

Opções Americanas Via Métodos de Monte Carlo

Por:

Bruno Eduardo da Silva

Rio de Janeiro
2012



Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Opções Americanas Via Métodos de Monte Carlo

Projeto Final apresentado ao Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada como um dos requerimentos para conclusão do curso de Mestrado Profissional de Métodos Matemáticos Aplicados a Finanças

Orientador: Dr. Jorge Passamani Zubelli

Co-orientador: Dr. Max Oliveira Souza

**Rio de Janeiro
2012**

Aluno: Bruno Eduardo da Silva

Opções Americanas Via Métodos de Monte Carlo

68 páginas

Projeto de Conclusão de Curso.

1. Apreçamento de opções
2. Método de Monte Carlo
3. Hedging
4. Opções Americanas

Instituto de Matemática Pura e Aplicada.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr.
Jorge P. Zubelli

Prof. Dr.
Max O. Souza

Prof. Dr.
Roberto I. Oliveira

Prof. Dr.
Lúcio L. Rodriguez

Dedico este trabalho a Deus, aos meus pais Raphael e Regina, aos meus irmãos Bruna, Cláudia e Raphael Jr. e minha amada Simone.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, aos meus orientadores Jorge Passamani Zubelli e Max Oliveira Souza que me ajudaram de forma substancial no desenvolvimento deste projeto. A todos os professores e corpo de funcionários do IMPA. A todos os meus professores da UFF, em especial a Cristiane Argento e Sérgio Mendonça. Agradeço aos meus familiares, amigos, colegas de trabalho, a todos aqueles que me ajudaram nesta longa caminhada.

Resumo

Este trabalho implementa dois métodos de precificação de opções americanas via Monte Carlo, o método de mínimos de Longstaff e Schwartz e o Método de Monte Carlo com Cobertura de Risco de Bouchaud, Potters e Sestovic. O primeiro método foi pioneiro ao utilizar mínimos quadrados para estimar o valor esperado da opção. O segundo método, permite precificar opções utilizando a medida histórica. Além dos métodos descritos acima, vamos apresentar o modelo de preços em tempo contínuo, o apreçamento na medida neutra ao risco e a formula de Black-Sholes para opções europeias, bem como exemplos numéricos.

Palavras-chave: Apreçamento de opções, Método de Monte Carlo, Opções Americanas e Hedging.

Abstract

In this work we implement two pricing methods of American options by means of Monte Carlo type methods. The first one is the classical Longstaff and Schwartz method. The second one is the Hedged Monte Carlo method, originally suggested by Bouchaud, Potters and Sestovic. The former was a pioneering method that basically uses least squares regression to compute the price of the option at different times in the risk neutral measure once the model has been calibrated. The latter allows the pricing in the historical measure and allows more flexibility. Finally, we present a number of numerical examples and simulations.

Keywords: American Options , Monte Carlo Methods ,Hedging and Pricing American Options.

Sumário

1	Black-Scholes	10
1.1	Modelo de Preços dos Ativos	10
1.2	Equação da Riqueza	14
1.3	Apreçamento de Opções	15
1.3.1	Opções Europeias	16
1.3.2	Gregas	23
1.3.3	Opções Americanas	24
2	Método de Monte Carlo	26
2.1	Justificativa do Método	28
2.2	Técnicas de Redução de Variância	30
2.2.1	Variáveis Antitéticas	30
2.2.2	Variáveis de Controle	32
3	Longstaff-Schwartz	33
3.1	Exemplo Numérico	34
3.2	Justificativa do Método	37
3.2.1	Convergência	39
3.2.2	Espaços de Funções	39
3.2.3	Resultados	40
4	Monte Carlo com Cobertura de Risco	47
4.1	Conceito do Método	47
4.2	Parametrização do Preço e da Cobertura	48
4.3	Resultados na Medida Neutra ao Risco	50
4.4	Resultados na Medida Histórica	55
5	Considerações Finais	57
A	Apêndice	61
A.1	Probabilidade e Processos Estocástico	61

A.2	Códigos em matlab	63
A.2.1	Simulação no Modelo Log-normal	63
A.2.2	Método de Longstaff-Schwartz	64
A.2.3	Método de OHMC	65
A.2.4	Base Laguerre	66

Introdução

Derivativo é um contrato no qual se estabelecem pagamentos futuros, cujo montante é calculado com base no valor assumido por uma variável no futuro. Como exemplo, podemos citar o preço de um ativo, a inflação acumulada no período, a taxa de câmbio, a taxa básica de juros ou qualquer outra variável dotada de significado econômico.

Derivativos recebem esta denominação porque seu preço de compra e venda deriva do preço de outro ativo, denominado ativo-objeto.

Os derivativos mais conhecidos são as opções de compra e venda do tipo europeia. Nesse tipo de contrato o detentor tem o direito de comprar/vender cada unidade do ativo por um preço pré-estabelecido em uma data pré-estabelecida denominada vencimento ou maturação.

Um dos motivos dessa popularidade é o modelo de Black-Scholes. Nesse modelo pode-se obter expressões analíticas para os preços de vários contratos.

Outro derivativo bastante conhecido é a opção americana. Neste contrato, o detentor tem o direito de comprar/vender cada unidade do ativo por um preço pré-estabelecido em qualquer data entre a emissão e a maturidade.

Para a opção de venda americana sem dividendos, pode existir exercício antecipado ótimo, com isso o preço da put europeia é apenas um limite inferior. Não existe uma fórmula fechada para este tipo de opção.

Nesta projeto final de curso, vamos descrever e implementar os métodos de Longstaff e Schwartz (2001) e Monte Carlo com Cobertura de Risco Potters, Sestovic e Bouchaud (2000) aplicados no problema de precificação de opções americanas.

No primeiro Capítulo descreveremos o apreçamento de opções americanas e europeias via replicação e apresentaremos a formula de Black-Scholes. O Capítulo 2 será dedicado ao método de Monte Carlo e às técnicas de redução de variância. Os dois últimos serão dedicados à descrição e à implementação dos métodos.

Capítulo 1

Black-Scholes

Apresentaremos neste capítulo uma breve revisão do modelo de Black-Scholes. Começaremos modelando os preços dos ativos por meio de um processo de difusão e construiremos um modelo de mercado completo para que possamos fazer precificação de derivativos por meio de princípio de replicação e não arbitragem. Em um primeiro momento, trabalharemos com opções europeias e depois passaremos às americanas. Os pontos mais importantes deste capítulo são a fórmula de Black-Scholes para opções europeias e o preço justo de uma opção americana. As definições e notações são baseadas na referência [2].

1.1 Modelo de Preços dos Ativos

Apresentaremos nesta seção o modelo clássico de preços de ativos em tempo contínuo, ele leva em consideração a imprevisibilidade do movimento de preços, essa incerteza é modelada por meio um movimento browniano geométrico.

Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espaço de probabilidade, $(W_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ processo adaptado e $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ filtração Browniana.

Inicialmente descreveremos a dinâmica de um ativo sem risco $B = B(t)$, para $t \geq 0$. Ela é dada pela equação diferencial ordinária (EDO):

$$\begin{cases} dB(t) = r(t)B(t)dt, \\ B(0) = 1, \end{cases} \quad (1.1.1)$$

1.1. MODELO DE PREÇOS DOS ATIVOS

e tem solução única dada por,

$$B(t) = \exp\left(\int_0^t r(s)ds\right). \quad (1.1.2)$$

Aqui $r(s)$ é a taxa de juros no instante s .

Os preços dos ativos stocks $S_i(t)$, $i \in \{1, 2, \dots, d\}$, são dados pela solução da equação diferencial estocástica (EDE)

$$\begin{cases} dS_i(t) &= \mu(t)_i S_i(t)dt + \sum_{j=1}^d \sigma_{i,j}(t) S_i(t) dW_j(t), \\ S(0) &= S_0. \end{cases} \quad (1.1.3)$$

Onde $\mu_i(t)$ é a taxa de crescimento "drift" do i -ésimo ativo e σ é a matriz de volatilidade. O drift e volatilidade dependem do tempo t e do preço do ativo. Esta representação é dada por um processo de Itô.

Se assumimos que $r(t)$, $\mu_i(t)$ e $\sigma_{i,j}(t)$ são;

- Progressivamente mensuráveis com respeito a $(\mathcal{F}_t)_t \geq 0$;
- Uniformemente limitadas em $[0, T] \times \Omega$;
- $x' \sigma(t) \sigma(t)' x > 0, \forall x \in \mathbb{R}^d, \forall t \in [0, T]$ \mathbb{P} -qc.

A equação (1.1.3) tem solução única dada por,

$$S_i(t) = S_i(0) \exp\left(\int_0^t (\mu_i(s) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \sigma_{i,j}^2(s)) ds + \int_0^t \sum_{j=1}^d \sigma_{i,j}(s) dW_j(s)\right) \quad (1.1.4)$$

Agora apresentaremos as possíveis ações e as hipóteses relacionada ao modelo.

Os agentes nesse modelo podem :

- i. Vender títulos e investir o dinheiro no ativo sem risco ou em outros ativos de risco.
- ii. Consumir parte de sua riqueza.

1.1. MODELO DE PREÇOS DOS ATIVOS

As hipóteses referente aos agentes são:

1. Nenhum agente consegue prever eventos futuros;
2. Os agentes são tomadores de preços, isto é, suas decisões sobre compra ou venda de ativos não alteram os preços;
3. No instante $t = 0$, cada agente possui uma riqueza inicial $x > 0$;
4. O dinheiro que não é investido em ações ou consumido é investido no bond¹;
5. Todas as variações de renda de cada agente são provenientes de seu investimento ou derivadas de decisões de consumo;
6. É possível comprar qualquer quantidade de ativos;
7. Posições negativas são possíveis. (Empréstimos, no caso do ativo sem risco, posição vendida no caso os ativos com risco);
8. Não há custos de transação.

Vamos denotar por $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_d(t))$ as quantidades investidas em cada um dos ativos. A hipótese (1) requer que φ seja adaptado com respeito a $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Vamos expressar a hipótese (5) com mais rigor do ponto de vista de uma estratégia de consumo auto-financiável.

Definição 1.1.1. (*Estratégia de Negociação*)

Uma estratégia de negociação com valor inicial $x > 0$, é um processo $(d+1)$ -dimensional progressivamente mensurável que satisfaz:

¹Chamamos de bond o ativo livre de risco

1.1. MODELO DE PREÇOS DOS ATIVOS

- (a) $\int_0^T |\varphi_0(s)ds| < \infty \mathbb{P} - qc$;
- (b) $\sum_{j=0}^d \int_0^T [\varphi_j(s)S_j(s)]^2 ds < \infty \mathbb{P} - qc$;
- (c) $x = \sum_0^d \varphi_i(0)S_i(0)$.

Definição 1.1.2. (*Processo de consumo*)

Um processo progressivamente mensurável e não negativo $c(t)$ tal que $\int_0^T c(s)ds < \infty \mathbb{P} - qc$, é chamado de processo de consumo.

Definição 1.1.3. (*Processo auto-financiado*)

Um par (φ, c) formado por uma estratégia de negociação e por um processo de consumo com valor inicial $x > 0$, é dito um processo auto-financiado quando:

$$X(t) = x + \sum_{i=0}^d \int_0^t \varphi_i(s)dS_i(s) - \int_0^t c(s)ds \mathbb{P} - qc.$$

Riqueza atual = Riqueza inicial + Ganhos/Perdas - Consumo

Definição 1.1.4. (*Processo associado à riqueza inicial*)

Dada a estratégia de negociação φ com o valor inicial $x > 0$, chamamos de processo de riqueza $X(t)$ associado à x , o processo:

$$X(t) = \sum_{i=0}^d \varphi_i(t)S_i(t) + x$$

Definição 1.1.5. (*Portfólio auto-financiado*) Dado (φ, c) associado à riqueza inicial x tal que:

$$X(t) > 0 \mathbb{P} - qc$$
$$\pi(t) = (\pi_1(t), \dots, \pi_d(t))' \text{ com } \pi_i(t) = \frac{\varphi_i(t)S_i(t)}{X(t)}$$

é chamado de portfólio auto-financiado associado a (φ, c) .

1.2 Equação da Riqueza

O processo de replicação é utilizado no modelo binomial onde o mercado tem dois ativos, o ativo sem risco e o ativo com risco.

A equação da riqueza é utilizada para realizar apreçamento de opções via replicação. A partir do par (φ, c) formado por uma estratégia de negociação e um processo de consumo, obteremos a EDE da riqueza para o portfólio $X(t)$.

$$\begin{aligned} dX(t) &= \varphi_0 B(t)r(t)dt + \sum_{i=1}^d \varphi_i(t)S_i(t) \left(\mu_i(t)dt + \sum_{j=1}^d \sigma_{i,j}(t)dW_j(t) \right) - c(t)dt \\ &= [1 - \pi(t)' \mathbb{I}]X(t)r(t)dt + \sum_{i=1}^d X(t)\pi_i(t) \left(\mu_i(t)dt + \sum_{j=1}^d \sigma_{i,j}dW_j(t) \right) - c(t)dt \end{aligned}$$

Assim obtemos a equação da riqueza,

$$\begin{cases} dX(t) &= [r(t)X(t) - c(t)]dt + X(t)\pi(t)'[\mu(t) - r(t)\mathbb{I}] \\ X(0) &= x \end{cases} \quad (1.2.1)$$

Definição 1.2.1. *Portfólio auto-financiado associado ao processo de consumo*

Um processo d -dimensional $\pi(t)$ progressivamente mensurável, é chamado portfólio auto-financiado associado ao processo de consumo $c(t)$, quando existe uma solução única para a Equação (1.2.1) $X(t) = X^{\pi,c}(t)$ tal que:

$$\int_0^T (X(t)\pi_i(t))^2 dt < \infty, \forall i = 1, \dots, d$$

Definição 1.2.2. *Portfólio Admissível*

Dado um par portfólio-consumo (π, c) dizemos que ele é admissível para a riqueza inicial $x > 0$, quando o processo de riqueza satisfaz $X(t) \geq 0$, $\mathbb{P} - qc$, $\forall t \in [0, T]$.

Definição 1.2.3. *Conjunto dos pares admissíveis*

O conjunto de todos os pares (π, c) admissíveis, dada a riqueza inicial $x > 0$, será denotado por $A(x)$.

Teorema 1.2.1. Teorema da Completude dos Mercados

Assumindo todas as definições e o modelo de preços acima, temos que:

1. Dados $(\pi, c) \in A(x)$, o processo de riqueza associado $X(t)$ satisfaz para $t \in [0, T]$ à desigualdade:

$$E[H(t)X(t) + \int_0^t H(s)c(s)ds] \leq x.$$

2. Sejam $Z \geq 0$ variável aleatória \mathcal{F}_t -mensurável e $c(t)$ $t \in [0, T]$ tais que

$$x := E[H(T)Z + \int_0^T H(s)c(s)ds] \leq \infty,$$

Então, existe um processo de portfólio $\pi(t)$, $t \in [0, T]$, onde $(\pi, c) \in A(x)$ e o respectivo processo de riqueza cumpre $X(t) = Z, \mathbb{P} - q.c.$

A demonstração do Teorema (1.2.1) está na referência [2]. A primeira parte do teorema mostra que se o par (π, c) portfólio-consumo é admissível então, o valor

$$E[H(t)X(t) + \int_0^t H(s)c(s)ds]$$

não pode ser maior que da a riqueza inicial, isto é, o valor do rendimento dado pelo portfólio somado ao valor consumido trazido ao valor presente, não pode ser maior do que o valor inicial investido. Na segunda parte temos que dado um pagamento final Z e processo de consumo $c(t)$, existe uma estratégia $\pi(t)$ tal que o par (π, c) é admissível, ou seja, existe um processo auto-financiado $X(t)$ capaz de replicar Z . Quando trabalhamos com um mercado onde todos os pagamentos podem ser replicados, este é chamado de **mercado completo**.

1.3 Apreçamento de Opções

Em um mercado completo, qualquer pagamento final pode ser obtido seguindo uma estratégia de negociação adequada. Assim, o preço de uma opção é o custo da estratégia capaz de fazer a cobertura para qualquer payoff dado pela opção. Nesta seção, descreveremos como obter esse preço. Vamos

iniciar pelas opções europeias onde é possível replicar exatamente o pagamento final. Em seguida descreveremos como chegar ao preço de um opção americana, onde não é possível replicar exatamente todos os pagamentos.

1.3.1 Opções Europeias

As opções mais conhecidas são a opção de compra europeia e a opção de venda europeia. Um dos motivos dessa popularidade é a simplicidade da fórmula de Black-Scholes para o preço da opções europeias.

Opção de Venda (ou *Put*) europeia : É o contrato que dá ao possuidor o direito, mas não a obrigação, de vender uma unidade de um ativo subjacente, no instante futuro T por um preço K ("strike"). O payoff da opção em $t = T$ é

$$(K - S(T))^+ \quad (1.3.1)$$

Opção de Compra (ou *Call*) europeia: É o contrato que dá ao possuidor o direito, mas não a obrigação, de comprar uma unidade de um ativo subjacente, no instante futuro T por um preço K ("strike"). O payoff da opção em $t = T$ é

$$(S(T) - K)^+ \quad (1.3.2)$$



Figura 1.1: Payoffs das opções de compra e de venda

Definição 1.3.1. *Pagamento contingenciado*

Chamamos de *pagamento contingenciado* o par (g, Z) , onde g é um processo de consumo progressivamente mensurável tal que, $g(t) \geq 0, \forall t \in [0, T]$

1.3 Opções Europeias

e Z é pagamento final \mathcal{F}_T -mensurável $Z \geq 0$ em $t = T$ com

$$E\left[\left(\int_0^T g(t)dt + Z\right)^\mu\right] \leq \infty \text{ para algum } \mu > 1$$

Exemplos de Pagamentos contingenciado.

1. Opção de venda europeia: $g \equiv 0$ e $Z = (K - S(T))^+$.
2. Opção de compra europeia: $g \equiv 0$ e $Z = (S(T) - K)^+$.
3. Pagamento contínuo de dividendos: $g(t) \equiv \delta S(t) \forall t \in [0, T]$ e $Z \equiv 0$.

Definição 1.3.2. *Estratégia replicante*

O par portfólio-consumo $(\pi, c) \in A(x)$ é chamado estratégia replicante para a obrigação contingente (g, Z) quando:

$$g(t) = c(t) \mathbb{P} - qc \forall t \text{ e } X(T) = Z \mathbb{P} - qc$$

sendo X o processo de riqueza associado ao par (π, c)

Definição 1.3.3. *Conjunto das estratégias replicantes*

O conjunto das estratégias replicantes (g, Z) com preço x é $\mathcal{D}(x, (g, Z)) := \{(\pi, c) \in A(x) | (\pi, c) \text{ é estratégia replicante de } (g, Z)\}$

Definição 1.3.4. *Preço justo de uma opção*

O preço justo de uma opção (g, Z) é

$$\hat{p} = \inf\{x | \mathcal{D}(x, (g, Z)) \neq \emptyset\}$$

Observe que o preço justo é definido pelo ínfimo do conjunto $\mathcal{D}(x, (g, Z))$ pois, este conjunto podem não possuir mínimo contido no mesmo.

Definição 1.3.5. *Oportunidade de arbitragem*

Um par $(\pi, c) \in A(0)$ é dito uma oportunidade de arbitragem quando:

$$P(X(T) > 0) > 0 \text{ ou } P\left(\int_0^T c(s)ds > 0\right) > 0$$

Proposição 1.3.1. Ausência de arbitragem

Se o mercados são completos então, não existem oportunidades de arbitragem.

Demonstração

Seja $(\pi, c) \in A(0)$ uma oportunidade de arbitragem. Como $H(t)$ é estritamente positivo, temos que

$$E[H(T)X(T) + \int_0^T H(s)c(s)] > 0 = X(0) = x.$$

Isto contradiz o teorema (1.2.1).

Teorema 1.3.2. Preço justo de um pagamento contingenciado

O preço justo \hat{p} de um pagamento contingenciado (g, Z) é dado por

$$E[H(T)Z + \int_0^T H(t)g(t)dt] < \infty, \quad (1.3.3)$$

e existe uma única estratégia replicante $(\pi, c) \in D((g, Z), \hat{p})$ e seu processo de riqueza $\hat{X}(t)$ tal que

$$\hat{X}(t) = \frac{1}{H(t)} E[H(t)Z + \int_t^T H(s)g(s)ds | \mathcal{F}_t] \quad (1.3.4)$$

A demonstração do teorema anterior está na [2]. Com este teorema calculamos de explicitamente o preço justo de um opção europeia dada a taxa de consumo e o pagamento final.

Por exemplo, no caso de uma *put* com pagamento de dividendos contínuo temos que $Z = (K - S_T)^+$, e $g = \delta S_t$, $\delta \in [0, 1]$. Em alguns casos, existem fórmulas fechadas para o cálculo da esperança (1.3.3). A mais conhecida é a fórmula de Black-Scholes que determina o preço da compra e a opção de venda europeias.

Proposição 1.3.3. Fórmula de Black-Scholes

Considere o modelo de mercado de Black-Scholes com $m = n = 1$, $r(t) = r$, $\mu(t) = \mu$, $\sigma(t) = \sigma$, $\forall t \in [0, T]$, $T > 0$ e $\mu, \sigma, r \in \mathfrak{R}$.

1.3 Opções Europeias

(a) O preço justo $X_c(t)$ no instante t , de uma opção de compra europeia sobre o ativo S , com strike $K > 0$ e maturidade T é dado por

$$X_c(t) = S(t)\phi(d_1(t)) - Ke^{r(T-t)}\phi(d_2(t)) \quad (1.3.5)$$

(b) O preço justo $X_p(t)$ no instante t , de uma opção de venda europeia sobre o ativo com strike $K > 0$ e maturidade T é dado por

$$X_p(t) = -Ke^{r(T-t)}\phi(-d_2(t)) - S(t)\phi(-d_1(t)) \quad (1.3.6)$$

Sendo

$$d_1(t) = \frac{\log\left(\frac{S(t)}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2(t) = \frac{\log\left(\frac{S(t)}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1(t) - \sigma\sqrt{T-t}$$

e ϕ distribuição acumulada de uma variável aleatória normal padrão.

Demonstração

Seja $\tau := T - t, \forall t \in [0, T]$.

Pela Proposição 1.3.2 temos que:

$$\begin{aligned} X_c(t) &= E[H(\tau)(S(\tau) - K)] \\ &= E[\exp(-[r + \frac{1}{2}\theta^2]\tau - \theta W(\tau))(S(0) \exp([\mu - \frac{1}{2}\sigma^2]\tau + \sigma W(\tau)) - K)^+] \end{aligned}$$

$X_c(t)$ é positivo, se, e somente se,

$$\begin{aligned} &\left(S_0 \exp\left([\mu - \frac{1}{2}\sigma^2]\tau + \sigma W(\tau) - K\right) \right)^+ > 0 \\ &\Leftrightarrow S_0 \exp\left([\mu - \frac{1}{2}\sigma^2]\tau + \sigma W(\tau)\right) > K \\ &\Leftrightarrow [\mu - \frac{1}{2}\sigma^2]\tau + \sigma W(\tau) > \log\left(\frac{K}{S_0}\right) \\ &\Leftrightarrow W(\tau) > \frac{\log\left(\frac{K}{S_0}\right) - [\mu - \frac{1}{2}\sigma^2]\tau}{\sigma} = \hat{K}. \end{aligned}$$

1.3 Opções Europeias

Como temos que, $W(\tau) \sim N(0, \tau)$, então, segue que:

$$\begin{aligned}
 X_c(t) &= \int_{\hat{K}}^{\infty} e^{-(r+\frac{1}{2}\theta^2)\tau-\theta x} (S_0 e^{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)\tau+\sigma x} - K) \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{(-\frac{x^2}{2\tau})} dx \\
 &= S_0 \underbrace{\int_{\hat{K}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 - r - \frac{1}{2}\theta^2\right)\tau + (\sigma - \theta)x - \frac{x^2}{2\tau}\right) dx}_I \\
 &\quad - K \exp(-r\tau) \underbrace{\int_{\hat{K}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left(-\frac{1}{2}\theta^2\tau - \theta x - \frac{x^2}{2\tau}\right) dx}_{II}
 \end{aligned}$$

$$I = \int_{\hat{K}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left(\frac{(x - (\sigma - \theta)\tau)^2}{2\tau} + \frac{(\sigma - \theta)^2\tau}{\tau} + (-r - \frac{1}{2}\theta^2 + \mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau\right) dx$$

- $\frac{(\sigma - \theta)\tau}{2} = (\frac{1}{2}\sigma^2 - \sigma\theta + \frac{1}{2}\theta^2)\tau$
- $\sigma\theta = \sigma\sigma^{-1}(\mu - r) = \mu - r$

Portanto,

$$I = \int_{\hat{K}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left(\frac{(x - (\sigma - \theta)\tau)^2}{2\tau}\right) dx.$$

Fazendo $y = \frac{x - (\sigma - \theta)\tau}{\sqrt{\tau}}$ temos,

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{\frac{\hat{K} - (\sigma - \theta)\tau}{\sqrt{\tau}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left(\frac{-y^2}{2}\right) \sqrt{\tau} dy = 1 - \Phi\left(\frac{\hat{K} - (\sigma - \theta)\tau}{\sqrt{\tau}}\right) = \Phi\left(\frac{-\hat{K} + (\sigma - \theta)\tau}{\sqrt{\tau}}\right) \\
 &= \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S_0}{\hat{K}}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) = \Phi(d_1(t)).
 \end{aligned}$$

$$II = \int_{\hat{K}}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{(x-\theta\tau)^2}{2\tau}\right)}{\sqrt{2\pi\tau}}$$

Fazendo $z = \frac{x+\theta\tau}{\sqrt{\tau}}$ temos,

$$\begin{aligned} II &= \int_{\frac{\hat{K}+\theta\tau}{\sqrt{\tau}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dz = 1 - \phi\left(\frac{\hat{K} + \theta\tau}{\sqrt{\tau}}\right) = \phi\left(-\frac{\hat{K} + \theta\tau}{\sqrt{\tau}}\right) \\ &= \phi\left(\frac{\log\left(\frac{S_1}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) = \phi(d_1(t) - \sigma\sqrt{\tau}) = \phi(d_2(t)) \end{aligned}$$

Portanto,

$$X_c(t) = S(t)\phi(d_1(t)) - Ke^{r\tau}\phi(d_2(t))$$

O preço da opção de venda pode ser obtido pela paridade *Put-Call*.

Proposição 1.3.4. (Paridade Put-Call)

Numa economia sem arbitragem, seja S o preço de um ativo, r a taxa livre de risco e K o strike da opção. Se X_p e X_c denotam o preço de uma opção de venda e de uma opção de compra, respectivamente, então, deve valer a seguinte relação:

$$X_p = X_c - S + Ke^{-r}(T - t)$$

Demonstração

Se ao final do período temos $S < K$, certamente o detentor da opção de venda irá exercê-la e terá um fluxo positivo de K e fica com menos uma unidade do ativo, com um balanço de $K - S$. O detentor do portfólio, não exerce a opção de compra, fica com menos uma unidade do ativo e K , com um balanço $K - S$.

Por outro lado, se $S \geq K$, o detentor da opção de venda não a exercerá ficando com um fluxo zero. O detentor do portfólio, terá K , com o qual

exerce a opção e fecha a sua posição vendida no ativo também ficando com um fluxo zero.

A fórmula de Black-Scholes determina o preço justo de opção europeia no tempo t , em termos do preço inicial do ativo S_0 , do *strike* K , da volatilidade do ativo σ , a taxa de juros r e do tempo até o vencimento T . O fato mais notório é que a fórmula não depende do retorno médio do ativo μ .

A consequência disso é que se os investidores discordarem do retorno médio mas, concordarem com a volatilidade então, eles concordam com o preço da opção (se eles aceitam o modelo proposto). Isso popularizou o mercado de opções, pois, a taxa livre de risco é observável, enquanto previsões da média do ativo não. A explicação para este fato é a troca da medida de probabilidade \mathbb{P} por uma medida martingal equivalente \mathbb{Q} .

Definição 1.3.6. Medida martingal equivalente

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espaço de probabilidade e $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ filtração Browniana. Considere o mercado com $n+1$ ativos $B_0(t), \dots, S_n(t)$ onde $B_0(t) > 0, \forall t \leq T$. Seja \mathbb{Q} uma medida de probabilidade equivalente a \mathbb{P} (ou seja, as medidas têm os mesmos conjuntos de medida zero). Dizemos que \mathbb{Q} é uma medida martingal equivalente a \mathbb{P} , se os processos de preços

$$\tilde{S}_i(t) = \frac{S_i(t)}{B_0(t)}$$

são martingais com respeito a \mathbb{Q} .

A mudança de medida pode ser explicado através do teorema de Girsanov (ver página 104 da referência [2]). Para ilustrar como é feita essa troca, considere uma opção de compra em $t = 0$, com preço de exercício K e vencimento em T . O preço justo desta opção é,

$$\begin{aligned} X_c(0) &= E[H(T)(S(T) - K)] \\ &= E[\exp(-[r + \frac{1}{2}\theta^2]T - \theta W(T))(S_0 \exp([\mu - \frac{1}{2}\sigma^2]T + \sigma W(T)) - K)^+] \\ &= E[\exp(-[r + \frac{1}{2}\theta^2]T - \theta W(T))(S_0 \exp([r - \frac{1}{2}\sigma^2]T + \sigma W(T)) - K)^+]. \end{aligned}$$

Definindo,

$$W^{\mathbb{Q}}(t) = W(t) + \theta t, \tag{1.3.7}$$

$$E^{\mathbb{Q}}(.) = E[(.) \exp(-\frac{\theta^2}{2}T + \sigma(W(T) + \theta T))], \tag{1.3.8}$$

temos,

1. $E^{\mathbb{Q}}[\mathbb{I}_{\Omega}] = E[\exp(-\frac{\theta^2}{2}T + \sigma(W(T) + \theta T))] = 1.$

2. $\mathbb{Q}(A) = E[\mathbf{1}_A] \forall A \in \mathcal{F}_T.$

Com isso \mathbb{Q} é uma medida de probabilidade equivalente a \mathbb{P} . Esta medida é chamada **medida martingal equivalente ou medida neutra ao risco**.

O processo de preços na medida neutra ao risco $\frac{S(t)}{B(t)} = S(t) \exp(\sigma W^{\mathbb{Q}} - \frac{1}{2}\sigma^2 t)$ na medida é \mathbb{Q} -martingal e log-normal.

$$\frac{dS}{S} = rdt + \sigma dW^{\mathbb{Q}}(t) \tag{1.3.9}$$

O processo de preços na medida neutra ao risco é crucial no método de Monte Carlo.

1.3.2 Gregas

Calcular o preço de uma opção é a principal tarefa de quando se compra ou se vende uma opção. No entanto, após esta operação é necessário fazer a cobertura dos riscos incorridos na posição. É necessário se proteger contra variações preço do ativo, taxa de juros e volatilidade. Para medir esses efeitos utilizamos as chamadas "gregas".

Cada grega mede uma dimensão diferente para o risco de uma posição em opções. Dessa forma, é possível administrar os riscos de modo que sejam aceitáveis. As principais gregas são:

$$\frac{\partial}{\partial S} X(t) = \Delta \text{ "delta" }, \tag{1.3.10}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} X(t) = \theta \text{ "teta" }, \tag{1.3.11}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial S^2} X(t) = \Gamma \text{ "gama" }, \tag{1.3.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} X(t) = \rho \text{ "rho" }, \tag{1.3.13}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \sigma} X(t) = v \text{ "vega" }, \tag{1.3.14}$$

$X(t)$ representa uma carteira de opções. O Δ é definido como a taxa de variação do preço de uma opção em relação a variação do preço do ativo subjacente, θ é a taxa de mudança do valor do portfólio em função do tempo,

Γ é a taxa de mudança do Δ em relação ao preço do ativo objeto, ρ é a taxa de mudança do valor do portfólio em função da taxa de juros e o ν é a taxa de mudança do valor do portfólio em função da volatilidade.

1.3.3 Opções Americanas

Ao contrário das opções europeias, as opções americanas podem ser exercidas em qualquer data anterior ao vencimento. Esta modificação torna o problema muito mais complexo porque, não é possível replicar exatamente todos os pagamentos que podem decorrer da estratégia do detentor da opção. Entretanto, existe uma estratégia capaz de satisfazer.

$$X^*(t) \geq Z(t), \forall t \in [0, T] \mathbb{P} - qc,$$

onde $Z(t)$ é o payoff da opção

Definição 1.3.7. *Promessa contingente americana*

Uma promessa contingente americana é um processo estocástico progressivamente mensurável tal que:

$$\begin{aligned} Z &= (Z(t), \mathcal{F}_t)_t \in [0, T] \text{ com } Z(t) \geq 0, \\ E\left[\sup_{0 \leq s \leq T} (Z(s))^\mu\right] &< \infty \text{ para } \mu > 1. \end{aligned}$$

Nesse capítulo assumiremos que as decisões sobre o exercício da opção pode ser modelada pela escolha de um tempo de parada τ

Definição 1.3.8. *Tempo de Parada*

Uma tempo de parada com respeito a uma filtração $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ é uma função \mathcal{F}_t -mensurável tal que:

1. $\tau : \Omega \mapsto [0, +\infty]$
2. $\{\omega \in \Omega | \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t \forall t$

Definição 1.3.9. *Estratégia de Cobertura (ou Estratégia de Hedging)*

Um par portfólio-consumo admissível $(\pi, c) \in A(x)$ com processo de riqueza $X(t) \geq Z(t) \forall t \in [0, T]$ é chamado estratégia de cobertura com preço x para Z .

Definição 1.3.10. Preço justo de uma opção americana

Seja $\mathcal{H}(x)$ o conjunto das estratégias de hedging com o preço x para Z . $\hat{p} = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid \mathcal{H}(x) \neq \emptyset\}$ é preço justo de uma opção americana.

Teorema 1.3.5. Preço de justo uma opção americana

O preço justo de uma promessa contingente americana B é dado por

$$\hat{p} = \sup_{\tau \in \Sigma_{0,T}} E[\exp(-r\tau)Z(\tau)] = E[H(\tau^*)Z(\tau^*)] \text{ para algum } \tau^* \in \Sigma_{0,T} \quad (1.3.15)$$

onde $\Sigma_{0,T}$ é o conjunto formado pelos tempos de parada, τ^* é o supremo da estratégia de hedging π^* .

\hat{p} é o único preço de não arbitragem.

A demonstração deste resultado está na página 132 da referência [2]. O Teorema 1.3.5 mostra que existe uma estratégia ótima de exercício. Em geral não temos representação explícita para τ^* .

Mesmo nos casos mais simples é necessário o uso de métodos numéricos para realizar a precificação. Neste projeto final, utilizaremos o método de Monte Carlo.

Capítulo 2

Método de Monte Carlo

Neste capítulo apresentaremos o método de Monte Carlo e algumas técnicas de redução de variância. Começaremos ilustrando o funcionamento do método obtendo o preço de uma opção europeia, em seguida explicaremos o conceito matemático do método e encerraremos explicando as duas técnicas mais famosas de redução de variância, as variáveis antitéticas e as variáveis de controle. As referências utilizadas neste capítulo são [3, 4].

A simulação de Monte Carlo é um procedimento em que os números aleatórios são gerados de acordo com as probabilidades associadas a uma fonte de incerteza, como os preços das ações, taxas de juro, taxas de câmbio, preços de commodities entre outros. Os resultados desses experimentos são analisados para determinar os riscos. Para os nossos objetivos, o método tem se demonstrado preciso, particularmente para opções que dependem do caminho (por exemplo as opções americanas) e outras para as quais não existe fórmula fechada conhecida. Para facilitar a compreensão da técnica, vamos ver como o método pode ser utilizado para precificar opções europeias.

Sabemos que a fórmula Black-Scholes é o método analítico para determinar o preço dessas opções. No entanto, vamos realizar esta experiência para demonstrar a eficiência do método. Vamos considerar o modelo de preços apresentado no Capítulo 1 na medida neutra ao risco, isto é ,

$$S(t) = S(0) \exp \left(\left[r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right] t - \sigma W_t \right)$$

Cabe lembrar, que para determinar o valor de uma opção europeia basta simular os valores do ativo apenas no vencimento, no entanto precisaremos de mais passos para precificar opções que dependem do caminho. Os valores de $S(0)$, r , σ são dados, portanto, só precisamos simular o movimento browniano W_t .

Agora usaremos o método de Monte Carlo para precificar opções europeias. Para isso, vamos gerar várias simulações do ativo com risco, calcular o payoff em cada simulação e obter a média. A ideia do método de Monte Carlo é de aproximar o valor esperado de uma variável aleatória, pela média aritmética de uma sequência de realizações independentes da variável. A base matemática do método é a lei forte dos grandes números que será apresentada neste capítulo.

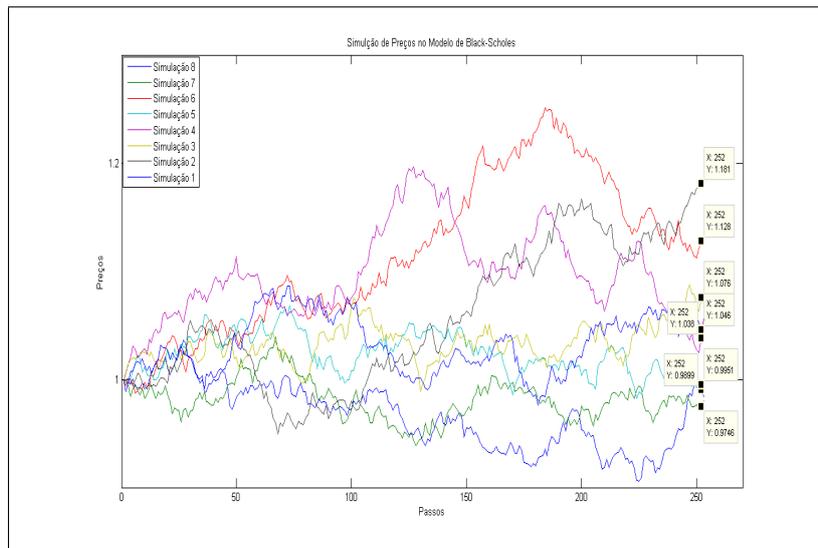


Figura 2.1: Simulações do ativo

A figura 2.1 mostra 8 simulações do processo de preços com taxa de juros 5%, desvio padrão de 10%, preço inicial 1 e *strike* igual 1. Calculando o payoff em cada simulação e fazendo a média descontada a taxa de juros temos que, o preço da *call* europeia é 0.056 e o da *put* é 0.048 europeia. Estes preços estão muito distantes dos preços de Black-Scholes que são 0.068 para *call* e 0.0193 para *put* porém, na medida em que aumentamos o número de simulações observamos uma aproximação entre o preço dado pelo método de Monte Carlo e o preço teórico. Na tabela 2.1 temos aproximações para 100, 1.000, 10.000 e 100.000 realizações.

N° de realizações	100	1.000	10.000	100.000	BLS
Put	0.0184	0.0182	0.0194	0.0193	0.0193
Call	0.0751	0.0693	0.0675	0.0679	0.0680

Tabela 2.1: Monte Carlo opções europeias

Note que, mesmo para um número aparentemente elevado de ensaios,

2.1. JUSTIFICATIVA DO MÉTODO

não necessariamente obteremos todos os dígitos iguais aos dígitos corretos do preço teórico. Isto deve porque o método converge muito lentamente. Além disso pode acontecer que em algumas realizações estimador com $N=100$, tenha desempenho melhor do que para $N = 100.000$. Isto consequência da aleatoriedade do método.

2.1 Justificativa do Método

Estamos interessados em calcular aproximações para média e variância de uma variável aleatória X_1 , utilizando amostras aleatórias independentes.

Teorema 2.1.1. *Lei Forte dos Grandes Números*

Dado X_1 variável aleatória com $E[X_1] = \mu$ e a sequência $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{R}$ de variáveis aleatória integráveis, independentes e identicamente distribuídas (i.i.d), definidas no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Então,

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i \longrightarrow \mu$$

\mathbb{P} -quase certamente.

A demonstração do Teorema 2.1.1 este na referência [11]. Portanto, a lei dos grandes números fornece um estimador para média de X_1 .

Corolário 2.1.2. *Estimador de Monte Carlo*

Dado $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{R}$ uma sequência finita de variáveis aleatória integráveis, i.i.d, então,

$$\bar{\mu}_M := \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i \tag{2.1.1}$$

é estimador para média de X_1 .

A demonstração do corolário é a aplicação direta do Teorema 2.1.1.

Agora veremos um estimador para variância. Por definição temos

$$Var(X_1) := E[(X_1 - E(X_1))^2]$$

2.1. JUSTIFICATIVA DO MÉTODO

então, um estimador natural para a variância seria $\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (X_i - \bar{\mu}_M)^2$. Entretanto, este não é assintoticamente não-enviesado. Contudo, fazendo uma pequena alteração temos:

$$\sigma_M := \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (X_i - \bar{\mu}_M) \quad (2.1.2)$$

é um estimador não enviesado de para a variância de X_1 .

Teorema 2.1.3. Teorema Central do Limite

Dada uma sequência $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{R}$ de variáveis aleatórias integráveis, i.i.d, definida no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, com $\text{Var}(X_i) = \sigma$. Então,

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\left(\sum_{i=1}^M X_i \right) - M\mu}{\sqrt{M}\sigma} \rightarrow N(0, 1)$$

em distribuição.

A demonstração deste teorema está na página 273 da referência [11]. Do teorema central do limite temos que $\sum_{i=1}^M X_i \sim N(M\mu, M\sigma^2)$ então,

$$\frac{\bar{\mu}_M - \mu}{\bar{\sigma}_M / \sqrt{M}} \sim N(0, 1)$$

Com isso, podemos construir intervalos de confiança para a média,

$$\left[\bar{\mu}_M - \frac{1.96\bar{\sigma}_M}{\sqrt{M}}, \bar{\mu}_M + \frac{1.96\bar{\sigma}_M}{\sqrt{M}} \right] \quad (2.1.3)$$

Este é um intervalo de confiança de 95% para a média de X_1 .

Duas características importantes devem ser observadas,

1. O denominador do intervalo é \sqrt{M} então, para reduzir o intervalo de confiança em 10^{-1} é necessário aumentar multiplicar por cem o número de simulações.
2. O tamanho do intervalo é diretamente proporcional ao desvio padrão. Logo, uma estratégia é tentar reduzir a variância transformando o problema de estimar $E[X]$ pelo de, estimar $E[Y]$, onde Y tem variância menor porém, com a mesma média.

2.2 Técnicas de Redução de Variância

Reduzir a variância é muito importante para o método de Monte Carlo pois, se conseguimos reduzir a variância do método é possível obter intervalos de confiança menores. Neste seção, apresentaremos duas técnicas bastante utilizadas para reduzir a variância do método.

2.2.1 Variáveis Antitéticas

Um par de variáveis aleatórias (X, Y) é chamado antitético se X, Y tem a mesma distribuição e são negativamente correlacionadas.

Vamos calcular a variância da média aritmética entre um par antitético (X, Y)

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(\frac{X+Y}{2}\right) &= \frac{1}{4}(\text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)) \\ &= \frac{1}{2}(\text{Var}(X) + \text{Cov}(X, Y)). \end{aligned}$$

Como os pares são negativamente correlacionados temos $\text{Cov}(X, Y) \leq 0$. Logo,

$$\text{Var}(X) \geq \text{Var}\left(\frac{X+Y}{2}\right) = \frac{1}{2}(\text{Var}(X) + \text{Cov}(X, Y)),$$

com isso concluímos que,

$$\text{Var}\left(\frac{X+Y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\text{Var}(X). \quad (2.2.1)$$

Em especial estamos interessados em reduzir a variância de

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right) = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\sqrt{t}z\right),$$

onde $z \sim N(0, 1)$, ou seja, queremos reduzir a variância da função $\exp(z)$.

Lemma 2.2.1. *Se f e g são funções monótonas, então, para qualquer variável aleatória X*

$$\text{Cov}(f(X), g(X)) \geq 0 \quad (2.2.2)$$

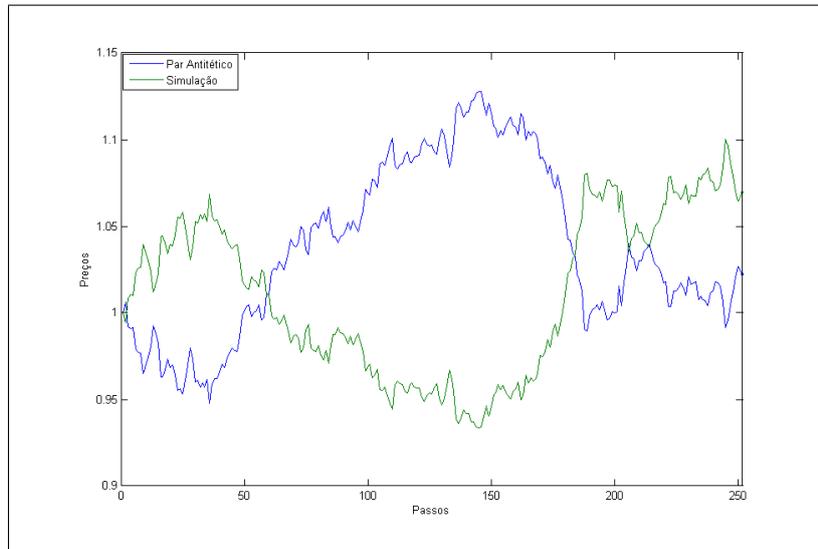


Figura 2.2: Par antitético

Como $\exp(x)$ é monótona crescente, temos $-\exp(-x)$ também é, aplicando o lema temos que $Cov(\exp(x), -\exp(-x)) \geq 0$. Segue-se que, $Cov(\exp(x), \exp(-x)) \leq 0$. Assim, podemos garantir que $\exp(-z)$ é par antitético de $\exp(z)$.

A tabela 2.2 mostra os resultados encontrados para o preço de uma "call at the money" sem dividendos com vencimento em $T=1$, $\sigma = 10\%$, $r = 5\%$, $S_1(0) = 50$. O preço dado por Black-Scholes é 3.4025.

N° de realizações	Preço _{MC}	σ_{MC}	Preço _{Ant}	σ_{Ant}	Black-Scholes
100	3.7550	3.8821	3.4470	1.7024	3.4025
1.000	3.4654	3.8165	3.3664	1.4645	3.4025
10.000	3.3747	3.8357	3.3982	1.4771	3.4025
100.00	3.3962	3.8671	3.4014	1.5049	3.4025

Tabela 2.2: Monte Carlo opções europeias

Observe que, o método tradicional utiliza de praticamente 10 vezes mais realizações, para obter um intervalo de confiança próximo ao que obteríamos se tivéssemos utilizado as variáveis antitéticas.

2.2.2 Variáveis de Controle

Para alguns problemas em finanças existe solução fechada (como a fórmula de Black-Scholes para opções europeias). Para outros existem aproximações analíticas, (por exemplo, as aproximações de Barone-Adesi e MacMillan para opções americanas). A técnica de variáveis de controle consiste em utilizar fórmulas fechadas ou aproximações analíticas, para reduzir a variância do Método de Monte Carlo.

Vamos assumir que desejamos calcular $E(X)$ e temos uma outra variável Y com média conhecida. Definimos Z_θ da seguinte forma:

$$Z_\theta := X + \theta(E(Y) - Y)$$

Onde θ será ajustado de forma a minimizar a variância. Observe que

$$E(Z_\theta) = E(X) + \theta(E(Y) - E(Y)) = E(X),$$

Agora nosso objetivo é de minimizar a variância de $Var(Z_\theta)$.

$$\begin{aligned} Var(Z_\theta) &= Var(X - \theta Y) \\ &= Var(X) - 2\theta Cov(X, Y) + \theta^2 Var(Y), \end{aligned}$$

logo,

$$\theta_{min} = \frac{Cov(X, Y)}{Var(Y)}.$$

Note que o sinal de θ depende do sinal da correção de $Cov(X, Y)$. Na prática, o valor de θ é estimado pois, não conhecemos o da $Cov(X, Y)$ e $Var(Y)$. Esta estimação é realizada por meio de uma simulação piloto.

N° de realizações	Preço _{MC}	σ_{MC}	Preço _{VC}	σ_{VC}
100	3.7550	3.8821	3.4030	0.0777
1.000	3.4654	3.8165	3.4037	0.0763
10.000	3.3747	3.8357	3.3019	0.0767
100.00	3.3962	3.8671	3.4024	0.0773

Quanto mais próxima for variável de controle e mais apurado for o θ melhores serão os resultados.

Capítulo 3

Longstaff-Schwartz

O algoritmo de Longstaff e Schwartz [7] trouxe uma forma simples e eficiente de precificar opções americanas.

A chave deste algoritmo é a utilização do método de mínimos quadrados para estimar a esperança condicional caso o detentor tome a escolha (racional) de manter a opção. Isto faz com que o método seja prontamente aplicável em situações em que o valor da opção dependa do caminho, como é o caso das opções americanas. As referências utilizadas neste capítulo foram [2],[3],[6]e [7].

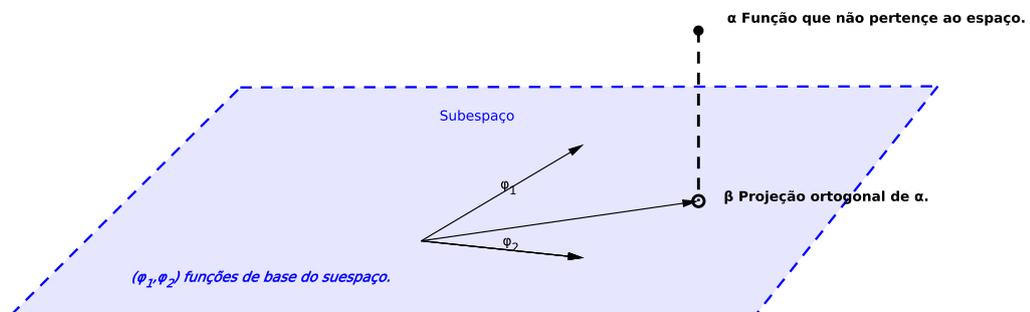


Figura 3.1: Interpretação geométrica do método de mínimos quadrados.

3.1 Exemplo Numérico

Na data de vencimento, a estratégia ótima de exercício de uma opção europeia é de exercer a opção, se a mesma estiver no dinheiro ¹. No caso de uma put americana o exercício ótimo pode ocorrer em qualquer momento entre o lançamento e o vencimento.

O algoritmo de LSM utiliza o método de Monte Carlo para gerar os caminhos e o método dos mínimos quadrados para calcular o valor esperado. Para de transmitirmos a intuição do método utilizaremos o seguinte exemplo numérico:

Considere uma opção de venda sem dividendos, com três possíveis datas de exercício, strike igual a 1.1, taxa livre de risco entre as datas de exercício igual a 6% e valor inicial do ativo igual a 1.

Ilustraremos o algoritmo utilizando apenas oito simulações para o preço conforme a tabela a seguir:

Passo	t=0	t=1	t=2	t = 3
1	1	1.08	1.09	1.34
2	1	1.16	1.26	1.54
3	1	1.22	1.07	1.03
4	1	0.93	0.97	0.92
5	1	1.11	1.56	1.52
6	1	0.76	0.77	0.90
7	1	0.92	0.84	1.01
8	1	0.88	1.22	1.34

Vamos obter o valor esperado através do método dos mínimos quadrados. Utilizando como base o polinômio $aX^2 + bX + c$ e os valores abaixo,

	S_2	Payoff t=3
1	1.09	0
2	1.26	0
3	1.07	0.07
4	0.97	0.18
5	1.56	0
6	0.77	0.2
7	0.84	0.09
8	1.22	0

¹Dizemos que uma opção do tipo *call* está no dinheiro "*in the money*" quando o ativo vale mais do que o valor de exercício. Dizemos que uma *put* está no dinheiro quando o valor do ativo está abaixo do valor de exercício.

3.1. EXEMPLO NUMÉRICO

obtermos que $E\left(\frac{Z(S_3)}{e^r} | S_2\right) = 0.4106X^2 - 1.2026X + 0.8699$. Agora vamos compararemos o valor esperado com o valor intrínseco.

	Exercício em $t = 2$	$E\left[\frac{Z(S_3)}{e^r} S_2\right]$
1	0.0100	0.0469
2	0	0.0065
3	0.0300	0.0532
4	0.1300	0.0897
5	0	-0.0069
6	0.3300	0.1873
7	0.2600	0.1494
8	0	0.0139

Os caminhos em vermelho são aqueles onde a opção foi exercida, e portanto o valor da opção nesses caminhos será o valor intrínseco. Nos demais, o preço será o valor da opção no tempo $t = 3$ descontado pela taxa de juros.

Passo	t=1	t=2	t=3
1	-	0	0
2	-	0	0
3	-	0.0659	0.07
4	-	0.1300	0.18
5	-	0	0
6	-	0.3300	0.20
7	-	0.2600	0.09
8	-	0	0

A matriz acima representa o preço da opção em cada passo no tempo e caminho. Agora vamos repetiremos os procedimentos para determinar o preço em $t = 1$.

	S_1	Payoff t=2
1	1.08	0.100
2	1.16	0
3	1.22	0.300
4	0.93	0.130
5	1.11	0
6	0.76	0.330
7	0.92	0.260
8	0.88	0

3.1. EXEMPLO NUMÉRICO

Agora, temos que a $E\left(\frac{Z(S_2)}{e^r} | S_1\right) = 1.7594X^2 - 4.084X + 2.3798$. Após decidir o exercício temos os seguintes preços:

Passo	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0.0621	0.0659	0.07
4	0.17	0.1300	0.18
5	0	0	0
6	0.34	0.3300	0.20
7	0.18	0.2600	0.09
8	0.22	0	0

Fazendo a média em $t = 1$ descontando a taxa de juros, obtemos que o preço da opção é 0.1144.

Descreveremos agora o método de Longstaff e Schwartz.

Algoritmo de Longstaff e Schwartz

Sejam (X_1^j, \dots, X_M^j) preços dados pelo ativo no caminho j no i -ésimo tempo, Z_i^j valor intrínseco, r_i a taxa de juros entre o tempo $(i, i + 1)$ e U_i^j o preço da opção.

1. Gere os caminhos (X_1^j, \dots, X_M^j) , para $j = 1, \dots, N$.
2. Defina uma base de funções $e = (e^1, \dots, e^m)$.
3. Para $j = 1, \dots, N$ faça os procedimentos 4 e 5.
4. Defina o valor da opção no vencimento, isto é,

$$U_M^j = Z_M^j.$$

5. Para i de $N - 1$ até 1 (decrecendo)
 - (a) Obtenha o vetor $\alpha^*(i)$ dado pela solução do problema de regressão linear (3.2.1).
 - (b) Calcule $E(Z_{i+1}^j | X_i^j)$,

$$E(Z_{i+1}^j | X_i^j) = \langle \alpha^*(i), e \rangle .$$

3.2. JUSTIFICATIVA DO MÉTODO

(c) Defina

$$U_i^j = \begin{cases} Z_i, & \text{se } Z_i \geq E(Z_{i+1}|X_{t_i}^j) \\ \exp(-r_i)U_{i+1}^j & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

6. Finalmente

$$\hat{U} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N U_1^j$$

3.2 Justificativa do Método

Vamos considerar o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, equipado com a filtração discreta $(\mathcal{F}_j)_{j=0, \dots, L}$, onde L denota o número de partições do intervalo $[0, T]$. Dado o processo adaptado $(Z_j)_{j=0, \dots, L}$ onde $Z_0^2, Z_1^2, \dots, Z_L^2$ são variáveis aleatórias integráveis.

Utilizando a definição de tempo ótimo de parada (ver referência[2]). Vamos introduzir o processo de *envoltória de Snell* $(U_j)_{j=0, \dots, L}$ dos payoffs $(Z_j)_{j=0, \dots, L}$ definindo,

$$U_j = \operatorname{ess\,sup}_{\tau \in \Sigma_{j,L}} E[Z_\tau | \mathcal{F}_j] \quad j = 0, \dots, L.$$

Utilizado o princípio da programação dinâmica (ver referência [3]) podemos escrever o processo da seguinte forma:

$$\begin{cases} U_L = Z_L \\ U_j = \max(Z_j, E[U_{j+1} | \mathcal{F}_j]), \quad 0 < j \leq L - 1 \end{cases}$$

Temos com isso, $U_j = E[Z_{\tau_j}]$ com

$$\tau_j = \min\{k \geq j | U_k = Z_k\}.$$

Em particular $E[U_0] = \sup_{\tau \in \Sigma_{0,L}} E[Z_\tau] = E[Z_{\tau_0}]$.

Podemos reescrever a o processo recursivo em termos dos tempos de parada

$$\begin{cases} \tau_L = L \\ \tau_j = j \mathbf{1}_{\{Z_j \geq E[Z_{\tau_{j+1}} | \mathcal{F}_j]\}} + \tau_{j+1} \mathbf{1}_{\{Z_j < E[Z_{\tau_{j+1}} | \mathcal{F}_j]\}}, \quad 0 < j \leq L - 1 \end{cases}$$

3.2. JUSTIFICATIVA DO MÉTODO

Esta formulação em termos dos tempos de parada desempenha papel fundamental no método de regressão LSM.

O método necessita que o modelo seja uma cadeia de Markov. Suponhamos que exista uma cadeia markoviana (\mathcal{F}_j) , o processo $(X_j)_{j=0,\dots,L}$ com espaço de estado (E, ε) onde para cada j

$$Z_j = f(j, X_j)$$

onde $f(j, \cdot)$ é uma função de Borel. Então nós temos, $U_j = V(j, X_j)$ para alguma função de Borel e $E[Z_{\tau_{j+1}} | \mathcal{F}_j] = E[Z_{\tau_{j+1}} | X_j]$. Vamos assumir também que o estado inicial $X_0 = x$ é determinístico, com isso temos que U_0 também o é.

Primeiro, aproximaremos a esperança condicional com respeito a X_j pela projeção ortogonal gerada por uma base de funções reais $(e_k(x))_{k \geq 1}$ definida em E . Denotaremos por P_j^m a projeção ortogonal no espaço $L^2(\Omega)$ gerada pela base de funções reais $(e_1(x), \dots, e_m(x))$ com isso temos:

$$\begin{cases} \tau_L^m = L \\ \tau_j^m = j \mathbf{1}_{\{Z_j \geq P_j^m(Z_{\tau_{j+1}^m})\}} + \tau_{j+1} \mathbf{1}_{\{Z_j < P_j^m(Z_{\tau_{j+1}^m})\}}, \quad 0 < j \leq L - 1 \end{cases}$$

A partir desses tempos de parada, obtemos uma aproximação para o valor da função:

$$U_0^m = \max(Z_0, E[Z_{\tau_1^m}])$$

Lembrando que $Z_0 = f(0, x)$ é determinístico. Agora vamos aproximar via método de Monte Carlo $E[Z_{\tau_1^m}]$. Vamos supor que podemos simular N caminhos independentes $(X_j^1, \dots, X_j^n, \dots, X_j^N)$. Denotaremos por $Z_j^n = f(j, X_j^n)$ o payoff associado ao passo $j = 0, \dots, L$ da n -ésima simulação $n = 1, \dots, N$.

Então, para cada caminho n , podemos estimar os tempos de parada τ_j^m por:

$$\begin{cases} \tau_L^{n,m,N} = L \\ \tau_j^{n,m,N} = j \mathbf{1}_{\{Z_j \geq \alpha^{(m,N)} \cdot e^m(X_j^n)\}} + \tau_{j+1} \mathbf{1}_{\{Z_j < \alpha^{(m,N)} \cdot e^m(X_j^n)\}}, \quad 0 < j \leq L - 1, \end{cases}$$

onde $x \cdot y$ é o produto interno usual em \mathfrak{R}^m , e^m é a base de funções reais e $\alpha^{(m,N)}$ é dado por:

$$\alpha^{(m,N)} = \arg \min_{\alpha \in \mathfrak{R}} \sum_{n=1}^N (Z_{\tau_{j+1}^{n,m,N}} - \alpha \cdot e^m(X_j^n)) \quad (3.2.1)$$

Finalmente, a partir das variáveis $\tau^{n,m,N}$ obtemos a seguinte aproximação para U_0^m :

$$U_0^{m,N} = \max\left(Z_0, \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Z_{\tau_{j+1}^n}^{n,m,N}\right)$$

3.2.1 Convergência

No método de Longstaff-Schwartz são realizadas duas estimativas:

1. A esperança condicional dada por uma projeção ortogonal gerada por uma base finita de funções.
2. O valor esperado para o preço da opção via o método de Monte Carlo.

Na referência [7] é demonstrada detalhadamente a convergência do método. Basicamente são demonstrados dois resultados:

1. Na medida em que o número de elementos da base de funções aumenta mais próximo do preço real fica U_0^m , isto é:

$$U_0^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} U_0$$

2. Na medida em que aumenta o número de simulações do ativo objeto, o valor de $U_0^{m,N}$ converge quase certamente para U_0^m , isto é,

$$U_0^{m,N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} U_0^m$$

Os resultados demonstrados asseguram convergência de ordem $O(\frac{1}{N})$.

3.2.2 Espaços de Funções

Sejam $\alpha \in \mathfrak{R}^+$ e $\mathbf{C}^0 = [-\alpha, \alpha]$ o conjunto das funções contínuas no intervalo $[-\alpha, \alpha]$. Esse conjunto munido das operações de soma e multiplicação escalar pontuais constitui-se num espaço linear de dimensão infinita. Isto significa que cada função no espaço funcional pode ser representada como uma combinação linear das funções da base.

Neste projeto utilizaremos os polinômios de Laguerre, que é a base utilizada por Longstaff e Schwartz (2001). Outros exemplos de espaços de funções são os polinômios de Hermite, Legendre, Chebyshev, Gegenbauer e Jacobi.

3.2.3 Resultados

Aqui apresentamos os resultados obtidos com a implementação do método LSM, vamos compará-los com os preços encontrados através do método binomial com 1000 passos. Os parâmetros utilizados no LSM foram:

- $S_0 = 32, S_0 = 30$ e $S_0 = 28$
- taxa de juros de 5%.
- Vencimento de 1 ano.
- Strike 30.
- Volatilidade 10%, 20% e 40%.
- 100 mil simulações do ativo.
- Base de funções de Laguerre com dimensão igual a 4.
- 50 datas de exercício.

S0	σ	Black Sholes	Binomial	Custo do Antecipado Exercício	LSM	Diferença Binomial LSM
30	.1	0.5784	0.7311	0.1527	0.7257	0.0054
30	.2	1.6721	1.8270	0.1549	1.8271	0.0001
30	.4	3.9438	4.1000	0.1562	4.1003	0.0003
28	.1	1.4160	2.0057	0.5897	1.9890	0.0167
28	.2	2.5303	2.8157	0.2854	2.8167	0.0003
28	.4	4.7545	4.9628	0.2083	4.9613	0.0015
32	.1	0.1893	0.2237	0.0344	0.2091	0.0154
32	.2	1.0626	1.1456	0.0830	1.1368	0.0088
32	.4	3.2591	3.3791	0.1200	3.3636	0.0155

Tabela 3.1: *Método de Longstaff-Schwartz*

A tabela 3.1 que os valores obtidos utilizando o método binomial e o método LSM são muito próximos. Considerando como referência o preço dado pelo método binomial, observamos o erro relativo em geral é menor do que 1%.

Simulações

Nosso objetivo é de verificar a precisão do método e a distribuição dos preços. Para isso, vamos realizar a precificação da mesma opção várias vezes. Utilizaremos 500, 1000 e 5000 simulações, para uma opção americana *in the money*, *at the money* e *out the money* e variância de 20%.

Os demais parâmetros são 5000 simulações do ativo, 50 datas de exercício e uma base de funções de Laguerre com dimensão igual a 4.

Esses parâmetros foram definidos após realizarmos simulações piloto. O preço de uma opção americana que não paga dividendo é igual ao preço de sua correspondente europeia (ver pagina 131 da referência [2]). Logo, uma forma sistemática de escolher a base e a dimensão a serem utilizadas é fixando o valor uma call europeia e obter o seu preço através do método.

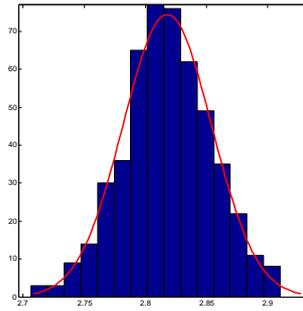
Realizamos este procedimento 500 vezes com 500 simulações do ativo para cada base e dimensão. Os resultados podem ser verificados na tabela 3.2.3. Verificamos que para todas as bases testadas a dimensão 4 mostrou-se suficiente.

Claramente poderíamos ter escolhido qualquer uma das bases testadas já que os resultados foram semelhantes. Escolhemos a base de Laguerre por ter sido a base utilizada pelos desenvolvedores do método.

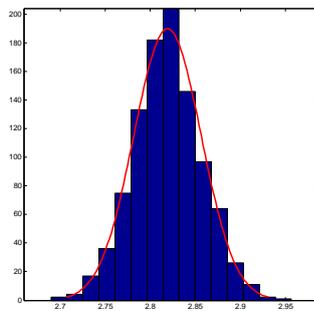
Base	Dimensão	Preço Médio LSM	Preço Black-Scholes	Diferença Black-Scholes LSM
Laguerre	3	3.0056	3.1352	0.1296
Laguerre	4	3.1319	3.1352	0.0033
Laguerre	5	3.1290	3.1352	0.0062
Canônica	3	3.0046	3.1352	0.1306
Canônica	4	3.1330	3.1352	0.0022
Canônica	5	3.1316	3.1352	0.0036
Hermite	3	3.0028	3.1352	0.1324
Hermite	4	3.1349	3.1352	0.0003
Hermite	5	3.1321	3.1352	0.0031

Tabela 3.2: Preços de call americana sem dividendos obtidos através do método LSM. Parâmetros $r = 5\%$, $\sigma = 20\%$, $T = 1$, $S_0 = K = 30$.

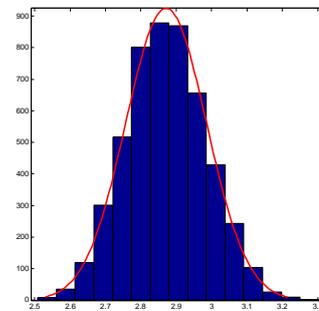
3.2 Resultados



(a) 500 simulações



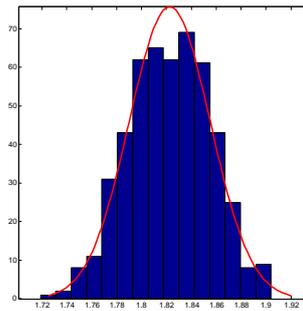
(b) 1000 simulações



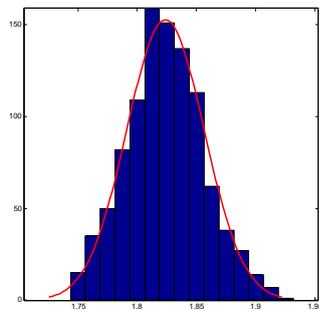
(c) 5000 simulações

Figura 3.2: Histogramas dos preços com densidade ajustada para $S_0=28$ e volatilidade de 20%.

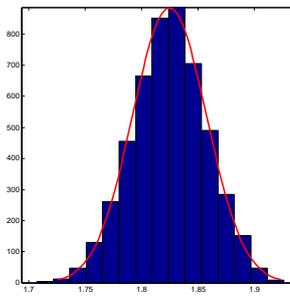
3.2 Resultados



(a) 500 simulações



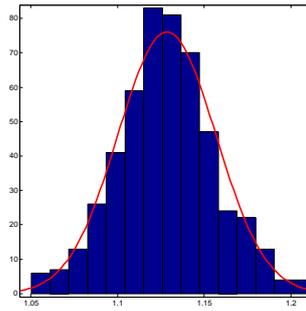
(b) 1000 simulações



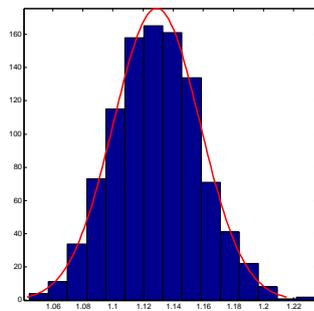
(c) 5000 simulações

Figura 3.3: Histogramas dos preços com densidade ajustada para $S_0=30$ e volatilidade de 20%.

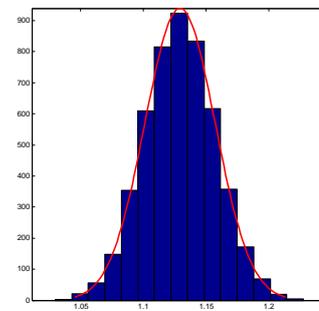
3.2 Resultados



(a) 500 simulações



(b) 1000 simulações



(c) 5000 simulações

Figura 3.4: Histogramas dos preços com densidade ajustada para $S_0=32$ e volatilidade de 20%.

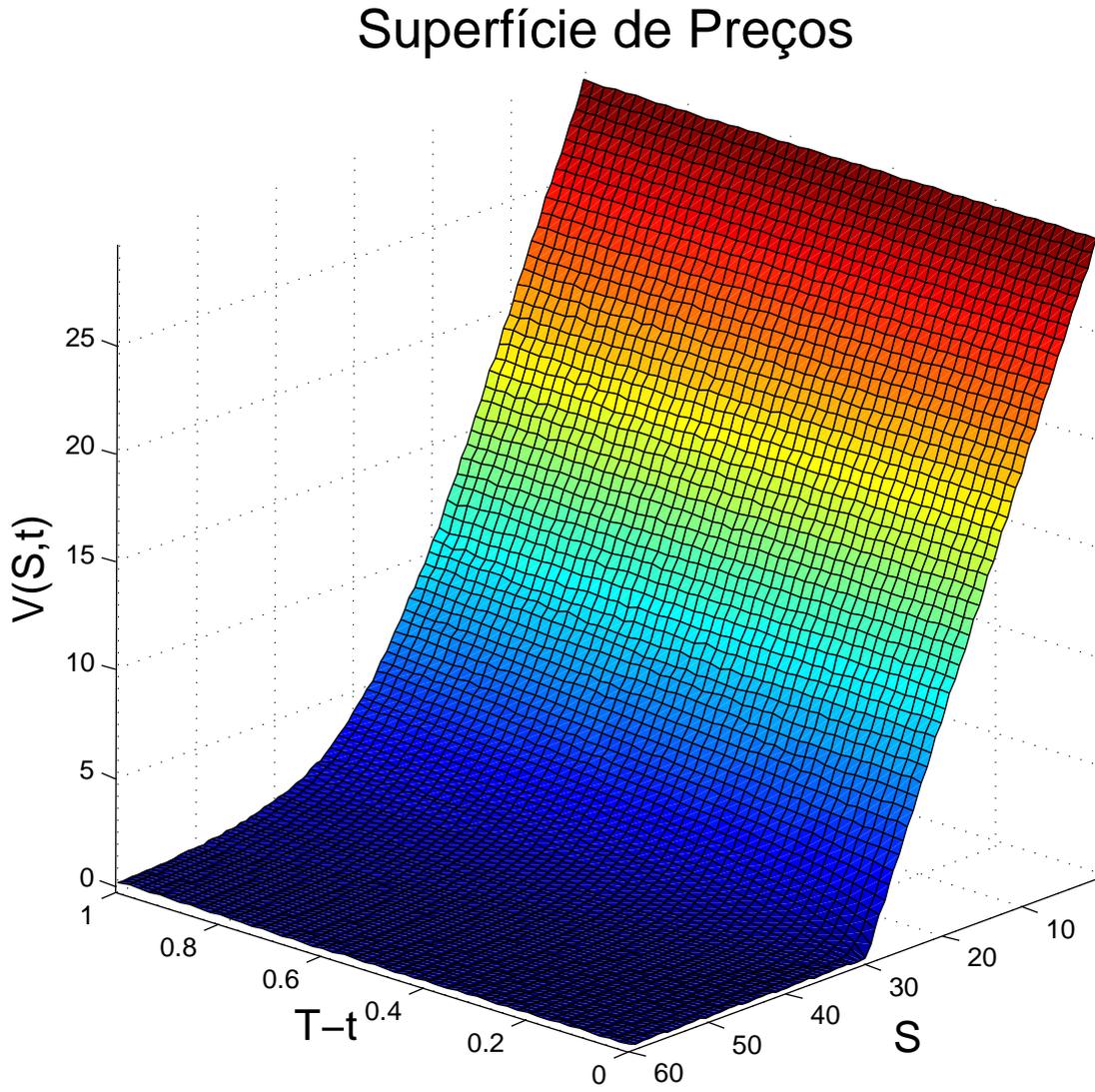


Figura 3.5: Superfície de preços para $K=30$ e volatilidade 40%.

3.2 Resultados

S0	N° Simulações	Binomial	Média LSM	Desvio Padrão
28	500	2.8157	2.8220	0.0362
28	1000	2.8157	2.8170	0.0360
28	5000	2.8157	2.8202	0.0369
30	500	1.8270	1.8258	0.0330
30	1000	1.8270	1.8249	0.0336
30	5000	1.8270	1.8247	0.0329
32	500	1.1456	1.1281	0.0283
32	1000	1.1456	1.1290	0.0287
32	5000	1.1456	1.1290	0.0278

Tabela 3.3: *Simulações do Método de Longstaff-Schwartz*

Observe que a medida que aumentamos o número de simulações a distribuição dos preços se aproxima da distribuição normal. A tabela acima mostra que o método tem baixa variância. A média obtida ficou próxima ao preço dado pelo método binomial.

Capítulo 4

Monte Carlo com Cobertura de Risco

Conforme visto no Capítulo 1, o modelo de Black-Scholes para opções europeias tem duas propriedades notáveis. A primeira é que é possível encontrar uma estratégia de cobertura que é capaz de eliminar o risco. A segunda é que o preço da opção não depende do retorno médio do ativo subjacente. A última propriedade mostra que o preço da opção não está relacionado com a distribuição real dos retornos.

O modelo tem como requisito de inexistência a oportunidades de arbitragem que é efetivamente equivalente a existência de uma medida de probabilidade neutra ao risco.

Pela dificuldade de obter a chamada "medida neutra ao risco", seria desejável possuímos uma teoria de opções em que o processo estocástico gerado pelo ativo fosse usado para calcular o preço da opção.

Apresentaremos a seguir um método baseado nesta abordagem. O "*Optimal Hedged Monte Carlo*" (OHMC) foi inspirado em parte pelo método dos mínimos quadrados (LSM) apresentado no Capítulo 3 e pode ser usado para calcular vários tipos de opções, incluindo aquelas em o preço depende do caminho. Aqui daremos enfoque às opções americanas.

4.1 Conceito do Método

Vamos dividir o intervalo de tempo em M intervalos (em princípio iguais). Usaremos o índice k para denotar o k -ésimo tempo, $k = 0, 1, \dots, M$.

Denotaremos por C_k o preço do derivativo, x_k o preço do ativo e $\phi_k(x_k)$ a quantidade de ativos quando o preço é igual a x_k , ρ é a taxa de juros ao longo do intervalo compreendido entre $(k, k + 1)$.

4.2. PARAMETRIZAÇÃO DO PREÇO E DA COBERTURA

O método minimiza a variância do portfólio $C_k + \phi_k(x_k)x_k$. Por isso construiremos uma estratégia de cobertura usando uma medida quadrática de risco local R_k^2 definida da seguinte forma:

$$R_k^2 = \langle (e^{-\rho}C_{k+1} - C_k + \phi_k(x_k)[e^{-\rho}x_{k+1} - x_k])^2 \rangle_o. \quad (4.1.1)$$

$\langle \dots \rangle_o$ é média da distribuição de probabilidade objetiva dos preços.

A minimização da equação (4.1.1) em função de $C_k, \phi(x_k)$, permite determinar o custo da cobertura no instante k desde que, C_{k+1} seja conhecido (ver referência [10]). No modelo de Black-Scholes é possível zerar este risco. O cálculo numérico da estimativa deste risco através do método de Monte Carlo é feito da seguinte forma:

$$R_k^2 \simeq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (e^{-\rho}C_{k+1}(x_{k+1}^n) - C_k(x_k^n) + \phi_k(x_k^n)[e^{-\rho}x_{k+1}^n - x_k^n])^2, \quad (4.1.2)$$

onde N representa o número de caminhos do ativo, agora trabalhando de forma recursiva é possível resolver o problema numericamente.

4.2 Parametrização do Preço e da Cobertura

Para implementar o método fazendo um paralelo com o método LSM, vamos parametrizar $C_k(x)$ e $\phi_k(x)$ utilizando um conjunto \mathcal{L} de um espaço de funções da variável x , com L elementos.

$$C_k(x) = \sum_{a=1}^L \gamma_a C_a(x) \quad (4.2.1)$$

$$\phi_k(x) = \sum_{a=1}^L \varphi_a F_a(x) \quad (4.2.2)$$

Com esta parametrização temos que minimizar o funcional,

$$\hat{R}_k^2 := \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (e^{-\rho}C_{k+1}(x_{k+1}^n) - \sum_{a=1}^L \gamma_a C_a(x_k^n) + \sum_{a=1}^L \varphi_a \phi_a(x_k^n)[e^{-\rho}x_{k+1}^n - x_k^n])^2 \quad (4.2.3)$$

Em geral a melhor estratégia não é igual ao Δ -hedge, porém, pode se mostrar que a diferença entre elas é pequena dentro de vários modelos incluindo o modelo de Black-Scholes. Portanto, podemos definir:

$$\gamma_a^k \equiv \varphi_a^k \quad (4.2.4)$$

$$F_a(x) \equiv \frac{dC_a(x)}{dx} \quad (4.2.5)$$

Para processos gaussianos este procedimento levará a resultados exatos, além de reduzir o custo computacional. Descreveremos agora o método de Bouchaud, Potters e Sestovic.

Algoritmo OHMC

Sejam (X_1^j, \dots, X_M^j) preços dado pelo ativo no caminho j , no k -ésimo tempo. Denotaremos por Z_k^j valor intrínseco e C_k^j o preço da opção.

1. Gere os caminhos (X_1^j, \dots, X_M^j) para $j = 1, \dots, N$, utilizando probabilidades objetivas.
2. Defina as bases de funções para C_a e F_a .
3. Para $j = 1, \dots, N$ faça os procedimentos 4 e 5.
4. Defina o valor da opção no vencimento, isto é,

$$C_M^j = Z_M^j$$

5. Para k de $M - 1$ até 1 (decrecendo)
 - (a) Gere o vetor $[C_a(X_k^j), F_a(X_k^j) (X_k^j - e^{-\rho} X_{k+1}^j)]$.
 - (b) Utilizando o vetor obtido em (a) calcule os valores de γ_a^k e φ_a^k , que resolvem o problema de regressão linear(3.2.1).
 - (c) Calcule $C_k(X_k^j) = E(C_{k+1}(X_{k+1}^j)|(X_k^j))$, através de

$$C_k(X_k^j) = \langle \gamma_a^k, C_a(X_t^j) \rangle$$

6. O preço da opção é

$$\hat{C} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N C_1^j$$

4.3. RESULTADOS NA MEDIDA NEUTRA AO RISCO

Para calcular o preço de opções americanas, por exemplo a put, basta substituir $C_{k+1}(X_{k+1}^j)$ por $\max(C_{k+1}(X_{k+1}^j), K - X_k^j)$ na resolução do problema de regressão linear. K representa o *strike* da opção. Este procedimento serve para identificar aonde o exercício antecipado é mais vantajoso.

4.3 Resultados na Medida Neutra ao Risco

Aqui apresentamos resultados obtidos com a implementação do método OHMC. Comparamos os resultados encontrados com os resultados obtidos através do método binomial com 1000 passos.

Os parâmetros serão os mesmos utilizados no método LSM com a exceção do número de simulações do ativo com risco e número de datas de exercícios que são respectivamente, 1000 e 20.

S0	σ	Black Sholes	Binomial	Custo do Antecipado Exercício	OHMC	Diferença Binomial OHMC
30	.1	0.5784	0.7311	0.1527	0.7329	0.0016
30	.2	1.6721	1.8270	0.1549	1.8378	0.0108
30	.4	3.9438	4.1000	0.1562	4.1035	0.0035
28	.1	1.4160	2.0057	0.5897	1.9593	0.0464
28	.2	2.5303	2.8157	0.2854	2.8155	0.0002
28	.4	4.7545	4.9628	0.2083	4.9853	0.0255
32	.1	0.1893	0.2237	0.0344	0.2191	0.0046
32	.2	1.0626	1.1456	0.0830	1.1411	0.0045
32	.4	3.2591	3.3791	0.1200	3.3706	0.0085

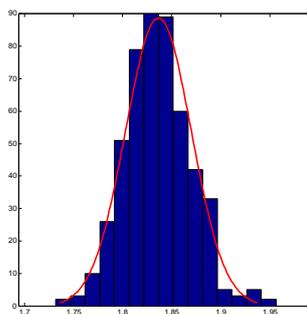
Tabela 4.1: *Monte Carlo com cobertura de risco na medida neutra ao risco*

A tabela 4.1 mostra que os resultados com o método OHMC estão próximos aos resultados obtidos com o método binomial em geral erro relativo é menor do que 1%.

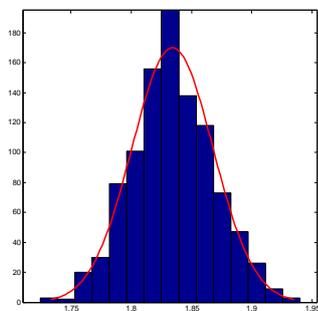
Simulações

Assim como no capítulo anterior, realizamos simulações piloto para determinar quais seriam o número mínimo de simulações, datas de exercício e dimensão do espaço necessário para obter resultados razoáveis. Desta vez utilizamos 500 simulações do ativo, 20 datas de exercício e o espaço de funções de Laguerre com dimensão igual a 7, calculamos cada preço 500 vezes.

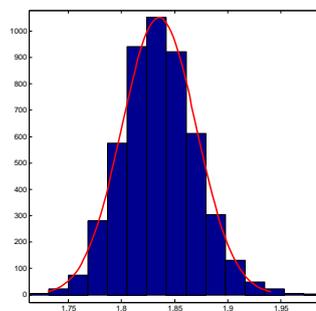
4.3. RESULTADOS NA MEDIDA NEUTRA AO RISCO



(a) 500 simulações



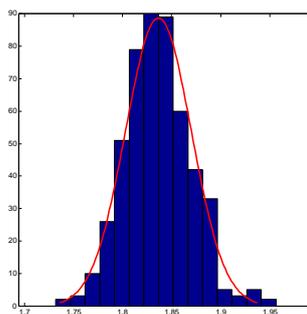
(b) 1000 simulações



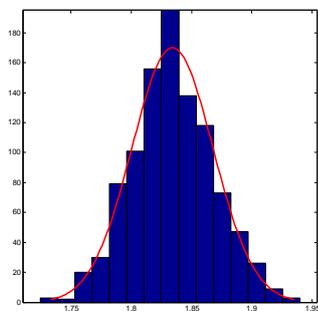
(c) 5000 simulações

Figura 4.1: Histogramas dos preços com densidade ajustada para $S_0=28$ e volatilidade de 20%.

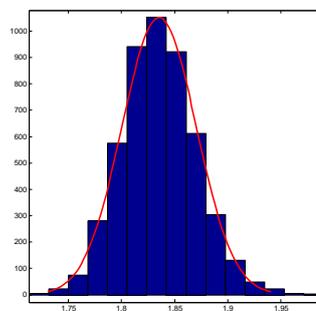
4.3. RESULTADOS NA MEDIDA NEUTRA AO RISCO



(a) 500 simulações



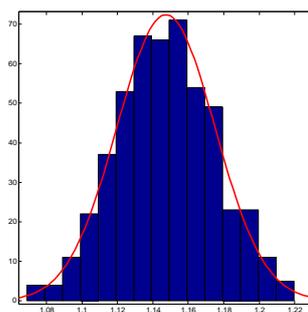
(b) 1000 simulações



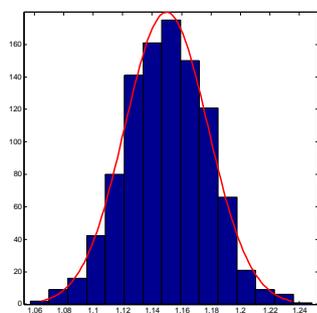
(c) 5000 simulações

Figura 4.2: Histogramas dos preços com densidade ajustada para $S_0=30$ e volatilidade de 20%.

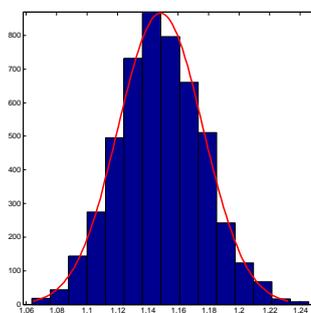
4.3. RESULTADOS NA MEDIDA NEUTRA AO RISCO



(a) 500 simulações



(b) 1000 simulações



(c) 5000 simulações

Figura 4.3: Histogramas dos preços com densidade ajustada para $S_0=32$ e volatilidade de 20%.

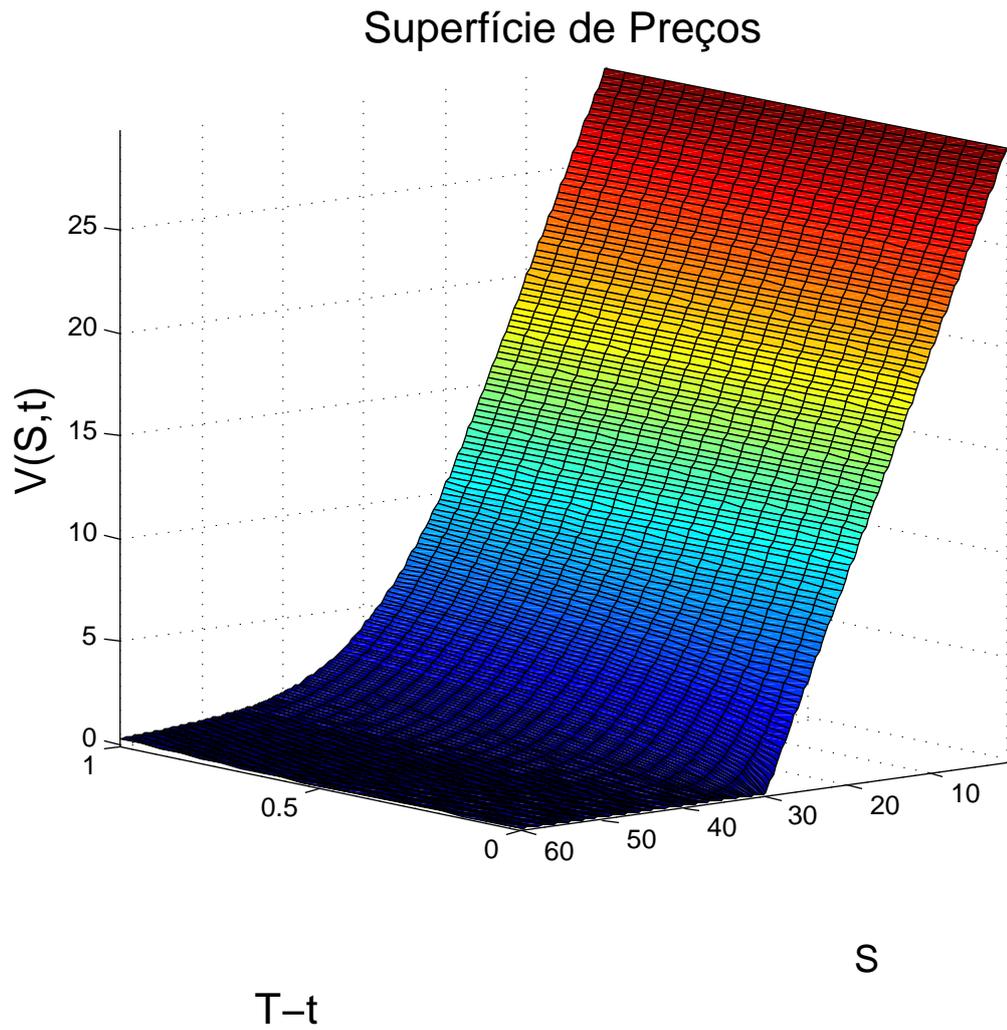


Figura 4.4: Superfície de preços para $K=30$ e volatilidade 40 %.

4.4. RESULTADOS NA MEDIDA HISTÓRICA

S0	N° Simulações	Binomial	Média OHMC	Desvio Padrão
28	500	2.8157	2.8064	0.0470
28	1000	2.8157	2.8073	0.0452
28	5000	2.8157	2.8092	0.0425
30	500	1.8270	1.8365	0.0336
30	1000	1.8270	1.8342	0.0336
30	5000	1.8270	1.8354	0.0350
32	500	1.1456	1.1473	0.0277
32	1000	1.1456	1.1497	0.0283
32	5000	1.1456	1.1484	0.0279

Tabela 4.2: *Método de Monte Carlo com Cobertura*

Assim como obtido no método de mínimos quadrados verificamos que, a medida que aumentamos o número de simulações a distribuição dos preços se aproxima da distribuição normal. A tabela 4.2 mostra que o método obteve bons resultados mesmo com um número pequeno de simulações do ativo com risco, mantendo a variância baixa e a média próxima ao preço dado pelo método binomial.

4.4 Resultados na Medida Histórica

A parte mais interessante desse o método é que possível realizar o apreçamento de opções a partir de um série histórica, com os resultados convergindo para o preço de Black-Sholes, isto é, a medida histórica convergindo para medida neutra ao risco (MNR).

Vamos exemplificar precificando uma call europeia, com os mesmos parâmetros utilizados na precificação na MNR, os dados utilizados são da série diária de preços da Petrobrás (PETR4) do período de 01 de dezembro de 2012 até 01 de novembro de 2012. Desta série extraímos a média anual dos retornos e á utilizamos para realizar a simulação do ativo com risco. Os resultados obtidos convergem para o preço dado pelo modelo analítico, como podemos verificar na tabela 4.3:

4.4. RESULTADOS NA MEDIDA HISTÓRICA

S0	σ	Black Sholes	OHMC	Diferença Black-Sholes OHMC
30	.1	2.0415	2.0179	0.0236
30	.2	3.1352	3.1271	0.0081
30	.4	5.4069	5.3987	0.0082
28	.1	0.8791	0.8729	0.0069
28	.2	1.9934	1.9889	0.0045
28	.4	4.2176	4.2161	0.0015
32	.1	3.6524	3.6110	0.0414
32	.2	4.5257	4.5424	0.0167
32	.4	6.7222	6.7130	0.0092

Tabela 4.3: Monte Carlo com cobertura de risco na medida histórica.

Como podemos ver, os resultados na medida histórica convergem, os preços estão convergindo para o preço de Black-Scholes.

A figura a seguir mostra a distribuição das simulações do preço do ativo no vencimento. O histograma em vermelho mostra a simulação na MNR, em ambas utilizamos os mesmos números aleatórios para construção da parte estocástica do processo.

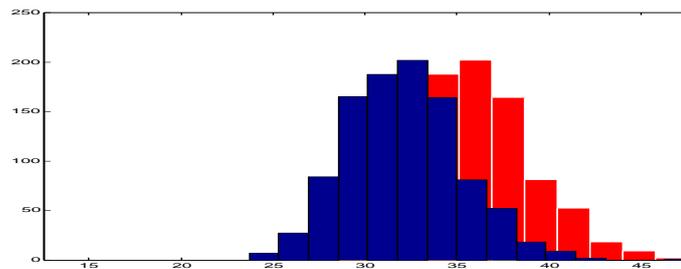


Figura 4.5: Medida Neutra ao Risco x Medida Histórica

Observe que o retorno médio do ativo é menor que a taxa de juros, apesar disso, os resultados encontrados estão próximos dos resultados obtidos através do modelo de Black-Scholes.

Capítulo 5

Considerações Finais

O objetivo deste trabalho foi de implementar o método de mínimos quadrados de Longstaff-Schwartz e o método de Monte Carlo com Cobertura de Risco de Bouchaud, Potters e Sestovic para a put americana sem dividendos

Para isso, no primeiro capítulo apresentamos o modelo de preços em tempo contínuo, o teorema de completude de mercados e realizamos apreçamento de opções europeias via replicação. Ainda neste capítulo, demonstramos a fórmula de Black-Scholes para opções europeias e obtemos o único preço de não arbitragem de uma opção americana.

No segundo capítulo, discutimos sobre o método de Monte Carlo ilustrando o seu funcionamento e explicando o conceito matemático do método. Abordamos intervalos de confiança e mostramos duas técnicas de redução de variância, as variáveis antitéticas e as variáveis de controle.

O terceiro capítulo, foi dedicado ao método de mínimos quadrados de Longstaff-Schwartz. Iniciamos com o um exemplo numérico, apresentamos o algoritmo e explicamos o seu conceito.

S0	σ	Binomial	LSM	Diferença
30	.1	0.7311	0.7257	0.0054
30	.2	1.8270	1.8271	0.0001
30	.4	4.1000	4.1003	0.0003
28	.1	2.0057	1.9890	0.0167
28	.2	2.8157	2.8167	0.0003
28	.4	4.9628	4.9613	0.0015
32	.1	0.2237	0.2091	0.0154
32	.2	1.1456	1.1368	0.0088
32	.4	3.3791	3.3636	0.0155

Tabela 5.1: *LSM com 50.000 simulações e 50 datas de exercícios.*

Realizamos os teste usando como benchmark o método binomial, os resultados o erro relativo em geral foi menor que 1%. Analisamos também a variância do método sem qualquer técnica de redução, o maior desvio encontro foi de 7,3%.

No quarto capítulo, vimos o Método de Monte Carlo com Cobertura de Risco. Iniciamos explicando o funcionamento do método, a parametrização do preço e do hedged e o algoritmo. Em seguida iniciamos os testes na medida neutra so risco.

S0	σ	Binomial	OHMC	Diferença
30	.1	0.7311	0.7329	0.0016
30	.2	1.8270	1.8378	0.0108
30	.4	4.1000	4.1035	0.0035
28	.1	2.0057	1.9593	0.0464
28	.2	2.8157	2.8155	0.0002
28	.4	4.9628	4.9853	0.0255
32	.1	0.2237	0.2191	0.0046
32	.2	1.1456	1.1411	0.0045
32	.4	3.3791	3.3706	0.0085

Tabela 5.2: *OHMC com 5.000 simulações e 20 datas de exercícios.*

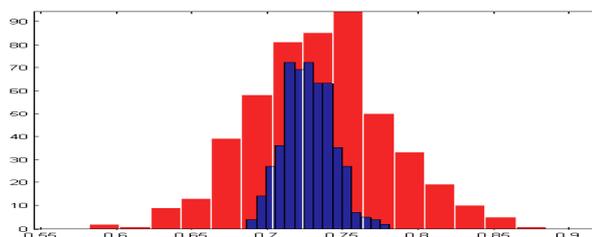
Assim com no método LSM, o erro relativo em geral foi menor que 1%. A variância máxima do método sem qualquer técnica de redução, foi de 8,3%, cabe lembrar que os resultados obtidos com o OHMC utilizaram 10% das utilizadas no método LSM.

Comparação entre os métodos

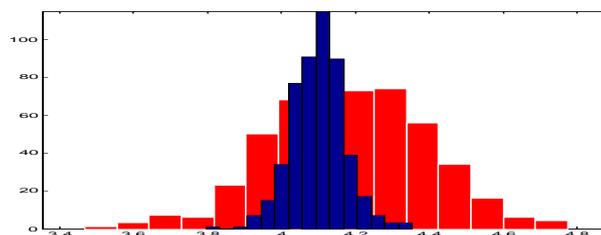
Método de Monte Carlo com Cobertura de Risco, além de poder ser utilizado na medida histórica ele também é um método de baixa variância. Para exemplificar, precificamos 500 cada opção vezes utilizando o mesmo número de simulações do ativo.

Antes de iniciar esta comparação, realizamos mais uma séria de simulações com o objetivo de extrair o melhor resultado possível de cada método. Para cada dimensão utilizada calculamos o preço de 500 vezes. Os resultados estão na tabela 5.3.

A dimensão da base utilizada foi 7 para o método OHMC e 4 para LSM, pois, foram estas que apresentaram o melhor desempenho para cada um dos métodos.



(a) Variância de 10%.



(b) Variância de 40%

Figura 5.1: Histogramas de comparação entre os métodos.

Os parâmetros utilizados na precificação foram, $S_0 = K = 30$, a taxa de juros de 5% e variância de 10% e 40%. O método OHMC apresentou uma variância bem menor, como podemos observar na figura 5.1.

O histograma em vermelho foi obtido através do método de mínimos quadrados e o em azul utilizando o método de Monte Carlo com Cobertura.

As variâncias obtidas pelo método de mínimos quadrados foram de 4.6% e 22% com médias de 0.7352 e 4.1976. No método de Cobertura as variâncias

Método	Dimensão	Preço	Binomial	Diferença
LSM	3	1.8669	1.8270	0.0399
LSM	4	1.8828	1.8270	0.0558
LSM	5	1.9030	1.8270	0.0760
LSM	6	1.9178	1.8270	0.0908
OHMC	3	1.8936	1.8270	0.0666
OHMC	4	1.8505	1.8270	0.0235
OHMC	5	1.8368	1.8270	0.0098
OHMC	6	1.8365	1.8270	0.0095
OHMC	7	1.8098	1.8270	0.0172

Tabela 5.3: *Preços com 500 simulações 20 datas de exercícios.*

foram 1.7% e 9% com médias de 0.7275 e 4.1063. Os preços do modelo binomial são 0.7311 e 4.1000.

Conclusão

Os dois métodos se mostraram muito eficientes na precificação de opções americanas. O método de Longstaff-Schwartz apresentou esses resultados utilizando 90% mais simulações do ativo. Porém, vale lembrar que esses resultados foram obtidos utilizando uma base com dimensão igual 4.

Como os resultados demonstram o método de Monte Carlo com Cobertura de Risco apresentou os melhores resultados quando comparamos a variância dos métodos. Além disso é possível utilizar o método na medida histórica com os preços convergindo para o preço de Black-Scholes. O método não se mostrou resultado satisfatório quando utilizado em dimensão inferior a 5.

Por utilizar um número menor de simulações, apresentar menor variância e poder ser utilizado na medida histórica, entendo que o método de Monte Carlo com Cobertura de Risco com cobertura de risco é o método mais atraente.

Apêndice A

Apêndice

A.1 Probabilidade e Processos Estocástico

Esta seção do apêndice apresenta as definições de alguns conceitos utilizados neste projeto final de curso.

Definição A.1.1. (*σ -álgebra*)

Seja Ω um conjunto, uma coleção de \mathcal{F} de subconjuntos de Ω é uma σ -álgebra quando satisfaz:

- (a) $\Omega \in \mathcal{F}$
- (b) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
- (c) $A_1, A_2, \dots, \in \mathcal{F} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \cup \dots \in \mathcal{F}$

Definição A.1.2. (*Medida de Probabilidade*)

Seja \mathcal{F} uma σ -álgebra de subconjuntos de Ω . Uma função $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma probabilidade (ou medida de probabilidade) quando:

- (a) $\mathbb{P}(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{F}$
- (b) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- (c) Se A_1, A_2, \dots , são dois a dois disjuntos então $\mathbb{P}(\cup A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

Definição A.1.3. (*Espaço de Probabilidade*)

Um espaço de probabilidade é um trio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, onde

A.1. PROBABILIDADE E PROCESSOS ESTOCÁSTICO

- (a) Ω é um conjunto não vazio
- (b) \mathcal{F} é uma σ -álgebra de subconjuntos de Ω
- (c) \mathbb{P} é uma probabilidade em \mathcal{F}

Definição A.1.4. (*Filtração*)

Seja $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ uma família de σ -álgebra em Ω . I é um conjunto ordenado se $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F} \forall t \in I$ e $[s, t \in I \mid t > s \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t]$

Definição A.1.5. (*Processo Adaptado*)

Um par $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in I}$ composto por uma filtração $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ e uma coleção de variáveis aleatórias $(X_t)_{t \in I}$, $X_t : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$, é dito processo adaptado quando, X_t é \mathcal{F}_t -mensurável $\forall t \in I$.

Definição A.1.6. (*Processo Progressivamente Mensurável*)

O processo estocástico $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in I}$ é chamado progressivamente mensurável se $\forall t > 0$ o mapeamento

$$\begin{aligned} & [0, t] \times \Omega \\ & (s, \omega) \mapsto X_s(\omega) \end{aligned}$$

é $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t - \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ -mensurável.

Definição A.1.7. (*Movimento Browniano*)

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espaço de probabilidade. O processo W_t contínuo com as seguintes propriedades:

- $W_0 = 0$ $\mathbb{P} - qc$
- $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$ for $0 \leq s < t$.
- $W_t - W_s$ independente de $W_t - W_s$ para $0 \leq s \leq u \leq v < t$.

é chamado de Movimento Browniano

Definição A.1.8. (*Martingal*)

Um par $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in I}$ composto por uma filtração $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ e uma coleção de variáveis aleatórias, X_t é considerado um martingal se $\forall s, t \in I, s < t$ vale

$$E[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$$

A.2 Códigos em matlab

A.2.1 Simulação no Modelo Log-normal

```
function [S,dt]= simstock(Price,Rate,Volatility,Time,NumPaths,...
    NumSamples ,Dividends,antflag)

% Esta função realiza simulacoes no modelo log-normal

Rate=Rate-Dividends;
dt=Time/NumPaths;
N=NumPaths;
M=NumSamples ;
dW=zeros(M,N);
W=zeros(M,N);
dW(:,1)=randn(M,1)*sqrt(dt);
dW=randn(M,N)*sqrt(dt);
W=cumsum(dW')';

if antflag==1;
t=0:dt:Time;
S1=Price*exp((Rate-0.5*Volatility^2)*(ones(M,1)*t)+...
    Volatility*[zeros(M,1),W]);
S2=Price*exp((Rate-0.5*Volatility^2)*(ones(M,1)*t)-...
    Volatility*[zeros(M,1),W]);
S=[S1;S2];
else
t=0:dt:Time;
S=Price*exp((Rate-0.5*Volatility^2)*(ones(M,1)*t)-...
    Volatility*[zeros(M,1),W]);
end
end
```

A.2.2 Método de Longstaff-Schwartz

```
function [price]= lsmprice(Price,Strike,Rate,Time,Volatility,...
    Dividends,NumSamples, NumPaths,Dimension,Flag)

[S,dt]=simstock(Price,Rate,Volatility,Time,NumPaths,NumSamples,...
    Dividends,0);
C=zeros(size(S));
EV=zeros(size(S,1),NumPaths);
alpha=zeros(Dimension+1,NumPaths);

C(:,end)=exp(-Rate*Time)*max((S(:,end)-Strike)*Flag,0);

Ca =Laguerre(Dimension);

for i=NumPaths:-1:2

    C(:,i)=exp(-Rate*(i)*dt)*max((S(:,i)-Strike)*Flag,0);
    %Payoff da opcao no tempo i

    alpha(:,i)=(Ca(S(:,i))\C(:,i+1));

    EV(:,i)=Ca(S(:,i))*alpha(:,i);
    %Cálculo do Valor esperado e coeficientes da regressao

    idx=find(EV(:,i)>=C(:,i));
    %Identifica os precos de continuacao

    C(idx,i)=exp(Rate*dt)*C(idx,i+1);
    %Traz a valor

end
price=mean(C(:,2))*exp(-Rate*dt);
end
```

A.2.3 Método de OHMC

```
function [price] =HMC(Price,Strike,Rate,Time,Volatility,Dividends,...
    NumSamples,ExerciseDates,Flag,Dimension,Series)

% Esta funcao calcula o preco de uma opcao americana segundo o metodo de
% Buchaut.
%
% Flag 1 para call -1 para put
% Dimension, dimensão do espaço de 1 a 8
% Series, Série histtorica de preços

b=nargin;
if b < 11
[S,dt]=simstock(Price,Rate,Volatility,Time,ExerciseDates,NumSamples,...
    Dividends,0);
else
mu=mean(diff(log(Series)));
[S,dt]=simstock(Price,mu,Volatility,Time,ExerciseDates,NumSamples,...
    Dividends,0);
end
C=zeros(size(S));
C(:,end)=exp(-Rate*Time)*max((S(:,end)-Strike)*Flag,0);
[Ca,Fa]=LaguerreExplicit(Dimension);
for j= ExerciseDates:-1:2
for i=1:size(S,1)
DW(i,:)=[-Ca(S(i,j)) Fa(S(i,j))*(exp(-Rate*dt)*S(i,j+1)-S(i,j))];
end
a(:,j)=DW\max(C(:,j+1),exp(-dt*Rate*j)*(S(:,j+1)-Strike)*Flag);
C(:,j)=-Ca(S(:,j))*a(1:Dimension+1,j);
end
price=exp(-Rate*dt)*mean(C(:,2));
end
```

A.2.4 Base Laguerre

```
function [Ca,Fa]=LaguerreExplicit(Dimension)

L0 = @(x)ones(size(x));
L1 = @(x)(1-x);
L2 = @(x)(1/2)*(x.^2-4*x+2);
L3 = @(x)(1/6)*(-x.^3+9*x.^2-18*x +6);
L4 = @(x)(1/24)*(x.^4 - 16*x.^3 + 72*x.^2 - 96*x+24);
L5 = @(x)(1/120)*(-x.^5 + 25*x.^4 - 200*x.^3 + 600*x.^2 - 600*x + 120);
L6 = @(x)(1/720)*(x.^6 -36*x.^5 + 450*x.^4 - 2400*x.^3 + 5400*x.^2 - ...
    4320*x + 720);
L7 = @(x)(1/5040)*(- x.^7 + 49*x.^6 - 882*x.^5 + 7350*x.^4 - 29400*x.^3+...
    52920*x.^2 - 35280*x + 5040);
L8 = @(x)( 1/40320)*( x.^8 - 64*x.^7 + 1568*x.^6 - 18816*x.^5 +...
    117600*x.^4 - 376320*x.^3 + 564480*x.^2 - 322560*x + 40320);

dL0 = @(x)zeros(size(x));
dL1 = @(x)ones(size(x))*(-1);
dL2 = @(x)(x - 2);
dL3 = @(x)(-x.^2/2 + 3*x - 3);
dL4 = @(x)(x.^3/6 - 2*x.^2 + 6*x - 4);
dL5 = @(x)(- x.^4/24 + (5*x.^3)/6 - 5*x.^2 + 10*x - 5);
dL6 = @(x)(x.^5/120 - x.^4/4 + (5*x.^3)/2 - 10*x.^2 + 15*x - 6);
dL7 = @(x)(- x.^6/720 + (7*x.^5)/120 - (7*x.^4)/8 + (35*x.^3)/6 -...
    (35*x.^2)/2 + 21*x - 7);
dL8 = @(x)(x.^7/5040 - x.^6/90 + (7*x.^5)/30 - (7*x.^4)/3 + (35*x.^3)/3 ...
    - 28*x.^2 + 28*x - 8);

if Dimension==0
Ca=@(x)L0(x);
Fa=@(x)dL0(x);
elseif Dimension==1
Ca=@(x) [L0(x),L1(x)];
Fa=@(x) [dL1(x)];
elseif Dimension==2
Ca=@(x) [L0(x),L1(x),L2(x)];
Fa=@(x) [dL1(x),dL2(x)];
elseif Dimension==3
Ca=@(x) [L0(x),L1(x),L2(x),L3(x)];
Fa=@(x) [dL1(x),dL2(x),L3(x)];
```

```
elseif Dimension==4
Ca=@(x) [L0(x),L1(x),L2(x),L3(x),L4(x)];
Fa=@(x) [dL1(x),dL2(x),dL3(x),dL4(x)];
elseif Dimension==5
Ca=@(x) [L0(x),L1(x),L2(x),L3(x),L4(x),L5(x)];
Fa=@(x) [dL1(x),dL2(x),L3(x),dL4(x),dL5(x)];
elseif Dimension==6
Ca=@(x) [L0(x),L1(x),L2(x),L3(x),L4(x),L5(x),L6(x)];
Fa=@(x) [dL1(x),dL2(x),L3(x),dL4(x),dL5(x),dL6(x)];
elseif Dimension==7
Ca=@(x) [L0(x),L1(x),L2(x),L3(x),L4(x),L5(x),L6(x),L7(x)];
Fa=@(x) [dL1(x),dL2(x),L3(x),dL4(x),dL5(x),dL6(x),dL7(x)];
elseif Dimension==8
Ca=@(x) [L0(x),L1(x),L2(x),L3(x),L4(x),L5(x),L6(x),L7(x),L8(x)];
Fa=@(x) [dL1(x),dL2(x),L3(x),dL4(x),dL5(x),dL6(x),dL7(x),dL8(x)];
else
error('Error, Dimension is out of range');
end
end
```

Referências Bibliográficas

- [1] *Paul Wilmott*. The mathematics of Financial Derivatives, 1995.
- [2] *Ralf Korn and Elke Korn* . Option Pricing and Portfolio Optimization Modern Methods of Financial Mathematics.
- [3] *Ralf Korn, Elke Korn and Gerald Kroisandt*. Monte Carlo Methods and Models in Finance and Insurance.
- [4] *Desmond J. Higham*. An Introduction to Financial Option Valuation, 2004.
- [5] *Marc Potters, Jean-Philippe Bouchaud and Dragan Sestovic*. Hedged Monte-Carlo: low variance derivative pricing with objective probabilities, 2000.
- [6] *Francis A. Longstaff and Eduardo S. Schwartz*. Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach, The Review of Financial Studies Spring 2001 Vol. IS. No. I, pp. 113-147.
- [7] *Emmanuelle Clément, Damien Lamberton, Philip Protter*. An analysis of a least squares regression method for American option pricing, Finance Stochast. 6, 449–471 (2002).
- [8] *John Hull*. Options Futures and Other Derivatives 7th Ed 2008.
- [9] *Carol Alexander*. Modelos de Mercados: Um Guia para a Análise de Informações Financeira 2005.
- [10] *Malvin H. Kalos, Paula A. Whitlock*. Monte Carlo Methods.
- [11] *Barry r. James*. Probabilidade um curso de nível intermediário.