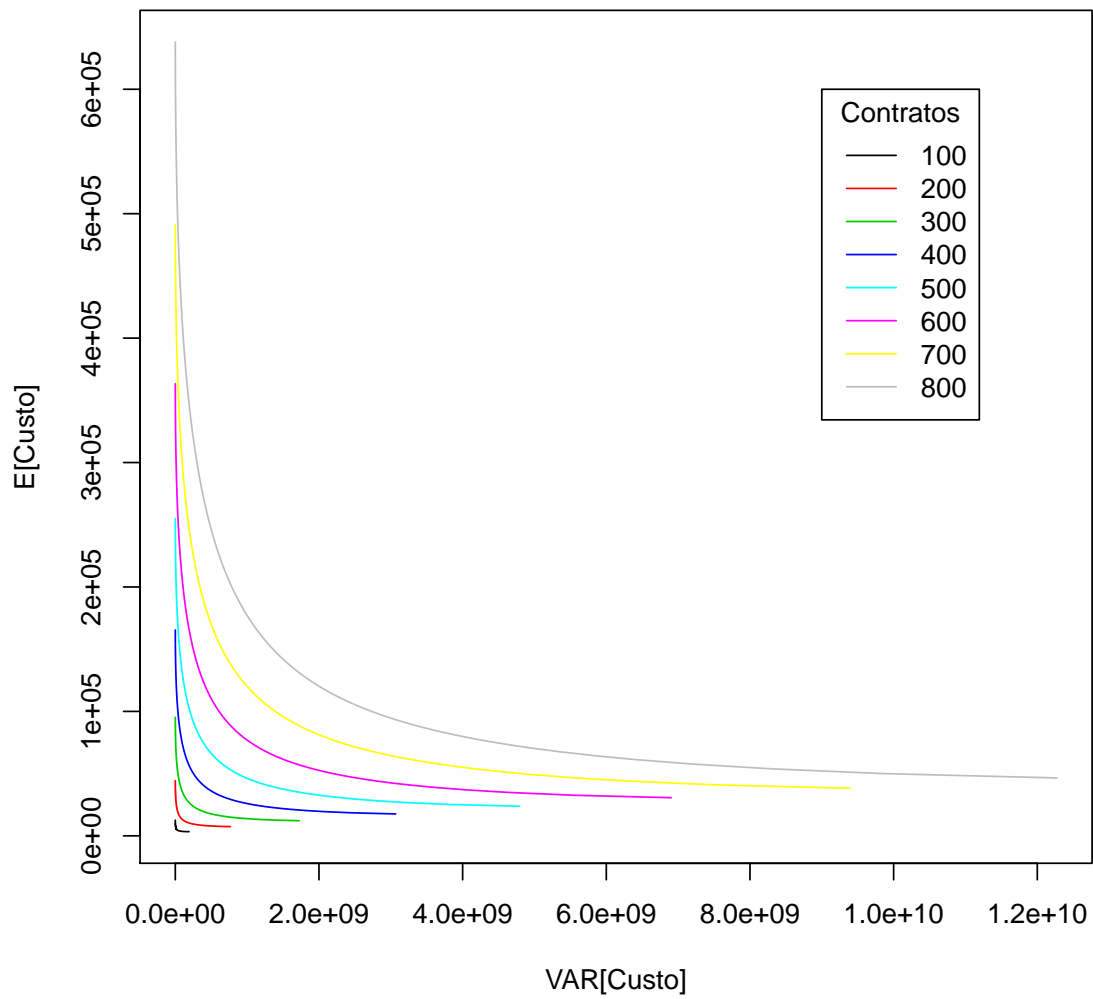


Figura 3.5: Fronteira Eficiente de Estratégias - Variância x Valor Esperado

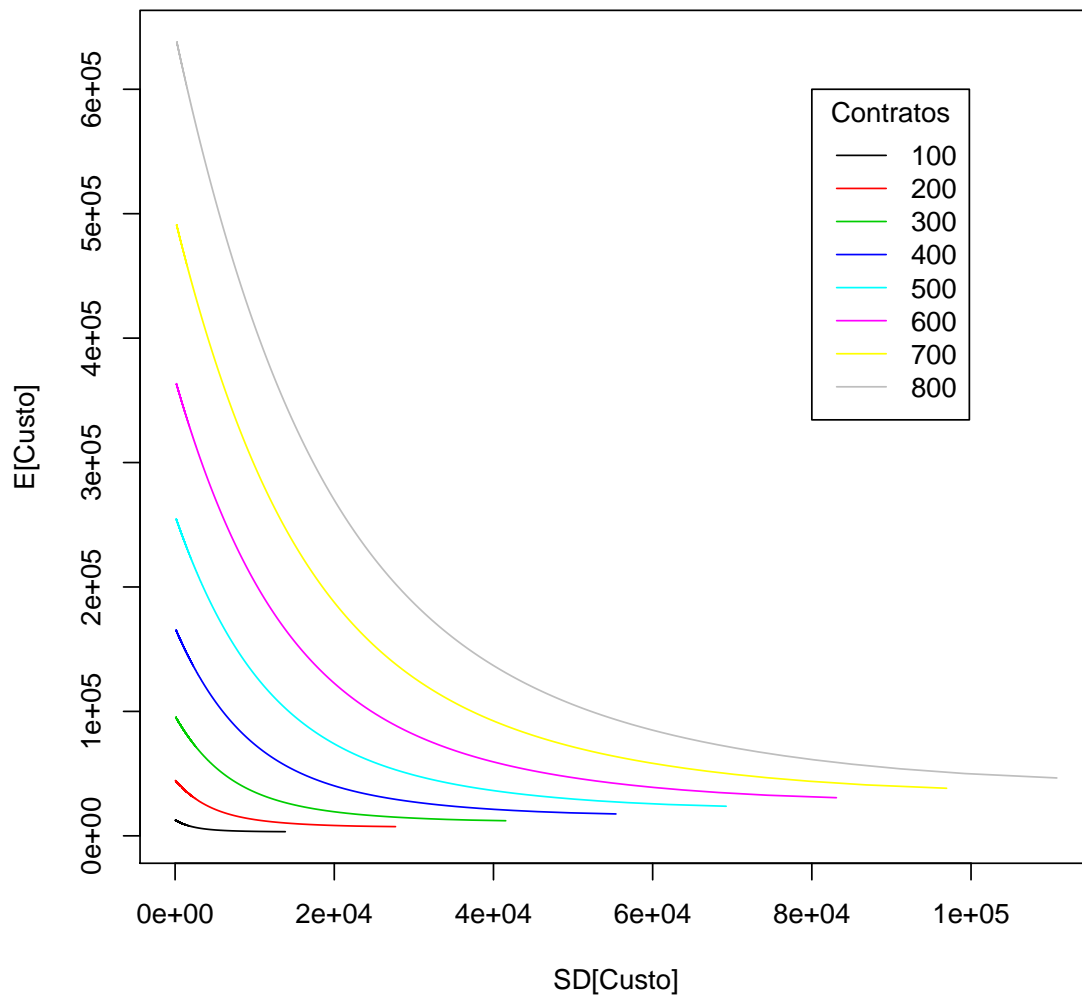


Figura 3.6: Fronteira Eficiente de Estratégias - Desvio Padrão x Valor Esperado

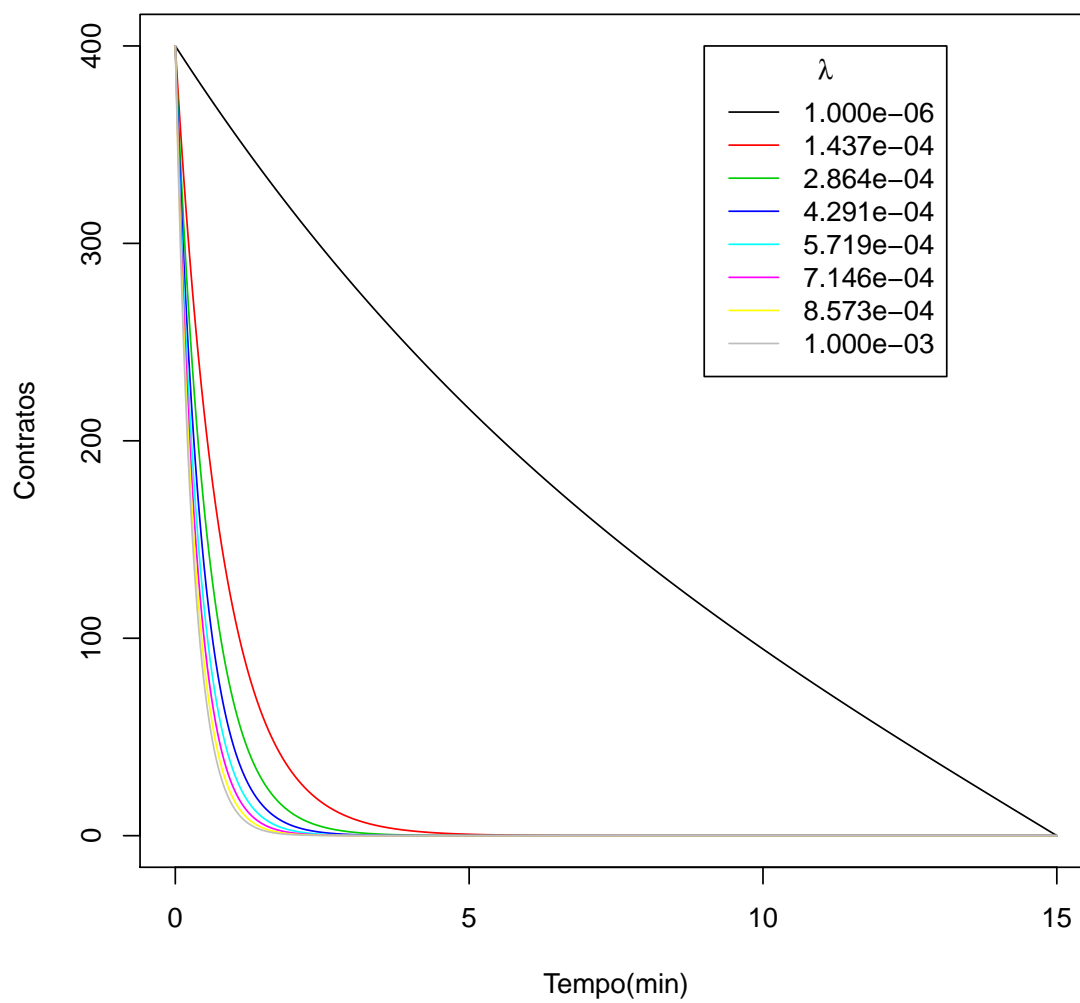


Figura 3.7: Estratégia Ótima

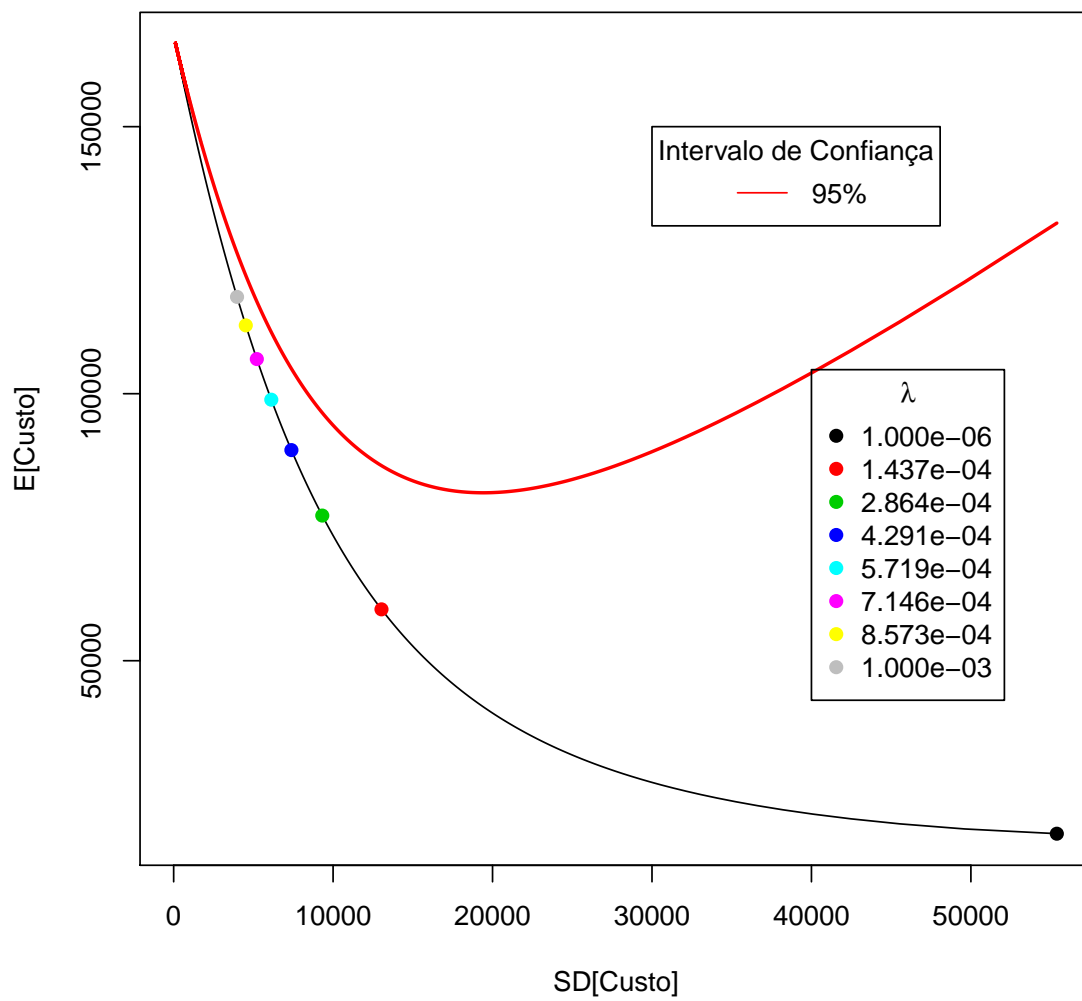


Figura 3.8: Fronteira Eficiente Para 400 Contratos

# Capítulo 4

## Conclusão

Este trabalho teve como principal objetivo estudar o modelo de custo de execução proposto por Robert Almgreen e Neil Chriss [AC00], formalizando alguns pontos do trabalho original. Em particular, demonstramos que existe uma estratégia de execução ótima, no sentido de que essa estratégia minimiza o valor esperado do custo de execução, dada uma variância de custo que o gestor está disposto a assumir. Além desse objetivo, também fizemos ajustes dos parâmetros do modelo a dados reais de execuções de ordem no Índice Bovespa Futuro.

Na primeira etapa, de formalização do modelo, fizemos inicialmente uma variedade de definições e hipóteses. Dentre essas hipóteses, supomos que o ativo negociado seguia um Movimento Aleatório Discreto Aritmético e relaxamos a hipótese de normalidade que havia sido feita no trabalho original. Note que, mesmo deixando essa hipótese de lado, conseguimos chegar ao mesmo resultado que o trabalho original.

Além disso, fizemos suposições quanto à maneira a qual a execução de ordens impactaria o mercado. Dividimos o impacto em dois tipos:

- Um impacto temporário e;
- Um impacto permanente

O impacto temporário basicamente refere-se à diferença em cada etapa de execução entre o preço que o ativo estava ao iniciarmos a etapa e, o preço que efetivamente conseguimos executar. O impacto permanente refere-se à diferença de preços do ativo entre os instantes que realizamos as etapas da execução da ordem.

Definimos algumas classificações das estratégias de execução: dinâmicas ou estáticas; simples ou complicadas. Demonstramos que as estratégias complicadas não apresentam vantagem em relação às simples. Ainda definimos o critério de avaliação das estratégias.

Finalmente, achamos uma expressão analítica para a solução estática que otimiza o problema de minimizar o custo de execução dada a variância que o gestor deseja assumir. Mais precisamente, uma vez que estávamos trabalhando com execução em tempo discreto, aproximamos uma equação de diferenças finitas para uma equação diferencial ordinária, achando assim

uma expressão analítica para uma aproximação da solução. O erro da aproximação é da ordem  $O(\tau)$ , onde  $\tau$  é a janela de tempo na qual dividimos o tempo total de execução da ordem.

Na segunda etapa do trabalho, definimos uma Fronteira Eficiente de Estratégias de execução, além de termos calculado a sensibilidade da solução do problema a cada um dos parâmetros.

Finalmente, utilizando dados reais de execuções de ordens no Índice Bovespa Futuro, fizemos diversos ajustes dos parâmetros, seguindo diversas métricas.

Primeiro foram feitos ajustes que ignoravam a Variância do custo de execução. Notou-se que, apesar das diferenças entre os preços médios de execução e os valores esperados dos mesmos serem estatisticamente iguais a zero, o coeficiente de determinação  $R^2$  era bastante baixo, ficando sempre menor que 12%.

Em sequência, verificou-se que a amostra de dados continha alguns pontos que, dependendo da métrica utilizada, seriam considerados valores extremos. Decidiu-se então fazer ajustes utilizando-se um critério de máxima verossimilhança, considerando-se distribuições T-Student para os Z-Scores dos dados. Note que, caso não tivéssemos relaxado a hipótese feita por Robert Almgreen e Neil Chriss, não poderíamos ter feito esses ajustes.

Os ajustes foram feitos e, para verificar se eram estatisticamente razoáveis, utilizamos testes de "Goodness of Fit" (mais precisamente, o teste de Kolmogorov-Smirnov). Os P-Valores encontrados ao fazermos os testes foram todos superiores a 25% e, dessa forma, entedemos que os ajustes foram bastante satisfatórios.

Dentre todos os ajustes feitos, aquele que mais nos agradou foi o Ajuste 4. Esse ajuste acabava por "zerar" o termo correspondente ao impacto permanente do custo de execução e, dessa forma, simplificava o modelo.

Para finalizar o trabalho, construímos a Fronteira Eficiente correspondente aos parâmetros encontrados no Ajuste 4, além de ilustrarmos algumas das estratégias ótimas. Também construímos um intervalo de confiança para o custo ótimo de execução.

Com esse trabalho, verificamos que esse modelo proposto por Robert Almgreen e Neil Chriss [AC00], apesar de sua simplicidade, pode ser utilizado na prática. Ele pode trazer diversos insights ao gestor que está estudando a melhor forma de executar uma ordem. Por possuir uma expressão analítica para sua Estratégia Ótima, esse modelo é facilmente implementado na prática.

Diversos outros modelos já foram propostos depois desse, inclusive por Robert Almgren e Julian Lorenz [LA11]. Este modelo, apesar de estar melhor documentado que o modelo original, aparenta complicar tanto que, sua utilidade na prática é questionável.

Outro exemplo é o modelo proposto por Vlad Rashkovich e Arun Verma [RV12]. Os autores argumentam que conseguiram obter coeficientes de determinação  $R^2$  mais altos com a utilização desse modelo (na ordem de 26%). Este modelo inclusive está implementado parcialmente nos terminais Bloomberg, sob o comando <TCA>. Nessa função, o Bloomberg fornece o valor esperado ótimo do custo de execução estimado pelo modelo. Entretanto não é dito qual é a estratégia que entregaria tal custo de execução. Além disso, os autores não dão os detalhes

sobre o modelo.

Assim, o modelo original de Robert Almgreen e Neil Chriss ainda parece ser o com a maior utilidade prática. Uma vez que encontramos evidências estatísticas do mesmo estar correto, acreditamos que ele realmente pode ser utilizado.





# Apêndice A

## Código dos Ajustes do Modelo

À seguir, o código utilizado para fazer os ajustes do modelo, em linguagem R.

```
1 #####
2 #CODIGOS UTILIZADOS NO PROJETO FINAL DE CURSO DE RODRIGO PEREIRA MARANHAO
3 #JANEIRO DE 2013
4 #####
5
6
7 #Remove as variaveis que estao armazenadas.
8
9 rm(list=ls(all=TRUE))
10
11 #Chama as bibliotecas que serao utilizadas.
12
13 library(tseries)
14 library(moments)
15 library(graphics)
16 library(lmtest)
17 library(stats)
18
19 #Leitura do arquivo com os dados.
20 #As colunas do input sao respectivamente Data, Quantidade Inicial, Custo, Somatorio dos
21 #Quadrados das Ordens, Somatorio dos Quadrados das Posicoes, Preço Inicial.
22
23 arquivo=scan(file = "C:\\Users\\Rodrigo\\Desktop\\Mestrado\\tex\\PROJETO\\dadosinput.csv",
24             what = list(dias="character",quantidade=0,custo=0,sn2=0,sx2=0,s0=0),
25             sep = ",",skip=1)
26
27 dias=arquivo$dias
28 quantidades=arquivo$quantidade
29 custo=arquivo$custo
30 sn2=arquivo$sn2
31 sx2=arquivo$sx2
32 s0=arquivo$s0
33
34 #Funcao que calcula o valor esperado do custo.
35 custoesperado=function(gamma,eta,epsilon,quantidade,somaordens2)
36 {
37     tau=0.5
38     if (length(somaordens2)==length(quantidade))
39     {
40         custos=c()
41         for (k in 1:length(somaordens2))
```

```

42  {
43      custos=c(custos,-0.5*gamma*quantidade[k]^2-epsilon*abs(quantidade[k])-(eta-0.5*tau*gamma
44          )*somaordens2[k]/tau)
45  }
46  return(custos)
47 }else
48 {
49     return("ERRO")
50 }
51
52 #
53 #ROTINAS E FUNCOES DO AJUSTE 1
54 #
55
56 #Funcao Objetivo do Primeiro Ajuste
57
58 Fobj1=function(entradas)
59 {
60     arquivo=scan(file = "C:\\Users\\Rodrigo\\Desktop\\Mestrado\\tex\\PROJETO\\dadosinput.csv",
61         what = list(dias="character", quantidade=0, custo=0, sn2=0, sx2=0, s0=0),
62         sep = ",", skip=1)
63     dias=arquivo$dias
64     quantidades=arquivo$quantidade
65     custo=arquivo$custo
66     sn2=arquivo$sn2
67     sx2=arquivo$sx2
68     gamma=entradas[1]
69     eta=entradas[2]
70     epsilon=entradas[3]
71     ec=custoesperado(gamma,eta,epsilon,quantidades,sn2)
72
73     erro1=0
74     for (k in 1:length(quantidades))
75     {
76         erro1=erro1+(ec[k]-custo[k])^2
77     }
78     return(erro1)
79 }
80
81 #Primeiro Ajuste
82
83 ajuste1=nlminb(start=c(-1,-1,-5),obj=Fobj1,upper=c(0,0,0))
84
85 #Analise dos Resultados do Primeiro Ajuste
86
87 gamma1=ajuste1$par[1]
88 eta1=ajuste1$par[2]
89 epsilon1=ajuste1$par[3]
90
91 ec1=custoesperado(gamma1,eta1,epsilon1,quantidades,sn2)
92
93 #Erros do Ajuste 1
94 erro.ajuste1=custo-ec1
95
96 #Erro Medio Por Contrato de Cada Dado
97 erro11=erro.ajuste1/abs(quantidades)
98
99 #Media dos Erros Medios por Contrato

```

```

100 media11=mean(erro11)
101
102 #Mediana dos Erros Medios por Contrato
103 mediana11=median(erro11)
104
105 #Desvio Padrao dos Erros Medios por Contrato
106 desvio11=sd(erro11)
107
108 #Curtose dos Erros Medios por Contrato
109 curtose11=kurtosis(erro11)
110
111 #Assimetria dos Erros Medios por Contrato
112 assimetria11=skewness(erro11)
113
114 #P-Valor do Teste-T para verificar se a Media dos Erros Medios e igual a zero
115 n11=length(erro11)
116 t11=media11/(desvio11/sqrt(n11))
117 p11=2*pt(-abs(t11),df=n11-1)
118
119 #Grafico de Dispersao do Ajuste 1
120 fit1=lm(formula=custo~ec1)
121 r11=summary(fit1)$r.squared
122 summary(fit1)
123
124 pdf('C:\\Users\\Rodrigo\\Desktop\\Mestrado\\tex\\PROJETO\\ajuste1.pdf')
125
126 plot(ec1,custo,xlab='E[C] (R$)',ylab='C (R$)')
127 abline(fit1)
128
129 text(x=30000,y=50000,bquote(y == .(round(coef(fit1)[2], 5))*x + .(round(coef(fit1)[1], 5))))
130 text(x=30000,y=40000,paste('R-Squared=',round(r11,4)))
131
132 dev.off()
133
134 #Exporta os resultados do Ajuste 1
135
136 resultados.ajuste1=list(gamma=gamma1,eta=eta1,epsilon=epsilon1,ndados=n11,R2=r11,media=media11
137 ,mediana=mediana11,desvio=desvio11,curtose=curtose11,assimetria=assimetria11,t=t11,pvalor=
138 p11)
139 write.table(resultados.ajuste1,file="C:\\Users\\Rodrigo\\Desktop\\Mestrado\\tex\\PROJETO\\
140 resultados1.csv",sep="," ,row.names =FALSE,append=FALSE)
141
142
143 #
144 #ROTINAS E FUNCOES DO AJUSTE 2
145 #
146
147 #Funcao Objetivo do Segundo Ajuste
148
149 Fobj2=function(entradas)
150 {
151     arquivo=scan(file = "C:\\Users\\Rodrigo\\Desktop\\Mestrado\\tex\\PROJETO\\dadosinput.csv",
152     what = list(dias="character",quantidade=0,custo=0,sn2=0,sx2=0,s0=0),
153     sep = " ,",skip=1)

```

```

154 dias=arquivo$dias
155 quantidades=arquivo$quantidade
156 custo=arquivo$custo
157 sn2=arquivo$sn2
158 sx2=arquivo$sx2
159 gamma=entradas[1]
160 eta=entradas[2]
161 epsilon=entradas[3]
162 ec=custoesperado(gamma,eta,epsilon,quantidades,sn2)
163
164 erro1=0
165 for (k in 1:length(quantidades))
166 {
167     erro1=erro1+((ec[k]-custo[k])^2/quantidades[k]^2)
168 }
169 return(erro1)
170 }
171
172 # Segundo Ajuste
173
174 ajuste2=nlminb(start=c(-1,-1,-5),obj=Fobj2,upper=c(0,0,0))
175
176 # Analise dos Resultados do Segundo Ajuste
177
178 gamma2=ajuste2$par[1]
179 eta2=ajuste2$par[2]
180 epsilon2=ajuste2$par[3]
181
182 ec2=custoesperado(gamma2,eta2,epsilon2,quantidades,sn2)
183
184 # Erros do Ajuste 2
185 erro.ajuste2=custo-ec2
186
187 # Erro Medio Por Contrato de Cada Dado
188 erro12=erro.ajuste2/abs(quantidades)
189
190 # Media dos Erros Medios por Contrato
191 media12=mean(erro12)
192
193 # Mediana dos Erros Medios por Contrato
194 mediana12=median(erro12)
195
196 # Desvio Padrao dos Erros Medios por Contrato
197 desvio12=sd(erro12)
198
199 # Curtose dos Erros Medios por Contrato
200 curtose12=kurtosis(erro12)
201
202 # Assimetria dos Erros Medios por Contrato
203 assimetria12=skewness(erro12)
204
205 # P-Valor do Teste-T para verificar se a Media dos Erros Medios e igual a zero
206 n12=length(erro12)
207 t12=media12/(desvio12/sqrt(n12))
208 p12=2*pt(-abs(t12),df=n12-1)
209
210 # Grafico de Dispersao do Ajuste 2
211 fit2=lm(formula=custo~ec2)
212 r12=summary(fit2)$r.squared

```

```

213 summary(fit2)
214
215 pdf('C:\\Users\\Rodrigo\\Desktop\\Mestrado\\tex\\PROJETO\\ajuste2.pdf')
216
217 plot(ec2, custo, xlab='E[C] (R$)', ylab='C (R$)')
218 abline(fit2)
219
220 text(x=20000, y=50000, bquote(y == .(round(coef(fit2)[2], 5))*x - .(abs(round(coef(fit2)[1], 5)
    )))
221 text(x=20000, y=40000, paste('R-Squared=', round(r12, 4)))
222
223 dev.off()
224
225 #Exporta os resultados do Ajuste 2
226
227 resultados.ajuste2=list(gamma=gamma2, eta=eta2, epsilon=epsilon2, ndados=n12, R2=r12, media=media12
    , mediana=mediana12, desvio=desvio12, curtose=curtose12, assimetria=assimetria12, t=t12, pvalor=
    p12)
228 write.table(resultados.ajuste2, file="C:\\Users\\Rodrigo\\Desktop\\Mestrado\\tex\\PROJETO\\
    resultados2.csv", sep=";", row.names =FALSE, append=FALSE)
229
230 tabela.ajuste2=list(Data=dias, Quantidade=quantidades, C=custo, EC=ec2, Erro=erro.ajuste2,
    ErroContrato=erro12)
231 write.table(tabela.ajuste2, file="C:\\Users\\Rodrigo\\Desktop\\Mestrado\\tex\\PROJETO\\ajuste2.
    csv", sep=";", row.names =FALSE, append=FALSE)
232
233 #
234 #ROTINAS E FUNCOES DO AJUSTE 3
235 #
236
237 #Funcao Objetivo do Terceiro Ajuste
238
239 Fobj3=function(entradas)
240 {
241     arquivo=scan(file = "C:\\Users\\Rodrigo\\Desktop\\Mestrado\\tex\\PROJETO\\dadosinput.csv",
242         what = list(dias="character", quantidade=0, custo=0, sn2=0, sx2=0, s0=0),
243         sep = ";", skip=1)
244     dias=arquivo$dias
245     quantidades=arquivo$quantidade
246     custo=arquivo$custo
247     sn2=arquivo$sn2
248     sx2=arquivo$sx2
249     gamma=entradas[1]
250     eta=entradas[2]
251     epsilon=entradas[3]
252     ec=custoesperado(gamma, eta, epsilon, quantidades, sn2)
253     aux=lm(formula=custo~ec)
254     rsq=summary(aux)$r.squared
255     return(-rsq)
256 }
257
258 #Terceiro Ajuste
259
260 ajuste3=nlmminb(start=c(-1, -1, -5), obj=Fobj3, upper=c(0, 0, 0))
261
262 #Analise dos Resultados do Terceiro Ajuste
263
264 gamma3=ajuste3$par[1]
265 eta3=ajuste3$par[2]

```

```

266 epsilon3=ajuste3$par[3]
267
268 ec3=custoesperado(gamma3,eta3,epsilon3,quantidades,sn2)
269
270 #Erros do Ajuste 3
271 erro.ajuste3=custo-ec3
272
273 #Erro Medio Por Contrato de Cada Dado
274 erro13=erro.ajuste3/abs(quantidades)
275
276 #Media dos Erros Medios por Contrato
277 media13=mean(erro13)
278
279 #Mediana dos Erros Medios por Contrato
280 mediana13=median(erro13)
281
282 #Desvio Padrao dos Erros Medios por Contrato
283 desvio13=sd(erro13)
284
285 #Curtose dos Erros Medios por Contrato
286 curtose13=kurtosis(erro13)
287
288 #Assimetria dos Erros Medios por Contrato
289 assimetria13=skewness(erro13)
290
291 #P-Valor do Teste-T para verificar se a Media dos Erros Medios e igual a zero
292 n13=length(erro13)
293 t13=media13/(desvio13/sqrt(n13))
294 p13=2*pt(-abs(t13),df=n13-1)
295
296 #Grafico de Dispersao do Ajuste 3
297 fit3=lm(formula=custo~ec3)
298 r13=summary(fit3)$r.squared
299 summary(fit3)
300
301 pdf('C:\\Users\\Rodrigo\\Desktop\\Mestrado\\tex\\PROJETO\\ajuste3.pdf')
302
303 plot(ec3,custo,xlab='E[C] (R$)',ylab='C (R$)')
304 abline(fit3)
305
306 text(x=300000,y=50000,bquote(y == .(round(coef(fit3)[2], 5))*x + .(round(coef(fit3)[1], 5))))
307 text(x=300000,y=40000,paste('R-Squared=',round(r13,4)))
308
309 dev.off()
310
311 #Exporta os resultados do Ajuste 3
312
313 resultados.ajuste3=list(gamma=gamma3,eta=eta3,epsilon=epsilon3,ndados=n13,R2=r13,media=media13,
,mediana=mediana13,desvio=desvio13,curtose=curtose13,assimetria=assimetria13,t=t13,pvalor=
p13)
314 write.table(resultados.ajuste3,file="C:\\Users\\Rodrigo\\Desktop\\Mestrado\\tex\\PROJETO\\
resultados3.csv",sep="," ,row.names =FALSE,append=FALSE)
315
316 tabela.ajuste3=list(Data=dias,Quantidade=quantidades,C=custo,EC=ec3,Erro=erro.ajuste3,
ErroContrato=erro13)
317 write.table(tabela.ajuste3,file="C:\\Users\\Rodrigo\\Desktop\\Mestrado\\tex\\PROJETO\\ajuste3.
csv",sep="," ,row.names =FALSE,append=FALSE)
318
319 #

```

```

320 #Experimento z-scores
321 #
322
323 #Variamos a vol anualizada de 0.1 ate 1.1
324 #Para transforma-la no sigma, multiplicamos pelo preco inicial do Indice Futuro e em seguida
325 #dividimos por raiz de (252*7*60) (dias uteis em um ano e horas de negociacao em um dia e
    minutos em uma hora)
326 #Note que o z-score nao pode ser calculado quando a quantidade e 5.
327
328 indicador=(abs(quantidades)!=5)
329 tau=0.5
330
331 tabela.zscore=c()
332 contar.z2=c()
333 contar.z3=c()
334 contar.z4=c()
335 contar.z5=c()
336
337 for (vol in seq(0.1,1,by=0.15))
338 {
339     vol2=vol/sqrt(252*7*60)
340     sigma=s0*vol2
341     variancia=tau*(sigma[indicador]^2*sx2[indicador])
342     zscore=(custo[indicador]-ec2[indicador])/sqrt(variancia)
343     tabela.zscore=cbind(tabela.zscore,zscore)
344     contar.z2=cbind(contar.z2,sum(abs(zscore)>=2))
345     contar.z3=cbind(contar.z3,sum(abs(zscore)>=3))
346     contar.z4=cbind(contar.z4,sum(abs(zscore)>=4))
347     contar.z5=cbind(contar.z5,sum(abs(zscore)>=5))
348 }
349 tabela.zscore=rbind(tabela.zscore,contar.z2)
350 tabela.zscore=rbind(tabela.zscore,contar.z3)
351 tabela.zscore=rbind(tabela.zscore,contar.z4)
352 tabela.zscore=rbind(tabela.zscore,contar.z5)
353 tabela.zscore=cbind(c(dias[indicador],2,3,4,5),tabela.zscore)
354 write.table(tabela.zscore,file="C:\\Users\\Rodrigo\\Desktop\\Mestrado\\tex\\PROJETO\\zscore.
    csv",sep="," ,row.names =FALSE,col.name=FALSE,append=FALSE)
355
356 #
357 #ROTINAS E FUNCOES DO QUARTO AJUSTE
358 #
359
360 #Funcao Objetivo do Quarto Ajuste
361
362 Fobj4=function(entradas)
363 {
364     arquivo=scan(file = "C:\\Users\\Rodrigo\\Desktop\\Mestrado\\tex\\PROJETO\\dadosinput.csv",
365                 what = list(dias="character",quantidade=0,custo=0,sn2=0,sx2=0,s0=0),
366                 sep = ",",skip=1)
367     dias=arquivo$dias
368     quantidades=arquivo$quantidade
369     custo=arquivo$custo
370     sn2=arquivo$sn2
371     sx2=arquivo$sx2
372     s0=arquivo$s0
373     tau=0.5
374     vol=entradas[1]
375     grauslib=entradas[2]
376     arquivo=scan(file = "C:\\Users\\Rodrigo\\Desktop\\Mestrado\\tex\\PROJETO\\resultados2.csv",

```

```

377     what = list(gamma=0,eta=0,epsilon=0,ndados=0,R2=0,media=0,mediana=0,desvio=0,curtose
378             =0,assimetria=0,t=0,pvalor=0),
379     sep = ", ",skip=1)
380     gamma=arquivo$gamma
381     eta=arquivo$eta
382     epsilon=arquivo$epsilon
383     vol2=vol/sqrt(252*7*60)
384     sigma=s0*vol2
385     indicador=(abs(quantidades)!=5)
386     ec=custoesperado(gamma,eta,epsilon,quantidades,sn2)
387     variancia=tau*(sigma[indicador]^2*sx2[indicador])
388     zscore=(custo[indicador]-ec[indicador])/sqrt(variancia)
389     estatistica=-sum(log(dt(zscore,df=grauslib)))
390 }
391
392
393
394 #Quarto Ajuste
395
396 ajuste4=nlminb(start=c(0.2,3),obj=Fobj4,control=list(eval.max=5000,iter.max=500),lower=c
397             (0.05,2),upper=c(0.4,100))
398
399 #Análise dos Resultados do Quarto Ajuste
400
401 vol4=ajuste4$par[1]
402 graus.lib4=ajuste4$par[2]
403
404 #Teste de Kolmogorov-Smirnov para verificar se a distribuicao esta ok
405 indicador=(abs(quantidades)!=5)
406 vol4aux=vol4/sqrt(252*7*60)
407 sigma4=s0*vol4aux
408 custo.zscore=(custo[indicador]-custoesperado(gamma2,eta2,epsilon2,quantidades,sn2)[indicador])
409             /sqrt(tau*(sigma4[indicador]^2*sx2[indicador]))
410 distribuicao=rt(2000,df=graus.lib4)
411 teste.ajuste4=ks.test(x=custo.zscore,y=distribuicao)
412 teste.ajuste4
413
414 #Exporta os resultados do Ajuste 4
415
416 resultados.ajuste4=list(gamma=gamma2,eta=eta2,epsilon=epsilon2,graus.lib=graus.lib4,vol=vol4,
417             Kolmogorov=teste.ajuste4[1],pvalor=teste.ajuste4[2])
418 write.table(resultados.ajuste4,file="C:\\Users\\Rodrigo\\Desktop\\Mestrado\\tex\\PROJETO\\
419             resultados4.csv",sep=" ",row.names =FALSE,append=FALSE)
420
421 tabela.ajuste4=list(Data=dias[indicador],Quantidade=quantidades[indicador],C=custoesperado(
422             gamma2,eta2,epsilon2,quantidades,sn2)[indicador],Sigma=sigma4[indicador],Zscore=custo.
423             zscore)
424 write.table(tabela.ajuste4,file="C:\\Users\\Rodrigo\\Desktop\\Mestrado\\tex\\PROJETO\\ajuste4.
425             csv",sep=" ",row.names =FALSE,append=FALSE)
426
427 #
428 #ROTINAS E FUNCOES DO QUINTO AJUSTE
429 #
430
431 #Funcao Objetivo do Quinto Ajuste
432
433 Fobj5=function(entradas)

```



```

428 {
429   arquivo=scan(file = "C:\\Users\\Rodrigo\\Desktop\\Mestrado\\tex\\PROJETO\\dadosinput.csv",
430     what = list(dias="character", quantidade=0, custo=0, sn2=0, sx2=0, s0=0),
431     sep = ",", skip=1)
432   dias=arquivo$dias
433   quantidades=arquivo$quantidade
434   custo=arquivo$custo
435   sn2=arquivo$sn2
436   sx2=arquivo$sx2
437   s0=arquivo$s0
438   tau=0.5
439   vol=entradas[1]
440   grauslib=entradas[2]
441   gamma=entradas[3]
442   eta=entradas[4]
443   epsilon=entradas[5]
444   vol2=vol/sqrt(252*7*60)
445   sigma=s0*vol2
446   indicador=(abs(quantidades)!=5)
447   ec=custoesperado(gamma,eta,epsilon,quantidades,sn2)
448   variancia=tau*(sigma[indicador]^2*sx2[indicador])
449   zscore=(custo[indicador]-ec[indicador])/sqrt(variancia)
450   estatistica=-sum(log(dt(zscore,df=grauslib)))
451   return(estatistica)
452 }
453
454 ajuste5=nlminb(start=c(0.2,3,-2,-2,-2),obj=Fobj5,control=list(eval.max=5000,iter.max=500),
455   lower=c(0.05,2,-50,-50,-50),upper=c(0.4,100,0,0,0))
456 #Analise dos Resultados do Quinto Ajuste
457
458 vol5=ajuste5$par[1]
459 graus.lib5=ajuste5$par[2]
460 gamma5=ajuste5$par[3]
461 eta5=ajuste5$par[4]
462 epsilon5=ajuste5$par[5]
463
464 #Teste de Kolmogorov-Smirnov para verificar se a distribuicao esta ok
465 indicador=(abs(quantidades)!=5)
466 vol5aux=vol5/sqrt(252*7*60)
467 sigma5=s0*vol5aux
468 custo.zscore5=(custo[indicador]-custoesperado(gamma5,eta5,epsilon5,quantidades,sn2)[indicador])/sqrt(tau*(sigma5[indicador]^2*sx2[indicador]))
469 distribuicao=rt(2000,df=graus.lib5)
470 teste.ajuste5=ks.test(x=custo.zscore5,y=distribuicao)
471 teste.ajuste5
472
473 #Exporta os resultados do Ajuste 5
474
475 resultados.ajuste5=list(gamma=gamma5,eta=eta5,epsilon=epsilon5,graus.lib=graus.lib5,vol=vol5,
476   Kolmogorov=teste.ajuste5[1],pvalor=teste.ajuste5[2])
477 write.table(resultados.ajuste5,file="C:\\Users\\Rodrigo\\Desktop\\Mestrado\\tex\\PROJETO\\resultados5.csv",sep=" ",row.names=FALSE,append=FALSE)
478
479 tabela.ajuste5=list(Data=dias[indicador],Quantidade=quantidades[indicador],C=custoesperado(gamma5,eta5,epsilon5,quantidades,sn2)[indicador],Sigma=sigma5[indicador],Zscore=custo.zscore5)
480 write.table(tabela.ajuste5,file="C:\\Users\\Rodrigo\\Desktop\\Mestrado\\tex\\PROJETO\\ajuste5.csv",sep=" ",row.names=FALSE,append=FALSE)

```

```

480
481 #
482 #ROTINAS E FUNCOES DO SEXTO AJUSTE
483 #
484
485 #Funcao Objetivo do Sexto Ajuste
486
487 Fobj6=function(entradas)
488 {
489   arquivo=scan(file = "C:\\Users\\Rodrigo\\Desktop\\Mestrado\\tex\\PROJETO\\dadosinput.csv",
490     what = list(dias="character", quantidade=0, custo=0, sn2=0, sx2=0, s0=0),
491     sep = ",", skip=1)
492   dias=arquivo$dias
493   quantidades=arquivo$quantidade
494   custo=arquivo$custo
495   sn2=arquivo$sn2
496   sx2=arquivo$sx2
497   s0=arquivo$s0
498   tau=0.5
499   vol=entradas[1]
500   grauslib=entradas[2]
501   gamma=entradas[3]
502   eta=entradas[4]
503   epsilon=entradas[5]
504   vol2=vol/sqrt(252*7*60)
505   sigma=s0*vol2
506   indicador=(abs(quantidades)!=5)&(dias!="16/05/12")
507   ec=custoesperado(gamma,eta,epsilon,quantidades,sn2)
508   variancia=tau*(sigma[indicador]^2*sx2[indicador])
509   zscore=(custo[indicador]-ec[indicador])/sqrt(variancia)
510   estatistica=-sum(log(dt(zscore,df=grauslib)))
511   return(estatistica)
512 }
513
514 ajuste6=nlminb(start=c(0.2,3,-2,-2,-2),obj=Fobj6,control=list(eval.max=5000,iter.max=500),
515   lower=c(0.05,2,-50,-50,-50),upper=c(0.4,100,0,0,0))
516
517 #Analise dos Resultados do Sexto Ajuste
518
519 vol6=ajuste6$par[1]
520 graus.lib6=ajuste6$par[2]
521 gamma6=ajuste6$par[3]
522 eta6=ajuste6$par[4]
523 epsilon6=ajuste6$par[5]
524
525 #Teste de Kolmogorov-Smirnov para verificar se a distribuicao esta ok
526 indicador=(abs(quantidades)!=5)&(dias!="16/05/12")
527 vol6aux=vol6/sqrt(252*7*60)
528 sigma6=s0*vol6aux
529 custo.zscore6=(custo[indicador]-custoesperado(gamma6,eta6,epsilon6,quantidades,sn2)[indicador])/sqrt(tau*(sigma6[indicador]^2*sx2[indicador]))
530 distribuicaot=rt(2000,df=graus.lib6)
531 teste.ajuste6=ks.test(x=custo.zscore6,y=distribuicaot)
532 teste.ajuste6
533
534 #Exporta os resultados do Ajuste 6
535
536 resultados.ajuste6=list(gamma=gamma6,eta=eta6,epsilon=epsilon6,graus.lib=graus.lib6,vol=vol6,
537   Kolmogorov=teste.ajuste6[1],pvalor=teste.ajuste6[2])

```

```

536 write.table(resultados.ajuste6,file="C:\\Users\\Rodrigo\\Desktop\\Mestrado\\tex\\PROJETO\\
      resultados6.csv",sep=" ",row.names =FALSE,append=FALSE)
537
538 tabela.ajuste6=list(Data=dias[indicador],Quantidade=quantidades[indicador],C=custoesperado(
      gamma6,eta6,epsilon6,quantidades,sn2)[indicador],Sigma=sigma6[indicador],Zscore=custo.
      zscore6)
539 write.table(tabela.ajuste6,file="C:\\Users\\Rodrigo\\Desktop\\Mestrado\\tex\\PROJETO\\ajuste6.
      csv",sep=" ",row.names =FALSE,append=FALSE)
540
541
542
543 #Construicao da Fronteira Eficiente Para os Parametros do Ajuste 4
544 #Considerou-se uma posicao inicial entre 100 e 800 contratos
545 #Considerou-se ainda o Preco Inicial do Indice Futuro igual a 60000
546
547 fe.s0=60000
548 sigma=fe.s0*vol4/sqrt(252*7*60)
549 tau=0.5
550
551 fe.e2=c()
552 fe.v2=c()
553 fe.sd2=c()
554
555 for (contador2 in seq(1,8,by=1))
556 {
557   xinicial=contador2*100
558   fe.e=c()
559   fe.v=c()
560   for (contador in 1:10000)
561   {
562     lambda=0.000001*contador
563     kappa=sqrt(-lambda*sigma^2/(eta2-gamma2*tau/2))
564     fe.e=c(fe.e,-0.5*gamma2*xinicial^2-epsilon2*xinicial-(eta2-gamma2*tau/2)*(xinicial^2)*(tanh(
      kappa*tau*0.5)*(tau*sinh(2*kappa*15)+2*15*sinh(kappa*tau))/(2*tau^2*(sinh(kappa*15))^2)))
565     fe.v=c(fe.v,0.5*sigma^2*xinicial^2*(tau*sinh(kappa*15)*cosh(kappa*(15-tau))-15*sinh(kappa*tau)
      )/(sinh(kappa*15)*sinh(kappa*15)*sinh(kappa*tau)))
566   }
567
568 fe.e2=rbind(fe.e2,t(fe.e))
569 fe.v2=rbind(fe.v2,t(fe.v))
570 fe.sd2=rbind(fe.sd2,t(sqrt(fe.v)))
571 }
572
573 pdf('C:\\Users\\Rodrigo\\Desktop\\Mestrado\\tex\\PROJETO\\fronteira4.pdf')
574 plot(fe.sd2[1,1:10000],fe.e2[1,1:10000],xlim=c(min(fe.sd2),max(fe.sd2)),ylim=c(min(fe.e2),max(
      fe.e2)),xlab='SD[Custo]',ylab='E[Custo]',type='l',col=1)
575 lines(fe.sd2[2,1:10000],fe.e2[2,1:10000],type='l',col=2)
576 lines(fe.sd2[3,1:10000],fe.e2[3,1:10000],type='l',col=3)
577 lines(fe.sd2[4,1:10000],fe.e2[4,1:10000],type='l',col=4)
578 lines(fe.sd2[5,1:10000],fe.e2[5,1:10000],type='l',col=5)
579 lines(fe.sd2[6,1:10000],fe.e2[6,1:10000],type='l',col=6)
580 lines(fe.sd2[7,1:10000],fe.e2[7,1:10000],type='l',col=7)
581 lines(fe.sd2[8,1:10000],fe.e2[8,1:10000],type='l',col=8)
582 legend(x=80000,y=60000,legend=seq(100,800,by=100),col=1:8,lty=rep(1,8),title='Contratos')
583 dev.off()
584
585 pdf('C:\\Users\\Rodrigo\\Desktop\\Mestrado\\tex\\PROJETO\\fronteira5.pdf')
586 plot(fe.v2[1,1:10000],fe.e2[1,1:10000],xlim=c(min(fe.v2),max(fe.v2)),ylim=c(min(fe.e2),max(fe.
      e2)),xlab='VAR[Custo]',ylab='E[Custo]',type='l',col=1)

```

```

587 lines(fe.v2[2,1:10000],fe.e2[2,1:10000],type='l',col=2)
588 lines(fe.v2[3,1:10000],fe.e2[3,1:10000],type='l',col=3)
589 lines(fe.v2[4,1:10000],fe.e2[4,1:10000],type='l',col=4)
590 lines(fe.v2[5,1:10000],fe.e2[5,1:10000],type='l',col=5)
591 lines(fe.v2[6,1:10000],fe.e2[6,1:10000],type='l',col=6)
592 lines(fe.v2[7,1:10000],fe.e2[7,1:10000],type='l',col=7)
593 lines(fe.v2[8,1:10000],fe.e2[8,1:10000],type='l',col=8)
594 legend(x=9000000000,y=600000,legend=seq(100,800,by=100),col=1:8,lty=rep(1,8),title='Contratos'
)
595 dev.off()
596
597 #Construcao da estrategia otima para 400 contratos iniciais
598 #Variando o lambda de 0.00001 ate 0.01
599
600 fe.x=c()
601 fe.x2=c()
602 fe.t=seq(0,15,by=0.01)
603
604 for (contador in seq(1,1000,length.out=8))
605 {
606 fe.x=c()
607 for (tempo in fe.t)
608 {
609 lambda=0.000001*contador
610 kappa=sqrt(-lambda*sigma^2/(eta2-gamma2*tau/2))
611 fe.x=c(fe.x,400*sinh(kappa*(15-tempo))/sinh(kappa*15))
612 }
613 fe.x2=rbind(fe.x2,t(fe.x))
614 }
615
616 pdf('C:\\Users\\Rodrigo\\Desktop\\Mestrado\\tex\\PROJETO\\estrategiaotima.pdf')
617 plot(fe.t,fe.x2[1,1:length(fe.t)],xlim=c(min(fe.t),max(fe.t)),ylim=c(min(fe.x2),max(fe.x2)),
xlab='Tempo (min)',ylab='Contratos',type='l',col=1)
618 lines(fe.t,fe.x2[2,1:length(fe.t)],type='l',col=2)
619 lines(fe.t,fe.x2[3,1:length(fe.t)],type='l',col=3)
620 lines(fe.t,fe.x2[4,1:length(fe.t)],type='l',col=4)
621 lines(fe.t,fe.x2[5,1:length(fe.t)],type='l',col=5)
622 lines(fe.t,fe.x2[6,1:length(fe.t)],type='l',col=6)
623 lines(fe.t,fe.x2[7,1:length(fe.t)],type='l',col=7)
624 lines(fe.t,fe.x2[8,1:length(fe.t)],type='l',col=8)
625 legend(x=9,y=400,legend=format((seq(1,1000,length.out=8)*0.000001),scientific = TRUE,digits=4)
,col=1:8,lty=rep(1,8),title=expression(lambda))
626 dev.off()
627
628 lambdaaux=0.000001*seq(1,1000,length.out=8)
629 xinicial=400
630 fe.ee=c()
631 fe.sde=c()
632
633 for (lambda in lambdaaux)
634 {
635 kappa=sqrt(-lambda*sigma^2/(eta2-gamma2*tau/2))
636 fe.ee=c(fe.ee,-0.5*gamma2*xinicial^2-epsilon2*xinicial-(eta2-gamma2*tau/2)*(xinicial^2)*(tanh(
kappa*tau*0.5)*(tau*sinh(2*kappa*15)+2*15*sinh(kappa*tau))/(2*tau^2*(sinh(kappa*15))^2)))
637 fe.sde=c(fe.sde,sqrt(0.5*sigma^2*xinicial^2*(tau*sinh(kappa*15)*cosh(kappa*(15-tau))-15*sinh(
kappa*tau))/(sinh(kappa*15)*sinh(kappa*15)*sinh(kappa*tau))))
638 }
639
640 pdf('C:\\Users\\Rodrigo\\Desktop\\Mestrado\\tex\\PROJETO\\intervalo.pdf')

```

```

641 plot(fe.sd2[4,1:10000],fe.e2[4,1:10000],xlim=c(min(fe.sd2[4,1:10000]),max(fe.sd2[4,1:10000])),
      ylim=c(min(fe.e2[4,1:10000]),max(fe.e2[4,1:10000])),xlab='SD[Custo]',ylab='E[Custo]',type=
      'l',col=1)
642 points(fe.sde[1],fe.ee[1],pch=19,col=1,bg=1)
643 points(fe.sde[2],fe.ee[2],pch=19,col=2,bg=2)
644 points(fe.sde[3],fe.ee[3],pch=19,col=3,bg=3)
645 points(fe.sde[4],fe.ee[4],pch=19,col=4,bg=4)
646 points(fe.sde[5],fe.ee[5],pch=19,col=5,bg=5)
647 points(fe.sde[6],fe.ee[6],pch=19,col=6,bg=6)
648 points(fe.sde[7],fe.ee[7],pch=19,col=7,bg=7)
649 points(fe.sde[8],fe.ee[8],pch=19,col=8,bg=8)
650 lines(fe.sd2[4,1:10000],fe.e2[4,1:10000]+qt(0.95,df=graus.lib4)*fe.sd2[4,1:10000],type='l',col
      =2,lwd=2)
651 legend(x=30000,y=150000,legend=c('95%'),lty=1,col=2,pt.lwd=2,title='Intervalo de Confianca')
652 legend(x=40000,y=104500,legend=format((seq(1,1000,length.out=8)*0.000001),scientific = TRUE,
      digits=4),col=1:8,pch=rep(19,8),pt.bg=1:8,title=expression(lambda))
653
654 dev.off()
655
656 write.table(list(lambda=lambdaaux,EC=fe.ee,SDC=fe.sde,INTSUP=fe.ee+qt(0.95,df=graus.lib4)*fe.
      sde),file="C:\\Users\\Rodrigo\\Desktop\\Mestrado\\tex\\PROJETO\\lambdasde.csv",sep=" ",row
      .names =FALSE,append=FALSE)

```

codigo.R



# Referências Bibliográficas

- [AC99] Robert Almgren and Neil Chriss. Value under liquidation. *Risk*, 3, 1999.
- [AC00] Robert Almgren and Neil Chriss. Optimal execution of portfolio transactions. *Risk*, 12:5–39, 2000.
- [Apo69] Tom M. Apostol. *Calculus. Vol. II: Multi-variable calculus and linear algebra, with applications to differential equations and probability*. Second edition. Blaisdell Publishing Co. Ginn and Co., Waltham, Mass.-Toronto, Ont.-London, 1969.
- [Bar95] Robert G. Bartle. *The elements of integration and Lebesgue measure*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1995. Containing a corrected reprint of the 1966 original [it The elements of integration, Wiley, New York; MR0200398 (34 #293)], A Wiley-Interscience Publication.
- [BL98] Dimitris Bertsimas and Andrew W. Lo. Optimal control of liquidation costs. *Journal of Financial Markets*, 1:1–50, 1998.
- [BMF] BMFBOVESPA. Contrato futuro de ibovespa - disponível em [www.bmf.com.br/bmfbovespa/pages/contratos1/contratosprodutosfinanceiros1.asp?](http://www.bmf.com.br/bmfbovespa/pages/contratos1/contratosprodutosfinanceiros1.asp?)
- [Hul09] John Hull. *Options, futures, and other derivatives*. Pearson, 2009.
- [LA11] Julian Lorenz and Robert Almgren. Mean-variance optimal adaptive execution. *Applied Mathematical Finance*, 18(5):395–422, 2011.
- [Mas51] Frank J. Massey. The kolmogorov-smirnov test for goodness of fit. *Journal of the American Statistical Association*, 46(253):68–78, 1951.
- [O’H96] Maureen O’Hara. Market microstructure theory, 1995, 1996.
- [RV12] Vlad Rashkovich and Arun Verma. Trade cost: Handicapping on par. *The Journal of Trading*, 7(4), 2012.
- [Shr04] Steven E. Shreve. *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*. Springer, 2004.

- [Tsa05] Ruey S. Tsay. *Analysis of financial time series*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], Hoboken, NJ, second edition, 2005.