

# ITERATIVE-SEQUENTIAL SOLUTION OF COMPRESSIBLE THREE-PHASE FLOW IN POROUS MEDIA

D. MARCHESIN, B. J. PLOHR, J. C. DA MOTA, AND A. J. DE SOUZA

ABSTRACT. We derive a complete implicit finite difference implementation of compressible three phase flow in porous media, taking into account gas compressibility, but ignoring any mass transfer among phases

## INDEX

1. O modelo físico.	2
1.1. As equações básicas	2
1.2. A equação da velocidade	4
1.3. A equação da pressão	6
2. O modelo matemático.	6
2.1. O subsistema de balanços	7
2.2. O subsistema pressão-velocidade	7
3. A discretização temporal no interior da grade.	8
3.1. O subsistema de balanços	8
3.2. O subsistema pressão-velocidade	10
4. A discretização espacial no interior da grade.	12
4.1. O subsistema de balanços	12
4.2. Inicialização do subsistema de balanços	17
4.3. O subsistema pressão-velocidade	17
4.4. A discretização espacial do subsistema p-v no caso incompressível	26
4.5. Inicialização do subsistema pressão-velocidade	28
5. Condições de contorno: Injeção: Saturações, Velocidade e Pressão especificadas; Produção: Neumann nas Saturações.	34
5.1. O subsistema de balanços	35
5.2. O subsistema pressão-velocidade	49
5.3. O subsistema pressão-velocidade no caso incompressível	71
5.4. Inicialização do subsistema pressão-velocidade	77
6. Condições de contorno: Injeção: Fluxo nas Saturações, Velocidade e Pressão especificadas; Produção: Neumann nas Saturações.	91
6.1. O subsistema de balanços	92
6.2. Inicialização do subsistema de balanços	99
6.3. O subsistema pressão-velocidade	102
6.4. O subsistema pressão-velocidade no caso incompressível	102
6.5. Inicialização do subsistema pressão-velocidade	102

7.	Condições de contorno:	
	Injeção: Saturações e Pressão especificadas;	
	Produção: Neumann nas Saturações e Pressão especificada;	102
7.1.	O subsistema de balanços	103
7.2.	O subsistema pressão-velocidade	103
7.3.	O subsistema pressão-velocidade no caso incompressível	122
7.4.	Inicialização do subsistema pressão-velocidade	126
	References	129
	Appendix A. Expressões genéricas para as funções do modelo.	130
A.1.	Funções e derivadas para o subsistema de balanços	130
A.2.	Funções e derivadas para o subsistema pressão-velocidade	133
	Appendix B. Funções típicas e suas derivadas.	135

## 1. O MODELO FÍSICO.

### 1.1. As equações básicas. Vamos iniciar com os balanços de massa.

A equação do balanço de massa para a fase água é:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi \rho_w s_w) = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho_w v_w). \quad (1.1)$$

A equação do balanço de massa para a fase óleo é:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi \rho_o s_o) = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho_o v_o). \quad (1.2)$$

A equação do balanço de massa para a fase gás é:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi \rho_g s_g) = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho_g v_g). \quad (1.3)$$

Consideramos as pressões capilares entre as fases de óleo e água e entre as fases de gás e óleo dadas, respectivamente, por

$$p_{ow}(s_w) = p_o - p_w, \quad \text{e} \quad p_{og}(s_g) = p_o - p_g, \quad (1.4)$$

com  $\frac{dp_{ow}}{ds_w} < 0$  e  $\frac{dp_{og}}{ds_g} < 0$ .

A lei de Darcy para cada fase, na ausência de efeitos gravitacionais, é

$$v_\ell = -K \lambda_\ell \frac{\partial p_\ell}{\partial x}, \quad \ell = w, o, g. \quad (1.5)$$

Usando a definição da velocidade total

$$v = v_w + v_o + v_g, \quad (1.6)$$

e derivando com relação a  $x$  as expressões em (1.4) obtemos o seguinte sistema linear em  $\partial p_w / \partial x$ ,  $\partial p_o / \partial x$ , e  $\partial p_g / \partial x$ :

$$\begin{aligned}
-K\lambda_w \frac{\partial p_w}{\partial x} - K\lambda_o \frac{\partial p_o}{\partial x} - K\lambda_g \frac{\partial p_g}{\partial x} &= v, \\
-\frac{\partial p_w}{\partial x} + \frac{\partial p_o}{\partial x} &= \frac{\partial p_{ow}}{\partial x}, \\
-\frac{\partial p_o}{\partial x} + \frac{\partial p_g}{\partial x} &= -\frac{\partial p_{og}}{\partial x}.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Definimos

$$\lambda = \lambda_w + \lambda_o + \lambda_g, \quad f_w = \lambda_w/\lambda, \quad f_o = \lambda_o/\lambda, \quad \text{e} \quad f_g = \lambda_g/\lambda. \tag{1.8}$$

Resolvendo o sistema linear (1.7) obtemos:

$$\frac{\partial p_w}{\partial x} = -(1 - f_w) \frac{\partial p_{ow}}{\partial x} + f_g \frac{\partial p_{og}}{\partial x} - \frac{v}{K\lambda}, \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial p_o}{\partial x} = f_g \frac{\partial p_{og}}{\partial x} + f_w \frac{\partial p_{ow}}{\partial x} - \frac{v}{K\lambda}, \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial p_g}{\partial x} = -(1 - f_g) \frac{\partial p_{og}}{\partial x} + f_w \frac{\partial p_{ow}}{\partial x} - \frac{v}{K\lambda}. \tag{1.11}$$

Substituímos (1.9), (1.10), e (1.11) nas expressões de  $v_w$ ,  $v_o$ , e  $v_g$ , respectivamente, dadas em (1.5), obtemos:

$$v_w = v f_w + K\lambda_w(1 - f_w) \frac{\partial p_{ow}}{\partial x} - K\lambda_w f_g \frac{\partial p_{og}}{\partial x}, \tag{1.12}$$

$$v_o = v f_o - K\lambda_o f_g \frac{\partial p_{og}}{\partial x} - K\lambda_o f_w \frac{\partial p_{ow}}{\partial x}, \tag{1.13}$$

$$v_g = v f_g + K\lambda_g(1 - f_g) \frac{\partial p_{og}}{\partial x} - K\lambda_g f_w \frac{\partial p_{ow}}{\partial x}. \tag{1.14}$$

Agora, substituindo  $v_w$ ,  $v_o$ , e  $v_g$  nas equações (1.1), (1.2), e (1.3) obtemos,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho_w s_w) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_w f_w v) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ -\rho_w \left( K\lambda_w(1 - f_w) \frac{\partial p_{ow}}{\partial x} + K\lambda_w f_g \frac{\partial p_{og}}{\partial x} \right) \right], \tag{1.15}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho_o s_o) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_o f_o v) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho_o \left( K\lambda_o f_w \frac{\partial p_{ow}}{\partial x} + K\lambda_o f_g \frac{\partial p_{og}}{\partial x} \right) \right], \tag{1.16}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho_g s_g) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_g f_g v) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho_g \left( K\lambda_g f_w \frac{\partial p_{ow}}{\partial x} - K\lambda_g(1 - f_g) \frac{\partial p_{og}}{\partial x} \right) \right]. \tag{1.17}$$

Usamos que  $\lambda_o f_g = \lambda_g f_o$ ,  $\lambda_w f_g = \lambda_g f_w$ ,  $\lambda_w f_o = \lambda_o f_w$ , observamos que

$$\frac{\partial p_{ow}}{\partial x} = \frac{dp_{ow}}{ds_w} \frac{\partial s_w}{\partial x}, \quad \frac{\partial p_{og}}{\partial x} = \frac{\partial p_{og}}{\partial s_g} \frac{\partial s_g}{\partial x} = -\frac{dp_{og}}{ds_g} \frac{\partial s_w}{\partial x} - \frac{dp_{og}}{ds_g} \frac{\partial s_o}{\partial x}, \tag{1.18}$$

e definimos as funções

$$B_{11}(s_w, s_o, p) = -K\lambda_w(1-f_w)\frac{dp_{ow}}{ds_w} - K\lambda_g f_w \frac{dp_{og}}{ds_g}, \quad (1.19)$$

$$B_{21}(s_w, s_o, p) = K\lambda_o f_w \frac{dp_{ow}}{ds_w} - K\lambda_g f_o \frac{dp_{og}}{ds_g}, \quad (1.20)$$

$$B_{12}(s_w, s_o, p) = -K\lambda_g f_w \frac{dp_{og}}{ds_g}, \quad B_{22}(s_w, s_o, p) = -K\lambda_g f_o \frac{dp_{og}}{ds_g}. \quad (1.21)$$

Por conveniência nas substituições, definimos também

$$\begin{aligned} B_{31} &= -(B_{11} + B_{21}) \\ B_{32} &= -(B_{12} + B_{22}). \end{aligned}$$

Com isto podemos, finalmente, escrever o sistema de equações diferenciais parciais (1.15)-(1.17), para os balanços de massa, na seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_w (\phi s_w)) + \frac{\partial}{\partial x} (v \rho_w f_w) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho_w B_{11} \frac{\partial s_w}{\partial x} + \rho_w B_{12} \frac{\partial s_o}{\partial x} \right), \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_o (\phi s_o)) + \frac{\partial}{\partial x} (v \rho_o f_o) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho_o B_{21} \frac{\partial s_w}{\partial x} + \rho_o B_{22} \frac{\partial s_o}{\partial x} \right), \quad (1.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_g (\phi s_g)) + \frac{\partial}{\partial x} (v \rho_g f_g) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho_g B_{31} \frac{\partial s_w}{\partial x} + \rho_g B_{32} \frac{\partial s_o}{\partial x} \right). \quad (1.24)$$

## 1.2. A equação da velocidade.

1.2.1. *A equação da velocidade.* Uma formulação *não conservativa* para a equação da velocidade pode ser obtida da seguinte maneira. Calculando as derivadas no lado esquerdo das equações (1.22), (1.23), e (1.24), obtemos:

$$\phi \rho_w \frac{\partial s_w}{\partial t} + \rho_w f_w \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial x} (\rho_w f_w) + s_w \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho_w) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho_w B_{11} \frac{\partial s_w}{\partial x} + \rho_w B_{12} \frac{\partial s_o}{\partial x} \right), \quad (1.25)$$

$$\phi \rho_o \frac{\partial s_o}{\partial t} + \rho_o f_o \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial x} (\rho_o f_o) + s_o \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho_o) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho_o B_{21} \frac{\partial s_w}{\partial x} + \rho_o B_{22} \frac{\partial s_o}{\partial x} \right), \quad (1.26)$$

$$\phi \rho_g \frac{\partial s_g}{\partial t} + \rho_g f_g \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial x} (\rho_g f_g) + s_g \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho_g) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho_g B_{31} \frac{\partial s_w}{\partial x} + \rho_g B_{32} \frac{\partial s_o}{\partial x} \right). \quad (1.27)$$

Dividindo (1.25) por  $\rho_w$ , (1.26) por  $\rho_o$  e (1.27) por  $\rho_g$ , somando-se os resultados e usando as definições de  $B_{31}$  e de  $B_{32}$ , obtemos a forma não conservativa da equação da velocidade:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v}{\partial x} + v \left( \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial}{\partial x} (\rho_w f_w) + \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial}{\partial x} (\rho_o f_o) + \frac{1}{\rho_g} \frac{\partial}{\partial x} (\rho_g f_g) \right) = \\
 - \frac{1}{\rho_w} s_w \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho_w) - \frac{1}{\rho_o} s_o \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho_o) - \frac{1}{\rho_g} s_g \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho_g) \\
 + \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho_w B_{11} \frac{\partial s_w}{\partial x} + \rho_w B_{12} \frac{\partial s_o}{\partial x} \right) + \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho_o B_{21} \frac{\partial s_w}{\partial x} + \rho_o B_{22} \frac{\partial s_o}{\partial x} \right) \\
 - \frac{1}{\rho_g} \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho_g B_{31} \frac{\partial s_w}{\partial x} + \rho_g B_{32} \frac{\partial s_o}{\partial x} \right),
 \end{aligned}$$

ou usando que  $s_w + s_o + s_g = 1$  e que  $f_w + f_o + f_g = 1$  :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v}{\partial x} + v \left( f_w \frac{\partial}{\partial x} \ln \rho_w + f_o \frac{\partial}{\partial x} \ln \rho_o + f_g \frac{\partial}{\partial x} \ln \rho_g \right) = \\
 - \phi \left( s_w \frac{\partial}{\partial t} \ln \rho_w + s_o \frac{\partial}{\partial t} \ln \rho_o + s_g \frac{\partial}{\partial t} \ln \rho_g \right) - \left( B_{11} \frac{\partial s_w}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial s_o}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} \ln \left( \frac{\rho_g}{\rho_w} \right) \\
 - \left( B_{21} \frac{\partial s_w}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial s_o}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} \ln \left( \frac{\rho_g}{\rho_o} \right). \tag{1.28}
 \end{aligned}$$

Fazendo as substituições  $f_g = 1 - f_w - f_o$  e  $s_g = 1 - s_w - s_o$  e usando propriedades de logaritmos, podemos escrever a equação da velocidade (1.28) na seguinte forma, onde deixamos no segundo membro somente os termos com derivadas em  $t$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v}{\partial x} + v \left( f_w \frac{\partial}{\partial x} \ln \left( \frac{\rho_w}{\rho_g} \right) + f_o \frac{\partial}{\partial x} \ln \left( \frac{\rho_o}{\rho_g} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \ln(\rho_g) \right) \\
 - \left( B_{11} \frac{\partial s_w}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial s_o}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} \ln \left( \frac{\rho_w}{\rho_g} \right) - \left( B_{21} \frac{\partial s_w}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial s_o}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} \ln \left( \frac{\rho_o}{\rho_g} \right) \\
 = -\phi \left( s_w \frac{\partial}{\partial t} \ln \left( \frac{\rho_w}{\rho_g} \right) + s_o \frac{\partial}{\partial t} \ln \left( \frac{\rho_o}{\rho_g} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \ln(\rho_g) \right). \tag{1.29}
 \end{aligned}$$

**Obs 1.1.** Esta expressão mostra imediatamente que se  $\rho_w$ ,  $\rho_o$  e  $\rho_g$  forem constantes, obtemos  $\partial v / \partial x = 0$ .

**Obs 1.2.** Para uma formulação alternativa podemos somar as Eqs. (1.22), (1.23) e (1.24) obtendo a equação de conservação de massa total do fluido:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho_w s_w + \phi \rho_o s_o + \phi \rho_g s_g) + \frac{\partial}{\partial x} \left( v (\rho_w f_w + \rho_g f_g + \rho_o f_o) \right) = \\
 \frac{\partial}{\partial x} \left( (\rho_w B_{11} + \rho_o B_{21} + \rho_g B_{31}) \frac{\partial s_w}{\partial x} + (\rho_w B_{12} + \rho_o B_{22} + \rho_g B_{32}) \frac{\partial s_o}{\partial x} \right). \tag{1.30}
 \end{aligned}$$

Esta equação será denominada de *equação da velocidade conservativa*.

**1.3. A equação da pressão.** Da definição da velocidade total (1.6) e usando a lei de Darcy (1.5), temos que

$$v = v_w + v_o + v_g = -K\lambda_w \frac{\partial p_w}{\partial x} - K\lambda_o \frac{\partial p_o}{\partial x} - K\lambda_g \frac{\partial p_g}{\partial x}. \quad (1.31)$$

De (1.4) temos que  $p_w = p_o - p_{ow}$  e  $p_g = p_o - p_{og}$ . Substituindo as expressões de  $p_w$  e  $p_g$  em (1.31) e usando (1.8) e (1.18), temos uma equação envolvendo a pressão do óleo e as duas pressões capilares, a qual será denominada de *equação da pressão*:

$$v = K \left( -\lambda \frac{\partial p_o}{\partial x} + \left( \lambda_w \frac{dp_{ow}}{ds_w} - \lambda_g \frac{dp_{og}}{ds_g} \right) \frac{\partial s_w}{\partial x} - \lambda_g \frac{dp_{og}}{ds_g} \frac{\partial s_o}{\partial x} \right). \quad (1.32)$$

## 2. O MODELO MATEMÁTICO.

Escolhemos as variáveis  $s_w$ ,  $s_o$ ,  $p_o$ , e  $v$  como as variáveis de estado, e denotamos  $p_o$  simplesmente por  $p$ .

Consideramos

$$\rho_w = \rho_w(p_w), \quad \rho_o = \rho_o(p_o) \quad \text{e} \quad \rho_g = \rho_g(p_g), \quad (2.1)$$

onde  $p_w = p_w(s_w, p_o) = p_o - p_{ow}(s_w)$ ,  $p_g = p_o - p_{og}(s_g)$ . Como  $s_g = 1 - s_w - s_o$ , então  $p_g = p_g(s_w, s_o, p_o)$ . Portanto, finalmente, temos as seguintes dependências para as densidades

$$\rho_w = \rho_w(s_w, p_o), \quad \rho_o = \rho_o(p_o) \quad \text{e} \quad \rho_g = \rho_g(s_w, s_o, p_o). \quad (2.2)$$

Para um sistema fechado nesta variáveis, escolhemos as equações (1.22), (1.23), (1.29) e (1.32), nesta ordem. Assim, em resumo, temos o seguinte modelo trifásico compressível:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_w (\phi s_w)) + \frac{\partial}{\partial x} (v \rho_w f_w) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho_w B_{11} \frac{\partial s_w}{\partial x} + \rho_w B_{12} \frac{\partial s_o}{\partial x} \right), \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_o (\phi s_o)) + \frac{\partial}{\partial x} (v \rho_o f_o) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho_o B_{21} \frac{\partial s_w}{\partial x} + \rho_o B_{22} \frac{\partial s_o}{\partial x} \right), \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} + v \left( f_w \frac{\partial}{\partial x} \ln \left( \frac{\rho_w}{\rho_g} \right) + f_o \frac{\partial}{\partial x} \ln \left( \frac{\rho_o}{\rho_g} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \ln(\rho_g) \right) \\ = -\phi \left( s_w \frac{\partial}{\partial t} \ln \left( \frac{\rho_w}{\rho_g} \right) + s_o \frac{\partial}{\partial t} \ln \left( \frac{\rho_o}{\rho_g} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \ln(\rho_g) \right) \\ + \left( B_{11} \frac{\partial s_w}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial s_o}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} \ln \left( \frac{\rho_w}{\rho_g} \right) + \left( B_{21} \frac{\partial s_w}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial s_o}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} \ln \left( \frac{\rho_o}{\rho_g} \right), \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$v = -K\lambda \frac{\partial p_o}{\partial x} + \left( K\lambda_w \frac{dp_{ow}}{ds_w} - K\lambda_g \frac{dp_{og}}{ds_g} \right) \frac{\partial s_w}{\partial x} - K\lambda_g \frac{dp_{og}}{ds_g} \frac{\partial s_o}{\partial x}. \quad (2.6)$$

**2.1. O subsistema de balanços.** Denominamos de **subsistema de balanços** as Eqs. (2.3)–(2.4).

Numa forma compacta o subsistema de balanços (2.3)–(2.4), pode ser escrito na forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} H_U(U, p) + \frac{\partial}{\partial x} \left( v F_U(U, p) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( B_U(U, p) \frac{\partial U}{\partial x} \right) + G_U(U, p), \quad (2.7)$$

onde

$$U = \begin{pmatrix} s_w \\ s_o \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

As funções  $H_U$ ,  $F_U$ ,  $B_U$ ,  $G_U$  podem ser obtidas comparando a eq. (2.7) com as Eqs. (2.3)–(2.4). Elas e suas jacobianas estão definidas no apêndice (A.1).

**Obs 2.1.** Para comparar melhor com a notação em [3] vamos usar a notação  $\pi(U)$  para representar o vetor de saturações quando estas aparecerem explicitamente nas equações da velocidade e da pressão. No entanto, quando elas aparecerem implicitamente como argumentos de funções mais gerais serão representadas pelo vetor  $U$ . Observamos que em [3]  $U = U(s, T)^T$ , mas no presente modelo não temos a temperatura  $T$ . Portanto, de acordo com a conveniência usaremos a variável  $\pi(U)$  ou  $U$ . Em resumo, neste trabalho temos

$$\pi(U) = U. \quad (2.9)$$

Esta notação será utilizada apenas ao tratar do subsistema  $p$ – $v$  ou de condições de contorno.

**2.2. O subsistema pressão-velocidade.** Denominamos de **subsistema pressão-velocidade** as Eqs. (2.5)–(2.6).

**2.2.1. Equação da velocidade.** A equação da velocidade na forma não conservativa (2.5) pode ser escrita genericamente como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} + v \left( F_v(U, p) \cdot \frac{\partial M_l(U, p)}{\partial x} + \frac{\partial M_g(U, p)}{\partial x} \right) &= -\phi \left( \pi(U) \cdot \frac{\partial M_l(U, p)}{\partial t} + \frac{\partial M_g(U, p)}{\partial t} \right) \\ &+ \left[ B_v(U, p) \otimes \frac{\partial M_l(U, p)}{\partial x} \right] \cdot \frac{\partial \pi(U)}{\partial x} + G_v(U, p), \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde “ $\cdot$ ” é o produto interno de dois vetores. As funções  $F_v$ ,  $M_l$ ,  $M_g$ ,  $B_v$ ,  $G_v$  e  $\phi(x)$  podem ser obtidas comparando (2.10) com (2.5). Elas e suas derivadas estão definidas no Apêndice (A.2.1).

**Obs 2.2.** A operação “ $\otimes$ ” acima, envolvendo matrizes e vetores, que neste modelo resulta num vetor, está definida e exemplificada no Apêndice intitulado “A matriz de viscosidade, suas derivadas e operações” em [3].

2.2.2. *A equação da pressão.* A equação da pressão, ou lei de Darcy, Eq. (2.6) pode ser escrita de uma maneira genérica na forma:

$$v = K \left( R(U, p) \frac{\partial p}{\partial x} + S(U, p) \cdot \frac{\partial \pi(U)}{\partial x} \right), \quad (2.11)$$

onde “.” é novamente o produto interno entre dois vetores. As funções  $K(x)$ ,  $R(U, p)$  e  $S(U, p)$  podem ser obtidas comparando com (2.6). Elas estão definidas no apêndice (A.2.2).

### 3. A DISCRETIZAÇÃO TEMPORAL NO INTERIOR DA GRADE.

Usaremos o método não linear otimizado de Euler/Crank-Nicolson. Suponhamos conhecida a aproximação  $(U^n, v^n, p^n)$ . Seja  $(\bar{U}, \bar{p}, \bar{v})$  uma aproximação temporária do valor de  $(U^{n+1}, v^{n+1}, p^{n+1})$  e  $(\bar{\bar{U}}, \bar{\bar{v}}, \bar{\bar{p}})$  uma nova aproximação a ser determinada de  $(U^{n+1}, v^{n+1}, p^{n+1})$ .

Inicialmente é necessário inicializar as variáveis  $v$  e  $p$  a partir das condições de contorno e das condições iniciais para o subsistema de balanços. A partir daí, num passo de tempo genérico, a idéia é avançar primeiro  $U$  no subsistema de balanços (2.7), considerando  $(\bar{v}, \bar{p})$  fixo e a partir da aproximação  $\bar{U}$  obtida, avançar  $(v, p)$  no subsistema da pressão-velocidade (2.10), (2.11) com  $U$  fixo, obtendo  $(\bar{\bar{v}}, \bar{\bar{p}})$ .

#### O método de Newton.

O sistema (3.5) e o sistema (3.8), (3.11) são a chave para achar  $U^{n+1}$  e  $(v^{n+1}, p^{n+1})$ . Procedemos assim, para avançar do tempo  $t^n$  para o tempo  $t^{n+1}$ .

São conhecidos  $U^n$  e  $(v^n, p^n)$ .

O método de Newton procede pelos seguintes passos.

Inicialmente  $\bar{U} \leftarrow U^n$  e  $(\bar{v}, \bar{p}) \leftarrow (v^n, p^n)$ , com isto todos os coeficientes  $\partial \bar{H}_U / \partial p$ , etc, podem ser avaliados em (3.5).

(\*) A equação do lado esquerdo de (3.5) define um sistema linear para  $\Delta \bar{\bar{U}}$ , que é resolvido, achando-se  $\Delta \bar{\bar{U}}$ .

Em seguida, fazemos  $\bar{\bar{U}} = \bar{U} + \Delta \bar{\bar{U}}$ . Renomeamos  $\bar{U} \leftarrow \bar{\bar{U}}$ . Voltamos a (\*) um certo número de vezes.

Avaliamos os coeficientes e o lado direito do sistema (3.8), (3.11). Resolvemos (3.8), (3.11), obtendo  $(\Delta \bar{\bar{v}}, \Delta \bar{\bar{p}})$ .

Em seguida, fazemos  $\bar{\bar{v}} = \bar{v} + \Delta \bar{\bar{v}}$  e  $\bar{\bar{p}} = \bar{p} + \Delta \bar{\bar{p}}$ , e salvo que  $\Delta \bar{\bar{v}}$ ,  $\Delta \bar{\bar{p}}$  e  $\Delta \bar{\bar{U}}$  sejam muito pequenos, renomeamos  $\bar{v} \leftarrow \bar{\bar{v}}$  e  $\bar{p} \leftarrow \bar{\bar{p}}$ , avaliamos os coeficientes de (3.5) e voltamos para o passo (\*\*) um certo número de vezes.

No fim, fazemos  $U^{n+1} \leftarrow \bar{\bar{U}}$ ,  $v^{n+1} \leftarrow \bar{\bar{v}}$  e  $p^{n+1} \leftarrow \bar{\bar{p}}$ .

**3.1. O subsistema de balanços.** Lembramos que em cada etapa do “loop interno de balanços”  $(\bar{v}, \bar{p})$  está temporariamente fixado e que  $U^n$  e  $(v^n, p^n)$  são conhecidos.  $\bar{U}$  é uma aproximação conhecida de  $U^{n+1}$ . Recordamos que  $\bar{\bar{U}}$  é uma aproximação melhor de  $U^{n+1}$ , a ser determinada.

Faremos a discretização temporal do subsistema (2.7) em  $t^n + \epsilon \Delta t$ . Definimos  $\epsilon' = 1 - \epsilon$ , com  $0 \leq \epsilon$  e  $0 \leq \epsilon'$ . A matriz  $B_U$  será avaliada em  $t^n + \epsilon \Delta t$ . Para  $\epsilon = 0$ , esta discretização reduz-se ao método de Euler para frente, para  $\epsilon = 1/2$ , ao método de Crank-Nicolson. Para  $\epsilon = 1$ , esta discretização reduz-se ao método de Euler para trás. A Eq. (2.7) pode ser escrita



como:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{H_U(\bar{\bar{U}}, \bar{\bar{p}}) - H_U(U^n, p^n)}{\Delta t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \epsilon \bar{v} F_U(\bar{\bar{U}}, \bar{\bar{p}}) + \epsilon' v^n F_U(U^n, p^n) \right) = \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left[ \epsilon B_U(\bar{\bar{U}}, \bar{\bar{p}}) \frac{\partial \bar{\bar{U}}}{\partial x} + \epsilon' B_U(U^n, p^n) \frac{\partial U^n}{\partial x} \right] + \left( \epsilon G_U(\bar{\bar{U}}, \bar{\bar{p}}) + \epsilon' G_U(U^n, p^n) \right). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Prosseguimos na discretização temporal a partir de (3.1) usando a metodologia de Beam e Warming [1]. Usaremos a notação  $H_U^n = H_U(U^n, p^n)$ ,  $F_U^n = F_U(U^n, p^n)$ ,  $B_U^n = B_U(U^n, p^n)$  e  $G_U^n = G_U(U^n, p^n)$ .

$$\begin{aligned} & \left( \frac{H_U(\bar{\bar{U}}, \bar{\bar{p}}) - H_U(\bar{U}, \bar{p})}{\Delta t} + \frac{H_U(\bar{U}, \bar{p}) - H_U^n}{\Delta t} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left( \epsilon \bar{v} (F_U(\bar{\bar{U}}, \bar{\bar{p}}) - F_U(\bar{U}, \bar{p})) + \epsilon \bar{v} F_U(\bar{U}, \bar{p}) + \epsilon' v^n F_U^n \right) = \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( (B_U(\bar{\bar{U}}, \bar{\bar{p}}) - B_U(\bar{U}, \bar{p})) + B_U(\bar{U}, \bar{p}) \right) \frac{\partial}{\partial x} \left( \epsilon (\bar{\bar{U}} - \bar{U}) + \epsilon \bar{U} \right) + \epsilon' B_U^n \frac{\partial U^n}{\partial x} \right] \\ & + \left( \epsilon (G_U(\bar{\bar{U}}, \bar{\bar{p}}) - G_U(\bar{U}, \bar{p})) + \epsilon G_U(\bar{U}, \bar{p}) + \epsilon' G_U^n \right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Façamos a linearização das diferenças entre termos correspondentes em  $(\bar{\bar{U}}, \bar{\bar{p}})$  e  $(\bar{U}, \bar{p})$  em (3.2) e coloquemos os termos restantes em  $(\bar{U}, \bar{p})$  e em  $(U^n, p^n)$  no lado direito da equação. No que se segue são utilizadas além da operação ‘ $\otimes$ ’, também a operação ‘ $\circ$ ’ as quais estão definidas e exemplificadas no apêndice intitulado “A matriz de viscosidade, suas derivadas e operações” em [3], referente ao modelo “oxid”. Usaremos também a notação:  $\bar{H}_U = H_U(\bar{U}, \bar{p})$ ,  $\bar{F}_U = F_U(\bar{U}, \bar{p})$ ,  $\bar{B}_U = B_U(\bar{U}, \bar{p})$ ,  $\bar{G}_U = G_U(\bar{U}, \bar{p})$ ,  $\frac{\partial \bar{H}_U}{\partial \bar{U}} = \frac{\partial H_U}{\partial U}(\bar{U}, \bar{p})$ ,  $\frac{\partial \bar{F}_U}{\partial \bar{U}} = \frac{\partial F_U}{\partial U}(\bar{U}, \bar{p})$ ,  $\frac{\partial \bar{B}_U}{\partial \bar{U}} = \frac{\partial B_U}{\partial U}(\bar{U}, \bar{p})$ ,  $\frac{\partial \bar{G}_U}{\partial \bar{U}} = \frac{\partial G_U}{\partial U}(\bar{U}, \bar{p})$ . A equação (3.2) então fica:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{\partial \bar{H}_U}{\partial \bar{U}} (\bar{\bar{U}} - \bar{U}) \right) + \epsilon \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{v} \frac{\partial \bar{F}_U}{\partial \bar{U}} (\bar{\bar{U}} - \bar{U}) \right) = \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial \bar{B}_U}{\partial \bar{U}} \circ (\bar{\bar{U}} - \bar{U}) + \bar{B}_U \right) \frac{\partial}{\partial x} \left( \epsilon (\bar{\bar{U}} - \bar{U}) + \epsilon \bar{U} \right) + \epsilon' B_U^n \frac{\partial U^n}{\partial x} \right] \\ & + \left( \epsilon \frac{\partial \bar{G}_U}{\partial \bar{U}} (\bar{\bar{U}} - \bar{U}) + \epsilon \bar{G}_U + \epsilon' G_U^n \right) - \frac{\bar{H}_U - H_U^n}{\Delta t} - \frac{\partial}{\partial x} (\epsilon \bar{v} \bar{F}_U + \epsilon' v^n F_U^n). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Substituindo  $\bar{\bar{U}} - \bar{U} = \Delta \bar{\bar{U}}$ , expandindo os termos difusivos e negligenciando termos de segunda ordem  $O(\Delta^2)$ , obtemos as seguintes equações com coeficientes avaliados em  $(\bar{U}, \bar{p})$ ,  $\bar{v}$ , equivalentes a (3.3), com uma aproximação de erro temporal de segunda ordem:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{\partial \bar{H}_U}{\partial U} \Delta \bar{U} \right) + \epsilon \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{v} \frac{\partial \bar{F}_U}{\partial U} \Delta \bar{U} \right) = \\
& \epsilon \frac{\partial}{\partial x} \left[ \bar{B}_U \frac{\partial}{\partial x} \Delta \bar{U} \right] + \epsilon \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial \bar{B}_U}{\partial U} \circ \Delta \bar{U} + \bar{B}_U \right) \frac{\partial}{\partial x} \bar{U} \right] + \epsilon' \frac{\partial}{\partial x} \left[ B_U^n \frac{\partial U^n}{\partial x} \right] \\
& + \left( \epsilon \frac{\partial \bar{G}_U}{\partial U} \Delta \bar{U} + \epsilon \bar{G}_U + \epsilon' G_U^n \right) - \frac{\bar{H}_U - H_U^n}{\Delta t} - \frac{\partial}{\partial x} (\epsilon \bar{v} \bar{F}_U + \epsilon' v^n F_U^n). \tag{3.4}
\end{aligned}$$

Finalmente, passando para o primeiro membro os termos envolvendo  $\Delta \bar{U}$ , a discretização temporal do sistema de balanços fica:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial \bar{H}_U}{\partial U} \Delta \bar{U} + \epsilon \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{v} \frac{\partial \bar{F}_U}{\partial U} \Delta \bar{U} \right) - \epsilon \frac{\partial}{\partial x} \left[ \bar{B}_U \frac{\partial}{\partial x} \Delta \bar{U} \right] - \epsilon \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial \bar{B}_U}{\partial U} \circ \Delta \bar{U} \right) \frac{\partial}{\partial x} \bar{U} \right] \\
& - \epsilon \frac{\partial \bar{G}_U}{\partial U} \Delta \bar{U} = \epsilon \frac{\partial}{\partial x} \left[ \bar{B}_U \frac{\partial}{\partial x} \bar{U} \right] + \epsilon' \frac{\partial}{\partial x} \left[ B_U^n \frac{\partial U^n}{\partial x} \right] \\
& + \left( \epsilon \bar{G}_U + \epsilon' G_U^n \right) - \frac{\bar{H}_U - H_U^n}{\Delta t} - \frac{\partial}{\partial x} (\epsilon \bar{v} \bar{F}_U + \epsilon' v^n F_U^n). \tag{3.5}
\end{aligned}$$

**3.2. O subsistema pressão-velocidade.** Suponhamos que possuímos aproximações temporárias  $\bar{U}$  e  $(\bar{v}, \bar{p})$  conhecidas. O objetivo então é obter uma nova aproximação  $(\bar{v}, \bar{p})$  de  $v^{n+1}$  e  $p^{n+1}$ .

A questão no sistema de pressão-velocidade é que ele não se escreve em forma canônica. Portanto, fazemos as discretizações temporais de cada uma das duas equações separadamente e juntamo-las num sistema final.

Fazemos a discretização temporal para o subsistema (2.10), (2.11) com certos coeficientes em  $t^n + \Delta t$ .

**3.2.1. Discretização temporal da equação da velocidade.** Consideremos a equação da velocidade (2.10), avaliada tanto quanto possível no tempo  $t^{n+1}$ . Por questões de estabilidade, as diferenças temporais são retardadas, o que significa que variações de densidades abaixam a precisão temporal do método para primeira ordem. Obtemos:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \bar{v} + \bar{v} \left( F_v(\bar{U}, \bar{p}) \cdot \frac{\partial M_l}{\partial x}(\bar{U}, \bar{p}) + \frac{\partial M_g}{\partial x}(\bar{U}, \bar{p}) \right) \\
& = -\phi \frac{1}{\Delta t} \left( \pi(\bar{U}) \cdot (M_l(\bar{U}, \bar{p}) - M_l(U^n, p^n)) + M_g(\bar{U}, \bar{p}) - M_g(U^n, p^n) \right) \\
& + \left[ B_v(\bar{U}, \bar{p}) \otimes \frac{\partial M_l(\bar{U}, \bar{p})}{\partial x} \right] \cdot \frac{\partial \pi(\bar{U})}{\partial x} + G_v(\bar{U}, \bar{p}). \tag{3.6}
\end{aligned}$$

Linearizando entre os termos  $(\bar{U}, \bar{p})$  e  $(U^n, p^n)$  e usando a notação usual  $\Delta \bar{p} = \bar{p} - p^n$ ,  $\Delta \bar{v} = \bar{v} - v^n$ ,  $M_l(U^n, p^n) = M_l^n$ ,  $M_g(U^n, p^n) = M_g^n$ ,  $F_v(\bar{U}, \bar{p}) = \bar{F}_v$ ,  $M_l(\bar{U}, \bar{p}) = \bar{M}_l$ ,  $M_g(\bar{U}, \bar{p}) = \bar{M}_g$ ,

$B_v(\bar{U}, \bar{p}) = \bar{B}_v$  e  $G_v(\bar{U}, \bar{p}) = \bar{G}_v$ , obtemos:

$$\begin{aligned}
& \frac{\phi}{\Delta t} \left( \pi(\bar{U}) \cdot \left( \bar{M}_l + \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \Delta \bar{p} - M_l^n \right) + \bar{M}_g + \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \Delta \bar{p} - M_g^n \right) + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{v} + \Delta \bar{v}) + \bar{v} \left( \bar{F}_v \cdot \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial x} + \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial x} \right) \\
& + \bar{v} \left( \frac{\partial \bar{F}_v}{\partial p} \cdot \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial x} \Delta \bar{p} + \bar{F}_v \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \Delta \bar{p} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \Delta \bar{p} \right) \right) + \left( \bar{F}_v \cdot \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial x} + \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial x} \right) \Delta \bar{v} \\
& = \left[ \bar{B}_v \otimes \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial x} \right] \cdot \frac{\partial \pi(\bar{U})}{\partial x} + \left[ \frac{\partial \bar{B}_v}{\partial p} \otimes \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial x} \right] \cdot \frac{\partial \pi(\bar{U})}{\partial x} \Delta \bar{p} + \left[ \bar{B}_v \otimes \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \Delta \bar{p} \right) \right] \cdot \frac{\partial \pi(\bar{U})}{\partial x} \\
& + \frac{\partial \bar{G}_v}{\partial p} \Delta \bar{p} + \bar{G}_v.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Recordando que  $U^n$ ,  $(v^n, p^n)$ ,  $(\bar{v}, \bar{p})$  e  $\bar{U} \equiv \pi(\bar{U})$  são conhecidos, passamos os termos contendo  $\Delta \bar{v}$  e  $\Delta \bar{p}$  para o lado esquerdo deixando os demais termos do lado direito. A Eq. (3.7) fica:

$$\begin{aligned}
& \frac{\phi}{\Delta t} \left( \pi(\bar{U}) \cdot \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} + \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right) \Delta \bar{p} + \bar{v} \left( \frac{\partial \bar{F}_v}{\partial p} \cdot \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial x} \Delta \bar{p} + \bar{F}_v \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \Delta \bar{p} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \Delta \bar{p} \right) \right) \\
& - \left[ \frac{\partial \bar{B}_v}{\partial p} \otimes \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial x} \right] \cdot \frac{\partial \pi(\bar{U})}{\partial x} \Delta \bar{p} - \left[ \bar{B}_v \otimes \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \Delta \bar{p} \right) \right] \cdot \frac{\partial \pi(\bar{U})}{\partial x} - \frac{\partial \bar{G}_v}{\partial p} \Delta \bar{p} + \frac{\partial}{\partial x} \Delta \bar{v} \\
& + \left( \bar{F}_v \cdot \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial x} + \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial x} \right) \Delta \bar{v} = -\frac{\phi}{\Delta t} \left( \pi(\bar{U}) \cdot (\bar{M}_l - M_l^n) + \bar{M}_g - M_g^n \right) - \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \\
& - \bar{v} \left( \bar{F}_v \cdot \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial x} + \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial x} \right) + \left[ \bar{B}_v \otimes \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial x} \right] \cdot \frac{\partial \pi(\bar{U})}{\partial x} + \bar{G}_v.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

**3.2.2. Discretização temporal da equação da velocidade, no caso incompressível.** Repetindo os mesmos cálculos da subseção (3.2.1), para obter a versão incompressível da equação da velocidade não conservativa. Devemos apenas eliminar as derivadas na pressão em (3.8), obtendo:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \Delta \bar{v} + \left( \bar{F}_v \cdot \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial x} + \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial x} \right) \Delta \bar{v} = -\frac{\phi}{\Delta t} \left( \pi(\bar{U}) \cdot (\bar{M}_l - M_l^n) + \bar{M}_g - M_g^n \right) \\
& - \frac{\partial}{\partial x} \bar{v} - \bar{v} \left( \bar{F}_v \cdot \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial x} + \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial x} \right) + \left[ \bar{B}_v \otimes \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial x} \right] \cdot \frac{\partial \pi(\bar{U})}{\partial x} + \bar{G}_v.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

**3.2.3. Discretização newtoniana da equação da pressão.** A equação da pressão não depende do tempo, logo falta construir a discretização do método de Newton. Esta discretização da equação da pressão na forma genérica (2.11) fica:

$$\bar{v} = K \left[ R(\bar{U}, \bar{p}) \frac{\partial}{\partial x} \bar{p} + S(\bar{U}, \bar{p}) \cdot \frac{\partial \pi(\bar{U})}{\partial x} \right]. \tag{3.10}$$

Usamos a notação  $R^n = R(U^n, p^n)$ ,  $S^n = S(U^n, p^n)$ ,  $\bar{R} = R(\bar{U}, \bar{p})$  e  $\bar{S} = S(\bar{U}, \bar{p})$ :

$$\begin{aligned}
(\bar{v} - \bar{v}) + \bar{v} = & K(R(\bar{U}, \bar{p}) - R(\bar{U}, \bar{p}) + R(\bar{U}, \bar{p})) \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p} - \bar{p} + \bar{p}) \\
& + K(S(\bar{U}, \bar{p}) - S(\bar{U}, \bar{p}) + S(\bar{U}, \bar{p})) \cdot \frac{\partial \pi(\bar{U})}{\partial x}.
\end{aligned}$$

Usando a notação  $\bar{v} - \bar{v} = \Delta \bar{v}$  e  $\bar{p} - \bar{p} = \Delta \bar{p}$ , temos

$$\Delta \bar{v} + \bar{v} = K \left( \frac{\partial \bar{R}}{\partial p} \Delta \bar{p} + \bar{R} \right) \frac{\partial}{\partial x} (\Delta \bar{p} + \bar{p}) + K \left( \frac{\partial \bar{S}}{\partial p} \Delta \bar{p} + \bar{S} \right) \cdot \frac{\partial \pi(\bar{U})}{\partial x}.$$

Passando  $\Delta \bar{p}$  e  $\Delta \bar{v}$  para o lado esquerdo, obtemos a seguinte equação com coeficientes e lado direito avaliados em  $\bar{U}$ ,  $\bar{p}$  e  $\bar{v}$ , correspondendo à equação (2.11):

$$\Delta \bar{v} - K \left( \frac{\partial \bar{R}}{\partial p} \Delta \bar{p} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \bar{R} \frac{\partial}{\partial x} \Delta \bar{p} + \frac{\partial \bar{S}}{\partial p} \Delta \bar{p} \cdot \frac{\partial \pi(\bar{U})}{\partial x} \right) = K \left( \bar{R} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \bar{S} \cdot \frac{\partial \pi(\bar{U})}{\partial x} \right) - \bar{v}. \quad (3.11)$$

#### 4. A DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL NO INTERIOR DA GRADE.

Faremos a discretização em  $x_j$  ou em  $x_{j-\frac{1}{2}}$  de tal forma que as variáveis  $p$  e  $U$  e as incógnitas  $\Delta \bar{p}$  e  $\Delta \bar{U}$  fiquem localizadas em  $x_{j-1}$ ,  $x_j$  e  $x_{j+1}$ , enquanto que a variável  $v$  e a incógnita  $\Delta \bar{v}$  fiquem localizadas em  $x_{j-\frac{1}{2}}$  e  $x_{j+\frac{1}{2}}$ , ver Figura 4.1. Assim, o índice  $j$  significa o centro da célula- $j$ , o índice  $j - \frac{1}{2}$  significa a extremidade esquerda da célula- $j$  e o índice  $j + \frac{1}{2}$  significa a extremidade direita da célula.

Em geral, no interior da malha, para as variáveis de balanço e a pressão faremos a identificação

$$U_j \equiv U(j), \quad p_j \equiv p(j). \quad (4.1)$$

Para a velocidade faremos a identificação

$$v_{j-\frac{1}{2}} \equiv vm(j). \quad (4.2)$$

Aqui “ $m$ ” em  $vm(j)$  é abreviação de “menos  $\frac{1}{2}$ ”.

#### 4.1. O subsistema de balanços.

4.1.1. *Discretização do subsistema de balanços.* Partamos da discretização temporal do sistema de balanços (3.5) e façamos a sua discretização espacial na posição para  $x_j$  interior à grade. Genericamente escrevemos  $\mathcal{T}_j$  para os termos  $\mathcal{T}$  avaliados em  $(\bar{U}_j, \bar{p}_j)$ . Por exemplo, na Eq. (4.3) abaixo, o termo  $\left( \frac{\partial \bar{H}_V}{\partial U} \right)_j$  significa  $\frac{\partial \bar{H}_V}{\partial U}$  avaliado em  $(\bar{U}_j, \bar{p}_j)$ :

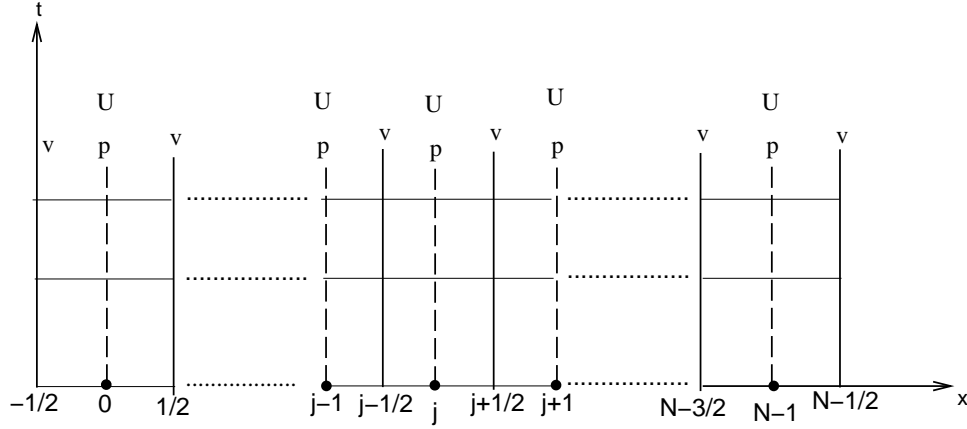


FIGURE 4.1. Variáveis  $U$ ,  $p$  e  $v$  na malha. Índices inteiros para centros de células e fracionários para extremidades. O domínio vai de  $-1/2$  a  $N - 1/2$ .

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{\partial \bar{H}_U}{\partial U} \Delta \bar{U} \right)_j + \frac{\epsilon}{\Delta x} \left\{ \left[ \bar{v} \frac{\partial \bar{F}_U}{\partial U} \Delta \bar{U} - \bar{B}_U \frac{\partial}{\partial x} \Delta \bar{U} \right]_{j+\frac{1}{2}} - \left[ \bar{v} \frac{\partial \bar{F}_U}{\partial U} \Delta \bar{U} - \bar{B}_U \frac{\partial}{\partial x} \Delta \bar{U} \right]_{j-\frac{1}{2}} \right\} \\
 & - \epsilon \left( \frac{\partial \bar{G}_U}{\partial U} \Delta \bar{U} \right)_j - \frac{\epsilon}{\Delta x} \left\{ \left[ \left( \frac{\partial \bar{B}_U}{\partial U} \circ \Delta \bar{U} \right) \frac{\partial}{\partial x} \bar{U} \right]_{j+\frac{1}{2}} - \left[ \left( \frac{\partial \bar{B}_U}{\partial U} \circ \Delta \bar{U} \right) \frac{\partial}{\partial x} \bar{U} \right]_{j-\frac{1}{2}} \right\} \\
 & = -\frac{1}{\Delta x} \left\{ \left[ (\epsilon \bar{v} \bar{F}_U + \epsilon' v^n F_U^n) - \epsilon \bar{B}_U \frac{\partial}{\partial x} \bar{U} - \epsilon' B_U^n \frac{\partial U^n}{\partial x} \right]_{j+\frac{1}{2}} \right. \\
 & \left. - \left[ (\epsilon \bar{v} \bar{F}_U + \epsilon' v^n F_U^n) - \epsilon \bar{B}_U \frac{\partial}{\partial x} \bar{U} - \epsilon' B_U^n \frac{\partial U^n}{\partial x} \right]_{j-\frac{1}{2}} \right\} + (\epsilon \bar{G}_U + \epsilon' G_U^n)_j - \frac{1}{\Delta t} (\bar{H}_U - H_U^n)_j.
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Prosseguindo na discretização espacial, substituímos os pontos intermediários em  $\Delta U_{j-\frac{1}{2}}$ ,  $\Delta U_{j+\frac{1}{2}}$  da Eq. (4.3) em função dos pontos vizinhos, obtendo:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{\partial \bar{H}_U}{\partial U} \Delta \bar{U} \right)_j + \frac{\epsilon}{2\Delta x} \left\{ \bar{v}_{j+\frac{1}{2}} \left[ \left( \frac{\partial \bar{F}_U}{\partial U} \Delta \bar{U} \right)_{j+1} + \left( \frac{\partial \bar{F}_U}{\partial U} \Delta \bar{U} \right)_j \right] \right. \\
& - \frac{1}{\Delta x} [\bar{B}_{U_{j+1}} + \bar{B}_{U_j}] (\Delta \bar{U}_{j+1} - \Delta \bar{U}_j) - \bar{v}_{j-\frac{1}{2}} \left[ \left( \frac{\partial \bar{F}_U}{\partial U} \Delta \bar{U} \right)_j + \left( \frac{\partial \bar{F}_U}{\partial U} \Delta \bar{U} \right)_{j-1} \right] \\
& \left. + \frac{1}{\Delta x} [\bar{B}_{U_j} + \bar{B}_{U_{j-1}}] (\Delta \bar{U}_j - \Delta \bar{U}_{j-1}) \right\} - \epsilon \left( \frac{\partial \bar{G}_U}{\partial U} \Delta \bar{U} \right)_j \\
& - \frac{\epsilon}{2(\Delta x)^2} \left\{ \left[ \left( \frac{\partial \bar{B}_U}{\partial U} \circ \Delta \bar{U} \right)_{j+1} + \left( \frac{\partial \bar{B}_U}{\partial U} \circ \Delta \bar{U} \right)_j \right] (\bar{U}_{j+1} - \bar{U}_j) \right. \\
& \left. - \left[ \left( \frac{\partial \bar{B}_U}{\partial U} \circ \Delta \bar{U} \right)_j + \left( \frac{\partial \bar{B}_U}{\partial U} \circ \Delta \bar{U} \right)_{j-1} \right] (\bar{U}_j - \bar{U}_{j-1}) \right\} \\
& = -\frac{1}{2\Delta x} \left\{ \epsilon \bar{v}_{j+\frac{1}{2}} [\bar{F}_{U_{j+1}} + \bar{F}_{U_j}] + \epsilon' v_{j+\frac{1}{2}}^n [F_{U_{j+1}}^n + F_{U_j}^n] \right. \\
& - \frac{\epsilon}{\Delta x} [\bar{B}_{U_{j+1}} + \bar{B}_{U_j}] (\bar{U}_{j+1} - \bar{U}_j) - \frac{\epsilon'}{\Delta x} [B_{U_{j+1}}^n + B_{U_j}^n] (U_{j+1}^n - U_j^n) \\
& - \epsilon \bar{v}_{j-\frac{1}{2}} [\bar{F}_{U_j} + \bar{F}_{U_{j-1}}] - \epsilon' v_{j-\frac{1}{2}}^n [F_{U_j}^n + F_{U_{j-1}}^n] \\
& \left. + \frac{\epsilon}{\Delta x} [\bar{B}_{U_j} + \bar{B}_{U_{j-1}}] (\bar{U}_j - \bar{U}_{j-1}) + \frac{\epsilon'}{\Delta x} [B_{U_j}^n + (B_{U_{j-1}}^n)] (U_j^n - U_{j-1}^n) \right\} \\
& + (\epsilon \bar{G}_U + \epsilon' G_U^n)_j - \frac{1}{\Delta t} (\bar{H}_U - H_U^n)_j. \tag{4.4}
\end{aligned}$$

Multiplicamos os termos da Eq. (4.4) por  $\Delta t$  e colocamos em evidência os termos  $\Delta \bar{U}_{j-1}$ ,  $\Delta \bar{U}_j$ , e  $\Delta \bar{U}_{j+1}$ , para o que precisamos invocar propriedades dos operadores  $\circ$  e  $\otimes$ , obtendo:

$$\begin{aligned}
& \left\{ -\frac{\epsilon\Delta t}{2\Delta x}\bar{v}_{j-\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial\bar{F}_U}{\partial U}\right)_{j-1} - \frac{\epsilon\Delta t}{2(\Delta x)^2}[\bar{B}_{U_j} + \bar{B}_{U_{j-1}} - \left(\frac{\partial\bar{B}_U}{\partial U}\right)_{j-1} \otimes (\bar{U}_j - \bar{U}_{j-1})] \right\} \Delta\bar{\bar{U}}_{j-1} \\
& + \left\{ \left(\frac{\partial\bar{H}_U}{\partial U}\right)_j + \frac{\epsilon\Delta t\bar{v}_{j+\frac{1}{2}}}{2\Delta x}\left(\frac{\partial\bar{F}_U}{\partial U}\right)_j + \frac{\epsilon\Delta t}{2(\Delta x)^2}[\bar{B}_{U_{j+1}} + \bar{B}_{U_j}] + \frac{\epsilon\Delta t}{2(\Delta x)^2}[\bar{B}_{U_j} + \bar{B}_{U_{j-1}}] \right. \\
& - \frac{\epsilon\Delta t}{2\Delta x}\bar{v}_{j-\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial\bar{F}_U}{\partial U}\right)_j - \epsilon\Delta t\left(\frac{\partial\bar{G}_U}{\partial U}\right)_j - \frac{\epsilon\Delta t}{2(\Delta x)^2}\left(\frac{\partial\bar{B}_U}{\partial U}\right)_j \otimes (\bar{U}_{j+1} - 2\bar{U}_j + \bar{U}_{j-1}) \left. \right\} \Delta\bar{\bar{U}}_j \\
& + \left\{ \frac{\epsilon\Delta t\bar{v}_{j+\frac{1}{2}}}{2\Delta x}\left(\frac{\partial\bar{F}_U}{\partial U}\right)_{j+1} - \frac{\epsilon\Delta t}{2(\Delta x)^2}[\bar{B}_{U_{j+1}} + \bar{B}_{U_j}] + \left(\frac{\partial\bar{B}_U}{\partial U}\right)_{j+1} \otimes (\bar{U}_{j+1} - \bar{U}_j) \right\} \Delta\bar{\bar{U}}_{j+1} \\
& = \Delta t(\epsilon\bar{G}_U + \epsilon'G_U^n)_j - (\bar{H}_U - H_U^n)_j - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left\{ \epsilon\bar{v}_{j+\frac{1}{2}}[\bar{F}_{U_{j+1}} + \bar{F}_{U_j}] + \epsilon'v_{j+\frac{1}{2}}^n[F_{U_{j+1}}^n + F_{U_j}^n] \right. \\
& - \frac{\epsilon}{\Delta x}[\bar{B}_{U_{j+1}} + \bar{B}_{U_j}](\bar{U}_{j+1} - \bar{U}_j) - \frac{\epsilon'}{\Delta x}[B_{U_{j+1}}^n + B_{U_j}^n](U_{j+1}^n - U_j^n) \\
& - \epsilon\bar{v}_{j-\frac{1}{2}}[\bar{F}_{U_j} + \bar{F}_{U_{j-1}}] - \epsilon'v_{j-\frac{1}{2}}^n[F_{U_j}^n + F_{U_{j-1}}^n] \\
& \left. + \frac{\epsilon}{\Delta x}[\bar{B}_{U_j} + \bar{B}_{U_{j-1}}](\bar{U}_j - \bar{U}_{j-1}) + \frac{\epsilon'}{\Delta x}[B_{U_j}^n + B_{U_{j-1}}^n](U_j^n - U_{j-1}^n) \right\}. \tag{4.5}
\end{aligned}$$

Numa forma compacta o sistema (4.5) para  $j = 1, 2, \dots, N-2$  pode ser escrito como:

$$\mathcal{L}(j-1)\Delta\bar{\bar{U}}(j-1) + \mathcal{D}(j)\Delta\bar{\bar{U}}(j) + \mathcal{U}(j+1)\Delta\bar{\bar{U}}(j+1) = A(j). \tag{4.6}$$

A seguir escrevemos os blocos coeficientes do sistema (4.6) de maneira conveniente, ordenando os índices da esquerda para a direita, para a comparação com os respectivos blocos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(j-1) &= -\frac{\epsilon\Delta t\bar{v}_{j-\frac{1}{2}}}{2\Delta x}\left(\frac{\partial\bar{F}_U}{\partial U}\right)_{j-1} - \frac{\epsilon\Delta t}{2(\Delta x)^2}\left[\bar{B}_{U_{j-1}} + \bar{B}_{U_j} - \left(\frac{\partial\bar{B}_U}{\partial U}\right)_{j-1} \otimes (\bar{U}_j - \bar{U}_{j-1})\right], \\
& j = 1, 2, \dots, N-1, \tag{4.7}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{D}(j) = \mathcal{D}_l(j-1) + \mathcal{D}_c(j) + \mathcal{D}_r(j+1), \quad j = 1, 2, \dots, N-2, \tag{4.8}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_l(j-1) &= -\frac{\epsilon\Delta t\bar{v}_{j-\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \left( \frac{\partial\bar{F}_U}{\partial U} \right)_j + \frac{\epsilon\Delta t}{2(\Delta x)^2} \left( \bar{B}_{U_{j-1}} + \bar{B}_{U_j} \right) \\ &\quad + \frac{\epsilon\Delta t}{2(\Delta x)^2} \left( \frac{\partial\bar{B}_U}{\partial U} \right)_j \otimes (\bar{U}_j - \bar{U}_{j-1}), \quad j = 2, 3, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\mathcal{D}_c(j) = \left( \frac{\partial\bar{H}_U}{\partial U} \right)_j - \epsilon\Delta t \left( \frac{\partial\bar{G}_U}{\partial U} \right)_j, \quad j = 0, 1, \dots, N-2, \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_r(j+1) &= \frac{\epsilon\Delta t\bar{v}_{j+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \left( \frac{\partial\bar{F}_U}{\partial U} \right)_j + \frac{\epsilon\Delta t}{2(\Delta x)^2} \left( \bar{B}_{U_j} + \bar{B}_{U_{j+1}} \right) \\ &\quad - \frac{\epsilon\Delta t}{2(\Delta x)^2} \left( \frac{\partial\bar{B}_U}{\partial U} \right)_j \otimes (\bar{U}_{j+1} - \bar{U}_j), \quad j = 0, 1, \dots, N-2, \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(j+1) &= \frac{\epsilon\Delta t\bar{v}_{j+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \left( \frac{\partial\bar{F}_U}{\partial U} \right)_{j+1} - \frac{\epsilon\Delta t}{2(\Delta x)^2} \left[ \left( \bar{B}_{U_j} + \bar{B}_{U_{j+1}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial\bar{B}_U}{\partial U} \right)_{j+1} \otimes (\bar{U}_{j+1} - \bar{U}_j) \right], \quad j = 0, 1, \dots, N-2, \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$A(j) = A_l(j-1) + A_c(j) + A_r(j+1), \quad j = 1, 2, \dots, N-2, \quad (4.13)$$



onde

$$\begin{aligned}
A_l(j-1) &= \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[ \epsilon \bar{v}_{j-\frac{1}{2}} \left( \bar{F}_{U_{j-1}} + \bar{F}_{U_j} \right) + \epsilon' v_{j-\frac{1}{2}}^n \left( F_{U_{j-1}}^n + F_{U_j}^n \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\epsilon}{\Delta x} \left( \bar{B}_{U_{j-1}} + \bar{B}_{U_j} \right) (\bar{U}_j - \bar{U}_{j-1}) - \frac{\epsilon'}{\Delta x} \left( B_{U_{j-1}}^n + B_{U_j}^n \right) (U_j^n - U_{j-1}^n) \right], \\
j &= 2, 3, \dots, N-1,
\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$A_c(j) = \Delta t \left( \epsilon \bar{G}_{U_j} + \epsilon' G_{U_j}^n \right) - \left( \bar{H}_{U_j} - H_{U_j}^n \right), \quad j = 0, 1, \dots, N-1, \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}
A_r(j+1) &= -A_l(j) \\
&= -\frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[ \epsilon \bar{v}_{j+\frac{1}{2}} \left( \bar{F}_{U_j} + \bar{F}_{U_{j+1}} \right) + \epsilon' v_{j+\frac{1}{2}}^n \left( F_{U_j}^n + F_{U_{j+1}}^n \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\epsilon}{\Delta x} \left( \bar{B}_{U_j} + \bar{B}_{U_{j+1}} \right) (\bar{U}_{j+1} - \bar{U}_j) - \frac{\epsilon'}{\Delta x} \left( B_{U_j}^n + B_{U_{j+1}}^n \right) (U_{j+1}^n - U_j^n) \right], \\
j &= 0, 1, \dots, N-2.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

**Obs 4.1.** Em certos casos, a matriz  $B_U$  é constante, e as derivadas de  $B_U$  se anulam. Daí temos algumas simplificações, já que os termos contendo  $\frac{\partial \bar{B}_U}{\partial \bar{U}}$  são eliminados das fórmulas (4.7), (4.9), (4.11) e (4.12).

**4.2. Inicialização do subsistema de balanços.** A inicialização da variável  $U$  no interior da malha é fornecida. Sendo assim, temos simplesmente que

$$U^0(j) = U(x_j, 0), \quad \text{para } j = 0, 1, \dots, N-1. \tag{4.17}$$

**4.3. O subsistema pressão-velocidade.** A equação da velocidade será discretizada nos centros das células, representados por índices inteiros e a equação da pressão nas extremidades das células, representadas por índices da forma  $j \pm 1/2$ .

**4.3.1. A equação da velocidade.** Fazemos a discretização espacial da equação (3.8) no ponto  $x_j$  do interior da grade,  $j = 1, 2, \dots, N-2$ :

$$\begin{aligned}
& \frac{\phi_j}{\Delta t} \left( \pi(\bar{U}) \cdot \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} + \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)_j \Delta \bar{p}_j + \frac{1}{4\Delta x} (\bar{v}_{j-\frac{1}{2}} + \bar{v}_{j+\frac{1}{2}}) \left[ \left( \frac{\partial \bar{F}_v}{\partial p} \right)_j \cdot (\bar{M}_{l_{j+1}} - \bar{M}_{l_{j-1}}) \Delta \bar{p}_j \right. \\
& + \bar{F}_{v_j} \cdot \left( \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_{j+1} \Delta \bar{p}_{j+1} - \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_{j-1} \Delta \bar{p}_{j-1} \right) + \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)_{j+1} \Delta \bar{p}_{j+1} - \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)_{j-1} \Delta \bar{p}_{j-1} \left. \right] \\
& - \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ \left( \frac{\partial \bar{B}_v}{\partial p} \right)_j \otimes (\bar{M}_{l_{j+1}} - \bar{M}_{l_{j-1}}) \right] \cdot (\pi(\bar{U}_{j+1}) - \pi(\bar{U}_{j-1})) \Delta \bar{p}_j \\
& - \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ \bar{B}_{v_j} \otimes \left( \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_{j+1} \Delta \bar{p}_{j+1} - \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_{j-1} \Delta \bar{p}_{j-1} \right) \right] \cdot (\pi(\bar{U}_{j+1}) - \pi(\bar{U}_{j-1})) \\
& - \left( \frac{\partial \bar{G}_v}{\partial p} \right)_j \Delta \bar{p}_j + \frac{1}{\Delta x} (\Delta \bar{v}_{j+\frac{1}{2}} - \Delta \bar{v}_{j-\frac{1}{2}}) \\
& + \frac{1}{4\Delta x} \left( \bar{F}_{v_j} \cdot (\bar{M}_{l_{j+1}} - \bar{M}_{l_{j-1}}) + \bar{M}_{g_{j+1}} - \bar{M}_{g_{j-1}} \right) (\Delta \bar{v}_{j-\frac{1}{2}} + \Delta \bar{v}_{j+\frac{1}{2}}) \\
& = - \frac{\phi_j}{\Delta t} (\pi(\bar{U}) \cdot (\bar{M}_l - M_l^n) + \bar{M}_g - M_g^n)_j - \frac{1}{\Delta x} (\bar{v}_{j+\frac{1}{2}} - \bar{v}_{j-\frac{1}{2}}) \\
& - \frac{1}{4\Delta x} (\bar{v}_{j-\frac{1}{2}} + \bar{v}_{j+\frac{1}{2}}) \left( \bar{F}_{v_j} \cdot (\bar{M}_{l_{j+1}} - \bar{M}_{l_{j-1}}) + \bar{M}_{g_{j+1}} - \bar{M}_{g_{j-1}} \right) \\
& + \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ \bar{B}_{v_j} \otimes (\bar{M}_{l_{j+1}} - \bar{M}_{l_{j-1}}) \right] \cdot (\pi(\bar{U}_{j+1}) - \pi(\bar{U}_{j-1})) + \bar{G}_{v_j}. \tag{4.18}
\end{aligned}$$

Colocando em evidência os termos  $\Delta \bar{p}_{j-1}$ ,  $\Delta \bar{v}_{j-\frac{1}{2}}$ ,  $\Delta \bar{p}_j$ ,  $\Delta \bar{v}_{j+\frac{1}{2}}$  e  $\Delta \bar{p}_{j+1}$ , a equação (4.18) escreve-se:

$$\begin{aligned}
& \left\{ -\frac{1}{4\Delta x}(\bar{v}_{j-\frac{1}{2}} + \bar{v}_{j+\frac{1}{2}}) \left( \bar{F}_{v_j} \cdot \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_{j-1} + \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)_{j-1} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ \bar{B}_{v_j} \otimes \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_{j-1} \right] \cdot (\pi(\bar{U}_{j+1}) - \pi(\bar{U}_{j-1})) \right\} \Delta \bar{p}_{j-1} \\
& + \left\{ -\frac{1}{\Delta x} + \frac{1}{4\Delta x} \left( \bar{F}_{v_j} \cdot (\bar{M}_{l_{j+1}} - \bar{M}_{l_{j-1}}) + \bar{M}_{g_{j+1}} - \bar{M}_{g_{j-1}} \right) \right\} \Delta \bar{v}_{j-\frac{1}{2}} \\
& + \left\{ \frac{\phi_j}{\Delta t} \left( \pi(\bar{U}) \cdot \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} + \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)_j + \frac{1}{4\Delta x} (\bar{v}_{j-\frac{1}{2}} + \bar{v}_{j+\frac{1}{2}}) \left( \frac{\partial \bar{F}_v}{\partial p} \right)_j \cdot (\bar{M}_{l_{j+1}} - \bar{M}_{l_{j-1}}) \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ \left( \frac{\partial \bar{B}_v}{\partial p} \right)_j \otimes (\bar{M}_{l_{j+1}} - \bar{M}_{l_{j-1}}) \right] \cdot (\pi(\bar{U}_{j+1}) - \pi(\bar{U}_{j-1})) - \left( \frac{\partial \bar{G}_v}{\partial p} \right)_j \right\} \Delta \bar{p}_j \\
& + \left\{ \frac{1}{\Delta x} + \frac{1}{4\Delta x} \left( \bar{F}_{v_j} \cdot (\bar{M}_{l_{j+1}} - \bar{M}_{l_{j-1}}) + \bar{M}_{g_{j+1}} - \bar{M}_{g_{j-1}} \right) \right\} \Delta \bar{v}_{j+\frac{1}{2}} \\
& + \left\{ \frac{1}{4\Delta x} (\bar{v}_{j-\frac{1}{2}} + \bar{v}_{j+\frac{1}{2}}) \left( \bar{F}_{v_j} \cdot \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_{j+1} + \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)_{j+1} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ \bar{B}_{v_j} \otimes \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_{j+1} \right] \cdot (\pi(\bar{U}_{j+1}) - \pi(\bar{U}_{j-1})) \right\} \Delta \bar{p}_{j+1} \\
& = -\frac{\phi_j}{\Delta t} (\pi(\bar{U}) \cdot (\bar{M}_l - M_l^n) + \bar{M}_g - M_g^n)_j - \frac{1}{\Delta x} (\bar{v}_{j+\frac{1}{2}} - \bar{v}_{j-\frac{1}{2}}) \\
& \quad - \frac{1}{4\Delta x} (\bar{v}_{j-\frac{1}{2}} + \bar{v}_{j+\frac{1}{2}}) \left( \bar{F}_{v_j} \cdot (\bar{M}_{l_{j+1}} - \bar{M}_{l_{j-1}}) + \bar{M}_{g_{j+1}} - \bar{M}_{g_{j-1}} \right) \\
& \quad + \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ \bar{B}_{v_j} \otimes (\bar{M}_{l_{j+1}} - \bar{M}_{l_{j-1}}) \right] \cdot (\pi(\bar{U}_{j+1}) - \pi(\bar{U}_{j-1})) + \bar{G}_{v_j}. \tag{4.19}
\end{aligned}$$

Identificando  $p_{j-1}$  com  $p(j-1)$ ,  $v_{j-\frac{1}{2}}$  com  $vm(j)$ ,  $p_j$  com  $p(j)$ ,  $v_{j+\frac{1}{2}}$  com  $vm(j+1)$ ,  $\Delta \bar{p}_{j-1}$  com  $\Delta \bar{p}(j-1)$ ,  $\Delta \bar{v}_{j-\frac{1}{2}}$  com  $\Delta \bar{v}m(j)$ ,  $\Delta \bar{p}_j$  com  $\Delta \bar{p}(j)$ ,  $\Delta \bar{v}_{j+\frac{1}{2}}$  com  $\Delta \bar{v}m(j+1)$  e  $\Delta \bar{p}_{j+1}$  com  $\Delta \bar{p}(j+1)$ , podemos escrever (4.19), para  $j = 1, 2, \dots, N-2$ , em forma compacta como:

$$\begin{aligned}
& \eta_v(j-1) \Delta \bar{p}(j-1) + \alpha_v(j) \Delta \bar{v}m(j) + \beta_v(j) \Delta \bar{p}(j) \\
& \quad + \delta_v(j+1) \Delta \bar{v}m(j+1) + \theta_v(j+1) \Delta \bar{p}(j+1) = \gamma_v(j). \tag{4.20}
\end{aligned}$$

A eq. (4.20) será usada com índices transladados às vezes.

Os coeficientes da equação (4.20) são dados por:

$$\begin{aligned} \eta_v(j) = & -\frac{1}{4\Delta x}(\bar{v}m(j+1) + \bar{v}m(j+2)) \left( \bar{F}_{v_{j+1}} \cdot \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_j + \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)_j \right) \\ & + \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ \bar{B}_{v_{j+1}} \otimes \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_j \right] \cdot (\pi(\bar{U}(j+2)) - \pi(\bar{U}(j))), \\ & j = 0, 1, \dots, N-3, \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\alpha_v(j) = \frac{1}{\Delta x} \left[ -1 + \frac{1}{4} \left( \bar{F}_{v_j} \cdot (\bar{M}_{l_{j+1}} - \bar{M}_{l_{j-1}}) + \bar{M}_{g_{j+1}} - \bar{M}_{g_{j-1}} \right) \right], \quad (4.22)$$

$$j = 1, 2, \dots, N-2,$$

$$\begin{aligned} \beta_v(j) = & \frac{\phi_j}{\Delta t} \left( \pi(\bar{U}(j)) \cdot \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_j + \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)_j \right) - \left( \frac{\partial \bar{G}_v}{\partial p} \right)_j \\ & + \frac{1}{4\Delta x}(\bar{v}m(j) + \bar{v}m(j+1)) \left( \frac{\partial \bar{F}_v}{\partial p} \right)_j \cdot (\bar{M}_{l_{j+1}} - \bar{M}_{l_{j-1}}) \\ & - \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ \left( \frac{\partial \bar{B}_v}{\partial p} \right)_j \otimes (\bar{M}_{l_{j+1}} - \bar{M}_{l_{j-1}}) \right] \cdot (\pi(\bar{U}(j+1)) - \pi(\bar{U}(j-1))), \\ & j = 1, 2, \dots, N-2, \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\delta_v(j) = \frac{1}{\Delta x} \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \bar{F}_{v_{j-1}} \cdot (\bar{M}_{l_j} - \bar{M}_{l_{j-2}}) + \bar{M}_{g_j} - \bar{M}_{g_{j-2}} \right) \right] \equiv \frac{2}{\Delta x} + \alpha_v(j-1), \quad (4.24)$$

$$j = 2, 3, \dots, N-1,$$

$$\begin{aligned} \theta_v(j) = & \frac{1}{4\Delta x}(\bar{v}m(j-1) + \bar{v}m(j)) \left( \bar{F}_{v_{j-1}} \cdot \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_j + \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)_j \right) \\ & - \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ \bar{B}_{v_{j-1}} \otimes \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_j \right] \cdot (\pi(\bar{U}(j)) - \pi(\bar{U}(j-2))), \\ & j = 2, 3, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \gamma_v(j) = & -\frac{\phi_j}{\Delta t} \left( \pi(\bar{U}(j)) \cdot (\bar{M}_{l_j} - M_{l_j}^n) + \bar{M}_{g_j} - M_{g_j}^n \right) - \frac{1}{\Delta x}(\bar{v}m(j+1) - \bar{v}m(j)) \\ & - \frac{1}{4\Delta x}(\bar{v}m(j) + \bar{v}m(j+1)) \left( \bar{F}_{v_j} (\bar{M}_{l_{j+1}} - \bar{M}_{l_{j-1}}) + \bar{M}_{g_{j+1}} - \bar{M}_{g_{j-1}} \right) \\ & + \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ \bar{B}_{v_j} \otimes (\bar{M}_{l_{j+1}} - \bar{M}_{l_{j-1}}) \right] \cdot (\pi(\bar{U}(j+1)) - \pi(\bar{U}(j-1))) + \bar{G}_{v_j}, \\ & j = 1, 2, \dots, N-2. \end{aligned} \quad (4.26)$$

**Obs 4.2.** Os coeficientes em (4.21)–(4.26) acima serão usados de acordo com as condições de contorno especificadas.

4.3.2. *Avaliação vetorial dos coeficientes da equação da velocidade no interior da grade.* Inicialmente considere as constantes:  $\frac{1}{\Delta x}$ ,  $\frac{1}{(\Delta x)^2}$ ,  $\frac{1}{(2\Delta x)}$  e  $\frac{1}{(2\Delta x)^2}$ , as quais devem ser calculadas uma única vez.

Considere também os seguintes vetores pré-calculados no tempo  $t^n$  e na aproximação “barra” para o tempo  $t^{n+1}$ :  $U(j)$ ,  $vm(j)$  e  $p(j)$ .

Em seguida considere as funções vetoriais, as quais também são pré-calculadas, correspondendo a uma simples mudança de notação, onde os índices passarão a ser argumentos das funções:

$$\phi_j \equiv \phi(j) = \phi(x_j), \quad (4.27)$$

$$F_{v_j} \equiv F_v(j) = F(U(j), p(j)), \quad (4.28)$$

$$B_{v_j} \equiv B_v(j) = B(U(j), p(j)), \quad (4.29)$$

$$G_{v_j} \equiv G_v(j) = G(U(j), p(j)), \quad (4.30)$$

$$M_{l_j} \equiv M_l(j) = M_l(U(j), p(j)), \quad (4.31)$$

$$M_{g_j} \equiv M_g(j) = M_g(U(j), p(j)), \quad (4.32)$$

e as suas derivadas:

$$\left(\frac{\partial F_v}{\partial p}\right)_j \equiv \left(\frac{\partial F_v}{\partial p}\right)(j) = \left(\frac{\partial F_v}{\partial p}\right)(U(j), p(j)), \quad (4.33)$$

$$\left(\frac{\partial B_v}{\partial p}\right)_j \equiv \left(\frac{\partial B_v}{\partial p}\right)(j) = \left(\frac{\partial B_v}{\partial p}\right)(U(j), p(j)), \quad (4.34)$$

$$\left(\frac{\partial G_v}{\partial p}\right)_j \equiv \left(\frac{\partial G_v}{\partial p}\right)(j) = \left(\frac{\partial G_v}{\partial p}\right)(U(j), p(j)), \quad (4.35)$$

$$\left(\frac{\partial M_l}{\partial p}\right)_j \equiv \left(\frac{\partial M_l}{\partial p}\right)(j) = \left(\frac{\partial M_l}{\partial p}\right)(U(j), p(j)), \quad (4.36)$$

$$\left(\frac{\partial M_g}{\partial p}\right)_j \equiv \left(\frac{\partial M_g}{\partial p}\right)(j) = \left(\frac{\partial M_g}{\partial p}\right)(U(j), p(j)). \quad (4.37)$$

A partir das funções pré-calculadas acima, definimos as novas funções vetoriais, para  $j = 1, 2, \dots, N - 2$ :

$$\bar{v}mc(j) = \frac{1}{2} \left( \bar{v}m(j) + \bar{v}m(j+1) \right), \quad (4.38)$$

$$\pi c(\bar{U}(j)) = \frac{1}{2} \left( \pi(\bar{U}(j+1)) - \pi(\bar{U}(j-1)) \right), \quad (4.39)$$

$$\bar{M}c(j) = \frac{1}{2} \left( \bar{M}_l(j+1) - \bar{M}_l(j-1) \right), \quad (4.40)$$

$$\bar{C}(j) = \frac{1}{2} \left( \bar{F}_v(j) \cdot \bar{M}c(j) + \frac{1}{2} (\bar{M}_g(j+1) - \bar{M}_g(j-1)) \right). \quad (4.41)$$

A fim de separar os casos de a matriz  $B_v$  ser constante ou não, vamos definir os vetores seguintes:

$$\begin{aligned} \bar{B}_1(j) &= \frac{1}{2(\Delta x)^2} \left[ \bar{B}_v(j+1) \otimes \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)(j) \right] \cdot \pi c(\bar{U}(j+1)), \\ j &= 0, 1, \dots, N-2, \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} \bar{B}_2(j) &= \frac{1}{(\Delta x)^2} \left[ \left( \frac{\partial \bar{B}_v}{\partial p} \right)(j) \otimes \bar{M}c(j) \right] \cdot \pi c(\bar{U}(j)), \\ j &= 1, 2, \dots, N-2, \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} \bar{B}_3(j) &= \frac{1}{(\Delta x)^2} \left[ \bar{B}_v(j-1) \otimes \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)(j) \right] \cdot \pi c(\bar{U}(j-1)), \\ j &= 2, 3, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} \bar{B}_4(j) &= \frac{1}{(\Delta x)^2} \left[ \bar{B}_v(j) \otimes \bar{M}c(j) \right] \cdot \pi c(\bar{U}(j)). \\ j &= 1, 2, \dots, N-2, \end{aligned} \quad (4.45)$$

A fim de destacar os termos transientes em alguns coeficientes da equação (4.20) definimos os vetores seguintes:

$$\begin{aligned} \bar{T}_\beta(j) &= \frac{\phi(j)}{\Delta t} \left( \pi(\bar{U}(j)) \cdot \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)(j) + \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)(j) \right), \\ j &= 1, 2, \dots, N-2, \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_\gamma(j) &= -\frac{\phi(j)}{\Delta t} \left( \pi(\bar{U}(j)) \cdot (\bar{M}_l(j) - M_l^n(j)) + \bar{M}_g(j) - M_g^n(j) \right), \\ j &= 1, 2, \dots, N-2. \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$(4.48)$$

Com as definições dos vetores acima os coeficientes (4.21)–(4.26) da equação (4.20) podem ser escritos na forma vetorial como:

$$\eta_v(j) = -\frac{1}{2\Delta x} \bar{v}mc(j+1) \left( \bar{F}_v(j+1) \cdot \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)(j) + \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)(j) \right) + \bar{\mathcal{B}}_1(j), \quad (4.49)$$

$$j = 0, 1, \dots, N-3,$$

$$\alpha_v(j) = \frac{1}{\Delta x} [-1 + \bar{C}(j)], \quad (4.50)$$

$$j = 1, 2, \dots, N-2,$$

$$\beta_v(j) = \bar{\mathcal{T}}_\beta(j) - \left( \frac{\partial \bar{G}_v}{\partial p} \right)(j) + \frac{1}{\Delta x} \bar{v}mc(j) \left( \frac{\partial \bar{F}_v}{\partial p} \right)(j) \cdot \bar{M}c(j) - \bar{\mathcal{B}}_2(j), \quad (4.51)$$

$$j = 1, 2, \dots, N-2,$$

$$\delta_v(j) = \frac{1}{\Delta x} [1 + \bar{C}(j-1)] \equiv \frac{2}{\Delta x} + \alpha_v(j-1), \quad (4.52)$$

$$j = 2, 3, \dots, N-1,$$

$$\theta_v(j) = \frac{1}{2\Delta x} \bar{v}mc(j-1) \left( \bar{F}_v(j-1) \cdot \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)(j) + \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)(j) \right) - \frac{1}{2} \bar{\mathcal{B}}_3(j), \quad (4.53)$$

$$j = 2, 3, \dots, N-1,$$

$$\gamma_{m_v}(j+1) \equiv \gamma_v(j) = \bar{\mathcal{T}}_\gamma(j) - \frac{1}{\Delta x} (\bar{v}m(j+1) - \bar{v}m(j)) - \frac{1}{\Delta x} \bar{v}mc(j) \bar{C}(j)$$

$$+ \bar{G}_v(j) + \bar{\mathcal{B}}_4(j), \quad (4.54)$$

$$j = 1, 2, \dots, N-2.$$

**Obs 4.3.** Os vetores nos lados esquerdos de (4.49)–(4.54) não são realmente programados, pois só são usados uma vez no preenchimento do sistema linear.

4.3.3. *A equação da pressão.* Considerando a discretização temporal da equação da pressão em (3.11), façamos a sua discretização espacial no ponto  $x_{j-\frac{1}{2}}$ ,  $j = 1, 2, \dots, N-1$ :

$$\Delta \bar{v}_{j-\frac{1}{2}} - \frac{1}{\Delta x} (\bar{p}_j - \bar{p}_{j-1}) \left( K \frac{\partial \bar{R}}{\partial p} \Delta \bar{p} \right)_{j-\frac{1}{2}} - \frac{1}{\Delta x} \left( K \bar{R} \right)_{j-\frac{1}{2}} (\Delta \bar{p}_j - \Delta \bar{p}_{j-1})$$

$$- \frac{1}{\Delta x} (\pi(\bar{U}_j) - \pi(\bar{U}_{j-1})) \cdot \left( K \frac{\partial \bar{S}}{\partial p} \Delta \bar{p} \right)_{j-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\Delta x} \left( K \bar{R} \right)_{j-\frac{1}{2}} (\bar{p}_j - \bar{p}_{j-1}) + \frac{1}{\Delta x} \left( K \bar{S} \right)_{j-\frac{1}{2}} \cdot (\pi(\bar{U}_j) - \pi(\bar{U}_{j-1})) - \bar{v}_{j-\frac{1}{2}} \quad (4.55)$$

Tomando-se as médias em  $R$  e  $S$  e multiplicando a equação (4.55) por  $\Delta x$  obtemos:

$$\begin{aligned} & \Delta x \Delta \bar{v}_{j-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(\bar{p}_j - \bar{p}_{j-1})K_{j-\frac{1}{2}} \left[ \left( \frac{\partial \bar{R}}{\partial p} \Delta \bar{p} \right)_{j-1} + \left( \frac{\partial \bar{R}}{\partial p} \Delta \bar{p} \right)_j \right] \\ & - K_{j-\frac{1}{2}} \frac{\bar{R}_{j-1} + \bar{R}_j}{2} (\Delta \bar{p}_j - \Delta \bar{p}_{j-1}) - K_{j-\frac{1}{2}} \frac{\pi(\bar{U}_j) - \pi(\bar{U}_{j-1})}{2} \cdot \left[ \left( \frac{\partial \bar{S}}{\partial p} \Delta \bar{p} \right)_{j-1} + \left( \frac{\partial \bar{S}}{\partial p} \Delta \bar{p} \right)_j \right] \\ & = K_{j-\frac{1}{2}} \frac{\bar{R}_{j-1} + \bar{R}_j}{2} (\bar{p}_j - \bar{p}_{j-1}) + K_{j-\frac{1}{2}} \frac{\bar{S}_{j-1} + \bar{S}_j}{2} \cdot (\pi(\bar{U}_j) - \pi(\bar{U}_{j-1})) - \Delta x \bar{v}_{j-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Identificando  $\Delta \bar{p}_{j-1}$  com  $\Delta \bar{p}(j-1)$ ,  $\Delta \bar{v}_{j-\frac{1}{2}}$  com  $\Delta \bar{v}m(j)$  e  $\Delta \bar{p}_j$  com  $\Delta \bar{p}(j)$ ,  $\bar{v}_{j-\frac{1}{2}}$  com  $\bar{v}m(j)$ ,  $K_{j-\frac{1}{2}}$  com  $Km(j)$  e colocando-os em evidência, obtemos para  $j = 1, 2, \dots, N-1$  o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} & \left\{ Km(j) \frac{\bar{R}_{j-1} + \bar{R}_j}{2} - Km(j) \frac{\bar{p}_j - \bar{p}_{j-1}}{2} \left( \frac{\partial \bar{R}}{\partial p} \right)_{j-1} - Km(j) \frac{\pi(\bar{U}_j) - \pi(\bar{U}_{j-1})}{2} \cdot \left( \frac{\partial \bar{S}}{\partial p} \right)_{j-1} \right\} \Delta \bar{p}(j-1) \\ & + \Delta x \Delta \bar{v}m(j) \\ & + \left\{ - Km(j) \frac{\bar{R}_{j-1} + \bar{R}_j}{2} - Km(j) \frac{\bar{p}_j - \bar{p}_{j-1}}{2} \left( \frac{\partial \bar{R}}{\partial p} \right)_j - Km(j) \frac{\pi(\bar{U}_j) - \pi(\bar{U}_{j-1})}{2} \cdot \left( \frac{\partial \bar{S}}{\partial p} \right)_j \right\} \Delta \bar{p}(j) \\ & = Km(j) \frac{\bar{R}_{j-1} + \bar{R}_j}{2} (\bar{p}_j - \bar{p}_{j-1}) + Km(j) \frac{\bar{S}_{j-1} + \bar{S}_j}{2} \cdot (\pi(\bar{U}_j) - \pi(\bar{U}_{j-1})) - \Delta x \bar{v}m(j). \end{aligned} \quad (4.57)$$

Escrevendo a Eq. (4.57) numa forma compacta, obtemos

$$L_p(j-1) \Delta \bar{p}(j-1) + \Delta x \Delta \bar{v}m(j) + D_p(j) \Delta \bar{p}(j) = A_p(j), \quad (4.58)$$

onde

$$\begin{aligned} L_p(j) &= Km(j+1) \frac{\bar{R}_j + \bar{R}_{j+1}}{2} - Km(j+1) \frac{\bar{p}_{j+1} - \bar{p}_j}{2} \left( \frac{\partial \bar{R}}{\partial p} \right)_j \\ &\quad - Km(j+1) \frac{\pi(\bar{U}_{j+1}) - \pi(\bar{U}_j)}{2} \cdot \left( \frac{\partial \bar{S}}{\partial p} \right)_j, \quad j = 0, 1, \dots, N-2, \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} D_p(j) &= -Km(j) \frac{\bar{R}_{j-1} + \bar{R}_j}{2} - Km(j) \frac{\bar{p}_j - \bar{p}_{j-1}}{2} \left( \frac{\partial \bar{R}}{\partial p} \right)_j \\ &\quad - Km(j) \frac{\pi(\bar{U}_j) - \pi(\bar{U}_{j-1})}{2} \cdot \left( \frac{\partial \bar{S}}{\partial p} \right)_j, \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned} A_p(j) &= Km(j) \frac{\bar{R}_{j-1} + \bar{R}_j}{2} (\bar{p}_j - \bar{p}_{j-1}) + Km(j) \frac{\bar{S}_{j-1} + \bar{S}_j}{2} \cdot (\pi(\bar{U}_j) - \pi(\bar{U}_{j-1})) \\ &\quad - \Delta x \bar{v}m(j), \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (4.61)$$

onde as funções  $R$  e  $S$  estão definidas em (A.41) e (A.42), respectivamente.



4.3.4. *Avaliação vetorial dos coeficientes da equação de pressão no interior da grade.* Considere que os seguintes vetores sejam pré-calculados no tempo  $t^n$  e na aproximação “barra” para o tempo  $t^{n+1}$ :  $U(j)$ ,  $vm(j)$  e  $p(j)$ .

Em seguida considere as funções vetoriais, as quais também são pré-calculadas, correspondendo a uma simples mudança de notação, onde os índices passarão a ser argumentos das funções:

$$Km(j) \equiv Km(x_j) = K(x_{j-\frac{1}{2}}), \quad (4.62)$$

$$R_j \equiv R(j) = R(U(j), p(j)), \quad (4.63)$$

$$S_j \equiv S(j) = S(U(j), p(j)), \quad (4.64)$$

$$\left(\frac{\partial R}{\partial p}\right)_j \equiv \left(\frac{\partial R}{\partial p}\right)(j) = \left(\frac{\partial R}{\partial p}\right)(U(j), p(j)), \quad (4.65)$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_j \equiv \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)(j) = \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)(U(j), p(j)). \quad (4.66)$$

A partir das funções pré-calculadas acima, definimos as grandezas vetoriais a seguir, onde a notação “cm” significa que a função está centrada no ponto  $x_{j-\frac{1}{2}}$ :

$$\bar{R}cm(j) = \frac{Km(j)}{2} \left( \bar{R}(j-1) + \bar{R}(j) \right), \quad (4.67)$$

$$\bar{S}cm(j) = \frac{Km(j)}{2} \left( \bar{S}(j-1) + \bar{S}(j) \right), \quad (4.68)$$

$$\bar{p}cm(j) = \frac{1}{2} \left( \bar{p}(j) - \bar{p}(j-1) \right), \quad (4.69)$$

$$\pi cm(\bar{U}(j)) = \frac{1}{2} \left( \pi(\bar{U}(j)) - \pi(\bar{U}(j-1)) \right). \quad (4.70)$$

Com as definições dos vetores acima os coeficientes (4.59)–(4.61) podem ser escritos na forma vetorial como:

$$\begin{aligned} L_p(j) &= \bar{R}cm(j+1) - Km(j+1) \left( \frac{\partial \bar{R}}{\partial p} \right)(j) \bar{p}cm(j+1) \\ &\quad - Km(j+1) \left( \frac{\partial \bar{S}}{\partial p} \right)(j) \cdot \pi cm(\bar{U}(j+1)), \quad j = 0, 1, \dots, N-2, \end{aligned} \quad (4.71)$$

$$\begin{aligned} D_p(j) &= -\bar{R}cm(j) - Km(j) \left( \frac{\partial \bar{R}}{\partial p} \right)(j) \bar{p}cm(j) - Km(j) \left( \frac{\partial \bar{S}}{\partial p} \right)(j) \cdot \pi cm(\bar{U}(j)), \\ &\quad j = 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (4.72)$$

$$\begin{aligned} A_p(j) &= 2\bar{R}cm(j) \bar{p}cm(j) + 2\bar{S}cm(j) \cdot \pi cm(\bar{U}(j)) - \Delta x \bar{v}m(j), \\ &\quad j = 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (4.73)$$

**Obs 4.4.** Os vetores nos lados esquerdos de (4.71)–(4.73) não são realmente programados, pois só são usados uma vez no preenchimento do sistema linear.

4.3.5. *O sistema linear para o subsistema pressão-velocidade compressível no interior da malha.* Juntando a equação (4.20) com a equação (4.58), obtemos o sistema pressão-velocidade não conservativo discretizado no interior da grade:

$$\begin{aligned} \eta_v(j-1)\Delta\bar{p}(j-1) + \alpha_v(j)\Delta\bar{v}m(j) &\quad + \beta_v(j)\Delta\bar{p}(j) \\ &\quad + \delta_v(j+1)\Delta\bar{v}m(j+1) + \theta_v(j+1)\Delta\bar{p}(j+1) = \gamma_v(j), \end{aligned} \quad (4.74)$$

$$L_p(j-1)\Delta\bar{p}(j-1) + \Delta x \Delta\bar{v}m(j) \quad + D_p(j)\Delta\bar{p}(j) \quad = A_p(j). \quad (4.75)$$

A forma matricial do sistema algébrico acima depende das condições de contorno a serem consideradas e será escrita em cada seção específica.

Os coeficientes do sistema acima são obtidos das fórmulas (4.49), (4.50), (4.51), (4.52), (4.53), (4.54), (4.71), (4.72) e (4.73).

#### 4.4. A discretização espacial do subsistema p-v no caso incompressível.

4.4.1. *Discretização da equação da velocidade no interior da malha no caso incompressível.* A discretização da equação da velocidade no caso incompressível é obtida da equação (4.19) considerando nulas todas as derivadas com relação a  $p$ . Neste caso temos:

$$\begin{aligned}
& \left\{ -\frac{1}{\Delta x} + \frac{1}{4\Delta x} \left( \bar{F}_{v_j} \cdot (\bar{M}_{l_{j+1}} - \bar{M}_{l_{j-1}}) + \bar{M}_{g_{j+1}} - \bar{M}_{g_{j-1}} \right) \right\} \Delta \bar{v}_{j-\frac{1}{2}} \\
& + \left\{ \frac{1}{\Delta x} + \frac{1}{4\Delta x} \left( \bar{F}_{v_j} \cdot (\bar{M}_{l_{j+1}} - \bar{M}_{l_{j-1}}) + \bar{M}_{g_{j+1}} - \bar{M}_{g_{j-1}} \right) \right\} \Delta \bar{v}_{j+\frac{1}{2}} \\
& = -\frac{\phi_j}{\Delta t} (\pi(\bar{U}) \cdot (\bar{M}_l - M_l^n) + \bar{M}_g - M_g^n)_j - \frac{1}{\Delta x} (\bar{v}_{j+\frac{1}{2}} - \bar{v}_{j-\frac{1}{2}}) \\
& \quad - \frac{1}{4\Delta x} (\bar{v}_{j-\frac{1}{2}} + \bar{v}_{j+\frac{1}{2}}) \left( \bar{F}_{v_j} \cdot (\bar{M}_{l_{j+1}} - \bar{M}_{l_{j-1}}) + \bar{M}_{g_{j+1}} - \bar{M}_{g_{j-1}} \right) \\
& \quad + \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ \bar{B}_{v_j} \otimes (\bar{M}_{l_{j+1}} - \bar{M}_{l_{j-1}}) \right] \cdot (\pi(\bar{U}_{j+1}) - \pi(\bar{U}_{j-1})) + \bar{G}_{v_j}. \quad (4.76)
\end{aligned}$$

Identificando  $v_{j-\frac{1}{2}}$  com  $vm(j)$ ,  $v_{j+\frac{1}{2}}$  com  $vm(j+1)$ ,  $\Delta \bar{v}_{j-\frac{1}{2}}$  com  $\Delta \bar{v}m(j)$  e  $\Delta \bar{v}_{j+\frac{1}{2}}$  com  $\Delta \bar{v}m(j+1)$ , podemos escrever (4.76) numa forma compacta análoga a (4.20) como:

$$\alpha_v(j) \Delta \bar{v}m(j) + \delta_v(j+1) \Delta \bar{v}m(j+1) = \gamma_v(j), \quad (4.77)$$

para  $j = 1, 2, \dots, N-2$ .

4.4.2. *Discretização newtoniana da equação da pressão no caso incompressível.* A forma compacta da discretização da equação da pressão no interior da malha é a mesma obtida em (4.58):

$$L_p(j-1) \Delta \bar{p}(j-1) + \Delta x \Delta \bar{v}m(j) + D_p(j) \Delta \bar{p}(j) = A_p(j),$$

para  $j = 2, 3, \dots, N-1$ .

4.4.3. *O sistema linear para o subsistema pressão-velocidade incompressível no interior da malha.* Juntando a equação (4.77) com a equação (4.58), obtemos o sistema pressão-velocidade incompressível discretizado no interior da grade:

$$\alpha_v(j) \Delta \bar{v}m(j) + \delta_v(j+1) \Delta \bar{v}m(j+1) = \gamma_v(j), \quad (4.78)$$

$$L_p(j-1) \Delta \bar{p}(j-1) + \Delta x \Delta \bar{v}m(j) + D_p(j) \Delta \bar{p}(j) = A_p(j). \quad (4.79)$$

Aqui também a forma matricial do sistema algébrico acima depende das condições de contorno a serem consideradas e será escrita em cada seção específica.

Quanto aos coeficientes do sistema (4.78)–(4.79), temos que:

$\alpha_v(j)$  são obtidos de (4.50),  $j = 1, 2, \dots, N - 2$ ,

$\delta_v(j)$  são obtidos de (4.52),  $j = 2, 3, \dots, N - 1$ ,

$\gamma m_v(j + 1) \equiv \gamma_v(j)$  são obtidos de (4.54),  $j = 1, 2, \dots, N - 2$ ,

$L_p(j)$  são obtidos de (4.71) retirando-se os dois termos com derivadas em  $p$ ,  
 $j = 0, 1, \dots, N - 2$

$D_p(j)$  são obtidos de (4.72) retirando-se os dois termos com derivadas em  $p$  e  
 $j = 1, 2, \dots, N - 1$

$A_p(j)$  são obtidos de (4.73),  $j = 1, 2, \dots, N - 1$ .

**4.5. Inicialização do subsistema pressão-velocidade.** Vamos considerar que as condições iniciais para as saturações sejam dadas. Já para a velocidade e a pressão serão dadas apenas combinações de condições de contorno. Assim os valores da velocidade e da pressão no nível de tempo *zero* deverão ser obtidos como aproximações a partir das condições iniciais do subsistema de balanços e das condições de contorno especificadas.

Supondo que em condições de reservatório a pressão e a velocidade estejam em algum estado de equilíbrio, vamos obter as aproximações iniciais destas quantidades usando a equação da velocidade (2.10) na sua forma estacionária

$$\frac{\partial v}{\partial x} + v \left( F_v(U, p) \cdot \frac{\partial M_l(U, p)}{\partial x} + \frac{\partial M_g(U, p)}{\partial x} \right) = \left[ B_v(U, p) \otimes \frac{\partial M_l(U, p)}{\partial x} \right] \cdot \frac{\partial \pi(U)}{\partial x} + G_v(U, p). \quad (4.80)$$

e a equação da pressão (2.11) (que não possui termos transientes).

O método numérico para obter a inicialização do subsistema pressão-velocidade também é baseado no método de Newton e está descrito a seguir.

*Primeiro passo.* Atribuímos uma aproximação grosseira para a pressão nos pontos interiores da malha, denotada por  $p_j^0$ ,  $j = 0, 1, \dots, N - 1$ .

*Segundo passo.* Usando a aproximação grosseira  $p_j^0$ , a partir da equação da velocidade estacionária (4.80) e da equação da pressão (2.11), determinamos uma primeira aproximação para  $(v(x_{j-\frac{1}{2}}, 0), p(x_j, 0))$ , denotada por  $(\bar{v}m(j), \bar{p}(j))$ .

*Terceiro passo.* De posse das aproximações iniciais  $\bar{v}m(j)$  e  $\bar{p}(j)$  obtidas no segundo passo, usamos normalmente o método de Newton para as equações da velocidade estacionária e da pressão para obtermos aproximações melhores de  $(v(x_{j-\frac{1}{2}}, 0), p(x_j, 0))$ , denotadas por  $(\bar{v}m(j), \bar{p}(j))$ , respectivamente.

Após um número suficiente de iterações do método de Newton no terceiro passo, fazemos  $\bar{v}_{j-\frac{1}{2}} \equiv \bar{v}m(j) = \bar{v}m(j)$  e  $\bar{p}_j \equiv \bar{p}(j) = \bar{p}(j)$ .

**Obs 4.5.** Observamos aqui que a implementação dos três passos acima difere para cada conjunto de condições de contorno considerado. Por isto, em cada Seção específica de um conjunto de condições de contorno haverá uma subseção sobre a implementação deste passos para tal conjunto.

4.5.1. *Primeiro passo - Aproximação grosseira da pressão.* Vamos considerar que as grandezas em  $U(x, 0)$  sejam dadas, digamos por  $(U^0(x, 0))$ .

Suponhamos que a pressão seja dada pelo menos numa das extremidades do reservatório. Se a pressão for dada apenas numa extremidade, escolhamos este valor para ser as aproximações iniciais nos pontos  $x_j$  interiores da malha, denotadas por  $p_j^0$ .

**Obs 4.6.** Caso a pressão seja dada nas duas pontas, pode-se escolher  $p_j^0$  como sendo um destes dois valores, ou fazer uma interpolação linear entre eles.

Assim para a aproximação inicial da velocidade, as funções que dependem de  $U$  e de  $p$  serão avaliadas em  $(U_j^0, p_j^0)$ . Vamos usar o superscrito “0” para indicar estes valores. Por exemplo,  $M_{l_j}^0$  significa  $M_{l_j}(U_j^0, p_j^0) \equiv M_{l_j}(U(x_j, 0), p_j^0)$ .

4.5.2. *Segundo passo - Discretização das equações da velocidade estacionária e da pressão no interior da malha.* Vamos considerar primeiro a equação da velocidade e depois a equação da pressão.

*Discretização da equação da velocidade estacionária.*

A fim de obter as primeiras aproximações  $\bar{v}_{j-\frac{1}{2}} \equiv \bar{v}m(j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, N-1$ , para poder iniciar o método de Newton, que será usado para calcular os valores iniciais de  $v$  e de  $p$ , vamos considerar a discretização espacial da equação (4.80) num ponto  $x_j$  do interior da malha:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x}(\bar{v}_{j+\frac{1}{2}} - \bar{v}_{j-\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2\Delta x}\bar{v}_j \left( F_{v_j}^0 \cdot [M_{l_{j+1}}^0 - M_{l_{j-1}}^0] + M_{g_{j+1}}^0 - M_{g_{j-1}}^0 \right) \\ & = \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ B_{v_j}^0 \otimes (M_{g_{j+1}}^0 - M_{g_{j-1}}^0) \right] \cdot (\pi(U_{j+1}^0) - \pi(U_{j-1}^0)) + G_{v_j}^0. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Após tomarmos médias, obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x}(\bar{v}_{j+\frac{1}{2}} - \bar{v}_{j-\frac{1}{2}}) + \frac{1}{4\Delta x}(\bar{v}_{j-\frac{1}{2}} + \bar{v}_{j+\frac{1}{2}}) \left( F_{v_j}^0 \cdot [M_{l_{j+1}}^0 - M_{l_{j-1}}^0] + M_{g_{j+1}}^0 - M_{g_{j-1}}^0 \right) \\ & = \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ B_{v_j}^0 \otimes (M_{l_{j+1}}^0 - M_{l_{j-1}}^0) \right] \cdot (\pi(U_{j+1}^0) - \pi(U_{j-1}^0)) + G_{v_j}^0. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Fazendo a identificação  $\bar{v}_{j-\frac{1}{2}} \equiv \bar{v}m(j)$  e  $\bar{v}_{j+\frac{1}{2}} \equiv \bar{v}m(j+1)$ , obtemos o seguinte sistema:

$$\alpha_v^0(j)\bar{v}m(j) + \delta_v^0(j+1)\bar{v}m(j+1) = \gamma_v^0(j), \quad (4.83)$$

onde

$$\alpha_v^0(j) = \frac{1}{\Delta x} \left( -1 + \frac{1}{4} [F_{v_j}^0 \cdot (M_{l_{j+1}}^0 - M_{l_{j-1}}^0) + M_{g_{j+1}}^0 - M_{g_{j-1}}^0] \right), \quad j = 1, 2, \dots, N-2, \quad (4.84)$$

$$\delta_v^0(j) = \frac{1}{\Delta x} \left( 1 + \frac{1}{4} [F_{v_{j-1}}^0 \cdot (M_{l_j}^0 - M_{l_{j-2}}^0) + M_{g_j}^0 - M_{g_{j-2}}^0] \right), \quad j = 2, 3, \dots, N-1, \quad (4.85)$$

$$\gamma_v^0(j) = \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ B_{v_j}^0 \otimes (M_{l_{j+1}}^0 - M_{l_{j-1}}^0) \right] \cdot (\pi(U_{j+1}^0) - \pi(U_{j-1}^0)) + G_{v_j}^0, \quad j = 1, 2, \dots, N-2. \quad (4.86)$$

*Avaliação vetorial dos coeficientes para a inicialização da equação da velocidade no interior da grade.*

Como antes, inicialmente calculamos as constantes:  $\frac{1}{\Delta x}$  e  $\frac{1}{(\Delta x)^2}$ ,  $\frac{1}{(2\Delta x)}$ .

Consideremos que o vetor  $U^0(j)$  consistindo dos valores iniciais das saturações no nível de tempo  $t^0 = 0$  esteja precalculado. Consideremos também o vetor  $p^0(j)$ , preenchido com o valor da aproximação inicial grosseira da pressão  $p^0$ .

De forma análoga as funções definidas em (4.39), (4.40), (4.41) e (4.45) definimos as funções vetoriais, para  $j = 1, 2, \dots, N-2$ :

$$\pi c(U^0(j)) = \frac{1}{2} \left( \pi(U^0(j+1)) - \pi(U^0(j-1)) \right), \quad (4.87)$$

$$M c^0(j) = \frac{1}{2} \left( M_l^0(j+1) - M_l^0(j-1) \right), \quad (4.88)$$

$$C^0(j) = \frac{1}{2} \left( F_v^0(j) \cdot M c^0(j) + \frac{1}{2} (M_g^0(j+1) - M_g^0(j-1)) \right). \quad (4.89)$$

$$\mathcal{B}_4^0(j) = \frac{1}{(\Delta x)^2} \left[ B_v^0(j) \otimes M c^0(j) \right] \cdot \pi c(U^0(j)). \quad (4.90)$$

Considerando as expressões das funções vetoriais definidas em (4.88), (4.89) e (4.90), os coeficientes (4.84)–(4.86) da equação (4.83) podem ser escritos na forma vetorial como:

$$\alpha_v^0(j) = \frac{1}{\Delta x} [-1 + C^0(j)], \quad j = 1, 2, \dots, N-2, \quad (4.91)$$

$$\delta_v^0(j) = \frac{1}{\Delta x} [1 + C^0(j-1)] \equiv \frac{2}{\Delta x} + \alpha_v^0(j-1), \quad j = 2, 3, \dots, N-1, \quad (4.92)$$

$$\gamma^0 m_v(j+1) \equiv \gamma_v^0(j) = G_v^0(j) + \mathcal{B}_4^0(j), \quad j = 1, 2, \dots, N-2. \quad (4.93)$$

onde lembramos que  $G_v(j)$ ,  $M_l(j)$  e  $M_g(j)$  estão definidas, respectivamente, em (4.30), (4.31) e (4.32), e que o superscrito “0” significa que as avaliações das funções estão sendo realizadas nos vetores  $U^0(j)$  e  $p^0(j)$ .

**Obs 4.7.** Note-se a semelhança de (4.91), (4.92) com (4.50), (4.52), respectivamente. No entanto o coeficiente  $\gamma_v^0(j)$  dado em (4.93) é semelhante a  $\gamma_v(j)$  apenas pela preservação dos dois últimos termos em (4.54). (Veja-se também (4.77), para o caso incompressível).

*Discretização newtoniana da equação da pressão no interior da grade.*

Consideremos a discretização espacial da equação da pressão (2.11) no ponto  $x_{j-\frac{1}{2}}$  do interior da grade, admitindo a aproximação inicial  $p^0(j) \equiv p^0$  e com o objetivo de obter uma aproximação inicial melhorada  $\bar{p}(j)$  para  $p(x_j, 0)$ :

$$\bar{v}_{j-\frac{1}{2}} = \frac{K_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta x} R_{j-\frac{1}{2}}^0 (\bar{p}_j - \bar{p}_{j-1}) + \frac{K_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta x} S_{j-\frac{1}{2}}^0 \cdot (\pi(U_j^0) - \pi(U_{j-1}^0)). \quad (4.94)$$

Tomando médias:

$$\bar{v}_{j-\frac{1}{2}} = \frac{K_{j-\frac{1}{2}}}{2\Delta x} (R_{j-1}^0 + R_j^0) (\bar{p}_j - \bar{p}_{j-1}) + \frac{K_{j-\frac{1}{2}}}{2\Delta x} (S_{j-1}^0 + S_j^0) \cdot (\pi(U_j^0) - \pi(U_{j-1}^0)). \quad (4.95)$$

Multiplicando tudo por  $\Delta x$ , obtemos:

$$K_{j-\frac{1}{2}} \frac{R_{j-1}^0 + R_j^0}{2} \bar{p}_{j-1} + \Delta x \bar{v}_{j-\frac{1}{2}} - K_{j-\frac{1}{2}} \frac{R_{j-1}^0 + R_j^0}{2} \bar{p}_j = K_{j-\frac{1}{2}} \frac{S_{j-1}^0 + S_j^0}{2} \cdot (\pi(U_j^0) - \pi(U_{j-1}^0)). \quad (4.96)$$

Identificando  $\bar{p}_j$  com  $\bar{p}(j)$  e  $\bar{v}_{j-\frac{1}{2}}$  com  $\bar{v}m(j)$  e  $K_{j-\frac{1}{2}}$  com  $Km(j)$ , isolando  $\bar{p}(j-1)$  e  $\bar{p}(j)$ , escrevemos o sistema (4.96) como:

$$L_p^0(j-1) \bar{p}(j-1) + \Delta x \bar{v}m(j) + D_p^0(j) \bar{p}(j) = A_p^0(j), \quad (4.97)$$

onde

$$L_p^0(j) = \frac{Km(j+1)}{2} \left( R_j^0 + R_{j+1}^0 \right), \quad j = 0, 1, \dots, N-2, \quad (4.98)$$

$$D_p^0(j) = -\frac{Km(j)}{2} \left( R_{j-1}^0 + R_j^0 \right) \equiv -L_p^0(j-1), \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad (4.99)$$

$$A_p^0(j) = \frac{Km(j)}{2} \left( S_{j-1}^0 + S_j^0 \right) \cdot (\pi(U_j^0) - \pi(U_{j-1}^0)), \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad (4.100)$$

Note-se a analogia de (4.97)–(4.99) com (4.58)–(4.60), retirando-se os termos com derivadas em  $p$ . Porém a analogia entre (4.100) e (4.61) é mantida apenas pelo termo intermediário em (4.61).

*Avaliação vetorial dos coeficientes para a inicialização da equação da pressão.*

Como antes, considere que vetores  $U^0(j)$  e  $p^0(j)$  sejam pré-calculados, os quais consistem dos valores das variáveis  $U(j)$  no nível de tempo *zero* e das aproximações  $p_j^0 \equiv p^0$  para a pressão.

A partir das funções pré-calculadas anteriormente, definimos funções análogas àquelas definidas em (4.67)–(4.70), para a inicialização:

$$Rcm^0(j) = \frac{Km(j)}{2} \left( R^0(j-1) + R^0(j) \right), \quad (4.101)$$

$$Scm^0(j) = \frac{Km(j)}{2} \left( S^0(j-1) + S^0(j) \right), \quad (4.102)$$

$$pcm^0(j) = \frac{1}{2} \left( p^0(j) - p^0(j-1) \right), \quad (4.103)$$

$$\pi cm(U^0(j)) = \frac{1}{2} \left( \pi(U^0(j)) - \pi(U^0(j-1)) \right). \quad (4.104)$$

Com as definições das funções (4.101)–(4.104) os coeficientes (4.98)–(4.100) podem ser escritos na forma vetorial como:

$$L_p^0(j) = Rcm^0(j+1), \quad j = 0, 1, \dots, N-2, \quad (4.105)$$

que é análogo à fórmula (4.71) a menos dos termos com derivadas em  $p$ ;

$$D_p^0(j) = -Rcm^0(j) \equiv -L_p^0(j-1), \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad (4.106)$$

que é análogo à fórmula (4.72) a menos dos termos com derivadas em  $p$ ;

$$A_p^0(j) = 2Scm^0(j) \cdot \pi cm(U^0(j)), \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad (4.107)$$

que difere de  $A_p(j)$  dado em (4.73) pela eliminação dos dois termos externos e preservando apenas o termo intermediário.

Relembramos que o superscrito “0” significa que as avaliações das funções estão sendo realizadas nos vetores  $U^0(j)$  e  $p^0(j)$ .

*O sistema linear para a primeira iteração do método de Newton na inicialização do subsistema pressão-velocidade no interior da malha.*

Juntando a equação (4.83) com a equação (4.97), obtemos o sistema para a primeira aproximação da pressão e da velocidade no interior da grade:

$$\alpha_v^0(j) \bar{v}m(j) + \delta_v^0(j+1) \bar{v}m(j+1) = \gamma_v^0(j), \quad (4.108)$$

$$L_p^0(j-1) \bar{p}(j-1) + \Delta x \bar{v}m(j) + D_p^0(j) \bar{p}(j) = A_p^0(j). \quad (4.109)$$

onde, na forma vetorial, os coeficientes são obtidos de (4.91), (4.92), (4.93), (4.105), (4.106) e de (4.107). Note-se a analogia entre os sistema (4.108)–(4.109) com o sistema (4.74)–(4.75)



no caso compressível, e com o sistema (4.78)–(4.79), no caso incompressível. Observe-se que em vez de  $\Delta$ , estamos calculando as próprias grandezas.

4.5.3. *Terceiro passo - Iteração genérica do método de Newton.* A  $k$ -ésima iteração ( $k > 1$ ) do método de Newton é totalmente análoga ao caso da aproximação num nível de tempo  $t^{n+1}$ . Ou seja, conhecidas as aproximações temporárias  $\bar{v}m(j)$  e  $\bar{p}(j)$  determinadas no segundo passo, incrementamos o processo iterativo para obtermos aproximações melhores  $\bar{\bar{v}}m(j)$  e  $\bar{\bar{p}}(j)$  de  $v(x_{j-\frac{1}{2}}, 0)$  e de  $p(x_j, 0)$ , respectivamente. Portanto, teremos que resolver um sistema análogo ao sistema (4.74)–(4.75):

$$\begin{aligned} \eta_v(j-1)\Delta\bar{\bar{p}}(j-1) + \alpha_v(j)\Delta\bar{\bar{v}}m(j) &+ \beta_v(j)\Delta\bar{\bar{p}}(j) \\ &+ \delta_v(j+1)\Delta\bar{\bar{v}}m(j+1) + \theta_v(j+1)\Delta\bar{\bar{p}}(j+1) = \gamma_v(j), \end{aligned} \quad (4.110)$$

$$L_p(j-1)\Delta\bar{\bar{p}}(j-1) + 2\Delta x\Delta\bar{\bar{v}}m(j) \quad + D_p(j)\Delta\bar{\bar{p}}(j) \quad = A_p(j). \quad (4.111)$$

Para obter os coeficientes acima consideramos inicialmente:

$$\begin{aligned} \bar{U}_j = U(x_j, 0), & \quad \text{dados em (4.17), } j = 0, 1, \dots, N-1, \\ (\bar{v}m(j), \bar{p}(j)) & \quad \text{obtidos do sistema (4.108)–(4.109) } j = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Daí os coeficientes do sistema (4.110)–(4.111), são:

$\eta_v(j)$  dado pela fórmula (4.49), para  $j = 0, 1, \dots, N - 3$ ,

$\alpha_v(j)$  dado pela fórmula (4.50), para  $j = 1, 2, \dots, N - 2$ ,

$$\beta_v(j) = - \left( \frac{\partial \bar{G}_v}{\partial p} \right) (j) + \frac{1}{\Delta x} \bar{v} m c(j) \left( \frac{\partial \bar{F}_v}{\partial p} \right) (j) \cdot \bar{M} c(j) - \bar{\mathcal{B}}_2(j), \quad (4.112)$$

para  $j = 1, 2, \dots, N - 2$ ,

que é análogo à fórmula (4.51), retirando-se o termo transiente  $\bar{\mathcal{T}}_\beta(j)$ ,

$\delta_v(j)$  dado pela fórmula (4.52), para  $j = 2, 3, \dots, N - 1$ ,

$\theta_v(j)$  dado pela fórmula (4.53), para  $j = 2, 3, \dots, N - 1$ ,

$$\begin{aligned} \gamma m_v(j+1) &\equiv \gamma_v(j) \\ &= - \frac{1}{\Delta x} (\bar{v} m(j+1) - \bar{v} m(j)) - \frac{1}{\Delta x} \bar{v} m c(j) \bar{C}(j) + \bar{G}_v(j) + \bar{\mathcal{B}}_4(j), \end{aligned} \quad (4.113)$$

para  $j = 1, 2, \dots, N - 2$ ,

que coincide com a fórmula (4.54), retirando-se o termo transiente  $\bar{\mathcal{T}}_\gamma(j)$ ,

$L_p(j-1)$  dado pela fórmula (4.71), para  $j = 0, 1, \dots, N - 2$ ,

$D_p(j)$  dado pela fórmula (4.72), para  $j = 1, 2, \dots, N - 1$ ,

$A_p(j)$  dado pela fórmula (4.73), para  $j = 1, 2, \dots, N - 1$ .

## 5. CONDIÇÕES DE CONTORNO:

INJEÇÃO: SATURAÇÕES, VELOCIDADE E PRESSÃO ESPECIFICADAS;  
PRODUÇÃO: NEUMANN NAS SATURAÇÕES.

Consideremos as seguintes condições de contorno na extremidade de injeção:

$$U_{-\frac{1}{2}} = U^i(t), \quad (5.1)$$

$$v_{-\frac{1}{2}} = v^i(t), \quad (5.2)$$

$$p_{-\frac{1}{2}} = p^i(t), \quad (5.3)$$

acompanhadas pela seguinte condição de contorno na extremidade de produção:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{N-\frac{1}{2}} = U_x^e(t). \quad (5.4)$$

**Obs 5.1.** O caso mais interessante e que está programado é a condição de Neumann homogênea, em que

$$U_x^e(t) = 0.$$

**Notação.** Vamos usar a seguinte notação para as **variáveis de contorno** quando avaliadas no contorno  $(x_{-\frac{1}{2}}, t)$ , com  $t \geq 0$ :

$$U_{-\frac{1}{2}} \equiv U^i, \quad (5.5)$$

$$v_{-\frac{1}{2}} \equiv v^i, \quad (5.6)$$

$$p_{-\frac{1}{2}} \equiv p^i. \quad (5.7)$$

Para as funções e suas derivadas que sejam dependentes de  $(U, p)$  vamos usar um superscrito “ $i$ ” para indicar avaliação no ponto  $(U^i, p^i)$ . Por exemplo,

$$F_U^i \equiv F_U(U^i, p^i) \equiv F_U(U_{-\frac{1}{2}}, p_{-\frac{1}{2}}). \quad (5.8)$$

Da mesma forma usaremos um superscrito “ $i(n)$ ” ou “ $i(n+1)$ ” para indicar que a avaliação está sendo realizada no nível de tempo  $t^n$  ou  $t^{n+1}$ , respectivamente. Por exemplo,

$$M_l^{i(n)} \equiv M_l(U^i(t^n), p^i(t^n)), \quad (5.9)$$

$$M_l^{i(n+1)} \equiv M_l(U^i(t^{n+1}), p^i(t^{n+1})). \quad (5.10)$$

## 5.1. O subsistema de balanços.

5.1.1. *Discretização do subsistema de balanços na injeção.* Iniciamos pela discretização espacial do subsistema de balanços no ponto  $x_0$ , o centro da primeira célula

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} H_U(U, p)_0 + \frac{1}{\Delta x} \left\{ \left( v F_U(U, p) \right)_{\frac{1}{2}} - \left( v F_U(U, p) \right)_{-\frac{1}{2}} \right\} \\ = \frac{1}{\Delta x} \left\{ \left( B_U(U, p) \frac{\partial U}{\partial x} \right)_{\frac{1}{2}} - \left( B_U(U, p) \frac{\partial U}{\partial x} \right)_{-\frac{1}{2}} \right\} + G_U(U, p)_0. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Usaremos uma diferença não centrada para aproximar  $(\partial U / \partial x)_{-\frac{1}{2}}$  na Eq. (5.11). Isto introduz um erro local de primeira ordem, que não faz perder a segunda ordem de precisão do esquema global. Por outro lado, diferença centrada não pode ser usada, pois seria necessário introduzir um ponto de grade fora do domínio físico. Usando a notação introduzida no início desta Seção para as avaliações referentes às aproximações na extremidade de injeção com superscrito “ $i$ ”, temos:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} H_U(U, p)_0 + \frac{1}{\Delta x} \left\{ v_{\frac{1}{2}} F_U(U, p)_{\frac{1}{2}} - v^i F_U^i \right\} \\
&= \frac{1}{\Delta x} \left\{ B_U(U, p)_{\frac{1}{2}} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_{\frac{1}{2}} - B_U^i \frac{(U_0 - U^i)}{\Delta x/2} \right\} + G_U(U, p)_0. \quad (5.12)
\end{aligned}$$

Tomando médias espaciais, aproximando a derivada espacial restante por diferença centrada, e reagrupando obtemos:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} H_U(U, p)_0 + \frac{1}{\Delta x} \left\{ \frac{v_{\frac{1}{2}}}{2} \left[ F_U(U, p)_0 + F_U(U, p)_1 \right] - v^i F_U^i \right\} \\
&= \frac{1}{2(\Delta x)^2} \left\{ (B_U(U, p)_0 + B_U(U, p)_1)(U_1 - U_0) - 4B_U^i(U_0 - U^i) \right\} + G_U(U, p)_0. \quad (5.13)
\end{aligned}$$

*Discretização temporal.* Passemos à discretização temporal da equação (5.13):

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} \left( H_U(U, p)_0^{n+1} - H_U(U, p)_0^n \right) + \frac{1}{\Delta x} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \epsilon v_{\frac{1}{2}}^{n+1} F_U(U, p)_0^{n+1} + \epsilon' v_{\frac{1}{2}}^n F_U(U, p)_0^n \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \epsilon v_{\frac{1}{2}}^{n+1} F_U(U, p)_1^{n+1} + \epsilon' v_{\frac{1}{2}}^n F_U(U, p)_1^n \right] - \left( \epsilon v^{i(n+1)} F_U^{i(n+1)} + \epsilon' v^{i(n)} F_U^{i(n)} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{2(\Delta x)^2} \left\{ \epsilon \left( B_U(U, p)_0^{n+1} + B_U(U, p)_1^{n+1} \right) \left( U_1^{n+1} - U_0^{n+1} \right) \right. \\
& \quad \left. + \epsilon' \left( B_U(U, p)_0^n + B_U(U, p)_1^n \right) \left( U_1^n - U_0^n \right) \right. \\
& \quad \left. - 4 \left( \epsilon B_U^{i(n+1)} (U_0^{n+1} - U^{i(n+1)}) + \epsilon' B_U^{i(n)} (U_0^n - U^{i(n)}) \right) \right\} \\
& \quad + \left( \epsilon G_U(U, p)_0^{n+1} + \epsilon' G_U(U, p)_0^n \right). \quad (5.14)
\end{aligned}$$

Reagrupando, obtemos:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} \left( H_U(U, p)_0^{n+1} - H_U(U, p)_0^n \right) + \frac{1}{2\Delta x} \left\{ \left( \epsilon v_{\frac{1}{2}}^{n+1} F_U(U, p)_0^{n+1} + \epsilon' v_{\frac{1}{2}}^n F_U(U, p)_0^n \right) \right. \\
& \quad \left. + \left( \epsilon v_{\frac{1}{2}}^{n+1} F_U(U, p)_1^{n+1} + \epsilon' v_{\frac{1}{2}}^n F_U(U, p)_1^n \right) \right\} - \frac{1}{\Delta x} \left[ \epsilon v^{i(n+1)} F_U^{i(n+1)} + \epsilon' v^{i(n)} F_U^{i(n)} \right] \\
& = \frac{1}{2(\Delta x)^2} \left\{ \epsilon \left( B_U(U, p)_0^{n+1} + B_U(U, p)_1^{n+1} \right) \left( U_1^{n+1} - U_0^{n+1} \right) \right. \\
& \quad \left. + \epsilon' \left( B_U(U, p)_0^n + B_U(U, p)_1^n \right) \left( U_1^n - U_0^n \right) \right. \\
& \quad \left. - 4 \left( \epsilon B_U^{i(n+1)} U_0^{n+1} + \epsilon' B_U^{i(n)} U_0^n \right) + 4 \left( \epsilon B_U^{i(n+1)} U^{i(n+1)} + \epsilon' B_U^{i(n)} U^{i(n)} \right) \right\} \\
& \quad + \left( \epsilon G_U(U, p)_0^{n+1} + \epsilon' G_U(U, p)_0^n \right). \tag{5.15}
\end{aligned}$$

*O método de Newton para dados especificados na injeção.* Usaremos o método não linear de Euler/Crank-Nicolson. Suponhamos conhecida a aproximação  $(U^n, v^n, p^n)$ . Sejam  $(\bar{U}, \bar{v}, \bar{p})$  uma aproximação temporária de  $(U^{n+1}, v^{n+1}, p^{n+1})$  e  $(\bar{\bar{U}}, \bar{\bar{v}}, \bar{\bar{p}})$  uma nova aproximação a ser determinada de  $(U^{n+1}, v^{n+1}, p^{n+1})$ .

Usaremos a notação  $H_U^n = H_U(U^n, p^n)$ ,  $F_U^n = F_U(U^n, p^n)$ ,  $B_U^n = B_U(U^n, p^n)$  e  $G_U^n = G_U(U^n, p^n)$ :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} \left( H_U(\bar{\bar{U}}, \bar{\bar{p}})_0 - H_{U_0}^n \right) + \frac{1}{2\Delta x} \left\{ \left( \epsilon \bar{v}_{\frac{1}{2}} F_U(\bar{\bar{U}}, \bar{\bar{p}})_0 + \epsilon' v_{\frac{1}{2}}^n F_{U_0}^n \right) + \left( \epsilon \bar{v}_{\frac{1}{2}} F_U(\bar{\bar{U}}, \bar{\bar{p}})_1 + \epsilon' v_{\frac{1}{2}}^n F_{U_1}^n \right) \right\} \\
& \quad - \frac{1}{\Delta x} \left[ \epsilon v^{i(n+1)} F_U^{i(n+1)} + \epsilon' v^{i(n)} F_U^{i(n)} \right] \\
& = \frac{1}{2(\Delta x)^2} \left\{ \epsilon \left( B_U(\bar{\bar{U}}, \bar{\bar{p}})_0 + B_U(\bar{\bar{U}}, \bar{\bar{p}})_1 \right) (\bar{\bar{U}}_1 - \bar{\bar{U}}_0) + \epsilon' \left( B_{U_0}^n + B_{U_1}^n \right) (U_1^n - U_0^n) \right. \\
& \quad \left. - 4 \left( \epsilon B_U^{i(n+1)} \bar{\bar{U}}_0 + \epsilon' B_U^{i(n)} U_0^n \right) + 4 \left( \epsilon B_U^{i(n+1)} U^{i(n+1)} + \epsilon' B_U^{i(n)} U^{i(n)} \right) \right\} \\
& \quad + \epsilon G_U(\bar{\bar{U}}, \bar{\bar{p}})_0 + \epsilon' G_{U_0}^n. \tag{5.16}
\end{aligned}$$

Somando e subtraindo termos convenientes:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} \left( H_U(\bar{U}, \bar{p})_0 - H_U(\bar{U}, \bar{p})_0 + H_U(\bar{U}, \bar{p})_0 - H_{U_0}^n \right) \\
& + \frac{1}{2\Delta x} \left\{ \left( \epsilon \bar{v}_{\frac{1}{2}} (F_U(\bar{U}, \bar{p})_0 - F_U(\bar{U}, \bar{p})_0 + F_U(\bar{U}, \bar{p})_0) + \epsilon' v_{\frac{1}{2}}^n F_{U_0}^n \right) \right. \\
& + \left. \left( \epsilon \bar{v}_{\frac{1}{2}} (F_U(\bar{U}, \bar{p})_1 - F_U(\bar{U}, \bar{p})_1 + F_U(\bar{U}, \bar{p})_1) + \epsilon' v_{\frac{1}{2}}^n F_{U_1}^n \right) \right\} \\
& - \frac{1}{\Delta x} \left[ \epsilon v^{i(n+1)} F_U^{i(n+1)} + \epsilon' v^{i(n)} F_U^{i(n)} \right] \\
& = \frac{1}{2(\Delta x)^2} \left\{ \epsilon \left( B_U(\bar{U}, \bar{p})_0 - B_U(\bar{U}, \bar{p})_0 + B_U(\bar{U}, \bar{p})_0 + B_U(\bar{U}, \bar{p})_1 - B_U(\bar{U}, \bar{p})_1 + B_U(\bar{U}, \bar{p})_1 \right) \right. \\
& \left( (\bar{U}_1 - \bar{U}_1 + \bar{U}_1) - (\bar{U}_0 - \bar{U}_0 + \bar{U}_0) \right) \\
& + \epsilon' \left( B_{U_0}^n + B_{U_1}^n \right) (U_1^n - U_0^n) - 4 \left( \epsilon B_U^{i(n+1)} (\bar{U}_0 - \bar{U}_0 + \bar{U}_0) + \epsilon' B_U^{i(n)} U_0^n \right) \\
& + 4 \left( \epsilon B_U^{i(n+1)} U^{i(n+1)} + \epsilon' B_U^{i(n)} U^{i(n)} \right) \left. \right\} \\
& + \epsilon \left( G_U(\bar{U}, \bar{p})_0 - G_U(\bar{U}, \bar{p})_0 + G_U(\bar{U}, \bar{p})_0 \right) + \epsilon' G_{U_0}^n. \tag{5.17}
\end{aligned}$$

Linearizando em torno de  $(\bar{U}, \bar{p})$  e substituindo  $\bar{U} - \bar{U} = \Delta \bar{U}$ , obtemos a seguinte equação:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{\partial \bar{H}_U}{\partial U} \right)_0 \Delta \bar{U}_0 + \frac{1}{\Delta t} \left( \bar{H}_{U_0} - H_{U_0}^n \right) \\
& + \frac{1}{2\Delta x} \left\{ \epsilon \bar{v}_{\frac{1}{2}} \left( \frac{\partial \bar{F}_U}{\partial U} \right)_0 \Delta \bar{U}_0 + \epsilon \bar{v}_{\frac{1}{2}} \bar{F}_{U_0} + \epsilon' v_{\frac{1}{2}}^n F_{U_0}^n + \epsilon \bar{v}_{\frac{1}{2}} \left( \frac{\partial \bar{F}_U}{\partial U} \right)_1 \Delta \bar{U}_1 + \epsilon \bar{v}_{\frac{1}{2}} \bar{F}_{U_1} + \epsilon' v_{\frac{1}{2}}^n F_{U_1}^n \right\} \\
& - \frac{1}{\Delta x} \left[ \epsilon v^{i(n+1)} F_U^{i(n+1)} + \epsilon' v^{i(n)} F_U^{i(n)} \right] \\
& = \frac{1}{2(\Delta x)^2} \left\{ \epsilon \left[ \left( \frac{\partial \bar{B}_U}{\partial U} \right)_0 \circ \Delta \bar{U}_0 + \left( \frac{\partial \bar{B}_U}{\partial U} \right)_1 \circ \Delta \bar{U}_1 + \bar{B}_{U_0} + \bar{B}_{U_1} \right] \left( (\Delta \bar{U}_1 - \Delta \bar{U}_0) + (\bar{U}_1 - \bar{U}_0) \right) \right. \\
& + \epsilon' \left( B_{U_0}^n + B_{U_1}^n \right) (U_1^n - U_0^n) - 4 \left( \epsilon B_U^{i(n+1)} (\Delta \bar{U}_0 + \bar{U}_0) + \epsilon' B_U^{i(n)} U_0^n \right) \\
& + 4 \left( \epsilon B_U^{i(n+1)} U^{i(n+1)} + \epsilon' B_U^{i(n)} U^{i(n)} \right) \left. \right\} + \epsilon \left( \frac{\partial \bar{G}_U}{\partial U} \right)_0 \Delta \bar{U}_0 + \epsilon \bar{G}_{U_0} + \epsilon' G_{U_0}^n. \tag{5.18}
\end{aligned}$$

Negligenciando termos de segunda ordem  $O(\Delta^2)$ :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{\partial \bar{H}_U}{\partial U} \right)_0 \Delta \bar{U}_0 + \frac{1}{\Delta t} \left( \bar{H}_{U_0} - H_{U_0}^n \right) + \frac{\epsilon \bar{v}_{\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \left[ \left( \frac{\partial \bar{F}_U}{\partial U} \right)_0 \Delta \bar{U}_0 + \left( \frac{\partial \bar{F}_U}{\partial U} \right)_1 \Delta \bar{U}_1 \right] \\
& + \frac{1}{2\Delta x} \left[ \epsilon \bar{v}_{\frac{1}{2}} (\bar{F}_{U_0} + \bar{F}_{U_1}) + \epsilon' v_{\frac{1}{2}}^n (F_{U_0}^n + F_{U_1}^n) \right] - \frac{1}{\Delta x} \left[ \epsilon v^{i(n+1)} F_U^{i(n+1)} + \epsilon' v^{i(n)} F_U^{i(n)} \right] \\
& = \frac{1}{2(\Delta x)^2} \left\{ \epsilon \left[ \left( \frac{\partial \bar{B}_U}{\partial U} \right)_0 \circ \Delta \bar{U}_0 + \left( \frac{\partial \bar{B}_U}{\partial U} \right)_1 \circ \Delta \bar{U}_1 \right] (\bar{U}_1 - \bar{U}_0) \right. \\
& + \left. \left( \bar{B}_{U_0} + \bar{B}_{U_1} \right) (\Delta \bar{U}_1 - \Delta \bar{U}_0) + \left( \bar{B}_{U_0} + \bar{B}_{U_1} \right) (\bar{U}_1 - \bar{U}_0) \right] \\
& + \epsilon' \left( B_{U_0}^n + B_{U_1}^n \right) (U_1^n - U_0^n) - 4 \left( \epsilon B_U^{i(n+1)} (\Delta \bar{U}_0 + \bar{U}_0) + \epsilon' B_U^{i(n)} U_0^n \right) \\
& + 4 \left( \epsilon B_U^{i(n+1)} U^{i(n+1)} + \epsilon' B_U^{i(n)} U^{i(n)} \right) \left. \right\} + \epsilon \left( \frac{\partial \bar{G}_U}{\partial U} \right)_0 \Delta \bar{U}_0 + \epsilon \bar{G}_{U_0} + \epsilon' G_{U_0}^n. \quad (5.19)
\end{aligned}$$

Usando as propriedades de  $\circ$  e  $\otimes$ , colocando em evidência  $\Delta \bar{U}_0$  e  $\Delta \bar{U}_1$ , isolando-os no lado esquerdo e reordenando o lado direito de (5.19), multiplicando tudo por  $\Delta t$ , obtemos:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left( \frac{\partial \bar{H}_U}{\partial U} \right)_0 - \epsilon \Delta t \left( \frac{\partial \bar{G}_U}{\partial U} \right)_0 + \frac{\epsilon \Delta t \bar{v}_{\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \left( \frac{\partial \bar{F}_U}{\partial U} \right)_0 + \frac{\epsilon \Delta t}{2(\Delta x)^2} \left( \bar{B}_{U_0} + \bar{B}_{U_1} \right) \right. \\
& - \left. \frac{\epsilon \Delta t}{2(\Delta x)^2} \left( \frac{\partial \bar{B}_U}{\partial U} \right)_0 \otimes (\bar{U}_1 - \bar{U}_0) + \frac{2\epsilon \Delta t}{(\Delta x)^2} B_U^{i(n+1)} \right\} \Delta \bar{U}_0 \\
& + \left\{ \frac{\epsilon \Delta t \bar{v}_{\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \left( \frac{\partial \bar{F}_U}{\partial U} \right)_1 - \frac{\epsilon \Delta t}{2(\Delta x)^2} \left( \bar{B}_{U_0} + \bar{B}_{U_1} \right) - \frac{\epsilon \Delta t}{2(\Delta x)^2} \left( \frac{\partial \bar{B}_U}{\partial U} \right)_1 \otimes (\bar{U}_1 - \bar{U}_0) \right\} \Delta \bar{U}_1 \\
& = \Delta t \left( \epsilon \bar{G}_{U_0} + \epsilon' G_{U_0}^n \right) - \left( \bar{H}_{U_0} - H_{U_0}^n \right) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[ \epsilon \bar{v}_{\frac{1}{2}} (\bar{F}_{U_0} + \bar{F}_{U_1}) + \epsilon' v_{\frac{1}{2}}^n (F_{U_0}^n + F_{U_1}^n) \right] \\
& + \frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2} \left[ \epsilon \left( \bar{B}_{U_0} + \bar{B}_{U_1} \right) (\bar{U}_1 - \bar{U}_0) + \epsilon' \left( B_{U_0}^n + B_{U_1}^n \right) (U_1^n - U_0^n) \right] \\
& - \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} \left[ \epsilon B_U^{i(n+1)} (\bar{U}_0 - U^{i(n+1)}) + \epsilon' B_U^{i(n)} (U_0^n - U^{i(n)}) \right] \\
& + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \epsilon v^{i(n+1)} F_U^{i(n+1)} + \epsilon' v^{i(n)} F_U^{i(n)} \right]. \quad (5.20)
\end{aligned}$$

Para efeito de programação, introduzimos aqui a seguinte notação para as **variáveis de contorno** na extremidade de injeção:

$$Um0 \equiv U_{-\frac{1}{2}}, \quad (5.21)$$

$$vm0 \equiv v_{-\frac{1}{2}}, \quad (5.22)$$

$$pm0 \equiv p_{-\frac{1}{2}}, \quad (5.23)$$

as quais para as condições de contorno desta Secção recebem os valores:

$$Um0 \leftarrow U^i, \quad (5.24)$$

$$vm0 \leftarrow v^i, \quad (5.25)$$

$$pm0 \leftarrow p^i. \quad (5.26)$$

Com isto as funções avaliadas na extremidade de injeção, passarão a ser denotadas, por exemplo, por

$$[FUm0]^n \equiv F_U(Um0^n, pm0^n) \equiv F_U^{i(n)}, \quad (5.27)$$

$$[FUm0]^{n+1} \equiv F_U(Um0^{n+1}, pm0^{n+1}) \equiv F_U^{i(n+1)}, \quad (5.28)$$

$$[BUm0]^n \equiv B_U(Um0^n, pm0^n) \equiv B_U^{i(n)}, \quad (5.29)$$

$$[BUm0]^{n+1} \equiv B_U(Um0^{n+1}, pm0^{n+1}) \equiv B_U^{i(n+1)}. \quad (5.30)$$

Como  $Um0^n \equiv U^{i(n)}$ ,  $vm0^n \equiv v^{i(n)}$ ,  $pm0^n \equiv p^{i(n)}$ ,  $Um0^{n+1} \equiv U^{i(n+1)}$ ,  $vm0^{n+1} \equiv v^{i(n+1)}$  e  $pm0^{n+1} \equiv p^{i(n+1)}$  são dados de injeção e como  $\bar{U}_0, \bar{U}_1, \bar{v}_{\frac{1}{2}}$  são fornecidos pelo passo anterior do processo iterativo de Newton, todos os termos do lado direito da Eq. (5.20) são conhecidos e esta pode ser escrita compactamente como:

$$\tilde{\mathcal{D}}(0)\Delta\bar{U}(0) + \mathcal{U}(1)\Delta\bar{U}(1) = \tilde{A}(0), \quad (5.31)$$

na qual:

$$\tilde{\mathcal{D}}(0) = \mathcal{D}_l m0 + \mathcal{D}_c(0) + \mathcal{D}_r(1), \quad (5.32)$$

onde  $\mathcal{D}_c(0)$ ,  $\mathcal{D}_r(1)$  são obtidos fazendo  $j = 0$  nas fórmulas (4.10), (4.11) e

$$\mathcal{D}_l m0 = \frac{2\epsilon\Delta t}{(\Delta x)^2} [BUm0]^{n+1}, \quad (5.33)$$

note-se que  $\mathcal{D}_l m0$  é uma redefinição de  $\mathcal{D}_l(j-1)$  em (4.9), para  $j = 1$ .



$\mathcal{U}(1)$  é obtido da fórmula (4.12), fazendo  $j = 0$ ;

$$\tilde{A}(0) = A_l m_0 + A_c(0) + A_r(1), \quad (5.34)$$

onde  $A_c(0)$  e  $A_r(1)$  são obtidos fazendo  $j = 0$  nas fórmulas (4.15) e (4.16), e

$$\begin{aligned} A_l m_0 = & \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \epsilon v m_0^{n+1} [F_U m_0]^{n+1} + \epsilon' v m_0^n [F_U m_0]^n \right] \\ & - \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} \left[ \epsilon [B_U m_0]^{n+1} (\bar{U}_0 - U m_0^{n+1}) + \epsilon' [B_U m_0]^n (U_0^n - U m_0^n) \right]; \end{aligned} \quad (5.35)$$

note-se que  $A_l m_0$  é uma redefinição de  $A_l(j-1)$  dada em (4.14), fazendo  $j = 1$ .

5.1.2. *Discretização do subsistema de balanços na produção.* Vamos considerar as condições de contorno na produção. Usaremos as **variáveis de contorno**  $v_{N-\frac{1}{2}}$  e  $p_{N-\frac{1}{2}}$  provenientes do subsistema pressão-velocidade, bem como  $U_{N-\frac{1}{2}}$ , que é incógnita nesta Seção.

Inicialmente aproximamos a condição (5.4) usando diferenças regressivas no ponto  $x_{N-\frac{1}{2}}$ :

$$\frac{U_{N-\frac{1}{2}} - U_{N-1}}{\Delta x/2} = U_x^e. \quad (5.36)$$

Daí obtemos explicitamente a **variável de contorno**

$$U_{N-\frac{1}{2}} = U_{N-1} + \frac{\Delta x}{2} U_x^e. \quad (5.37)$$

Portanto as funções  $F_U(U, p)$  e  $B_U(U, p)$  e suas derivadas podem ser avaliadas na extremidade direita  $x_{N-\frac{1}{2}}$ . Por exemplo,

$$\bar{F}_{U_{N-\frac{1}{2}}} \equiv F_U \left( \bar{U}_{N-1} + \frac{\Delta x}{2} U_x^e, \bar{p}_{N-\frac{1}{2}} \right), \quad (5.38)$$

$$\bar{B}_{U_{N-\frac{1}{2}}} \equiv B_U \left( \bar{U}_{N-1} + \frac{\Delta x}{2} U_x^e, \bar{p}_{N-\frac{1}{2}} \right), \quad (5.39)$$

$$F_{U_{N-\frac{1}{2}}}^n \equiv F_U \left( U_{N-1}^n + \frac{\Delta x}{2} U_x^{e(n)}, \bar{p}_{N-\frac{1}{2}} \right), \quad (5.40)$$

$$B_{U_{N-\frac{1}{2}}}^n \equiv B_U \left( U_{N-1}^n + \frac{\Delta x}{2} U_x^{e(n)}, \bar{p}_{N-\frac{1}{2}} \right). \quad (5.41)$$

$$F_{U_{N-\frac{1}{2}}}^{n+1} \equiv F_U \left( U_{N-1}^{n+1} + \frac{\Delta x}{2} U_x^{e(n+1)}, \bar{p}_{N-\frac{1}{2}} \right), \quad (5.42)$$

$$B_{U_{N-\frac{1}{2}}}^{n+1} \equiv B_U \left( U_{N-1}^{n+1} + \frac{\Delta x}{2} U_x^{e(n+1)}, \bar{p}_{N-\frac{1}{2}} \right). \quad (5.43)$$

Passemos agora à discretização do subsistema de balanços (2.7) no ponto  $x_{N-1}$ , o centro da última célula:

$$\frac{\partial}{\partial t} H_U(U, p) + \frac{\partial}{\partial x} \left( v F_U(U, p) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( B_U(U, p) \frac{\partial U}{\partial x} \right) + G_U(U, p).$$

*Discretização espacial.*

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} H_U(U, p)_{N-1} + \frac{1}{\Delta x} \left\{ v_{N-\frac{1}{2}} F_U(U, p)_{N-\frac{1}{2}} - v_{N-\frac{3}{2}} F_U(U, p)_{N-\frac{3}{2}} \right\} \\ &= \frac{1}{\Delta x} \left\{ B_U(U, p)_{N-\frac{1}{2}} U_x^e - B_U(U, p)_{N-\frac{3}{2}} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_{N-\frac{3}{2}} \right\} + G_U(U, p)_{N-1}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Rearranjando os termos convenientemente, temos:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} H_U(U, p)_{N-1} - \frac{v_{N-\frac{3}{2}}}{\Delta x} F_U(U, p)_{N-\frac{3}{2}} + \frac{1}{\Delta x} B_U(U, p)_{N-\frac{3}{2}} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_{N-\frac{3}{2}} \\ &= - \frac{v_{N-\frac{1}{2}}}{\Delta x} F_U(U, p)_{N-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\Delta x} B_U(U, p)_{N-\frac{1}{2}} U_x^e + G_U(U, p)_{N-1}. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Utilizando médias espaciais:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} H_U(U, p)_{N-1} - \frac{v_{N-\frac{3}{2}}}{2\Delta x} \left[ F_U(U, p)_{N-2} + F_U(U, p)_{N-1} \right] \\ &+ \frac{1}{2\Delta x} \left[ B_U(U, p)_{N-2} + B_U(U, p)_{N-1} \right] \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_{N-\frac{3}{2}} \\ &= - \frac{v_{N-\frac{1}{2}}}{\Delta x} F_U(U, p)_{N-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\Delta x} B_U(U, p)_{N-\frac{1}{2}} U_x^e + G_U(U, p)_{N-1}. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Discretizando a derivada espacial remanescente usando diferença centrada no ponto  $x_{N-\frac{3}{2}}$ , obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} H_U(U, p)_{N-1} - \frac{v_{N-\frac{3}{2}}}{2\Delta x} \left[ F_U(U, p)_{N-2} + F_U(U, p)_{N-1} \right] \\ &+ \frac{1}{2(\Delta x)^2} \left[ B_U(U, p)_{N-2} + B_U(U, p)_{N-1} \right] (U_{N-1} - U_{N-2}) \\ &= - \frac{v_{N-\frac{1}{2}}}{\Delta x} F_U(U, p)_{N-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\Delta x} B_U(U, p)_{N-\frac{1}{2}} U_x^e + G_U(U, p)_{N-1}. \end{aligned} \quad (5.47)$$

*Discretização temporal.* Fazemos agora a discretização temporal da equação (5.47):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \left( H_{U_{N-1}}^{n+1} - H_{U_{N-1}}^n \right) - \frac{\epsilon v_{N-\frac{3}{2}}^{n+1}}{2\Delta x} \left[ F_{U_{N-2}}^{n+1} + F_{U_{N-1}}^{n+1} \right] - \frac{\epsilon' v_{N-\frac{3}{2}}^n}{2\Delta x} \left[ F_{U_{N-2}}^n + F_{U_{N-1}}^n \right] \\ &+ \frac{\epsilon}{2(\Delta x)^2} \left[ B_{U_{N-2}}^{n+1} + B_{U_{N-1}}^{n+1} \right] (U_{N-1}^{n+1} - U_{N-2}^{n+1}) + \frac{\epsilon'}{2(\Delta x)^2} \left[ B_{U_{N-2}}^n + B_{U_{N-1}}^n \right] (U_{N-1}^n - U_{N-2}^n) \\ &= - \frac{\epsilon v_{N-\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta x} F_{U_{N-\frac{1}{2}}}^{n+1} - \frac{\epsilon' v_{N-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} F_{U_{N-\frac{1}{2}}}^n + \frac{\epsilon}{\Delta x} B_{U_{N-\frac{1}{2}}}^{n+1} U_x^{e(n+1)} \\ &+ \frac{\epsilon'}{\Delta x} B_{U_{N-\frac{1}{2}}}^n U_x^{e(n)} + \epsilon G_{U_{N-1}}^{n+1} + \epsilon' G_{U_{N-1}}^n. \end{aligned} \quad (5.48)$$

*O método de Newton.* Lembramos que  $\bar{U}$ ,  $\bar{v}$  e  $\bar{p}$  são aproximações de  $U^{n+1}$ ,  $v^{n+1}$  e  $p^{n+1}$ , sendo que  $\bar{v}$  e  $\bar{p}$  estão temporariamente fixadas e  $\bar{U}$  já é uma nova aproximação de  $U^{n+1}$  a ser obtida. Fazendo estas aproximações, (5.48) fica:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} \left( H_U(\bar{U}, \bar{p})_{N-1} - H_{U_{N-1}}^n \right) - \frac{\epsilon \bar{v}_{N-\frac{3}{2}}}{2\Delta x} \left[ F_U(\bar{U}, \bar{p})_{N-2} + F_U(\bar{U}, \bar{p})_{N-1} \right] \\
& - \frac{\epsilon' v_{N-\frac{3}{2}}^n}{2\Delta x} \left[ F_{U_{N-2}}^n + F_{U_{N-1}}^n \right] + \frac{\epsilon}{2(\Delta x)^2} \left[ B_U(\bar{U}, \bar{p})_{N-2} + B_U(\bar{U}, \bar{p})_{N-1} \right] (\bar{U}_{N-1} - \bar{U}_{N-2}) \\
& + \frac{\epsilon'}{2(\Delta x)^2} \left[ B_{U_{N-2}}^n + B_{U_{N-1}}^n \right] (U_{N-1}^n - U_{N-2}^n) \\
& = - \frac{\epsilon \bar{v}_{N-\frac{1}{2}}}{\Delta x} F_U(\bar{U}, \bar{p})_{N-\frac{1}{2}} - \frac{\epsilon' v_{N-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} F_{U_{N-\frac{1}{2}}}^n + \frac{\epsilon}{\Delta x} B_U(\bar{U}, \bar{p})_{N-\frac{1}{2}} U_x^{e(n+1)} \\
& + \frac{\epsilon'}{\Delta x} B_{U_{N-\frac{1}{2}}}^n U_x^{e(n)} + \epsilon G_U(\bar{U}, \bar{p})_{N-1} + \epsilon' G_{U_{N-1}}^n. \tag{5.49}
\end{aligned}$$

Linearizando a equação (5.49) em torno de  $\bar{U}$ :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{\partial \bar{H}_U}{\partial U} \right)_{N-1} \Delta \bar{U}_{N-1} + \frac{1}{\Delta t} \left[ \bar{H}_{U_{N-1}} - H_{U_{N-1}}^n \right] \\
& - \frac{\epsilon \bar{v}_{N-\frac{3}{2}}}{2\Delta x} \left[ \left( \frac{\partial \bar{F}_U}{\partial U} \right)_{N-2} \Delta \bar{U}_{N-2} + \left( \frac{\partial \bar{F}_U}{\partial U} \right)_{N-1} \Delta \bar{U}_{N-1} + \bar{F}_{U_{N-2}} + \bar{F}_{U_{N-1}} \right] \\
& - \frac{\epsilon' v_{N-\frac{3}{2}}^n}{2\Delta x} \left[ F_{U_{N-2}}^n + F_{U_{N-1}}^n \right] + \frac{\epsilon}{2(\Delta x)^2} \left[ \left( \frac{\partial \bar{B}_U}{\partial U} \right)_{N-2} \circ \Delta \bar{U}_{N-2} + \left( \frac{\partial \bar{B}_U}{\partial U} \right)_{N-1} \circ \Delta \bar{U}_{N-1} \right. \\
& \left. + \bar{B}_{U_{N-2}} + \bar{B}_{U_{N-1}} \right] (\Delta \bar{U}_{N-1} - \Delta \bar{U}_{N-2} + \bar{U}_{N-1} - \bar{U}_{N-2}) \\
& + \frac{\epsilon'}{2(\Delta x)^2} \left[ B_{U_{N-2}}^n + B_{U_{N-1}}^n \right] (U_{N-1}^n - U_{N-2}^n) \\
& = - \frac{\epsilon \bar{v}_{N-\frac{1}{2}}}{\Delta x} \left[ \left( \frac{\partial \bar{F}_U}{\partial U} \right)_{N-\frac{1}{2}} \Delta \bar{U}_{N-\frac{1}{2}} + \bar{F}_{U_{N-\frac{1}{2}}} \right] - \frac{\epsilon' v_{N-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} F_{U_{N-\frac{1}{2}}}^n \\
& + \frac{\epsilon}{\Delta x} \left[ \left( \frac{\partial \bar{B}_U}{\partial U} \right)_{N-\frac{1}{2}} \circ \Delta \bar{U}_{N-\frac{1}{2}} + \bar{B}_{U_{N-\frac{1}{2}}} \right] U_x^{e(n+1)} \\
& + \frac{\epsilon'}{\Delta x} B_{U_{N-\frac{1}{2}}}^n U_x^{e(n)} + \epsilon \left( \frac{\partial \bar{G}_U}{\partial U} \right)_{N-1} \Delta \bar{U}_{N-1} + \epsilon \bar{G}_{U_{N-1}} + \epsilon' G_{U_{N-1}}^n. \tag{5.50}
\end{aligned}$$

Omitindo os termos de segunda ordem e usando as propriedades dos operadores  $\circ$  e  $\otimes$ :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{\partial \bar{H}_U}{\partial U} \right)_{N-1} \Delta \bar{U}_{N-1} + \frac{1}{\Delta t} \left[ \bar{H}_{U_{N-1}} - H_{U_{N-1}}^n \right] \\
& - \frac{\epsilon \bar{v}_{N-\frac{3}{2}}}{2\Delta x} \left[ \left( \frac{\partial \bar{F}_U}{\partial U} \right)_{N-2} \Delta \bar{U}_{N-2} + \left( \frac{\partial \bar{F}_U}{\partial U} \right)_{N-1} \Delta \bar{U}_{N-1} \right] \\
& - \frac{\epsilon \bar{v}_{N-\frac{3}{2}}}{2\Delta x} \left[ \bar{F}_{U_{N-2}} + \bar{F}_{U_{N-1}} \right] - \frac{\epsilon' v_{N-\frac{3}{2}}^n}{2\Delta x} \left[ F_{U_{N-2}}^n + F_{U_{N-1}}^n \right] \\
& + \frac{\epsilon}{2(\Delta x)^2} \left( \frac{\partial \bar{B}_U}{\partial U} \right)_{N-2} \otimes (\bar{U}_{N-1} - \bar{U}_{N-2}) \Delta \bar{U}_{N-2} \\
& + \frac{\epsilon}{2(\Delta x)^2} \left( \frac{\partial \bar{B}_U}{\partial U} \right)_{N-1} \otimes (\bar{U}_{N-1} - \bar{U}_{N-2}) \Delta \bar{U}_{N-1} \\
& + \frac{\epsilon}{2(\Delta x)^2} \left[ \bar{B}_{U_{N-2}} + \bar{B}_{U_{N-1}} \right] \Delta \bar{U}_{N-1} - \frac{\epsilon}{2(\Delta x)^2} \left[ \bar{B}_{U_{N-2}} + \bar{B}_{U_{N-1}} \right] \Delta \bar{U}_{N-2} \\
& + \frac{\epsilon}{2(\Delta x)^2} \left[ \bar{B}_{U_{N-2}} + \bar{B}_{U_{N-1}} \right] (\bar{U}_{N-1} - \bar{U}_{N-2}) + \frac{\epsilon'}{2(\Delta x)^2} \left[ B_{U_{N-2}}^n + B_{U_{N-1}}^n \right] (U_{N-1}^n - U_{N-2}^n) \\
& = - \frac{\epsilon \bar{v}_{N-\frac{1}{2}}}{\Delta x} \left( \frac{\partial \bar{F}_U}{\partial U} \right)_{N-\frac{1}{2}} \Delta \bar{U}_{N-\frac{1}{2}} - \frac{\epsilon \bar{v}_{N-\frac{1}{2}}}{\Delta x} \bar{F}_{U_{N-\frac{1}{2}}} - \frac{\epsilon' v_{N-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} F_{U_{N-\frac{1}{2}}}^n \\
& + \frac{\epsilon}{\Delta x} \left( \frac{\partial \bar{B}_U}{\partial U} \right)_{N-\frac{1}{2}} \otimes U_x^{e(n+1)} \Delta \bar{U}_{N-\frac{1}{2}} + \frac{\epsilon}{\Delta x} \bar{B}_{U_{N-\frac{1}{2}}} U_x^{e(n+1)} + \frac{\epsilon'}{\Delta x} B_{U_{N-\frac{1}{2}}}^n U_x^{e(n)} \\
& + \epsilon \left( \frac{\partial \bar{G}_U}{\partial U} \right)_{N-1} \Delta \bar{U}_{N-1} + \epsilon \bar{G}_{U_{N-1}} + \epsilon' G_{U_{N-1}}^n. \tag{5.51}
\end{aligned}$$

Colocando em evidência os termos  $\Delta \bar{U}_{N-2}$  e  $\Delta \bar{U}_{N-1}$  e  $\Delta \bar{U}_{N-\frac{1}{2}}$ , separando-os do lado esquerdo e multiplicando tudo por  $\Delta t$ , a equação (5.51) passa a ser escrita como:

$$\begin{aligned}
& \left\{ -\frac{\epsilon \Delta t \bar{v}_{N-\frac{3}{2}}}{2\Delta x} \left( \frac{\partial \bar{F}_U}{\partial U} \right)_{N-2} + \frac{\epsilon \Delta t}{2(\Delta x)^2} \left( \frac{\partial \bar{B}_U}{\partial U} \right)_{N-2} \otimes (\bar{U}_{N-1} - \bar{U}_{N-2}) \right. \\
& \quad \left. - \frac{\epsilon \Delta t}{2(\Delta x)^2} [\bar{B}_{U_{N-2}} + \bar{B}_{U_{N-1}}] \right\} \Delta \bar{\bar{U}}_{N-2} \\
& + \left\{ \left( \frac{\partial \bar{H}_U}{\partial U} \right)_{N-1} - \epsilon \Delta t \left( \frac{\partial \bar{G}_U}{\partial U} \right)_{N-1} + \frac{\epsilon \Delta t}{2(\Delta x)^2} \left( \frac{\partial \bar{B}_U}{\partial U} \right)_{N-1} \otimes (\bar{U}_{N-1} - \bar{U}_{N-2}) \right. \\
& \quad \left. - \frac{\epsilon \Delta t \bar{v}_{N-\frac{3}{2}}}{2\Delta x} \left( \frac{\partial \bar{F}_U}{\partial U} \right)_{N-1} + \frac{\epsilon \Delta t}{2(\Delta x)^2} [\bar{B}_{U_{N-2}} + \bar{B}_{U_{N-1}}] \right\} \Delta \bar{\bar{U}}_{N-1} \\
& + \left\{ \frac{\epsilon \Delta t \bar{v}_{N-\frac{1}{2}}}{\Delta x} \left( \frac{\partial \bar{F}_U}{\partial U} \right)_{N-\frac{1}{2}} - \frac{\epsilon \Delta t}{\Delta x} \left( \frac{\partial \bar{B}_U}{\partial U} \right)_{N-\frac{1}{2}} \otimes U_x^{e(n+1)} \right\} \Delta \bar{\bar{U}}_{N-\frac{1}{2}} \\
& = -(\bar{H}_{U_{N-1}} - H_{U_{N-1}}^n) + \frac{\epsilon \Delta t \bar{v}_{N-\frac{3}{2}}}{2\Delta x} (\bar{F}_{U_{N-2}} + \bar{F}_{U_{N-1}}) \\
& \quad + \frac{\epsilon' \Delta t v_{N-\frac{3}{2}}^n}{2\Delta x} (F_{U_{N-2}}^n + F_{U_{N-1}}^n) - \frac{\epsilon \Delta t}{2(\Delta x)^2} (\bar{B}_{U_{N-2}} + \bar{B}_{U_{N-1}}) (\bar{U}_{N-1} - \bar{U}_{N-2}) \\
& \quad - \frac{\epsilon' \Delta t}{2(\Delta x)^2} (B_{U_{N-2}}^n + B_{U_{N-1}}^n) (U_{N-1}^n - U_{N-2}^n) - \frac{\epsilon \Delta t \bar{v}_{N-\frac{1}{2}}}{\Delta x} \bar{F}_{U_{N-\frac{1}{2}}} \\
& \quad - \frac{\epsilon' \Delta t v_{N-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} F_{U_{N-\frac{1}{2}}}^n + \frac{\epsilon \Delta t}{\Delta x} \bar{B}_{U_{N-\frac{1}{2}}} U_x^{e(n+1)} + \frac{\epsilon' \Delta t}{\Delta x} B_{U_{N-\frac{1}{2}}}^n U_x^{e(n)} \\
& \quad + \epsilon \Delta t \bar{\bar{G}}_{U_{N-1}} + \epsilon' \Delta t G_{U_{N-1}}^n. \tag{5.52}
\end{aligned}$$

*Passo genérico do Método de Newton.* Primeiro cuidaremos do tratamento da variável de contorno  $\Delta \bar{\bar{U}}_{N-\frac{1}{2}}$  na Eq. (5.52). Usando a versão discreta (5.37) da condição de contorno de Neumann (5.4) temos simplesmente que

$$\Delta \bar{\bar{U}}_{N-\frac{1}{2}} = \Delta \bar{\bar{U}}_{N-1}. \tag{5.53}$$

Substituindo  $\Delta \bar{\bar{U}}_{N-\frac{1}{2}}$  dado em (5.53) na equação (5.52), obtemos:

$$\begin{aligned}
& \left\{ -\frac{\epsilon\Delta t\bar{v}_{N-\frac{3}{2}}}{2\Delta x} \left( \frac{\partial\bar{F}_U}{\partial U} \right)_{N-2} + \frac{\epsilon\Delta t}{2(\Delta x)^2} \left( \frac{\partial\bar{B}_U}{\partial U} \right)_{N-2} \otimes (\bar{U}_{N-1} - \bar{U}_{N-2}) \right. \\
& \quad \left. - \frac{\epsilon\Delta t}{2(\Delta x)^2} [\bar{B}_{U_{N-2}} + \bar{B}_{U_{N-1}}] \right\} \Delta\bar{U}_{N-2} \\
& + \left\{ \left( \frac{\partial\bar{H}_U}{\partial U} \right)_{N-1} - \epsilon\Delta t \left( \frac{\partial\bar{G}_U}{\partial U} \right)_{N-1} + \frac{\epsilon\Delta t}{2(\Delta x)^2} \left( \frac{\partial\bar{B}_U}{\partial U} \right)_{N-1} \otimes (\bar{U}_{N-1} - \bar{U}_{N-2}) \right. \\
& \quad - \frac{\epsilon\Delta t\bar{v}_{N-\frac{3}{2}}}{2\Delta x} \left( \frac{\partial\bar{F}_U}{\partial U} \right)_{N-1} + \frac{\epsilon\Delta t}{2(\Delta x)^2} [\bar{B}_{U_{N-2}} + \bar{B}_{U_{N-1}}] + \\
& \quad \left. + \frac{\epsilon\Delta t\bar{v}_{N-\frac{1}{2}}}{\Delta x} \left( \frac{\partial\bar{F}_U}{\partial U} \right)_{N-\frac{1}{2}} - \frac{\epsilon\Delta t}{\Delta x} \left( \frac{\partial\bar{B}_U}{\partial U} \right)_{N-\frac{1}{2}} \otimes U_x^{e(n+1)} \right\} \Delta\bar{U}_{N-1} \\
& = \epsilon\Delta t\bar{G}_{U_{N-1}} + \epsilon'\Delta tG_{U_{N-1}}^n - (\bar{H}_{U_{N-1}} - H_{U_{N-1}}^n) \\
& \quad + \frac{\epsilon\Delta t\bar{v}_{N-\frac{3}{2}}}{2\Delta x} (\bar{F}_{U_{N-2}} + \bar{F}_{U_{N-1}}) + \frac{\epsilon'\Delta tv_{N-\frac{3}{2}}^n}{2\Delta x} (F_{U_{N-2}}^n + F_{U_{N-1}}^n) \\
& \quad - \frac{\epsilon\Delta t}{2(\Delta x)^2} (\bar{B}_{U_{N-2}} + \bar{B}_{U_{N-1}}) (\bar{U}_{N-1} - \bar{U}_{N-2}) - \frac{\epsilon'\Delta t}{2(\Delta x)^2} (B_{U_{N-2}}^n + B_{U_{N-1}}^n) (U_{N-1}^n - U_{N-2}^n) \\
& \quad - \frac{\epsilon\Delta t\bar{v}_{N-\frac{1}{2}}}{\Delta x} \bar{F}_{U_{N-\frac{1}{2}}} - \frac{\epsilon'\Delta tv_{N-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} F_{U_{N-\frac{1}{2}}}^n + \frac{\epsilon\Delta t}{\Delta x} \bar{B}_{U_{N-\frac{1}{2}}} U_x^{e(n+1)} + \frac{\epsilon'\Delta t}{\Delta x} B_{U_{N-\frac{1}{2}}}^n U_x^{e(n)}. \quad (5.54)
\end{aligned}$$

Para efeito de programação, introduzimos aqui a seguinte notação para as **variáveis de contorno** na extremidade de produção:

$$UmN \equiv U_{N-\frac{1}{2}}, \quad (5.55)$$

$$vmN \equiv v_{N-\frac{1}{2}}, \quad (5.56)$$

$$pmN \equiv p_{N-\frac{1}{2}}. \quad (5.57)$$

A variável  $UmN$  recebe o valor obtido em (5.37):

$$UmN \leftarrow U_{N-\frac{1}{2}} = U_{N-1} + \frac{\Delta x}{2} U_x^e. \quad (5.58)$$

As variáveis  $vmN$  e  $pmN$  recebem os valores da aproximação “barra”.

Com isto as seguintes funções podem avaliadas na extremidade de produção:

$$[\bar{F}_U mN] \equiv F_U(\bar{U}mN, \bar{p}mN), \quad (5.5)$$

$$[\bar{B}_U mN] \equiv B_U(\bar{U}mN, \bar{p}mN), \quad (5.6)$$

$$\left[ \frac{\partial \bar{F}_U mN}{\partial U} \right] \equiv \frac{\partial F_U(\bar{U}mN, \bar{p}mN)}{\partial U}, \quad (5.6)$$

$$\left[ \frac{\partial \bar{B}_U mN}{\partial U} \right] \equiv \frac{\partial B_U(\bar{U}mN, \bar{p}mN)}{\partial U}, \quad (5.6)$$

$$[F_U mN]^n \equiv F_U(UmN^n, pmN^n), \quad (5.6)$$

$$[B_U mN]^n \equiv B_U(UmN^n, pmN^n). \quad (5.6)$$

Podemos então escrever o sistema de balanços discretizado na extremidade de produção (5.54), sujeito à condição de contorno de Neumann nas saturações, num passo genérico do método de Newton, na seguinte forma compacta:

$$\mathcal{L}(N-2)\Delta\bar{U}(N-2) + \tilde{\mathcal{D}}(N-1)\Delta\bar{U}(N-1) = \tilde{A}_G(N-1), \quad (5.65)$$

onde

$$\mathcal{L}(N-2) \quad \text{é dado em (4.7), fazendo } j = N-1,$$

$$\tilde{\mathcal{D}}(N-1) = \mathcal{D}_l(N-2) + \mathcal{D}_c(N-1) + \mathcal{D}_r mN, \quad (5.66)$$

sendo que  $\mathcal{D}_l(N-2)$  e  $\mathcal{D}_c(N-1)$  são obtidos das fórmulas (4.9) e (4.10), respectivamente, fazendo  $j = N-1$ , e

$$\mathcal{D}_r mN = \frac{\epsilon\Delta t \bar{v}mN}{\Delta x} \left[ \frac{\partial \bar{F}_U mN}{\partial U} \right] - \frac{\epsilon\Delta t}{\Delta x} \left[ \frac{\partial \bar{B}_U mN}{\partial U} \right] \otimes U_x^{e(n+1)}. \quad (5.67)$$

Note que  $\mathcal{D}_r mN$  é uma redefinição de  $\mathcal{D}_r(j+1)$  dada em (4.11) fazendo  $j = N-1$ .

O lado direito do sistema (5.65) é dado por:

$$\tilde{A}_G(N-1) = A_l(N-2) + A_c(N-1) + A_r mN, \quad (5.68)$$

onde  $A_l(N-2)$  e  $A_c(N-1)$  são obtidos das fórmulas (4.14) e (4.15), respectivamente, fazendo  $j = N-1$  e  $A_r mN$  é dado por:

$$A_r mN = -\frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \epsilon \bar{v}mN [\bar{F}_U mN] + \epsilon' v mN^n [F_U mN]^n - \epsilon [\bar{B}_U mN] U_x^{e(n+1)} - \epsilon' [B_U mN]^n U_x^{e(n)} \right]. \quad (5.69)$$

Note que  $A_r mN$  é uma redefinição de  $A_r(j+1)$  dado em (4.16) fazendo  $j = N-1$ .

*Primeira iteração do Método de Newton.* Na primeira iteração do método de Newton, a versão discreta (5.37) da condição de Neumann (5.4) é obtida simplesmente fazendo

$$\bar{U}_{N-\frac{1}{2}} = U_{N-\frac{1}{2}}^n = U_{N-1}^n + \frac{\Delta x}{2} U_x^{e(n)}; \quad (5.70)$$

para a aproximação melhor  $\bar{\bar{U}}_{N-\frac{1}{2}}$  de  $U_{N-\frac{1}{2}}^{n+1}$ , fazemos

$$\bar{\bar{U}}_{N-\frac{1}{2}} = \bar{\bar{U}}_{N-1} + \frac{\Delta x}{2} U_x^{e(n+1)}. \quad (5.71)$$

Subtraindo a equação (5.71) da equação (5.70) e usando que no primeiro passo  $\bar{U}_{N-1} = U_{N-1}^n$ , obtemos:

$$\Delta \bar{\bar{U}}_{N-\frac{1}{2}} = \Delta \bar{\bar{U}}_{N-1} + \frac{\Delta x}{2} (U_x^{e(n+1)} - U_x^{e(n)}). \quad (5.72)$$

Da mesma forma que numa iteração genérica, na primeira iteração do método de Newton, substituímos  $\Delta \bar{\bar{U}}_{N-\frac{1}{2}}$  em (5.72) na equação (5.52) para obter a seguinte equação na forma compacta:

$$\mathcal{L}(N-2) \Delta \bar{\bar{U}}(N-2) + \tilde{\mathcal{D}}(N-1) \Delta \bar{\bar{U}}(N-1) = \tilde{A}_0(N-1), \quad (5.73)$$

onde

$$\mathcal{L}(N-2) \quad \text{dado em (4.7), fazendo } j = N-1, \quad (5.74)$$

$$\tilde{\mathcal{D}}(N-1) \quad \text{é dado na Eq. (5.66),}$$

$$\tilde{A}_0(N-1) = \tilde{A}_G(N-1) - \frac{\Delta x}{2} \mathcal{D}_r m N \Delta U_x^{e(n+1)}, \quad \text{com} \quad (5.75)$$

$$\tilde{A}_G(N-1) \quad \text{dado em (5.68),}$$

$$\mathcal{D}_r m N \quad \text{dado em (5.67),}$$

$$\Delta U_x^{e(n+1)} = U_x^{e(n+1)} - U_x^{e(n)}.$$

*A equação final na extremidade de produção.* Em ambos os casos, passo genérico ou passo inicial do método de Newton, obtemos a seguinte equação na extremidade de produção:

$$\mathcal{L}(N-2) \Delta \bar{\bar{U}}(N-2) + \tilde{\mathcal{D}}(N-1) \Delta \bar{\bar{U}}(N-1) = \tilde{A}(N-1). \quad (5.76)$$

Para calcular os coeficientes em (5.76) relembramos que as **variáveis de contorno**  $\bar{v}mN$  e  $\bar{p}mN$ , introduzidas em (5.56) e (5.57), respectivamente, têm valores congelados provenientes do sistema pressão-velocidade. O valor de  $\bar{U}mN$  é dado por

$$\bar{U}mN = \bar{U}_{N-1} + \frac{\Delta x}{2} U_x^{e(n+1)}. \quad (5.77)$$

Com isto, os coeficientes em (5.76) são dados por:





e para os passos genéricos seguintes fazemos simplesmente:

$$\Delta \bar{v}m(0) = 0. \quad (5.81)$$

**Obs 5.4.** As equações (5.80) e (5.81) serão usadas na definição dada em (5.178) e no lado direito do sistema algébrico pressão-velocidade no bloco dado em (5.188).

*Discretização espacial.* Para obter uma equação para  $\Delta \bar{p}(0)$ , faremos a discretização espacial da equação da velocidade (2.10) no ponto  $x_0$ , o centro da primeira célula:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x} (v_{\frac{1}{2}} - v^i) + \frac{v_0}{\Delta x} \left( F_{v_0} \cdot [M_{l_{\frac{1}{2}}} - M_l^i] + (M_{g_{\frac{1}{2}}} - M_g^i) \right) \\ &= -\phi \left( \pi(U_0) \cdot \frac{\partial M_{l_0}}{\partial t} + \frac{\partial M_{g_0}}{\partial t} \right) + \frac{1}{(\Delta x)^2} \left[ B_{v_0} \otimes (M_{l_{\frac{1}{2}}} - M_l^i) \right] \cdot (\pi(U_{\frac{1}{2}}) - \pi(U^i)) + G_{v_0}. \end{aligned} \quad (5.82)$$

Tomando médias espaciais onde necessário:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x} (v_{\frac{1}{2}} - v^i) + \frac{1}{4\Delta x} (v_{\frac{1}{2}} + v^i) \left( F_{v_0} \cdot [M_{l_0} + M_{l_1} - 2M_l^i] + M_{g_0} + M_{g_1} - 2M_g^i \right) \\ &= -\phi_0 \left( \pi(U_0) \cdot \frac{\partial M_{l_0}}{\partial t} + \frac{\partial M_{g_0}}{\partial t} \right) + \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ B_{v_0} \otimes (M_{l_0} + M_{l_1} - 2M_l^i) \right] \cdot (\pi(U_0) + \pi(U_1) - 2\pi(U^i)) \\ &+ G_{v_0}. \end{aligned} \quad (5.83)$$

*Discretização temporal.* Utilizamos diferenças finitas retardadas nos termos que envolvem derivadas temporais:

$$\begin{aligned} & \frac{\phi_0}{\Delta t} \left( \pi(U_0^{(n+1)}) \cdot (M_{l_0}^{n+1} - M_{l_0}^n) + M_{g_0}^{n+1} - M_{g_0}^n \right) + \frac{1}{\Delta x} (v_{\frac{1}{2}}^{n+1} - v^{i(n+1)}) \\ &+ \frac{1}{4\Delta x} (v^{i(n+1)} + v_{\frac{1}{2}}^{n+1}) \left( F_{v_0}^{n+1} \cdot [M_{l_0}^{n+1} + M_{l_1}^{n+1} - 2M_l^{i(n+1)}] + M_{g_0}^{n+1} + M_{g_1}^{n+1} - 2M_g^{i(n+1)} \right) \\ &= \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ B_{v_0}^{n+1} \otimes (M_{l_0}^{n+1} + M_{l_1}^{n+1} - 2M_l^{i(n+1)}) \right] \cdot (\pi(U_0^{(n+1)}) + \pi(U_1^{(n+1)}) - 2\pi(U^{i(n+1)})) \\ &+ G_{v_0}^{n+1}. \end{aligned} \quad (5.84)$$

*O método de Newton.*

$$\begin{aligned}
& \frac{\phi_0}{\Delta t} \left( \pi(\bar{U}_0) \cdot (M_l(\bar{U}, \bar{p})_0 - M_{l_0}^n) + M_g(\bar{U}, \bar{p})_0 - M_{g_0}^n \right) + \frac{1}{\Delta x} (\bar{v}_{\frac{1}{2}} - v^{i(n+1)}) \\
& + \frac{1}{4\Delta x} (v^{i(n+1)} + \bar{v}_{\frac{1}{2}}) \left( F_v(\bar{U}, \bar{p})_0 \cdot [M_l(\bar{U}, \bar{p})_0 + M_l(\bar{U}, \bar{p})_1 - 2M_l^{i(n+1)}] \right. \\
& \quad \left. + M_g(\bar{U}, \bar{p})_0 + M_g(\bar{U}, \bar{p})_1 - 2M_g^{i(n+1)} \right) \\
& = \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ B_v(\bar{U}, \bar{p})_0 \otimes (M_l(\bar{U}, \bar{p})_0 + M_l(\bar{U}, \bar{p})_1 - 2M_l^{i(n+1)}) \right] \cdot (\pi(\bar{U}_0) + \pi(\bar{U}_1) - 2\pi(U^{i(n+1)})) \\
& + G(\bar{U}, \bar{p})_0. \tag{5.85}
\end{aligned}$$

Linearizando em torno de  $(\bar{v}, \bar{p})^T$ :

$$\begin{aligned}
& \frac{\phi_0}{\Delta t} \left( \pi(\bar{U}_0) \cdot \left( \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_0 \Delta \bar{p}_0 + \bar{M}_{l_0} - M_{l_0}^n \right) + \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)_0 \Delta \bar{p}_0 + \bar{M}_{g_0} - M_{g_0}^n \right) \\
& + \frac{1}{\Delta x} (\Delta \bar{v}_{\frac{1}{2}} + \bar{v}_{\frac{1}{2}} - v^{i(n+1)}) + \frac{1}{4\Delta x} \left( \Delta \bar{v}_{\frac{1}{2}} + \bar{v}_{\frac{1}{2}} + v^{i(n+1)} \right) \\
& \quad \left( \left[ \left( \frac{\partial \bar{F}_v}{\partial p} \right)_0 \Delta \bar{p}_0 + \bar{F}_{v_0} \right] \cdot \left[ \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_0 \Delta \bar{p}_0 + \bar{M}_{l_0} + \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_1 \Delta \bar{p}_1 + \bar{M}_{l_1} - 2M_l^{i(n+1)} \right] \right. \\
& \quad \left. + \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)_0 \Delta \bar{p}_0 + \bar{M}_{g_0} + \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)_1 \Delta \bar{p}_1 + \bar{M}_{g_1} - 2M_g^{i(n+1)} \right) \\
& = \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ \left( \left( \frac{\partial \bar{B}_v}{\partial p} \right)_0 \Delta \bar{p}_0 + \bar{B}_{v_0} \right) \otimes \left( \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_0 \Delta \bar{p}_0 + \bar{M}_{l_0} + \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_1 \Delta \bar{p}_1 + \bar{M}_{l_1} - 2M_l^{i(n+1)} \right) \right] \cdot \\
& \quad \left( \pi(\bar{U}_0) + \pi(\bar{U}_1) - 2\pi(U^{i(n+1)}) \right) \\
& + \left( \frac{\partial \bar{G}_v}{\partial p} \right)_0 \Delta \bar{p}_0 + \bar{G}_{v_0}. \tag{5.86}
\end{aligned}$$

Colocando em evidência  $\Delta \bar{p}_0 \equiv \Delta \bar{p}(0)$ ,  $\Delta \bar{v}_{\frac{1}{2}} \equiv \Delta \bar{v}m(1)$ ,  $\Delta \bar{p}_1 \equiv \Delta \bar{p}(1)$ , obtemos:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{\phi_0}{\Delta t} \left( \pi(\bar{U}_0) \cdot \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_0 + \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)_0 \right) + \frac{1}{4\Delta x} (v^{i(n+1)} + \bar{v}_{\frac{1}{2}}) \bar{F}_{v_0} \cdot \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_0 \right. \\
& \quad + \frac{1}{4\Delta x} (v^{i(n+1)} + \bar{v}_{\frac{1}{2}}) \left( \frac{\partial \bar{F}_v}{\partial p} \right)_0 \cdot \left[ \bar{M}_{l_0} + \bar{M}_{l_1} - 2M_l^{i(n+1)} \right] + \frac{1}{4\Delta x} (v^{i(n+1)} + \bar{v}_{\frac{1}{2}}) \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)_0 \\
& \quad - \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ \left( \frac{\partial \bar{B}_v}{\partial p} \right)_0 \otimes \left( \bar{M}_{l_0} + \bar{M}_{l_1} - 2M_l^{i(n+1)} \right) \right] \cdot (\pi(\bar{U}_0) + \pi(\bar{U}_1) - 2\pi(U^{i(n+1)})) \\
& \quad \left. - \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ \bar{B}_{v_0} \otimes \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_0 \right] \cdot (\pi(\bar{U}_0) + \pi(\bar{U}_1) - 2\pi(U^{i(n+1)})) - \left( \frac{\partial \bar{G}_v}{\partial p} \right)_0 \right\} \Delta \bar{p}(0) \\
& + \left\{ \frac{1}{\Delta x} + \frac{1}{4\Delta x} \bar{F}_{v_0} \cdot (\bar{M}_{l_0} + \bar{M}_{l_1} - 2M_l^{i(n+1)}) + \frac{1}{4\Delta x} (\bar{M}_{g_0} + \bar{M}_{g_1} - 2M_g^{i(n+1)}) \right\} \Delta \bar{v}m(1) \\
& + \left\{ \frac{1}{4\Delta x} (v^{i(n+1)} + \bar{v}_{\frac{1}{2}}) \bar{F}_{v_0} \cdot \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_1 + \frac{1}{4\Delta x} (v^{i(n+1)} + \bar{v}_{\frac{1}{2}}) \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)_1 \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ \bar{B}_{v_0} \otimes \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_1 \right] \cdot (\pi(\bar{U}_0) + \pi(\bar{U}_1) - 2\pi(U^{i(n+1)})) \right\} \Delta \bar{p}(1) \\
& = - \frac{\phi_0}{\Delta t} (\pi(\bar{U}_0) \cdot (\bar{M}_{l_0} - M_{l_0}^n) + \bar{M}_{g_0} - M_{g_0}^n) - \frac{1}{\Delta x} (\bar{v}_{\frac{1}{2}} - v^{i(n+1)}) \\
& \quad - \frac{1}{4\Delta x} (v^{i(n+1)} + \bar{v}_{\frac{1}{2}}) \left( \bar{F}_{v_0} \cdot (\bar{M}_{l_0} + \bar{M}_{l_1} - 2M_l^{i(n+1)}) + \bar{M}_{g_0} + \bar{M}_{g_1} - 2M_g^{i(n+1)} \right) \\
& \quad + \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ \bar{B}_{v_0} \otimes (\bar{M}_{l_0} + \bar{M}_{l_1} - 2M_l^{i(n+1)}) \right] \cdot (\pi(\bar{U}_0) + \pi(\bar{U}_1) - 2\pi(U^{i(n+1)})) + \bar{G}_{v_0}.
\end{aligned} \tag{5.87}$$

A equação (5.87) pode ser escrita numa forma compacta como

$$\tilde{\beta}_v(0) \Delta \bar{p}(0) + \tilde{\delta}_v(1) \Delta \bar{v}m(1) + \tilde{\theta}_v(1) \Delta \bar{p}(1) = \tilde{\gamma}m_v(1) \equiv \tilde{\gamma}_v(0), \tag{5.88}$$

onde  $\gamma m_v(1)$  é apenas uma notação conveniente para  $\gamma_v(0)$  para as condições de contorno dadas nesta Secção.

Note que  $\Delta \bar{v}m0$  de (5.80), (5.81) não aparecem aqui, mas aparecerão na definição (5.178), a qual aparece no lado direito do sistema algébrico pressão-velocidade no bloco dado em (5.188).

**Obs 5.5.** Note que a analogia entre a equação (5.88) e a equação (4.20) restringe-se aos quatro últimos termos, fazendo  $j = 0$ .

Os coeficientes da equação (5.88) são dados por:

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_v(0) &= \frac{\phi_0}{\Delta t} \left( \pi(\bar{U}_0) \cdot \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_0 + \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)_0 \right) - \left( \frac{\partial \bar{G}_v}{\partial p} \right)_0 \\ &+ \frac{1}{4\Delta x} (v^{i(n+1)} + v\bar{m}(1)) \left( \bar{F}_{v_0} \cdot \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_0 + \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)_0 + \left( \frac{\partial \bar{F}_v}{\partial p} \right)_0 \cdot [\bar{M}_{l_0} + \bar{M}_{l_1} - 2M_l^{i(n+1)}] \right) \\ &- \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ \left( \frac{\partial \bar{B}_v}{\partial p} \right)_0 \otimes (\bar{M}_{l_0} + \bar{M}_{l_1} - 2M_l^{i(n+1)}) \right] \cdot (\pi(\bar{U}_0) + \pi(\bar{U}_1) - 2\pi(U^{i(n+1)})) \\ &- \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ \bar{B}_{v_0} \otimes \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_0 \right] \cdot (\pi(\bar{U}_0) + \pi(\bar{U}_1) - 2\pi(U^{i(n+1)})),\end{aligned}\quad (5.89)$$

$$\tilde{\delta}_v(1) = \frac{1}{\Delta x} \left( 1 + \frac{1}{4} \bar{F}_{v_0} \cdot (\bar{M}_{l_0} + \bar{M}_{l_1} - 2M_l^{i(n+1)}) + \frac{1}{4} (\bar{M}_{g_0} + \bar{M}_{g_1} - 2M_g^{i(n+1)}) \right), \quad (5.90)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}_v(1) &= \frac{1}{4\Delta x} (v^{i(n+1)} + v\bar{m}(1)) \left( \bar{F}_{v_0} \cdot \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_1 + \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)_1 \right) \\ &- \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ \bar{B}_{v_0} \otimes \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_1 \right] \cdot (\pi(\bar{U}_0) + \pi(\bar{U}_1) - 2\pi(U^{i(n+1)})),\end{aligned}\quad (5.91)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}m_v(1) \equiv \tilde{\gamma}_v(0) &= -\frac{\phi_0}{\Delta t} (\pi(\bar{U}_0) \cdot (\bar{M}_{l_0} - M_{l_0}^n) + \bar{M}_{g_0} - M_{g_0}^n) - \frac{1}{\Delta x} (v\bar{m}(1) - v^{i(n+1)}) \\ &- \frac{1}{4\Delta x} (v^{i(n+1)} + v\bar{m}(1)) \left( \bar{F}_{v_0} \cdot (\bar{M}_{l_0} + \bar{M}_{l_1} - 2M_l^{i(n+1)}) + \bar{M}_{g_0} + \bar{M}_{g_1} - 2M_g^{i(n+1)} \right) \\ &+ \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ \bar{B}_{v_0} \otimes (\bar{M}_{l_0} + \bar{M}_{l_1} - 2M_l^{i(n+1)}) \right] \cdot (\pi(\bar{U}_0) + \pi(\bar{U}_1) - 2\pi(U^{i(n+1)})) + \bar{G}_{v_0}.\end{aligned}\quad (5.92)$$

5.2.2. *Avaliação vetorial dos coeficientes da equação da velocidade na injeção.* Estendemos aqui para a extremidade  $x_{-\frac{1}{2}}$ , correspondendo ao índice  $j = 0$ , os valores das funções vetoriais definidas inicialmente para o interior da malha em (4.38)–(4.41):

$$\bar{v}m_c(0) = \frac{1}{2} \left( v^{i(n+1)} + \bar{v}m(1) \right), \quad (5.93)$$

$$\pi c(\bar{U}(0)) = \frac{1}{2} \left( \pi(\bar{U}(0)) + \pi(\bar{U}(1)) - 2\pi(U^{i(n+1)}) \right), \quad (5.94)$$

$$\bar{M}c(0) = \frac{1}{2} \left( \bar{M}_l(0) + \bar{M}_l(1) - 2M_l^{i(n+1)} \right), \quad (5.95)$$

$$\bar{C}(0) = \frac{1}{2} \left( \bar{F}_v(0) \cdot \bar{M}c(0) + \frac{1}{2} (\bar{M}_g(0) + \bar{M}_g(1) - 2M_g^{i(n+1)}) \right). \quad (5.96)$$

A fim de separar os casos de a matriz  $B_v$  ser constante ou não, vamos estender as definições das funções vetoriais definidas inicialmente em (4.43)–(4.45), para a extremidade de injeção:

$$\bar{\mathcal{B}}_2(0) = \frac{1}{(\Delta x)^2} \left[ \left( \frac{\partial \bar{B}_v}{\partial p} \right) (0) \otimes \bar{M}c(0) \right] \cdot \pi c(\bar{U}(0)), \quad (5.97)$$

$$\bar{\mathcal{B}}_3(1) = \frac{1}{(\Delta x)^2} \left[ \bar{B}_v(0) \otimes \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right) (1) \right] \cdot \pi c(\bar{U}(0)), \quad (5.98)$$

$$\bar{\mathcal{B}}_4(0) = \frac{1}{(\Delta x)^2} \left[ \bar{B}_v(0) \otimes \bar{M}c(0) \right] \cdot \pi c(\bar{U}(0)). \quad (5.99)$$

Além disto precisamos também da seguinte constante:

$$\bar{\mathcal{B}}_5(0) = \frac{1}{2(\Delta x)^2} \left[ \bar{B}_v(0) \otimes \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right) (0) \right] \cdot \pi c(\bar{U}(0)), \quad (5.100)$$

Para destacar os termos transientes, definimos, como em (4.46), (4.47):

$$\bar{\mathcal{T}}_\beta(0) = \frac{\phi(0)}{\Delta t} \left( \pi(\bar{U}(0)) \cdot \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right) (0) + \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right) (0) \right), \quad (5.101)$$

$$\bar{\mathcal{T}}_\gamma(0) = -\frac{\phi(0)}{\Delta t} \left( \pi(\bar{U}(0)) \cdot (\bar{M}_l(0) - M_l^n(0)) + \bar{M}_g(0) - M_g^n(0) \right). \quad (5.102)$$

Com as definições acima os coeficientes em (5.89)–(5.92) da equação (5.88) podem ser escritos na forma vetorial como:

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_v(0) = & \bar{\mathcal{T}}_\beta(0) - \left( \frac{\partial \bar{G}_v}{\partial p} \right) (0) + \frac{1}{\Delta x} \bar{v}mc(0) \left( \frac{\partial \bar{F}_v}{\partial p} \right) (0) \cdot \bar{M}c(0) - \bar{\mathcal{B}}_2(0) \\ & + \frac{1}{2\Delta x} \bar{v}mc(0) \left( \bar{F}_v(0) \cdot \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right) (0) + \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right) (0) \right) - \bar{\mathcal{B}}_5(0), \end{aligned} \quad (5.103)$$

onde a primeira linha da fórmula acima corresponde à  $\beta_v(0)$ , obtido de (4.51), fazendo  $j = 0$ , e  $\bar{\mathcal{B}}_5(0)$  é dado em (5.100),

$$\tilde{\delta}_v(1) = \frac{1}{\Delta x} [1 + \bar{C}(0)], \quad (5.104)$$

o qual tem a mesma expressão dada em (4.52) fazendo  $j = 1$ ,

$$\tilde{\theta}_v(1) = \frac{1}{2\Delta x} \bar{v}mc(0) \left( \bar{F}_v(0) \cdot \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)(1) + \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)(1) \right) - \frac{1}{2} \bar{\mathcal{B}}_3(0), \quad (5.105)$$

o qual tem expressão semelhante àquela dada em (4.53), fazendo  $j = 1$ ,

$$\tilde{\gamma}m_v(1) \equiv \tilde{\gamma}_v(0) = \bar{\mathcal{T}}_\gamma(0) - \frac{1}{\Delta x} (\bar{v}m(1) - v^{i(n+1)}) - \frac{1}{\Delta x} \bar{v}mc(0) \bar{C}(0) + \bar{G}_v(0) + \bar{\mathcal{B}}_4(0), \quad (5.106)$$

o qual tem expressão semelhante àquela dada em (4.54), fazendo  $j = 0$  e identificando  $v^{i(n+1)}$  com  $\bar{v}m0$ .

**Obs 5.6.** Deve ser observado que as definições de  $\bar{v}mc(0)$ ,  $\pi c(\bar{U}(0))$ ,  $\bar{M}c(0)$ ,  $\bar{M}_g(0)$  e  $\bar{C}(0)$  são dadas no caso particular respectivamente pelas fórmulas (5.93)–(5.96) e não pelas fórmulas (4.38)–(4.41). Observe também que  $\bar{\mathcal{B}}_1(0)$  e  $\eta_v(0)$  já estão definidos pelas fórmulas (4.42) e (4.49). Além disto estes termos não aparecem na equação (5.88).

5.2.3. *Discretização newtoniana da equação da pressão na injeção.* Vamos considerar a discretização espacial da equação da pressão (2.11) no ponto  $x_{-\frac{1}{2}}$ . Isto porque no interior da malha a discretização foi feita num ponto  $x_{j-\frac{1}{2}}$  e com isto fórmulas obtidas para o interior poderão ser aproveitadas também na produção.

Usando diferenças progressivas para aproximar  $\partial/\partial x$ , a discretização da equação da pressão (2.11) no ponto  $x_{-\frac{1}{2}}$  fica:

$$v^{i(n+1)} = \frac{2K_{-\frac{1}{2}} R^{i(n+1)}}{\Delta x} (p_0^{n+1} - p^{i(n+1)}) + \frac{2K_{-\frac{1}{2}} S^{i(n+1)}}{\Delta x} \cdot (\pi(U_0^{(n+1)}) - \pi(U^{i(n+1)})). \quad (5.107)$$

Seja  $\bar{p}$  uma aproximação melhor de  $p^{n+1}$  a ser determinada e  $\bar{U}_0$ ,  $\bar{p}_0$  valores aproximados em  $x_0$ . Então

$$v^{i(n+1)} = \frac{2K_{-\frac{1}{2}} R^{i(n+1)}}{\Delta x} (\bar{p}_0 - p^{i(n+1)}) + \frac{2K_{-\frac{1}{2}} S^{i(n+1)}}{\Delta x} \cdot (\pi(\bar{U}_0) - \pi(U^{i(n+1)})). \quad (5.108)$$

Somando e subtraindo termos convenientemente,

$$v^{i(n+1)} = \frac{2K_{-\frac{1}{2}} R^{i(n+1)}}{\Delta x} (\bar{p}_0 - \bar{p}_0 + \bar{p}_0 - p^{i(n+1)}) + \frac{2K_{-\frac{1}{2}} S^{i(n+1)}}{\Delta x} \cdot (\pi(\bar{U}_0) - \pi(U^{i(n+1)})). \quad (5.109)$$

Isolando  $\Delta\bar{p}_0 \equiv \bar{p}_0 - \bar{p}_0$  na equação (5.109), identificando  $K_{-\frac{1}{2}}$  com  $Km(0)$  e multiplicando tudo por  $(\Delta x/2)$ , obtemos:

$$\begin{aligned} -Km(0) R^{i(n+1)} \Delta\bar{p}_0 &= Km(0) R^{i(n+1)} (\bar{p}_0 - p^{i(n+1)}) + Km(0) S^{i(n+1)} \cdot (\pi(\bar{U}_0) - \pi(U^{i(n+1)})) \\ &\quad - (\Delta x/2) v^{i(n+1)}. \end{aligned} \quad (5.110)$$

A equação (5.110) pode ser escrita numa forma compacta como:

$$\tilde{D}_p(0) \Delta\bar{p}(0) = \tilde{A}_p(0), \quad (5.111)$$

onde

$$\tilde{D}_p(0) = -Km(0)R^{i(n+1)}, \quad (5.112)$$

$$\tilde{A}_p(0) = Km(0)R^{i(n+1)}(\bar{p}_0 - p^{i(n+1)}) + Km(0)S^{i(n+1)} \cdot (\pi(\bar{U}_0) - \pi(U^{i(n+1)})) - (\Delta x/2)v^{i(n+1)}. \quad (5.113)$$

5.2.4. *Avaliação vetorial dos coeficientes da equação de pressão na injeção.* Vamos estender os valores das funções definidas inicialmente para o interior da malha pelas fórmulas (4.67)–(4.70), para a extremidade de injeção  $x_{-\frac{1}{2}}$ , ou seja para o índice  $j = 0$ :

$$\bar{R}cm(0) = Km(0)R^{i(n+1)}, \quad (5.114)$$

$$\bar{S}cm(0) = Km(0)S^{i(n+1)}, \quad (5.115)$$

$$\bar{p}cm(0) = (\bar{p}(0) - p^{i(n+1)}), \quad (5.116)$$

$$\pi cm(\bar{U}(0)) = (\bar{\pi}(U(0)) - \pi(U^{i(n+1)})). \quad (5.117)$$

Com as definições acima os coeficientes em (5.112)–(5.113) podem ser escritos na forma vetorial como:

$$\tilde{D}_p(0) = -\bar{R}cm(0), \quad (5.118)$$

que é semelhante à fórmula dada em (4.72) fazendo  $j = 0$  e retirando os dois termos com derivadas na pressão,

$$\tilde{A}_p(0) = \bar{R}cm(0)\bar{p}cm(0) + \bar{S}cm(0) \cdot \bar{\pi}cm(0) - (\Delta x/2)v^{i(n+1)} \quad (5.119)$$

que é semelhante a **metade** de  $A_p(0)$  em (4.73), fazendo  $j = 0$  e identificando  $v^{i(n+1)}$  com  $\bar{v}m0$ .

**Obs 5.7.** Os vetores nos lados esquerdos de (5.118)–(5.119) não são realmente programados, pois só são usados uma vez no preenchimento do sistema linear.

5.2.5. *Discretização da equação da velocidade na produção.*

**Obs 5.8.** Usaremos nesta e na próxima Subseções as **variáveis de contorno**  $\bar{U}_{N-\frac{1}{2}} \equiv \bar{U}mN$ , as quais são provenientes do subsistema de balanços através da fórmula (5.79). Além disto são adicionadas as **variáveis de contorno**  $v_{N-\frac{1}{2}} \equiv vmN$  e  $p_{N-\frac{1}{2}} \equiv pmN$ , as quais são incógnitas no caso da condição de contorno (5.4). Supostamente  $v_{N-\frac{1}{2}}^n \equiv v^nmN$ ,  $\bar{v}_{N-\frac{1}{2}} \equiv \bar{v}mN$ ,  $p_{N-\frac{1}{2}}^n \equiv p^nmN$  e  $\bar{p}_{N-\frac{1}{2}} \equiv \bar{p}mN$  são conhecidas no tempo  $t^n$  e numa aproximação “barra” para seu valor no tempo  $t^{n+1}$ .



Portanto as funções  $M_l(U, p)$ ,  $M_g(U, p)$  e suas derivadas são calculáveis na extremidade de produção  $x_{N-\frac{1}{2}}$ , pelo menos utilizando uma aproximação anterior. Usaremos a notação

$$M_{l_{N-\frac{1}{2}}} \equiv M_l(U_{N-\frac{1}{2}}, p_{N-\frac{1}{2}}), \quad (5.120)$$

$$M_{g_{N-\frac{1}{2}}} \equiv M_g(U_{N-\frac{1}{2}}, p_{N-\frac{1}{2}}), \quad (5.121)$$

$$\left(\frac{\partial M_l}{\partial p}\right)_{N-\frac{1}{2}} \equiv \left(\frac{\partial M_l}{\partial p}\right)(U_{N-\frac{1}{2}}, p_{N-\frac{1}{2}}), \quad (5.122)$$

$$\left(\frac{\partial M_g}{\partial p}\right)_{N-\frac{1}{2}} \equiv \left(\frac{\partial M_g}{\partial p}\right)(U_{N-\frac{1}{2}}, p_{N-\frac{1}{2}}). \quad (5.123)$$

Vamos fazer a discretização espacial no ponto  $x_{N-1}$ , usando diferenças centradas da equação (2.10).

*Discretização espacial.*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x}(v_{N-\frac{1}{2}} - v_{N-\frac{3}{2}}) + \frac{1}{\Delta x}v_{N-1} \left[ F_{v_{N-1}} \cdot (M_{l_{N-\frac{1}{2}}} - M_{l_{N-\frac{3}{2}}}) + M_{g_{N-\frac{1}{2}}} - M_{g_{N-\frac{3}{2}}} \right] \\ & = -\phi_{N-1} \left[ \pi(U_{N-1}) \cdot \left(\frac{\partial M_l}{\partial t}\right)_{N-1} + \left(\frac{\partial M_g}{\partial t}\right)_{N-1} \right] \\ & \quad + \frac{1}{(\Delta x)^2} \left[ B_{v_{N-1}} \otimes (M_{l_{N-\frac{1}{2}}} - M_{l_{N-\frac{3}{2}}}) \right] \cdot (\pi(U_{N-\frac{1}{2}}) - \pi(U_{N-\frac{3}{2}})) + G_{v_{N-1}}. \end{aligned} \quad (5.124)$$

Tomando-se médias onde for possível temos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x}(v_{N-\frac{1}{2}} - v_{N-\frac{3}{2}}) \\ & \quad + \frac{1}{4\Delta x} \left( v_{N-\frac{3}{2}} + v_{N-\frac{1}{2}} \right) \left( F_{v_{N-1}} \cdot (2M_{l_{N-\frac{1}{2}}} - M_{l_{N-2}} - M_{l_{N-1}}) + 2M_{g_{N-\frac{1}{2}}} - M_{g_{N-2}} - M_{g_{N-1}} \right) \\ & = -\phi_{N-1} \left( \pi(U_{N-1}) \cdot \left(\frac{\partial M_l}{\partial t}\right)_{N-1} + \left(\frac{\partial M_g}{\partial t}\right)_{N-1} \right) \\ & \quad + \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ B_{v_{N-1}} \otimes (2M_{l_{N-\frac{1}{2}}} - M_{l_{N-2}} - M_{l_{N-1}}) \right] \cdot (2\pi(U_{N-\frac{1}{2}}) - \pi(U_{N-2}) - \pi(U_{N-1})) \\ & \quad + G_{v_{N-1}}. \end{aligned} \quad (5.125)$$

*Discretização temporal.*

As notações  $M_{l_{N-\frac{1}{2}}}^{n+1}$  e  $M_{g_{N-\frac{1}{2}}}^{n+1}$  significam que estas funções estarão sendo avaliadas no ponto  $(U_{N-\frac{1}{2}}^{n+1}, p_{N-\frac{1}{2}}^{n+1})^T$ , correspondendo aos valores destas variáveis na produção no tempo  $t^{n+1}$ , isto é:

$$M_{l_{N-\frac{1}{2}}}^{n+1} \equiv M_l(U_{N-\frac{1}{2}}^{n+1}, p_{N-\frac{1}{2}}^{n+1}) \quad (5.126)$$

$$M_{g_{N-\frac{1}{2}}}^{n+1} \equiv M_g(U_{N-\frac{1}{2}}^{n+1}, p_{N-\frac{1}{2}}^{n+1}) \quad (5.127)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta x} (v_{N-\frac{1}{2}}^{n+1} - v_{N-\frac{3}{2}}^{n+1}) \\
& + \frac{1}{4\Delta x} (v_{N-\frac{3}{2}}^{n+1} + v_{N-\frac{1}{2}}^{n+1}) \left( F_{v_{N-1}}^{n+1} \cdot (2M_{l_{N-\frac{1}{2}}}^{n+1} - M_{l_{N-2}}^{n+1} - M_{l_{N-1}}^{n+1}) + 2M_{g_{N-\frac{1}{2}}}^{n+1} - M_{g_{N-2}}^{n+1} - M_{g_{N-1}}^{n+1} \right) \\
& = - \frac{\phi_{N-1}}{\Delta t} \left( \pi(U_{N-1}^{n+1}) \cdot (M_{l_{N-1}}^{n+1} - M_{l_{N-1}}^n) + M_{g_{N-1}}^{n+1} - M_{g_{N-1}}^n \right) \\
& + \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ B_{v_{N-1}}^{n+1} \otimes (2M_{l_{N-\frac{1}{2}}}^{n+1} - M_{l_{N-2}}^{n+1} - M_{l_{N-1}}^{n+1}) \right] \cdot (2\pi(U_{N-\frac{1}{2}}^{n+1}) - \pi(U_{N-2}^{n+1}) - \pi(U_{N-1}^{n+1})) \\
& + G_{v_{N-1}}^{n+1}. \tag{5.128}
\end{aligned}$$

*O método de Newton.* Suponhamos conhecidas as aproximações  $U^n$ ,  $v^n$  e  $p^n$  e  $\bar{U}$ . Sejam  $\bar{v}$  e  $\bar{p}$  aproximações temporárias de  $v^{n+1}$  e de  $p^{n+1}$ . O objetivo é obter aproximações melhores  $\bar{\bar{v}}$  e  $\bar{\bar{p}}$ :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta x} (\bar{\bar{v}}_{N-\frac{1}{2}} - \bar{\bar{v}}_{N-\frac{3}{2}}) \\
& + \frac{1}{4\Delta x} (\bar{\bar{v}}_{N-\frac{3}{2}} + \bar{\bar{v}}_{N-\frac{1}{2}}) \left( F_v(\bar{U}, \bar{\bar{p}})_{N-1} \cdot (2M_l(\bar{U}, \bar{\bar{p}})_{N-\frac{1}{2}} - M_l(\bar{U}, \bar{\bar{p}})_{N-2} - M_l(\bar{U}, \bar{\bar{p}})_{N-1}) \right. \\
& \left. + 2M_g(\bar{U}, \bar{\bar{p}})_{N-\frac{1}{2}} - M_g(\bar{U}, \bar{\bar{p}})_{N-2} - M_g(\bar{U}, \bar{\bar{p}})_{N-1} \right) \\
& = - \frac{\phi_{N-1}}{\Delta t} \left( \pi(\bar{U}_{N-1}) \cdot (M_l(\bar{U}, \bar{\bar{p}})_{N-1} - M_{l_{N-1}}^n) + M_g(\bar{U}, \bar{\bar{p}})_{N-1} - M_{g_{N-1}}^n \right) \\
& + \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ B_v(\bar{U}, \bar{\bar{p}})_{N-1} \otimes (2M_l(\bar{U}, \bar{\bar{p}})_{N-\frac{1}{2}} - M_l(\bar{U}, \bar{\bar{p}})_{N-2} - M_l(\bar{U}, \bar{\bar{p}})_{N-1}) \right] \cdot \\
& \quad (2\pi(\bar{U}_{N-\frac{1}{2}}) - \pi(\bar{U}_{N-2}) - \pi(\bar{U}_{N-1})) + G_v(\bar{U}, \bar{\bar{p}})_{N-1}. \tag{5.129}
\end{aligned}$$

Linearização em torno do ponto  $(\bar{v}, \bar{p})^T$ :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\Delta x} \left( \Delta \bar{v}_{N-\frac{1}{2}} - \Delta \bar{v}_{N-\frac{3}{2}} + \bar{v}_{N-\frac{1}{2}} - \bar{v}_{N-\frac{3}{2}} \right) + \frac{1}{4\Delta x} \left( \Delta \bar{v}_{N-\frac{3}{2}} + \Delta \bar{v}_{N-\frac{1}{2}} + \bar{v}_{N-\frac{3}{2}} + \bar{v}_{N-\frac{1}{2}} \right) \\
 & \left( \left[ \left( \frac{\partial \bar{F}_v}{\partial p} \right)_{N-1} \Delta \bar{p}_{N-1} + \bar{F}_{v_{N-1}} \right] \cdot \left[ 2 \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_{N-\frac{1}{2}} \Delta \bar{p}_{N-\frac{1}{2}} + 2 \bar{M}_{l_{N-\frac{1}{2}}} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_{N-2} \Delta \bar{p}_{N-2} - \bar{M}_{l_{N-2}} - \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_{N-1} \Delta \bar{p}_{N-1} - \bar{M}_{l_{N-1}} \right] \right. \\
 & \left. + 2 \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)_{N-\frac{1}{2}} \Delta \bar{p}_{N-\frac{1}{2}} + 2 \bar{M}_{g_{N-\frac{1}{2}}} - \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)_{N-2} \Delta \bar{p}_{N-2} - \bar{M}_{g_{N-2}} \right. \\
 & \left. \left. - \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)_{N-1} \Delta \bar{p}_{N-1} - \bar{M}_{g_{N-1}} \right) \right. \\
 & = - \frac{\phi_{N-1}}{\Delta t} \left( \pi(\bar{U}_{N-1}) \cdot \left[ \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_{N-1} \Delta \bar{p}_{N-1} + \bar{M}_{l_{N-1}} - M_{l_{N-1}}^n \right] \right. \\
 & \left. + \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)_{N-1} \Delta \bar{p}_{N-1} + \bar{M}_{g_{N-1}} - M_{g_{N-1}}^n \right) \\
 & + \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ \left( \left( \frac{\partial \bar{B}_v}{\partial p} \right)_{N-1} \Delta \bar{p}_{N-1} + \bar{B}_{v_{N-1}} \right) \otimes \left( 2 \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_{N-\frac{1}{2}} \Delta \bar{p}_{N-\frac{1}{2}} + 2 \bar{M}_{l_{N-\frac{1}{2}}} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_{N-2} \Delta \bar{p}_{N-2} - \bar{M}_{l_{N-2}} - \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_{N-1} \Delta \bar{p}_{N-1} - \bar{M}_{l_{N-1}} \right) \right] \cdot (2\pi(\bar{U}_{N-\frac{1}{2}}) - \pi(\bar{U}_{N-2}) - \pi(\bar{U}_{N-1})) \\
 & + \left( \frac{\partial \bar{G}_v}{\partial p} \right)_{N-1} \Delta \bar{p}_{N-1} + \bar{G}_{v_{N-1}}. \tag{5.130}
 \end{aligned}$$

Eliminando os termos de segunda ordem, colocando em evidência os termos  $\Delta \bar{p}_{N-2} \equiv \Delta \bar{p}(N-2)$ ,  $\Delta \bar{v}_{N-\frac{3}{2}} \equiv \Delta \bar{v}m(N-1)$ ,  $\Delta \bar{p}_{N-1} \equiv \Delta \bar{p}(N-1)$ ,  $\Delta \bar{v}_{N-\frac{1}{2}} \equiv \Delta \bar{v}mN$  e  $\Delta \bar{p}_{N-\frac{1}{2}} \equiv \Delta \bar{p}mN$ , temos

$$\begin{aligned}
& \left\{ -\frac{1}{4\Delta x}(\bar{v}_{N-\frac{3}{2}} + \bar{v}_{N-\frac{1}{2}}) \left( \bar{F}_{v_{N-1}} \cdot \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_{N-2} + \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)_{N-2} \right) \right. \\
& \left. + \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ \bar{B}_{v_{N-1}} \otimes \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_{N-2} \right] \cdot (2\pi(\bar{U}_{N-\frac{1}{2}}) - \pi(\bar{U}_{N-2}) - \pi(\bar{U}_{N-1})) \right\} \Delta \bar{p}(N-2) \\
& + \left\{ -\frac{1}{\Delta x} + \frac{1}{4\Delta x} \left( \bar{F}_{v_{N-1}} \cdot (2\bar{M}_{l_{N-\frac{1}{2}}} - \bar{M}_{l_{N-2}} - \bar{M}_{l_{N-1}}) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 2\bar{M}_{g_{N-\frac{1}{2}}} - \bar{M}_{g_{N-2}} - \bar{M}_{g_{N-1}} \right) \right\} \Delta \bar{v}m(N-1) \\
& + \left\{ \frac{\phi_{N-1}}{\Delta t} \pi(\bar{U}_{N-1}) \cdot \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_{N-1} + \frac{\phi_{N-1}}{\Delta t} \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)_{N-1} + \frac{1}{4\Delta x} (\bar{v}_{N-\frac{3}{2}} + \bar{v}_{N-\frac{1}{2}}) \right. \\
& \quad \left( \left( \frac{\partial \bar{F}_v}{\partial p} \right)_{N-1} \cdot (2\bar{M}_{l_{N-\frac{1}{2}}} - \bar{M}_{l_{N-2}} - \bar{M}_{l_{N-1}}) - \bar{F}_{v_{N-1}} \cdot \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_{N-1} - \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)_{N-1} \right) \\
& \quad \left. - \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ \left( \frac{\partial \bar{B}_v}{\partial p} \right)_{N-1} \otimes (2\bar{M}_{l_{N-\frac{1}{2}}} - \bar{M}_{l_{N-2}} - \bar{M}_{l_{N-1}}) \right] \cdot (2\pi(\bar{U}_{N-\frac{1}{2}}) - \pi(\bar{U}_{N-2}) - \pi(\bar{U}_{N-1})) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ \bar{B}_{v_{N-1}} \otimes \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_{N-1} \right] \cdot (2\pi(\bar{U}_{N-\frac{1}{2}}) - \pi(\bar{U}_{N-2}) - \pi(\bar{U}_{N-1})) - \left( \frac{\partial \bar{G}_v}{\partial p} \right)_{N-1} \right\} \Delta \bar{p}(N-1) \\
& + \left\{ \frac{1}{\Delta x} + \frac{1}{4\Delta x} \left( \bar{F}_{v_{N-1}} \cdot (2\bar{M}_{l_{N-\frac{1}{2}}} - \bar{M}_{l_{N-2}} - \bar{M}_{l_{N-1}}) + 2\bar{M}_{g_{N-\frac{1}{2}}} - \bar{M}_{g_{N-2}} - \bar{M}_{g_{N-1}} \right) \right\} \Delta \bar{v}mN \\
& + \left\{ \frac{1}{2\Delta x} (\bar{v}_{N-\frac{3}{2}} + \bar{v}_{N-\frac{1}{2}}) \left( \bar{F}_{v_{N-1}} \cdot \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_{N-\frac{1}{2}} + \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)_{N-\frac{1}{2}} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2(\Delta x)^2} \left[ \bar{B}_{v_{N-1}} \otimes \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_{N-\frac{1}{2}} \right] \cdot (2\pi(\bar{U}_{N-\frac{1}{2}}) - \pi(\bar{U}_{N-2}) - \pi(\bar{U}_{N-1})) \right\} \Delta \bar{p}mN \\
& = -\frac{\phi_{N-1}}{\Delta t} \left( \pi(\bar{U}_{N-1}) \cdot (\bar{M}_{l_{N-1}} - M_{l_{N-1}}^n) + \bar{M}_{g_{N-1}} - M_{g_{N-1}}^n \right) - \frac{1}{\Delta x} (\bar{v}_{N-\frac{1}{2}} - \bar{v}_{N-\frac{3}{2}}) \\
& - \frac{1}{4\Delta x} (\bar{v}_{N-\frac{3}{2}} + \bar{v}_{N-\frac{1}{2}}) \left( \bar{F}_{v_{N-1}} \cdot (2\bar{M}_{l_{N-\frac{1}{2}}} - \bar{M}_{l_{N-2}} - \bar{M}_{l_{N-1}}) + 2\bar{M}_{g_{N-\frac{1}{2}}} - \bar{M}_{g_{N-2}} - \bar{M}_{g_{N-1}} \right) \\
& + \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ \bar{B}_{v_{N-1}} \otimes (2\bar{M}_{l_{N-\frac{1}{2}}} - \bar{M}_{l_{N-2}} - \bar{M}_{l_{N-1}}) \right] \cdot (2\pi(\bar{U}_{N-\frac{1}{2}}) - \pi(\bar{U}_{N-2}) - \pi(\bar{U}_{N-1})) \\
& + \bar{G}_{v_{N-1}}. \tag{5.131}
\end{aligned}$$

A equação (5.131) escreve-se numa forma compacta análoga a (4.74) como:

$$\begin{aligned}
& \tilde{\eta}_v(N-2) \Delta \bar{p}(N-2) + \tilde{\alpha}_v(N-1) \Delta \bar{v}m(N-1) + \tilde{\beta}_v(N-1) \Delta \bar{p}(N-1) \\
& \quad + \tilde{\delta}_v(N) \Delta \bar{v}mN + \tilde{\theta}_v(N) \Delta \bar{p}mN = \tilde{\gamma}m_v(N) \equiv \tilde{\gamma}_v(N-1), \tag{5.132}
\end{aligned}$$

onde  $\tilde{\gamma}m_v(N)$  é só uma notação conveniente de  $\tilde{\gamma}_v(N-1)$  para escrever o sistema algébrico do subsistema pressão-velocidade com as condições de contorno desta Seção.

Os coeficientes da equação (5.132) são:

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_v(N-2) = & -\frac{1}{4\Delta x}(\bar{v}m(N-1) + \bar{v}_{N-\frac{1}{2}}) \left( \bar{F}_{v_{N-1}} \cdot \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_{N-2} + \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)_{N-2} \right) \\ & + \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ \bar{B}_{v_{N-1}} \otimes \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_{N-2} \right] \cdot (2\pi(\bar{U}_{N-\frac{1}{2}}) - \pi(\bar{U}_{N-2}) - \pi(\bar{U}_{N-1})), \end{aligned} \quad (5.133)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_v(N-1) = & \frac{1}{\Delta x} \left( -1 + \frac{1}{4} \left( \bar{F}_{v_{N-1}} \cdot (2\bar{M}_{l_{N-\frac{1}{2}}} - \bar{M}_{l_{N-2}} - \bar{M}_{l_{N-1}}) \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\bar{M}_{g_{N-\frac{1}{2}}} - \bar{M}_{g_{N-2}} - \bar{M}_{g_{N-1}} \right) \right), \end{aligned} \quad (5.134)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_v(N-1) = & \frac{\phi_{N-1}}{\Delta t} \left( \pi(\bar{U}_{N-1}) \cdot \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_{N-1} + \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)_{N-1} \right) - \left( \frac{\partial \bar{G}_v}{\partial p} \right)_{N-1} \\ & + \frac{1}{4\Delta x} (\bar{v}m(N-1) + \bar{v}_{N-\frac{1}{2}}) \left( \left( \frac{\partial \bar{F}_v}{\partial p} \right)_{N-1} \cdot (2\bar{M}_{l_{N-\frac{1}{2}}} - \bar{M}_{l_{N-2}} - \bar{M}_{l_{N-1}}) \right. \\ & \left. - \bar{F}_{v_{N-1}} \cdot \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_{N-1} - \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)_{N-1} \right) \\ & - \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ \left( \frac{\partial \bar{B}_v}{\partial p} \right)_{N-1} \otimes (2\bar{M}_{l_{N-\frac{1}{2}}} - \bar{M}_{l_{N-2}} - \bar{M}_{l_{N-1}}) \right] \cdot (2\pi(\bar{U}_{N-\frac{1}{2}}) - \pi(\bar{U}_{N-2}) - \pi(\bar{U}_{N-1})) \\ & + \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ \bar{B}_{v_{N-1}} \otimes \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_{N-1} \right] \cdot (2\pi(\bar{U}_{N-\frac{1}{2}}) - \pi(\bar{U}_{N-2}) - \pi(\bar{U}_{N-1})), \end{aligned} \quad (5.135)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_v(N) = & \frac{1}{\Delta x} \left( 1 + \frac{1}{4} \left( \bar{F}_{v_{N-1}} \cdot (2\bar{M}_{l_{N-\frac{1}{2}}} - \bar{M}_{l_{N-2}} - \bar{M}_{l_{N-1}}) \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\bar{M}_{g_{N-\frac{1}{2}}} - \bar{M}_{g_{N-2}} - \bar{M}_{g_{N-1}} \right) \right) \equiv \frac{2}{\Delta x} + \tilde{\alpha}_v(N-1), \end{aligned} \quad (5.136)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_v(N) = & \frac{1}{2\Delta x} (\bar{v}m(N-1) + \bar{v}_{N-\frac{1}{2}}) \left( \bar{F}_{v_{N-1}} \cdot \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_{N-\frac{1}{2}} + \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)_{N-\frac{1}{2}} \right) \\ & - \frac{1}{2(\Delta x)^2} \left[ \bar{B}_{v_{N-1}} \otimes \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_{N-\frac{1}{2}} \right] \cdot (2\pi(\bar{U}_{N-\frac{1}{2}}) - \pi(\bar{U}_{N-2}) - \pi(\bar{U}_{N-1})), \end{aligned} \quad (5.137)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}m_v(N) &\equiv \tilde{\gamma}_v(N-1) = -\frac{\phi_{N-1}}{\Delta t} \left( \pi(\bar{U}_{N-1}) \cdot (\bar{M}_{l_{N-1}} - M_{l_{N-1}}^n) + \bar{M}_{g_{N-1}} - M_{g_{N-1}}^n \right) \\
&- \frac{1}{\Delta x} \left( \bar{v}_{N-\frac{1}{2}} - \bar{v}m(N-1) \right) - \frac{1}{4\Delta x} \left( \bar{v}m(N-1) + \bar{v}_{N-\frac{1}{2}} \right) \\
&\quad \left( \bar{F}_{v_{N-1}} \cdot (2\bar{M}_{l_{N-\frac{1}{2}}} - \bar{M}_{l_{N-2}} - \bar{M}_{l_{N-1}}) + 2\bar{M}_{g_{N-\frac{1}{2}}} - \bar{M}_{g_{N-2}} - \bar{M}_{g_{N-1}} \right) \\
&+ \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ \bar{B}_{v_{N-1}} \otimes (2\bar{M}_{l_{N-\frac{1}{2}}} - \bar{M}_{l_{N-2}} - \bar{M}_{l_{N-1}}) \right] \cdot (2\pi(\bar{U}_{N-\frac{1}{2}}) - \pi(\bar{U}_{N-2}) - \pi(\bar{U}_{N-1})) \\
&+ \bar{G}_{v_{N-1}}. \tag{5.138}
\end{aligned}$$

5.2.6. *Avaliação vetorial dos coeficientes da equação da velocidade na produção.* Vamos estender as definições das funções vetoriais introduzidas no interior da malha em (4.38), (4.39), (4.40) e (4.41), a extremidade  $x_{N-\frac{1}{2}}$ . Para isto, fazemos a identificação:  $U_{N-\frac{1}{2}} \equiv UmN$  (veja (5.70)), assim como as seguintes grandezas no contorno, avaliadas utilizando variáveis de contorno oriundas do sistema de balanços e do sistema de pressão-velocidade que foram definidas no interior da grade em (4.31) e (4.32):

$$\begin{aligned}
\bar{M}_{l_{N-\frac{1}{2}}} &\equiv \bar{M}_l m(N) = M_l(\bar{U}_{N-\frac{1}{2}}, \bar{p}_{N-\frac{1}{2}}), \\
\bar{M}_{g_{N-\frac{1}{2}}} &\equiv \bar{M}_g m(N) = M_g(\bar{U}_{N-\frac{1}{2}}, \bar{p}_{N-\frac{1}{2}}).
\end{aligned}$$

(As funções  $M_l$  e  $M_g$  definidas em (2.10) foram utilizadas acima.) Daí:

$$\bar{v}m(N-1) = \frac{1}{2} \left( \bar{v}m(N-1) + \bar{v}_{N-\frac{1}{2}} \right), \tag{5.139}$$

$$\pi c(\bar{U}(N-1)) = \frac{1}{2} \left( 2\pi(\bar{U}_{N-\frac{1}{2}}) - \pi(\bar{U}(N-1)) - \pi(\bar{U}(N-2)) \right), \tag{5.140}$$

$$\bar{M}c(N-1) = \frac{1}{2} \left( 2\bar{M}_l m(N) - \bar{M}_l(N-1) - \bar{M}_l(N-2) \right), \tag{5.141}$$

$$\bar{C}(N-1) = \frac{1}{2} \left( \bar{F}_v(N-1) \cdot \bar{M}c(N-1) + \frac{1}{2} (2\bar{M}_g m(N) - \bar{M}_g(N-1) - \bar{M}_g(N-2)) \right), \tag{5.142}$$

onde  $M_l(N-2)$ ,  $M_g(N-2)$ ,  $M_l(N-1)$  e  $M_g(N-1)$  são obtidos de (4.31) e (4.32), para  $j = N-2$  e  $j = N-1$ , respectivamente.

A fim de separar os casos de a matriz  $B_v$  ser constante ou não, vamos estender as definições das funções vetoriais definidas em (4.42), (4.44) e (4.45), para a extremidade de produção:

$$\bar{\mathcal{B}}_1(N-1) = \frac{1}{2(\Delta x)^2} \left[ \bar{B}_v(N-1) \otimes \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)(N-2) \right] \cdot \pi c(\bar{U}(N-1)), \quad (5.143)$$

$$\bar{\mathcal{B}}_2(N-1) = \frac{1}{(\Delta x)^2} \left[ \left( \frac{\partial \bar{B}_v}{\partial p} \right)(N-1) \otimes \bar{M}c(N-1) \right] \cdot \pi c(\bar{U}(N-1)), \quad (5.144)$$

$$\bar{\mathcal{B}}_3(N) = \frac{1}{(\Delta x)^2} \left[ \bar{B}_v(N-1) \otimes \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)(N) \right] \cdot \pi c(\bar{U}(N-1)), \quad (5.145)$$

$$\bar{\mathcal{B}}_4(N-1) = \frac{1}{(\Delta x)^2} \left[ \bar{B}_v(N-1) \otimes \bar{M}c(N-1) \right] \cdot \pi c(\bar{U}(N-1)). \quad (5.146)$$

Devido à condição de contorno, definimos também a constante:

$$\bar{\mathcal{B}}_5(N-1) = \frac{1}{2(\Delta x)^2} \left[ \bar{B}_v(N-1) \otimes \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)(N-1) \right] \cdot \pi c(\bar{U}(N-1)). \quad (5.147)$$

**Obs 5.9.** Não houve a necessidade de definir  $\bar{\mathcal{B}}(j)$ , para  $j = 1, 2, \dots, N-2$ .

Para destacar os termos transientes, definimos, como em (4.46), (4.47):

$$\bar{\mathcal{T}}_\beta(N-1) = \frac{\phi(N-1)}{\Delta t} \left( \pi(\bar{U}(N-1)) \cdot \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)(N-1) + \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)(N-1) \right), \quad (5.148)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{T}}_\gamma(N-1) = & \\ & - \frac{\phi(N-1)}{\Delta t} \left( \pi(\bar{U}(N-1)) \cdot (\bar{M}_l(N-1) - M_l^n(N-1)) + \bar{M}_g(N-1) - M_g^n(N-1) \right). \end{aligned} \quad (5.149)$$

Com as definições acima os coeficientes da equação (5.132) se escrevem como:

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_v(N-2) = & -\frac{1}{2\Delta x} \bar{v}mc(N-1) \left( \bar{F}_v(N-1) \cdot \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)(N-2) + \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)(N-2) \right) \\ & + \bar{\mathcal{B}}_1(N-2), \end{aligned} \quad (5.150)$$

o qual tem expressão semelhante àquela em (4.49), fazendo  $j = N - 2$ ,

$$\tilde{\alpha}_v(N-1) = \frac{1}{\Delta x} [-1 + \bar{C}(N-1)], \quad (5.151)$$

o qual tem expressão semelhante àquela dada em (4.50), fazendo  $j = N - 1$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_v(N-1) = & \bar{\mathcal{T}}_\beta(N-1) \\ & - \left( \frac{\partial \bar{G}_v}{\partial p} \right)(N-1) + \frac{1}{\Delta x} \bar{v}mc(N-1) \left( \frac{\partial \bar{F}_v}{\partial p} \right)(N-1) \cdot \bar{M}c(N-1) - \bar{\mathcal{B}}_2(N-1) \\ & - \frac{1}{2\Delta x} \bar{v}mc(N-1) \left( \bar{F}_v(N-1) \cdot \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)(N-1) + \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)(N-1) \right) + \bar{\mathcal{B}}_5(N-1), \end{aligned} \quad (5.152)$$

observe que as duas primeiras linhas da fórmula acima são semelhantes à expressão dada em (4.51), fazendo  $j = N - 1$ , e  $\bar{\mathcal{B}}_5(N-1)$  é dado em (5.147),

$$\tilde{\delta}_v(N) = \frac{1}{\Delta x} [1 + \bar{C}(N-1)] \equiv \frac{2}{\Delta x} + \tilde{\alpha}_v(N-1), \quad (5.153)$$

o qual tem expressão semelhante àquela dada em (4.52), fazendo  $j = N$ ,

$$\tilde{\theta}_v(N) = \frac{1}{\Delta x} \bar{v}mc(N-1) \left( \bar{F}_v(N-1) \cdot \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)(N) + \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)(N) \right) - \bar{\mathcal{B}}_3(N), \quad (5.154)$$

o qual é semelhante a  $2 \times \theta_v(N)$ , onde  $\theta_v(N)$  é dado em (4.53), fazendo  $j = N$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}m_v(N) \equiv \tilde{\gamma}_v(N-1) = & \bar{\mathcal{T}}_\gamma(N-1) - \frac{1}{\Delta x} (\bar{v}_{N\frac{1}{2}} - \bar{v}m(N-1)) \\ & - \frac{1}{\Delta x} \bar{v}mc(N-1) \bar{C}(N-1) + \bar{G}_v(N-1) + \bar{\mathcal{B}}_4(N-1), \end{aligned} \quad (5.155)$$

o qual tem expressão semelhante àquela dada em (4.54), fazendo  $j = N - 1$ .



**Obs 5.10.** Os vetores nos lados esquerdos de (5.150)–(5.155) não são realmente programados, pois só são usados uma vez no preenchimento do sistema linear.

5.2.7. *Discretização newtoniana da equação da pressão na produção.* Lembramos que as **variáveis de contorno** em  $x_{N-\frac{1}{2}}$  são tais que os valores das saturações são aqueles da aproximação obtida em (5.79), via o sistema de balanços.

As **variáveis de contorno** do subsistema pressão-velocidade  $v_{N-\frac{1}{2}} \equiv vmN$  e  $p_{N-\frac{1}{2}} \equiv pmN$  definidas respectivamente em (5.56) e (5.57) são incógnitas, ou seja, os valores de  $v_{N-\frac{1}{2}} \equiv vmN$  e de  $p_{N-\frac{1}{2}} \equiv pmN$  devem ser obtidos como valores aproximados, resolvendo o sistema pressão-velocidade discretizado, via Método de Newton a partir de aproximações temporárias  $\bar{v}_{N-\frac{1}{2}} \equiv \bar{v}mN$  e  $\bar{p}_{N-\frac{1}{2}} \equiv \bar{p}mN$ .

Além disto vamos denotar os valores das funções  $R(U, p)$ ,  $S(U, p)$ ,  $\frac{\partial R(U, p)}{\partial p}$  e  $\frac{\partial S(U, p)}{\partial p}$  avaliadas na aproximação  $(\bar{U}_{N-\frac{1}{2}}, \bar{p}_{N-\frac{1}{2}})$  por  $\bar{R}_{N-\frac{1}{2}}$ ,  $\bar{S}_{N-\frac{1}{2}}$ ,  $(\frac{\partial \bar{R}}{\partial p})_{N-\frac{1}{2}}$  e  $(\frac{\partial \bar{S}}{\partial p})_{N-\frac{1}{2}}$ , respectivamente.

Passemos então à discretização. Usando diferenças regressivas para aproximar  $\partial/\partial x$ , a discretização da equação da pressão (2.11) no ponto  $x_{N-\frac{1}{2}}$  fica:

$$v_{N-\frac{1}{2}}^{n+1} = \frac{2 K_{N-\frac{1}{2}}}{\Delta x} R(U^{n+1}, p^{n+1})_{N-\frac{1}{2}} (p_{N-\frac{1}{2}}^{n+1} - p_{N-1}^{n+1}) + K_{N-\frac{1}{2}} S(U^{n+1}, p^{n+1})_{N-\frac{1}{2}} \cdot \pi(U_x^{e(n+1)}). \quad (5.156)$$

Sejam  $\bar{p}_{N-1}$ ,  $\bar{v}_{N-\frac{1}{2}}$  e  $\bar{p}_{N-\frac{1}{2}}$  aproximações melhores de  $p_{N-1}^{n+1}$ , de  $v_{N-\frac{1}{2}}^{n+1}$  e de  $p_{N-\frac{1}{2}}^{n+1}$  a serem determinadas. O método de Newton aplicado à equação (5.156) fica:

$$\bar{v}_{N-\frac{1}{2}} = \frac{2 K_{N-\frac{1}{2}}}{\Delta x} R(\bar{U}, \bar{p})_{N-\frac{1}{2}} (\bar{p}_{N-\frac{1}{2}} - \bar{p}_{N-1}) + K_{N-\frac{1}{2}} S(\bar{U}, \bar{p})_{N-\frac{1}{2}} \cdot \pi(U_x^{e(n+1)}) \quad (5.157)$$

Somando e subtraindo termos convenientemente:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{v}_{N-\frac{1}{2}} + \bar{v}_{N-\frac{1}{2}} &= \frac{2 K_{N-\frac{1}{2}}}{\Delta x} \left[ \left( \frac{\partial \bar{R}}{\partial p} \right)_{N-\frac{1}{2}} \Delta \bar{p}_{N-\frac{1}{2}} + \bar{R}_{N-\frac{1}{2}} \right] \left( \Delta \bar{p}_{N-\frac{1}{2}} - \Delta \bar{p}_{N-1} + \bar{p}_{N-\frac{1}{2}} - \bar{p}_{N-1} \right) \\ &\quad + K_{N-\frac{1}{2}} \left[ \left( \frac{\partial \bar{S}}{\partial p} \right)_{N-\frac{1}{2}} \Delta \bar{p}_{N-\frac{1}{2}} + \bar{S}_{N-\frac{1}{2}} \right] \cdot \pi(U_x^{e(n+1)}). \end{aligned} \quad (5.158)$$

Ignorando termos de segunda ordem na equação (5.158), separando as incógnitas para o lado esquerdo e multiplicando tudo por  $(\Delta x/2)$ , obtemos:

$$\begin{aligned} &K_{N-\frac{1}{2}} \bar{R}_{N-\frac{1}{2}} \Delta \bar{p}_{N-1} + (\Delta x/2) \Delta \bar{v}_{N-\frac{1}{2}} - K_{N-\frac{1}{2}} \left[ \bar{R}_{N-\frac{1}{2}} + \left( \frac{\partial \bar{R}}{\partial p} \right)_{N-\frac{1}{2}} (\bar{p}_{N-\frac{1}{2}} - \bar{p}_{N-1}) \right. \\ &\quad \left. + (\Delta x/2) \left( \frac{\partial \bar{S}}{\partial p} \right)_{N-\frac{1}{2}} \cdot \pi(U_x^{e(n+1)}) \right] \Delta \bar{p}_{N-\frac{1}{2}} \\ &= K_{N-\frac{1}{2}} \bar{R}_{N-\frac{1}{2}} (\bar{p}_{N-\frac{1}{2}} - \bar{p}_{N-1}) + (\Delta x/2) K_{N-\frac{1}{2}} \bar{S}_{N-\frac{1}{2}} \cdot \pi(U_x^{e(n+1)}) - (\Delta x/2) \bar{v}_{N-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (5.159)$$

Portanto, uma equação a ser considerada na extremidade direita para determinar  $\Delta \bar{v}_{N-\frac{1}{2}} \equiv \Delta \bar{v}mN$  e  $\Delta \bar{p}_{N-\frac{1}{2}} \equiv \Delta \bar{p}mN$  é:

$$\tilde{L}_p(N-1)\Delta\bar{p}(N-1) + (\Delta x/2)\Delta\bar{v}mN + \tilde{D}_p(N)\Delta\bar{p}mN = \tilde{A}_p(N), \quad (5.160)$$

onde

$$\tilde{L}_p(N-1) = K_{N-\frac{1}{2}}\bar{R}_{N-\frac{1}{2}}, \quad (5.161)$$

$$\begin{aligned} \tilde{D}_p(N) &= -K_{N-\frac{1}{2}}\bar{R}_{N-\frac{1}{2}} \\ &\quad - K_{N-\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial\bar{R}}{\partial p}\right)_{N-\frac{1}{2}}(\bar{p}_{N-\frac{1}{2}} - \bar{p}_{N-1}) - (\Delta x/2)K_{N-\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial\bar{S}}{\partial p}\right)_{N-\frac{1}{2}} \cdot \pi(U_x^{e(n+1)}), \end{aligned} \quad (5.162)$$

$$\tilde{A}_p(N) = K_{N-\frac{1}{2}}\bar{R}_{N-\frac{1}{2}}(\bar{p}_{N-\frac{1}{2}} - \bar{p}_{N-1}) + (\Delta x/2)K_{N-\frac{1}{2}}\bar{S}_{N-\frac{1}{2}} \cdot \pi(U_x^{e(n+1)}) - (\Delta x/2)\bar{v}mN. \quad (5.163)$$

### 5.2.8. Avaliação vetorial dos coeficientes da equação de pressão na produção.

**Obs 5.11.** Dependendo da conveniência, poderemos usar as notações seguintes para as **variáveis de contorno**:  $U_{N-\frac{1}{2}} \equiv UmN$ ,  $v_{N-\frac{1}{2}} \equiv vmN$  e  $p_{N-\frac{1}{2}} \equiv pmN$ .

Considere que as **variáveis de contorno** estejam pré-calculados no tempo  $t^n$  e na aproximação “barra” para o tempo  $t^{n+1}$

Em seguida considere as extensões das funções vetoriais definidas no interior da malha, para a extremidade de produção, correspondendo a uma simples mudança de notação, onde o índice “ $N - \frac{1}{2}$ ” passará a ser o argumento “ $N$ ” das funções:

$$K_{N-\frac{1}{2}} \equiv Km(N) = K(x_{N-\frac{1}{2}}), \quad (5.164)$$

$$R_{N-\frac{1}{2}} \equiv Rm(N) = R(UmN, pmN), \quad (5.165)$$

$$S_{N-\frac{1}{2}} \equiv Sm(N) = S(UmN, pmN), \quad (5.166)$$

$$\left(\frac{\partial R}{\partial p}\right)_{N-\frac{1}{2}} \equiv \left(\frac{\partial Rm}{\partial p}\right)(N) = \left(\frac{\partial R}{\partial p}\right)(UmN, pmN), \quad (5.167)$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_{N-\frac{1}{2}} \equiv \left(\frac{\partial Sm}{\partial p}\right)(N) = \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)(UmN, pmN). \quad (5.168)$$

A partir das funções pré-calculadas em (5.164)–(5.168), estendemos as funções vetoriais definidas inicialmente no interior da malha pelas fórmulas (4.67)–(4.70), para a extremidade de produção, ou seja para o índice  $j = N$ :

$$\bar{R}cm(N) = Km(N)\bar{R}m(N), \quad (5.169)$$

$$\bar{S}cm(N) = Km(N)\bar{S}m(N), \quad (5.170)$$

$$\bar{p}cm(N) = (\bar{p}mN - \bar{p}(N-1)), \quad (5.171)$$

$$\pi cm(N) = (\Delta x/2)\pi(U_x^{e(n+1)}). \quad (5.172)$$

Com as definições (5.169)–(5.172), os coeficientes em (5.161), (5.162) e (5.163) podem ser escritos na forma vetorial como:

$$\tilde{L}_p(N-1) = \bar{R}cm(N), \quad (5.173)$$

que é semelhante à fórmula (4.71) fazendo  $j = N - 1$  e omitindo os termos com derivadas na pressão.

$$\tilde{D}_p(N) = -\bar{R}cm(N) - Km(N) \frac{\partial \bar{R}m}{\partial p}(N) \bar{p}cmN - Km(N) \frac{\partial \bar{S}m}{\partial p}(N) \cdot \pi cm(N), \quad (5.174)$$

que é semelhante à fórmula (4.72) fazendo  $j = N$ ,

$$\tilde{A}_p(N) = \bar{R}cm(N) \bar{p}cmN + \bar{S}cm(N) \cdot \pi cm(N) - (\Delta x/2) \bar{v}mN \quad (5.175)$$

que é semelhante a  $\frac{1}{2} \times A_p(N)$ , onde  $A_p(N)$  é obtido da fórmula (4.73) fazendo  $j = N$ .

**Obs 5.12.** Os vetores nos lados esquerdos de (5.173)–(5.175) não são realmente programados, pois só são usados uma vez no preenchimento do sistema linear.

5.2.9. *O sistema algébrico completo para o subsistema pressão-velocidade.* Lembramos inicialmente que de acordo com as condições de contorno dadas em (5.1)–(5.3), todas as variáveis são conhecidas na extremidade de injeção  $x_{-\frac{1}{2}}$ .

De início fazemos:

$$\Delta \bar{v}m0 = \tilde{\gamma}m_v(0), \quad (5.176)$$

$$\tilde{D}_p(0) \Delta \bar{p}(0) = \tilde{A}_p(0), \quad (5.177)$$

onde

$$\tilde{\gamma}m_v(0) = \begin{cases} v^{i(n+1)} - v^{i(n)}, & \text{na primeira iteração do método de Newton,} \\ 0, & \text{numa iteração genérica do método de Newton,} \end{cases} \quad (5.178)$$

$\tilde{D}_p(0)$  é dado em (5.118),

$\tilde{A}_p(0)$  é dado em (5.119).

Juntando a equação (5.88) obtida ao discretizarmos a equação da velocidade na extremidade de injeção, identificando  $\tilde{\gamma}_v(0)$  com  $\tilde{\gamma}m_v(1)$ , com a equação obtida em (4.58) fazendo  $j = 1$ , ao discretizarmos a equação da pressão no interior da malha e usando o valor de  $\Delta \bar{p}(0)$  acima, vemos que o par de equações abaixo fornece os valores de  $\Delta \bar{v}m(1)$  e de  $\Delta \bar{p}(1)$ :

$$\tilde{\beta}_v(0) \Delta \bar{p}(0) + \tilde{\delta}_v(1) \Delta \bar{v}m(1) + \tilde{\theta}_v(1) \Delta \bar{p}(1) = \tilde{\gamma}m_v(1), \quad (5.179)$$

$$L_p(0) \Delta \bar{p}(0) + \Delta x \Delta \bar{v}m(1) + D_p(1) \Delta \bar{p}(1) = A_p(1). \quad (5.180)$$



onde a primeira linha do primeiro bloco e o último bloco representam as **variáveis de contorno**  $v_{-\frac{1}{2}} \equiv vm0$ ,  $v_{N-\frac{1}{2}} \equiv vmN$  e  $p_{N-\frac{1}{2}} \equiv pmN$ .

Os blocos referentes à injeção ao dados por:

$$\tilde{\mathcal{D}}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{D}_p(0) \end{pmatrix}, \quad \text{proveniente do sistema (5.176)–(5.177),} \quad (5.187)$$

$$\tilde{\mathcal{A}}(0) = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}m_v(0) \\ \tilde{A}_p(0) \end{pmatrix}, \quad \text{também proveniente do sistema (5.176)–(5.177),} \quad (5.188)$$

$$\tilde{\mathcal{L}}(0) = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\beta}_v(0) \\ 0 & L_p(0) \end{pmatrix}, \quad \text{proveniente do sistema (5.179)–(5.180).} \quad (5.189)$$

$$\tilde{\mathcal{D}}(1) = \begin{pmatrix} \tilde{\delta}_v(1) & \tilde{\theta}_v(1) \\ \Delta x & D_p(1) \end{pmatrix}, \quad \text{proveniente do sistema (5.179)–(5.180),} \quad (5.190)$$

$$\tilde{\mathcal{A}}(1) = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}m_v(1) \\ A_p(1) \end{pmatrix}, \quad \text{também proveniente do sistema (5.179)–(5.180).} \quad (5.191)$$

Os blocos referentes ao interior da malha são dados por:

$$\mathcal{L}\mathcal{L}(j-2) = \begin{pmatrix} 0 & \eta_v(j-2) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{para } j = 2, 3, \dots, N-1, \quad (5.192)$$

$$\mathcal{L}(j-1) = \begin{pmatrix} \alpha_v(j-1) & \beta_v(j-1) \\ 0 & L_p(j-1) \end{pmatrix}, \quad \text{para } j = 2, 3, \dots, N-1, \quad (5.193)$$

$$\mathcal{D}(j) = \begin{pmatrix} \delta_v(j) & \theta_v(j) \\ \Delta x & D_p(j) \end{pmatrix}, \quad \text{para } j = 2, 3, \dots, N-1, \quad (5.194)$$

$$A(j) = \begin{pmatrix} \gamma m_v(j) \\ A_p(j) \end{pmatrix}, \quad \text{para } j = 2, 3, \dots, N-1. \quad (5.195)$$

Finalmente, de (5.181)–(5.182) segue que os blocos referentes à produção são dados por:

$$\widetilde{\mathcal{L}}(N-2) = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\eta}_v(N-2) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{proveniente do sistema (5.181)–(5.182),} \quad (5.196)$$

$$\widetilde{\mathcal{L}}(N-1) = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_v(N-1) & \tilde{\beta}_v(N-1) \\ 0 & \tilde{L}_p(N-1) \end{pmatrix}, \quad \text{proveniente de (5.181)–(5.182),} \quad (5.197)$$

$$\widetilde{\mathcal{D}}(N) = \begin{pmatrix} \tilde{\delta}_v(N) & \tilde{\theta}_v(N) \\ \Delta x/2 & \tilde{D}_p(N) \end{pmatrix}, \quad \text{proveniente do sistema (5.181)–(5.182),} \quad (5.198)$$

$$\widetilde{A}(N) = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}m_v(N) \\ \tilde{A}_p(N) \end{pmatrix}, \quad \text{também proveniente do sistema (5.181)–(5.182),} \quad (5.199)$$

Para o cálculo dos elementos dos blocos e vetores relativos às condições de contorno na injeção, recordamos que são tais que:

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_v(0) & \text{ é dado em (5.103),} \\ \tilde{\gamma}m_v(0) & \text{ é dado em (5.178),} \\ \tilde{\delta}_v(1) & \text{ é dado em (5.104),} \\ \tilde{\theta}_v(1) & \text{ é dado em (5.105),} \\ \tilde{\gamma}m_v(1) \equiv \tilde{\gamma}_v(0) & \text{ é dado em (5.106),} \\ \tilde{D}_p(0) & \text{ é dado em (5.118),} \\ \tilde{A}_p(0) & \text{ é dado em (5.119).} \end{aligned}$$

Para o cálculo dos elementos dos blocos e vetores relacionados aos pontos do interior da malha contorno, recordamos que são tais que:

$$\begin{aligned} \eta_v(j-2), \quad j = 2, 3, \dots, N-1, & \text{ são obtidos de (4.49),} \\ \alpha_v(j-1), \quad j = 2, 3, \dots, N-1, & \text{ são obtidos de (4.50),} \\ \beta_v(j-1), \quad j = 2, 3, \dots, N-1, & \text{ são obtidos de (4.51),} \\ \delta_v(j), \quad j = 2, 3, \dots, N-1, & \text{ são obtidos de (4.52),} \\ \theta_v(j), \quad j = 2, 3, \dots, N-1, & \text{ são obtidos de (4.53),} \\ \gamma m_v(j+1) \equiv \gamma_v(j), \quad j = 1, 2, \dots, N-2, & \text{ são obtidos de (4.54),} \\ L_p(j-1), \quad j = 1, 2, \dots, N-1, & \text{ são obtidos de (4.71),} \\ D_p(j), \quad j = 1, 2, \dots, N-1, & \text{ são obtidos de (4.72),} \\ A_p(j), \quad j = 1, 2, \dots, N-1, & \text{ são obtidos de (4.73).} \end{aligned}$$

Para o cálculo dos elementos dos blocos e vetores relativos às condições de contorno na produção, recordamos que são tais que:

$$\begin{aligned}
\tilde{\eta}_v(N-2) & \text{ é dado em (5.150),} \\
\tilde{\alpha}_v(N-1) & \text{ é dado em (5.151),} \\
\tilde{\beta}_v(N-1) & \text{ é dado em (5.152),} \\
\tilde{\delta}_v(N) & \text{ é dado em (5.153),} \\
\tilde{\theta}_v(N) & \text{ é dado em (5.154),} \\
\tilde{\gamma}m_v(N) \equiv \tilde{\gamma}_v(N-1) & \text{ é dado em (5.155),} \\
\tilde{L}_p(N-1) & \text{ é dado em (5.173),} \\
\tilde{D}_p(N) & \text{ é dado em (5.174) e} \\
\tilde{A}_p(N) & \text{ é dado em (5.175).}
\end{aligned}$$

5.2.10. *Resolução recursiva do sistema algébrico para o subsistema pressão-velocidade.* Para iniciar o processo recursivo temos que  $\Delta\bar{W}(0) \equiv (\Delta\bar{v}m_0, \Delta\bar{p}(0))^T$  é dado da seguinte forma:

$$\Delta\bar{v}m_0 = \tilde{\gamma}m_v(0), \quad \text{onde } \tilde{\gamma}m_v(0) \text{ é dado em (5.178),}$$

$$\Delta\bar{p}(0) = \frac{1}{\tilde{D}_p(0)} \tilde{A}p(0). \quad (5.200)$$

Para determinarmos  $\Delta\bar{W}(1) \equiv (\Delta\bar{v}m(1), \Delta\bar{p}(1))^T$  resolvemos o sistema (5.179)-(5.180), obtendo:

$$\Delta\bar{W}(1) = \left(\tilde{\mathcal{D}}(1)\right)^{-1} \left(\tilde{A}(1) - \tilde{\mathcal{L}}(0)\Delta\bar{W}(0)\right). \quad (5.201)$$

Para determinarmos  $\Delta\bar{W}(j) \equiv (\Delta\bar{v}m(j), \Delta\bar{p}(j))^T$ ,  $j = 2, 3, \dots, N-1$ , resolvemos o sistema obtendo:

$$\Delta\bar{W}(j) = \left(\mathcal{D}(j)\right)^{-1} \left(A(j) - \mathcal{L}(j-1)\Delta\bar{W}(j-1) - \mathcal{L}\mathcal{L}(j-2)\Delta\bar{W}(j-2)\right). \quad (5.202)$$

Para determinarmos  $\Delta\bar{W}(N) \equiv (\Delta\bar{v}mN, \Delta\bar{p}mN)^T$  resolvemos o sistema (5.181)-(5.182), obtendo:

$$\Delta\bar{W}(N) = \left(\tilde{\mathcal{D}}(N)\right)^{-1} \left(\tilde{A}(N) - \tilde{\mathcal{L}}(N-1)\Delta\bar{W}(N-1) - \tilde{\mathcal{L}}\mathcal{L}(N-2)\Delta\bar{W}(N-2)\right). \quad (5.203)$$

### 5.3. O subsistema pressão-velocidade no caso incompressível.

5.3.1. *Discretização da equação da velocidade na injeção.* Como  $v_{-\frac{1}{2}} \equiv vm0 \equiv v^i(t)$  é dado, da mesma forma que no caso compressível, no primeiro passo temos que:

$$\Delta \bar{v}m0 = \tilde{\gamma}m_v(0) \quad \text{onde,}$$

$$\tilde{\gamma}m_v(0) = \begin{cases} v^{i(n+1)} - v^{i(n)}, & \text{na primeira iteração do método de Newton,} \\ 0, & \text{numa iteração genérica do método de Newton,} \end{cases}$$

*Discretização espacial.* Repetindo o mesmo procedimento que no caso compressível, desconsiderando as derivadas em  $p$ , obtemos que a equação correspondente à equação (5.87) é dada por:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left[ \bar{F}_{v_0} \cdot \left( \bar{M}_{l_0} + \bar{M}_{l_1} - 2M_l^{i(n+1)} \right) + \bar{M}_{g_0} + \bar{M}_{g_1} - 2M_g^{i(n+1)} \right] \right\} \Delta \bar{v}m(1) \\ &= - \frac{\phi_0}{\Delta t} \left[ \pi(\bar{U}_0) \cdot \left( \bar{M}_{l_0} - M_{l_0}^n \right) + \bar{M}_{g_0} - M_{g_0}^n \right] - \frac{1}{\Delta x} \left( \bar{v}_{\frac{1}{2}} - v^{i(n+1)} \right) \\ & \quad - \frac{1}{4\Delta x} \left( v^{i(n+1)} + \bar{v}_{\frac{1}{2}} \right) \left[ \bar{F}_{v_0} \cdot \left( \bar{M}_{l_0} + \bar{M}_{l_1} - 2M_l^{i(n+1)} \right) + \bar{M}_{g_0} + \bar{M}_{g_1} - 2M_g^{i(n+1)} \right] \\ & \quad + \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ \bar{B}_{v_0} \otimes \left( \bar{M}_{l_0} + \bar{M}_{l_1} - 2M_l^{i(n+1)} \right) \right] \cdot \left( \pi(\bar{U}_0) + \pi(\bar{U}_1) - 2\pi(U^{i(n+1)}) \right) \\ & \quad + \bar{G}_{v_0}. \end{aligned} \tag{5.204}$$

Numa forma compacta a equação (5.204) escreve-se:

$$\tilde{\delta}_v(1) \Delta \bar{v}m(1) = \tilde{\gamma}m_v(1), \tag{5.205}$$

onde na forma vetorial temos que

$$\tilde{\delta}_v(1) \quad \text{é dado em (5.104),}$$

$$\tilde{\gamma}m_v(1) \equiv \tilde{\gamma}_v(0) \quad \text{é dado em (5.106).}$$

5.3.2. *Discretização da equação da pressão na injeção.* Como no caso compressível, obtemos a equação

$$\tilde{D}_p(0) \Delta \bar{p}(0) = \tilde{A}_p(0),$$

onde, na forma vetorial temos que:

$$\tilde{D}_p(0) \quad \text{é dada por (5.118),}$$

$$\tilde{A}_p(0) \quad \text{é dada por (5.119).}$$



5.3.3. *Discretização da equação da velocidade na produção.* Considerando as condições de contorno que foram dadas à direita a discretização é obtida da mesma forma que obtivemos a equação (5.132) desprezando-se os termos com derivadas em  $p$ :

$$\tilde{\alpha}_v(N-1)\Delta\bar{v}m(N-1) + \tilde{\delta}_v(N)\Delta\bar{v}mN = \tilde{\gamma}m_v(N), \quad (5.206)$$

onde na forma vetorial temos que:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_v(N-1) & \text{ é dado em (5.151),} \\ \tilde{\delta}_v(N) & \text{ é dado em (5.153),} \\ \tilde{\gamma}m_v(N) & \text{ é dado em (5.155).} \end{aligned}$$

5.3.4. *Discretização da equação da pressão na produção.* Para obter uma equação para  $\Delta\bar{p}(N - \frac{1}{2}) \equiv \Delta\bar{p}mN$  o procedimento é o mesmo da seção (5.2.7) do caso compressível.

Desta forma novamente temos a equação (5.160):

$$\tilde{L}_p(N-1)\Delta\bar{p}(N-1) + (\Delta x/2)\Delta\bar{v}mN + \tilde{D}_p(N)\Delta\bar{p}mN = \tilde{A}_p(N), \quad (5.207)$$

onde:

$$\tilde{L}_p(N-1) \text{ é dado em (5.173),}$$

$$\tilde{D}_p(N) = -\bar{R}cm(N), \quad (5.208)$$

o qual coincide com a fórmula em (5.174) eliminando os dois termos com sinal negativo possuindo derivadas em  $p$ ,

$$\tilde{A}_p(N) \text{ é dado por (5.175).}$$

5.3.5. *O sistema algébrico completo para o subsistema pressão-velocidade incompressível.* Lembramos inicialmente que de acordo com as condições de contorno dadas em (5.1)–(5.3), todas as variáveis são conhecidas na extremidade de injeção  $x_{-\frac{1}{2}}$ .

Como no caso compressível de início consideremos o sistema (5.176)–(5.177):

$$\Delta\bar{v}m0 = \tilde{\gamma}m_v(0),$$

$$\tilde{D}_p(0)\Delta\bar{p}(0) = \tilde{A}_p(0),$$

onde

$$\tilde{\gamma}m_v(0) = \begin{cases} v^{i(n+1)} - v^{i(n)}, & \text{na primeira iteração do método de Newton,} \\ 0, & \text{numa iteração genérica do método de Newton.} \end{cases}$$

Juntando a equação (5.205) obtida ao discretizarmos a equação da velocidade na extremidade de injeção com a equação obtida em (4.58) fazendo  $j = 1$ , ao discretizarmos a equação da pressão no interior da malha, obtemos o seguinte sistema:

$$\tilde{\delta}_v(1)\Delta\bar{v}m(1) = \tilde{\gamma}m_v(1), \quad (5.209)$$

$$L_p(0)\Delta\bar{p}(0) + \Delta x\Delta\bar{v}m(1) + D_p(1)\Delta\bar{p}(1) = A_p(1). \quad (5.210)$$



Os blocos referentes à injeção são dados por:

$$\tilde{\mathcal{D}}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{D}_p(0) \end{pmatrix}, \quad \text{proveniente do sistema (5.176)–(5.177),} \quad (5.218)$$

$$\tilde{\mathcal{A}}(0) = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}m_v(0) \\ \tilde{A}_p(0) \end{pmatrix}, \quad \text{também proveniente do sistema (5.176)–(5.177),} \quad (5.219)$$

$$\tilde{\mathcal{L}}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & L_p(0) \end{pmatrix}, \quad \text{proveniente do sistema (5.209)–(5.210).} \quad (5.220)$$

$$\tilde{\mathcal{D}}(1) = \begin{pmatrix} \tilde{\delta}_v(1) & 0 \\ \Delta x & D_p(1) \end{pmatrix}, \quad \text{proveniente do sistema (5.209)–(5.210),} \quad (5.221)$$

$$\tilde{\mathcal{A}}(1) = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}m_v(1) \\ A_p(1) \end{pmatrix}, \quad \text{também proveniente do sistema (5.209)–(5.210).} \quad (5.222)$$

Os blocos referentes ao interior da malha são dados por:

$$\mathcal{L}(j-1) = \begin{pmatrix} \alpha_v(j-1) & 0 \\ 0 & L_p(j-1) \end{pmatrix}, \quad \text{para } j = 2, 3, \dots, N-1, \quad (5.223)$$

$$\mathcal{D}(j) = \begin{pmatrix} \delta_v(j) & 0 \\ \Delta x & D_p(j) \end{pmatrix}, \quad \text{para } j = 2, 3, \dots, N-1, \quad (5.224)$$

$$A(j) = \begin{pmatrix} \gamma m_v(j) \\ A_p(j) \end{pmatrix}, \quad \text{para } j = 2, 3, \dots, N-1. \quad (5.225)$$

Finalmente, de (5.212)–(5.213) segue que os blocos referentes à produção são dados por:

$$\tilde{\mathcal{L}}(N-1) = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_v(N-1) & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbb{L}}_p(N-1) \end{pmatrix}, \quad (5.226)$$

$$\tilde{\mathcal{D}}(N) = \begin{pmatrix} \tilde{\delta}_v(N) & 0 \\ \Delta x/2 & \tilde{\mathbb{D}}_p(N) \end{pmatrix}, \quad (5.227)$$

$$\tilde{\mathcal{A}}(N) = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}m_v(N) \\ \tilde{\mathbb{A}}_p(N) \end{pmatrix}. \quad (5.228)$$

Para o cálculo dos elementos dos blocos e vetores relativos às condições de contorno na injeção, recordamos que são tais que:

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}m_v(0) & \text{ é dado em (5.178),} \\ \tilde{\mathbb{D}}_p(0) & \text{ é dado em (5.118),} \\ \tilde{\mathbb{A}}_p(0) & \text{ é dado em (5.119),} \\ \tilde{\delta}_v(1) & \text{ é dado em (5.104),} \\ \tilde{\gamma}m_v(1) \equiv \tilde{\gamma}_v(0) & \text{ é dado em (5.106).} \end{aligned}$$

Para o cálculo dos elementos dos blocos e vetores relacionados aos pontos do interior da malha, recordamos que são tais que:

$$\begin{aligned} \alpha_v(j-1), \quad j = 1, 2, \dots, N-1, & \text{ são obtidos de (4.50),} \\ \delta_v(j), \quad j = 2, 3, \dots, N-1, & \text{ são obtidos de (4.52),} \\ \gamma m_v(j) \equiv \gamma_v(j-1), \quad j = 2, 3, \dots, N-1, & \text{ são obtidos de (4.54),} \\ \mathbb{L}_p(j-1), \quad j = 1, 2, \dots, N-1, & \text{ são obtidos de (4.71), sem os termos com derivadas em } p, \\ \mathbb{D}_p(j), \quad j = 1, 2, \dots, N-1, & \text{ são obtidos de (4.72), sem os termos com derivadas em } p, \\ \mathbb{A}_p(j), \quad j = 1, 2, \dots, N-1, & \text{ são obtidos de (4.73).} \end{aligned}$$

Para o cálculo dos elementos dos blocos e vetores relativos às condições de contorno na produção, recordamos que são tais que:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_v(N-1) & \text{ é dado em (5.151),} \\ \tilde{\delta}_v(N) & \text{ é dado em (5.153),} \\ \tilde{\gamma}m_v(N) \equiv \tilde{\gamma}_v(N-1) & \text{ é dado em (5.155),} \\ \tilde{\mathbb{L}}_p(N-1) & \text{ é dado em (5.173),} \\ \tilde{\mathbb{D}}_p(N) & \text{ é dado em (5.208),} \\ \tilde{\mathbb{A}}_p(N) & \text{ é dado em (5.175).} \end{aligned}$$

5.4. **Inicialização do subsistema pressão-velocidade.** Retornemos à equação da velocidade estacionária (4.80):

$$\frac{\partial v}{\partial x} + v \left( F_v(U, p) \cdot \frac{\partial M_l(U, p)}{\partial x} + \frac{\partial M_g(U, p)}{\partial x} \right) = \left[ B_v(U, p) \otimes \frac{\partial M_l(U, p)}{\partial x} \right] \cdot \frac{\partial \pi(U)}{\partial x} + G_v(U, p).$$

*Primeiro passo do Método de Newton*

Faremos aqui o primeiro passo do método de Newton para a inicialização da velocidade e da pressão

5.4.1. *Discretização da equação da velocidade estacionária na injeção.* Para fazermos a discretização da equação da velocidade estacionária (4.80) no ponto  $x_{-\frac{1}{2}}$ , teremos então que avaliar as funções  $M_l$  e  $M_g$  no ponto  $x_{-\frac{1}{2}}$ , as quais são conhecidas pois todas as variáveis  $U$  e  $p$  são dadas neste ponto.

Como antes, vamos usar o *superscrito* “0” para indicar que as avaliações das funções estão se dando em  $U^0(j)$  e  $p^0(j) \equiv p^0$ . Usaremos também o *superscrito* “i” para indicar os valores das funções  $M_l$  e  $M_g$  na extremidade de injeção  $x_{-\frac{1}{2}}$ .

Vamos obter uma equação análoga à equação (5.82), sem os termos transientes

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x} (\bar{v}_{\frac{1}{2}} - v^{i(0)}) + \frac{\bar{v}_0}{\Delta x} \left( F_{v_0}^0 \cdot (M_{l_{\frac{1}{2}}}^0 - M_l^{i(0)}) + (M_{g_{\frac{1}{2}}}^0 - M_g^{i(0)}) \right) \\ &= \frac{1}{(\Delta x)^2} \left[ B_{v_0}^0 \otimes (M_{l_{\frac{1}{2}}}^0 - M_l^{i(0)}) \right] \cdot (\pi(U_{\frac{1}{2}}^0) - \pi(U^{i(0)})) + G_{v_0}^0. \end{aligned} \quad (5.229)$$

Tomando médias:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x} (\bar{v}_{\frac{1}{2}} - v^{i(0)}) + \frac{1}{4\Delta x} (v^{i(0)} + \bar{v}_{\frac{1}{2}}) \left( F_{v_0}^0 \cdot (M_{l_0}^0 + M_{l_1}^0 - 2M_l^{i(0)}) + M_{g_0}^0 + M_{g_1}^0 - 2M_g^{i(0)} \right) \\ &= \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ B_{v_0}^0 \otimes (M_{l_0}^0 + M_{l_1}^0 - 2M_l^{i(0)}) \right] \cdot (\pi(U_0^0) + \pi(U_1^0) - 2\pi(U^{i(0)})) + G_{v_0}^0. \end{aligned} \quad (5.230)$$

Fazendo a identificação  $\bar{v}_{\frac{1}{2}} \equiv \bar{v}m(1)$  e separando os termos convenientemente, obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x} \left( -1 + \frac{1}{4} F_{v_0}^0 \cdot (M_{l_0}^0 + M_{l_1}^0 - 2M_l^{i(0)}) + \frac{1}{4} (M_{g_0}^0 + M_{g_1}^0 - 2M_g^{i(0)}) \right) v^{i(0)} \\ &+ \frac{1}{\Delta x} \left( 1 + \frac{1}{4} F_{v_0}^0 \cdot (M_{l_0}^0 + M_{l_1}^0 - 2M_l^{i(0)}) + \frac{1}{4} (M_{g_0}^0 + M_{g_1}^0 - 2M_g^{i(0)}) \right) \bar{v}m(1) \\ &= \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ B_{v_0}^0 \otimes (M_{l_0}^0 + M_{l_1}^0 - 2M_l^{i(0)}) \right] \cdot (\pi(U_0^0) + \pi(U_1^0) - 2\pi(U^{i(0)})) + G_{v_0}^0. \end{aligned} \quad (5.231)$$

Identificando  $v^{i(0)}$  com  $\bar{v}m0$ , numa forma compacta a equação (5.231) pode ser escrita como:

$$\tilde{\alpha}_v^0(0) \bar{v}m0 + \tilde{\delta}_v^0(1) \bar{v}m(1) = \tilde{\gamma}m_v^0(1) \equiv \tilde{\gamma}_v^0(0), \quad (5.232)$$

onde

$$\tilde{\alpha}_v^0(0) = \frac{1}{\Delta x} \left( -1 + \frac{1}{4} F_{v_0}^0 \cdot (M_{l_0}^0 + M_{l_1}^0 - 2M_l^{i(0)}) + \frac{1}{4} (M_{g_0}^0 + M_{g_1}^0 - 2M_g^{i(0)}) \right), \quad (5.233)$$

$$\tilde{\delta}_v^0(1) = \frac{1}{\Delta x} \left( 1 + \frac{1}{4} F_{v_0}^0 \cdot (M_{l_0}^0 + M_{l_1}^0 - 2M_l^{i(0)}) + \frac{1}{4} (M_{g_0}^0 + M_{g_1}^0 - 2M_g^{i(0)}) \right), \quad (5.234)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} m_v^0(1) \equiv \tilde{\gamma}_v^0(0) &= \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ B_{v_0}^0 \otimes (M_{l_0}^0 + M_{l_1}^0 - 2M_l^{i(0)}) \right] \cdot (\pi(U_0^0) + \pi(U_1^0) - 2\pi(U^{i(0)})) \\ &+ G_{v_0}^0. \end{aligned} \quad (5.235)$$

*Avaliação vetorial dos coeficientes da inicialização da equação da velocidade na injeção.* Considerando as funções vetoriais definidas em (5.93)–(5.96) os coeficientes (5.233), (5.234) e (5.235) da equação (5.232), são escritos na forma vetorial como:

$$\tilde{\alpha}_v^0(0) = \frac{1}{\Delta x} [-1 + C^0(0)], \quad (5.236)$$

$$\tilde{\delta}_v^0(1) = \frac{1}{\Delta x} [1 + C^0(0)] \equiv \frac{2}{\Delta x} + \tilde{\alpha}_v^0(0), \quad (5.237)$$

$$\tilde{\gamma} m_v^0(1) \equiv \tilde{\gamma}_v^0(0) = \mathcal{B}_4^0(0) + G_v^0(0), \quad (5.238)$$

onde como antes, o *superscrito* “0” indica que as avaliações das funções estão se dando em  $U^0(j)$  e  $p^0(j)$ . Note a analogia das fórmulas (5.237) e (5.238) com as fórmulas em (5.104) e (5.106), respectivamente, lembrando de desprezar o termo transiente  $\bar{T}_\gamma(0)$  e os dois termos com sinal negativo em (5.106).

*5.4.2. Discretização newtoniana da equação da pressão na injeção.* A partir do valor de  $p^{i(0)} \equiv p^0$  que é dado em (5.3), vamos obter uma aproximação inicial para  $\bar{p}(x_0)$ , denotada por  $\bar{p}_0$

$$v^{i(0)} = \frac{2K_{-\frac{1}{2}}}{\Delta x} R^{i(0)} (\bar{p}_0 - p^{i(0)}) + \frac{2K_{-\frac{1}{2}}}{\Delta x} S^{i(0)} \cdot (\pi(U_0^0) - \pi(U^{i(0)})). \quad (5.239)$$

Isolando  $\bar{p}_0$  e multiplicando tudo por  $(\Delta x/2)$ , obtemos:

$$-K_{-\frac{1}{2}} R^{i(0)} \bar{p}_0 = -K_{-\frac{1}{2}} R^{i(0)} p^{i(0)} + K_{-\frac{1}{2}} S^{i(0)} \cdot (\pi(U_0^0) - \pi(U^{i(0)})) - (\Delta x/2) v^{i(0)}. \quad (5.240)$$

Identificando  $K_{-\frac{1}{2}}$  com  $Km(0)$  e  $\bar{p}_0$  com  $\bar{p}(0)$ , a equação (5.240) escreve-se numa forma compacta como:

$$\tilde{D}_p^0(0) \bar{p}(0) = \tilde{A}_p^0(0), \quad (5.241)$$

onde

$$\tilde{D}_p^0(0) = -Km(0) R^{i(0)}, \quad (5.242)$$

$$\tilde{A}_p^0(0) = -Km(0) R^{i(0)} p^{i(0)} + Km(0) S^{i(0)} \cdot (\pi(U_0^0) - \pi(U^{i(0)})) - (\Delta x/2) v^{i(0)}. \quad (5.243)$$

*Avaliação vetorial dos coeficientes da inicialização da pressão na injeção.* Vamos estender os valores das funções definidas inicialmente no interior da malha pelas fórmulas (4.67)–(4.70), para a extremidade de injeção  $x_{-\frac{1}{2}}$ , ou seja para o índice  $j = 0$ , considerando o tempo  $t_0$ :

$$Rcm^0(0) = Km(0)R^{i(0)}, \quad (5.244)$$

$$Scm^0(0) = Km(0)S^{i(0)}, \quad (5.245)$$

$$pcm^0(0) = -p^{i(0)}, \quad (5.246)$$

$$\pi cm(U^0(0)) = (\pi(U^0(0)) - \pi(U^{i(0)})). \quad (5.247)$$

Com as definições acima os coeficientes (5.242) e (5.243) podem ser escritos na forma vetorial como:

$$\tilde{D}_p^0(0) = -Rcm^0(0), \quad \text{que é análogo à (5.118)}, \quad (5.248)$$

$$\tilde{A}_p^0(0) = Rcm^0(0) pcm^0(0) + Scm^0(0) \cdot \pi cm^0(0) - (\Delta x/2) v^{i(0)}, \quad (5.249)$$

que é análogo à (5.119).

#### 5.4.3. Discretização da equação da velocidade estacionária na produção.

**Obs 5.13.** Para inicializar tanto a velocidade como a pressão na extremidade de produção é preciso antes de mais nada inicializar a **variável de contorno**  $UmN \equiv UmN$  por:

$$UmN \equiv U_{N-\frac{1}{2}}^0 = U^0(N-1) + \frac{\Delta x}{2} U_x^e(0).$$

Usando o procedimento análogo ao das Subseções (5.2.5) (caso compressível) e (5.3.3) (caso incompressível), obtemos a seguinte equação na produção:

$$\tilde{\alpha}_v^0(N-1) \bar{v}m(N-1) + \tilde{\delta}_v^0(N) \bar{v}mN = \tilde{\gamma}m_v^0(N). \quad (5.250)$$

*Avaliação vetorial dos coeficientes da inicialização da equação da velocidade na produção.* Vamos estender as definições das funções vetoriais introduzidas para  $j = 1, 2, \dots, N-2$  no interior da malha para a extremidade  $x_{N-\frac{1}{2}}$ : Para isto, fazemos as identificações:  $U_{N-\frac{1}{2}}^0 \equiv Um^0N$ ,  $M_{N-\frac{1}{2}}^0 \equiv Mm^0(N) = M(Um^0N, pm^0N)$  e  $M_{g_{N-\frac{1}{2}}}^0 \equiv M_gm^0(N) = M_g(Um^0N, pm^0N)$ .

Daí:

$$vmc^0(N-1) = \frac{1}{2} \left( vm^0(N-1) + vm^0N \right), \quad (5.251)$$

$$\pi c(U^0(N-1)) = \frac{1}{2} \left( 2\pi(Um^0N) - \pi(U^0(N-1)) - \pi(U^0(N-2)) \right), \quad (5.252)$$

$$Mc^0(N-1) = \frac{1}{2} \left( 2M^m(N) - M^0(N-1) - M^0(N-2) \right), \quad (5.253)$$

$$C^0(N-1) = \frac{1}{2} \left( F_v^0(N-1) \cdot Mc^0(N-1) + \frac{1}{2} (2M_{g_{N-\frac{1}{2}}}^0 - M_g^0(N-1) - M_g^0(N-2)) \right). \quad (5.254)$$

A fim de separar os casos de a matriz  $B_v$  ser constante ou não, vamos definir a seguinte constante:

$$\mathcal{B}_4^0(N-1) = \frac{1}{(\Delta x)^2} \left[ B_v^0(N-1) \otimes Mc^0(N-1) \right] \cdot \pi c(U^0(N-1)), \quad (5.255)$$

Com isto os coeficientes da equação (5.250) podem ser escritos como:

$$\tilde{\alpha}_v^0(N-1) = \frac{1}{\Delta x} [-1 + C^0(N-1)], \quad (5.256)$$

o qual é análogo à fórmula (5.151),

$$\tilde{\delta}_v^0(N) = \frac{1}{\Delta x} [1 + C^0(N-1)] \equiv \frac{2}{\Delta x} + \tilde{\alpha}_v^0(N-1), \quad (5.257)$$

o qual é análogo à fórmula (5.153),

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}m_v^0(N) &= -\frac{1}{\Delta x} (vm^0N - vm^0(N-1)) - \frac{1}{\Delta x} vmc^0(N-1) C^0(N-1) \\ &+ G_v^0(N-1) + \mathcal{B}_4^0(N-1), \end{aligned} \quad (5.258)$$

o qual é análogo à fórmula (5.155) sem o termo transiente  $\bar{\mathcal{T}}_\gamma(N-1)$ .

**5.4.4. Discretização newtoniana da equação da pressão na produção.** Para obter o valor da **variável de contorno**  $\bar{p}_{N-\frac{1}{2}} \equiv \bar{p}mN$  faremos a discretização da equação da pressão por diferenças regressivas no ponto  $x_{N-\frac{1}{2}}$ :

$$\bar{v}_{N-\frac{1}{2}} = \frac{2K_{N-\frac{1}{2}}}{\Delta x} R_{N-\frac{1}{2}}^0 (\bar{p}_{N-\frac{1}{2}} - \bar{p}_{N-1}) + K_{N-\frac{1}{2}} S_{N-\frac{1}{2}}^0 \cdot \pi(U_x^{e(0)}). \quad (5.259)$$

Multiplicando por  $(\Delta x/2)$  e escrevendo convenientemente obtemos a equação:



$$K_{N-\frac{1}{2}} R_{N-\frac{1}{2}}^0 \bar{p}_{N-1} + (\Delta x/2) \bar{v}_{N-\frac{1}{2}} - K_{N-\frac{1}{2}} R_{N-\frac{1}{2}}^0 \bar{p}_{N-\frac{1}{2}} = (\Delta x/2) K_{N-\frac{1}{2}} S_{N-\frac{1}{2}}^0 \cdot \pi(U_x^{e(0)}). \quad (5.260)$$

Identificando  $\bar{p}_{N-1}$  com  $\bar{p}(N-1)$ ,  $\bar{p}_{N-\frac{1}{2}}$  com  $\bar{p}mN$  e  $\bar{v}_{N-\frac{1}{2}}$  com  $\bar{v}mN$ , escrevemos a equação (5.260) numa forma compacta como:

$$\tilde{L}_p^0(N-1) \bar{p}(N-1) + (\Delta x/2) \bar{v}mN + \tilde{D}_p^0(N) \bar{p}mN = \tilde{A}_p^0(N), \quad (5.261)$$

onde:

$$\tilde{L}_p^0(N-1) = K_{N-\frac{1}{2}} R_{N-\frac{1}{2}}^0, \quad (5.262)$$

$$\tilde{D}_p^0(N) = -K_{N-\frac{1}{2}} R_{N-\frac{1}{2}}^0 \equiv -\tilde{L}_p^0(N-1), \quad (5.263)$$

$$\tilde{A}_p^0(N) = (\Delta x/2) K_{N-\frac{1}{2}} S_{N-\frac{1}{2}}^0 \cdot \pi(U_x^{e(0)}). \quad (5.264)$$

*Avaliação vetorial dos coeficientes da equação de pressão na produção.* Consideremos as extensões das funções vetoriais definidas no interior da malha, para a extremidade de produção, correspondendo a uma simples mudança de notação, onde o índice “ $N - \frac{1}{2}$ ” passará a ser o argumento “ $N$ ” das funções:

$$K_{N-\frac{1}{2}} \equiv Km(N) = K(x_{N-\frac{1}{2}}), \quad (5.265)$$

$$R_{N-\frac{1}{2}}^0 \equiv Rm^0(N) = R(Um^0N, pm^0N), \quad (5.266)$$

$$S_{N-\frac{1}{2}}^0 \equiv Sm^0(N) = S(Um^0N, pm^0N). \quad (5.267)$$

Estendemos as funções vetoriais definidas inicialmente no interior da malha pelas fórmulas (4.101)–(4.104), para a extremidade de produção, ou seja para o índice  $j = N$ :

$$Rcm^0(N) = Km(N) Rm^0(N), \quad (5.268)$$

$$Scm^0(N) = Km(N) Sm^0(N), \quad (5.269)$$

$$\pi cm(U^0N) = (\Delta x/2) \pi(U_x^{e(0)}). \quad (5.270)$$

Com as definições das funções (5.268)–(5.270) os coeficientes (5.262)–(5.264) podem ser escritos na forma vetorial como:

$$\tilde{L}_p^0(N-1) = Rcm^0(N) \quad (5.271)$$

$$\tilde{D}_p^0(N) = -Rcm^0(N) \equiv -\tilde{L}_p^0(N-1) \quad (5.272)$$

$$\tilde{A}_p^0(N) = Scm^0(N) \cdot \pi cm(U^0N), \quad (5.273)$$

onde o superscrito “0” significa que as avaliações das funções estão sendo realizadas nos vetores  $U^0(j)$  e  $p^0(j) \equiv p^0$ .



$$\bar{W}(0) = \begin{pmatrix} \bar{v}m0 \\ \bar{p}(0) \end{pmatrix}, \quad (5.281)$$

$$\bar{W}(j) = \begin{pmatrix} \bar{v}m(j) \\ \bar{p}(j) \end{pmatrix}, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, N-1, \quad (5.282)$$

$$\bar{W}(N) = \begin{pmatrix} \bar{v}mN \\ \bar{p}mN \end{pmatrix}, \quad (5.283)$$

onde a primeira linha do primeiro bloco e este último bloco representam as aproximações iniciais das **variáveis de contorno**  $v_{-\frac{1}{2}} \equiv vm0$ ,  $v_{N-\frac{1}{2}} \equiv vmN$  e  $p_{N-\frac{1}{2}} \equiv pmN$ .

Os blocos referentes à injeção ao dados por:

$$\tilde{\mathcal{D}}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D_p^0(0) \end{pmatrix}, \quad \text{proveniente do sistema (5.274), (5.241),} \quad (5.284)$$

$$\tilde{\mathcal{A}}(0) = \begin{pmatrix} v^i(0) \\ \tilde{A}_p^0(0) \end{pmatrix}, \quad \text{também proveniente do sistema (5.274), (5.241),} \quad (5.285)$$

$$\tilde{\mathcal{L}}(0) = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_v^0(0) & 0 \\ 0 & L_p^0(0) \end{pmatrix}, \quad \text{proveniente do sistema (5.275)–(5.276),} \quad (5.286)$$

$$\tilde{\mathcal{D}}(1) = \begin{pmatrix} \tilde{\delta}_v^0(1) & 0 \\ \Delta x & D_p^0(1) \end{pmatrix}, \quad \text{proveniente do sistema (5.275)–(5.276),} \quad (5.287)$$

$$\tilde{\mathcal{A}}(1) = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}m_v^0(1) \\ A_p(1) \end{pmatrix}, \quad \text{também proveniente do sistema (5.275)–(5.276),} \quad (5.288)$$

Os blocos referentes ao interior da malha são dados por:

$$\mathcal{L}(j-1) = \begin{pmatrix} \alpha_v^0(j-1) & 0 \\ 0 & L_p^0(j-1) \end{pmatrix}, \quad \text{para } j = 2, 3, \dots, N-1, \quad (5.289)$$

$$\mathcal{D}(j) = \begin{pmatrix} \delta_v^0(j) & 0 \\ \Delta x & D_p^0(j) \end{pmatrix}, \quad \text{para } j = 2, 3, \dots, N-1, \quad (5.290)$$

$$A(j) = \begin{pmatrix} \gamma m_v^0(j) \\ A_p^0(j) \end{pmatrix} \quad \text{para } j = 2, 3, \dots, N-1. \quad (5.291)$$

Finalmente, de (5.278)–(5.279) segue que os blocos referentes à produção são dados por:

$$\tilde{\mathcal{L}}(N-1) = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_v^0(N-1) & 0 \\ 0 & \tilde{L}_p^0(N-1) \end{pmatrix}, \quad (5.292)$$

$$\tilde{\mathcal{D}}(N) = \begin{pmatrix} \tilde{\delta}_v^0(N) & 0 \\ \Delta x/2 & \tilde{D}_p^0(N) \end{pmatrix}, \quad (5.293)$$

$$\tilde{A}(N) = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma} m_v^0(N) \\ \tilde{A}_p^0(N) \end{pmatrix}. \quad (5.294)$$

Para o cálculo dos elementos dos blocos e vetores relativos às condições de contorno na injeção, recordamos que são tais que:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_v^0(0) & \text{ é dado em (5.236),} \\ \tilde{\delta}_v^0(1) & \text{ é dado em (5.237),} \\ \tilde{\gamma} m_v^0(1) \equiv \tilde{\gamma}_v^0(0) & \text{ é dado em (5.238),} \\ \tilde{D}_p^0(0) & \text{ é dado em (5.248),} \\ \tilde{A}_p^0(0) & \text{ é dado em (5.249).} \end{aligned}$$

Para o cálculo dos elementos dos blocos e vetores relacionados aos pontos do interior da malha contorno, recordamos que são tais que:

$$\begin{aligned} \alpha_v^0(j-1), \quad j = 2, 3, \dots, N-1, \quad &\text{são obtidos de (4.91),} \\ \delta_v^0(j), \quad j = 2, 3, \dots, N-1, \quad &\text{são obtidos de (4.92),} \\ \gamma m_v^0(j) \equiv \gamma_v^0(j-1), \quad j = 2, 3, \dots, N-1, \quad &\text{são obtidos de (4.93),} \\ L_p^0(j-1), \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad &\text{são obtidos de (4.105),} \\ D_p^0(j), \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad &\text{são obtidos de (4.106),} \\ A_p^0(j), \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad &\text{são obtidos de (4.107).} \end{aligned}$$

Para o cálculo dos elementos dos blocos e vetores relativos às condições de contorno na produção, recordamos que são tais que:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_v^0(N-1) \quad &\text{é dado em (5.256),} \\ \tilde{\delta}_v^0(N) \quad &\text{é dado em (5.257),} \\ \tilde{\gamma} m_v^0(N) \equiv \tilde{\gamma}_v^0(N-1) \quad &\text{é dado em (5.258),} \\ \tilde{L}_p^0(N-1) \quad &\text{é dado em (5.271),} \\ \tilde{D}_p^0(N) \quad &\text{é dado em (5.272) e} \\ \tilde{A}_p^0(N) \quad &\text{é dado em (5.273).} \end{aligned}$$

*Iteração genérica do método de Newton na inicialização do subsistema pressão-velocidade.* Uma vez obtidas as primeiras  $(k-1)$  aproximações  $\bar{v}m(j)$  e  $\bar{p}(j)$  para os valores iniciais de  $vm(j)$  e de  $p(j)$ , podemos prosseguir o método de Newton para encontrarmos aproximações melhores  $\bar{v}m(j)$  e  $\bar{p}(j)$  de  $vm^0(j)$  e de  $p^0(j)$ , correspondentes à  $k$ -ésima iteração.

O procedimento aqui é análogo ao da Subseção (5.2). Para ser mais explícito vamos escrever os análogos das Subseções (5.2.1)–(5.2.9), quando das discretizações das equações da velocidade e da pressão, no caso compressível, nas extremidades.

Temos apenas que lembrar que

$$\begin{aligned} \bar{U}_j = U(x_j, 0), \quad j = 0, 1, \dots, N-1, \\ (\bar{v}m(j), \bar{p}(j)), \quad j = 0, 1, \dots, N-1, \quad &\text{são obtidos ao resolver o sistema (5.280).} \\ (\bar{v}mN, \bar{p}mN), \quad &\text{são obtidos ao resolver o sistema (5.280).} \end{aligned}$$

*Discretização da equação da velocidade estacionária na injeção.* De início temos que

$$\Delta \bar{v}m0 = \tilde{\gamma} m_v(0) = 0. \quad (5.295)$$

O análogo da equação (5.88) na forma compacta é:

$$\tilde{\beta}_v(0) \Delta \bar{p}(0) + \tilde{\delta}_v(1) \Delta \bar{v}m(1) + \tilde{\theta}_v(1) \Delta \bar{p}(1) = \tilde{\gamma} m_v(1). \quad (5.296)$$

Para obter os coeficientes da equação (5.296) procedemos similarmente à Subseção (5.2.1), estendendo para a extremidade  $x_{-\frac{1}{2}}$ , correspondendo ao índice  $j = 0$ , os valores das funções vetoriais definidas inicialmente para o interior da malha em (4.38)–(4.41).

$$vmc(0) = \frac{1}{2} \left( v^{i(0)} + vm(1) \right), \quad (5.297)$$

$$\pi c(U(0)) = \frac{1}{2} \left( \pi(U(0)) + \pi(U(1)) - 2\pi(U^{i(0)}) \right), \quad (5.298)$$

$$Mc(0) = \frac{1}{2} \left( M_l(0) + M_l(1) - 2M_l^{i(0)} \right), \quad (5.299)$$

$$C(0) = \frac{1}{2} \left( F_v(0) \cdot Mc(0) + \frac{1}{2} (M_g(0) + M_g(1) - 2M_g^{i(0)}) \right). \quad (5.300)$$

A fim de separar os casos de a matriz  $B_v$  ser constante ou não, vamos definir as seguintes constantes:

$$\mathcal{B}_3(0) = \frac{1}{(2\Delta x)^2} \left[ B_v(0) \otimes \left( \frac{\partial M_l}{\partial p} \right)(1) \right] \cdot \pi c(U(0)), \quad (5.301)$$

$$\mathcal{B}_4(0) = \frac{1}{(\Delta x)^2} \left[ B_v(0) \otimes \bar{M}c(0) \right] \cdot \pi c(U(0)), \quad (5.302)$$

$$\mathcal{B}_5(0) = \frac{1}{2(\Delta x)^2} \left[ B_v(0) \otimes \left( \frac{\partial M_l}{\partial p} \right)(0) \right] \cdot \pi c(U(0)). \quad (5.303)$$

Com as definições dos vetores acima os coeficientes da equação (5.296) podem ser escritos na forma vetorial como:

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_v(0) = & - \left( \frac{\partial \bar{G}_v}{\partial p} \right)(0) + \frac{1}{\Delta x} \bar{v}mc(0) \left( \frac{\partial \bar{F}_v}{\partial p} \right)(0) \cdot \bar{M}c(0) - \bar{\mathcal{B}}_2(0) \\ & + \frac{1}{2\Delta x} \bar{v}mc(0) \left( \bar{F}_v(0) \cdot \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)(0) + \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)(0) \right) - \bar{\mathcal{B}}_5(0). \end{aligned} \quad (5.304)$$

Note que a primeira linha acima é semelhante à  $\beta_v(0)$  da fórmula (4.112) com  $j = 0$ .

Note a analogia entre a  $\tilde{\beta}_v(0)$  daqui e  $\tilde{\beta}_v(0)$  dado em (5.103).

$$\tilde{\delta}_v(1) = \frac{1}{\Delta x} [1 + \bar{C}(0)], \quad (5.305)$$

o qual tem expressão semelhante àquela dada em (5.104),

$$\tilde{\theta}_v(1) = \frac{1}{2\Delta x} \bar{v}m c(0) \left( \bar{F}_v(0) \cdot \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right) (1) + \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right) (1) \right) - \bar{B}_3(0), \quad (5.306)$$

o qual tem expressão semelhante àquela dada em (5.105),

$$\tilde{\gamma}m_v(1) = -\frac{1}{\Delta x} (\bar{v}m(1) - v^{i(0)}) - \frac{1}{\Delta x} \bar{v}m c(0) \bar{C}(0) + \bar{G}_v(0) + \bar{B}_4(0), \quad (5.307)$$

o qual tem expressão semelhante àquela dada em (5.106)

eliminado-se o termo transiente  $\tilde{T}_\gamma(0)$ .

*Discretização newtoniana da equação da pressão na injeção.* Da mesma forma que no caso compressível, considerando a a discretização da equação da pressão (2.11) no ponto  $x_{-\frac{1}{2}}$ , obtemos o análogo da fórmula (5.111) na forma compacta:

$$\tilde{D}_p(0) \Delta \bar{p}(0) = \tilde{A}_p(0). \quad (5.308)$$

Também de maneira análoga às fórmulas (5.114)–(5.117), definimos:

$$Rcm(0) = Km(0)R^{i(0)}, \quad (5.309)$$

$$Scm(0) = Km(0)S^{i(0)}, \quad (5.310)$$

$$pcm(0) = (p(0) - p^{i(0)}), \quad (5.311)$$

$$\pi cm(U(0)) = (\pi(U(0)) - \pi(U^{i(0)})). \quad (5.312)$$

Com as definições acima os coeficientes da equação (5.308) podem ser escritos na forma vetorial como:

$$\tilde{D}_p(0) = -\bar{R}cm(0), \quad (5.313)$$

a qual tem expressão semelhante àquela dada em (5.118).

$$\tilde{A}_p(0) = \bar{R}cm(0) \bar{p}cm(0) + \bar{S}cm(0) \cdot \bar{\pi}cm(0) - (\Delta x/2) v^{i(0)} \quad (5.314)$$

a qual é semelhante à (5.119), trocando  $v^{i(n+1)}$  por  $v^{i(0)}$ .

*Discretização da equação da velocidade estacionária na produção.* Da mesma forma que nas Subsecções (5.2.5)–(5.2.6), a discretização da equação da velocidade na produção só envolve as **variáveis de contorno**  $\bar{U}_{N-\frac{1}{2}} \equiv \bar{U}mN$ ,  $\bar{v}_{N-\frac{1}{2}} \equiv \bar{v}mN$  e  $\bar{p}_{N-\frac{1}{2}} \equiv \bar{p}mN$  definidas em (5.55), (5.56) e (5.57), respectivamente. .

O análogo da equação (5.132) é:

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_v(N-2) \Delta \bar{p}(N-2) + \tilde{\alpha}_v(N-1) \Delta \bar{v}m(N-1) + \tilde{\beta}_v(N-1) \Delta \bar{p}(N-1) \\ + \tilde{\delta}_v(N) \Delta \bar{v}mN + \tilde{\theta}_v(N) \Delta \bar{p}mN = \tilde{\gamma}m_v(N), \end{aligned} \quad (5.315)$$

Quanto aos coeficientes da equação (5.315) na forma vetorial:

$\tilde{\eta}_v(N-2)$  é dado em (5.150),

$\tilde{\alpha}_v(N-1)$  é dado em (5.151),

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_v(N-1) = & -\left(\frac{\partial \bar{G}_v}{\partial p}\right)(N-1) + \frac{1}{\Delta x} \bar{v}mc(N-1) \left(\frac{\partial \bar{F}_v}{\partial p}\right)(N-1) \cdot \bar{M}c(N-1) - \bar{\mathcal{B}}_2(N-1) \\ & - \frac{1}{2\Delta x} \bar{v}mc(N-1) \left(\bar{F}_v(N-1) \cdot \left(\frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p}\right)(N-1) + \left(\frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p}\right)(N-1)\right) + \bar{\mathcal{B}}_5(N-1), \end{aligned} \quad (5.316)$$

que é análogo a fórmula (5.152), eliminando-se o termo transiente  $\bar{\mathcal{T}}_\beta(N-1)$  de  $\beta_v(N-1)$  obtido de (4.51), fazendo  $j = N-1$ ,

$\tilde{\delta}_v(N)$  é dado em (5.153),

$\tilde{\theta}_v(N)$  é dado em (5.154),

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_{m_v}(N) = & -\frac{1}{\Delta x} (\bar{v}mN - \bar{v}m(N-1)) - \frac{1}{\Delta x} \bar{v}mc(N-1) \bar{C}(N-1) \\ & + \bar{G}_v(N-1) + \bar{\mathcal{B}}_4(N-1), \end{aligned} \quad (5.317)$$

o qual tem a mesma expressão dada em (5.155), eliminado-se o termo transiente  $\bar{\mathcal{T}}_\gamma(N-1)$ .

*Discretização da equação da equação da pressão na produção.* O procedimento aqui é o mesmo da Subseções (5.2.7)–(5.2.8) obtendo a equação análoga de (5.160):

$$\tilde{\mathcal{L}}_p(N-1)\Delta\bar{p}(N-1) + (\Delta x/2)\Delta\bar{v}mN + \tilde{\mathcal{D}}_p(N)\Delta\bar{p}mN = \tilde{\mathcal{A}}_p(N). \quad (5.318)$$

Quanto aos coeficientes da equação (5.318) na forma vetorial:

$$\tilde{\mathcal{L}}_p(N-1) \text{ é dado em (5.173),}$$

$$\tilde{\mathcal{D}}_p(N) \text{ é dado em (5.174),}$$

$$\tilde{\mathcal{A}}_p(N) \text{ é dado em (5.175).}$$





Para o cálculo dos elementos dos blocos relacionados com a injeção, recordamos que eles são tais que:

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_v(0) & \text{ é dado em (5.304),} \\ \tilde{\gamma}m_v(0) = 0 & \text{ é dado em (5.295),} \\ \tilde{\delta}_v(1) & \text{ é dado em (5.305),} \\ \tilde{\theta}_v(1) & \text{ é dado em (5.306),} \\ \tilde{\gamma}m_v(1) \equiv \tilde{\gamma}_v(0) & \text{ é dado em (5.307),} \\ \tilde{D}_p(0) & \text{ é dado em (5.313),} \\ \tilde{A}_p(0) & \text{ é dado em (5.314).}\end{aligned}$$

Para o cálculo dos elementos dos blocos e vetores relacionados aos pontos do interior da malha contorno, recordamos que são tais que:

$$\begin{aligned}\eta_v(j-2), \quad j = 2, 3, \dots, N-1, & \text{ são obtidos de (4.49),} \\ \alpha_v(j-1), \quad j = 1, 2, \dots, N-1, & \text{ são obtidos de (4.50),} \\ \beta_v(j-1), \quad j = 2, 3, \dots, N-1, & \text{ são obtidos de (4.112),} \\ \delta_v(j), \quad j = 2, 3, \dots, N-1, & \text{ são obtidos de (4.52),} \\ \theta_v(j), \quad j = 2, 3, \dots, N-1, & \text{ são obtidos de (4.53),} \\ \gamma m_v(j) \equiv \gamma_v(j-1), \quad j = 2, 3, \dots, N-1, & \text{ são obtidos de (4.113),} \\ L_p(j-1), \quad j = 1, 2, \dots, N-1, & \text{ são obtidos de (4.71),} \\ D_p(j), \quad j = 1, 2, \dots, N-1, & \text{ são obtidos de (4.72),} \\ A_p(j), \quad j = 1, 2, \dots, N-1, & \text{ são obtidos de (4.73).}\end{aligned}$$

Para o cálculo dos elementos dos blocos e vetores relativos às condições de contorno na produção, recordamos que:

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}_v(N-2) & \text{ é dado em (5.150),} \\ \tilde{\alpha}_v(N-1) & \text{ é dado em (5.151),} \\ \tilde{\beta}_v(N-1) & \text{ é dado em (5.316),} \\ \tilde{\delta}_v(N) & \text{ é dado em (5.153),} \\ \tilde{\theta}_v(N) & \text{ é dado em (5.154),} \\ \tilde{\gamma}m_v(N) \equiv \tilde{\gamma}_v(N-1) & \text{ é dado em (5.317),} \\ \tilde{L}_p(N-1) & \text{ é dado em (5.173),} \\ \tilde{D}_p(N) & \text{ é dado em (5.174) e} \\ \tilde{A}_p(N) & \text{ é dado em (5.175).}\end{aligned}$$

## 6. CONDIÇÕES DE CONTORNO: INJEÇÃO: FLUXO NAS SATURAÇÕES, VELOCIDADE E PRESSÃO ESPECIFICADAS;

## PRODUÇÃO: NEUMANN NAS SATURAÇÕES.

Vamos recordar o significado do fluxo na extremidade de injeção. Admitindo que a pressão seja conhecida no ponto de injeção, de modo que as densidades do água, óleo e gás também sejam conhecidas, as equações (1.1)–(1.3) prestam-se naturalmente para especificar a razão entre as taxas de injeção (volumétrica) de água, óleo e gás.

O fluxos volumétricos por unidade de área de água, óleo e gás são  $v_w$ ,  $v_o$  e  $v_g$ , respectivamente.

O fluxo volumétrico total do fluido injetado é  $v = v_w + v_o + v_g$ .

Os fluxos fracionários volumétricos de água, óleo e gás são respectivamente

$$Q_w = \frac{v_w}{v}, \quad Q_o = \frac{v_o}{v}, \quad Q_g = \frac{v_g}{v}, \quad (6.1)$$

respectivamente.

Reescrevamos as equações (1.1)–(1.3) em termos dos fluxos fracionários volumétricos como:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi \rho_w s_w) = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho_w v Q_w), \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi \rho_o s_o) = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho_o v Q_o), \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi \rho_g s_g) = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho_g v Q_g). \quad (6.4)$$

Reescrevamos agora as Eqs. (1.22)–(1.24) como

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi \rho_w s_w) = -\frac{\partial}{\partial x} \left( v \rho_w f_w - \rho_w B_{11} \frac{\partial s_w}{\partial x} - \rho_w B_{12} \frac{\partial s_o}{\partial x} \right), \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi \rho_o s_o) = -\frac{\partial}{\partial x} \left( v \rho_o f_o - \rho_o B_{21} \frac{\partial s_w}{\partial x} - \rho_o B_{22} \frac{\partial s_o}{\partial x} \right), \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_g (\phi s_g)) = -\frac{\partial}{\partial x} \left( v \rho_g f_g + \rho_g (B_{11} + B_{21}) \frac{\partial s_w}{\partial x} + \rho_g (B_{12} + B_{22}) \frac{\partial s_o}{\partial x} \right). \quad (6.7)$$

Comparando as equações (6.2)–(6.4) respectivamente com as equações (6.5)–(6.7) obtemos

$$\left( v f_w - B_{11} \frac{\partial s_w}{\partial x} - B_{12} \frac{\partial s_o}{\partial x} \right) = v Q_w, \quad (6.8)$$

$$\left( v f_o - B_{21} \frac{\partial s_w}{\partial x} - B_{22} \frac{\partial s_o}{\partial x} \right) = v Q_o, \quad (6.9)$$

$$\left( v f_g + (B_{11} + B_{21}) \frac{\partial s_w}{\partial x} + (B_{12} + B_{22}) \frac{\partial s_o}{\partial x} \right) = v Q_g. \quad (6.10)$$

Escolhemos as equações (6.8)–(6.9), as quais correspondem ao subsistema de balanços, e as escrevamos segundo a notação vetorial como:

$$v F_U - B_U \frac{\partial U}{\partial x} = v Q_U, \quad (6.11)$$

onde  $F_U(U, p)$  e  $B_U(U, p)$  já foram introduzidos na Subseção (2.1) e

$$Q_U(U, p) = \begin{pmatrix} Q_w(U, p) \\ Q_o(U, p) \end{pmatrix}. \quad (6.12)$$

Com isto, concluímos que o seguinte conjunto de condições de contorno de injeção é plausível:

$$v_{-\frac{1}{2}} = v^i(t) \quad \text{dado}, \quad (6.13)$$

$$p_{-\frac{1}{2}} = p^i(t) \quad \text{dado}, \quad (6.14)$$

$$Q_{U_{-\frac{1}{2}}} = Q_U^i(t) \quad \text{dado}. \quad (6.15)$$

Na extremidade de produção as condições de contorno são as mesmas da Seção 5, Eq. (5.4), que repetimos aqui:

$$\left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_{N-\frac{1}{2}} = U_x^e(t).$$

## 6.1. O subsistema de balanços.

6.1.1. *Discretização do subsistema de balanços na injeção.* Começamos com a Eq. (2.7).

Faremos primeiro a discretização espacial na extremidade de injeção do sistema (2.7), o qual reescrevemos a seguir:

$$\frac{\partial}{\partial t} H_U(U, p) + \frac{\partial}{\partial x} \left( v F_U(U, p) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( B_U(U, p) \frac{\partial U}{\partial x} \right) + G_U(U, p),$$

Discretizando no ponto  $x_0$  as derivadas espaciais fora dos parênteses, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} H_U(U, p)_0 + \frac{1}{\Delta x} \left\{ \left( v F_U(U, p) \right)_{\frac{1}{2}} - \left( v F_U(U, p) \right)_{-\frac{1}{2}} \right\} \\ = \frac{1}{\Delta x} \left\{ \left( B_U(U, p) \frac{\partial U}{\partial x} \right)_{\frac{1}{2}} - \left( B_U(U, p) \frac{\partial U}{\partial x} \right)_{-\frac{1}{2}} \right\} + G_U(U, p)_0. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Usando a equação (6.11) para o fluxo na extremidade de injeção e a notação com superescrito “ $i$ ” para indicar avaliações nesta extremidade, obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} H_U(U, p)_0 + \frac{1}{\Delta x} \left( v F_U(U, p) \right)_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta x} \left( B_U(U, p) \frac{\partial U}{\partial x} \right)_{\frac{1}{2}} + G_U(U, p)_0 + \frac{v^i}{\Delta x} Q_U^i. \quad (6.17)$$

Utilizando médias espaciais obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} H_U(U, p)_0 + \frac{v_{\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \left\{ \left( F_U(U, p) \right)_0 + \left( F_U(U, p) \right)_1 \right\} \\ = \frac{1}{\Delta x} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( B_U(U, p) \right)_0 + \left( B_U(U, p) \right)_1 \right] \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_{\frac{1}{2}} \right\} + G_U(U, p)_0 + \frac{v^i}{\Delta x} Q_U^i. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Discretizando a derivada espacial remanescente obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} H_U(U, p)_0 + \frac{v_{\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \left\{ \left( F_U(U, p) \right)_0 + \left( F_U(U, p) \right)_1 \right\} \\ &= \frac{1}{2(\Delta x)^2} \left\{ \left[ \left( B_U(U, p) \right)_0 + \left( B_U(U, p) \right)_1 \right] (U_1 - U_0) \right\} + G_U(U, p)_0 + \frac{v^i}{\Delta x} Q_U^i. \end{aligned} \quad (6.19)$$

A discretização temporal de (6.19) é:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \left( H_U(U, p)_0^{n+1} - H_U(U, p)_0^n \right) + \frac{1}{2\Delta x} \left\{ \left( \epsilon v_{\frac{1}{2}}^{n+1} F_U(U, p)_0^{n+1} + \epsilon' v_{\frac{1}{2}}^n F_U(U, p)_0^n \right) \right. \\ & \left. + \left( \epsilon v_{\frac{1}{2}}^{n+1} F_U(U, p)_1^{n+1} + \epsilon' v_{\frac{1}{2}}^n F_U(U, p)_1^n \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2(\Delta x)^2} \left\{ \epsilon \left( B_U(U, p)_0^{n+1} + B_U(U, p)_1^{n+1} \right) \left( U_1^{n+1} - U_0^{n+1} \right) \right. \\ & \left. + \epsilon' \left( B_U(U, p)_0^n + B_U(U, p)_1^n \right) \left( U_1^n - U_0^n \right) \right\} \\ & + \left( \epsilon G_U(U, p)_0^{n+1} + \epsilon' G_U(U, p)_0^n \right) + \frac{1}{\Delta x} \left( \epsilon v^{i(n+1)} Q_U^{i(n+1)} + \epsilon' v^{i(n)} Q_U^{i(n)} \right). \end{aligned} \quad (6.20)$$

*Método de Newton para fluxo especificado na injeção*

Usaremos o método não linear de Euler/Crank-Nicolson. Suponhamos conhecida a aproximação  $(U^n, p^n, v^n)$ . Seja  $(\bar{U}, \bar{p}, \bar{v})$  uma aproximação temporária de  $(U^{n+1}, p^{n+1}, v^{n+1})$ , e  $(\bar{\bar{U}}, \bar{\bar{p}}, \bar{\bar{v}})$  uma nova aproximação a ser determinada de  $(U^{n+1}, p^{n+1}, v^{n+1})$ .

Usaremos a notação  $H_{\bar{U}}^n = H_U(U^n, p^n)$ ,  $F_{\bar{U}}^n = F_U(U^n, p^n)$ ,  $B_{\bar{U}}^n = B_U(U^n, p^n)$  e  $G_{\bar{U}}^n = G_U(U^n, p^n)$ .

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \left( H_U(\bar{\bar{U}}, \bar{\bar{p}})_0 - H_{\bar{U}_0}^n \right) + \frac{1}{2\Delta x} \left\{ \left( \epsilon \bar{v}_{\frac{1}{2}} F_U(\bar{\bar{U}}, \bar{\bar{p}})_0 + \epsilon' v_{\frac{1}{2}}^n F_{\bar{U}_0}^n \right) + \left( \epsilon \bar{v}_{\frac{1}{2}} F_U(\bar{\bar{U}}, \bar{\bar{p}})_1 + \epsilon' v_{\frac{1}{2}}^n F_{\bar{U}_1}^n \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2(\Delta x)^2} \left\{ \epsilon \left( B_U(\bar{\bar{U}}, \bar{\bar{p}})_0 + B_U(\bar{\bar{U}}, \bar{\bar{p}})_1 \right) (\bar{\bar{U}}_1 - \bar{\bar{U}}_0) + \epsilon' \left( B_{\bar{U}_0}^n + B_{\bar{U}_1}^n \right) (U_1^n - U_0^n) \right\} \\ & + \epsilon G_U(\bar{\bar{U}}, \bar{\bar{p}})_0 + \epsilon' G_{\bar{U}_0}^n + \frac{1}{\Delta x} \left( \epsilon v^{i(n+1)} Q_U^{i(n+1)} + \epsilon' v^{i(n)} Q_U^{i(n)} \right). \end{aligned} \quad (6.21)$$

Somando e subtraindo termos convenientes:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} \left( H_U(\bar{\bar{U}}, \bar{p})_0 - H_U(\bar{U}, \bar{p})_0 + H_U(\bar{U}, \bar{p})_0 - H_{U_0}^n \right) \\
& + \frac{1}{2\Delta x} \left\{ \left( \epsilon \bar{v}_{\frac{1}{2}} (F_U(\bar{\bar{U}}, \bar{p})_0 - F_U(\bar{U}, \bar{p})_0 + F_U(\bar{U}, \bar{p})_0) + \epsilon' v_{\frac{1}{2}}^n F_{U_0}^n \right) \right. \\
& \left. + \left( \epsilon \bar{v}_{\frac{1}{2}} (F_U(\bar{\bar{U}}, \bar{p})_1 - F_U(\bar{U}, \bar{p})_1 + F_U(\bar{U}, \bar{p})_1) + \epsilon' v_{\frac{1}{2}}^n F_{U_1}^n \right) \right\} \\
& = \frac{1}{2(\Delta x)^2} \left\{ \epsilon \left( B_U(\bar{\bar{U}}, \bar{p})_0 - B_U(\bar{U}, \bar{p})_0 + B_U(\bar{U}, \bar{p})_0 + B_U(\bar{\bar{U}}, \bar{p})_1 - B_U(\bar{U}, \bar{p})_1 + B_U(\bar{U}, \bar{p})_1 \right) \right. \\
& \left( (\bar{\bar{U}}_1 - \bar{U}_1 + \bar{U}_1) - (\bar{\bar{U}}_0 - \bar{U}_0 + \bar{U}_0) \right) + \epsilon' \left( B_{U_0}^n + B_{U_1}^n \right) (U_1^n - U_0^n) \left. \right\} \\
& + \epsilon (G_U(\bar{\bar{U}}, \bar{p})_0 + G_U(\bar{U}, \bar{p})_0 - G_U(\bar{U}, \bar{p})_0) + \epsilon' G_{U_0}^n \\
& + \frac{1}{\Delta x} \left( \epsilon v^{i(n+1)} Q_U^{i(n+1)} + \epsilon' v^{i(n)} Q_U^{i(n)} \right). \tag{6.22}
\end{aligned}$$

Substituindo  $\bar{\bar{U}} - \bar{U} = \Delta \bar{\bar{U}}$ , obtemos a seguinte equação:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{\partial \bar{H}_U}{\partial U} \right)_0 \Delta \bar{\bar{U}}_0 + \frac{1}{\Delta t} \left( \bar{H}_{U_0} - H_{U_0}^n \right) \\
& + \frac{1}{2\Delta x} \left\{ \epsilon \bar{v}_{\frac{1}{2}} \left( \frac{\partial \bar{F}_U}{\partial U} \right)_0 \Delta \bar{\bar{U}}_0 + \epsilon \bar{v}_{\frac{1}{2}} \bar{F}_{U_0} + \epsilon' v_{\frac{1}{2}}^n F_{U_0}^n + \epsilon \bar{v}_{\frac{1}{2}} \left( \frac{\partial \bar{F}_U}{\partial U} \right)_1 \Delta \bar{\bar{U}}_1 + \epsilon \bar{v}_{\frac{1}{2}} \bar{F}_{U_1} + \epsilon' v_{\frac{1}{2}}^n F_{U_1}^n \right\} \\
& = \frac{1}{2(\Delta x)^2} \left\{ \epsilon \left[ \left( \frac{\partial \bar{B}_U}{\partial U} \right)_0 \circ \Delta \bar{\bar{U}}_0 + \left( \frac{\partial \bar{B}_U}{\partial U} \right)_1 \circ \Delta \bar{\bar{U}}_1 + \bar{B}_{U_0} + \bar{B}_{U_1} \right] \left( (\Delta \bar{\bar{U}}_1 - \Delta \bar{\bar{U}}_0) + (\bar{U}_1 - \bar{U}_0) \right) \right. \\
& \left. + \epsilon' \left( B_{U_0}^n + B_{U_1}^n \right) (U_1^n - U_0^n) \right\} + \epsilon \left( \frac{\partial \bar{G}_U}{\partial U} \right)_0 \Delta \bar{\bar{U}}_0 + \epsilon \bar{G}_{U_0} + \epsilon' G_{U_0}^n \\
& + \frac{1}{\Delta x} \left( \epsilon v^{i(n+1)} Q_U^{i(n+1)} + \epsilon' v^{i(n)} Q_U^{i(n)} \right). \tag{6.23}
\end{aligned}$$

Negligenciando termos de segunda ordem  $O(\Delta^2)$ :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{\partial \bar{H}_U}{\partial U} \right)_0 \Delta \bar{U}_0 + \frac{1}{\Delta t} \left( \bar{H}_{U_0} - H_{U_0}^n \right) + \frac{\epsilon \bar{v}_{\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \left[ \left( \frac{\partial \bar{F}_U}{\partial U} \right)_0 \Delta \bar{U}_0 + \left( \frac{\partial \bar{F}_U}{\partial U} \right)_1 \Delta \bar{U}_1 \right] \\
& + \frac{1}{2\Delta x} \left[ \epsilon \bar{v}_{\frac{1}{2}} (\bar{F}_{U_0} + \bar{F}_{U_1}) + \epsilon' v_{\frac{1}{2}}^n (F_{U_0}^n + F_{U_1}^n) \right] \\
& = \frac{1}{2(\Delta x)^2} \left\{ \epsilon \left[ \left( \frac{\partial \bar{B}_U}{\partial U} \right)_0 \circ \Delta \bar{U}_0 + \left( \frac{\partial \bar{B}_U}{\partial U} \right)_1 \circ \Delta \bar{U}_1 \right] (\bar{U}_1 - \bar{U}_0) \right. \\
& + \left. \left( \bar{B}_{U_0} + \bar{B}_{U_1} \right) (\Delta \bar{U}_1 - \Delta \bar{U}_0) + \left( \bar{B}_{U_0} + \bar{B}_{U_1} \right) (\bar{U}_1 - \bar{U}_0) \right] \\
& + \epsilon' \left( B_{U_0}^n + B_{U_1}^n \right) (U_1^n - U_0^n) \left. \right\} + \epsilon \left( \frac{\partial \bar{G}_U}{\partial U} \right)_0 \Delta \bar{U}_0 + \epsilon \bar{G}_{U_0} + \epsilon' G_{U_0}^n \\
& + \frac{1}{\Delta x} \left( \epsilon v^{i(n+1)} Q_U^{i(n+1)} + \epsilon' v^{i(n)} Q_U^{i(n)} \right). \tag{6.24}
\end{aligned}$$

Usando as propriedades dos operadores  $\circ$  e  $\otimes$ , colocando apenas os termos em  $\Delta \bar{U}_0$  ou  $\Delta \bar{U}_1$  à esquerda, e multiplicando tudo por  $\Delta t$ , obtemos:

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\partial \bar{H}_U}{\partial U} \right)_0 \Delta \bar{U}_0 + \frac{\epsilon \Delta t \bar{v}_{\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \left( \frac{\partial \bar{F}_U}{\partial U} \right)_0 \Delta \bar{U}_0 + \frac{\epsilon \Delta t \bar{v}_{\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \left( \frac{\partial \bar{F}_U}{\partial U} \right)_1 \Delta \bar{U}_1 \\
& - \frac{\epsilon \Delta t}{2(\Delta x)^2} \left( \frac{\partial \bar{B}_U}{\partial U} \right)_0 \otimes (\bar{U}_1 - \bar{U}_0) \Delta \bar{U}_0 - \frac{\epsilon \Delta t}{2(\Delta x)^2} \left( \frac{\partial \bar{B}_U}{\partial U} \right)_1 \otimes (\bar{U}_1 - \bar{U}_0) \Delta \bar{U}_1 \\
& - \frac{\epsilon \Delta t}{2(\Delta x)^2} \left( \bar{B}_{U_0} + \bar{B}_{U_1} \right) (\Delta \bar{U}_1 - \Delta \bar{U}_0) - \epsilon \Delta t \left( \frac{\partial \bar{G}_U}{\partial U} \right)_0 \Delta \bar{U}_0 \\
& = - \left( \bar{H}_{U_0} - H_{U_0}^n \right) + \frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2} \left\{ \epsilon \left( \bar{B}_{U_0} + \bar{B}_{U_1} \right) (\bar{U}_1 - \bar{U}_0) + \epsilon' \left( B_{U_0}^n + B_{U_1}^n \right) (U_1^n - U_0^n) \right\} \\
& + \Delta t (\epsilon \bar{G}_{U_0} + \epsilon' G_{U_0}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[ \epsilon \bar{v}_{\frac{1}{2}} (\bar{F}_{U_0} + \bar{F}_{U_1}) + \epsilon' v_{\frac{1}{2}}^n (F_{U_0}^n + F_{U_1}^n) \right] \\
& + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\epsilon v^{i(n+1)} Q_U^{i(n+1)} + \epsilon' v^{i(n)} Q_U^{i(n)}). \tag{6.25}
\end{aligned}$$

Reordenando os termos convenientemente e colocando  $\Delta \bar{U}_0$  e  $\Delta \bar{U}_1$  em evidência, obtemos:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left( \frac{\partial \bar{H}_U}{\partial U} \right)_0 - \epsilon \Delta t \left( \frac{\partial \bar{G}_U}{\partial U} \right)_0 + \frac{\epsilon \Delta t \bar{v}_{\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \left( \frac{\partial \bar{F}_U}{\partial U} \right)_0 + \frac{\epsilon \Delta t}{2(\Delta x)^2} \left( \bar{B}_{U_0} + \bar{B}_{U_1} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{\epsilon \Delta t}{2(\Delta x)^2} \left( \frac{\partial \bar{B}_U}{\partial U} \right)_0 \otimes (\bar{U}_1 - \bar{U}_0) \right\} \Delta \bar{U}_0 \\
& + \left\{ \frac{\epsilon \Delta t \bar{v}_{\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \left( \frac{\partial \bar{F}_U}{\partial U} \right)_1 - \frac{\epsilon \Delta t}{2(\Delta x)^2} \left( \bar{B}_{U_0} + \bar{B}_{U_1} \right) - \frac{\epsilon \Delta t}{2(\Delta x)^2} \left( \frac{\partial \bar{B}_U}{\partial U} \right)_1 \otimes (\bar{U}_1 - \bar{U}_0) \right\} \Delta \bar{U}_1 \\
& = \Delta t (\epsilon \bar{G}_{U_0} + \epsilon' G_{U_0}^n) - \left( \bar{H}_{U_0} - H_{U_0}^n \right) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[ \epsilon \bar{v}_{\frac{1}{2}} (\bar{F}_{U_0} + \bar{F}_{U_1}) + \epsilon' v_{\frac{1}{2}}^n (F_{U_0}^n + F_{U_1}^n) \right] \\
& + \frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2} \left[ \epsilon (\bar{B}_{U_0} + \bar{B}_{U_1}) (\bar{U}_1 - \bar{U}_0) + \epsilon' (B_{U_0}^n + B_{U_1}^n) (U_1^n - U_0^n) \right] \\
& + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\epsilon v^{i(n+1)} Q_U^{i(n+1)} + \epsilon' v^{i(n)} Q_U^{i(n)}). \tag{6.26}
\end{aligned}$$

Como  $Q_U^{i(n)}$  e  $Q_U^{i(n+1)}$  são conhecidos, todos os termos do lado direito da Eq. (6.26) no processo iterativo de Newton são conhecidos, e a Eq. (6.26) pode ser escrita como:

$$\tilde{\mathcal{D}}(0) \Delta \bar{U}_0 + \mathcal{U}(1) \Delta \bar{U}_1 = \tilde{\mathcal{A}}(0), \quad \text{onde} \tag{6.27}$$

$$\tilde{\mathcal{D}}(0) = \mathcal{D}_c(0) + \mathcal{D}r(1), \tag{6.28}$$

onde  $\mathcal{D}_c(0)$  e  $\mathcal{D}r(1)$  são dados pelas fórmulas (4.10), (4.11) fazendo  $j = 0$ .

Note que diferentemente da fórmula (5.32), temos aqui que  $\mathcal{D}_l m(0) = 0$ .

$\mathcal{U}(1)$  é obtido da fórmula (4.12), fazendo  $j = 0$ ,

$$\tilde{\mathcal{A}}(0) = \tilde{\mathcal{A}}_l m(0) + A_c(0) + \tilde{\mathcal{A}}_r(1), \tag{6.29}$$

onde  $A_c(0)$  é obtido da fórmula (4.15), fazendo  $j = 0$  e

$$\tilde{\mathcal{A}}_l m(0) = \frac{\Delta t}{\Delta x} (\epsilon v^{i(n+1)} Q_U^{i(n+1)} + \epsilon' v^{i(n)} Q_U^{i(n)}), \tag{6.30}$$

$$\tilde{\mathcal{A}}_r(1) = \frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2} \left[ \epsilon (\bar{B}_{U_0} + \bar{B}_{U_1}) (\bar{U}_1 - \bar{U}_0) + \epsilon' (B_{U_0}^n + B_{U_1}^n) (U_1^n - U_0^n) \right]. \tag{6.31}$$

6.1.2. *Discretização do subsistema de balanços na produção.* Esta discretização é precisamente a mesma do caso da Seção (5.1.2), a qual repetiremos aqui apenas a equação final na forma compacta.

$$\mathcal{L}(N-2) \Delta \bar{U}(N-2) + \tilde{\mathcal{D}}(N-1) \Delta \bar{U}(N-1) = \tilde{\mathcal{A}}(N-1). \tag{6.32}$$





6.1.4. *Aproximação para a variável de contorno*  $U_{-\frac{1}{2}} \equiv Um0$ . Para fazer as aproximações do sistema pressão-velocidade na extremidade de injeção é necessário conhecer a aproximação da **variável de contorno**  $\bar{U}_{-\frac{1}{2}} \equiv Um0$ , introduzida em (5.21). No entanto a resolução do sistema (6.33) não permite obtê-la. Sendo assim, vamos usar a condição de contorno de fluxo injetado dada em (6.15) e a solução  $\Delta\bar{U}_0$  obtida do sistema (6.33), para encontrar a aproximação  $\Delta\bar{U}_{-\frac{1}{2}}$  e conseqüentemente  $\bar{U}_{-\frac{1}{2}}$ .

Usando as condições de contorno em  $x_{-\frac{1}{2}}$  dadas em (6.13), (6.14) e (6.15), a equação (6.11) fica:

$$v^i F_U(U_{-\frac{1}{2}}, p^i) - B_U(U_{-\frac{1}{2}}, p^i) \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_{-\frac{1}{2}} = v^i Q_U^i. \quad (6.35)$$

#### *Discretização espacial*

Usaremos diferenças progressivas para aproximar  $(\partial U / \partial x)_{-1/2}$  obtendo:

$$v^i F_U(U_{-\frac{1}{2}}, p^i) - B_U(U_{-\frac{1}{2}}, p^i) \frac{2}{\Delta x} (U_0 - U_{-\frac{1}{2}}) = v^i Q_U^i. \quad (6.36)$$

#### *Discretização temporal*

Sejam  $\epsilon$  e  $\epsilon'$  tais que  $\epsilon + \epsilon' = 1$ .

$$\begin{aligned} & \epsilon v^{i(n+1)} F_U(U_{-\frac{1}{2}}^{n+1}, p^{i(n+1)}) + \epsilon' v^{i(n)} F_U(U_{-\frac{1}{2}}^n, p^{i(n)}) \\ & - \epsilon B_U(U_{-\frac{1}{2}}^{n+1}, p^{i(n+1)}) \frac{2}{\Delta x} (U_0^{n+1} - U_{-\frac{1}{2}}^{n+1}) - \epsilon' B_U(U_{-\frac{1}{2}}^n, p^{i(n)}) \frac{2}{\Delta x} (U_0^n - U_{-\frac{1}{2}}^n) \\ & = \epsilon v^{i(n+1)} Q_U^{i(n+1)} + \epsilon' v^{i(n)} Q_U^{i(n)}. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Seja  $\Delta\bar{U}(0)$  obtido da solução do sistema (6.33) e  $\bar{U}_0 \equiv \bar{U}(0) = \bar{U}(0) + \Delta\bar{U}(0)$ .

Sejam  $\bar{U}_{-\frac{1}{2}}$  uma aproximação temporária, e  $\bar{\bar{U}}_{-\frac{1}{2}}$  uma aproximação a ser determinada de  $U_{-\frac{1}{2}}^{n+1}$ .

Substituindo  $\bar{\bar{U}}_{-\frac{1}{2}}$  e  $\bar{U}_0$  na equação (6.37):

$$\begin{aligned} & \epsilon v^{i(n+1)} F_U(\bar{\bar{U}}_{-\frac{1}{2}}, p^{i(n+1)}) + \epsilon' v^{i(n)} F_U(U_{-\frac{1}{2}}^n, p^{i(n)}) \\ & - \frac{2\epsilon}{\Delta x} B_U(\bar{\bar{U}}_{-\frac{1}{2}}, p^{i(n+1)}) (\bar{U}_0 - U_{-\frac{1}{2}}^{n+1}) - \frac{2\epsilon'}{\Delta x} B_U(U_{-\frac{1}{2}}^n, p^{i(n)}) (U_0^n - U_{-\frac{1}{2}}^n) \\ & = \epsilon v^{i(n+1)} Q_U^{i(n+1)} + \epsilon' v^{i(n)} Q_U^{i(n)}. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Linearizando a equação (6.38) em torno de  $\bar{U}_{-\frac{1}{2}}$  e substituindo  $\bar{\bar{U}}_{-\frac{1}{2}} - \bar{U}_{-\frac{1}{2}} = \Delta\bar{\bar{U}}_{-\frac{1}{2}}$ :

$$\begin{aligned} & \epsilon v^{i(n+1)} \frac{\partial F_U}{\partial U}(\bar{U}_{-\frac{1}{2}}, p^{i(n+1)}) \Delta\bar{\bar{U}}_{-\frac{1}{2}} + \epsilon v^{i(n+1)} F_U(\bar{U}_{-\frac{1}{2}}, p^{i(n+1)}) + \epsilon' v^{i(n)} F_U(U_{-\frac{1}{2}}^n, p^{i(n)}) \\ & - \left[ \frac{2\epsilon}{\Delta x} \frac{\partial B_U}{\partial U}(\bar{U}_{-\frac{1}{2}}, p^{i(n+1)}) \circ \Delta\bar{\bar{U}}_{-\frac{1}{2}} + \frac{2\epsilon}{\Delta x} B_U(\bar{U}_{-\frac{1}{2}}, p^{i(n+1)}) \right] (\bar{U}_0 - \Delta\bar{\bar{U}}_{-\frac{1}{2}} - \bar{U}_{-\frac{1}{2}}) \\ & = \frac{2\epsilon'}{\Delta x} B_U(U_{-\frac{1}{2}}^n, p^{i(n)}) (U_0^n - U_{-\frac{1}{2}}^n) + \epsilon v^{i(n+1)} Q_U^{i(n+1)} + \epsilon' v^{i(n)} Q_U^{i(n)}. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Omitindo termos de segunda ordem, usando as propriedades dos operadores  $\circ$  e  $\otimes$ , e colocando em evidência, obtemos:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \epsilon v^{i(n+1)} \frac{\partial F_U}{\partial U} (\bar{U}_{-\frac{1}{2}}, p^{i(n+1)}) + \frac{2\epsilon}{\Delta x} B_U (\bar{U}_{-\frac{1}{2}}, p^{i(n+1)}) \right. \\
& \quad \left. - \frac{2\epsilon}{\Delta x} \frac{\partial B_U}{\partial U} (\bar{U}_{-\frac{1}{2}}, p^{i(n+1)}) \otimes (\bar{U}_0 - \bar{U}_{-\frac{1}{2}}) \right\} \Delta \bar{U}_{-\frac{1}{2}} \\
& = -\epsilon v^{i(n+1)} F_U (\bar{U}_{-\frac{1}{2}}, p^{i(n+1)}) - \epsilon' v^{i(n)} F_U (U_{-\frac{1}{2}}^n, p^{i(n)}) \\
& + \frac{2\epsilon}{\Delta x} B_U (\bar{U}_{-\frac{1}{2}}, p^{i(n+1)}) (\bar{U}_0 - \bar{U}_{-\frac{1}{2}}) + \frac{2\epsilon'}{\Delta x} B_U (U_{-\frac{1}{2}}^n, p^{i(n)}) (U_0^n - U_{-\frac{1}{2}}^n) \\
& + \epsilon v^{i(n+1)} Q_U^{i(n+1)} + \epsilon' v^{i(n)} Q_U^{i(n)}. \tag{6.40}
\end{aligned}$$

Identificando  $U_{-\frac{1}{2}}$  com  $Um_0$  e  $U_0$  com  $U(0)$ , a equação (6.40) pode ser escrita numa forma compacta como:

$$\tilde{\mathcal{D}}m(0) \Delta \bar{U}m_0 = \tilde{A}m(0). \tag{6.41}$$

Portanto o valor da aproximação da **variável de contorno**  $\bar{U}m_0$ , introduzida em (5.21), é dada por

$$\bar{U}m_0 = \bar{U}m_0 + \Delta \bar{U}m_0, \tag{6.42}$$

onde,

$$\Delta \bar{U}m_0 = \left( \tilde{\mathcal{D}}m(0) \right)^{-1} \tilde{A}m(0). \tag{6.43}$$

Nas equações (6.41) e (6.43) os coeficientes são dados por:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{D}}m(0) & = \epsilon v^{i(n+1)} \frac{\partial F_U}{\partial U} (\bar{U}m_0, p^{i(n+1)}) + \frac{2\epsilon}{\Delta x} B_U (\bar{U}m_0, p^{i(n+1)}) \\
& \quad - \frac{2\epsilon}{\Delta x} \frac{\partial B_U}{\partial U} (\bar{U}m_0, p^{i(n+1)}) \otimes (\bar{U}(0) - \bar{U}m_0), \tag{6.44}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{A}m(0) & = -\epsilon v^{i(n+1)} F_U (\bar{U}m_0, p^{i(n+1)}) - \epsilon' v^{i(n)} F_U (U^n m_0, p^{i(n)}) \\
& + \frac{2\epsilon}{\Delta x} B_U (\bar{U}m_0, p^{i(n+1)}) (\bar{U}(0) - \bar{U}m_0) + \frac{2\epsilon'}{\Delta x} B_U (U^n m_0, p^{i(n)}) (U_0^n - U^n m_0) \\
& + \epsilon v^{i(n+1)} Q_U^{i(n+1)} + \epsilon' v^{i(n)} Q_U^{i(n)}. \tag{6.45}
\end{aligned}$$

INICIO NOVA 24/09/03

## 6.2. Inicialização do subsistem de balanços.

6.2.1. *Inicialização na extremidade de injeção.* Para fazer as inicializações do sistema pressão-velocidade na extremidade de injeção é necessário conhecer a aproximação da quantidade  $U(x_{-\frac{1}{2}}, 0)$  de tal forma a ser compatível com a condição de fluxo dada em (6.15).

Usando as condições de contorno em  $x_{-\frac{1}{2}}$  dadas em (6.13), (6.14) e (6.15), a equação (6.11) fica:

$$v^{i(0)} F_U(U_{-\frac{1}{2}}^0, p^{i(0)}) - B_U(U_{-\frac{1}{2}}^0, p^{i(0)}) \left( \frac{\partial U^0}{\partial x} \right)_{-\frac{1}{2}} = v^{i(0)} Q_U^{i(0)}, \quad (6.46)$$

onde o “superscrito 0” significa que as avaliações estão sendo feitas no nível de tempo  $t^0 = 0$ .

### Discretização espacial

Usaremos diferenças progressivas para aproximar  $(\partial U^0 / \partial x)_{-1/2}$  obtendo:

$$v^{i(0)} F_U(U_{-\frac{1}{2}}^0, p^{i(0)}) - B_U(U_{-\frac{1}{2}}^0, p^{i(0)}) \frac{2}{\Delta x} (U_0^0 - U_{-\frac{1}{2}}^0) = v^{i(0)} Q_U^{i(0)}. \quad (6.47)$$

Seja  $\bar{U}_{-\frac{1}{2}}$  uma aproximação temporária de  $U_{-\frac{1}{2}}^0$ . Seja  $\bar{\bar{U}}_{-\frac{1}{2}}$  uma aproximação melhor de  $U_{-\frac{1}{2}}^0$  a ser determinada.

Linearizando a equação (6.47) em torno de  $\bar{U}_{-\frac{1}{2}}$  e substituindo  $\bar{\bar{U}}_{-\frac{1}{2}} - \bar{U}_{-\frac{1}{2}} = \Delta \bar{\bar{U}}_{-\frac{1}{2}}$ :

$$\begin{aligned} & v^{i(0)} F_U(U_{-\frac{1}{2}}^0, p^{i(0)}) + v^{i(0)} \frac{\partial F_U}{\partial U}(\bar{U}_{-\frac{1}{2}}, p^{i(0)}) \Delta(\bar{\bar{U}}_{-\frac{1}{2}}) \\ & - \left[ \frac{2}{\Delta x} \frac{\partial B_U}{\partial U}(\bar{U}_{-\frac{1}{2}}, p^{i(0)}) \circ \Delta \bar{\bar{U}}_{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{\Delta x} B_U(\bar{U}_{-\frac{1}{2}}, p^{i(0)}) \right] (U_0^0 - \Delta \bar{\bar{U}}_{-\frac{1}{2}} - \bar{U}_{-\frac{1}{2}}) \\ & = v^{i(0)} Q_U^{i(0)}. \end{aligned} \quad (6.48)$$

Omitindo termos de segunda ordem, usando as propriedades dos operadores  $\circ$  e  $\otimes$ , e colocando em evidência, obtemos:

$$\begin{aligned} & \left\{ v^{i(0)} \frac{\partial F_U}{\partial U}(\bar{U}_{-\frac{1}{2}}, p^{i(0)}) + \frac{2}{\Delta x} B_U(\bar{U}_{-\frac{1}{2}}, p^{i(0)}) \right. \\ & \quad \left. - \frac{2}{\Delta x} \frac{\partial B_U}{\partial U}(\bar{U}_{-\frac{1}{2}}, p^{i(0)}) \otimes (U_0^0 - \bar{U}_{-\frac{1}{2}}) \right\} \Delta \bar{\bar{U}}_{-\frac{1}{2}} \\ & = - \left( v^{i(0)} F_U(\bar{U}_{-\frac{1}{2}}, p^{i(0)}) - \frac{2}{\Delta x} B_U(\bar{U}_{-\frac{1}{2}}, p^{i(0)}) (U_0^0 - \bar{U}_{-\frac{1}{2}}) + v^{i(0)} Q_U^{i(0)} \right). \end{aligned} \quad (6.49)$$

A equação (6.49) pode ser escrita numa forma compacta como:

$$\tilde{\mathcal{D}}^0 m(0) \Delta \bar{\bar{U}}_{-\frac{1}{2}} = \tilde{A}^0 m(0). \quad (6.50)$$

Assim como em (5.21), (5.22) e (5.23), introduziremos a seguinte notação para as **variáveis de contorno** na extremidade de injeção:

$$U^0 m0 \equiv U_{-\frac{1}{2}}^0, \quad (6.51)$$

$$v^0 m0 \equiv v_{-\frac{1}{2}}^0, \quad (6.52)$$

$$p^0 m0 \equiv p_{-\frac{1}{2}}^0, \quad (6.53)$$

$$Q_U^0 m0 \equiv Q_{U_{-\frac{1}{2}}}^0. \quad (6.54)$$

Observe que devido as condições de contorno (6.13), (6.14) e (6.15), no tempo  $t^0$  as **variáveis de contorno** recebem os valores:

$$v^0 m0 \leftarrow v^{i(0)}, \quad (6.55)$$

$$p^0 m0 \leftarrow p^{i(0)}, \quad (6.56)$$

$$Q_U^0 m0 \leftarrow Q_U^{i(0)}, \quad (6.57)$$

enquanto a **variável de contorno**  $U^0 m0$  recebe momentaneamente o valor da aproximação anterior  $\bar{U} m0 \equiv \bar{U}_{-\frac{1}{2}}$ .

Desta forma uma melhor aproximação do valor da inicialização da **variável de contorno**  $U^0 m0 \equiv U(x_{-\frac{1}{2}}, 0)$  é dada por

$$U^0 m0 = \bar{U} m0 + \Delta \bar{\bar{U}} m0, \quad (6.58)$$

onde,

$$\Delta \bar{\bar{U}} m0 = \left( \tilde{\mathcal{D}}^0 m0 \right)^{-1} \tilde{A}^0 m0. \quad (6.59)$$

Nas equações (6.50) e (6.59) os coeficientes são dados por:

$$\tilde{\mathcal{D}} m0 = v^0 m0 \frac{\partial F_U}{\partial U}(\bar{U} m0, p^0 m0) + \frac{2}{\Delta x} B_U(\bar{U} m0, p^0 m0) - \frac{\partial B_U}{\partial U}(\bar{U} m0, p^0 m0) \otimes (U^0(0) - \bar{U} m0), \quad (6.60)$$

$$\tilde{A} m0 = v^0 m0 Q_U^0 m0 - \left( v^0 m0 F_U(\bar{U} m0, p^0 m0) - \frac{2}{\Delta x} B_U(\bar{U} m0, p^0 m0) (U^0(0) - \bar{U} m0) \right), \quad (6.61)$$

onde  $U^0(0) \equiv U(x_0, 0)$ .

**6.2.2. Inicialização na extremidade de produção.** Da mesma forma que na injeção, para representar o valor de  $U(x_{N-\frac{1}{2}}, 0)$  introduzimos a **variável de contorno**

$$U^0 mN \equiv U_{N-\frac{1}{2}}^0, \quad (6.62)$$

a qual é inicializada usando diretamente a condição de contorno de Neumann (7.3):

$$U^0 mN = U^0(N-1) + \frac{\Delta x}{2} U_x^{e(0)}, \quad (6.63)$$

onde  $U^0(N-1) = U(x_{N-1}, 0)$  e  $U_x^{e(0)} = U_x^e(0)$ .

**6.3. O subsistema pressão-velocidade.** Lembramos que as **variáveis de contorno**  $vm0$  e  $pm0$ , introduzidas em (6.52) e (6.53), são dadas em (6.55) e em (6.56), respectivamente.

Quanto à condição de contorno de fluxo injetado (6.15), congelamos a aproximação  $\bar{U}m0 \equiv \bar{\bar{U}}m0$  de  $U_{-\frac{1}{2}}^{n+1}$  obtida das equações (6.42) e (6.43).

Com isto todas as funções  $M_l(U, p)$ ,  $M_g(U, p)$ ,  $R(U, p)$  e  $S(U, p)$  podem ser avaliadas na extremidade de injeção e, como indicado no início desta Seção, usaremos o superscrito “ $i$ ” para indicar estas avaliações.

Desta forma as discretizações das equações do sistema pressão-velocidade se tornam exatamente as mesmas feitas na Seção (5.2), mais especificamente nas Subseções (5.2.1), (5.2.3), (5.2.5) e (5.2.7) e o sistema algébrico a ser resolvido pelo Evolve é o mesmo dado em (5.183), onde os blocos de incógnitas estão definidos em (5.185)–(5.186) e cujos blocos da matriz dos coeficientes são obtidos pelas fórmulas (5.187)–(5.199).

**6.4. O subsistema pressão-velocidade no caso incompressível.** Devido à condição de contorno de fluxo injetado (6.15), como na Subseção (6.3) usaremos a aproximação  $\bar{U}m0$  para  $U_{-\frac{1}{2}}^{n+1}$  obtida das equações (6.42) e (6.43).

Com esta identificação o sistema algébrico para o sistema pressão-velocidade no caso incompressível é exatamente o mesmo dado em (5.214), cujos blocos são dados nas equações (5.218)–(5.228).

**6.5. Inicialização do subsistema pressão-velocidade. TO DO: Rever esta Subsecao, pois  $U(x_{-\frac{1}{2}}, 0)$  não é dado, como é afirmado a seguir.**

Neste caso usamos que  $U(x_{-\frac{1}{2}}, 0)$  faz parte da condição inicial e fazemos a identificação

$$U^{i(0)} = U(x_{-\frac{1}{2}}, 0). \quad (6.64)$$

Desta forma, de maneira idêntica à Subseção (5.4) obtemos:

*Primeira iteração do Método de Newton.* O sistema é o mesmo dado em (5.280), cujos blocos são dados em (5.282)–(5.294).

*Iteração genérica  $k > 1$  do Método de Newton.* O sistema é o mesmo dado em (5.319), cujos blocos são dados em (5.187)–(5.199), lembrando que as aproximações “barra” são dadas pelas condições iniciais  $U(x_{-\frac{1}{2}}, 0)$ ,  $U(x_j, 0)$ ,  $U(x_{N-\frac{1}{2}}, 0)$  e pelas aproximações  $(\bar{v}m(j), \bar{p}(j))$ ,  $(\bar{v}mN, \bar{p}mN)$  obtidas na primeira iteração do método de Newton ao resolver o sistema (5.280).

## 7. CONDIÇÕES DE CONTORNO:

INJEÇÃO: SATURAÇÕES E PRESSÃO ESPECIFICADAS;

PRODUÇÃO: NEUMANN NAS SATURAÇÕES E PRESSÃO ESPECIFICADA;

Consideremos as seguintes condições de contorno na extremidade de injeção:

$$U_{-\frac{1}{2}} = U^i(t), \quad (7.1)$$

$$p_{-\frac{1}{2}} = p^i(t), \quad (7.2)$$

acompanhadas pelas seguintes condições de contorno na extremidade de produção:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{N-\frac{1}{2}} = U_x^e(t), \quad (7.3)$$

$$p_{N-\frac{1}{2}} = p^e(t). \quad (7.4)$$

**Obs 7.1.** O caso mais interessante é a condição de Neumann homogênea, em que  $U_x^e(t) = 0$ .

Para calcular os valores das diversas funções nas extremidades de injeção  $x_{-\frac{1}{2}}$  e produção  $x_{N-\frac{1}{2}}$  necessitamos dos valores  $U_{-\frac{1}{2}}$ , dado em (7.1),  $p_{-\frac{1}{2}}$ , dado em (7.2) e de  $p_{N-\frac{1}{2}}$  dado em (7.4). Já o valor de  $U_{N-\frac{1}{2}}$ , é obtido da fórmula (5.79) na aproximação anterior.

**7.1. O subsistema de balanços.** Começamos com a Eq. (2.7):

$$\frac{\partial}{\partial t} H_U(U, p) + \frac{\partial}{\partial x} \left( v F_U(U, p) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( B_U(U, p) \frac{\partial U}{\partial x} \right) + G_U(U, p).$$

**7.1.1. Discretização do subsistema de balanços na injeção.** Esta discretização é a mesma obtida na Subseção 5.1.1, observando que as **variáveis de contorno**  $v_{-\frac{1}{2}} \equiv vm0$  e  $p_{-\frac{1}{2}} \equiv pm0$ , introduzidas respectivamente em (5.22) e (5.23), são provenientes do subsistema pressão-velocidade.

**7.1.2. Discretização do subsistema de balanços na produção.** Esta discretização é a mesma obtida na Subseção 5.1.2, observando que as **variáveis de contorno**  $v_{N-\frac{1}{2}} \equiv vmN$  e  $p_{N-\frac{1}{2}} \equiv pmN$ , introduzidas respectivamente em (5.56) e (5.57), são também provenientes do subsistema pressão-velocidade.

**7.1.3. O sistema linear para o subsistema de balanços.** O sistema linear para o subsistema de balanços é o mesmo obtido na Subseção 5.1.3, Eq. (5.78).

**7.2. O subsistema pressão-velocidade.** Lembramos que as **variáveis de contorno**  $U_{-\frac{1}{2}} \equiv Um0$  e  $p_{-\frac{1}{2}} \equiv pm0$ , introduzidas em (5.21) e (5.23), são dadas em (7.1) e (7.2), respectivamente.

Usaremos estes dados de contorno para avaliar todas as funções na extremidade de injeção  $x_{-\frac{1}{2}}$ .

**7.2.1. Discretização da equação da velocidade na injeção.** Como **variável de contorno**  $pm0 \equiv p_{-\frac{1}{2}} \equiv p^i(t)$  é dado não é necessário obter aproximações para  $pm0$ . Para o primeiro passo do método de Newton fazemos:

$$\Delta \bar{p}m0 = p^{i(n+1)} - p^{i(n)}, \quad (7.5)$$

e para os passos genéricos seguintes fazemos simplesmente:

$$\Delta \bar{p}m0 = 0. \quad (7.6)$$

*Discretização espacial.* Para obter uma equação envolvendo a **variável de contorno**  $vm0$  introduzida em (5.22) faremos a discretização espacial da equação da velocidade (2.10) no ponto  $x_0$ , o centro da primeira célula:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta x} (v_{\frac{1}{2}} - v_{-\frac{1}{2}}) + \frac{v_0}{\Delta x} \left( F_{v_0} \cdot [M_{l_{\frac{1}{2}}} - M_l^i] + (M_{g_{\frac{1}{2}}} - M_g^i) \right) \\
&= -\phi_0 \left( \pi(U_0) \cdot \frac{\partial M_{l_0}}{\partial t} + \frac{\partial M_{g_0}}{\partial t} \right) + \frac{1}{(\Delta x)^2} \left[ B_{v_0} \otimes (M_{l_{\frac{1}{2}}} - M_l^i) \right] \cdot (\pi(U_{\frac{1}{2}}) - \pi(U^i)) + G_{v_0}.
\end{aligned} \tag{7.7}$$

Tomando médias espaciais onde necessário:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta x} (v_{\frac{1}{2}} - v_{-\frac{1}{2}}) + \frac{1}{4\Delta x} (v_{\frac{1}{2}} + v_{-\frac{1}{2}}) \left( F_{v_0} \cdot [M_{l_0} + M_{l_1} - 2M_l^i] + M_{g_0} + M_{g_1} - 2M_g^i \right) \\
&= -\phi_0 \left( \pi(U_0) \cdot \frac{\partial M_{l_0}}{\partial t} + \frac{\partial M_{g_0}}{\partial t} \right) \\
& \quad + \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ B_{v_0} \otimes (M_{l_0} + M_{l_1} - 2M_l^i) \right] \cdot (\pi(U_0) + \pi(U_1) - 2\pi(U^i)) + G_{v_0}.
\end{aligned} \tag{7.8}$$

*Discretização temporal.* Utilizamos diferenças finitas retardadas nos termos que envolvem derivadas temporais:

$$\begin{aligned}
& \frac{\phi_0}{\Delta t} \left( \pi(U_0^{(n+1)}) \cdot (M_{l_0}^{n+1} - M_{l_0}^n) + M_{g_0}^{n+1} - M_{g_0}^n \right) + \frac{1}{\Delta x} (v_{\frac{1}{2}}^{n+1} - v_{-\frac{1}{2}}^{n+1}) \\
& \quad + \frac{1}{4\Delta x} (v_{-\frac{1}{2}}^{n+1} + v_{\frac{1}{2}}^{n+1}) \left( F_{v_0}^{n+1} \cdot [M_{l_0}^{n+1} + M_{l_1}^{n+1} - 2M_l^{i(n+1)}] + M_{g_0}^{n+1} + M_{g_1}^{n+1} - 2M_g^{i(n+1)} \right) \\
&= \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ B_{v_0}^{n+1} \otimes (M_{l_0}^{n+1} + M_{l_1}^{n+1} - 2M_l^{i(n+1)}) \right] \cdot (\pi(U_0^{(n+1)}) + \pi(U_1^{(n+1)}) - 2\pi(U^{i(n+1)})) \\
& \quad + G_{v_0}^{n+1}.
\end{aligned} \tag{7.9}$$

*O método de Newton.*

$$\begin{aligned}
& \frac{\phi_0}{\Delta t} \left( \pi(\bar{U}_0) \cdot (M_l(\bar{U}, \bar{p})_0 - M_{l_0}^n) + M_g(\bar{U}_0, \bar{p})_0 - M_{g_0}^n \right) + \frac{1}{\Delta x} (\bar{v}_{\frac{1}{2}} - \bar{v}_{-\frac{1}{2}}) \\
& \quad + \frac{1}{4\Delta x} (\bar{v}_{-\frac{1}{2}} + \bar{v}_{\frac{1}{2}}) \left( F_v(\bar{U}_0, \bar{p})_0 \cdot [M_l(\bar{U}, \bar{p})_0 + M_l(\bar{U}, \bar{p})_1 - 2M_l^{i(n+1)}] \right. \\
& \quad \quad \quad \left. + M_g(\bar{U}, \bar{p})_0 + M_g(\bar{U}, \bar{p})_1 - 2M_g^{i(n+1)} \right) \\
&= \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ B_v(\bar{U}, \bar{p})_0 \otimes (M_l(\bar{U}, \bar{p})_0 + M_l(\bar{U}, \bar{p})_1 - 2M_l^{i(n+1)}) \right] \cdot (\pi(\bar{U}_0) + \pi(\bar{U}_1) - 2\pi(U^{i(n+1)})) \\
& \quad + G(\bar{U}, \bar{p})_0.
\end{aligned} \tag{7.10}$$

Linearizando em torno de  $(\bar{v}, \bar{p})^T$ :



$$\begin{aligned}
& \frac{\phi_0}{\Delta t} \left( \pi(\bar{U}_0) \cdot \left( \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_0 \Delta \bar{p}_0 + \bar{M}_{l_0} - M_{l_0}^n \right) + \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)_0 \Delta \bar{p}_0 + \bar{M}_{g_0} - M_{g_0}^n \right) \\
& + \frac{1}{\Delta x} (\Delta \bar{v}_{\frac{1}{2}} + \bar{v}_{\frac{1}{2}} - \Delta \bar{v}_{-\frac{1}{2}} - \bar{v}_{-\frac{1}{2}}) + \frac{1}{4\Delta x} \left( \Delta \bar{v}_{\frac{1}{2}} + \bar{v}_{\frac{1}{2}} + \Delta \bar{v}_{-\frac{1}{2}} + \bar{v}_{-\frac{1}{2}} \right) \\
& \quad \left( \left[ \left( \frac{\partial \bar{F}_v}{\partial p} \right)_0 \Delta \bar{p}_0 + \bar{F}_{v_0} \right] \cdot \left[ \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_0 \Delta \bar{p}_0 + \bar{M}_{l_0} + \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_1 \Delta \bar{p}_1 + \bar{M}_{l_1} - 2M_l^{i(n+1)} \right] \right. \\
& \quad \quad \left. + \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)_0 \Delta \bar{p}_0 + \bar{M}_{g_0} + \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)_1 \Delta \bar{p}_1 + \bar{M}_{g_1} - 2M_g^{i(n+1)} \right) \\
& = \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ \left( \left( \frac{\partial \bar{B}_v}{\partial p} \right)_0 \Delta \bar{p}_0 + \bar{B}_{v_0} \right) \otimes \left( \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_0 \Delta \bar{p}_0 + \bar{M}_{l_0} + \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_1 \Delta \bar{p}_1 + \bar{M}_{l_1} - 2M_l^{i(n+1)} \right) \right] \cdot \\
& \quad \left( \pi(\bar{U}_0) + \pi(\bar{U}_1) - 2\pi(U^{i(n+1)}) \right) + \left( \frac{\partial \bar{G}_v}{\partial p} \right)_0 \Delta \bar{p}_0 + \bar{G}_{v_0}. \tag{7.11}
\end{aligned}$$

Colocando em evidência  $\Delta \bar{v}_{-\frac{1}{2}} \equiv \Delta \bar{v}m_0$ ,  $\Delta \bar{p}_0 \equiv \Delta \bar{p}(0)$ ,  $\Delta \bar{v}_{\frac{1}{2}} \equiv \Delta \bar{v}m(1)$ ,  $\Delta \bar{p}_1 \equiv \Delta \bar{p}(1)$ , e além do mais substituindo  $\bar{v}_{-\frac{1}{2}}$  por  $\bar{v}m_0$  e  $\bar{v}_{\frac{1}{2}}$  por  $\bar{v}m(1)$ , obtemos:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta x} \left\{ -1 + \frac{1}{4} \left[ \bar{F}_{v_0} \cdot (\bar{M}_{l_0} + \bar{M}_{l_1} - 2M_l^{i(n+1)}) + \bar{M}_{g_0} + \bar{M}_{g_1} - 2M_g^{i(n+1)} \right] \right\} \Delta \bar{v}m_0 \\
& + \left\{ \frac{\phi_0}{\Delta t} \left( \pi(\bar{U}) \cdot \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} + \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)_0 \right. \\
& + \frac{1}{4\Delta x} (\bar{v}m_0 + \bar{v}m(1)) \left[ \left( \frac{\partial \bar{F}_v}{\partial p} \right)_0 \cdot (\bar{M}_{l_0} + \bar{M}_{l_1} - 2M_l^{i(n+1)}) + \bar{F}_{v_0} \cdot \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_0 + \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)_0 \right] \\
& - \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ \left( \frac{\partial \bar{B}_v}{\partial p} \right)_0 \otimes (\bar{M}_{l_0} + \bar{M}_{l_1} - 2M_l^{i(n+1)}) \right] \cdot (\pi(\bar{U}_0) + \pi(\bar{U}_1) - 2\pi(U^{i(n+1)})) \\
& - \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ \bar{B}_{v_0} \otimes \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_0 \right] \cdot (\pi(\bar{U}_0) + \pi(\bar{U}_1) - 2\pi(U^{i(n+1)})) - \left( \frac{\partial \bar{G}_v}{\partial p} \right)_0 \left. \right\} \Delta \bar{p}(0) \\
& + \frac{1}{\Delta x} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left[ \bar{F}_{v_0} \cdot (\bar{M}_{l_0} + \bar{M}_{l_1} - 2M_l^{i(n+1)}) + \bar{M}_{g_0} + \bar{M}_{g_1} - 2M_g^{i(n+1)} \right] \right\} \Delta \bar{v}m(1) \\
& + \left\{ \frac{1}{4\Delta x} (\bar{v}m_0 + \bar{v}m(1)) \left[ \bar{F}_{v_0} \cdot \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_1 + \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)_1 \right] \right. \\
& - \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ \bar{B}_{v_0} \otimes \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_1 \right] \cdot (\pi(\bar{U}_0) + \pi(\bar{U}_1) - 2\pi(U^{i(n+1)})) \left. \right\} \Delta \bar{p}(1) \\
& = -\frac{\phi_0}{\Delta t} (\pi(\bar{U}) \cdot (\bar{M}_l - M_l^n) + \bar{M}_g - M_g^n)_0 - \frac{1}{\Delta x} (\bar{v}m(1) - \bar{v}m_0) \\
& - \frac{1}{4\Delta x} (\bar{v}m_0 + \bar{v}m(1)) \left( \bar{F}_{v_0} \cdot (\bar{M}_{l_0} + \bar{M}_{l_1} - 2M_l^{i(n+1)}) + \bar{M}_{g_0} + \bar{M}_{g_1} - 2M_g^{i(n+1)} \right) \\
& + \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ \bar{B}_{v_0} \otimes (\bar{M}_{l_0} + \bar{M}_{l_1} - 2M_l^{i(n+1)}) \right] \cdot (\pi(\bar{U}_0) + \pi(\bar{U}_1) - 2\pi(U^{i(n+1)})) + \bar{G}_{v_0}. \quad (7.12)
\end{aligned}$$

Escrevemos (7.12) na seguinte forma compacta:

$$\tilde{\alpha}_v(0) \Delta \bar{v}m_0 + \tilde{\beta}_v(0) \Delta \bar{p}(0) + \tilde{\delta}_v(1) \Delta \bar{v}m(1) + \tilde{\theta}_v(1) \Delta \bar{p}(1) = \tilde{\gamma}_v(0), \quad (7.13)$$

onde:

$$\tilde{\alpha}_v(0) = \frac{1}{\Delta x} \left\{ -1 + \frac{1}{4} \left[ \bar{F}_{v_0} \cdot (\bar{M}_{l_0} + \bar{M}_{l_1} - 2M_l^{i(n+1)}) + \bar{M}_{g_0} + \bar{M}_{g_1} - 2M_g^{i(n+1)} \right] \right\}, \quad (7.14)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}_v(0) &= \frac{\phi_0}{\Delta t} \left( \pi(\bar{U}) \cdot \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} + \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)_0 + \frac{1}{4\Delta x} (\bar{v}m0 + \bar{v}m(1)) \left[ \left( \frac{\partial \bar{F}_v}{\partial p} \right)_0 \cdot (\bar{M}_{l_0} + \bar{M}_{l_1} - 2M_l^{i(n+1)}) \right. \\
&\quad \left. + \bar{F}_{v_0} \cdot \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_0 + \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)_0 \right] \\
&\quad - \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ \left( \frac{\partial \bar{B}_v}{\partial p} \right)_0 \otimes (\bar{M}_{l_0} + \bar{M}_{l_1} - 2M_l^{i(n+1)}) \right] \cdot (\pi(\bar{U}_0) + \pi(\bar{U}_1) - 2\pi(U^{i(n+1)})) \\
&\quad - \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ \bar{B}_{v_0} \otimes \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_0 \right] \cdot (\pi(\bar{U}_0) + \pi(\bar{U}_1) - 2\pi(U^{i(n+1)})) - \left( \frac{\partial \bar{G}_v}{\partial p} \right)_0, \tag{7.15}
\end{aligned}$$

$$\tilde{\delta}_v(1) = \frac{1}{\Delta x} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left[ \bar{F}_{v_0} \cdot (\bar{M}_{l_0} + \bar{M}_{l_1} - 2M_l^{i(n+1)}) + \bar{M}_{g_0} + \bar{M}_{g_1} - 2M_g^{i(n+1)} \right] \right\}, \tag{7.16}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}_v(1) &= \frac{1}{4\Delta x} (\bar{v}m0 + \bar{v}m(1)) \left[ \bar{F}_{v_0} \cdot \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_1 + \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)_1 \right] \\
&\quad - \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ \bar{B}_{v_0} \otimes \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_1 \right] \cdot (\pi(\bar{U}_0) + \pi(\bar{U}_1) - 2\pi(U^{i(n+1)})), \tag{7.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}_v(0) &= -\frac{\phi_0}{\Delta t} (\pi(\bar{U}) \cdot (\bar{M}_l - M_l^n) + \bar{M}_g - M_g^n)_0 - \frac{1}{\Delta x} (\bar{v}m(1) - \bar{v}m0) \\
&\quad - \frac{1}{4\Delta x} (\bar{v}m0 + \bar{v}m(1)) \left( \bar{F}_{v_0} \cdot (\bar{M}_{l_0} + \bar{M}_{l_1} - 2M_l^{i(n+1)}) + \bar{M}_{g_0} + \bar{M}_{g_1} - 2M_g^{i(n+1)} \right) \\
&\quad + \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ \bar{B}_{v_0} \otimes (\bar{M}_{l_0} + \bar{M}_{l_1} - 2M_l^{i(n+1)}) \right] \cdot (\pi(\bar{U}_0) + \pi(\bar{U}_1) - 2\pi(U^{i(n+1)})) + \bar{G}_{v_0}. \tag{7.18}
\end{aligned}$$

7.2.2. *Avaliação vetorial dos coeficientes da equação da velocidade na injeção.* Estendemos aqui para a extremidade  $x_{-\frac{1}{2}}$ , correspondendo ao índice  $j = 0$ , os valores das funções vetoriais definidas inicialmente para o interior da malha em (4.38)-(4.41):

$$vmc(0) = \frac{1}{2} \left( vm0 + \bar{v}m(1) \right), \tag{7.19}$$

$$\pi c(\bar{U}(0)) \quad \text{é dado em (5.94),}$$

$$\bar{M}c(0) \quad \text{é dado em (5.95),}$$

$$\bar{C}(0) \quad \text{é dado em (5.96).}$$

A fim de separar os casos de a matriz  $B_v$  ser constante ou não, vamos estender as definições das funções vetoriais definidas inicialmente em (4.43)–(4.45), para a extremidade de injeção:

$$\bar{B}_2(0) \quad \text{é dado em (5.97),}$$

$$\bar{B}_3(1) \quad \text{é dado em (5.98),}$$

$$\bar{B}_4(0) \quad \text{é dado em (5.99).}$$

Além disto precisamos também da seguinte constante,

$$\bar{\mathcal{B}}_5(0) \quad \text{que é dada em (5.100).}$$

Para destacar os termos transientes, definimos, como em (4.46), (4.47):

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{T}}_\beta(0) & \text{ dado em (5.101), e} \\ \bar{\mathcal{T}}_\gamma(0) & \text{ dado em (5.102).} \end{aligned}$$

Com as definições acima os coeficientes em (7.14)–(7.18) da equação (7.13) podem ser escritos na forma vetorial como:

$$\tilde{\alpha}_v(0) = \frac{1}{\Delta x} [-1 + \bar{C}(0)], \quad (7.20)$$

o qual tem expressão semelhante àquela dada em (4.50), fazendo  $j = 0$ .

$$\tilde{\beta}_v(0) \quad \text{é dado em (5.103),}$$

$$\tilde{\delta}_v(1) = \frac{1}{\Delta x} [1 + \bar{C}(0)] = \frac{2}{\Delta x} + \tilde{\alpha}_v(0), \quad (7.21)$$

$$\tilde{\theta}_v(1) \quad \text{é dado em (5.105),}$$

$$\tilde{\gamma}_v(0) = \bar{\mathcal{T}}_\gamma(0) - \frac{1}{\Delta x} (\bar{v}m(1) - \bar{v}m(0)) - \frac{1}{\Delta x} \bar{v}m(0) \bar{C}(0) + \bar{G}_v(0) + \bar{\mathcal{B}}_4(0), \quad (7.22)$$

o qual tem expressão semelhante àquela dada em (4.54), fazendo  $j = 0$ .

**Obs 7.2.** Observamos que nesta seção não é necessário fazer a identificação  $\tilde{\gamma}_v(0) \equiv \tilde{\gamma}m_v(1)$ , como foi feito na Seção 5.2.5. Pois, se este deslocamento de argumento for feito aqui, o primeiro bloco do sistema linear ficará com índices  $0s$  e  $1s$ , ao invés de somente índices  $0s$ .

**Obs 7.3.** Observamos também que  $\bar{v}m(0)$  é definido pela fórmula (7.19) e não pela (5.93).

**7.2.3. Discretização da equação da pressão na injeção.** Vamos considerar a discretização espacial da equação da pressão (2.11) no ponto  $x_{-\frac{1}{2}}$ . Isto porque no interior da malha a discretização foi feita num ponto  $x_{j-\frac{1}{2}}$  e com isto fórmulas obtidas para o interior poderão ser aproveitadas também na produção.

Usando diferenças progressivas para aproximar  $\partial/\partial x$ , a discretização da equação da pressão (2.11) no ponto  $x_{-\frac{1}{2}}$  fica:

$$v_{-\frac{1}{2}}^{(n+1)} = \frac{2K_{-\frac{1}{2}}R^{i(n+1)}}{\Delta x} (p_0^{n+1} - p^{i(n+1)}) + \frac{2K_{-\frac{1}{2}}S^{i(n+1)}}{\Delta x} \cdot (\pi(U_0^{(n+1)}) - \pi(U^{i(n+1)})). \quad (7.23)$$

Sejam  $\bar{U}$ ,  $\bar{p}$  e  $\bar{v}$  valores nas grades de  $U$ ,  $p$  e  $v$  que correspondem a uma certa aproximação de  $U^{n+1}$ ,  $p^{n+1}$  e  $v^{n+1}$ , sendo que  $\bar{U}$  está temporariamente congelada. Sejam  $\bar{\bar{p}}$  e  $\bar{\bar{v}}$  aproximações melhores de  $p^{n+1}$  e  $v^{n+1}$  a serem determinadas. Então,

$$\bar{\bar{v}}_{-\frac{1}{2}} = \frac{2K_{-\frac{1}{2}}R^{i(n+1)}}{\Delta x}(\bar{\bar{p}}_0 - p^{i(n+1)}) + \frac{2K_{-\frac{1}{2}}S^{i(n+1)}}{\Delta x} \cdot (\pi(\bar{U}_0) - \pi(U^{i(n+1)})). \quad (7.24)$$

Somando e subtraindo termos convenientemente:

$$\bar{\bar{v}}_{-\frac{1}{2}} - \bar{v}_{-\frac{1}{2}} + \bar{v}_{-\frac{1}{2}} = \frac{2K_{-\frac{1}{2}}R^{i(n+1)}}{\Delta x}(\bar{\bar{p}}_0 - \bar{p}_0 + \bar{p}_0 - p^{i(n+1)}) + \frac{2K_{-\frac{1}{2}}S^{i(n+1)}}{\Delta x} \cdot (\pi(\bar{U}_0) - \pi(U^{i(n+1)})). \quad (7.25)$$

Substituindo  $\Delta\bar{\bar{v}} \equiv \bar{\bar{v}} - \bar{v}$  e  $\Delta\bar{\bar{p}} \equiv \bar{\bar{p}} - \bar{p}$  na equação (7.25), obtemos:

$$\Delta\bar{\bar{v}}_{-\frac{1}{2}} - \frac{2K_{-\frac{1}{2}}R^{i(n+1)}}{\Delta x}\Delta\bar{\bar{p}}_0 = \frac{2K_{-\frac{1}{2}}R^{i(n+1)}}{\Delta x}(\bar{p}_0 - p^{i(n+1)}) + \frac{2K_{-\frac{1}{2}}S^{i(n+1)}}{\Delta x} \cdot (\pi(\bar{U}_0) - \pi(U^{i(n+1)})) - \bar{v}_{-\frac{1}{2}} \quad (7.26)$$

Portanto a discretização da equação da pressão na injeção, numa forma compacta, depois de identificar  $\Delta\bar{\bar{v}}_{-\frac{1}{2}}$  com  $\Delta\bar{\bar{v}}m_0$  e  $K_{-\frac{1}{2}}$  com  $Km(0)$  e de multiplicar tudo por  $\Delta x/2$ , é dada por

$$\frac{\Delta x}{2} \Delta\bar{\bar{v}}m_0 + \tilde{D}_p(0)\Delta\bar{\bar{p}}(0) = \tilde{A}_p(0), \quad (7.27)$$

onde

$\tilde{D}_p(0)$  é dado em (5.118),

$$\tilde{A}_p(0) = Km(0)R^{i(n+1)}(\bar{p}_0 - p^{i(n+1)}) + Km(0)S^{i(n+1)} \cdot (\pi(\bar{U}_0) - \pi(U^{i(n+1)})) - \frac{\Delta x}{2}\bar{v}_{-\frac{1}{2}} \quad (7.28)$$

7.2.4. *Avaliação vetorial dos coeficientes da equação de pressão na injeção.* Aqui usaremos as mesmas definições vetoriais como em (5.114)- (5.117), as quais repetimo-as abaixo:

$$\begin{aligned} Rcm(0) &= Km(0)R^{i(n+1)}, \\ Scm(0) &= Km(0)S^{i(n+1)}, \\ pcm(0) &= \frac{1}{2}(p(0) - p^{i(n+1)}), \\ \pi cm(U(0)) &= \frac{1}{2}(\pi(U(0)) - \pi(U^{i(n+1)})) \end{aligned}$$

Com as definições acima os coeficientes de  $\tilde{D}_p(0)$  e de (7.28) podem ser escritos na forma vetorial como:

$\tilde{D}_p(0)$  é dado em (5.118),

$$\tilde{A}_p(0) = \bar{R}cm(0) \bar{p}cm(0) + \bar{S}cm(0) \cdot \pi cm(\bar{U}(0)) - \frac{\Delta x}{2} \bar{v}_{-\frac{1}{2}}, \quad (7.29)$$

que é semelhante ao termo (5.119), substituindo-se  $v^{i(n+1)}$  por  $\bar{v}_{-\frac{1}{2}}$ .

#### 7.2.5. Discretização da equação da velocidade na produção.

**Obs 7.4.** Usaremos nesta e na próxima subseção as **variáveis de contorno**  $UmN$  e  $pmN$  introduzidas em (5.55) e (5.57), respectivamente. A variável  $UmN \equiv \bar{U}_{N-\frac{1}{2}} \equiv \bar{U}mN$  é proveniente do subsistema de balanços através da fórmula (5.79). Esta variável é conhecida no tempo  $t^n$  e numa aproximação “barra” para seu valor no tempo  $t^{n+1}$ . A variável  $\equiv pmN$  é especificada pela condição de contorno (7.2), isto é,

$$pmN = p^e(t).$$

Portanto as funções  $M_l(U, p)$ ,  $M_g(U, p)$  e suas derivadas pode ser calculadas na extremidade de produção  $x_{N-\frac{1}{2}}$ , pelo menos utilizando uma aproximação anterior. Usaremos as seguintes notações, onde o super-escrito  $p$  significa que a pressão é especificada.

$$M_{l_{N-\frac{1}{2}}}^p \equiv M_l(U_{N-\frac{1}{2}}, p_{N-\frac{1}{2}}) \equiv M_l(U_{N-\frac{1}{2}}, p^e(t)), \quad (7.30)$$

$$M_{g_{N-\frac{1}{2}}}^p \equiv M_g(U_{N-\frac{1}{2}}, p_{N-\frac{1}{2}}) \equiv M_g(U_{N-\frac{1}{2}}, p^e(t)), \quad (7.31)$$

Vamos fazer a discretização espacial no ponto  $x_{N-1}$ , usando diferenças centradas da equação (2.10).

#### Discretização espacial.

É dada pela equação (5.124) substituindo-se

$$M_{l_{N-\frac{1}{2}}} \text{ por } M_{l_{N-\frac{1}{2}}}^p \text{ e } M_{g_{N-\frac{1}{2}}} \text{ por } M_{g_{N-\frac{1}{2}}}^p.$$

Tomando-se médias onde for possível temos:

É dada pela equação (5.125), com as mesmas substituições referidas acima.

#### Discretização temporal.

Aqui usaremos as seguintes notações:

$$M_{l_{N-\frac{1}{2}}}^{p^{n+1}} \equiv M_l(U_{N-\frac{1}{2}}^{n+1}, p_{N-\frac{1}{2}}^{n+1}) \equiv M_l(U_{N-\frac{1}{2}}^{n+1}, p^e(t^{n+1})), \quad (7.32)$$

$$M_{g_{N-\frac{1}{2}}}^{p^{n+1}} \equiv M_g(U_{N-\frac{1}{2}}^{n+1}, p_{N-\frac{1}{2}}^{n+1}) \equiv M_g(U_{N-\frac{1}{2}}^{n+1}, p^e(t^{n+1})). \quad (7.33)$$

A discretização temporal é dada pela Equação (5.128) substituindo-se

$$M_{l_{N-\frac{1}{2}}}^{n+1} \text{ por } M_{l_{N-\frac{1}{2}}}^{p^{n+1}} \quad \text{e} \quad M_{g_{N-\frac{1}{2}}}^{n+1} \text{ por } M_{g_{N-\frac{1}{2}}}^{p^{n+1}}$$

*O método de Newton.*

Suponhamos conhecidas as aproximações  $U^n$ ,  $v^n$  e  $p^n$  e  $\bar{U}$ . Sejam  $\bar{v}$  e  $\bar{p}$  aproximações temporárias de  $v^{n+1}$  e de  $p^{n+1}$ . O objetivo é obter aproximações melhores  $\bar{v}$  e  $\bar{p}$ .

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x} \left( \bar{v}_{N-\frac{1}{2}} - \bar{v}_{N-\frac{3}{2}} \right) \\ & + \frac{1}{4\Delta x} \left( \bar{v}_{N-\frac{3}{2}} + \bar{v}_{N-\frac{1}{2}} \right) \left( F_v(\bar{U}, \bar{p})_{N-1} \cdot \left( 2M_l(\bar{U}_{N-\frac{1}{2}}, p^e(t^{n+1})) - M_l(\bar{U}, \bar{p})_{N-2} - M_l(\bar{U}, \bar{p})_{N-1} \right) \right. \\ & \left. + 2M_g(\bar{U}_{N-\frac{1}{2}}, p^e(t^{n+1})) - M_g(\bar{U}, \bar{p})_{N-2} - M_g(\bar{U}, \bar{p})_{N-1} \right) \\ & = - \frac{\phi_{N-1}}{\Delta t} \left( \pi(\bar{U}_{N-1}) \cdot \left( M_l(\bar{U}, \bar{p})_{N-1} - M_{l_{N-1}}^n \right) + M_g(\bar{U}, \bar{p})_{N-1} - M_{g_{N-1}}^n \right) \\ & + \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ B_v(\bar{U}, \bar{p})_{N-1} \otimes \left( 2M_l(\bar{U}_{N-\frac{1}{2}}, p^e(t^{n+1})) - M_l(\bar{U}, \bar{p})_{N-2} - M_l(\bar{U}, \bar{p})_{N-1} \right) \right] \cdot \\ & \quad \left( 2\pi(\bar{U}_{N-\frac{1}{2}}) - \pi(\bar{U}_{N-2}) - \pi(\bar{U}_{N-1}) \right) + G_v(\bar{U}, \bar{p})_{N-1}. \end{aligned} \quad (7.34)$$

Linearização em torno do ponto  $(\bar{v}, \bar{p})^T$ , e usando as notações

$$\bar{M}_{l_{N-\frac{1}{2}}}^{p^{n+1}} \equiv M_l(\bar{U}_{N-\frac{1}{2}}, p^e(t^{n+1})) \quad \text{e} \quad \bar{M}_{g_{N-\frac{1}{2}}}^{p^{n+1}} \equiv M_g(\bar{U}_{N-\frac{1}{2}}, p^e(t^{n+1})) \quad (7.35)$$

obtemos,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta x} \left( \Delta \bar{v}_{N-\frac{1}{2}} - \Delta \bar{v}_{N-\frac{3}{2}} + \bar{v}_{N-\frac{1}{2}} - \bar{v}_{N-\frac{3}{2}} \right) + \frac{1}{4\Delta x} \left( \Delta \bar{v}_{N-\frac{3}{2}} + \Delta \bar{v}_{N-\frac{1}{2}} + \bar{v}_{N-\frac{3}{2}} + \bar{v}_{N-\frac{1}{2}} \right) \\
& \left( \left[ \left( \frac{\partial \bar{F}_v}{\partial p} \right)_{N-1} \Delta \bar{p}_{N-1} + \bar{F}_{v_{N-1}} \right] \cdot \left[ 2\bar{M}_{l_{N-\frac{1}{2}}}^{p^{n+1}} - \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_{N-2} \Delta \bar{p}_{N-2} - \bar{M}_{l_{N-2}} \right. \right. \\
& \left. \left. - \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_{N-1} \Delta \bar{p}_{N-1} - \bar{M}_{l_{N-1}} \right] + 2\bar{M}_{g_{N-\frac{1}{2}}}^{p^{n+1}} - \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)_{N-2} \Delta \bar{p}_{N-2} - \bar{M}_{g_{N-2}} \right. \\
& \left. \left. - \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)_{N-1} \Delta \bar{p}_{N-1} - \bar{M}_{g_{N-1}} \right) \right) \\
& = -\frac{\phi_{N-1}}{\Delta t} \left( \pi(\bar{U}_{N-1}) \cdot \left[ \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_{N-1} \Delta \bar{p}_{N-1} + \bar{M}_{l_{N-1}} - M_{l_{N-1}}^n \right] \right. \\
& \left. + \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)_{N-1} \Delta \bar{p}_{N-1} + \bar{M}_{g_{N-1}} - M_{g_{N-1}}^n \right) \\
& + \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ \left( \left( \frac{\partial \bar{B}_v}{\partial p} \right)_{N-1} \Delta \bar{p}_{N-1} + \bar{B}_{v_{N-1}} \right) \otimes \left( 2\bar{M}_{l_{N-\frac{1}{2}}}^{p^{n+1}} - \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_{N-2} \Delta \bar{p}_{N-2} - \bar{M}_{l_{N-2}} \right. \right. \\
& \left. \left. - \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_{N-1} \Delta \bar{p}_{N-1} - \bar{M}_{l_{N-1}} \right) \right] \cdot \left( 2\pi(\bar{U}_{N-\frac{1}{2}}) - \pi(\bar{U}_{N-2}) - \pi(\bar{U}_{N-1}) \right) \\
& + \left( \frac{\partial \bar{G}_v}{\partial p} \right)_{N-1} \Delta \bar{p}_{N-1} + \bar{G}_{v_{N-1}} \tag{7.36}
\end{aligned}$$

Eliminando os termos de segunda ordem, e colocando em evidência os termos  $\Delta \bar{p}_{N-2} \equiv \Delta \bar{p}(N-2)$ ,  $\Delta \bar{v}_{N-\frac{3}{2}} \equiv \Delta \bar{v}m(N-1)$ ,  $\Delta \bar{p}_{N-1} \equiv \Delta \bar{p}(N-1)$ ,  $\Delta \bar{v}_{N-\frac{1}{2}} \equiv \Delta \bar{v}mN$  e temos



$$\begin{aligned}
& \left\{ -\frac{1}{4\Delta x} (\bar{v}_{N-\frac{3}{2}} + \bar{v}_{N-\frac{1}{2}}) \left( \bar{F}_{v_{N-1}} \cdot \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_{N-2} + \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)_{N-2} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ \bar{B}_{v_{N-1}} \otimes \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_{N-2} \right] \cdot \left( 2\pi(\bar{U}_{N-\frac{1}{2}}) - \pi(\bar{U}_{N-2}) - \pi(\bar{U}_{N-1}) \right) \right\} \Delta \bar{p}(N-2) \\
& + \left\{ -\frac{1}{\Delta x} + \frac{1}{4\Delta x} \left( \bar{F}_{v_{N-1}} \cdot \left( 2\bar{M}_l^{p^{n+1}} - \bar{M}_{l_{N-2}} - \bar{M}_{l_{N-1}} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 2\bar{M}_g^{p^{n+1}} - \bar{M}_{g_{N-2}} - \bar{M}_{g_{N-1}} \right) \right\} \Delta \bar{v}m(N-1) \\
& + \left\{ \frac{\phi_{N-1}}{\Delta t} \pi(\bar{U}_{N-1}) \cdot \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_{N-1} + \frac{\phi}{\Delta t} \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)_{N-1} + \frac{1}{4\Delta x} (\bar{v}_{N-\frac{3}{2}} + \bar{v}_{N-\frac{1}{2}}) \right. \\
& \quad \left( \left( \frac{\partial \bar{F}_v}{\partial p} \right)_{N-1} \cdot \left( 2\bar{M}_l^{p^{n+1}} - \bar{M}_{l_{N-2}} - \bar{M}_{l_{N-1}} \right) - \bar{F}_{v_{N-1}} \cdot \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_{N-1} - \left( \frac{\partial \bar{M}_g}{\partial p} \right)_{N-1} \right) \\
& \quad - \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ \left( \frac{\partial \bar{B}_v}{\partial p} \right)_{N-1} \otimes \left( 2\bar{M}_l^{p^{n+1}} - \bar{M}_{l_{N-2}} - \bar{M}_{l_{N-1}} \right) \right] \cdot \left( 2\pi(\bar{U}_{N-\frac{1}{2}}) - \pi(\bar{U}_{N-2}) - \pi(\bar{U}_{N-1}) \right) \\
& \quad + \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ \bar{B}_{v_{N-1}} \otimes \left( \frac{\partial \bar{M}_l}{\partial p} \right)_{N-1} \right] \cdot \left( 2\pi(\bar{U}_{N-\frac{1}{2}}) - \pi(\bar{U}_{N-2}) - \pi(\bar{U}_{N-1}) \right) \\
& \quad \left. - \left( \frac{\partial \bar{G}_v}{\partial p} \right)_{N-1} \right\} \Delta \bar{p}(N-1) \\
& + \left\{ \frac{1}{\Delta x} + \frac{1}{4\Delta x} \left( \bar{F}_{v_{N-1}} \cdot \left( 2\bar{M}_l^{p^{n+1}} - \bar{M}_{l_{N-2}} - \bar{M}_{l_{N-1}} \right) + 2\bar{M}_g^{p^{n+1}} - \bar{M}_{g_{N-2}} - \bar{M}_{g_{N-1}} \right) \right\} \Delta \bar{v}mN \\
& = -\frac{\phi_{N-1}}{\Delta t} \left( \pi(\bar{U}_{N-1}) \cdot \left( \bar{M}_{l_{N-1}} - M_{l_{N-1}}^n \right) + \bar{M}_{g_{N-1}} - M_{g_{N-1}}^n \right) - \frac{1}{\Delta x} (\bar{v}_{N-\frac{1}{2}} - \bar{v}_{N-\frac{3}{2}}) \\
& \quad - \frac{1}{4\Delta x} (\bar{v}_{N-\frac{3}{2}} + \bar{v}_{N-\frac{1}{2}}) \left( \bar{F}_{v_{N-1}} \cdot \left( 2\bar{M}_l^{p^{n+1}} - \bar{M}_{l_{N-2}} - \bar{M}_{l_{N-1}} \right) + 2\bar{M}_g^{p^{n+1}} - \bar{M}_{g_{N-2}} - \bar{M}_{g_{N-1}} \right) \\
& \quad + \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ \bar{B}_{v_{N-1}} \otimes \left( 2\bar{M}_l^{p^{n+1}} - \bar{M}_{l_{N-2}} - \bar{M}_{l_{N-1}} \right) \right] \cdot \left( 2\pi(\bar{U}_{N-\frac{1}{2}}) - \pi(\bar{U}_{N-2}) - \pi(\bar{U}_{N-1}) \right) \\
& \quad + \bar{G}_{v_{N-1}}. \tag{7.37}
\end{aligned}$$

A equação (7.37) escreve-se numa forma compacta como:

$$\begin{aligned}
& \tilde{\eta}_v(N-2) \Delta \bar{p}(N-2) + \tilde{\alpha}_v(N-1) \Delta \bar{v}m(N-1) + \tilde{\beta}_v(N-1) \Delta \bar{p}(N-1) \\
& \quad + \tilde{\delta}_v(N) \Delta \bar{v}mN = \tilde{\gamma}_v(N-1), \tag{7.38}
\end{aligned}$$

Os coeficientes da equação (7.38) são dados de modo similar como na Seção 5.2.5, relembrando apenas que os termos

$$\bar{M}_{l_{N-\frac{1}{2}}} \quad \text{e} \quad \bar{M}_{g_{N-\frac{1}{2}}}$$

devem ser substituídos, respectivamente, pelos termos

$$M_{l_{N-\frac{1}{2}}}^{p^{n+1}} \equiv M_l(\bar{U}_{N-\frac{1}{2}}, p^e(t^{n+1})) \quad \text{e} \quad M_{g_{N-\frac{1}{2}}}^{p^{n+1}} \equiv M_g(\bar{U}_{N-\frac{1}{2}}, p^e(t^{n+1})),$$

de acordo com as seguintes equações:

$$\tilde{\eta}_v(N-2): \text{Eq. (5.133)},$$

$$\tilde{\alpha}_v(N-1): \text{Eq. (5.134)},$$

$$\tilde{\beta}_v(N-1): \text{Eq. (5.135)},$$

$$\tilde{\delta}_v(N): \text{Eq. (5.136)}$$

e

$\tilde{\gamma}_v(N-1): \text{Eq. (5.138)}$ , onde o termo  $\bar{v}_{N-\frac{1}{2}}$  deve ser substituído pelo valor da **variável de contorno**  $\bar{v}mN$  introduzida em (5.56).

**7.2.6. Avaliação vetorial dos coeficientes da equação da velocidade na produção.** Para que os coeficientes da equação da velocidade na produção sejam avaliados exatamente como na Seção 5.2.6, devemos usar as mesmas notações para as variáveis avaliadas no contorno  $x_{N-\frac{1}{2}}$ . Portanto, definimos:

$$M_{l_{N-\frac{1}{2}}}^{p^{n+1}} \equiv \bar{M}_l m(N) = M_l(\bar{U}_{N-\frac{1}{2}}, p^e(t^{n+1}))$$

e

$$M_{g_{N-\frac{1}{2}}}^{p^{n+1}} \equiv \bar{M}_g m(N) = M_g(\bar{U}_{N-\frac{1}{2}}, p^e(t^{n+1})).$$

Lembramos que, comparando com a Seção 5.2.6, estas duas variáveis são as únicas variáveis avaliadas de modo diferente.

Assim, os coeficientes da Eq. (7.38) são definidos por:

$$\tilde{\eta}_v(N-2): \text{Eq. (5.150)},$$

$$\tilde{\alpha}_v(N-1): \text{Eq. (5.151)},$$

$$\tilde{\beta}_v(N-1): \text{Eq. (5.152)},$$

$$\tilde{\delta}_v(N): \text{Eq. (5.153)},$$

e

$$\tilde{\gamma}_v(N-1): \text{Eq. (5.155)}, \text{ onde o termo } \bar{v}_{N-\frac{1}{2}} \text{ deve ser substituído por } \bar{v}mN.$$

**Obs 7.5.** Observamos que nesta seção não é necessário fazer a identificação  $\tilde{\gamma}_v(N-1) \equiv \tilde{\gamma}_{m_v}(N)$ , como foi feito na Seção 5.2.5. Pois, se este deslocamento de argumento for feito aqui, o primeiro bloco do sistema linear ficará com índices  $0s$  e  $1s$ , ao invés de somente índices  $0s$ , conforme já observado em 7.2.

7.2.7. *Discretização newtoniana da equação da pressão na produção.* Lembramos que a **variável de contorno**  $UmN \equiv U_{N-\frac{1}{2}}$  introduzida em (5.55) é obtida de (5.79), via o sistema de balanços.

A **variável de contorno** do subsistema pressão-velocidade  $vmN \equiv v_{N-\frac{1}{2}}$ , introduzida em (5.56), é incógnita. Seu valor deve ser obtido como valor aproximado resolvendo o sistema pressão-velocidade discretizado via Método de Newton a partir de uma aproximação temporária  $\bar{v}mN$ .

O valor da **variável de contorno**  $pmN \equiv p_{N-\frac{1}{2}}$ , introduzida em (5.57), é dado pela condição de contorno (7.4). Isto é,

$$pmN \equiv p^e(t). \quad (7.39)$$

Pontanto, o valor

$$\Delta pmN \equiv \Delta p_{N-\frac{1}{2}},$$

também é conhecido. Este valor será usado para completar o sistema algébrico  $(N+1) \times (N+1)$ .

**Obs 7.6.** Para que esta seção fique análoga à Seção (5.2.7), usamos aqui as mesmas notações,  $\bar{R}_{N-\frac{1}{2}}$  e  $\bar{S}_{N-\frac{1}{2}}$ , usadas na Seção (5.2.7) para os valores das funções  $R$  e  $S$  em  $(\bar{U}_{N-\frac{1}{2}}, \bar{p}_{N-\frac{1}{2}})$ .

Portanto, vamos denotar os valores das funções  $R(U, p)$  e  $S(U, p)$  avaliadas na aproximação  $(\bar{U}_{N-\frac{1}{2}}, p^{e(n+1)})$  por:

$$R(\bar{U}_{N-\frac{1}{2}}, p^{e(n+1)}) = \bar{R}_{N-\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad S(\bar{U}_{N-\frac{1}{2}}, p^{e(n+1)}) = \bar{S}_{N-\frac{1}{2}}. \quad (7.40)$$

Passemos então à discretização. Usando diferenças regressivas para aproximar  $\partial/\partial x$ , a discretização da equação da pressão (2.11) no ponto  $x_{N-\frac{1}{2}}$  fica:

$$v_{N-\frac{1}{2}}^{n+1} = \frac{2 K_{N-\frac{1}{2}}}{\Delta x} R(U_{N-\frac{1}{2}}^{n+1}, p^{e(n+1)}) (p^{e(n+1)} - p_{N-1}^{n+1}) + K_{N-\frac{1}{2}} S(U_{N-\frac{1}{2}}^{n+1}, p^{e(n+1)}) \cdot \pi(U_x^{e(n+1)}). \quad (7.41)$$

Sejam  $\bar{p}_{N-1}$  e  $\bar{v}_{N-\frac{1}{2}}$  aproximações melhores de  $p_{N-1}^{n+1}$  e de  $v_{N-\frac{1}{2}}^{n+1}$  a serem determinadas. O método de Newton aplicado à equação (7.41) fica:

$$\bar{v}_{N-\frac{1}{2}} = \frac{2 K_{N-\frac{1}{2}}}{\Delta x} R(\bar{U}_{N-\frac{1}{2}}, p^{e(n+1)}) (p^{e(n+1)} - \bar{p}_{N-1}) + K_{N-\frac{1}{2}} S(\bar{U}_{N-\frac{1}{2}}, p^{e(n+1)}) \cdot \pi(U_x^{e(n+1)}) \quad (7.42)$$

Somando e subtraindo termos convenientemente:

$$\Delta \bar{v}_{N-\frac{1}{2}} + \bar{v}_{N-\frac{1}{2}} = \frac{2 K_{N-\frac{1}{2}}}{\Delta x} \bar{R}_{N-\frac{1}{2}} (p^{e(n+1)} - \Delta \bar{p}_{N-1} - \bar{p}_{N-1}) + K_{N-\frac{1}{2}} \bar{S}_{N-\frac{1}{2}} \cdot \pi(U_x^{e(n+1)}). \quad (7.43)$$

Separando na equação (7.43) as incógnitas para o lado esquerdo e multiplicando tudo por  $(\Delta x/2)$ , obtemos:

$$\begin{aligned} & K_{N-\frac{1}{2}} \bar{R}_{N-\frac{1}{2}} \Delta \bar{p}_{N-1} + \frac{\Delta x}{2} \Delta \bar{v}_{N-\frac{1}{2}} \\ & = K_{N-\frac{1}{2}} \bar{R}_{N-\frac{1}{2}} (p^{e(n+1)} - \bar{p}_{N-1}) + \frac{\Delta x}{2} K_{N-\frac{1}{2}} \bar{S}_{N-\frac{1}{2}} \cdot \pi(U_x^{e(n+1)}) - \frac{\Delta x}{2} \bar{v}_{N-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (7.44)$$

Portanto, uma equação a ser considerada na extremidade direita para determinar  $\Delta \bar{v}_{N-\frac{1}{2}} \equiv \Delta \bar{v}mN$  é:

$$\tilde{L}_p(N-1) \Delta \bar{p}(N-1) + \frac{\Delta x}{2} \Delta \bar{v}mN = \tilde{A}_p(N), \quad (7.45)$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{L}_p(N-1) &= K_{N-\frac{1}{2}} \bar{R}_{N-\frac{1}{2}} : \quad Eq.(5.160), \\ \tilde{A}_p(N) &= K_{N-\frac{1}{2}} \bar{R}_{N-\frac{1}{2}} (p^{e(n+1)} - \bar{p}_{N-1}) + \frac{\Delta x}{2} K_{N-\frac{1}{2}} \bar{S}_{N-\frac{1}{2}} \cdot \pi(U_x^{e(n+1)}) - \frac{\Delta x}{2} \bar{v}_{N-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (7.46)$$

**7.2.8. Avaliação vetorial dos coeficientes da equação de pressão na produção.** Considere que as **variáveis de contorno** estejam pré-calculados no tempo  $t^n$  e na aproximação “barra” para o tempo  $t^{n+1}$

Em seguida usaremos uma notação semelhante a notação usada no interior da malha para as funções  $R$  e  $S$  na extremidade de produção, ou seja:

$$K_{N-\frac{1}{2}} \equiv Km(N) = K(x_{N-\frac{1}{2}}), \quad (7.47)$$

$$\bar{R}_{N-\frac{1}{2}} \equiv \bar{R}m(N) = R(\bar{U}mN, p^{e(n+1)}), \quad (7.48)$$

$$\bar{S}_{N-\frac{1}{2}} \equiv \bar{S}m(N) = S(\bar{U}mN, p^{e(n+1)}), \quad (7.49)$$

A partir das funções pré-calculadas em (7.47)–(7.49), estendemos as funções vetoriais definidas inicialmente no interior da malha pelas fórmulas (4.67)–(4.70), para a extremidade de produção, ou seja para o índice  $j = N$ :

$$\begin{aligned} \bar{R}cm(N) &= Km(N) \bar{R}m(N) : \quad Eq.(5.169), \\ \bar{S}cm(N) &= Km(N) \bar{S}m(N) : \quad Eq.(5.170), \\ \bar{p}cm(N) &= (p^{e(n+1)} - \bar{p}(N-1)), \\ \pi cm(N) &= (\Delta x/2) \pi(U_x^{e(n+1)}) : \quad Eq.(5.172). \end{aligned} \quad (7.50)$$

Com estas definições os coeficientes em (5.160) e (7.46) podem ser escritos na forma vetorial como:

$$\begin{aligned} \tilde{L}_p(N-1) &= \bar{R}cm(N) : \quad Eq.(5.173), \\ \tilde{A}_p(N) &= \bar{R}cm(N) \bar{p}cmN + \bar{S}cm(N) \pi cm(N) - (\Delta x/2) \bar{v}mN : \quad Eq.(5.175), \end{aligned}$$

7.2.9. *O sistema algébrico completo para o subsistema pressão-velocidade.* Lembramos inicialmente que de acordo com as condições de contorno dadas em (7.1)–(7.2), todas as variáveis são conhecidas na extremidade de injeção  $x_{-\frac{1}{2}}$ .

Do mesmo modo, usando (5.37) e a condição de contorno (7.4), todas as variáveis são conhecidas na extremidade de produção  $x_{N-\frac{1}{2}}$ .

Reescrevemos abaixo as equações discretizadas da velocidade e da pressão, na extremidade de injeção, no interior da malha, e na extremidade de produção.

Para a extremidade de injeção tais equações são dadas em (7.13) e (7.27), ou

$$\tilde{\alpha}_v(0)\Delta\bar{v}m0 + \tilde{\beta}_v(0)\Delta\bar{p}(0) + \tilde{\delta}_v(1)\Delta\bar{v}m(1) + \tilde{\theta}_v(1)\Delta\bar{p}(1) = \tilde{\gamma}_v(0),$$

e

$$\frac{\Delta x}{2} \Delta\bar{v}m0 + \tilde{D}_p(0)\Delta\bar{p}(0) = \tilde{A}_p(0).$$

Ver Observação 7.2 sobre a não necessidade de deslocamento dos índices de  $\tilde{\gamma}_v$ , como foi feito na Seção 5.2.5.

Para o interior da malha,  $j = 1, \dots, N - 2$ , são dadas em (4.74) e (4.75), ou

$$\begin{aligned} \eta_v(j-1)\Delta\bar{p}(j-1) + \alpha_v(j)\Delta\bar{v}m(j) &+ \beta_v(j)\Delta\bar{p}(j) \\ &+ \delta_v(j+1)\Delta\bar{v}m(j+1) + \theta_v(j+1)\Delta\bar{p}(j+1) = \gamma_v(j), \end{aligned}$$

$$L_p(j-1)\Delta\bar{p}(j-1) + \Delta x\Delta\bar{v}m(j) + D_p(j)\Delta\bar{p}(j) = A_p(j).$$

Para  $j = N - 1$ , consideramos a equação da velocidade na produção, dada em (7.38) e a equação da pressão (4.75) com  $j = N - 1$ , isto é:

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_v(N-2)\Delta\bar{p}(N-2) + \tilde{\alpha}_v(N-1)\Delta\bar{v}m(N-1) + \tilde{\beta}_v(N-1)\Delta\bar{p}(N-1) \\ + \tilde{\delta}_v(N)\Delta\bar{v}mN = \tilde{\gamma}_v(N-1), \end{aligned}$$

e

$$L_p(N-2)\Delta\bar{p}(N-2) + \Delta x\Delta\bar{v}m(N-1) + D_p(N-1)\Delta\bar{p}(N-1) = A_p(N-1).$$

Para completar o sistema  $(N+1) \times (N+1)$ , consideramos as **variáveis de contorno**  $vmN$  e  $pmN$  introduzidas em (5.56) e (5.57), respectivamente. Uma equação é obtida da condição de contorno na produção para a pressão (7.2) e outra equação é obtida da discretização da equação da pressão na produção dada em (7.45), isto é:

$$\Delta\bar{p}mN = \tilde{\gamma}_v(N) \tag{7.51}$$

onde definimos  $\tilde{\gamma}_v(N)$  por,

$$\tilde{\gamma}_v(N) = \begin{cases} p^{e(n+1)} - p^{e(n)}, & \text{na primeira iteração do método de Newton,} \\ 0, & \text{numa iteração genérica do método de Newton,} \end{cases} \tag{7.52}$$

e



Os blocos referentes à injeção são dados por:

$$\tilde{\mathcal{D}}(0) = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_v(0) & \tilde{\beta}_v(0) \\ \Delta x/2 & \tilde{D}_p(0) \end{pmatrix}, \quad \text{proveniente do sistema (7.13), (7.27),} \quad (7.57)$$

$$\tilde{\mathcal{U}}(1) = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_v(1) & \tilde{\theta}_v(1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{também proveniente do sistema (7.13), (7.27),} \quad (7.58)$$

$$\tilde{\mathcal{A}}(0) = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_v(0) \\ \tilde{A}_p(0) \end{pmatrix}, \quad \text{também proveniente do sistema (7.13), (7.27),} \quad (7.59)$$

**Obs 7.7.** Conforme Obervação 7.2 nesta seção não é necessário fazer o deslocamento dos argumentos dos  $\tilde{\gamma}_v$ , como foi feito na Seção 5.2.5.

Os blocos referentes ao interior da malha são dados por:

$$\mathcal{L}(j-1) = \begin{pmatrix} 0 & \eta_v(j-1) \\ 0 & L_p(j-1) \end{pmatrix}, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, N-2, \quad (7.60)$$

$$\mathcal{D}(j) = \begin{pmatrix} \alpha_v(j) & \beta_v(j) \\ \Delta x & D_p(j) \end{pmatrix}, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, N-2, \quad (7.61)$$

$$\mathcal{U}(j+1) = \begin{pmatrix} \delta_v(j+1) & \theta_v(j+1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, N-2, \quad (7.62)$$

$$A(j) = \begin{pmatrix} \gamma_v(j) \\ A_p(j) \end{pmatrix}, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, N-2. \quad (7.63)$$

Os blocos correspondentes a equação da velocidade na produção (7.38) e a equação da pressão (4.75) com  $j = N-1$ , são dados por:

$$\tilde{\mathcal{L}}(N-2) = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\eta}_v(N-2) \\ 0 & L_p(N-2) \end{pmatrix}, \quad \text{proveniente do sistema (7.38), (4.75) com } j = N-1, \quad (7.64)$$

$$\tilde{\mathcal{D}}(N-1) = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_v(N-1) & \tilde{\beta}_v(N-1) \\ \Delta x & D_p(N-1) \end{pmatrix}, \quad \text{também do sistema (7.38), (4.75) com } j = N-1, \quad (7.65)$$

$$\tilde{\mathcal{U}}(N) = \begin{pmatrix} \tilde{\delta}_v(N) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{proveniente também do sistema (7.38), (4.75) com } j = N-1, \quad (7.66)$$

$$\tilde{\mathcal{A}}(N-1) = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_v(N-1) \\ A_p(N-1) \end{pmatrix}, \quad \text{proveniente também do sistema (7.38), (4.75) com } j = N-1, \quad (7.67)$$

Finalmente, introduzimos os blocos para completar o sistema  $(N+1) \times (N+1)$ . Estes blocos correspondem a equação dada pela condição de contorno na produção para a pressão (7.51), e a equação da pressão na produção (7.45),

$$\tilde{\mathcal{L}}(N-1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{L}_p(N-1) \end{pmatrix}, \quad \text{proveniente do sistema (7.51), (7.45),} \quad (7.68)$$

$$\tilde{\mathcal{D}}(N) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Delta x/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{também proveniente do sistema (7.51), (7.45),} \quad (7.69)$$

$$\tilde{\mathcal{A}}(N) = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_v(N) \\ \tilde{A}_p(N) \end{pmatrix}, \quad \text{também proveniente do sistema (7.51), (7.45),} \quad (7.70)$$



Para o cálculo dos elementos dos blocos e vetores relativos às condições de contorno na injeção, recordamos que são tais que:

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_v(0) & \text{ é dado em (7.20),} \\ \tilde{\beta}_v(0) & \text{ é dado em (5.103),} \\ \tilde{D}_p(0) & \text{ é dado em (5.118),} \\ \tilde{\delta}_v(1) & \text{ é dado em (7.21),} \\ \tilde{\theta}_v(1) & \text{ é dado em (5.105),} \\ \tilde{\gamma}_v(0) & \text{ é dado em (7.22),} \\ \tilde{A}_p(0) & \text{ é dado em (7.29).}\end{aligned}$$

Para o cálculo dos elementos dos blocos e vetores relacionados aos pontos do interior da malha contorno, recordamos que são tais que:

$$\begin{aligned}\eta_v(j-1), \quad j = 1, 2, \dots, N-2, & \text{ são obtidos de (4.49),} \\ \alpha_v(j), \quad j = 1, 2, \dots, N-2, & \text{ são obtidos de (4.50),} \\ \beta_v(j), \quad j = 1, 2, \dots, N-2, & \text{ são obtidos de (4.51),} \\ \delta_v(j+1), \quad j = 1, 2, \dots, N-2, & \text{ são obtidos de (4.52),} \\ \theta_v(j+1), \quad j = 1, 2, \dots, N-2, & \text{ são obtidos de (4.53),} \\ \gamma_v(j), \quad j = 1, 2, \dots, N-2, & \text{ são obtidos de (4.54).}\end{aligned}$$

Para o cálculo dos elementos dos blocos correspondentes a equação da velocidade na produção (7.38) e a equação da pressão (4.75) com  $j = N-1$ , recordamos que são dados por:

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}_v(N-2) & \text{ é dado em (5.150),} \\ \tilde{\alpha}_v(N-1) & \text{ é dado em (5.151),} \\ \tilde{\beta}_v(N-1) & \text{ é dado em (5.152),} \\ \tilde{\delta}_v(N) & \text{ é dado em (5.153),} \\ \tilde{\gamma}_v(N-1) & \text{ é dado em (5.155), substituindo-se } \bar{v}_{N-\frac{1}{2}} \text{ por } \bar{v}m(N) \\ L_p(N-2) & \text{ é dado em (4.71), com } j = N-1, \\ D_p(N-1) & \text{ é dado em (4.72), com } j = N-1 \text{ e} \\ A_p(N-1) & \text{ é dado em (4.73), com } j = N-1.\end{aligned}$$

Finalmente, para o cálculo dos elementos dos blocos correspondentes a equação para a pressão, dada pela condição de contorno na produção (7.51), e a equação da pressão na produção (7.45), recordamos que são tais que:

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}_v(N) & \text{ é dado em (7.52),} \\ \tilde{L}_p(N-1) & \text{ é dado em (5.173),} \\ \tilde{A}_p(N) & \text{ é dado em (5.175).}\end{aligned}$$

**7.3. O subsistema pressão-velocidade no caso incompressível.** Lembramos que as **variáveis de contorno**  $Um0 \equiv U_{-\frac{1}{2}}$  e  $pm0 \equiv p_{-\frac{1}{2}}$  são dados em (7.1) e (7.2), respectivamente.

Usaremos estes dados de contorno para avaliar todas as funções na extremidade de injeção  $x_{-\frac{1}{2}}$ .

**7.3.1. Discretização da equação da velocidade na injeção.** Neste caso, como todos os termos com derivadas em  $p$  são nulos, a forma compacta da equação da velocidade na injeção, Eq. (7.13), se reduz a:

$$\tilde{\alpha}_v(0)\Delta\bar{v}m0 + \tilde{\delta}_v(1)\Delta\bar{v}m(1) = \tilde{\gamma}_v(0), \quad (7.71)$$

onde os coeficientes já na forma vetorial são dados por:

$$\tilde{\alpha}_v(0) : \text{ Eq. (7.20) ,}$$

$$\tilde{\delta}_v(1) : \text{ Eq. (7.21) ,}$$

e

$$\tilde{\gamma}_v(0) : \text{ Eq. (7.22) .}$$

**7.3.2. Discretização da equação da pressão na injeção.** Como no caso compressível, obtemos a mesma Eq. (7.27),

$$\frac{\Delta x}{2} \Delta\bar{v}m0 + \tilde{D}_p(0)\Delta\bar{p}(0) = \tilde{A}_p(0),$$

onde

$$\tilde{D}_p(0) \text{ tem a mesma fórmula dada em (5.118),}$$

$$\tilde{A}_p(0) \text{ é dado em (7.29).}$$

**7.3.3. Discretização da equação da velocidade na produção.** Considerando as condições de contorno dadas à direita a discretização é obtida da mesma forma que obtivemos Eq. (7.38) desprezando-se os termos com derivadas em  $p$ ,

$$\tilde{\alpha}_v(N-1)\Delta\bar{v}m(N-1) + \tilde{\delta}_v(N)\Delta\bar{v}mN = \tilde{\gamma}_v(N-1), \quad (7.72)$$

onde

$$\tilde{\alpha}_v(N-1): \text{ Eq. (5.151),}$$

$$\tilde{\delta}_v(N): \text{ Eq. (5.153),}$$

e

$$\tilde{\gamma}_v(N-1): \text{ Eq. (5.155), onde o termo } \bar{v}_{N-\frac{1}{2}} \text{ deve ser substituído por } \bar{v}m(N).$$

**Obs 7.8.** Relembrando que as funções envolvidas nestes coeficientes devem ser preenchidas conforme suas definições, dadas na Seção 7.2

7.3.4. *Discretização da equação da pressão na produção.* Como no caso compressível, temos a mesma Eq. (7.45),

$$\tilde{L}_p(N-1)\Delta\bar{p}(N-1) + \frac{\Delta x}{2}\Delta\bar{v}mN = \tilde{A}_p(N),$$

onde

$$\tilde{L}_p(N-1): \text{Eq. (5.173),}$$

$$\tilde{A}_p(N): \text{Eq. (5.175).}$$

**Obs 7.9.** Relembrando que as funções envolvidas nestes coeficientes devem ser preenchidas conforme suas definições, dadas na Seção 7.2

7.3.5. *O sistema algébrico completo para o subsistema pressão-velocidade.* Lembramos inicialmente que de acordo com as condições de contorno dadas em (7.1)–(7.2), todas as variáveis são conhecidas na extremidade de injeção  $x_{-\frac{1}{2}}$ .

Do mesmo modo, usando (5.37) e a condição de contorno (7.4), todas as variáveis são conhecidas na extremidade de produção  $x_{N-\frac{1}{2}}$

Reescremos abaixo as equações discretizadas da velocidade e da pressão, na extremidade de injeção, no interior da malha, e na extremidade de produção.

Para a extremidade de injeção tais equações são dadas em (7.71) e (7.27), ou

$$\tilde{\alpha}_v(0)\Delta\bar{v}m0 + \tilde{\delta}_v(1)\Delta\bar{v}m(1) = \tilde{\gamma}_v(0),$$

e

$$\frac{\Delta x}{2}\Delta\bar{v}m0 + \tilde{D}_p(0)\Delta\bar{p}(0) = \tilde{A}_p(0).$$

Para o interior da malha,  $j = 1, \dots, N-2$ , são dadas em (4.74) e (4.75), ou

$$\alpha_v(j)\Delta\bar{v}m(j)\delta_v(j+1)\Delta\bar{v}m(j+1) = \gamma_v(j),$$

$$L_p(j-1)\Delta\bar{p}(j-1) + \Delta x\Delta\bar{v}m(j) + D_p(j)\Delta\bar{p}(j) = A_p(j).$$

Para  $j = N-1$ , consideramos a equação da velocidade na produção, dada em (7.72) e a equação da pressão (4.75) com  $j = N-1$ , isto é:

$$\tilde{\alpha}_v(N-1)\Delta\bar{v}m(N-1)\tilde{\delta}_v(N)\Delta\bar{v}mN = \tilde{\gamma}_v(N-1),$$

e

$$L_p(N-2)\Delta\bar{p}(N-2) + \Delta x\Delta\bar{v}m(N-1) + D_p(N-1)\Delta\bar{p}(N-1) = A_p(N-1).$$

Para completar o sistema  $(N+1) \times (N+1)$ , consideramos como no caso compressível,

$$\Delta\bar{p}mN = \tilde{\gamma}_v(N), \quad \text{Eq. (7.51),}$$

e



Os blocos referentes à injeção são dados por:

$$\tilde{\mathcal{D}}(0) = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_v(0) & 0 \\ \Delta x/2 & \tilde{D}_p(0) \end{pmatrix}, \quad \text{proveniente do sistema (7.71), (7.27),} \quad (7.77)$$

$$\tilde{\mathcal{U}}(1) = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_v(1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{também proveniente do sistema (7.71), (7.27),} \quad (7.78)$$

$$\tilde{\mathcal{A}}(0) = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_v(0) \\ \tilde{A}_p(0) \end{pmatrix}, \quad \text{Eq: (7.59),}$$

**Obs 7.10.** Conforme Obervação 7.2 nesta seção não é necessário fazer o deslocamento dos argumentos dos  $\tilde{\gamma}_v$ , como foi feito na Seção 5.2.5.

Os blocos referentes ao interior da malha são dados por:

$$\mathcal{L}(j-1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & L_p(j-1) \end{pmatrix}, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, N-2, \quad (7.79)$$

$$\mathcal{D}(j) = \begin{pmatrix} \alpha_v(j) & 0 \\ \Delta x & D_p(j) \end{pmatrix}, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, N-2, \quad (7.80)$$

$$\mathcal{U}(j+1) = \begin{pmatrix} \delta_v(j+1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, N-2, \quad (7.81)$$

$$A(j) = \begin{pmatrix} \gamma_v(j) \\ A_p(j) \end{pmatrix}, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, N-2, \text{ Eq. (7.63).}$$

Os blocos correspondentes a equação da velocidade na produção (7.72) e a equação da pressão (4.75) com  $j = N-1$ , são dados por:

$$\tilde{\mathcal{L}}(N-2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & L_p(N-2) \end{pmatrix}, \quad \text{proveniente do sistema (7.72), (4.75) com } j = N-1, \quad (7.82)$$

$$\tilde{\mathcal{D}}(N-1) = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_v(N-1) & 0 \\ \Delta x & D_p(N-1) \end{pmatrix}, \quad \text{também do sistema (7.72), (4.75) com } j = N-1, \quad (7.83)$$

$$\tilde{\mathcal{U}}(N) = \begin{pmatrix} \tilde{\delta}_v(N) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Eq. (7.66),}$$

$$\tilde{\mathcal{A}}(N-1) = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_v(N-1) \\ A_p(N-1) \end{pmatrix}, \quad \text{Eq. (7.67).}$$

Finalmente, introduzimos os blocos para completar o sistema  $(N+1) \times (N+1)$ . Estes blocos correspondem a equação dada pela condição de contorno na produção para a pressão (7.51), e a equação da pressão na produção (7.45),

$$\tilde{\mathcal{L}}(N-1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{L}_p(N-1) \end{pmatrix}, \quad \text{Eq. (7.68),}$$

$$\tilde{\mathcal{D}}(N) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Delta x/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Eq. (7.69),}$$

$$\tilde{\mathcal{A}}(N) = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_v(N) \\ \tilde{A}_p(N) \end{pmatrix}, \quad \text{Eq. (7.70).}$$

Onde todas as entradas dos blocos acima são definidas conforme Seção 7.2.9.

\*\*\*FEITO ATE AQUI em 13/11/2003 (JESUS) \*\*\*

#### 7.4. Inicialização do subsistema pressão-velocidade. TO DO:

7.4.1. *Primeiro passo do Método de Newton. Discretização da equação da velocidade estacionária na injeção.*

Aqui também observamos que a discretização feita no interior da grade não permite obter de forma recursiva o valor de  $\bar{v}m(1)$ . Mais que isto, não é conhecido nem mesmo uma aproximação inicial para  $\bar{v}m0$ .

Vamos obter uma aproximação inicial para  $\bar{v}_{-\frac{1}{2}} \equiv \bar{v}m0$  via a equação da pressão, usando a aproximação grosseira  $p_0 \equiv p(0) = p^i(t=0) \equiv p^{i0}$ .

Assim, considerando a discretização da equação da pressão no ponto  $x_{-\frac{1}{2}}$  por diferenças progressivas podemos escrever:

$$\bar{v}_{-\frac{1}{2}} = \frac{2R_{-\frac{1}{2}}^0}{\Delta x} (p_0 - p^{i0}) + \frac{2S_{-\frac{1}{2}}^0}{\Delta x} (s^0 - s^{i0}). \quad (7.84)$$

Como consideramos  $p_0 = p^{i0}$ , temos então que

$$\bar{v}m0 \equiv \bar{v}_{-\frac{1}{2}} = \frac{2S_{-\frac{1}{2}}^0}{\Delta x} (s^0 - s^{i0}). \quad (7.85)$$

Usando o valor de  $\bar{v}m0$  obtido em (7.85) podemos então obter uma primeira aproximação de  $\bar{v}m(1)$  afim de disparar o processo recursivo para a obtenção dos demais valores de  $\bar{v}m(j)$ ,  $j = 2, 3, \dots, N-1$ .

Para isto vamos fazer a discretização da equação da velocidade no ponto  $x_0$ , usando que as funções  $M$  e  $M_g$  no ponto  $x_{-\frac{1}{2}}$  são conhecidas, pois todas as variáveis  $s$ ,  $T$  e  $p$  são dadas neste ponto. Como antes, vamos usar o *superscrito* "0" para indicar que a avaliação das funções está se dando no tempo  $t = 0$ .

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x} (\bar{v}_{\frac{1}{2}} - \bar{v}_{-\frac{1}{2}}) + \frac{\bar{v}_0}{\Delta x} \left( F_{v_0}^0 \cdot (M_{l_{\frac{1}{2}}}^0 - M_{l_{-\frac{1}{2}}}^0) + (M_{g_{\frac{1}{2}}}^0 - M_{g_{-\frac{1}{2}}}^0) \right) \\ & = \frac{1}{(\Delta x)^2} \left[ B_{v_0}^0 \otimes (M_{l_{\frac{1}{2}}}^0 - M_{l_{-\frac{1}{2}}}^0) \right] \cdot (s_{\frac{1}{2}}^0 - s_{-\frac{1}{2}}^0) + G_{v_0}^0. \end{aligned} \quad (7.86)$$

Tomando médias:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x} (\bar{v}_{\frac{1}{2}} - \bar{v}_{-\frac{1}{2}}) + \frac{1}{4\Delta x} (\bar{v}_{-\frac{1}{2}} + \bar{v}_{\frac{1}{2}}) \left( F_{v_0}^0 \cdot (M_{l_0}^0 + M_{l_1}^0 - 2M_{l_{-\frac{1}{2}}}^0) + M_{g_0}^0 + M_{g_1}^0 - 2M_{g_{-\frac{1}{2}}}^0 \right) \\ & = \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ B_{v_0}^0 \otimes (M_{l_0}^0 + M_{l_1}^0 - 2M_{l_{-\frac{1}{2}}}^0) \right] \cdot (s_0^0 + s_1^0 - 2s_{-\frac{1}{2}}^0) + G_{v_0}^0. \end{aligned} \quad (7.87)$$

Fazendo a identificação  $\bar{v}_{-\frac{1}{2}} \equiv \bar{v}m0$  e  $\bar{v}_{\frac{1}{2}} \equiv \bar{v}m(1)$  e separando os termos convenientemente, obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x} \left( -1 + \frac{1}{4} F_{v_0}^0 \cdot (M_{l_0}^0 + M_{l_1}^0 - 2M_{l_{-\frac{1}{2}}}^0) + \frac{1}{4} (M_{g_0}^0 + M_{g_1}^0 - 2M_{g_{-\frac{1}{2}}}^0) \right) \bar{v}m0 \\ & + \frac{1}{\Delta x} \left( 1 + \frac{1}{4} F_{v_0}^0 \cdot (M_{l_0}^0 + M_{l_1}^0 - 2M_{l_{-\frac{1}{2}}}^0) + \frac{1}{4} (M_{g_0}^0 + M_{g_1}^0 - 2M_{g_{-\frac{1}{2}}}^0) \right) \bar{v}m(1) \\ & = \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ B_{v_0}^0 \otimes (M_{l_0}^0 + M_{l_1}^0 - 2M_{l_{-\frac{1}{2}}}^0) \right] \cdot (s_0^0 + s_1^0 - 2s_{-\frac{1}{2}}^0) + G_{v_0}^0. \end{aligned} \quad (7.88)$$

Numa forma compacta a equação (7.88) pode ser escrita como:

$$\tilde{\alpha}_v^0(0)\bar{v}m0 + \tilde{\delta}_v^0(1)\bar{v}m(1) = \tilde{\gamma}_v^0(0), \quad (7.89)$$

onde

$$\tilde{\alpha}_v^0(0) = \frac{1}{\Delta x} \left( -1 + \frac{1}{4} F_{v_0}^0 \cdot (M_{l_0}^0 + M_{l_1}^0 - 2M_{l_{-\frac{1}{2}}}^0) + \frac{1}{4} (M_{g_0}^0 + M_{g_1}^0 - 2M_{g_{-\frac{1}{2}}}^0) \right), \quad (7.90)$$

$$\tilde{\delta}_v^0(1) = \frac{1}{\Delta x} \left( 1 + \frac{1}{4} F_{v_0}^0 \cdot (M_{l_0}^0 + M_{l_1}^0 - 2M_{l_{-\frac{1}{2}}}^0) + \frac{1}{4} (M_{g_0}^0 + M_{g_1}^0 - 2M_{g_{-\frac{1}{2}}}^0) \right), \quad (7.91)$$

$$\tilde{\gamma}_v^0(0) = \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ B_{v_0}^0 \otimes (M_{l_0}^0 + M_{l_1}^0 - 2M_{l_{-\frac{1}{2}}}^0) \right] \cdot (s_0^0 + s_1^0 - 2s_{-\frac{1}{2}}^0) + G_{v_0}^0. \quad (7.92)$$

Portanto  $\bar{v}m(1)$  pode ser obtido em função de  $\bar{v}m0$  como:

$$\bar{v}m(1) = \frac{1}{\tilde{\delta}_v^0(1)} \left( \tilde{\gamma}_v^0(0) - \tilde{\alpha}_v^0(0)\bar{v}m0 \right). \quad (7.93)$$

*Discretização newtoniana da equação da pressão na injeção.*

Já foi feita ao obtermos a aproximação inicial para  $\bar{v}_{-\frac{1}{2}}$ :

$$\bar{p}(0) = p^{i0}. \quad (7.94)$$

*Discretização da equação da velocidade estacionária na produção.*

O valor de  $\bar{v}mN$  é obtido usando a discretização da equação da velocidade na produção. Para isto os valores das funções calculadas na produção serão avaliados aproximadamente, utilizando  $U_{N-\frac{1}{2}}^0 = (s_{N-1}^0 + \frac{\Delta x}{2}s_x^{e0}, T^{e0})^T$  e  $p_{N-\frac{1}{2}}^0 = p^{e0}$ , onde  $s_x^{e0} \equiv s_x^e(t=0)$ ,  $T^{e0} \equiv T^e(t=0)$  e  $p^{e0} \equiv p^e(t=0)$ .

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x} (\bar{v}_{N-\frac{1}{2}} - \bar{v}_{N-\frac{3}{2}}) + \frac{\bar{v}_{N-1}}{\Delta x} \left( F_{v_{N-1}}^0 (M_{l_{N-\frac{1}{2}}}^0 - M_{l_{N-\frac{3}{2}}}^0) + M_{g_{N-\frac{1}{2}}}^0 - M_{g_{N-\frac{3}{2}}}^0 \right) \\ &= \frac{1}{(\Delta x)^2} \left[ B_{v_{N-1}}^0 \otimes (M_{l_{N-\frac{1}{2}}}^0 - M_{l_{N-\frac{3}{2}}}^0) \right] \cdot (s_{N-\frac{1}{2}}^0 - s_{N-\frac{3}{2}}^0) + G_{v_{N-1}}^0. \end{aligned} \quad (7.95)$$

Tomando-se médias onde for possível temos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x} (\bar{v}_{N-\frac{1}{2}} - \bar{v}_{N-\frac{3}{2}}) \\ &+ \frac{1}{4\Delta x} (\bar{v}_{N-\frac{3}{2}} + \bar{v}_{N-\frac{1}{2}}) \left( F_{v_{N-1}}^0 \cdot (2M_{l_{N-\frac{1}{2}}}^0 - M_{l_{N-2}}^0 - M_{l_{N-1}}^0) + 2M_{g_{N-\frac{1}{2}}}^0 - M_{g_{N-2}}^0 - M_{g_{N-1}}^0 \right) \\ &= \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ B_{v_{N-1}}^0 \otimes (2M_{l_{N-\frac{1}{2}}}^0 - M_{l_{N-2}}^0 - M_{l_{N-1}}^0) \right] \cdot (2s_{N-\frac{1}{2}}^0 - s_{N-2}^0 - s_{N-1}^0) + G_{v_{N-1}}^0. \end{aligned} \quad (7.96)$$



Fazendo as identificações  $\bar{v}_{N-\frac{3}{2}} \equiv \bar{v}m(N-1)$ ,  $\bar{v}_{N-\frac{1}{2}} \equiv \bar{v}mN$ , e separando os termos convenientemente, obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x} \left( -1 + \frac{1}{4} F_{v_{N-1}}^0 (2M_{l_{N-\frac{1}{2}}}^0 - M_{l_{N-2}}^0 - M_{l_{N-1}}^0) + \frac{1}{4} (2M_{g_{N-\frac{1}{2}}}^0 - M_{g_{N-2}}^0 - M_{g_{N-1}}^0) \right) \bar{v}m(N-1) \\ & + \frac{1}{\Delta x} \left( 1 + \frac{1}{4} F_{v_{N-1}}^0 (2M_{l_{N-\frac{1}{2}}}^0 - M_{l_{N-2}}^0 - M_{l_{N-1}}^0) + \frac{1}{4} (2M_{g_{N-\frac{1}{2}}}^0 - M_{g_{N-2}}^0 - M_{g_{N-1}}^0) \right) \bar{v}mN \\ & = \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ B_{v_{N-1}}^0 \otimes (2M_{l_{N-\frac{1}{2}}}^0 - M_{l_{N-2}}^0 - M_{l_{N-1}}^0) \right] \cdot (2s_{N-\frac{1}{2}}^0 - s_{N-2}^0 - s_{N-1}^0) + G_{v_{N-1}}^0. \end{aligned} \quad (7.97)$$

Numa forma compacta a equação (7.97) pode ser escrita como:

$$\tilde{\alpha}_v^0(N-1)\bar{v}m(N-1) + \tilde{\delta}_v^0(N)\bar{v}mN = \tilde{\gamma}_v^0(N-1), \quad (7.98)$$

onde

$$\tilde{\alpha}_v^0(N-1) = \frac{1}{\Delta x} \left( -1 + \frac{1}{4} F_{v_{N-1}}^0 (2M_{l_{N-\frac{1}{2}}}^0 - M_{l_{N-2}}^0 - M_{l_{N-1}}^0) + \frac{1}{4} (2M_{g_{N-\frac{1}{2}}}^0 - M_{g_{N-2}}^0 - M_{g_{N-1}}^0) \right) \quad (7.99)$$

$$\tilde{\delta}_v^0(N) = \frac{1}{\Delta x} \left( 1 + \frac{1}{4} F_{v_{N-1}}^0 (2M_{l_{N-\frac{1}{2}}}^0 - M_{l_{N-2}}^0 - M_{l_{N-1}}^0) + \frac{1}{4} (2M_{g_{N-\frac{1}{2}}}^0 - M_{g_{N-2}}^0 - M_{g_{N-1}}^0) \right) \quad (7.100)$$

$$\tilde{\gamma}_v^0(N-1) = \frac{1}{4(\Delta x)^2} \left[ B_{v_{N-1}}^0 \otimes (2M_{l_{N-\frac{1}{2}}}^0 - M_{l_{N-2}}^0 - M_{l_{N-1}}^0) \right] \cdot (2s_{N-\frac{1}{2}}^0 - s_{N-2}^0 - s_{N-1}^0) + G_{v_{N-1}}^0. \quad (7.101)$$

Portanto  $\bar{v}mN$  pode ser obtido em função de  $\bar{v}m(N-1)$  como:

$$\bar{v}mN = \frac{1}{\tilde{\delta}_v^0(N)} \left( \tilde{\gamma}_v^0(N-1) - \tilde{\alpha}_v^0(N-1)\bar{v}m(N-1) \right). \quad (7.102)$$

*Discretização da equação da pressão na produção.*

O valor de  $\bar{p}mN$  é dado por  $p^{e0} \equiv p^e(t=0)$ .

## REFERENCES

- [1] BEAM, R.M., and WARMING, R.F., *An implicit finite difference algorithm for hyperbolic systems in conservation-law form*, J. Comput. Phys., no. 22, 87-116, 1976
- [2] CROOKSTON, R.B., CULHAM, W.E., *A numerical simulation model for thermal recovery processes*, SPEJ (Fev. 1979), 37-58, 1979
- [3] MOTA, J.C. DA, SOUZA, A.J. DE, MARCHESIN, D., PLOHR, B.J., KRAUSE, P., and TEIXEIRA, P.W., *Solução sequencial-iterativa de um modelo bifásico compressível simples de oxidação em meios porosos*, in preparation, 2002

## APPENDIX A. EXPRESSÕES GENÉRICAS PARA AS FUNÇÕES DO MODELO.

Nesta seção estão determinadas as funções e suas derivadas que são necessárias para a implementação do modelo bifásico simples

Inicialmente relembramos que o vetor das variáveis de estado é denotado por  $U$  (definido em (2.8)), ou por  $\pi(U)$ , de acordo com a conveniência para identificação com o modelo “oxid”

**A.1. Funções e derivadas para o subsistema de balanços.** Para as funções e jacobianas do subsistema de balanços escrito na forma genérica em (2.7), inicialmente relembramos que

$$U = (s_w, s_o)^T \quad \text{e} \quad p = p_o.$$

Introduzimos as seguintes notações:

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_w \\ \rho_o \end{pmatrix}, \quad D_\rho = \begin{pmatrix} \rho_w & 0 \\ 0 & \rho_o \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

onde

$$\rho_w = \rho_w(p_w) \quad \text{e} \quad \rho_o = \rho_w(p_o). \quad (\text{A.2})$$

Como  $p_w = p_o - p_{ow}(s_w)$ , então, de um modo geral vamos considerar que

$$\rho_w = \rho_w(U, p) \quad \text{e} \quad \rho_o = \rho_o(U, p). \quad (\text{A.3})$$

$$H(U) = \begin{pmatrix} H^1(U) \\ H^2(U) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi s_w \\ \phi s_o \end{pmatrix}, \quad D_H(U) = \begin{pmatrix} H^1(U) & 0 \\ 0 & H^2(U) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

$$F(U, p) = \begin{pmatrix} F^1(U, p) \\ F^2(U, p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_w(U, p) \\ f_o(U, p) \end{pmatrix}, \quad D_F(U, p) = \begin{pmatrix} F^1(U, p) & 0 \\ 0 & F^2(U, p) \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Aqui, a notação  $F^1$  e  $F^2$  não é necessária, foi mantida porque o Dan pretende usa-la em outro trabalho.

**Grandezas conservadas:**

$$H_U(U, p) = \begin{pmatrix} \phi s_w \rho_w(U, p) \\ \phi s_o \rho_o(U, p) \end{pmatrix} = D_\rho(U, p) H(U). \quad (\text{A.6})$$

Jacobiana de  $H_U$  na variável  $U$ :

$$\frac{\partial H_U}{\partial U}(U, p) = \begin{pmatrix} \phi \rho_w + \phi s_w \frac{\partial \rho_w}{\partial s_w} & \phi s_w \frac{\partial \rho_w}{\partial s_o} \\ \phi s_o \frac{\partial \rho_o}{\partial s_w} & \phi \rho_o + \phi s_o \frac{\partial \rho_o}{\partial s_o} \end{pmatrix} = D_\rho \frac{\partial H}{\partial U} + D_H \frac{\partial \rho}{\partial U} \quad (\text{A.7})$$

onde

$$\frac{\partial H}{\partial U} = \begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \phi \end{pmatrix} = \phi I \quad \text{e} \quad \frac{\partial \rho}{\partial U} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho_w}{\partial s_w} & \frac{\partial \rho_w}{\partial s_o} \\ \frac{\partial \rho_o}{\partial s_w} & \frac{\partial \rho_o}{\partial s_o} \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

onde  $I$  é a matriz identidade  $2 \times 2$ .

**Obs A.1.** Considerando as densidades  $\rho_w$  e  $\rho_o$  constantes, a matriz  $\frac{\partial H_U}{\partial U}$  assume uma forma muito simples, dada por

$$\frac{\partial H_U}{\partial U} = \phi D_\rho \quad (\text{A.9})$$

**Termo de fluxo:**

$$F_U(U, p) = \begin{pmatrix} v \rho_w(U, p) f_w(U, p) \\ v \rho_o(U, p) f_o(U, p) \end{pmatrix} = v D_\rho(U, p) F(U, p). \quad (\text{A.10})$$

Jacobiana de  $F_U$  na variável  $U$ :

A jacobiana de  $F_U$  na variável  $U$  é obtida de modo análogo a jacobiana de  $H_U$

$$\frac{\partial F_U}{\partial U}(U, p) = v D_\rho \frac{\partial F}{\partial U} + v D_F \frac{\partial \rho}{\partial U} \quad (\text{A.11})$$

onde  $D_\rho$  é dada em (A.1),  $D_F$  é dada em (A.5),  $\frac{\partial \rho}{\partial U}(U, p)$  é dada em (A.8), e

$$\frac{\partial F}{\partial U}(U, p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial s_w} & \frac{\partial F^1}{\partial s_o} \\ \frac{\partial F^2}{\partial s_w} & \frac{\partial F^2}{\partial s_o} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.12})$$

com

$$\frac{\partial F^1}{\partial s_w} = \frac{\partial f_w}{\partial s_w}, \quad \frac{\partial F^1}{\partial s_o} = \frac{\partial f_w}{\partial s_o}, \quad \frac{\partial F^2}{\partial s_w} = \frac{\partial f_o}{\partial s_w}, \quad \frac{\partial F^2}{\partial s_o} = \frac{\partial f_o}{\partial s_o} \quad (\text{A.13})$$

**Obs A.2.** Se as densidades  $\rho_w$  e  $\rho_o$  são constantes, então  $\frac{\partial \rho}{\partial U} = 0$ , e a jacobiana  $\frac{\partial F_U}{\partial U}$  assume uma forma simples, dada por

$$\frac{\partial F_U}{\partial U}(U, p) = D_\rho \frac{\partial F}{\partial U} \quad (\text{A.14})$$

**Termo difusivo:**

$$B_U(U, p) = D_\rho(U, p) B(U, p), \quad \text{onde} \quad (\text{A.15})$$

a matriz  $D_\rho(U, p)$  é dada em (A.1), e

$$B(U, p) = \begin{pmatrix} B_{11}(U, p) & B_{12}(U, p) \\ B_{21}(U, p) & B_{22}(U, p) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.16})$$

onde  $B_{11}$ ,  $B_{12}$ ,  $B_{21}$  e  $B_{22}$  estão definidos em (B.76), (B.68), (B.77) e (B.69), respectivamente

Calculamos a matriz jacobiana de  $B_U(U, p)$  efetuando primeiro o produto de  $D_\rho(U, p)$  por  $B(U, p)$ . Escrevemos,

$$B_U(U, p) = \begin{pmatrix} B_U^{11}(U, p) & B_U^{12}(U, p) \\ B_U^{21}(U, p) & B_U^{22}(U, p) \end{pmatrix}, \quad \text{onde}$$

$$B_U^{11}(U, p) = \rho_w(U, p)B_{11}(U, p), \quad B_U^{12}(U, p) = \rho_w(U, p)B_{12}(U, p), \quad (\text{A.17})$$

$$B_U^{21}(U, p) = \rho_o(U, p)B_{21}(U, p), \quad B_U^{22}(U, p) = \rho_o(U, p)B_{22}(U, p) \quad (\text{A.18})$$

A jacobiana de  $B_U$  na variável  $U$  é:

$$\frac{\partial B_U}{\partial U}(U, p) = \begin{pmatrix} \left( \frac{\partial B_U^{11}}{\partial s_w} & \frac{\partial B_U^{11}}{\partial s_o} \right) & \left( \frac{\partial B_U^{12}}{\partial s_w} & \frac{\partial B_U^{12}}{\partial s_o} \right) \\ \left( \frac{\partial B_U^{21}}{\partial s_w} & \frac{\partial B_U^{21}}{\partial s_o} \right) & \left( \frac{\partial B_U^{22}}{\partial s_w} & \frac{\partial B_U^{22}}{\partial s_o} \right) \end{pmatrix}, \quad \text{onde} \quad (\text{A.19})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_U^{11}}{\partial s_w}(U, p) &= \frac{\partial \rho_w}{\partial s_w} B_{11}(U, p) + \rho_w(U, p) \frac{\partial B_{11}}{\partial s_w}, & \frac{\partial B_U^{11}}{\partial s_o}(U, p) &= \rho_w(U, p) \frac{\partial B_{11}}{\partial s_o}, \\ \frac{\partial B_U^{12}}{\partial s_w}(U, p) &= \frac{\partial \rho_w}{\partial s_w} B_{12}(U, p) + \rho_w(U, p) \frac{\partial B_{12}}{\partial s_w}, & \frac{\partial B_U^{12}}{\partial s_o}(U, p) &= \rho_w(U, p) \frac{\partial B_{12}}{\partial s_o}, \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_U^{21}}{\partial s_w}(U, p) &= \rho_o(U, p) \frac{\partial B_{21}}{\partial s_w}, & \frac{\partial B_U^{21}}{\partial s_o}(U, p) &= \rho_o(U, p) \frac{\partial B_{21}}{\partial s_o}, \\ \frac{\partial B_U^{22}}{\partial s_w}(U, p) &= \rho_o(U, p) \frac{\partial B_{22}}{\partial s_w}, & \frac{\partial B_U^{22}}{\partial s_o}(U, p) &= \rho_o(U, p) \frac{\partial B_{22}}{\partial s_o}. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

**Obs A.3.** Se as densidades  $\rho_w$  e  $\rho_o$  são constantes, então a jacobiana  $\frac{\partial B_U}{\partial U}(U, p)$  assume uma forma simples, dada por

$$\frac{\partial B_U}{\partial U}(U, p) = D_\rho(U, p) \frac{\partial B}{\partial U}(U, p) \quad (\text{A.22})$$

onde  $\frac{\partial B}{\partial U}$  é a jacobiana da matriz  $B$

**Termo de fonte:**

$$G_U(U, p) = \begin{pmatrix} G_U^1(U, p) \\ G_U^2(U, p) \end{pmatrix}, \quad \text{onde} \quad (\text{A.23})$$

$$G_U^1(U, p) = 0, \quad G_U^2(U, p) = 0 \quad (\text{A.24})$$

A jacobiana de  $G_U$  na variável  $U$  é:

$$\frac{\partial G_U}{\partial U}(U, p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_U^1}{\partial s_w} & \frac{\partial G_U^1}{\partial s_o} \\ \frac{\partial G_U^2}{\partial s_w} & \frac{\partial G_U^2}{\partial s_o} \end{pmatrix}, \quad \text{onde} \quad (\text{A.25})$$

$$\frac{\partial G_U^1}{\partial s_o}(U, p) = 0, \quad \frac{\partial G_U^1}{\partial s_w}(U, p) = 0, \quad (\text{A.26})$$

$$\frac{\partial G_U^2}{\partial s_o}(U, p) = 0, \quad \frac{\partial G_U^2}{\partial s_w}(U, p) = 0 \quad (\text{A.27})$$

## A.2. Funções e derivadas para o subsistema pressão-velocidade.

A.2.1. *Funções e derivadas para a equação da velocidade na forma não conservativa.* Para a equação da velocidade não conservativa escrita na forma genérica em (2.10)

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} + v \left( F_v(U, p) \cdot \frac{\partial M_l(U, p)}{\partial x} + \frac{\partial M_g(U, p)}{\partial x} \right) &= -\phi \left( \pi(U) \cdot \frac{\partial M_l(U, p)}{\partial t} + \frac{\partial M_g(U, p)}{\partial t} \right) \\ &+ B_v(U, p) \otimes \frac{\partial M_l(U, p)}{\partial x} \frac{\partial \pi(U)}{\partial x} + G_v(U, p), \end{aligned}$$

temos as seguintes funções:

$$M_w(U, p) = \ln \left( \frac{\rho_w}{\rho_g} \right), \quad (\text{A.28})$$

$$M_o(U, p) = \ln \left( \frac{\rho_o}{\rho_g} \right), \quad (\text{A.29})$$

$$M_g(U, p) = \ln(\rho_g), \quad (\text{A.30})$$

Derivadas das funções  $M_w$ ,  $M_o$  e  $M_g$

$$\frac{\partial M_w(U, p)}{\partial p} = \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial \rho_w}{\partial p} - \frac{1}{\rho_g} \frac{\partial \rho_g}{\partial p}, \quad (\text{A.31})$$

$$\frac{\partial M_o(U, p)}{\partial p} = \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial \rho_o}{\partial p} - \frac{1}{\rho_g} \frac{\partial \rho_g}{\partial p}, \quad (\text{A.32})$$

$$\frac{\partial M_g(U, p)}{\partial p} = \frac{1}{\rho_g} \frac{\partial \rho_g}{\partial p} \quad (\text{A.33})$$

$$G_v(U, p) = 0 \quad \frac{\partial G_v(U, p)}{\partial p} = 0 \quad (\text{A.34})$$

$$F_v(U, p) = (f_w(U, p), f_o(U, p))^T, \quad (\text{A.35})$$

$$M_l(U, p) = (M_w(U, p), M_o(U, p))^T, \quad (\text{A.36})$$

$$B_v(U, p) = ((B_{11} \ B_{12}) (B_{21} \ B_{22})) \quad (\text{A.37})$$

**Obs A.4.** A função  $F_v$  definida em (A.35) é a mesma função  $F$  definida em (A.5). Só a redefinimos aqui por questão de compatibilidade dos modelos “oxid” e “compressible”

**Obs A.5.** Os produtos de dois vetores colunas que aparecem na equação da velocidade (2.10) devem ser interpretados como produtos escalares

Derivadas das funções  $F_v$ ,  $M_l$  e  $B_v$

$$\frac{\partial F_v(U, p)}{\partial p} = \left( \frac{\partial f_w(U, p)}{\partial p}, \frac{\partial f_o(U, p)}{\partial p} \right)^T, \quad (\text{A.38})$$

$$\frac{\partial M_l(U, p)}{\partial p} = \left( \frac{\partial M_w(U, p)}{\partial p}, \frac{\partial M_o(U, p)}{\partial p} \right)^T, \quad (\text{A.39})$$

$$\frac{\partial B_v(U, p)}{\partial p} = \left( \left( \frac{\partial B_{11}}{\partial p} \quad \frac{\partial B_{12}}{\partial p} \right) \left( \frac{\partial B_{21}}{\partial p} \quad \frac{\partial B_{22}}{\partial p} \right) \right) \quad (\text{A.40})$$

A.2.2. *Funções e derivadas para a equação da pressão.* Para a equação da pressão (2.11)

$$v = R(U, p) \frac{\partial p}{\partial x} + S(U, p) \cdot \frac{\partial \pi(U)}{\partial x}$$

temos as seguintes funções:

$$R(U, p) = -\lambda(U, p), \quad (\text{A.41})$$

$$S(U, p) = (S^1(U, p) \quad S^2(U, p)), \quad (\text{A.42})$$

com

$$S^1(U, p) = \lambda_w(U, p) \frac{dp_{ow}(s_w)}{ds_w} - \lambda_g(U, p) \frac{dp_{og}(s_g)}{ds_g}, \quad (\text{A.43})$$

$$S^2(U, p) = -\lambda_g(U, p) \frac{dp_{og}(s_g)}{ds_g} \quad (\text{A.44})$$

Derivadas das funções  $R(U, p)$  e  $S(U, p)$ ,

$$\frac{\partial R(U, p)}{\partial p} = -\frac{\partial \lambda(U, p)}{\partial p} \quad (\text{A.45})$$

$$\frac{\partial S(U, p)}{\partial p} = \left( \frac{\partial S^1(U, p)}{\partial p} \quad \frac{\partial S^2(U, p)}{\partial p} \right), \quad (\text{A.46})$$

onde

$$\frac{\partial S^1(U, p)}{\partial p} = \frac{\partial \lambda_w(U, p)}{\partial p} \frac{dp_{ow}(s_w)}{ds_w} - \frac{\partial \lambda_g(U, p)}{\partial p} \frac{dp_{og}(s_g)}{ds_g}, \quad (\text{A.47})$$

e

$$\frac{\partial S^2(U, p)}{\partial p} = - \frac{\partial \lambda_g(U, p)}{\partial p} \frac{dp_{og}(s_g)}{ds_g}. \quad (\text{A.48})$$

## APPENDIX B. FUNÇÕES TÍPICAS E SUAS DERIVADAS.

Esta seção trata das funções da física do problema sem se preocupar com adimensionalização

Densidade do gás

$$\rho_g(U, p) = \rho_g(p_g(U, p)) = a + b p_g(U, p), \quad (\text{B.1})$$

onde  $a$ ,  $b$  são constantes podendo-se tomar  $a = 0$  e  $b = \frac{M}{RT_g}$ , sendo  $M$  a massa molecular do gás,  $R$  a constante universal dos gases e  $T_g$  uma temperatura fixa;

$$\frac{\partial \rho_g(U, p)}{\partial s_w} = b \frac{\partial p_g}{\partial s_w}, \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{\partial \rho_g(U, p)}{\partial s_o} = b \frac{\partial p_g}{\partial s_o}, \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{\partial \rho_g(U, p)}{\partial p} = b \frac{\partial p_g}{\partial p}, \quad (\text{B.4})$$

Densidade do óleo:

$$\rho_o(U, p) = a + b e^{c(p - \bar{p}_o)}, \quad (\text{B.5})$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes e  $\bar{p}_o$  é uma pressão de referência do óleo (Crookston, [2]);

$$\frac{\partial \rho_o}{\partial s_w} = \frac{\partial \rho_o}{\partial s_o} = 0, \quad \frac{\partial \rho_o}{\partial p} = b c e^{c(p - \bar{p}_o)}; \quad (\text{B.6})$$

Densidade da água

$$\rho_w(U, p) = \rho_w(p_w(U, p)) = a + b e^{c(p_w(U, p) - \bar{p}_w)}, \quad (\text{B.7})$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes,  $p_w$  é a pressão da água e  $\bar{p}_w$  é uma pressão de referência também da água (Crookston, [2]);

$$\frac{\partial \rho_w(U, p)}{\partial s_w} = b c \frac{\partial p_w}{\partial s_w} e^{c(p_w(U, p) - \bar{p}_w)}, \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{\partial \rho_w(U, p)}{\partial s_o} = b c \frac{\partial p_w}{\partial s_o} e^{c(p_w(U, p) - \bar{p}_w)}, \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{\partial \rho_w(U, p)}{\partial p} = b c \frac{\partial p_w}{\partial p} e^{c(p_w(U, p) - \bar{p}_w)} \quad (\text{B.10})$$

Pressão capilar gás-óleo:

$$p_{og}(s_g) = a s_g + b, \quad \text{onde } a < 0 \text{ e } b \text{ são constantes;} \quad (\text{B.11})$$

$$\frac{dp_{og}(s_g)}{ds_g} = a; \quad (\text{B.12})$$

$$\frac{d^2 p_{og}(s_g)}{ds_g^2} = 0; \quad (\text{B.13})$$

Pressão capilar óleo-água:

$$p_{ow}(s_w) = a s_w + b, \quad \text{onde } a < 0 \text{ e } b \text{ são constantes;} \quad (\text{B.14})$$

$$\frac{dp_{ow}(s_w)}{ds_w} = a; \quad (\text{B.15})$$

$$\frac{d^2 p_{ow}(s)}{ds_w^2} = 0; \quad (\text{B.16})$$

Pressão da água:

$$p_w(U, p) = p - p_{ow}(s_w); \quad (\text{B.17})$$



$$\frac{\partial p_w(U, p)}{\partial s_w} = -\frac{dp_{ow}(s_w)}{ds_w}; \quad (\text{B.18})$$

$$\frac{\partial p_w(U, p)}{\partial s_o} = 0; \quad (\text{B.19})$$

$$\frac{\partial p_w(U, p)}{\partial p} = 1; \quad (\text{B.20})$$

Pressão do gás:

$$p_g(U, p) = p - p_{og}(s_g), \quad \text{com} \quad s_g = 1 - s_w - s_o \quad (\text{B.21})$$

$$\frac{\partial p_g(U, p)}{\partial s_w} = \frac{\partial p_g(U, p)}{\partial s_o} = -\frac{dp_{og}(s_g)}{ds_g}; \quad (\text{B.22})$$

$$\frac{\partial p_g(U, p)}{\partial p} = 1; \quad (\text{B.23})$$

Viscosidade do gás:

$$\mu_g(p) = a + bp, \quad \text{onde } a \text{ e } b \text{ são constantes}; \quad (\text{B.24})$$

$$\frac{d\mu_g(p)}{dp} = b; \quad (\text{B.25})$$

Viscosidade do óleo

$$\mu_o(p) = a + bp, \quad \text{onde } a \text{ e } b \text{ são constantes}; \quad (\text{B.26})$$

$$\frac{d\mu_o(p)}{dp} = b; \quad (\text{B.27})$$

Viscosidade da água

$$\mu_w(p) = a + bp, \quad \text{onde } a \text{ e } b \text{ são constantes}; \quad (\text{B.28})$$

$$\frac{d\mu_w(p)}{dp} = b; \quad (\text{B.29})$$

Permeabilidade relativa do gás:

$$k_g(U) = [1 - s_o - s_w]^r, \quad \text{onde } r \text{ é constante } (r = 2, \text{ por default}); \quad (\text{B.30})$$

$$\frac{\partial k_g(U)}{\partial s_o} = -r[1 - s_o - s_w]^{r-1}; \quad (\text{B.31})$$

$$\frac{\partial k_g(U)}{\partial s_w} = -r[1 - s_o - s_w]^{r-1}; \quad (\text{B.32})$$

Permeabilidade relativa do óleo:

$$k_o(U) = s_o^r, \quad \text{onde } r \text{ é constante } (r = 2, \text{ por default}); \quad (\text{B.33})$$

$$\frac{\partial k_o(U)}{\partial s_o} = r s_o^{r-1}; \quad (\text{B.34})$$

$$\frac{\partial k_o(U)}{\partial s_w} = 0; \quad (\text{B.35})$$

Permeabilidade relativa da água:

$$k_w(U) = s_w^r, \quad \text{onde } r \text{ é constante } (r = 2, \text{ por default}); \quad (\text{B.36})$$

$$\frac{\partial k_w(U)}{\partial s_o} = 0; \quad (\text{B.37})$$

$$\frac{\partial k_w(U)}{\partial s_w} = r s_w^{r-1}; \quad (\text{B.38})$$

Mobilidade relativa do gás:

$$\lambda_g(U, p) = \frac{k_g(U)}{\mu_g(p)}; \quad (\text{B.39})$$

$$\frac{\partial \lambda_g(U, p)}{\partial s_o} = \frac{\partial k_g(U)}{\partial s_o} / \mu_g(p); \quad (\text{B.40})$$

$$\frac{\partial \lambda_g(U, p)}{\partial s_w} = \frac{\partial k_g(U)}{\partial s_w} / \mu_g(p); \quad (\text{B.41})$$

$$\frac{\partial \lambda_g(U, p)}{\partial p} = -k_g(U) \frac{d\mu_g(p)}{dp} / \mu_g^2(p); \quad (\text{B.42})$$

Mobilidade relativa do óleo:

$$\lambda_o(U, p) = \frac{k_o(U)}{\mu_o(p)}; \quad (\text{B.43})$$

$$\frac{\partial \lambda_o(U, p)}{\partial s_o} = \frac{\partial k_o(U)}{\partial s_o} / \mu_o(p); \quad (\text{B.44})$$

$$\frac{\partial \lambda_o(U, p)}{\partial s_w} = 0; \quad (\text{B.45})$$

$$\frac{\partial \lambda_o(U, p)}{\partial p} = -k_o(U) \frac{d\mu_o(p)}{dp} / \mu_o^2(p); \quad (\text{B.46})$$

Mobilidade relativa da água:

$$\lambda_w(U, p) = \frac{k_w(U)}{\mu_w(p)}; \quad (\text{B.47})$$

$$\frac{\partial \lambda_w(U, p)}{\partial s_w} = \frac{\partial k_w(U)}{\partial s_w} / \mu_w(p); \quad (\text{B.48})$$

$$\frac{\partial \lambda_w(U, p)}{\partial p} = -k_w(U) \frac{d\mu_w(p)}{dp} / \mu_w^2(p); \quad (\text{B.49})$$

Mobilidade Total:

$$\lambda(U, p) = \lambda_o(U, p) + \lambda_w(U, p) + \lambda_g(U, p); \quad (\text{B.50})$$

$$\frac{\partial \lambda(U, p)}{\partial s_o} = \frac{\partial \lambda_o(U, p)}{\partial s_o} + \frac{\partial \lambda_w(U, p)}{\partial s_o} + \frac{\partial \lambda_g(U, p)}{\partial s_o}; \quad (\text{B.51})$$

$$\frac{\partial \lambda(U, p)}{\partial s_w} = \frac{\partial \lambda_o(U, p)}{\partial s_w} + \frac{\partial \lambda_w(U, p)}{\partial s_w} + \frac{\partial \lambda_g(U, p)}{\partial s_w}; \quad (\text{B.52})$$

$$\frac{\partial \lambda(U, p)}{\partial p} = \frac{\partial \lambda_o(U, p)}{\partial p} + \frac{\partial \lambda_w(U, p)}{\partial p} + \frac{\partial \lambda_g(U, p)}{\partial p}; \quad (\text{B.53})$$

Função de fluxo da fase óleo:

$$f_o(U, p) = \lambda_o(U, p) / \lambda(U, p); \quad (\text{B.54})$$

$$\frac{\partial f_o(U, p)}{\partial s_o} = \left[ \frac{\partial \lambda_o(U, p)}{\partial s_o} \lambda(U, p) - \lambda_o(U, p) \frac{\partial \lambda(U, p)}{\partial s_o} \right] / \lambda^2(U, p); \quad (\text{B.55})$$

$$\frac{\partial f_o(U, p)}{\partial s_w} = \left[ \frac{\partial \lambda_o(U, p)}{\partial s_w} \lambda(U, p) - \lambda_o(U, p) \frac{\partial \lambda(U, p)}{\partial s_w} \right] / \lambda^2(U, p); \quad (\text{B.56})$$

Função de fluxo da fase água:

$$f_w(U, p) = \lambda_w(U, p) / \lambda(U, p); \quad (\text{B.57})$$

$$\frac{\partial f_w(U, p)}{\partial s_o} = \left[ \frac{\partial \lambda_w(U, p)}{\partial s_o} \lambda(U, p) - \lambda_w(U, p) \frac{\partial \lambda(U, p)}{\partial s_o} \right] / \lambda^2(U, p); \quad (\text{B.58})$$

$$\frac{\partial f_w(U, p)}{\partial s_w} = \left[ \frac{\partial \lambda_w(U, p)}{\partial s_w} \lambda(U, p) - \lambda_w(U, p) \frac{\partial \lambda(U, p)}{\partial s_w} \right] / \lambda^2(U, p); \quad (\text{B.59})$$

Coefficientes de difusão:

Para definirmos os coeficientes difusivos  $B_{11}$ ,  $B_{12}$ ,  $B_{21}$  e  $B_{22}$ , primeiro definimos duas funções auxiliares,

$$\Omega_1(U, p) = -K \lambda_w(U, p) [1 - f_w(U, p)] \frac{dp_{ow}(s_w)}{ds_w}, \quad \text{e} \quad (\text{B.60})$$

$$\Omega_2(U, p) = K \lambda_o(U, p) f_w(U, p) \frac{dp_{ow}(s_w)}{ds_w} \quad (\text{B.61})$$

Derivadas das funções  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial s_w} = -K \frac{\partial \lambda_w}{\partial s_w} (1 - f_w) \frac{dp_{ow}(s_w)}{ds_w} + K \lambda_w \frac{\partial f_w}{\partial s_w} \frac{dp_{ow}(s_w)}{ds_w} - K \lambda_w (1 - f_w) \frac{d^2 p_{ow}(s_w)}{ds_w^2}, \quad (\text{B.62})$$

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial s_o} = -K \frac{\partial \lambda_w}{\partial s_o} (1 - f_w) \frac{dp_{ow}(s_w)}{ds_w} + K \lambda_w \frac{\partial f_w}{\partial s_o} \frac{dp_{ow}(s_w)}{ds_w}, \quad (\text{B.63})$$

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial p} = -K \frac{\partial \lambda_w}{\partial p} (1 - f_w) \frac{dp_{ow}(s_w)}{ds_w} + K \lambda_w \frac{\partial f_w}{\partial p} \frac{dp_{ow}(s_w)}{ds_w}, \quad (\text{B.64})$$

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial s_w} = K \frac{\partial \lambda_o}{\partial s_w} f_w \frac{dp_{ow}(s_w)}{ds_w} + K \lambda_o \frac{\partial f_w}{\partial s_w} \frac{dp_{ow}(s_w)}{ds_w} + K \lambda_o f_w \frac{d^2 p_{ow}(s_w)}{ds_w^2}, \quad (\text{B.65})$$

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial s_o} = K \frac{\partial \lambda_o}{\partial s_o} f_w \frac{dp_{ow}(s_w)}{ds_w} + K \lambda_o \frac{\partial f_w}{\partial s_o} \frac{dp_{ow}(s_w)}{ds_w}, \quad (\text{B.66})$$

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial p} = K \frac{\partial \lambda_o}{\partial p} f_w \frac{dp_{ow}(s_w)}{ds_w} + K \lambda_o \frac{\partial f_w}{\partial p} \frac{dp_{ow}(s_w)}{ds_w} \quad (\text{B.67})$$

Em seguida definimos os coeficientes  $B_{12}$  e  $B_{22}$ ,

$$B_{12}(p) = -K \lambda_g(U, p) f_w(U, p) \frac{dp_{og}(s_g)}{ds_g} \quad (\text{B.68})$$

$$B_{22}(p) = -K \lambda_g(U, p) f_o(U, p) \frac{dp_{og}(s_g)}{ds_g} \quad (\text{B.69})$$

Derivadas dos coeficientes  $B_{12}$  e  $B_{22}$

$$\frac{\partial B_{12}}{\partial s_w} = -K \frac{\partial \lambda_g}{\partial s_w} f_w \frac{dp_{og}(s_g)}{ds_g} - K \lambda_g \frac{\partial f_w}{\partial s_w} \frac{dp_{og}(s_g)}{ds_g} + K \lambda_g f_w \frac{d^2 p_{og}(s_g)}{ds_g^2}, \quad (\text{B.70})$$

$$\frac{\partial B_{12}}{\partial s_o} = -K \frac{\partial \lambda_g}{\partial s_o} f_w \frac{dp_{og}(s_g)}{ds_g} - K \lambda_g \frac{\partial f_w}{\partial s_o} \frac{dp_{og}(s_g)}{ds_g} + K \lambda_g f_w \frac{d^2 p_{og}(s_g)}{ds_g^2}, \quad (\text{B.71})$$

$$\frac{\partial B_{12}}{\partial p} = -K \frac{\partial \lambda_g}{\partial p} f_w \frac{dp_{og}(s_g)}{ds_g} - K \lambda_g \frac{\partial f_w}{\partial p} \frac{dp_{og}(s_g)}{ds_g}, \quad (\text{B.72})$$

$$\frac{\partial B_{22}}{\partial s_w} = -K \frac{\partial \lambda_g}{\partial s_w} f_o \frac{dp_{og}(s_g)}{ds_g} - K \lambda_g \frac{\partial f_o}{\partial s_w} \frac{dp_{og}(s_g)}{ds_g} + K \lambda_g f_o \frac{d^2 p_{og}(s_g)}{ds_g^2}, \quad (\text{B.73})$$

$$\frac{\partial B_{22}}{\partial s_o} = -K \frac{\partial \lambda_g}{\partial s_o} f_o \frac{dp_{og}(s_g)}{ds_g} - K \lambda_g \frac{\partial f_o}{\partial s_o} \frac{dp_{og}(s_g)}{ds_g} + K \lambda_g f_o \frac{d^2 p_{og}(s_g)}{ds_g^2}, \quad (\text{B.74})$$

$$\frac{\partial B_{22}}{\partial p} = -K \frac{\partial \lambda_g}{\partial p} f_o \frac{dp_{og}(s_g)}{ds_g} - K \lambda_g \frac{\partial f_o}{\partial p} \frac{dp_{og}(s_g)}{ds_g} \quad (\text{B.75})$$

Finalmente definimos os coeficientes  $B_{11}$  e  $B_{21}$  por,

$$B_{11}(U, p) = \Omega_1(U, p) + B_{12}(U, p), \quad e \quad (\text{B.76})$$

$$B_{21}(U, p) = \Omega_2(U, p) + B_{22}(U, p) \quad (\text{B.77})$$

Derivadas dos coeficientes  $B_{11}$  e  $B_{21}$

$$\frac{\partial B_{11}}{\partial s_w} = \frac{\partial \Omega_1}{\partial s_w} + \frac{\partial B_{12}}{\partial s_w}, \quad \frac{\partial B_{11}}{\partial s_o} = \frac{\partial \Omega_1}{\partial s_o} + \frac{\partial B_{12}}{\partial s_o} \quad e \quad \frac{\partial B_{11}}{\partial p} = \frac{\partial \Omega_1}{\partial p} + \frac{\partial B_{12}}{\partial p}, \quad (\text{B.78})$$

$$\frac{\partial B_{21}}{\partial s_w} = \frac{\partial \Omega_2}{\partial s_w} + \frac{\partial B_{22}}{\partial s_w}, \quad \frac{\partial B_{21}}{\partial s_o} = \frac{\partial \Omega_2}{\partial s_o} + \frac{\partial B_{22}}{\partial s_o} \quad e \quad \frac{\partial B_{21}}{\partial p} = \frac{\partial \Omega_2}{\partial p} + \frac{\partial B_{22}}{\partial p} \quad (\text{B.79})$$

INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA,, ESTRADA DONA CASTORINA 110, 22460-320 RIO DE JANEIRO, RJ, BRAZIL

*E-mail address:* marchesini@impa.br

SUNYYSB-LANL

*E-mail address:* plohr@ams.sunysb.edu

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS, GOIÂNIA, GO, BRAZIL

*E-mail address:* jesus@mat.ufg.br

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE,, CAMPINA GRANDE, PB, BRAZIL

*E-mail address:* cido@dme.ufpb.br