

# Fers à cheval non uniformément hyperboliques engendrés par une bifurcation homocline et densité nulle des attracteurs

J. Palis, J-C. Yoccoz

1. Soit  $f_0$  un difféomorphisme de classe  $C^\infty$  d'une surface  $M^2$  possédant un ensemble basique  $K_0$ , non trivial et de type selle. On rappelle qu'un ensemble basique est une partie compacte invariante hyperbolique localement maximale dans laquelle  $f_0$  a une orbite dense; il est non trivial s'il n'est pas réduit à une orbite périodique, de type selle si ses ensembles stables et instables sont d'intérieur vide.

On suppose qu'il existe des points périodiques  $p_s, p_u$  dans  $K_0$  et un point  $q \in M^2 - K_0$  tels que les variétés stable  $W^s(p_s)$  et instable  $W^u(p_u)$  aient en  $q$  un contact quadratique.

On impose de plus les conditions suivantes, destinées à garantir que l'ensemble compact invariant  $\Lambda_0$ , union de  $K_0$  et de l'orbite de  $q$ , soit localement maximal:

- pour tout entier  $N$  assez grand,  $q$  est un point d'intersection isolé de  $f_0^{-N}(W_{\text{loc}}^s(K_0))$  et  $f_0^N(W_{\text{loc}}^u(K_0))$ ;
- lorsque  $p_s, p_u$  appartiennent à la même orbite périodique, les branches de  $W^s(p_s) - \{p_s\}$ ,  $W^u(p_u) - \{p_u\}$  qui contiennent  $q$  rencontrent  $K_0$ .

2. Il est bien connu que l'ensemble basique  $K_0$ , et en particulier ses point périodiques  $p_s, p_u$ , possèdent une continuation hyperbolique dans un voisinage  $\mathcal{U}$  du difféomorphisme  $f_0$  dans  $\text{Diff}^\infty(M^2)$ . La condition de tangence de  $W^s(p_s), W^u(p_u)$  au voisinage de  $q$  définit dans  $\mathcal{U}$  une hypersurface lisse  $\mathcal{U}_0$ , séparant  $\mathcal{U}$  en deux régions  $\mathcal{U}_+, \mathcal{U}_-$  ( $\mathcal{U}_-$  étant celle où  $W^s(p_s), W^u(p_u)$  ne s'intersectent pas au voisinage de  $q$ ).

Soit  $V$  un voisinage ouvert de  $\Lambda_0$ , assez petit pour que

$$\Lambda_0 = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f_0^{-n}(V)$$

On souhaite alors, pour  $\mathcal{U}$  assez petit et  $g \in \mathcal{U}$ , étudier l'ensemble invariant

$$\Lambda(g) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} g^{-n}(V)$$

Il est facile de voir que

- $\Lambda(g)$  est compact, donc localement maximal
- pour  $g \in \mathcal{U}_-$ ,  $\Lambda(g)$  est la continuation hyperbolique  $K(g)$  de  $K_0$
- pour  $g \in \mathcal{U}_0$ ,  $\Lambda(g)$  est l'union de  $K(g)$  et de l'orbite de tangence prescrite par l'appartenance à  $\mathcal{U}_0$ .

C'est donc dans  $\mathcal{U}_+$  que la situation est intéressante.

**3.** Il est commode de considérer des familles lisses à un paramètre  $(f_t)_{t \in (-t_0, t_0)}$ , transverses en  $t = 0$  à  $\mathcal{U}_0$  (et telles que  $f_t \in \mathcal{U}_-$  pour  $t < 0$ ,  $f_t \in \mathcal{U}_+$  pour  $t > 0$ ); on posera alors  $\Lambda_t = \Lambda(f_t)$ . Rappelons alors un théorème de Takens et un des auteurs.

**Théorème [P-T]:** Lorsque la dimension de Hausdorff de  $K_0$  est  $< 1$ ,  $\Lambda(f_t)$  est hyperbolique (c'est même un ensemble basique) pour un ensemble de paramètres  $E$  de densité totale en 0:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} \text{Leb}(E \cap [0, \varepsilon]) = 1$$

Inversement, nous avons montré:

**Théorème [P-Y]:** Lorsque la dimension de Hausdorff de  $K_0$  est  $> 1$ , pour presque toute famille  $(f_t)$ , l'ensemble  $E$  des valeurs du paramètre pour lesquelles  $\Lambda(f_t)$  est hyperbolique vérifie

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} \text{Leb}(E \cap [0, \varepsilon]) < 1$$

On consultera [P-Y] pour un énoncé plus précis, et [M-Y] pour un énoncé plus fort.

On notera  $d_s$  (resp.  $d_u$ ) la dimension de Hausdorff transverse de  $W_{\text{loc}}^s(K_0)$  (resp.  $W_{\text{loc}}^u(K_0)$ ).

La dimension de Hausdorff de  $K_0$  est alors  $d_s + d_u$ .

Notre résultat est le suivant.

**Théorème:** Il existe un voisinage  $D$  de  $\{d_s + d_u \leq 1\}$  dans  $(0, 1)^2$ , indépendant de  $f_0$ , tel que, si  $(d_s, d_u) \in D$ , alors  $\Lambda_t$  est un fer à cheval non-uniformément hyperbolique pour un ensemble  $E$  de paramètres de densité totale en 0.

Nous expliquons ci-après ce que nous entendons par fer à cheval non-uniformément hyperbolique. Parmi les nombreux travaux traitant de dynamique non-uniformément hyperbolique, mentionnons [Ja], [B-C], [M-V], [B-Y], [B-V]. On pourra aussi consulter [P] où un scénario global est proposé.

Notre démonstration fournit pour  $D$  la forme explicite:

$$D = \{(d_s + d_u)^2 + [\text{Max}(d_s, d_u)]^2 \leq d_s + d_u + \text{Max}(d_s, d_u)\}$$

mais il ressort aussi de la démonstration que ceci n'est certainement pas optimal. En fait, il ne paraît pas exclu de généraliser nos arguments de façon à éliminer toute restriction sur  $d_s, d_u$ , c'est à dire sur  $f_0$ .

4. On choisit, et fixe dans la suite, un système fini  $(R_a)_{a \in \mathcal{A}}$  de rectangles disjoints induisant une partition de Markov de la continuation hyperbolique  $K_t$  de  $K_0$ . On pose  $R = \cup R_a$ .

Pour  $t > 0$ , les courbes  $W^s(\mathcal{O}(p_s))$  et  $W^u(\mathcal{O}(p_u))$  délimitent une région lenticulaire  $L_u$  telle que  $\Lambda_t$  est l'ensemble maximal invariant dans  $R \cup_{0 < i < N_0} f_t^i(L_u)$ . L'entier  $N_0$  ne dépend que de  $f_0$ ; on peut s'arranger pour que  $L_u$  et  $f_t^{N_0}(L_u) := L_s$  soient contenus dans  $R$ , mais que  $f_t^i(L_u)$  ne rencontre pas  $R$  pour  $0 < i < N_0$ .

La dynamique est ainsi constituée

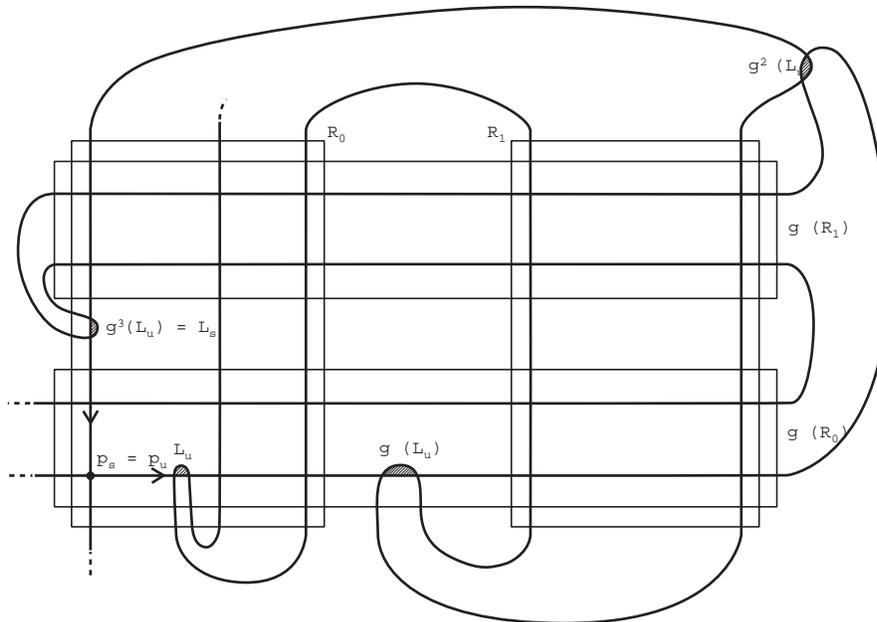
- des applications de transition "hyperboliques"

$$R_a \cap f_t^{-1}(R_{a'}) \longrightarrow f_t(R_a) \cap R_{a'}$$

associées à la partition de Markov;

- du "pli"  $f_t^{N_0} : L_u \rightarrow L_s$

Voir figure ci-dessous, où  $p_s = p_u$  et  $N_0 = 3$ .



5. Considérons des triplets  $(P, Q, n)$  tels que

- $P$  (resp.  $Q$ ) est un sous-rectangle essentiellement vertical (resp. horizontal) de l'un des rectangles  $R_a$ , d'épaisseur  $|P|$  (resp.  $|Q|$ ) approximativement constante;
- la restriction de  $f_t^n$  à  $P$  est un difféomorphisme de  $P$  sur  $Q$ , satisfaisant à une condition de cône uniforme et de petite distortion.

Pour deux tels triplets  $(P, Q, n)$ ,  $(P', Q', n')$ , on peut envisager deux types de composition.

La composition simple (ou hyperbolique) est licite dès que  $P'$  et  $Q$  sont contenus dans le même rectangle  $R_a$ ; on pose  $P'' = P \cap f_t^{-n}(P')$ ,  $Q'' = Q' \cap f_t^{n'}(Q)$ ,  $n'' = n + n'$ .

La composition parabolique est plus délicate. Il est nécessaire que  $Q$  traverse  $L_u$ ,  $P'$  traverse  $L_s$  et  $f_t^{N_0}(Q \cap L_u)$  rencontre  $P'$  suivant deux composantes connexes  $S^\pm$ ; on exige de plus que la distance  $d(P', Q)$  entre le sommet de la bande parabolique  $f_t^{N_0}(Q \cap L_u)$  et la bande verticale  $P'$  vérifie

$$d(P', Q) \geq \text{Max}(|P'|, |Q|)^{1-\eta}$$

où  $0 < \eta \ll 1$  ne dépend que de  $f_0$ . Sous ces conditions, la composition parabolique est définie et fournit deux triplets :

$$\begin{aligned} \hat{P}^\pm &= f_t^{-(n+N_0)}(S^\pm), \quad \hat{Q}^\pm = f_t^{n'}(S^\pm), \\ \hat{n}^+ &= \hat{n}^- = n + n' + N_0 \end{aligned}$$

On notera  $\mathcal{R}$  l'ensemble des triplets  $(P, Q, n)$  obtenus à partir des applications de transition initiales (avec  $n = 1$ ) par saturation pour la composition simple ou parabolique.

6. Soit  $(P, Q, n) \in \mathcal{R}$ . Pour  $\delta \geq |Q|$ , on dira que  $Q$  est  $\delta$ -critique s'il existe  $(P', Q', n') \in \mathcal{R}$  tel que

$$|P'| \leq \delta, \quad d(P', Q) < \delta^{1-\eta}$$

de même, pour  $\delta \geq |P|$ , on dira que  $P$  est  $\delta$ -critique s'il existe  $(P'', Q'', n'') \in \mathcal{R}$  tel que

$$|Q''| \leq \delta, \quad d(P, Q'') < \delta^{1-\eta}$$

Ces définitions nous permettent d'introduire l'ensemble  $E$  des bons paramètres : ce sont ceux tels que, pour tout  $(P, Q, n) \in \mathcal{R}$ , si l'on pose  $\delta = \text{Max}(|P|, |Q|)$ , alors soit  $P$ , soit  $Q$  n'est pas  $\delta$ -critique.

7. Pour un bon paramètre  $t \in E$ , la dynamique est analysée de la façon suivante.

Appelons primitif un triplet  $(P, Q, n) \in \mathcal{R}$  qui ne peut être obtenu à partir de triplets plus simples par composition simple. Appelons courbe stable une intersection décroissante

$\omega = \bigcap_{k \geq 0} P_k$ , pour une suite  $(P_k, Q_k, n_k) \in \mathcal{R}$  avec  $n_k \rightarrow +\infty$ . Notons  $\mathcal{R}_\infty$  l'ensemble des courbes stables.

Soit  $(P, Q, n)$  un triplet primitif; notons  $\mathcal{R}_\infty(P)$  l'ensemble des courbes stables  $\omega \in \mathcal{R}_\infty$  telles que  $P$  est le plus petit rectangle primitif contenant  $\omega$ ; lorsque  $\omega \in \mathcal{R}_\infty(P)$ , l'image  $f_t^n(\omega)$  est contenue dans une courbe stable  $T(\omega)$ ; de plus on définit ainsi une bijection  $T$  de  $\mathcal{R}_\infty(P)$  sur l'ensemble des courbes stables contenues dans le rectangle  $\mathcal{R}_a$  contenant  $Q$ .

Les ensembles  $\mathcal{R}_\infty(P)$  (pour  $(P, Q, n)$  primitif) sont disjoints, et leur union  $\mathcal{W}$  est formée des courbes stables qui ne sont contenues que dans un nombre fini de rectangles primitifs. Considérons alors

$$T: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{R}_\infty$$

On procède de façon classique : on associe à  $T$  un opérateur de Ruelle-Perron-Frobenius, dépendant d'un paramètre de dimension  $d$ ; cet opérateur a une valeur propre dominante, et on ajuste  $d$  de sorte que cette valeur propre soit égale à 1. La valeur  $d = \tilde{d}_s$  obtenue est la dimension de Hausdorff transverse de l'union  $\tilde{\mathcal{R}}_\infty$  des courbes stables  $\omega \in \mathcal{R}_\infty$ . L'opérateur fournit aussi une mesure de probabilité  $T$ -invariante  $\mu_T$  sur  $\mathcal{R}_\infty$ , équivalente à la mesure de Hausdorff en dimension  $\tilde{d}_s$ . La dimension de Hausdorff du complémentaire de  $\mathcal{W}$  dans  $\mathcal{R}_\infty$  est  $< \tilde{d}_s$ .

L'application  $T$  se relève en une application  $\tilde{T}: \tilde{\mathcal{W}} = \bigsqcup_{\mathcal{W}} \omega \rightarrow \tilde{\mathcal{R}}_\infty$ ; la mesure  $\mu_T$  se relève en une unique mesure de probabilité  $\tilde{T}$ -invariante  $\mu_{\tilde{T}}$ . Finalement, on récupère une mesure de probabilité  $f_t$ -invariante  $\mu_t$  à partir de  $\mu_{\tilde{T}}$  car la condition d'intégrabilité requise:

$$\sum_{(P,Q,n) \text{ primitif}} n |P|^{\tilde{d}_s} < +\infty$$

est vérifiée. Les exposants de Lyapunov de  $\mu_t$  sont non nuls.

**8.** Le numéro précédent donne une description assez satisfaisante de la dynamique pour les points qui rencontrent  $\tilde{\mathcal{R}}_\infty$  sous itération positive. L'assertion suivante signifie dans une certaine mesure que cette propriété est presque sûrement vérifiée (pour les bons paramètres).

Soit  $\tilde{\omega}$  une courbe instable (intersection d'une suite décroissante de rectangles  $Q_l$ ). Considérons l'ensemble  $E_s(\tilde{\omega})$  des points de  $\tilde{\omega}$  qui restent dans  $R \cup_{0 < i < N_o} f^i(L_u)$  sous itération positive, et la partie  $\mathcal{E}(\tilde{\omega}) \subset E_s(\tilde{\omega})$  formée des points qui ne rentrent jamais dans  $\tilde{\mathcal{R}}_\infty$  sous itération positive. Nous montrons que

$$\text{HD}(E_s(\tilde{\omega})) = \tilde{d}_s,$$

$$\text{HD}(\mathcal{E}(\tilde{\omega})) < \tilde{d}_s.$$

**9.** Dans la description de l'ensemble  $E$  des bons paramètres évoquée en 6. futur et passé jouent le même rôle. Par conséquent, les propriétés de  $f_t$  sous itération positive décrites dans les deux numéros précédents sont également valables pour l'itération négative de  $f_t$ .

**10.** Le point crucial de la démonstration est bien sûr de prouver que l'ensemble  $E$  des bons paramètres défini en 6. est de densité totale en 0, dès que les dimensions  $d_s, d_u$  vérifient  $(d_s, d_u) \in D$ . Dans cette optique, on définit pour  $t \sim 2^{-M}$ , une suite d'échelles  $(\varepsilon_k)_{k \geq 0}$  par

$$\varepsilon_0 = 2^{-M}, \quad \varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k^{1+\Delta}$$

où  $0 < \Delta \ll 1$

A la  $k^{\text{ième}}$  étape, on dispose d'intervalles  $I_{k,l}$  de longueur  $\varepsilon_k$  formés de paramètres qui satisfont à une série d'inégalités, entre autres :

le nombre de triplets  $(P, Q, N) \in \mathcal{R}$  tels que  $|P| \geq \varepsilon_k$  et  $P$  est  $|P|$ -critique est au plus  $\varepsilon_k^{1-d_s-d_u-C\eta}$ ; de même pour le nombre de triplets tels que  $|Q| \geq \varepsilon_k$  et  $Q$  est  $|Q|$ -critique.

On subdivise chaque  $I_{k,l}$  en  $\varepsilon_k^{-\Delta}$  intervalles de longueur  $\varepsilon_{k+1}$ , ne conservant à l'étape suivante que ceux qui vérifient les inégalités requises à l'échelle  $\varepsilon_{k+1}$ . L'hypothèse  $(d_s, d_u) \in D$  permet de montrer qu'on en garde suffisamment pour que  $E$  soit de densité totale en 0.

## References

- [BC] . Benedicks and L. Carleson, *The dynamics of the Hénon map*, Annals of Math., 133 : 73–169, 1991.
- [BV] . Benedicks and M. Viana, *Solution of the basin problem for Hénon-like attractors*, Preprint, 1999
- [BY] . Benedicks and L.-S. Young, *SRB-measures for certain Hénon maps*, Invent. Math., 112 : 541–576, 1993.
- [Ja] . Jakobson, *Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional maps*, Comm. Math. Phys., 81 : 39–88, 1981.
- [MV] . Mora and M. Viana, *Abundance of strange attractors*, Acta Math., 171 : 1–71, 1993.
- [MY] . G. Moreira and J.-C. Yoccoz, *Stable intersections of regular Cantor set with large Hausdorff dimension*, Preprint, 1998.
- [P] . Palis, *A global view of dynamics and a conjecture on the denseness of finitude of attractors*, Astérisque, 261 : 339–351, 1999.
- [PT] . Palis and F. Takens, *Hyperbolicity and the creation of homoclinic orbits*, Annals of Math., 125 : 337–374, 1987.
- [PY] . Palis and J.-C. Yoccoz, *Homoclinic tangencies for hyperbolic sets of large Hausdorff dimension*, Acta Math., 172 : 91–136, 1994.