Subvariedades de posto dois parabólicas

Pedro Morais

Tese de doutoramento
Orientador: Marcos Dajczer
Data: Abril de 2008
Instituto de Matemática Pura e Aplicada, IMPA

Aos meus pais,
À Carolina,
À Inês,

Agradecimentos

Ao meu orientador, Professor Marcos Dajczer, pela excelente orientação, pela amizade e pelos conselhos valiosos que me deu ao longo do meu percurso no IMPA,

Ao professores do IMPA, em especial aos Professores Fernando Codá, Luis Florit, Manfredo do Carmo, pelas suas excelentes aulas e por todo o apoio,

Aos meus pais, Jorge e Cândida, pelo apoio, amor e exemplo de vida,

Aos meus irmãos, Ana, Marta e Ricardo pela força e carinho,

À Eduarda e ao Francisco, pelo incentivo e pelo carinho que dedicaram à Inês nos momentos em que estive ausente,

A todos os meus amigos que estiveram ao meu lado ao longo destes anos,

Aos meus novos amigos Bladismir, Boris, Nuno, Mario, Marisa, Maria João, Manuel, Paulo, Patrícia, Ruth, Sérgio, Vitor que tornaram o Rio de Janeiro ainda mais maravilhoso,

Ao meu colega de Geometria no IMPA, Marcos Petrucio, pelas conversas estimulantes e pelo apoio nos diversos cursos que fizemos juntos,

À minha amiga Jacinay,

Ao IMPA, pelas excelentes condições de trabalho que me proporcionou,

À Universidade da Beira Interior pelo apoio,

À Fundação para a Ciência e Tecnologia (FCT) pela bolsa que me concedeu,

À Universidade de Murcia, em especial ao Professor Luis Alías, pelas excelentes condições que me proporcionaram nas minhas várias deslocações a Murcia,

À minha filha Inês, pelo sorriso, pelo carinho e por todos os mimos que me deram força para terminar este trabalho,

À minha mulher Carolina, por todas as viagens que fez ao Rio para estar do meu lado, em especial a primeira, pela paciência, pela partilha das emoções, pelo nosso fantástico casamento (que organizou quase sozinha), pela Inês, pelo amor forte que nos tem unido e pela alegria que trouxe à minha vida.

Conteúdo

1 Introdução

O estudo das subvariedades dos espaços forma, isto é, as subvariedades da esfera Euclidiana, do espaço Euclidiano ou do espaço hiperbólico, é usualmente feito analisando as equações de Gauss, Codazzi e Ricci, uma vez que elas determinam completamente uma subvariedade. No entanto estas equações são na maioria dos casos bastante complicadas. Uma descrição paramétrica das subvariedades torna-se assim útil e importante, não só porque permite de uma forma mais clara compreender a sua geometria, mas também pelas aplicações que daí advém ([DG1], [DFT]).

Algumas restrições impostas na geometria das subvariedades implicam a existência de uma distribuição chamada de nulidade relativa. Fazendo uso das propriedades desta distribuição é possível construir uma parametrização ([FL]) que generaliza a parametrização de Gauss ([DG1]) para hipersuperfícies. No entanto, existem propriedades adicionais na estrutura destas subvariedades que permitem construir parametrizações mais simples, e assim entender de forma mais clara a sua geometria ([DF1]). Como exemplo dessas propriedades podemos citar a rigidez das hipersuperfícies ([DG1]).

O estudo da rigidez das subvariedades dos espaços forma tem motivado o trabalho de muitos matemáticos. Um dos resultados clássicos é o teorema de Allendoerfer ([Al]) que afirma que uma subvariedade é localmente rígida se o seu número tipo ([Da]) é maior ou igual a três, ou seja, se a sua segunda forma fundamental não é muito degenerada. O conceito de s-nulidade, definido em [CD] por Do Carmo e Dajczer, deu origem a uma condição (Teorema 1.4 em [CD]) que garante, com algumas restrições na dimensão e codimensão, a rigidez das subvariedades Euclidianas. Ambos os resultados anteriores generalizam o teorema de Beez-Killing para hipersuperfícies, que afirma que uma hipersuperfície é rígida se o número de curvaturas principais não nulas em cada ponto é pelo menos três. Sbrana e Cartan estudaram o caso das hipersuperfícies que têm precisamente duas curvaturas não nulas e concluíram que, genericamente, estas subvariedades também são localmente rígidas. No entanto, mostraram que existem quatro classes de subvariedades localmente deformáveis, chamadas hipersuperfícies de Sbrana-Cartan ([DFT]).

Para codimensão maior que um, o problema de classificar as subvariedades localmente deformáveis é muito difícil. Em particular, basta observar que qualquer hipersuperfície de uma hipersuperfície de Sbrana-Cartan é também deformável e assim pertence à classe das subvariedades com codimensão dois deformáveis. Atendendo a este fato, foi definido em [DF2] um conceito de deformação isométrica mais apropriado chamado de deformação genuína. Dizer que uma deformação isométrica é genuína, significa que a subvariedade não está incluída numa subvariedade de dimensão maior, de forma que a deformação inicial seja dada pela deformação da subvariedade que a contém.

Em [DF2] foi estudado o problema da rigidez genuína local para subvariedades Euclidianas com codimensão dois pertencentes à classe das subvariedades elípticas e parabólicas. Dizer que uma subvariedade $f\colon M^n \to \mathbb{R}^{n+2}$ é genuinamente rígida significa que, dada outra imersão isométrica $\hat{f}\colon M^n \to \mathbb{R}^{n+2}$ existe um aberto denso de M^n tal que, restritas a cada componente conexa U, $f|_U$ e $\hat{f}|_U$ são congruentes ou existem um mergulho isométrico $j\colon U \hookrightarrow N^{n+1}$ para uma variedade Riemanniana N^{n+1} e hipersuperfícies, planas ou de Sbrana-Cartan, $F, \hat{F}\colon N^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+2}$ tal que $f|_U = F \circ j$ e $\hat{f}|_U = \hat{F} \circ j$.

As subvariedades elípticas, parabólicas e hiperbólicas estão contidas na classe das subvariedades de posto dois, isto é, a distribuição de nulidade relativa tem codimensão dois.

A teoria das subvariedades de posto dois está relacionada com a teoria intrínseca das variedades Riemannianas de posto dois, isto é, o núcleo do tensor de curvatura tem codimensão dois em todo o ponto. Este assunto foi estudado por Szabó ([Sz1], [Sz2]) dentro do contexto das variedades semi-simétricas iniciado por Cartan.

Neste trabalho, como em [DF2], vamos considerar subvariedades da esfera e do espaço Euclidiano de posto dois em codimensão pelo menos dois. Neste contexto, o primeiro espaço normal tem dimensão menor ou igual a três. A situação em que a dimensão do primeiro espaço normal é um ou três foi estudada em [DT] e [DF1]. Quando o primeiro espaço normal tem dimensão dois, a subvariedade pode ser classificada como sendo elíptica, parabólica ou hiperbólica. As subvariedades elípticas foram descritas parametricamente em [DF1]. Vamos, neste trabalho, estudar o caso parabólico. A rigidez destas subvariedades no caso Euclidiano com codimensão dois, foi estudado em [DF2], onde se concluiu que somente as subvariedades parabólicas regradas admitem deformações genuínas.

Este trabalho está organizado da seguinte forma.

Na Seção 2 apresentamos algumas definições e discutimos fatos básicos da teoria das subvariedades que usaremos ao longo das seções seguintes.

Na Seção 3 estudamos as subvariedades de posto dois. O primeiro espaço normal N_1 de uma subvariedade de posto dois satisfaz $1 \leq \dim N_1 \leq 3$. Se $\dim N_1 = 1$ em todo o ponto, sabemos que a subvariedade é uma hipersuperfície ([DFT]). Se $\dim N_1 = 3$ em todo o ponto, então a subvariedade é uma superfície ou um cone a menos de um fator Euclidiano ([DF2]). As subvariedades parabólicas, elípticas e hiperbólicas surgem quando $\dim N_1 = 2$.

Na Seção 4 definimos subvariedade parabólica. Observamos que no caso das subvariedades da esfera, o cone associado é uma subvariedade Euclidiana parabólica, o que permite restringir o nosso estudo ao caso Euclidiano. Em seguida estudamos as propriedades dos espaços normais destas subvariedades. No caso elíptico todos os espaços normais à exceção do último, que depende da codimensão da subvariedade, têm dimensão dois ([DF1]). No caso parabólico essa condição não é garantida à partida, o que motiva a definição de índice crítico.

Na Seção 5 estudamos algumas propriedades intrínsecas das subvariedades parabólicas. Mostramos que estas subvariedades admitem uma folheação de codimensão um com folhas planas. Em seguida apresentamos uma caracterização intrínseca das subvariedades parabólicas que são regradas.

Na Seção 6 começamos por introduzir o conceito de regularidade com que vamos trabalhar e em seguida apresentamos um exemplo de uma parabólica não regular. O resultado principal desta seção afirma que as parabólicas não regradas são regulares.

Na Seção 7 estudamos as parabólicas regradas. Começamos por descrever parametricamente estas subvariedades e em seguida mostramos que são genericamente regulares. Isto permitirá concluir que genericamente as parabólicas são regulares. Terminamos a seção caracterizando as parabólicas regradas dentre as parabólicas, aquelas que admitem imersões isométricas como hipersuperfícies.

Na Seção 8 estudamos a rigidez das subvariedades parabólicas em codimensão dois. Dajczer e Florit ([DF2]) mostraram que as parabólicas não regradas em codimensão dois são genuinamente rígidas. Vamos mostrar que, de fato, são rígidas, obtendo assim os primeiros exemplos conhecidos de subvariedades de posto dois em codimensão dois localmente rígidas.

Na Seção 9 estudamos o caso particular das superfícies parabólicas, onde mostramos que estas superfícies podem ser obtidas através de soluções de certas equações às derivadas parciais parabólicas.

Na Seção 10 mostramos que é possível associar a cada subvariedade parabólica uma superfície parabólica, que chamaremos de superfície polar. Essencialmente, estas superfícies parametrizam as subvariedades parabólicas. A esta parametrização chamaremos parametrização polar.

Na Seção 11 mostramos que existe uma parametrização alternativa, a parametrização bipolar, que é mais conveniente que a parametrização polar para subvariedades de codimensão grande.

Na Seção 12 estudamos as subvariedades parabólicas completas. Começamos por estudar as parabólicas regradas, onde apresentamos uma condição para que sejam completas. O caso não regrado reduz-se ao caso de dimensão dois. De fato, veremos que as subvariedades parabólicas completas que não são regradas em nenhum aberto são isométricas a um produto de uma superfície por um fator Euclidiano. Em seguida descrevemos as singularidades das subvariedades parabólicas de dimensão $n \geq 4$, onde mostramos que o conjunto das singularidades de uma subvariedade parabólica M^n é uma hipersuperfície de M^n. Assim, as singularidades das parabólicas são abundantes, justificando o carácter local do nosso estudo.

2 Notações e resultados básicos

Nesta seção fixamos algumas das notações que usaremos ao longo do trabalho. Além disso, apresentamos alguns resultados básicos sobre imersões isométricas que achamos convenientes.

Denotamos por $\mathbb{Q}_\epsilon^N$, o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^N$ ou a esfera Euclidiana $\mathbb{S}^N$, consoante $\epsilon = 0$ ou $\epsilon = 1$. Sejam M^n uma variedade diferenciável conexa de dimensão n e $f\colon M^n \to \mathbb{Q}_\epsilon^N$ uma imersão com codimensão $N - n > 0$. Representamos por $f_*\colon TM \to T\mathbb{Q}_\epsilon^N$ a aplicação diferencial associada a f. Considerando em M^n a métrica induzida por f, isto é,

$$\langle X, Y\rangle = \langle f_*X, f_*Y\rangle, \quad X, Y \in TM,$$

f torna-se uma imersão isométrica.

Atendendo à natureza local de todos os resultados que vamos apresentar, identificamos a variedade M^n com a sua imagem $f(M) \subset \mathbb{Q}_\epsilon^N$. Assim, para cada $x \in M^n$ temos a decomposição ortogonal

$$T_x\mathbb{Q}_\epsilon^N = T_xM \oplus T_x^\perp M$$

onde $T_x^\perp M$ é o complemento ortogonal de T_xM em $T_x\mathbb{Q}_\epsilon^N$. Considerando as projeções ortogonais nestes subespaços

$$\pi_x : T_x\mathbb{Q}_\epsilon^N \to T_xM \quad \text{e} \quad \pi_x^\perp : T_x\mathbb{Q}_\epsilon^N \to T_x^\perp M,$$

temos

$$\nabla_X Y = \pi(\tilde{\nabla}_X Y)$$

e

$$\alpha_f(X, Y) = \pi^\perp(\tilde{\nabla}_X Y)$$

onde $\tilde{\nabla}$ é a conexão de Levi-Civita de $\mathbb{Q}_\epsilon^N$. Então, ∇ é a conexão de Levi-Civita de M^n em relação à métrica induzida por f e

$$\alpha_f\colon TM \times TM \to T_f^\perp M,$$

é o tensor bilinear simétrico chamado de *segunda forma fundamental* de f.

Dados $X \in TM$ e $\xi \in T^\perp M$, denotamos

$$A_\xi^f X = -\pi(\tilde{\nabla}_X \xi).$$

Assim, obtemos o tensor linear

$$A_\xi^f : TM \to TM$$

chamado de operador forma ou, por abuso de linguagem, de segunda forma fundamental de f na direção normal ξ pois

$$\langle A^f_\xi X, Y\rangle = \langle \alpha_f(X,Y), \xi\rangle.$$

A componente normal do vetor $\tilde{\nabla}_X\xi$, isto é,

$$\nabla^\perp_X\xi = \pi^\perp(\tilde{\nabla}_X\xi)$$

define uma conexão compatível com a métrica induzida no fibrado vetorial normal $T^\perp M$. Podemos escrever assim a fórmula de *Weingarten*

$$\tilde{\nabla}_X\xi = -A^f_\xi X + \nabla^\perp_X\xi.$$

O *gradiente* de $h \in C^\infty(M)$ é o campo vetorial ∇h de M^n definido por

$$\langle \nabla h, X\rangle = X(h).$$

A *Hessiana* de $h \in C^\infty(M)$ é o tensor bilinear simétrico definido por

$$\mathrm{Hess}_h(X,Y) = \langle \nabla_X\nabla h, Y\rangle = XY(h) - (\nabla_X Y)h.$$

O tensor de *curvatura* da variedade M^n está definido por

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z.$$

De forma análoga, o tensor de *curvatura normal* da imersão f é definido por

$$R^\perp(X,Y)\xi = \nabla^\perp_X\nabla^\perp_Y\xi - \nabla^\perp_Y\nabla^\perp_X\xi - \nabla^\perp_{[X,Y]}\xi.$$

Para a subvariedade $M^n \subset \mathbb{Q}^N_\epsilon$ são válidas as seguintes equações:

Equação de Gauss

$$\begin{aligned}\langle R(X,Y)Z,W\rangle &= \epsilon(\langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle - \langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle) + \langle \alpha_f(X,W), \alpha_f(Y,Z)\rangle \\ &\quad -\langle \alpha_f(X,Z), \alpha_f(Y,W)\rangle.\end{aligned}$$

Equação de Codazzi

$$(\nabla_X\alpha_f)(Y,Z) = (\nabla_Y\alpha_f)(X,Z).$$

Equação de Ricci

$$R^\perp(X,Y)\xi = \alpha_f(X, A^f_\xi Y) - \alpha_f(A^f_\xi X, Y).$$

Notemos por $\mathcal{Q}^{n+p}_c$ a variedade Riemanniana de dimensão $n+p$ completa e simplesmente conexa de curvatura seccional constante c, isto é, o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+p}$, a esfera Euclidiana $\mathbb{S}^{n+p}_c$ ou o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+p}_c$.

O seguinte resultado é o chamado Teorema Fundamental das Subvariedades.

Teorema 1.

(i) Sejam M^n uma variedade Riemanniana simplesmente conexa, $\pi : E \to M^n$ um fibrado vetorial Riemanniano de posto p munido de uma conexão ∇' compatível, e α uma seção simétrica do fibrado vetorial Hom$(TM \times TM, E)$. Para cada seção local $\xi \in E$, defina o tensor $A_\xi : TM \to TM$ por

$$\langle A_\xi X, Y\rangle = \langle \alpha(X,Y), \xi\rangle.$$

Se α e ∇' satisfazem as equações de Gauss, Codazzi e Ricci para o caso de curvatura seccional c, então existe uma imersão isométrica $f\colon M^n \to \mathcal{Q}_c^{n+p}$, e um isomorfismo de fibrados $\tilde{f}\colon E \to T^\perp M$ ao longo de f, tal que para todo $X, Y \in TM$ e todas as seções locais ξ, η de E,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{f}(\xi), \tilde{f}(\eta)\rangle &= \langle \xi, \eta\rangle \\ \tilde{f}(\alpha(X,Y)) &= \tilde{\alpha}(X,Y) \\ \tilde{f}(\nabla'_X \xi) &= \nabla^\perp_X \tilde{f}(\xi), \end{aligned}$$

onde $\tilde{\alpha}$ e $\nabla^\perp$ são a segunda forma fundamental e a conexão normal de f, respectivamente.

(ii) Suponha que f e g são imersões isométricas de uma variedade conexa M^n em $\mathcal{Q}_c^{n+p}$. Sejam $T_f^\perp M, \alpha_f$ e $\nabla_f^\perp$ o fibrado normal, a segunda forma fundamental e a conexão normal de f, respectivamente. Sejam $T_g^\perp M, \alpha_g$ e $\nabla_g^\perp$ os correspondentes objetos relativos a g. Se existir um isomorfismo de fibrados $\tilde{\phi} : T_f^\perp M \to T_g^\perp M$ tal que para cada $X, Y \in TM$ e todas as seções $\xi, \eta \in T_f^\perp M$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\phi}(\xi), \tilde{\phi}(\eta)\rangle &= \langle \xi, \eta\rangle \\ \tilde{\phi}(\alpha_f(X,Y)) &= \alpha_g(X,Y) \\ \tilde{\phi}(\nabla^\perp_{f_*X}\xi) &= \nabla^\perp_{g_*X}\xi, \end{aligned}$$

então existe uma isometria $\tau\colon \mathcal{Q}_c^{n+p} \to \mathcal{Q}_c^{n+p}$ tal que $g = \tau o f$ e $\tau_*|_{T_f^\perp M} = \tilde{\phi}$.

O *primeiro espaço normal* N_1^f de uma imersão isométrica $f\colon M^n \to \mathbb{Q}_\epsilon^N$ está definido, para cada $x \in M^n$, por

$$N_1^f(x) = \text{ger}\{\alpha_f(X,Y) : X, Y \in T_xM\}.$$

De forma análoga se define *k-espaço normal* N_k^f de f por

$$N_k^f(x) = \text{ger}\{\alpha^{k+1}(X_1, \ldots, X_{k+1}) : X_1, \ldots, X_{k+1} \in T_xM\},$$

onde

$$\alpha^s\colon TM \times \ldots \times TM \to T^\perp M, \;\; s \geq 2,$$

é o tensor multilinear simétrico chamado *s-forma fundamental* definido por

$$\alpha^s(X_1,\ldots,X_s) = \pi^{s-1}\left(\nabla^\perp_{X_s}\ldots\nabla^\perp_{X_3}\alpha_f(X_2,X_1)\right),$$

onde denotamos $\pi^1 = I_{\mathbb{R}^{N+\epsilon}}$ e π^s a projeção ortogonal normal

$$\pi^s\colon T_f^\perp M \to (N_1^f \oplus \ldots \oplus N_{s-1}^f)^\perp.$$

Observe que $\alpha^2 = \alpha_f$. Convencionamos ainda que $\alpha^1 = I$ em TM.

Se cada um dos N_k^f tem dimensão constante ao longo de M^n então cada N_k^f é um subfibrado vetorial de $T^\perp M$. Observe que para toda a imersão isométrica $f\colon M^n \to \mathbb{Q}_\epsilon^N$ existe um aberto denso de M^n onde esta propriedade é válida em cada uma das suas componentes conexas.

O subespaço de *nulidade relativa* $\Delta_f(x) \subset T_xM$ da imersão f, em $x \in M^n$ é o núcleo de α_f, isto é, o subespaço vetorial definido por

$$\Delta_f(x) = \{X \in T_xM : \alpha_f(X,Y) = 0,\ Y \in T_xM\}.$$

A distribuição Δ_f é integrável em qualquer aberto onde tenha dimensão constante e as folhas são subvariedades totalmente geodésicas tanto na variedade como no espaço ambiente ([Da]). Convencionamos que $N_0^f = \Delta_f^\perp$, o complemento ortogonal de Δ_f em TM. Com freqüência escreveremos simplesmente Δ e $\Delta^\perp$ em vez de Δ_f e $\Delta_f^\perp$.

3 Subvariedades de posto 2

Nesta seção, primeiro argumentamos que no contexto do nosso trabalho é suficiente estudar as subvariedades do espaço Euclidiano. Observamos depois que as subvariedades de posto 2 têm o primeiro espaço normal de dimensão não superior a 3. Em seguida caracterizamos as subvariedades que tem o primeiro espaço normal de dimensão 1 e 3 em todo ponto. No caso de dimensão 2 surgem as subvariedades parabólicas, elípticas e hiperbólicas.

Começamos por definir as subvariedade de posto 2.

Definição 2. Dizemos que a imersão isométrica $f\colon M^n \to \mathbb{Q}_\epsilon^N$ tem posto 2, e escrevemos $\mathrm{rank}_f = 2$, se $x \in M^n \mapsto \Delta^\perp(x)$ é um subfibrado do fibrado tangente de posto 2.

Observe que se $\epsilon = 1$, então o cone

$$\begin{array}{rcl} Cf\colon M^n \times \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}^{N+1}, \\ (x,t) & \mapsto & tf(x) \end{array}$$

sobre uma subvariedade $f\colon M^n \to \mathbb{S}^N$ de posto 2 tem o mesmo posto. Basta ter em conta que se $(X,a),(Y,b) \in T^{Cf}_{(x,t)}M \times \mathbb{R}_+ = T_xM \times \mathbb{R}$, então

$$\alpha_{Cf\,(x,t)}((X,a),(Y,b)) = t\alpha_{f\,(x)}(X,Y).$$

Concluímos que, para o estudo das subvariedades de posto 2 do espaço Euclidiano e da esfera é suficiente considerar o caso Euclidiano. A relação entre as segundas formas fundamentais permite concluir ainda que os espaços normais de f e Cf em $\mathbb{R}^{N+1}$ são iguais a menos de transporte paralelo, isto é, $N^f_k = N^{Cf}_k$.

A simetria da segunda forma fundamental de f e a hipótese sobre o posto da imersão permitem concluir que o primeiro espaço normal satisfaz $\dim N^f_1 \leq 3$, uma vez que

$$N^f_1 = \mathrm{ger}\{\alpha_f(X,X), \alpha_f(X,Z), \alpha_f(Z,Z)\}$$

onde $\{X,Z\}$ é qualquer base de $\Delta^\perp$.

Se $\dim N^f_1 = 1$ temos o seguinte resultado de [DT] que caracteriza por completo estas subvariedades.

Proposição 3. *Seja $f\colon M^n \to \mathbb{Q}^N_\epsilon$, $n \geq 2$, uma imersão isométrica. Suponhamos que* $\dim N^f_1 = 1$ *em todo ponto e que o subfibrado normal N^f_1 não é paralelo em nenhum ponto. Então M^n tem curvatura seccional constante ϵ e existem imersões isométricas*

$$i\colon M^n_\epsilon \to L^{N-1}_\epsilon \quad e \quad F\colon L^{N-1}_\epsilon \to \mathbb{Q}^N_\epsilon,$$

onde i é uma inclusão totalmente geodésica e F não tem pontos totalmente geodésicos, tal que $f = F o\, i$.

Nestas condições a subvariedade f é a restrição da hipersuperfície F a uma subvariedade totalmente geodésica M^n de L^{N-1}.

Associado à folheação de nulidade relativa da subvariedade temos o *tensor de splitting* C definido da seguinte forma: A cada vetor $T \in \Delta$ associa o endomorfismo C_T de $\Delta^\perp$ definido por

$$C_TX = -\left(\nabla_X T\right)_{\Delta^\perp}.$$

As seguintes propriedades sobre o tensor C são bem conhecidas e podem ser encontrados em [DG2] e [DFT].

Proposição 4. *Seja $f\colon M^n \to \mathbb{R}^N$ uma imersão isométrica com* $\mathrm{rank}_f = 2$.

(i) A distribuição $\Delta^\perp$ é integrável se, e só se, C_T é autoadjunto para todo o $T \in \Delta$.

(ii) *O tensor C é identicamente nulo se, e só se, cada ponto de M^n tem uma vizinhança V tal que $f(V) \subset L^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$, onde L^2 é uma superfície em $\mathbb{R}^{p+2}$.*

(iii) *Se $C_T = \mu(T)I$ para todo o $T \in \Delta$, então cada ponto admite uma vizinhança V tal que $f(V) \subset CL^2 \times \mathbb{R}^{n-3}$, onde $CL^2 \subset \mathbb{R}^{p+3}$ é o cone sobre a superfície esférica $L^2 \subset \mathbb{S}^{p+2}$.*

(iv) *Se $T \in \Delta$ e $\xi \in T^{\perp}M$, então em $\Delta^{\perp}$ temos*

$$\nabla_T A^f_\xi = A^f_\xi \circ C_T + A_{\nabla^{\perp}_T \xi}.$$

Em particular, $A^f_\xi \circ C_T$ é simétrico.

(v) *Para todo $X, Y \in \Delta^{\perp}$ e $T \in \Delta$ temos*

$$(\nabla^{\Delta^{\perp}}_X C_T)Y - (\nabla^{\Delta^{\perp}}_Y C_T)X = C_{(\nabla_X T)^{\Delta}}Y - C_{(\nabla_Y T)^{\Delta}}X,$$

de acordo com a decomposição $TM = \Delta \oplus \Delta^{\perp}$.

(vi) *Se M^n é completa, então $\operatorname{codim} \ker C \leq 1$ sendo que para cada $S \in \Delta(x)$ o único valor próprio real possível para C_S é 0. Além disso, $\ker C_S$ é paralelo ao longo do campo velocidade S da linha $x + tS$.*

Suponhamos agora que $\dim N^f_1 = 3$. Sejam $\{X, Z\}$ uma base ortonormal de $\Delta^{\perp}$ e $T \in \Delta$. Da equação de Codazzi, temos

$$\alpha_f(Z, \nabla_X T) = \alpha_f(X, \nabla_Z T).$$

Obtemos,

$$(\langle \nabla_X T, X\rangle - \langle \nabla_Z T, Z\rangle)\alpha_f(Z, X) + \langle \nabla_X T, Z\rangle \alpha_f(Z, Z) - \langle \nabla_Z T, X\rangle \alpha_f(X, X) = 0,$$

e portanto

$$\langle \nabla_X T, Z\rangle = \langle \nabla_Z T, X\rangle = 0$$

e

$$\langle \nabla_X T, X\rangle = \langle \nabla_Z T, Z\rangle.$$

Assim, $C_T = \mu I$ onde $\mu = \langle \nabla_X T, X\rangle$. Por outro lado, por uma questão de dimensão é fácil concluir que $\operatorname{codim} \ker C = 1$. Do item (v) da Proposição 4 podemos concluir que $Y(\mu) = 0$ para todo $Y \in \Delta^{\perp}$ e logo $\mu = \mu(T)$. Pela Proposição 4 f é uma superfície em $\mathbb{R}^3$ ou um cone sobre uma superfície esférica em $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ a menos de um fator Euclidiano. Podemos assim concluir:

Proposição 5. *Seja $f\colon M^n \to \mathbb{R}^{n+p}$ uma imersão isométrica com $\operatorname{rank}_f = 2$ e $\dim N_1^f = 3$ em todo o ponto, então f é uma superfície em $\mathbb{R}^{p+2}$ ou um cone sobre uma superfície esférica em $\mathbb{S}^{p+2} \subset \mathbb{R}^{p+3}$ a menos de fator Euclidiano.*

No restante caso, $\dim N_1^f = 2$ em todo o ponto, dada uma base $X, Y \in \Delta^\perp(x)$, então existem $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que

$$a\alpha_f(X,X) + 2c\alpha_f(X,Y) + b\alpha_f(Y,Y) = 0.$$

Neste contexto temos a seguinte definição que faz sentido uma vez que independe da base.

Definição 6. Dizemos que a subvariedade $f\colon M^n \to \mathbb{R}^{n+p}$ é *parabólica* (resp., *elíptica* ou *hiperbólica*) se $ab - c^2 = 0$ (resp., $ab - c^2 > 0$ ou $ab - c^2 < 0$) em toda a parte.

É fácil verificarmos que:

- M^n é parabólica se, e só se, existe $Z \in TM$ não nulo tal que

$$\alpha_f(Z,Z) = 0,$$

- M^n é elíptica se, e só se, existe uma base $\{X, Y\}$ de $\Delta^\perp$ tal que

$$\alpha_f(X,X) + \alpha_f(Y,Y) = 0,$$

- M^n é hiperbólica se, e só se, existe uma base $\{X, Y\}$ de $\Delta^\perp$ tal que

$$\alpha_f(X,X) - \alpha_f(Y,Y) = 0.$$

As subvariedades elípticas foram estudadas em [DF1] e [DF2]. O estudo das subvariedades hiperbólicas permanece em aberto.

4 Fatos básicos

Nesta seção estudamos os espaços normais de uma subvariedade parabólica. Começamos por observar que todos os espaços normais têm dimensão majorada por dois. Em seguida estudamos algumas das suas propriedades básicas.

Atendendo à natureza local do estudo que vamos realizar, vamos assumir ao longo de todo o trabalho que M^n é conexa e que $f\colon M^n \to \mathbb{Q}_\epsilon^N$ é substancial, isto é, que $f(M)$ não está contida em nenhuma subvariedade totalmente geodésica de $\mathbb{Q}_\epsilon^N$.

Vamos supor ainda que todos os espaços N_k^f têm dimensão constante ao longo de M^n. Logo os N_k^f formam subfibrados do fibrado normal.

Definição 7. Dizemos que a subvariedade $f\colon M^n \to \mathbb{Q}_\epsilon^N$ é *parabólica* se:

(i) $\mathrm{rank}_f = 2$,

(ii) $\dim N_1^f = 2$,

(iii) Existe um campo não singular $Z \in \Delta^\perp$ assintótico, isto é, $\alpha_f(Z, Z) = 0$.

O cone sobre uma subvariedade esférica $f\colon M^n \to \mathbb{S}^N$ parabólica (resp., elíptica ou hiperbólica) é também parabólica (resp., elíptica ou hiperbólica). Assim, para o estudo das subvariedades parabólicas (resp., elípticas ou hiperbólicas) do espaço Euclidiano e da esfera, basta considerar o caso Euclidiano. Observe ainda que do item *(ii)* é claro que as subvariedades parabólicas não podem ser hipersuperfícies, isto é, $N - n \geq 2$.

O seguinte resultado ([DF1]) diz-nos que a dimensão dos k-espaços normais das subvariedades parabólicas, elípticas e hiperbólicas não é superior a dois.

Proposição 8. *Se* $f\colon M^n \to \mathbb{R}^N$ *satisfaz* $\mathrm{rank}_f = 2$ *e* $\dim N_1^f = 2$, *então temos que* $\dim N_k^f \leq 2$, *para todo* $k \geq 1$.

Demonstração: Suponhamos, em primeiro lugar, que existem direções conjugadas linearmente independentes, isto é, uma base $\{X_1, X_2\}$ de $\Delta^\perp$ tal que

$$\alpha_f(X_1, X_1) \pm \alpha_f(X_2, X_2) = 0.$$

Então,

$$\begin{aligned} \alpha^{k+1}(X_1, X_1, Y_1, \ldots, Y_{k-1}) \;&\pm\; \alpha^{k+1}(X_2, X_2, Y_1, \ldots, Y_{k-1}) \\ &= \pi^k(\nabla^\perp_{Y_{k-1}} \ldots \nabla^\perp_{Y_1}(\alpha_f(X_1, X_1) \pm \alpha_f(X_2, X_2))) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, N_k^f é gerado por $\alpha^{k+1}(X_1, X_1, \ldots, X_1)$ e $\alpha^{k+1}(X_2, X_1, \ldots, X_1)$ e concluímos que $\dim N_k^f \leq 2$.

No caso de existir uma direção assintótica $Z \in \Delta^\perp$ é fácil concluirmos que

$$\alpha^{k+1}(Z, Z, Y_1, \ldots, Y_{k-1}) = 0. \tag{1}$$

Portanto, considerando $X \in \Delta^\perp$ tal que $\{X, Z\}$ forme uma base de $\Delta^\perp$, obtemos que

$$N_k^f = \mathrm{ger}\{\alpha^{k+1}(X, \ldots, X), \alpha^{k+1}(Z, X, \ldots, X)\}. \quad \blacksquare$$

Atendendo à hipótese de f ser substancial, podemos decompor o fibrado normal de f como soma direta dos k-espaços normais

$$T_f^\perp M = N_1^f \oplus \ldots \oplus N_{\tau^f}^f \tag{2}$$

o que, em particular, define o índice τ^f.

Sejam $f\colon M^n \to \mathbb{R}^N$ uma subvariedade parabólica, $Z \in \Delta^\perp$ um campo assintótico e $X \in TM$ tal que $\{X, Z\}$ seja uma base de $\Delta^\perp$. Consideremos para $1 \le k \le \tau^f$ os vetores normais

$$\xi_1^k = \alpha^{k+1}(\overbrace{X, \ldots, X}^{k+1}) \quad \text{e} \quad \xi_2^k = \alpha^{k+1}(Z, \overbrace{X, \ldots, X}^{k})$$

que geram, como observamos acima, os subespaços N_k^f. Usando (1) é fácil ver que o subespaço gerado pelo campo ξ_2^k não depende da base $\{X, Z\}$ desde que Z seja assintótico.

Proposição 9. *Para* $1 \le k \le \tau^f - 1$, *temos:*

(i) $(\tilde{\nabla}_Z\, \xi_1^k)_{N_{k+1}^f} = (\tilde{\nabla}_X\, \xi_2^k)_{N_{k+1}^f} = \xi_2^{k+1}$,

(ii) $(\tilde{\nabla}_X\, \xi_1^k)_{N_{k+1}^f} = \xi_1^{k+1}$,

(iii) $(\tilde{\nabla}_Z\, \xi_2^k)_{N_{k+1}^f} = 0$.

Demonstração: A definição dos k-espaços normais permite concluir facilmente que, dado $\eta \in N_l^f$ temos

$$\nabla_Y^\perp \eta \in N_{l-1}^f \oplus N_l^f \oplus N_{l+1}^f \tag{3}$$

onde assumimos aqui que $N_0^f = 0 = N_{\tau^f+1}^f$.

Por definição,

$$\begin{aligned}
\xi_2^{k+1} &= (\nabla_Z^\perp \nabla_X^\perp \ldots \nabla_X^\perp \alpha_f(X, X))_{N_{k+1}^f} \\
&= (\nabla_Z^\perp (\nabla_X^\perp \ldots \nabla_X^\perp \alpha_f(X, X))_{N_k^f})_{N_{k+1}^f} \\
&= (\tilde{\nabla}_Z\, \xi_1^k)_{N_{k+1}^f}.
\end{aligned}$$

Tendo agora em conta a simetria do tensor multilinear α^{k+2} temos

$$\begin{aligned}
\xi_2^{k+1} &= \alpha^{k+2}(X, Z, \ldots, X) \\
&= (\nabla_X^\perp \nabla_Z^\perp \ldots \nabla_X^\perp \alpha_f(X, X))_{N_{k+1}^f} \\
&= (\nabla_X^\perp (\nabla_Z^\perp \ldots \nabla_X^\perp \alpha_f(X, X))_{N_k^f})_{N_{k+1}^f} \\
&= (\tilde{\nabla}_X\, \xi_2^k)_{N_{k+1}^f}.
\end{aligned}$$

Fica assim provado o item (i). O item (ii) obtém-se de forma análoga,

$$\begin{aligned}
\xi_1^{k+1} &= (\nabla_X^\perp \nabla_X^\perp \ldots \nabla_X^\perp \alpha_f(X,X))_{N_{k+1}^f} \\
&= (\nabla_X^\perp (\nabla_X^\perp \ldots \nabla_X^\perp \alpha_f(X,X))_{N_k^f})_{N_{k+1}^f} \\
&= (\tilde{\nabla}_X\, \xi_1^k)_{N_{k+1}^f}.
\end{aligned}$$

Para o item (iii), atendendo a que o campo Z é assintótico,

$$\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}_Z\, \xi_2^k)_{N_{k+1}^f} &= (\nabla_Z^\perp (\nabla_X^\perp \ldots \nabla_X^\perp \alpha_f(X,Z))_{N_k^f})_{N_{k+1}^f} \\
&= \alpha^{k+2}(X,\ldots,Z,Z) \\
&= (\nabla_X^\perp \nabla_X^\perp \ldots \nabla_X^\perp \alpha_f(Z,Z))_{N_{k+1}^f} \\
&= 0. \blacksquare
\end{aligned}$$

O seguinte resultado foi provado em [DF1].

Proposição 10. *Seja f: $M^n \to \mathbb{R}^N$ uma subvariedade parabólica. Então os subfibrados N_k^f, $1 \leq k \leq \tau^f$, são paralelos em $\mathbb{R}^N$ ao longo de Δ.*

Demonstração: Sejam $X, Y \in \Delta^\perp$ e $T \in \Delta$. Segue da equação de Codazzi que

$$(\nabla_T^\perp \alpha_f(X,Y))_{N_1^{f\perp}} = (\nabla_X^\perp \alpha_f(T,Y))_{N_1^{f\perp}} = 0,$$

e portanto concluímos que N_1^f é paralelo ao longo de Δ.

Por indução suponha que N_k^f, $1 \leq k \leq \tau^f - 1$, é paralelo ao longo de Δ. Derivando $\langle \xi_i^{k+1}, \xi_j^k \rangle = 0$, $1 \leq i,j \leq 2$, obtemos $\langle \nabla_T^\perp \xi_i^{k+1}, \xi_j^k \rangle = 0$, ou seja,

$$(\nabla_T^\perp \xi_i^{k+1})_{N_k^f} = 0.$$

Por outro lado,

$$(\nabla_T^\perp \xi_1^{k+1})_{N_{k+2}^f} = \alpha^{k+3}(T,X,\ldots,X) = 0$$

e

$$(\nabla_T^\perp \xi_2^{k+1})_{N_{k+2}^f} = \alpha^{k+3}(T,Z,X\ldots,X) = 0.$$

Daqui concluímos que

$$(\nabla_T^\perp \xi_i^{k+1})_{N_{k+2}^f} = 0.$$

Atendendo a (3) segue que o subfibrado N_{k+1}^f é paralelo ao longo de Δ. $\blacksquare$

Seja $\mathcal{V}_k \subset N_k^f \times N_k^f$ o subespaço vetorial definido por

$$\mathcal{V}_k = \{(\mu_1, \mu_2) \in N_k^f \times N_k^f : \langle \mu_2, \xi_2^k \rangle = 0 \;\text{ e }\; \langle \mu_2, \xi_1^k \rangle = \langle \mu_1, \xi_2^k \rangle \}.$$

É fácil verificar que o subespaço $\mathcal{V}_k$ independe da base $\{X, Z\}$. Observe ainda que o fato de $\xi_1^k = 0$ implica a nulidade do subespaço $\mathcal{V}_k$.

Lema 11. *Para $1 \leq k \leq \tau^f$, temos:*

(i) $\dim \mathcal{V}_k = 2$ *se, e só se,* $\dim N_k^f = 2$,

(ii) $\dim \mathcal{V}_k = 1$ *se, e só se,* $\dim N_k^f = 1$ *e* $\xi_2^k = 0$,

(iii) $\dim \mathcal{V}_k = 0$ *se, e só se,* $\dim N_k^f = 1$ *e* $\xi_2^k \neq 0$.

Demonstração: Se $\dim \mathcal{V}_k = 2$, então podemos tomar $(\mu_1, \mu_2) \in \mathcal{V}_k$ com ambas as componentes não nulas. Facilmente se conclui que μ_1 e μ_2 são linearmente independentes e assim $\dim N_k^f = 2$.

Suponhamos agora que $\dim N_k^f = 2$. Sejam $u, v \in N_k^f$ não nulos tais que

$$\langle v, \xi_2^k \rangle = 0 \;\text{ e }\; u = \langle v, \xi_1^k \rangle \frac{\xi_2^k}{\| \xi_2^k \|^2}.$$

Então u, v são linearmente independentes e portanto formam uma base de N_k^f. Além disso, os vetores $(u, v), (u + v, v) \in \nu_k$ são linearmente independentes. Logo $\dim \mathcal{V}_k = 2$ e portanto (i) é verificado.

Os itens (ii) e (iii) são conseqüência imediata da definição de $\mathcal{V}_k$. ∎

Definição 12. Sejam $f\colon M^n \to \mathbb{Q}_\epsilon^N \subset \mathbb{R}^{N+\epsilon}$ uma subvariedade parabólica e $1 \leq k \leq \tau^f$. Dizemos que $\beta \in C^\infty(M^n, \mathbb{R}^{N+\epsilon})$ é uma *k-seção* de f se

$$\beta_*(TM) \subset N_k^f \oplus \ldots \oplus N_{\tau^f}^f$$

em cada ponto a menos de transporte paralelo em $\mathbb{R}^{N+\epsilon}$.

Consideremos o tensor $\mathcal{P}_k\colon C^\infty(M^n, \mathbb{R}^{N+\epsilon}) \to N_k^f \times N_k^f$ definido por

$$\mathcal{P}_k(\beta) = ((\tilde{\nabla}_X \beta)_{N_k^f}, (\tilde{\nabla}_Z \beta)_{N_k^f}) = ((\beta_* X)_{N_k^f}, (\beta_* Z)_{N_k^f}),\; 1 \leq k \leq \tau^f. \tag{4}$$

Lema 13. *$\mathcal{P}_k(\beta) \in \mathcal{V}_k$ para toda a k-seção β de f. Em particular, o tensor*

$$\mathcal{P}_k|_{N_{k+1}^f}\colon N_{k+1}^f \to \mathcal{V}_k$$

é injetivo quando $1 \leq k \leq \tau^f - 1$.

Demonstração: Tendo em conta a definição de k-seção, temos

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\nabla}_X\beta, \xi_2^k\rangle &= \langle \tilde{\nabla}_X\beta, \alpha^{k+1}(Z, X, \ldots, X)\rangle \\
&= \langle \tilde{\nabla}_X\beta, \nabla_Z^\perp\nabla_X^\perp \ldots \nabla_X^\perp\alpha_f(X, X)\rangle \\
&= \langle \tilde{\nabla}_X\beta, \tilde{\nabla}_Z(\nabla_X^\perp \ldots \nabla_X^\perp\alpha_f(X, X))\rangle \\
&= Z\langle \tilde{\nabla}_X\beta, \nabla_X^\perp \ldots \nabla_X^\perp\alpha_f(X, X)\rangle - \langle \tilde{\nabla}_Z\tilde{\nabla}_X\beta, \nabla_X^\perp \ldots \nabla_X^\perp\alpha_f(X, X)\rangle \\
&= \langle -\tilde{\nabla}_X\tilde{\nabla}_Z\beta + \tilde{\nabla}_{[X,Z]}\beta, \nabla_X^\perp \ldots \nabla_X^\perp\alpha_f(X, X)\rangle \\
&= -\langle \tilde{\nabla}_X\tilde{\nabla}_Z\beta, \nabla_X^\perp \ldots \nabla_X^\perp\alpha_f(X, X)\rangle \\
&= \langle \tilde{\nabla}_Z\beta, \tilde{\nabla}_X(\nabla_X^\perp \ldots \nabla_X^\perp\alpha_f(X, X))\rangle \\
&= \langle \tilde{\nabla}_Z\beta, \nabla_X^\perp\nabla_X^\perp \ldots \nabla_X^\perp\alpha_f(X, X)\rangle \\
&= \langle \tilde{\nabla}_Z\beta, \xi_1^k\rangle.
\end{aligned}$$

Analogamente, tendo em conta a simetria de α^{k+1} temos

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\nabla}_Z\beta, \xi_2^k\rangle &= \langle \tilde{\nabla}_Z\beta, \alpha^{k+1}(X, Z, X \ldots, X)\rangle \\
&= -\langle \tilde{\nabla}_X\tilde{\nabla}_Z\beta, \nabla_Z^\perp\nabla_X^\perp \ldots \nabla_X^\perp\alpha_f(X, X)\rangle \\
&= -\langle \tilde{\nabla}_Z\tilde{\nabla}_X\beta, \nabla_Z^\perp\nabla_X^\perp \ldots \nabla_X^\perp\alpha_f(X, X)\rangle \\
&= \langle \tilde{\nabla}_X\beta, \tilde{\nabla}_Z(\nabla_Z^\perp\nabla_X^\perp \ldots \nabla_X^\perp\alpha_f(X, X))\rangle \\
&= \langle \tilde{\nabla}_X\beta, \nabla_Z^\perp\nabla_Z^\perp\nabla_X^\perp \ldots \nabla_X^\perp\alpha_f(X, X)\rangle \\
&= \langle \tilde{\nabla}_X\beta, \alpha^{k+1}(Z, Z, X, \ldots, X)\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

atendendo a que Z é uma direção assintótica de f.

Para concluir basta observar que, se $\eta \in N_{k+1}^f$ é tal que $\mathcal{P}_k(\eta) = 0$, então

$$0 = \langle \tilde{\nabla}_X\eta, \xi_j^k\rangle = -\langle \eta, \tilde{\nabla}_X\xi_j^k\rangle = -\langle \eta, \xi_j^{k+1}\rangle, \;\; j = 1, 2.$$

Logo $\eta = 0$. ∎

Proposição 14. *Seja $f\colon M^n \to \mathbb{R}^N$ uma subvariedade parabólica. Então para cada $1 \leq k \leq \tau^f - 1$, temos:*

(i) $\xi_1^k \neq 0$,

(ii) $\xi_2^k = 0$ *se, e só se,* $\dim N_k^f = 1$,

(iii) Se $\xi_2^k = 0$ então $\xi_2^j = 0$ para todo $j \geq k$.

Demonstração: Para provar o item (i), suponhamos por absurdo que $\xi_1^k = 0$. Da definição de $\mathcal{V}_k$ concluímos que $\mathcal{V}_k = 0$. Assim, pelo Lema 13, temos que $N_{k+1}^f = 0$, o que é uma contradição. Logo $\xi_1^k \neq 0$ para todo $0 \leq k \leq \tau^f - 1$.

Para demonstrar o item *(ii)*, suponhamos que $\dim N_k^f = 1$ e $\xi_2^k \neq 0$. Do Lema 11 concluímos que $\mathcal{V}_k = 0$, o que atendendo ao Lema 13 é uma contradição. A implicação inversa é óbvia.

Para o item *(iii)*, suponhamos que $\xi_2^k = 0$. Então, usando (3) podemos escrever

$$\begin{aligned}
\xi_2^{k+1} &= \alpha^{k+2}(Z, X, \ldots X) \\
&= \alpha^{k+2}(X, Z, X, \ldots X) \\
&= \pi^{k+1}(\nabla_X^\perp \nabla_Z^\perp \nabla_X^\perp \ldots \nabla_X^\perp \alpha_f(X, X)) \\
&= \pi^{k+1}(\nabla_X^\perp (\pi^k(\nabla_Z^\perp \nabla_X^\perp \ldots \nabla_X^\perp \alpha_f(X, X))) \\
&= \pi^{k+1}(\nabla_X^\perp \xi_2^k) \\
&= 0. \blacksquare
\end{aligned}$$

Definição 15. Dizemos que a subvariedade parabólica $f\colon M^n \to \mathbb{Q}_\epsilon^N$ tem *índice crítico* $\tau_0^f \in \{1, \ldots, \tau^f - 1\}$ se $\xi_2^{\tau_0^f} \neq 0$ e $\xi_2^k = 0$, para todo $k \geq \tau_0^f + 1$.

Veremos mais à frente que as subvariedades parabólicas, genericamente, não possuem índice crítico.

Corolário 16. *Suponha que f possui índice crítico. Então temos:*

(i) $\dim N_k^f = 2,\ 1 \leq k \leq \tau_0^f$,

(ii) $\dim N_k^f = 1,\ \tau_0^f + 1 \leq k \leq \tau^f$,

(iii) O tensor, $\mathcal{P}_k|_{N_{k+1}^f}\colon N_{k+1}^f \to \mathcal{V}_k$ *é um isomorfismo para* $k \leq \tau_0^f - 1$.

Demonstração: Segue da Proposição 14. $\blacksquare$

5 Propriedades intrínsecas

Uma vez que pretendemos obter uma descrição paramétrica das subvariedades parabólicas, torna-se importante obter uma caracterização das que são regradas. Nesta seção apresentamos uma caracterização intrínseca destas subvariedades.

Veremos em seguida que a propriedade extrínseca de uma subvariedade ser parabólica induz uma propriedade intrínseca na variedade. Por uma variedade Riemanniana ser plana entendemos que todas as curvaturas seccionais são nulas.

Proposição 17. *Se a subvariedade $f\colon M^n \to \mathbb{R}^N$ é parabólica então a distribuição $\mathcal{F} = \mathrm{ger} Z \oplus \Delta$ é integrável em M^n e as suas folhas são hipersuperífices planas.*

Demonstração: Comecemos por mostrar que o campo ξ_2^1 gera um subfibrado paralelo ao longo das folhas da nulidade relativa. Da Proposição 10 temos que N_1^f é paralelo ao longo de Δ. Seja $\eta \in N_1^f$ um campo unitário normal a ξ_2^1. Atendendo ao fato de $\dim N_1^f = 2$, o campo η é único a menos de sinal. Por outro lado, sendo η normal a ξ_2^1 e Z uma direção assintótica, temos que $A_\eta^f Z = 0$. Assim, podemos concluir que η é o único campo normal unitário em N_1^f (a menos de sinal) ao longo do qual a segunda forma fundamental de f tem posto 1. Vamos mostrar que η é paralelo ao longo de Δ, o que permitirá concluir que ξ_2^1 gera um subfibrado paralelo ao longo de Δ como pretendido.

Seguimos o argumento do Teorema 5.7 de [Da]. Sejam $x \in M^n$ e γ uma geodésica de M^n com $\gamma(0) = x$ contida na correspondente folha de Δ. Seja δ_t o transporte paralelo de η_x ao longo de γ. Tendo em conta o item (iv) da Proposição 4, concluímos que em $\Delta^\perp$ é válida a equação diferencial

$$\nabla_{\gamma'} A_{\delta_t}^f = A_{\delta_t}^f \circ C_{\gamma'}.$$

Logo,

$$A_{\delta_t}^f = A_{\eta_x}^f e^{\int_0^t C_{\gamma'} d\tau},$$

e conseqüentemente $A_{\delta_t}^f$ tem posto 1. Atendendo à unicidade do campo η concluímos que $\eta_{\gamma(t)} = \delta_t$ e assim η é paralelo ao longo de Δ.

Vejamos agora que $\mathcal{F}$ é integrável em M^n com folhas planas. Atendendo ao fato do campo η ser paralelo ao longo de Δ, para todo o $T \in \Delta$ temos

$$\nabla_T A_\eta^f = A_\eta^f \circ C_T.$$

Tendo em conta que a aplicação linear $\nabla_T A_\eta^f$ é simétrica obtemos

$$A_\eta^f \circ C_T = C_T^t \circ A_\eta^f.$$

Assim

$$A_\eta^f C_T Z = C_T^t A_\eta^f Z = 0,$$

e portanto $C_T Z \in \mathrm{ger}\{Z\}$. Vamos assumir até ao final da prova que a base $\{X, Z\}$ de $\Delta^\perp$ é ortonormal. Logo,

$$\langle \nabla_Z T, X \rangle = 0. \tag{5}$$

Por outro lado, usando a equação de Codazzi e (5) obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_T^\perp \alpha_f(Z, X) - \alpha_f(\nabla_T Z, X) - \alpha_f(Z, \nabla_T X) + \alpha_f(\nabla_Z T, X) \\ &= \nabla_T^\perp \alpha_f(Z, X) - \langle \nabla_T Z, X \rangle \alpha_f(X, X) + \langle \nabla_Z T, Z \rangle \alpha_f(Z, X). \end{aligned}$$

Tendo em conta que $\dim N_1^f = 2$ e que o subfibrado gerado por ξ_2^1 é paralelo ao longo de Δ, obtemos

$$\langle \nabla_T Z, X\rangle = 0. \tag{6}$$

De (5) e (6) concluímos que $\mathcal{F}$ é integrável. Assim, para cada $x \in M^n$ existe uma subvariedade U_x (a folha máximal de $\mathcal{F}$ em x) de M^n com dimensão $n-1$ tal que $T_yU_x = \text{ger}\{Z_y\} \oplus \Delta_y$ para todo o $y \in U_x$. Desta forma, a segunda forma fundamental de U_x em M^n na direção do campo normal X é dada por

$$A_X^U = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

onde $\lambda = \langle \nabla_Z Z, X\rangle$. Temos então da equação de Gauss que as folhas de $\mathcal{F}$ são hipersuperfícies planas. ∎

Lembremos a seguinte definição geral:

Definição 18. Dizemos que $f\colon M^n \to \mathcal{Q}_\epsilon^N$ é *regrada* se M^n admite uma folheação por folhas de codimensão 1 que são aplicadas por f em subvariedades totalmente geodésicas de $\mathbb{Q}_\epsilon^N$.

Exemplo 19. As subvariedades regradas de posto 2 sem pontos planos em codimensão substancial maior ou igual a dois são parabólicas. Observe que neste caso N_1^f tem sempre dimensão 2, uma vez que se $\dim N_1^f = 1$ então N_1^f seria paralelo (veja Corolário 4.7 em [Da]) e assim reduziria a codimensão contrariando o fato de ser substancial.

Da prova da Proposição 17 segue o seguinte resultado:

Corolário 20. *Seja $f\colon M^n \to \mathbb{R}^N$ uma subvariedade parabólica regrada. Então $\mathcal{F}$ é integrável e as folhas são totalmente geodésicas em M^n.*

De seguida apresentamos uma caracterização das subvariedades parabólicas que são regradas. Começamos com uma definição.

Definição 21. Seja $f\colon M^n \to \mathbb{R}^N$ uma subvariedade parabólica. Dizemos que f é *de tipo superfície* se $f(M) \subset L^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$ onde $L^2 \subset \mathbb{R}^{N-n+2}$ ou $f(M) \subset CL^2 \times \mathbb{R}^{n-3}$ onde $CL^2 \subset \mathbb{R}^{N-n+3}$ é o cone sobre uma superfície esférica $L^2 \subset \mathbb{S}^{N-n+2}$.

Temos a seguinte caracterização intrínseca para as parabólicas regradas.

Proposição 22. *Suponha que a subvariedade parabólica $f\colon M^n \to \mathbb{R}^N$ não é do tipo superfície. Então, f é regrada se, e somente se, com a métrica induzida M^n carrega uma folheação de codimensão 1 com folhas totalmente geodésicas.*

Demonstração: Suponhamos que M^n com a métrica induzida carrega uma folheação $\mathcal{G}$ de codimensão 1 totalmente geodésica. Se f não é regrada, então as folhas de $\mathcal{G}$ e $\mathcal{F}$ não coincidem. Portanto, por razões de dimensão, $\mathcal{G} \cap \mathcal{F} = \Delta$. Seja $Y \in \Delta^{\perp}$ tal que $\mathcal{G} = \text{ger}\{Y\} \oplus \Delta$. Temos que Y e Z são linearmente independentes. Nestas condições, vamos mostrar que f é do tipo superfície conduzindo assim a um absurdo.

Consideremos a base ortonormal $\{\eta_1 = \xi_2^1/\|\xi_2^1\|, \eta_2\}$ de N_1^f. Nesta base

$$A^f_{\eta_1}|_{\Delta^\perp} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A^f_{\eta_2}|_{\Delta^\perp} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Sabemos, da prova da Proposição 17, que os campos η_1 e η_2 são paralelos ao longo de Δ. Para cada $T \in \Delta$ consideremos o tensor de splitting dado por

$$C_T = \begin{bmatrix} m & o \\ n & p \end{bmatrix}.$$

Atendendo à simetria de $A_{\eta_2} \circ C_T$ obtemos $o = 0$. Por outro lado, a simetria de

$$A^f_{\eta_1} \circ C_T = \begin{bmatrix} am + bn & bp \\ bm & 0 \end{bmatrix}$$

e $b \neq 0$ permitem concluir que $m = p$. Logo,

$$C_T = \begin{bmatrix} m & 0 \\ n & m \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Como $\mathcal{G}$ é totalmente geodésico temos que $C_T Y \in \text{ger}\{Y\}$. Por outro lado, de

$$C_T Y = mY + n\langle Y, X\rangle Z$$

obtemos que $n = 0$, isto é, $C_T = mI$. Concluímos da Proposição 4 que f é do tipo superfície, o que foi excluído. Logo $\mathcal{G} = \mathcal{F}$. Portanto, as folhas de $\mathcal{F}$ são totalmente geodésicas em M^n se, e somente se, a sua imagem por f são subvariedades totalmente geodésicas em $\mathbb{R}^N$. ∎

6 Regularidade

Na descrição paramétrica das subvariedades elípticas em [DF1], um ingrediente que a fez possível foi a regularidade dos k-espaços normais. De fato, toda imersão elíptica f satisfaz $\dim N_k^f = 2$, $1 \leq k \leq \tau^f - 1$, ficando a dimensão de $N^f_{\tau^f}$ então determinada pela codimensão da subvariedade. Neste trabalho, diremos que uma subvariedade parabólica é regular, se a propriedade anterior for satisfeita. O resultado principal desta seção afirma que as subvariedades parabólicas não regradas são regulares.

Definição 23. Dizemos que a subvariedade parabólica $f\colon M^n \to \mathbb{R}^N$ é *regular*, se $\dim N_k^f = 2$ para todo $1 \leq k \leq \tau^f - 1$.

Do Corolário 16 temos o seguinte:

$$f \text{é regular se e só se} \begin{cases} \dim N^f_{\tau^f} \;\;\;= 2 \iff \xi_2^{\tau^f} \neq 0, & \text{se } N-n \text{ é par} \\ \dim N^f_{\tau^f-1} = 2 \iff \xi_2^{\tau^f-1} \neq 0, & \text{se } N-n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Observando que as superfícies regradas com $\dim N_1 = 2$ são parabólicas, apresentamos um exemplo de uma superfície parabólica não regular.

Exemplo 24. Seja $c\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^6$ uma curva suave, parametrizada por comprimento de arco com curvaturas constantes não nulas $k_j, 1 \leq j \leq 5$, e seja $E_1, \ldots, E_6$, o seu referencial de Frenet. São válidas as fórmulas

$$E_1 = \frac{dc}{ds}$$

e

$$\frac{D}{ds}E_j = -k_{j-1}E_{j-1} + k_jE_{j+1}, \quad 1 \leq j \leq 6,$$

onde $k_0 = k_6 = 0$.

Consideremos a aplicação $X\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^6$ dada por

$$X(s,t) = c(s) + tE_2(s)$$

que define uma superfície substancial, completa e parabólica fora de $t = 0$. Temos

$$\begin{aligned} X_s &= (1 - tk_1)E_1 + tk_2E_3, \\ X_t &= E_2, \\ X_{ss} &= (k_1 - t(k_1^2 + k_2^2))E_2 + tk_2k_3E_4, \\ X_{st} &= -k_1E_1 + k_2E_3, \\ X_{tt} &= 0. \end{aligned}$$

Assim, se $t \neq 0$ temos

$$TX \oplus N_1^X = \text{ger}\{E_1, E_2, E_3, E_4\}.$$

Logo X é parabólica para $t \neq 0$. Por outro lado,

$$X_{tss} \;=\; -(k_1^2 + k_2^2)E_2 + k_2k_3E_4 \in TX \oplus N_1^X,$$

e portanto $\xi_2^2 = 0$, isto é, $\tau_0^X = 1$. Logo, $\dim N_2^X = 1$ e assim temos que X não é regular. Além disso, $N_2^X = \text{ger}\{E_5\}$, que não depende do parâmetro t.

Por uma subvariedade parabólica ser *não regrada* entendemos que nenhuma das folhas de $\mathcal{F}$ é totalmente geodésica em M^n ou, equivalentemente, em $\mathbb{R}^N$.

Teorema 25. *As subvariedades parabólicas $f\colon M^n \to \mathbb{R}^N$ não regradas são regulares.*

A prova do Teorema 25 vai ser uma conseqüência de dois resultados sobre subvariedades parabólicas. Começamos por dar uma condição suficiente para que uma parabólica em codimensão ímpar seja regrada.

Proposição 26. *Seja $f\colon M^n \to \mathbb{R}^N$ uma subvariedade parabólica regular tal que $\xi_2^{\tau^f} = 0$ em todo o ponto. Então f é uma subvariedade parabólica regrada.*

Demonstração: Continuamos a fazer uso da notação da seção anterior. Se f é regrada, então a nulidade relativa em cada ponto é um hiperplano na régua passando pelo ponto. Portanto, o campo Z é tangente às retas perpendiculares aos hiperplanos paralelos da nulidade relativa em cada régua. Concluímos que a subvariedade é regrada se, e somente se, $\nabla_Z Z = 0$.

Vamos provar que a subvariedade f é regrada se, e somente se, o subfibrado normal ger$\{\xi_2^1\}$ é paralelo ao longo de $\mathcal{F}$. Como em (8), consideremos uma base ortonormal $\{\eta_1, \eta_2\}$ de N_1^f tal que

$$A^f_{\eta_1}|_{\Delta^\perp} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A^f_{\eta_2}|_{\Delta^\perp} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Com esta notação temos que provar que

$$\nabla_Z Z = 0 \ \text{ se, e só se, } \ (\nabla^\perp_Z \eta_1)_{N_1^f} = 0. \tag{10}$$

Desenvolvendo a equação de Codazzi

$$\langle (\nabla_X A^f_{\eta_2})Z - (\nabla_Z A^f_{\eta_2})X, Z\rangle = 0,$$

obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \langle A^f_{\eta_2}\nabla_X Z + A^f_{\nabla^\perp_X \eta_2} Z + \nabla_Z A^f_{\eta_2} X - A^f_{\eta_2}\nabla_Z X - A^f_{\nabla^\perp_Z \eta_2} X, Z\rangle \\ &= c\langle \nabla_Z X, Z\rangle - b\langle \nabla^\perp_Z \eta_2, \eta_1\rangle. \end{aligned}$$

Uma vez que f é parabólica temos que b e c são não nulos. Obtemos (10), uma vez que $\nabla_Z Z = 0$ é equivalente a $\langle \nabla_Z Z, X\rangle = 0$. A conclusão segue da prova da Proposição 17.

Começamos por considerar o caso de codimensão $N - n = 3$. Portanto, temos $\dim N_1^f = 2$, $\dim N_2^f = 1$ e ainda $\xi_2^2 = 0$. Basta mostrar que o campo η_1 é paralelo ao longo de Z.

Como N_1^f é gerado pelos campos ξ_1^1, ξ_2^1 e atendendo ao fato de $\xi_2^2 = 0$, podemos concluir da Proposição 9 que N_1^f e N_2^f são paralelos ao longo de Z. Desta forma, da equação de Codazzi obtemos

$$A^f_{\nabla^\perp_X \delta} Z = A^f_{\nabla^\perp_Z \delta} X = 0$$

onde $\delta \in N_2^f$ é unitário. Concluímos, tendo em conta (8), que

$$\left(\nabla^\perp_X \delta\right)_{N_1^f} \in \mathrm{ger}\{\eta_2\}. \tag{11}$$

De $X\langle \eta_1, \delta\rangle = 0$ e (11) obtemos

$$\left(\nabla^\perp_X \eta_1\right)_{N_2^f} = 0. \tag{12}$$

Pela equação de Ricci temos

$$\langle R^\perp(X,Z)\eta_1, \delta\rangle = 0.$$

Usando (11), (12) e o paralelismo de N_1^f ao longo de Z, obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= \langle \nabla^\perp_X \nabla^\perp_Z \eta_1 - \nabla^\perp_Z \nabla^\perp_X \eta_1 - \nabla^\perp_{[X,Z]}\eta_1, \delta\rangle \\
&= \langle \nabla^\perp_X \nabla^\perp_Z \eta_1, \delta\rangle \\
&= -\langle \nabla^\perp_Z \eta_1, \nabla^\perp_X \delta\rangle \\
&= \langle \nabla^\perp_Z \eta_1, \eta_2\rangle \langle \nabla^\perp_X \eta_2, \delta\rangle.
\end{aligned}$$

Como f é substancial, então N_1^f não é paralelo e portanto $\langle \nabla^\perp_X \eta_2, \delta\rangle \neq 0$. Logo,

$$(\nabla^\perp_Z \eta_1)_{N_1^f} = 0,$$

e assim concluímos que o campo η_1 é paralelo ao longo de Z.

Consideremos agora o caso geral $N - n \geq 5$. Tomemos bases ortonormais $\{\eta_1^k, \eta_2^k\}$ de N_k^f para cada $1 \leq k \leq \tau^f - 1$ tais que

$$\xi_1^k = a_k \eta_1^k + c_k \eta_2^k \quad \text{e} \quad \xi_2^k = b_k \eta_1^k.$$

Da Proposição 9, obtemos

$$\left(\nabla^\perp_Z \eta_1^k\right)_{N_{k+1}^f} = 0 \quad \text{e} \quad c_k \left(\nabla^\perp_Z \eta_2^k\right)_{N_{k+1}^f} = b_k \left(\nabla^\perp_X \eta_1^k\right)_{N_{k+1}^f}. \tag{13}$$

Como por hipótese $\dim N_k^f = 2$, $1 \leq k \leq \tau^f - 1$, de (13) podemos concluir

$$N_k^f = \mathrm{ger}\{\left(\nabla^\perp_X \eta_1^{k-1}\right)_{N_k^f}, \left(\nabla^\perp_X \eta_2^{k-1}\right)_{N_k^f}\}. \tag{14}$$

Atendendo à hipótese $\xi_2^{\tau^f} = 0$ e (13), temos

$$(\nabla^\perp_Z \eta_1^{\tau^f-1})_{N^f_{\tau^f}} = (\nabla^\perp_X \eta_1^{\tau^f-1})_{N^f_{\tau^f}} = (\nabla^\perp_Z \eta_2^{\tau^f-1})_{N^f_{\tau^f}} = 0. \tag{15}$$

Em particular, concluímos que $N_1^f \oplus \ldots \oplus N^f_{\tau^f-1}$ e $N^f_{\tau^f}$ são paralelos ao longo de Z. Da equação de Ricci para $\delta \in N^f_{\tau^f}$, tendo em conta (15), obtemos

$$\begin{aligned}
0 = \langle R^\perp(X,Z)\eta_1^{\tau^f-1}, \delta\rangle &= \langle \nabla^\perp_X\nabla^\perp_Z\eta_1^{\tau^f-1} - \nabla^\perp_Z\nabla^\perp_X\eta_1^{\tau^f-1} - \nabla^\perp_{[X,Z]}\eta_1^{\tau^f-1}, \delta\rangle \\
&= \langle \nabla^\perp_X\nabla^\perp_Z\eta_1^{\tau^f-1}, \delta\rangle \\
&= -\langle \nabla^\perp_Z\eta_1^{\tau^f-1}, \nabla^\perp_X\delta\rangle \\
&= \langle \nabla^\perp_Z\eta_1^{\tau^f-1}, \eta_2^{\tau^f-1}\rangle\langle \nabla^\perp_X\eta_2^{\tau^f-1}, \delta\rangle.
\end{aligned}$$

Como f é substancial, então o subfibrado $N_1^f \oplus \ldots \oplus N^f_{\tau^f-1}$ não é paralelo, e logo $\langle \nabla^\perp_X\eta_2^{\tau^f-1}, \delta\rangle \neq 0$. Portanto,

$$(\nabla^\perp_Z\eta_1^{\tau^f-1})_{N^f_{\tau^f-1}} = 0.$$

Para concluir novamente que $\langle \nabla^\perp_Z\eta_1^1, \eta_2^1\rangle = 0$, basta mostrar que se

$$(\nabla^\perp_Z\eta_1^{\ell+1})_{N^f_{\ell+1}} = 0, \quad 1 \leq \ell \leq \tau^f - 2, \tag{16}$$

então

$$(\nabla^\perp_Z\eta_1^\ell)_{N_\ell} = 0. \tag{17}$$

Sendo η_1^ℓ colinear com ξ_2^ℓ e $\eta_1^{\ell+1}$ com $\xi_2^{\ell+1}$, então temos que $\eta_1^{\ell+1}$ e $(\nabla^\perp_X\eta_1^\ell)_{N^f_{\ell+1}}$ são colineares. De (16), temos

$$\langle \nabla^\perp_Z(\nabla^\perp_X\eta_1^\ell)_{N^f_{\ell+1}}, \eta_2^{\ell+1}\rangle = 0. \tag{18}$$

Consideremos a equação de Ricci $\langle R^\perp(X,Z)\eta_1^\ell, \eta_2^{\ell+1}\rangle = 0$. Tendo em conta (13) e (18), obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= \langle \nabla^\perp_X\nabla^\perp_Z\eta_1^\ell - \nabla^\perp_Z\nabla^\perp_X\eta_1^\ell - \nabla^\perp_{[X,Z]}\eta_1^\ell, \eta_2^{\ell+1}\rangle \\
&= \langle \nabla^\perp_X\langle\nabla^\perp_Z\eta_1^\ell, \eta_2^\ell\rangle\eta_2^\ell, \eta_2^{\ell+1}\rangle - \langle \nabla^\perp_Z(\nabla^\perp_X\eta_1^\ell)_{N^f_\ell}, \eta_2^{\ell+1}\rangle - \langle\nabla_X Z, X\rangle\langle\nabla^\perp_X\eta_1^\ell, \eta_2^{\ell+1}\rangle \\
&= \langle\langle\nabla^\perp_Z\eta_1^\ell, \eta_2^\ell\rangle\nabla^\perp_X\eta_2^\ell - \langle\nabla^\perp_X\eta_1^\ell\eta_2^\ell\rangle\nabla^\perp_Z\eta_2^\ell, -\langle\nabla_X Z, X\rangle\nabla^\perp_X\eta_1^\ell, \eta_2^{\ell+1}\rangle.
\end{aligned}$$

Logo, temos que

$$\big(\langle\nabla^\perp_Z\eta_1^\ell, \eta_2^\ell\rangle\nabla^\perp_X\eta_2^\ell - \langle\nabla^\perp_X\eta_1^\ell, \eta_2^\ell\rangle\nabla^\perp_Z\eta_2^\ell - \langle\nabla_X Z, X\rangle\nabla^\perp_X\eta_1^\ell\big)_{N^f_{\ell+1}} \in \mathrm{ger}\{\eta_1^{\ell+1}\}.$$

De (13) e (14), obtemos (17). ∎

Tendo em conta a decomposição (2) do espaço normal de f, definimos

$$\tau_*^f = \begin{cases} \tau^f, & \text{se} \quad N-n \quad \text{é par} \\ \tau^f - 1, & \text{se} \quad N-n \quad \text{é ímpar.} \end{cases}$$

Na prova da Proposição 26 obtivemos de (16) e (17) que a existência de um índice $1 \leq \ell \leq \tau^f - 2$ tal que $(\nabla_Z^\perp \eta_1^{\ell+1})_{N_{\ell+1}^f} = 0$ é suficiente para garantir que f é regrada. Podemos concluir assim:

Corolário 27. *Seja $f\colon M^n \to \mathbb{R}^N$ uma subvariedade parabólica regular. Se existe $1 \leq s \leq \tau_*^f$, tal que o vetor $\eta_1^s = \xi_2^s/\|\xi_2^s\| \in N_s^f$ satisfaz $(\nabla_Z^\perp \eta_1^s)_{N_s} = 0$, então f é uma subvariedade parabólica regrada.*

Seja $f\colon M^n \to \mathbb{R}^N$ uma subvariedade parabólica não regular. O resultado seguinte afirma que, com a métrica induzida, M^n admite uma imersão isométrica $\tilde{f}$, parabólica regular em codimensão menor, de forma que podemos identificar os espaços normais $N_s^{\tilde{f}}$ e N_s^f por uma isometria de fibrados paralela.

Proposição 28. *Seja $f\colon M^n \to \mathbb{R}^N$ uma subvariedade parabólica simplesmente conexa. Suponha que $\dim N_{k_0-1}^f = 2$ e $\dim N_{k_0}^f = 1$ para um certo k_0, $2 \leq k_0 \leq \tau^f - 1$. Então existe uma imersão isométrica*

$$\tilde{f}\colon M^n \to \mathbb{R}^{n+2k_0-1}$$

parabólica regular tal que os subfibrados normais $N_s^{\tilde{f}}$ e N_s^f, $1 \leq s \leq k_0$, são isométricos por uma isometria de fibrados paralela com respeito às conexões induzidas em cada subfibrado.

Demonstração: Consideremos o subfibrado normal

$$\mathcal{T} = N_1^f \oplus \ldots \oplus N_{k_0}^f$$

com a conexão $\hat{\nabla}^\perp$ induzida pela conexão normal de f, isto é,

$$\hat{\nabla}_Y^\perp \eta = (\nabla_Y^\perp \eta)_{\mathcal{T}}.$$

Vamos mostrar que esta conexão, juntamente com a segunda forma fundamental α_f de f, satisfazem as equações de Gauss, Codazzi e Ricci. A equação de Gauss é trivialmente satisfeita. Uma vez que para a equação de Codazzi só é relevante a componente em N_1^f da conexão normal, ela é claramente satisfeita.

Pelas Proposições 9 e 14 os subfibrados $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}^\perp$ são paralelos na conexão original ao longo de Z. Portanto, dado $\eta \in \mathcal{T}$ podemos escrever

$$\begin{aligned}
\hat{\nabla}^\perp_X \hat{\nabla}^\perp_Z \eta &= \nabla^\perp_X \nabla^\perp_Z \eta - \left(\nabla^\perp_X \nabla^\perp_Z \eta\right)_{\mathcal{T}^\perp}, \\
\hat{\nabla}^\perp_Z \hat{\nabla}^\perp_X \eta &= \hat{\nabla}^\perp_Z \left(\nabla^\perp_X \eta\right)_{\mathcal{T}} = \nabla^\perp_Z \left(\nabla^\perp_X \eta\right)_{\mathcal{T}} = \nabla^\perp_Z \nabla^\perp_X \eta - \nabla^\perp_Z \left(\nabla^\perp_X \eta\right)_{\mathcal{T}^\perp}, \\
\hat{\nabla}^\perp_{[X,Z]} \eta &= \nabla^\perp_{[X,Z]} \eta - \left(\nabla^\perp_{[X,Z]} \eta\right)_{\mathcal{T}^\perp}.
\end{aligned}$$

Subtraindo à primeira equação as outras duas obtemos

$$\hat{R}^\perp(X,Z)\eta - R^\perp(X,Z)\eta = -\left(\nabla^\perp_X \nabla^\perp_Z \eta\right)_{\mathcal{T}^\perp} + \nabla^\perp_Z \left(\nabla^\perp_X \eta\right)_{\mathcal{T}^\perp} + \left(\nabla^\perp_{[X,Z]} \eta\right)_{\mathcal{T}^\perp}.$$

Uma vez que pela equação de Ricci $R^\perp(X,Z)\eta \in \mathcal{T}$, obtemos que o lado direito se anula e assim

$$\hat{R}^\perp(X,Z)\eta = R^\perp(X,Z)\eta.$$

Tendo em conta a Proposição 10 e a igualdade anterior, concluímos que a conexão induzida juntamente com a segunda forma fundamental de f, satisfazem a equação de Ricci. O resultado segue agora do Teorema 1. ∎

Finalmente, estamos em condições de provar o Teorema 25.

Demonstração: Suponhamos por absurdo que f não é regular. Então, pela Proposição 14, existe $k_0 \leq \tau^f - 1$ tal que $\xi_2^{k_0} = 0$. Pela Proposição 28, existe uma subvariedade parabólica regular $\tilde{f}\colon M^n \to \mathbb{R}^{n+2k_0-1}$ com $\xi_2^{k_0} = 0$. Segue, da Proposição 26, que f seria regrada. ∎

7 As regradas

Nesta seção estudamos a regularidade das parabólicas regradas. Começamos por apresentar uma descrição paramétrica destas subvariedades. Em seguida, estudamos o comportamento dos espaços normais que nos vai permitir concluir que, genericamente, as parabólicas regradas são regulares. Depois caracterizamos as regradas, dentre as parabólicas, como as que admitem imersões isométricas como hipersuperfícies.

Seja $v\colon I \to \mathbb{R}^N$ uma curva suave definida num intervalo e parametrizada por comprimento de arco. Sejam $e_1 = dv/ds$ e $e_2, \ldots, e_{n-1}$ campos ortonormais normais ao longo de $v = v(s)$ e paralelos na conexão normal de v em $\mathbb{R}^N$. Então

$$\frac{de_j}{ds} = b_j e_1, \quad 2 \leq j \leq n-1, \tag{19}$$

onde $b_j \in C^\infty(I)$. Sejam $\Delta = \mathrm{ger}\{e_2, \ldots, e_{n-1}\}$ e $\Delta^\perp$ o complementar ortogonal no fibrado normal da curva. Seja $e_0 \in \Delta^\perp$ um campo unitário ao longo de

v tal que
$$P = \{e_0, (de_1/ds)_{\Delta^\perp}\} \subset \Delta^\perp$$
satisfaça
$$\dim P = 2 \tag{20}$$
e P não seja paralelo em $\Delta^\perp$ ao longo de v, isto é,
$$\text{ger}\{(de_0/ds)_{\Delta^\perp}, (d^2e_1/ds^2)_{\Delta^\perp}\} \not\subset P. \tag{21}$$
Parametrizamos agora uma subvariedade regrada M^n por
$$f(s, t_1, \ldots, t_{n-1}) = c(s) + \sum_{j=1}^{n-1} t_j e_j(s) \tag{22}$$
onde $(t_1, \ldots, t_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $c(s)$ satisfaz $dc/ds = e_0$. Vejamos que f é parabólica. Temos
$$TM = \text{ger}\{(f_s)_{(\Delta \oplus \text{ ger}\{e_1\})^\perp}\} \oplus \text{ger}\{e_1\} \oplus \Delta$$
onde
$$f_s = e_0 + t_1 \frac{de_1}{ds} + \sum_{j \geq 2} t_j b_j e_1.$$
Considerando a projeção ortogonal
$$(\frac{de_1}{ds})_{\Delta^\perp} = a_1 e_0 + \eta. \tag{23}$$
Temos de (20) que $\eta(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Obtemos
$$TM = \text{ger}\{e_0 + t_1(a_1 e_0 + \eta)\} \oplus \text{ger}\{e_1\} \oplus \Delta, \tag{24}$$
o que permite concluir que f é regular em todos os pontos.

De
$$f_{st_j} = b_j e_1 \in TM, \;\; 2 \leq j \leq n-1,$$
vemos que $\Delta \subset \Delta_f$. De (23) e (24), temos que
$$f_{st_1} = \frac{de_1}{ds} \in TM$$
se, e somente se, $\eta = 0$, o que não pode acontecer por hipótese. Por outro lado, é fácil verificar que a condição $f_{ss} \notin \text{ger}\{f_{st_1}\} \oplus TM$, isto é, $\dim N_1^f = 2$ é equivalente a
$$\left(\frac{de_0}{ds}\right)_{\Delta^\perp} + t_1 \left(\frac{d^2e_1}{ds^2}\right)_{\Delta^\perp} \notin P.$$

Segue de (20) que $\Delta_f = \Delta$ e $\dim N_1^f = 2$ para quase todo valor de $t_1, \ldots, t_{n-1}$, isto é, f é parabólica em um aberto denso de M^n.

Reciprocamente, sejam $f\colon M^n \to \mathbb{R}^N$ uma subvariedade parabólica regrada e $\{e_2, \ldots, e_{n-1}\}$ um referencial ortonormal de Δ_f ao longo da uma curva integral $c = c(s)$, $s \in I$, do campo unitário X ortogonal às réguas. Sem perda de generalidade (veja Lema 2.2 em [BDJ]), podemos escolher o referencial de modo que

$$\frac{de_j}{ds} \perp \Delta_f, \quad 2 \leq j \leq n-1. \tag{25}$$

Parametrizamos agora f por (22), onde tomamos $e_0 = X$ e $e_1 = Z$, sendo a base $\{X, Z\}$ de $\Delta_f^\perp$ ortonormal. Como $f_{st_j} \in TM$, $2 \leq j \leq n-1$, temos, tendo em conta (25) e tomando $t_1 = 0$, $de_j/ds \in \text{ger}\{e_0, e_1\}$, isto é,

$$\frac{de_j}{ds} = a_j e_0 + b_j e_1, \quad 2 \leq j \leq n-1, \tag{26}$$

onde $a_j, b_j \in C^\infty(I)$. Por outro lado, (25) permite concluir que

$$\frac{de_j}{ds} \in \text{ger}\{e_1, (f_s)_{\Delta_f^\perp}\}, \quad 2 \leq j \leq n-1. \tag{27}$$

Denotamos

$$\frac{de_1}{ds} = a_1 e_0 + (de_1/ds)_{\Delta_f} + \eta \tag{28}$$

onde $\eta \perp \text{ger}\{e_0, e_1\} \oplus \Delta_f$ também satisfaz $\eta(s) \neq 0$, para todo $s \in I$. De fato, se $\eta(s) = 0$, então teríamos que $f_{st_1} = a_1 e_0 + (de_1/ds)_{\Delta_f} \in TM$, e portanto $\dim N_1^f \leq 1$. De (26) e (27) concluímos que

$$a_j e_0 \in \text{ger}\{(1 + t_1 a_1 + \ldots + t_{n-1} a_{n-1}) e_0 + t_1 \eta\}, \quad 2 \leq j \leq n-1.$$

Temos assim que $a_j = 0$, e de (26) segue que

$$\frac{de_j}{ds} = b_j e_1, \quad 2 \leq j \leq n-1.$$

Podemos então concluir o seguinte resultado.

Proposição 29. *Seja $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$, $N - n \geq 2$, uma curva suave. Sejam $\{e_0 = dc/ds, e_1(s), \ldots, e_{n-1}(s)\}$ campos ortonormais satisfazendo (19) e (20) em todo o ponto. Então, a subvariedade parametrizada por*

$$f(s, t_1, \ldots, t_{n-1}) = c(s) + \sum_{j \geq 1} t_j e_j(s) \tag{29}$$

onde $(t_1, \ldots, t_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, define uma subvariedade regrada, que é parabólica em um aberto denso de M^n.

Reciprocamente, toda a subvariedade parabólica regrada pode ser parametrizada como em (29).

Seja então f uma subvariedade parabólica regrada parametrizada por (29). Suponha que f possui índice crítico $k-1=\tau_0^f$. A condição $\dim N_k^f=1$ é equivalente a

$$\frac{d^k e_1}{ds^k}\in TM\oplus \operatorname{ger}\left\{\frac{d^{\ell-1}e_1}{ds^{\ell-1}},\frac{d^{\ell-1}e_0}{ds^{\ell-1}}+t_1\frac{d^{\ell}e_1}{ds^{\ell}},\ \ 2\le \ell\le k\right\} \tag{30}$$

onde TM está dado em (24). Em particular, para $t_1=0$ e usando (28) temos

$$\frac{d^{k-1}(a_1e_0+\eta)}{ds^{k-1}}\in TM\oplus \operatorname{ger}\left\{\frac{d^{\ell-2}(a_1e_0+\eta)}{ds^{\ell-2}},\frac{d^{\ell-1}e_0}{ds^{\ell-1}},\ \ 2\le \ell\le k\right\} \tag{31}$$

sendo que agora $TM=\operatorname{ger}\{e_0,e_1\}\oplus\Delta$.

É fácil ver que (30) e (31) são equivalentes. De fato, em (31), tomando $\ell=2$ obtemos que η pertence ao subespaço. Segue que, se (31) é satisfeita, então o subespaço em (30) não depende do parâmetro t_1. Em particular, isto mostra novamente o fato que $\dim N_k^f=1$ é equivalente a $\xi_2^k=0$. Finalmente, temos que (31) é equivalente a

$$\frac{d^{k-1}\eta}{ds^{k-1}}\in \operatorname{ger}\left\{e_0,\frac{de_0}{ds},\dots,\frac{d^{k-1}e_0}{ds^{k-1}},\eta,\dots,\frac{d^{k-2}\eta}{ds^{k-2}}\right\}\oplus\Delta.$$

É agora claro que (30) não será satisfeita em geral. Neste sentido, podemos afirmar que as subvariedades parabólicas regradas são *genericamente* regulares. Tendo em vista o Teorema 25, podemos afirmar que genericamente as subvariedades parabólicas são regulares.

Observação 30. A condição para que uma subvariedade parabólica regrada regular em codimensão ímpar satisfaça $\xi_2^{\tau^f}=0$ é a seguinte:

$$\frac{d^{\tau^f-1}\eta}{ds^{\tau^f-1}}\in \operatorname{ger}\left\{e_0,\frac{de_0}{ds},\dots,\frac{d^{\tau^f-2}e_0}{ds^{\tau^f-2}},\eta,\dots,\frac{d^{\tau^f-2}\eta}{ds^{\tau^f-2}}\right\}\oplus\Delta.$$

As subvariedades parabólicas regradas em codimensão dois foram caracterizadas por Dajczer e Florit ([DF2]). Nesta seção caracterizamos as subvariedades parabólicas regradas em codimensão arbitrária.

Começamos por apresentar a caracterização feita em [DF2]. Precisamos da seguinte definição.

Definição 31. Seja $f\colon M^n\to\mathbb{R}^N$ uma subvariedade com $\operatorname{rank}_f=2$. Dizemos que f não tem *pontos planos*, se a curvatura seccional de $\Delta^\perp\subset TM$ é não nula em todos os pontos.

Observe que, se $f\colon M^n \to \mathbb{R}^N$ é parabólica, então f não tem pontos planos. De fato, $\langle R(X,Z)Z,X\rangle = \|\xi_2^1\|^2 \neq 0$ pela equação de Gauss.

Proposição 32. *Seja $g\colon M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície regrada, simplesmente conexa sem pontos planos. Então, a família de subvariedades parabólicas regradas $f\colon M^n \to \mathbb{R}^{n+2}$ é parametrizada pelo conjunto $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ onde φ_i, $i = 1, 2, 3$, são funções diferenciáveis definidas num intervalo.*

Reciprocamente, seja $f\colon M^n \to \mathbb{R}^{n+2}$ uma subvariedade parabólica, regrada e simplesmente conexa. Então M^n admite uma imersão isométrica como uma hipersuperfície regrada.

Para o caso geral temos o seguinte resultado.

Teorema 33. *Seja $f\colon M^n \to \mathbb{R}^N$ uma subvariedade parabólica regrada simplesmente conexa. Então M^n admite uma imersão isométrica como hipersuperfície regrada de $\mathbb{R}^{n+1}$ e com as mesmas réguas.*

Reciprocamente, se f não é do tipo superfície em nenhum aberto e M^n admite uma imersão como hipersuperfície de $\mathbb{R}^{n+1}$ então f é regrada.

Demonstração: Comecemos por provar a recíproca. Como em (8), seja $\{\eta_1, \eta_2\}$ uma base ortonormal de N_1^f tal que

$$A^f_{\eta_1}|_{\Delta^\perp} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A^f_{\eta_2}|_{\Delta^\perp} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Suponhamos que existe uma imersão $g\colon M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$. Denotamos por N a sua aplicação normal de Gauss. Vamos em primeiro lugar mostrar que

$$\Delta_g = \Delta_f. \tag{32}$$

Considere a aplicação bilinear simétrica

$$\beta\colon T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}\langle \eta_1\rangle \oplus \mathbb{R}\langle N\rangle = \mathbb{R}^2$$

dada por

$$\beta(Y,V) = (\langle A^f_{\eta_1} Y, V\rangle, \langle A^g_N Y, V\rangle).$$

Pela equação de Gauss é fácil verificar que β é flat em relação à métrica Lorentziana em $\mathbb{R}^2$ definida por

$$\|\eta_1\|^2 = 1 = -\|N\|^2 \quad \text{e} \quad \langle \eta_1, N\rangle = 0.$$

Isto é,

$$\langle \beta(X,Y), \beta(V,W)\rangle - \langle \beta(X,W), \beta(V,Y)\rangle = 0.$$

Se (32) não é satisfeita, e como $\dim \Delta_g \leq n-2$, segue facilmente que

$$S(\beta) = \text{ger}\{\beta(Y,V) : \ Y, V \in T_xM\}$$

satisfaz $S(\beta) = \mathbb{R}^2$. Atendendo ao Corolário 1 em [Mo], concluímos que

$$N(\beta) = \{Y \in T_xM : \beta(Y,V) = 0, \ \ V \in T_xM\}$$

satisfaz $\dim N(\beta) = n-2$. Mas como

$$N(\beta) = \Delta_g \cap \Delta_f,$$

segue que a condição (32) é satisfeita.

Seja agora

$$A_N^g|_{\Delta^\perp} = \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{b} & \bar{c} \end{bmatrix}.$$

De (9) sabemos que

$$C_T = \begin{bmatrix} m & 0 \\ n & m \end{bmatrix}$$

para $T \in \Delta$. Por outro lado,

$$A_N^g \circ C_T = \begin{bmatrix} \bar{a}m + bn & \bar{b}m \\ \bar{b}m + \bar{c}n & \bar{c}m \end{bmatrix}.$$

A simetria de $A_N^g \circ C_T$ permite concluir que $\bar{c}n = 0$. Como estamos a supor que f não é do tipo superfície em nenhum aberto, da Proposição 4 obtemos que $n \neq 0$ para algum $T \in \Delta$, em um aberto denso de M^n. Logo,

$$\bar{c} = 0 \tag{33}$$

e assim, atendendo à equação de Gauss, podemos supor que

$$\bar{b} = b. \tag{34}$$

Da equação de Codazzi

$$\nabla_X A_{\eta_1}^f Z - A_{\eta_1}^f \nabla_X Z - A_{\nabla_X^\perp \eta_1}^f Z - \nabla_Z A_{\eta_1}^f X + A_{\eta_1}^f \nabla_Z X + A_{\nabla_Z^\perp \eta_1}^f X = 0$$

para $A_{\eta_1}^f$, obtemos

$$\nabla_X bX - \langle \nabla_X Z, X\rangle(aX + bZ) - \nabla_Z(aX + bZ) + \langle \nabla_Z X, Z\rangle bX + \langle \nabla_Z^\perp \eta_1, \eta_2\rangle cX = 0. \tag{35}$$

Multiplicando por Z, temos

$$2b\langle \nabla_X X, Z\rangle - a\langle \nabla_Z X, Z\rangle - Z(b) = 0. \tag{36}$$

Da equação de Codazzi

$$\nabla_X(A_N^g Z) - A_N^g \nabla_X Z - \nabla_Z(A_N^g X) + A^g \nabla_Z X = 0$$

para g, atendendo a (33) e a (34), obtemos

$$\nabla_X bX - \langle \nabla_X Z, X\rangle(\bar{a}X + bZ) - \nabla_Z(\bar{a}X + bZ) + \langle \nabla_Z X, Z\rangle bX = 0. \quad (37)$$

Multiplicando por Z, temos

$$2b\langle \nabla_X X, Z\rangle - \bar{a}\langle \nabla_Z X, Z\rangle - Z(b) = 0. \quad (38)$$

Subtraindo (36) a (38), obtemos

$$(a - \bar{a})\langle \nabla_Z Z, X\rangle = 0.$$

Se $\langle \nabla_Z Z, X\rangle = 0$, então f é regrada. Suponhamos então que

$$a = \bar{a}.$$

Tomando agora a componente em X em (35) e (37), temos

$$X(b) - a\langle \nabla_X Z, X\rangle - Z(a) + 2b\langle \nabla_Z X, Z\rangle + c\langle \nabla_Z^\perp \eta_1, \eta_2\rangle = 0.$$

e

$$X(b) - a\langle \nabla_X Z, X\rangle - Z(a) + 2b\langle \nabla_Z X, Z\rangle = 0.$$

Destas duas últimas equações segue que

$$\langle \nabla_Z^\perp \eta_1, \eta_2\rangle = 0, \quad (39)$$

e concluímos de (10) que f é regrada.

Provemos agora a afirmação direta. Tendo em conta (8), considere o tensor $A: TM \to TM$ onde $\mathrm{Ker}A = \Delta$ e

$$A|_{\Delta^\perp} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & 0 \end{bmatrix}.$$

Atendendo a que por hipótese (39) é válida, é imediato verificar que o tensor A satisfaz as equações de Gauss e Codazzi como hipersuperfície. Pelo Teorema 1, existe uma hipersuperfície regrada g: $M \to \mathbb{R}^{n+1}$ como queríamos. ∎

Observação 34. Na prova da recíproca, a hipótese de f não ser do tipo superfície é usada apenas para provar que a hipersuperfície g é regrada, isto é, que $\bar{c} = 0$. Assim, se supusermos à partida que f admite uma imersão como hipersuperfície regrada, esta hipótese não é necessária.

Como conseqüência do resultado anterior temos.

Corolário 35. *Seja $f\colon M^n \to \mathbb{R}^N$ uma subvariedade parabólica simplesmente conexa. Suponhamos que existe $2 \le k_0 \le \tau^f - 1$ tal que $\dim N^f_{k_0} = 1$. Então, f é regrada e M^n admite uma imersão como hipersuperfície regrada.*

Demonstração: Pela Proposição 28, sabemos que existe uma imersão isométrica $\tilde{f}\colon M^n \to \mathbb{R}^{n+2k_0-1}$ parabólica regular tal que $\xi_2^{k_0} = 0$. Segue do Teorema 26 que f é regrada. Do Teorema 33 concluímos que M^n admite uma imersão isométrica como hipersuperfície regrada. ∎

Terminamos esta seção com o seguinte resultado, que permite aumentar a codimensão das subvariedades parabólicas (necessariamente regradas) que satisfazem $\xi_2^{\tau^f} = 0$.

Proposição 36. *Seja $f\colon M^n \to \mathbb{R}^N$ uma subvariedade parabólica regular tal que $\xi_2^{\tau^f} = 0$. Se M^n é simplesmente conexa, então existe uma imersão isométrica parabólica $\tilde{f}\colon M^n \to \mathbb{R}^{N+1}$ com N^f_k e $N^{\tilde{f}}_k$, $1 \le k \le \tau^f$, isométricos, por uma isometria de fibrados paralela com respeito às conexões induzidas em cada subfibrado, e $\xi_2^{\tau^{\tilde{f}}} = 0$.*

Demonstração: Seja $\delta = e_{N+1} \in \mathbb{R}^{N+1}$. Vamos definir uma conexão $\bar{\nabla}^\perp$ em $T^\perp M \oplus \mathrm{ger}\{\delta\}$ e mostrar que esta conexão, juntamente com a segunda forma fundamental α_f de f, satisfazem a equação de Ricci.

Seja $\eta = \xi_1^{\tau^f}/\|\xi_1^{\tau^f}\| \in N^f_{\tau^f}$. Como por hipótese $\xi_2^{\tau^f} = 0$, é fácil verificarmos que η é paralelo ao longo da direção assintótica. Atendendo a (3) e ao fato dos espaços N^f_k serem paralelos ao longo de Δ pela Proposição 10, definimos $\bar{\nabla}^\perp$ da seguinte forma:

$$
\begin{gathered}
(\bar{\nabla}^\perp)_{N^f_1 \oplus \dots \oplus N^f_{\tau^f - 1}} = \nabla^\perp, \\
\bar{\nabla}^\perp_Z \eta = \nabla^\perp_Z \eta = 0, \quad \bar{\nabla}^\perp_X \eta = \nabla^\perp_X \eta - \phi_1 \delta, \\
\bar{\nabla}^\perp_Z \delta = 0 \ \text{ e } \ \bar{\nabla}^\perp_X \delta = \phi_1 \eta
\end{gathered}
$$

onde $\phi_1 \in C^\infty(M)$. Atendendo a (3) e à definição de $\bar{\nabla}^\perp$ é suficiente analisar a equação de Ricci para os vetores normais η e δ. Começamos com o vetor η. Tendo em conta o fato dos vetores X, Z serem ortonormais, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
\bar{R}^\perp(X,Z)\eta &= \bar{\nabla}^\perp_X \bar{\nabla}^\perp_Z \eta - \bar{\nabla}^\perp_Z \bar{\nabla}^\perp_X \eta - \bar{\nabla}^\perp_{[X,Z]} \eta \\
&= -\bar{\nabla}^\perp_Z (\nabla^\perp_X \eta - \phi_1 \delta) - \langle \nabla_X Z, X \rangle (\nabla^\perp_X \eta - \phi_1 \delta) \\
&= -\nabla^\perp_Z \nabla^\perp_X \eta + Z(\phi_1)\delta - \langle \nabla_X Z, X \rangle (\nabla^\perp_X \eta - \phi_1 \delta).
\end{aligned}
$$

Observando agora que

$$R^{\perp}(X,Z)\eta = -\nabla^{\perp}_Z\nabla^{\perp}_X\eta - \langle\nabla_X Z, X\rangle\nabla^{\perp}_X\eta = 0,$$

uma vez que $\eta \in N^f_{\tau^f}$ e $\tau^f \geq 2$, concluímos que Ricci para η é válida para a nova conexão se, e só se,

$$Z(\phi_1) = \langle\nabla_X X, Z\rangle\phi_1. \tag{40}$$

Para δ temos,

$$\begin{aligned}\bar{R}^{\perp}(X,Z)\delta &= \bar{\nabla}^{\perp}_X\bar{\nabla}^{\perp}_Z\delta - \bar{\nabla}^{\perp}_Z\bar{\nabla}^{\perp}_X\delta - \bar{\nabla}^{\perp}_{[X,Z]}\delta \\ &= -Z(\phi_1)\eta - \langle\nabla_X Z, X\rangle\phi_1\eta,\end{aligned}$$

ou seja, a equação de Ricci neste caso reduz-se à (40).

Atendendo à definição de $\bar{\nabla}^{\perp}$, temos que as equações de Ricci não triviais que envolvem vetores $T \in \Delta$ obtém-se de (40) substituindo Z por T, isto é,

$$T(\phi_1) = \langle\nabla_X X, T\rangle\phi_1. \tag{41}$$

Concluímos assim que a existência de $\tilde{f}$ é equivalente à integrabilidade do sistema formado por (40) e (41). Por outro lado, pelo Teorema 26, f é regrada e assim pelo Teorema 33, sabemos que f admite uma imersão como hipersuperfície regrada de $\mathbb{R}^{n+1}$. Usando agora o Teorema 3 em [DFT] concluímos que o sistema formado por (40) e (41) é integrável. Logo, escolhendo uma solução não nula obtemos do Teorema 1 uma imersão isométrica substancial $\tilde{f}\colon M^n \to \mathbb{R}^{N+1}$ com as propriedades desejadas. ∎

8 Rigidez em codimensão dois

Em [DF2] foi estudado o problema de rigidez genuína das subvariedade elípticas e parabólicas em codimensão dois. Para as elípticas concluiu-se que, aquelas que não admitem imersões isométricas locais como hipersuperfícies são genuinamente rígidas. No caso parabólico foi mostrado que as subvariedades não regradas também são genuinamente rígidas. Nesta seção generalizamos este resultado mostrando que as subvariedades parabólicas não regradas são, de fato, isometricamente rígidas.

Recordemos que uma imersão isométrica $f\colon M^n \to \mathbb{Q}^N_c$ é isometricamente rígida se dada outra imersão isométrica $g\colon M^n \to \mathbb{Q}^N_c$, existe uma isometria do ambiente $\rho\colon \mathbb{Q}^N_c \to \mathbb{Q}^N_c$, tal que $g = \rho \circ f$.

O seguinte resultado para subvariedades de posto 2 foi provado em [DF2].

Proposição 37. *Seja* $f\colon M^n \to \mathbb{R}^{n+2}$ *uma subvariedade com* $\operatorname{rank}_f = 2$ *que não é plana em nenhum aberto, e seja* $g\colon M^n \to \mathbb{R}^{n+2}$ *uma outra imersão isométrica. Então, existe um subconjunto aberto e denso de* M^n *tal que, ao longo de cada componente conexa* V*, temos:*

(i) $\operatorname{rank}_g = 2$ *e* $\Delta_g = \Delta_f$*, ou*

(ii) $\dim \Delta_g = n - 3$ *e* $g|_V$ *é uma composição de imersões isométricas*

$$g|_V = k \circ h\colon V \to \mathbb{R}^{n+2}$$

onde $h\colon V \to U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *e* $k\colon U \to \mathbb{R}^{n+2}$*.*

O seguinte resultado generaliza o provado em [DF2], para subvariedades parabólicas. Além disso, apresenta os primeiros exemplos de subvariedades de posto 2 em codimensão 2 localmente rígidas.

Teorema 38. *Sejam* $f\colon M^n \to \mathbb{R}^{n+2}$*,* $n \geq 3$*, uma subvariedade parabólica que não é do tipo superfície nem regrada em nenhum aberto de* M^n*. Então* f *é localmente rígida.*

Demonstração: Seja $g\colon M^n \to \mathbb{R}^{n+2}$ uma imersão isométrica. Como f não é regrada em nenhum aberto, segue da recíproca no Teorema 33 que M^n não admite imersão isométrica local como hipersuperfície em $\mathbb{R}^{n+1}$. Concluímos da Proposição 37 que g tem posto 2 e que $\Delta_g = \Delta_f$.

Como em (8), tomamos bases ortonormais $\{X, Z\}$ de $\Delta^\perp$ e $\{\eta_1, \eta_2\}$ de N_1^f tais que

$$A^f_{\eta_1}|_{\Delta^\perp} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A^f_{\eta_2}|_{\Delta^\perp} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lembramos também que para qualquer $T \in \Delta$ temos

$$C_T = \begin{bmatrix} m & 0 \\ n & m \end{bmatrix}.$$

Do item (iv) da Proposição 4 obtemos que $A^g_{\bar\eta} \circ C_T$ é simétrico para qualquer $\bar\eta \in T_g^\perp M$. Segue que Z também é um campo assintótico de g. Portanto, podemos fixar uma base $\{\bar\eta_1, \bar\eta_2\}$ ortonormal de $T_g^\perp M$ tal que

$$A^g_{\bar\eta_1}|_{\Delta^\perp} = \begin{bmatrix} \bar a & \bar b \\ \bar b & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A^g_{\bar\eta_2}|_{\Delta^\perp} = \begin{bmatrix} \bar c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De fato, temos da equação de Gauss que podemos tomar

$$\bar b = b.$$

Considere a componente Z da diferença das equações de Codazzi dos operadores $A^f_{\eta_1}$ e $A^g_{\bar{\eta}_1}$. Obtemos

$$(a - \bar{a})\langle \nabla_Z Z, X\rangle = 0.$$

Assim, como f não é regrada, concluímos que

$$a = \bar{a}.$$

Por outro lado, tomando a componente em X obtemos

$$c\langle \nabla^\perp_Z \eta_1, \eta_2\rangle = \bar{c}\langle \nabla^\perp_Z \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2\rangle. \tag{42}$$

Consideremos agora a componente Z da diferença das equações de Codazzi dos operadores $A^f_{\eta_2}$ e $A^g_{\bar{\eta}_2}$. Obtemos

$$\bar{c}\langle \nabla^\perp_Z \eta_1, \eta_2\rangle = c\langle \nabla^\perp_Z \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2\rangle. \tag{43}$$

Como f não é regrada e $c \neq 0$, concluímos agora de (10) que

$$c = \bar{c} \quad \text{e} \quad \langle \nabla^\perp_Z \eta_1, \eta_2\rangle = \langle \nabla^\perp_Z \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2\rangle.$$

Tomando agora a componente X temos que

$$\langle \nabla^\perp_X \eta_1, \eta_2\rangle = \langle \nabla^\perp_X \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2\rangle.$$

Concluímos assim do Teorema 1 que f é rígida. ∎

9 Superfícies parabólicas

Nesta seção vamos estudar as superfícies parabólicas. Começamos por observar que podem ser construídas através de soluções de certas equações às derivadas parciais. Mostramos em seguida que, como no caso elíptico, é possível obter um processo recursivo para a construção das suas r-seções. Este resultado é fundamental para a parametrização das subvariedades parabólicas não regradas que vamos construir mais à frente.

As superfícies parabólicas regradas já foram caracterizadas. Por esta razão, nesta seção vamos considerar superfícies parabólicas regulares.

Sejam L^2 uma variedade Riemanniana e (x, z) um sistema de coordenadas em L^2. Seja $f\colon L^2 \to \mathbb{Q}^N_\epsilon \subset \mathbb{R}^{N+\epsilon}$ onde $\epsilon = 0, 1$ e $N \geq 4$, uma superfície da esfera ou do espaço Euclidiano cujas funções coordenadas são soluções linearmente independentes (de comprimento 1, se $\epsilon = 1$) da equação parabólica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + W(u) + \epsilon\lambda u = 0 \tag{44}$$

onde $W \in TL$ e $\lambda \in C^\infty(L^2)$.

A equação (44) no caso $\epsilon = 0$, é equivalente a

$$\tilde{\nabla}_Z f_* Z + f_* W = 0$$

onde $Z = \partial/\partial z$. Logo $\alpha_f(Z,Z) = 0$. Se $\epsilon = 1$ temos

$$\tilde{\nabla}_Z f_* Z + f_* W + \lambda f = 0$$

e novamente $\alpha_f(Z,Z) = 0$. Assim, em ambas as situações, temos que f é parabólica com direção assintótica Z. Reciprocamente, dada uma superfície parabólica $f\colon L^2 \to \mathbb{Q}_\epsilon^N$ com campo assintótico Z, munida da métrica induzida e coordenadas (x,z) tal que $\partial/\partial z = Z$, a condição de Z ser assintótica significa que as funções coordenadas de f satisfazem (44) com $W = -\nabla_Z Z$ e $\lambda = \|Z\|^2$.

Na Seção 4 definimos a noção de r-seção associada a uma subvariedade parabólica (veja Definição 12). Vamos mostrar que no caso das superfícies é possível caracterizar por completo as suas r-seções.

Sejam $g\colon L^2 \to \mathbb{Q}_\epsilon^N$ uma superfície parabólica e Σ o espaço vetorial formado pelas classes das funções $u \in C^\infty(L)$ que satisfazem (44), onde para $\epsilon = 0$ identificamos duas funções quando diferem de uma constante. Quando consideramos em L^2 a métrica induzida por g, então (44) toma a forma

$$\mathrm{Hess}_u(Z,Z) + \epsilon u = 0 \tag{45}$$

onde $Z \in TL$ é um campo assintótico unitário.

Seja Γ_r, $1 \leq r \leq \tau_*^g$, o espaço vetorial das classes das r-seções de L^2 onde identificamos duas seções se, a menos de constante, a sua diferença for uma seção de $N_{r+1}^g \oplus \ldots \oplus N_{\tau^g}^g$.

Seja $[\,h\,] \in \Gamma_r$ com $r < \tau_*^g$ e $1 \leq r < s \leq \tau_*^g$. Seja $\mathcal{P}_r(h) = (\mu_1, \mu_2) \in \mathcal{V}_r$. Pelo Corolário 16, existe uma única seção $\gamma_{r+1} \in N_{r+1}^g$ tal que

$$\mathcal{P}_r(h) = \mathcal{P}_r(-\gamma_{r+1}).$$

Logo $\bar{h}_{r+1} = h + \gamma_{r+1}$ satisfaz

$$\bar{h}_{r+1} = h + \gamma_{r+1} \in \Gamma_{r+1}.$$

Continuando este processo, concluímos que existem seções únicas $\gamma_j \in N_j^g$, $r+1 \leq j \leq s$, tais que

$$\bar{h} = h + \gamma_{r+1} + \ldots + \gamma_s \tag{46}$$

satisfaz $\left[\,\bar{h}\,\right] \in \Gamma_s$.

Como em [DF1], vamos mostrar que todos os espaços Γ_r são isomorfos a Σ, o que nos vai permitir caracterizar por completo as r-seções das superfícies parabólicas.

Dado $[\,h\,] \in \Gamma_r$, escrevemos

$$h = \epsilon\varphi g + W + \delta$$

onde $W \in TL$, $\delta \in T^\perp L$ e $\varphi \in C^\infty(L)$ se $\epsilon = 1$. Dado $Y \in TL$, temos

$$\begin{aligned} h_*(Y) &= \epsilon(Y(\varphi)g + \varphi Y) + \tilde{\nabla}_Y W + \tilde{\nabla}_Y \delta \\ &= \epsilon((Y(\varphi) - \langle Y, W\rangle)g + \varphi Y) + \nabla_Y W + \alpha_g(Y, W) - A^g_\delta(Y) + \nabla^\perp_Y \delta. \end{aligned}$$

Atendendo a que a componente em TL de $h_*(Y)$ é nula, obtemos

$$\epsilon\varphi Y + \nabla_Y W = A^g_\delta Y. \tag{47}$$

Em particular, a aplicação $(Y, U) \mapsto \langle \nabla_Y W, U\rangle$ é simétrica. Assim, se $\epsilon = 0$, a 1-forma W^* é fechada uma vez que

$$\begin{aligned} dW^*(Y, U) = YW^* \ &- \ UW^*(Y) - W^*([Y, U]) \\ &= \ 0. \end{aligned}$$

Logo $W = \nabla\varphi$, para alguma função $\varphi \in C^\infty(L^2)$. No caso em que $\epsilon = 1$, usando o fato da componente de $h_*(Y)$ em ger$\{g\}$ ser zero, obtemos

$$Y(\varphi) = \langle Y, W\rangle,$$

e novamente $W = \nabla\varphi$. Assim, em qualquer dos casos, de (47) obtemos

$$\mathrm{Hess}_\varphi + \epsilon\varphi I = A^g_\delta. \tag{48}$$

Observe que estamos a usar a mesma notação, tanto para a forma bilinear simétrica $\mathrm{Hess}_\varphi : TL \times TL \to \mathbb{R}$, como para a aplicação linear simétrica associada, isto é,

$$\mathrm{Hess}_\varphi(X, Y) = \langle \mathrm{Hess}_\varphi X, Y\rangle.$$

Atendendo agora ao fato de g ser parabólica, concluímos que φ satisfaz (45) e portanto satisfaz (44). Logo $\varphi \in \Sigma$.

Consideremos a aplicação linear Υ: $\Gamma_r \to \Sigma$, definida por

$$\Upsilon([h]) = [\varphi].$$

Vamos mostrar que Υ é um isomorfismo. Suponhamos que $\Upsilon([h]) = 0$. Então $(h)_{T_gL} = \nabla\varphi = 0$. De (48) obtemos $A^g_\delta = 0$, o que significa que $(h)_{N^g_1} = 0$. Agora, fazendo uso do item (iii) do Corolário 16, concluímos facilmente que

$h \in N^g_{r+1} \oplus \ldots \oplus N^g_{\tau^g}$. Assim, atendendo à definição de Γ_r, temos que Υ é injetivo.

Sejam $\varphi \in \Sigma$ e

$$\mathcal{S} = \{\psi \in L_{sim}(TL, TL) : \langle \psi Z, Z \rangle = 0\}.$$

Seja Φ: $N^g_1 \to \mathcal{S}$ a aplicação linear injetiva definida por, $\Phi(v) = A^g_v$. De (45) e $\dim N^g_1 = 2$ temos que Φ é um isomorfismo. Concluímos que existe um único $\gamma_1 \in N^g_1$ tal que

$$A^g_{\gamma_1} = \mathrm{Hess}_\varphi + \epsilon\varphi I.$$

Definimos

$$\hat{h} = \epsilon\varphi g + \nabla\varphi + \gamma_1.$$

Então,

$$\hat{h}_* X = \epsilon X(\varphi) g + \epsilon\varphi X + \tilde{\nabla}_X \nabla\varphi + \tilde{\nabla}_X \gamma_1 = \alpha_g(X, \nabla\varphi) + \nabla^\perp_X \gamma_1,$$

e assim $[\,\hat{h}\,] \in \Gamma_1$. Concluímos de (46) que Υ é um isomorfismo. Obtemos desta forma o seguinte procedimento recursivo para a construção de r-seções para as superfícies parabólicas.

Proposição 39. *Seja g: $L^2 \to \mathbb{Q}^N_\epsilon$ uma superfície parabólica regular. Então, qualquer r-seção, $1 \le r \le \tau^g_*$, pode ser escrita como*

$$h_\varphi = \epsilon\varphi g + g_* \nabla\varphi + \gamma_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_r, \tag{49}$$

onde φ satisfaz (44) e é única (a menos de constante se $\epsilon = 0$), γ_0 é qualquer seção de $N^g_{r+1} \oplus \ldots \oplus N^g_{\tau^g}$, $\gamma_1 \in N^g_1$ é a única solução de $A^g_{\gamma_1} = \mathrm{Hess}_\varphi + \epsilon\varphi I$ e γ_j , $2 \le j \le r$, são as únicas seções dadas por (46). Reciprocamente, qualquer função h_φ com a forma de (49), é uma r-seção de g.

10 Parametrização Polar

Nesta seção vamos descrever parametricamente as subvariedade parabólicas com vetor normal $\xi_2^{\tau^f}$ não nulo em todo o ponto, sendo então regulares. Nos começamos por observar que esta hipótese não é restritiva no contexto do nosso trabalho, uma vez que as parabólicas que não satisfazem esta propriedades são regradas, estando portanto caracterizadas (veja Seção 6). Esta parametrização, a que chamaremos *parametrização polar*, é determinada por uma superfície parabólica e por uma solução de uma equação diferencial parabólica. Dada uma subvariedade parabólica, a superfície parabólica que a parametriza será chamada *superfície polar*.

Vamos mostrar que podemos associar a cada subvariedade parabólica $f\colon M^n \to \mathbb{R}^N$, com $\xi_2^{\tau^f}$ sem singularidades, uma superfície do espaço Euclidiano ou da esfera, cujo espaço tangente pode ser identificado com o último subfibrado de dimensão 2 da decomposição (2) do espaço normal de f.

Para motivar a construção da parametrização que pretendemos, vamos considerar inicialmente uma superfície parabólica $g\colon L^2 \to \mathbb{Q}_\epsilon^N$, cujo vetor normal $\xi_2^{\tau^g}$ é não nulo em todo o ponto e $1 \leq s \leq \tau_*^g$. Vamos mostrar que usando g podemos construir uma subvariedade parabólica regular de $\mathbb{R}^{N+\epsilon}$ (de fato, um cone) de dimensão $N-2(s-1)$.

Denotamos por Λ_s o subfibrado normal dado por

$$\Lambda_s = N_{s+1}^g \oplus \ldots \oplus N_{\tau^g}^g$$

e seja $\Psi\colon \Lambda_s \to \mathbb{R}^{N+\epsilon}$ a aplicação definida por

$$\Psi(\delta) = \delta.$$

Proposição 40. *Fora dos pontos singulares, $M^n = \Psi(\Lambda_s)$ é uma subvariedade parabólica regular. Mais, se g não é regrada então $M^n = \Psi(\Lambda_s)$ não é regrada.*

Faremos uso do seguinte resultado geral.

Lema 41. *Seja $f\colon M^n \to \mathbb{R}^N$ uma subvariedade parabólica. Então temos:*

(i) Se $\dim N_{k+1}^f = 2$, então existe $\eta \in N_{k+1}^f$ tal que as componentes de $\mathcal{P}_k(\eta)$ formam uma base de N_k^f.

(ii) Suponha que $N-n$ é ímpar, que $\dim N_{\tau^f-1}^f = 2$ e que o campo $\xi_2^{\tau^f}$ é não nulo em todo o ponto. Então $\mathcal{P}_{\tau^f-1}(\xi_2^{\tau^f})$ é uma base de $N_{\tau^f-1}^f$.

Demonstração: Vamos provar (i). Do Corolário 16 temos que $\mathcal{P}_k|_{N_{k+1}^f}$ é um isomorfismo, e do Lema 11 concluímos que $\dim N_k^f = 2$. Assim, como N_k^f tem dimensão 2, existe pelo menos um vetor $(\mu_1, \mu_2) \in \mathcal{V}_k$ com $\mu_2 \neq 0$. Nestas condições μ_1 e μ_2 são linearmente independentes e logo formam uma base de N_k^f.

Para (ii), tendo em conta o argumento feito na demonstração de (i), é suficiente mostrar que $(\nabla_Z^\perp \xi_2^{\tau^f})_{N_{\tau^f-1}^f} \neq 0$. Suponha que o campo é nulo. Da definição de $\mathcal{V}_{\tau^f-1}$ obtemos

$$\langle \nabla_X^\perp \xi_2^{\tau^f}, \xi_2^{\tau^f-1} \rangle = 0.$$

Da Proposição 9 concluímos que $\xi_2^{\tau^f} = 0$, o que é uma contradição. ∎

Vamos agora provar a Proposição 40.

Demonstração: Tomemos um sistema de coordenadas (x, z) de L^2, tal que $Z = \partial/\partial z$ seja uma direção assintótica de g. Seja $\{\eta_1, \ldots, \eta_k\}$ um referencial ortonormal de Λ_s. Podemos parametrizar M^n da forma

$$\Psi(x, z, t_1, \ldots, t_k) = \sum_{j=1}^{k} t_j \eta_j(x, z)$$

onde $k = N - 2s$ e $(t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^k$.

Atendendo às propriedades dos espaços normais e ao Lema 41 temos que $TM = \Lambda_{s-1}$ e que $\Delta_\delta = \Lambda_s$. Vamos mostrar que $\Psi_*(Z)$ é uma direção assintótica, ou seja,

$$\tilde{\nabla}_Z \Psi_*(Z) \in TM.$$

Atendendo a (3) basta mostrar que

$$\langle \tilde{\nabla}_Z \Psi_*(Z), \upsilon \rangle = 0, \quad \upsilon \in N_{s-1}^g.$$

Seja $X = \partial/\partial x \in TL$. Observe que,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\nabla}_Z \Psi_*(Z), \alpha^s(X, \ldots, X) \rangle &= -\langle \Psi_*(Z), \tilde{\nabla}_Z \alpha^s(X, \ldots, X) \rangle \\ &= -\sum_{j=1}^{k} t_j \langle \tilde{\nabla}_Z \eta_j, \alpha^{s+1}(Z, X, \ldots, X) \rangle \\ &= -\sum_{j=1}^{k} t_j \langle \eta_j, \tilde{\nabla}_Z \alpha^{s+1}(Z, X, \ldots, X) \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

atendendo à simetria do tensor α^s, às propriedades dos espaços normais e ao fato do vetor Z ser assintótico. De forma análoga se prova que

$$\langle \tilde{\nabla}_Z \Psi_*(Z), \alpha^s(Z, X, \ldots, X) \rangle = 0.$$

Uma vez que os vetores $\alpha^s(X, \ldots, X), \alpha^s(Z, X, \ldots, X)$ geram o subespaço N_{s-1}^g, concluímos que $\Psi_*(Z)$ é um vetor assintótico. Portanto, nos pontos regulares, Ψ define uma subvariedade parabólica de $\mathbb{R}^{N+\epsilon}$.

Suponhamos agora que g não é regrada. Comecemos por observar que a definição de $\boldsymbol{\nu}_s$ permite concluir que a direção assintótica de ψ é ortogonal a ξ_2^s. Fixemos então um campo $\eta_s \in \Delta_\Psi^\perp = N_s^g$ unitário assintótico. Assim, M^n é regrada se, e só se, $(\tilde{\nabla}_Z \eta_s)_{N_s^g} = 0$. Logo, como g não é regrada, atendendo ao Corolário 27, M^n não é regrada. ∎

Proposição 42. *A aplicação* $\Psi\colon \Lambda_s \to \mathbb{R}^{N+\epsilon}$ *dada por*

$$\delta \mapsto h(x) + \delta,$$

onde h *é uma* s*-seção de* g*, define fora dos pontos singulares uma subvariedade parabólica regular. Mais, se* g *não é regrada, então* $\Psi(\Lambda_s)$ *não é regrada.*

A demonstração do resultado precedente é uma conseqüência imediata dos seguintes lemas.

Lema 43. *Seja* $\beta\colon M^n \to \mathbb{R}^{N+\epsilon}$ *uma* s*-seção de* f *para* $1 \leq s \leq \tau^f$*. Então,*

$$(\tilde{\nabla}_Z \beta_*(Z))_{N^f_{s-1}} = 0.$$

Demonstração: Para $s \geq 2$, derivando $\langle \beta_*(Z), \xi_2^{s-1} \rangle = 0$ na direção de Z, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \tilde{\nabla}_Z \beta_*(Z), \xi_2^{s-1} \rangle + \langle \beta_*(Z), \nabla_Z^{\perp}\, \xi_2^{s-1} \rangle \\ &= \langle \tilde{\nabla}_Z \beta_*(Z), \xi_2^{s-1} \rangle + \langle \beta_*(Z), \alpha^{s+1}(Z, Z, X, \ldots, X) \rangle \\ &= \langle \tilde{\nabla}_Z \beta_*(Z), \xi_2^{s-1} \rangle. \end{aligned}$$

Da mesma forma, derivando $\langle \beta_*(Z), \xi_1^{s-1} \rangle = 0$ na direção de Z, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \tilde{\nabla}_Z \beta_*(Z), \xi_1^{s-1} \rangle + \langle \beta_*(Z), \nabla_Z^{\perp}\, \xi_1^{s-1} \rangle \\ &= \langle \tilde{\nabla}_Z \beta_*(Z), \xi_1^{s-1} \rangle + \langle \beta_*(Z), \xi_2^{s} \rangle \\ &= \langle \tilde{\nabla}_Z \beta_*(Z), \xi_1^{s-1} \rangle \end{aligned}$$

atendendo ao Lema 13. Logo $(\tilde{\nabla}_Z \beta_*(Z))_{N^f_{s-1}} = 0$.

Quando $s = 1$, tendo em conta que $N_0^f = \Delta^{\perp}$, $\xi_1^0 = X$ e $\xi_2^0 = Z$, a prova é análoga. ∎

Lema 44. *Os espaços normais de* M^n *satisfazem* $\dim N_k^{\Psi} = 2, 1 \leq k \leq \tau_*^{\Psi}$.

Demonstração: Atendendo às propriedades do tensor $\mathcal{P}_k$ definido em (4), à definição dos s-espaços normais e à definição da função Ψ, é fácil concluir que $N_k^{\Psi} = N_{s-k}^{g}$. ∎

Seja $f\colon M^n \to \mathbb{Q}_\epsilon^N$ uma subvariedade parabólica. Como estamos a trabalhar localmente vamos assumir que M^n é saturação de uma seção transversal L^2 de Δ. Observe que, pelo Lema 10, os subespaços normais N_k, associados a subvariedades parabólicas, podem ser vistos como fibrados ao longo da superfície L^2.

Definição 45. Sejam $f\colon M^n \to \mathbb{Q}_\epsilon^{N-\epsilon}$ uma subvariedade parabólica regular e L^2 a superfície descrita acima. Definimos *superfície polar* associada a f, como sendo uma imersão g definida por:

(i) Se $N-n-\epsilon$ é ímpar, então $g\colon L^2 \to \mathbb{S}^{N-1}$ é dada por $\text{ger}\{g(x)\} = N^f_{\tau^f}(x)$.

(ii) Se $N-n-\epsilon$ é par, então $g\colon L^2 \to \mathbb{R}^N$ é qualquer imersão que satisfaça

$$T_{g(x)}L = N^f_{\tau^f}(x).$$

Em seguida vamos mostrar que todas as parabólicas que satisfazem $\xi_2^{\tau^f} \neq 0$ em todo o ponto, em particular as parabólicas regulares não regradas, admitem uma superfície polar, e que esta superfície a parametriza no sentido da Proposição 42.

Proposição 46. *Toda subvariedade $f\colon M^n \to \mathbb{Q}_\epsilon^N$ parabólica, regular e com vetor normal $\xi_2^{\tau^f}$ não nulo em todo o ponto, admite, pelo menos localmente, uma superfície polar g. Além disso, g não é regrada e é substancial, se f não é regrada e não tem fator Euclidiano, respectivamente.*

Para a prova da proposição anterior precisamos do seguinte resultado.

Lema 47. *Suponha que a codimensão de f é par. Sejam $\eta \in N^f_{\tau^f}$ e $\mu_1 = (\tilde{\nabla}_X \eta)_{N^f_{\tau^f-1}}$, $\mu_2 = (\tilde{\nabla}_Z \eta)_{N^f_{\tau^f-1}}$ tal que $\mu_2 \neq 0$. Então,*

$$\mathcal{V}_{\tau^f-1} = \{(a\mu_1 + b\mu_2, a\mu_2) :\ a, b \in C^\infty(M)\}.$$

Demonstração: Atendendo à definição de $\mathcal{V}_{\tau^f-1}$ e ao Lema 9, temos que $(\mu_2, 0) \in \mathcal{V}_{\tau^f-1}$, uma vez que $\langle(\tilde{\nabla}_Z\eta)_{N^f_{\tau^f-1}}, \xi_2^{\tau^f-1}\rangle = \langle \eta, \tilde{\nabla}_Z \xi_2^{\tau^f-1}\rangle = 0$. Tendo em conta a dimensão de $N^f_{\tau^f-1}$, concluímos que os vetores (μ_1, μ_2), $(\mu_2, 0)$ formam uma base de $\mathcal{V}_{\tau^f-1}$. ∎

Observação 48. Observe que o campo normal $\eta = \xi_2^{\tau^f}/\|\xi_2^{\tau^f}\| \in N^f_{\tau^f}$ satisfaz $(\tilde{\nabla}_Z\eta)_{N^f_{\tau^f-1}} \neq 0$. De fato, atendendo à Proposição 9 é fácil concluir que $\langle \tilde{\nabla}_Z \eta, \xi_1^{\tau^f-1}\rangle \neq 0$.

Demonstração: No caso de codimensão ímpar, a existência da superfície polar segue do item (ii) do Lema 41. Suponhamos então que $\dim N^f_{\tau^f} = 2$. Dada uma base $\{\eta_1, \eta_2\}$ de $N^f_{\tau^f}$ constante ao longo de Δ, vamos provar que existem

$1-$formas diferenciais θ_1, θ_2 linearmente independentes que fazem com que a equação diferencial

$$dg = \theta_1\eta_1 + \theta_2\eta_2 \tag{50}$$

seja integrável.

Fixemos $Z \in \Delta^\perp$ assintótico. Sejam $U \in TL$ tal que

$$Z = U + \delta_1$$

onde $\delta_1 \in \Delta$. Tomemos (u, v) um sistema de coordenadas em L^2 tal que

$$\partial u =: \partial/\partial u = U.$$

Consideremos o campo $V \in TL$ definido por,

$$V = \partial/\partial v := \partial v.$$

Seja $X \in \Delta^\perp$ definido por, $X = V + \delta_2$, onde $\delta_2 \in \Delta$

Tomemos em L^2 a métrica que torna a base $\{U, V\}$ ortonormal e a orientação definida por esta base. Sejam $\eta_1, \eta_2 \in N^f_{\tau^f}$ campos linearmente independentes constantes ao longo de Δ. Sem perda de generalidade podemos supor que

$$\mu_2 = (\tilde{\nabla}_Z \eta_1)_{N^f_{\tau^f-1}} \neq 0.$$

Pelo Lema 47, existem $a, b \in C^\infty(M)$, com $b \neq 0$, tais que

$$\mathcal{P}_{\tau^f-1}(\eta_1) = (\mu_1, \mu_2) \quad \text{e} \quad \mathcal{P}_{\tau^f-1}(\eta_2) = (a\mu_1 + b\mu_2, a\mu_2). \tag{51}$$

Consideremos as formas diferenciais

$$\theta_1 = a^1 du + a^2 dv \quad \text{e} \quad \theta_2 = b^1 du + b^2 dv, \tag{52}$$

onde $a^1, a^2, b^1, b^2 \in C^\infty(L^2)$. Vamos mostrar que existem funções $a^1, a^2, b^1, b^2 \in C^\infty(L^2)$ que tornam (50) integrável.

A condição de integrabilidade de (50) é

$$\begin{aligned} 0 &= d\theta_1\eta_1 + d\theta_2\eta_2 + \theta_1 \wedge d\eta_1 + \theta_2 \wedge d\eta_2 \\ &= d\theta_1\eta_1 + d\theta_2\eta_2 + (a^1\partial\eta_1/\partial v - a^2\partial\eta_1/\partial u)dV + (b^1\partial\eta_2/\partial v - b^2\partial\eta_2/\partial u)dV \\ &= d\theta_1\eta_1 + d\theta_2\eta_2 + (\tilde{\nabla}_{a^1\partial v - a^2\partial u}\, \eta_1 + \tilde{\nabla}_{b^1\partial v - b^2\partial u}\, \eta_2)dV = 0 \end{aligned}$$

onde dV é o elemento de volume em L^2. Então, para que (50) seja integrável é necessário que as funções a^1, a^2, b^1 e b^2 satisfaçam

$$(\tilde{\nabla}_{a^1\partial v - a^2\partial u}\, \eta_1 + \tilde{\nabla}_{b^1\partial v - b^2\partial u}\, \eta_2)_{N_{\tau^f-1}} = 0.$$

Observando que,

$$\tilde{\nabla}_{\partial u}\eta_j = \tilde{\nabla}_Z \eta_j \quad \text{e} \quad \tilde{\nabla}_{\partial v}\eta_j = \tilde{\nabla}_X \eta_j, \; j = 1, 2,$$

atendendo a (51) e ao fato dos vetores μ_1 e μ_2 serem linearmente independentes, deve-se verificar

$$\begin{cases} a^1 + ab^1 = 0 \\ a^2 + ab^2 - bb^1 = 0. \end{cases} \tag{53}$$

Nestas condições, sejam $e, \ell \in C^\infty(L)$ tais que

$$\tilde{\nabla}_{a^1\partial v - a^2\partial u}\, \eta_1 + \tilde{\nabla}_{b^1\partial v - b^2\partial u}\, \eta_2 = -(e\eta_1 + \ell\eta_2).$$

Assim, temos que provar que existem funções $a^1, a^2, b^1, b^2 \in C^\infty(L)$ de tal forma que as 1-formas diferenciais em (52) satisfaçam o sistema (53) e

$$\begin{cases} d\theta_1 \;=\; e\, dV \\ d\theta_2 \;=\; \ell\, dV, \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} a^2_u - a^1_v \;=\; e \\ b^2_u - b^1_v \;=\; \ell. \end{cases} \tag{54}$$

De (53) e (54) obtemos

$$\begin{cases} a^1 = -ab^1 \\ a^2 = bb^1 - ab^2 \\ b_u b^1 + bb^1_u - a_u b^2 - a(b^2_u - b^1_v) + a_v b^1 = e \\ b^2_u - b^1_v = \ell. \end{cases}$$

Das duas últimas equações temos

$$\begin{cases} b_u b^1 + bb^1_u - a_u b^2 + a_v b^1 = e + a\ell \\ b^2_u - b^1_v = \ell. \end{cases} \tag{55}$$

Atendendo à arbitrariedade do campo η_2, podemos supor sem perda de generalidade que $a_u \neq 0$. Desta forma, da primeira equação de (55) obtemos

$$b^2 = -\frac{1}{a_u}(e + a\ell - (b_u + a_v)b^1 - bb^1_u). \tag{56}$$

Substituindo na segunda equação de (55), obtemos uma equação parabólica linear. Assim, sendo b^1 uma solução não nula dessa equação (veja pag. 367 de

[Ev]) obtemos através de (56) a função b^2, ficando assim provada a existência das 1-formas diferenciais que tornam (50) integrável.

Suponhamos agora por absurdo que g não é substancial. Então existiria um subfibrado de $T^\perp L$ paralelo, contendo o primeiro espaço normal de g. Atendendo à construção de g, concluíamos que existiria um subfibrado de Δ_f paralelo e logo f teria um fator Euclidiano. Portanto g será substancial sempre que f não contenha fator Euclidiano. De forma análoga se prova a recíproca desta afirmação. A conclusão da prova é conseqüência do seguinte resultado. ∎

Proposição 49. *Nas condições anteriores,*

(i) $N_s^g = N^f_{\tau_*^f - s}$, $0 \leq s \leq \tau_*^f$,

(ii) g é parabólica e, além disso, g não é regrada se f não é regrada.

Demonstração: Atendendo à definição de superfície polar é fácil concluirmos que $N_1^g = N^f_{\tau_*^f - 1}$. Vejamos agora que g admite uma direção assíntótica, que será única uma vez que $\dim N_1^g = 2$. No caso de codimensão par, usando as notações da demonstração da Proposição 46, vamos mostrar que o vetor $g_*\partial u$ é assintótico. De (50) e (53), obtemos

$$g_*\partial u = a^1\eta_1 + b^1\eta_2 = -ab^1\eta_1 + b^1\eta_2. \tag{57}$$

Por outro lado, de (51) e atendendo a que os fibrados N_k^f são paralelos ao longo de Δ_f, temos

$$(\tilde{\nabla}_Z g_*\partial u)_{N^f_{\tau^f - 1}} = -ab^1\mu_2 + ab^1\mu_2 = 0.$$

No caso de codimensão ímpar, o resultado sai do Lema 43. Concluímos assim que g é parabólica.

Suponhamos agora que f não é regrada. Para mostrar que g não é regrada comecemos por considerar o caso em que f tem codimensão ímpar. Como $\xi_2^{\tau^f} \neq 0$ o espaço tangente TL é gerado por $\{(\tilde{\nabla}_X \xi_2^{\tau^f})_{N^f_{\tau_*^f}}, (\tilde{\nabla}_Z \xi_2^{\tau^f})_{N^f_{\tau_*^f}}\}$, sendo $(\tilde{\nabla}_Z \xi_2^{\tau^f})_{N^f_{\tau_*^f}}$ um campo assintótico. Atendendo à definição do subespaço $\mathcal{V}_{\tau_*^f}$ concluímos que o campo γ, unitário, assintótico (único a menos de sinal) ao longo de Δ é normal a $\xi_2^{\tau_*^f}$. Nestas condições g é regrada se, e somente se,

$$(\tilde{\nabla}_Z \gamma)_{N^f_{\tau_*^f}} = 0.$$

Portanto, tendo em conta o fato de f não ser regrada e o Corolário 27, g não é regrada.

Consideremos agora o caso de codimensão par. Para tornar mais clara a notação, sempre que seja necessário distinguir os objetos de f e g, escreveremos em índice o símbolo correspondente. Usando as notações da Proposição 46 podemos escrever $N_1^g = \mathrm{ger}\{(\tilde{\nabla}_Z\eta_1)_{N^f_{\tau^f-1}}, (\tilde{\nabla}_X\eta_1)_{N^f_{\tau^f-1}}\}$. Atendendo a (51) e (57) é fácil concluir que

$$\xi_2^{1\,g} = b\mu_2 = b(\tilde{\nabla}_Z\eta_1)_{N_{\tau^f-1}}. \tag{58}$$

Seja $\lambda = \|b(\tilde{\nabla}_Z\eta_1)_{N_{\tau^f-1}}\|^{-1}$. Atendendo a (10), g será regrada se, e somente se, $(\tilde{\nabla}_U\lambda(\tilde{\nabla}_Z\eta_1)_{N_{\tau^f-1}})_{N^f_{\tau^f-1}} = 0$. Tendo em conta o fato de η_1 ser constante ao longo de Δ_f, podemos escrever

$$0 = (\tilde{\nabla}_U\lambda(\tilde{\nabla}_Z\eta_1)_{N^f_{\tau^f-1}})_{N^f_{\tau^f-1}} = U(\lambda)(\tilde{\nabla}_Z\eta_1)_{N^f_{\tau^f-1}} + \lambda(\tilde{\nabla}_Z(\tilde{\nabla}_Z\eta_1)_{N^f_{\tau^f-1}})_{N^f_{\tau^f-1}},$$

e portanto

$$(\tilde{\nabla}_Z(\tilde{\nabla}_Z\eta_1)^f_{N_{\tau^f-1}})_{N^f_{\tau^f-1}} \in (\tilde{\nabla}_Z\eta_1)_{N^f_{\tau^f-1}}.$$

Portanto, como $(\tilde{\nabla}_Z\eta_1)_{N_{\tau^f-1}}$ é normal a $\xi_2^{\tau^f-1\,f}$, podemos concluir que

$$(\tilde{\nabla}_Z\, \xi_2^{\tau^f-1\,f}/\|\xi_2^{\tau^f-1\,f}\|)_{N^f_{\tau^f-1}} = 0.$$

Assim, pelo Corolário 27, f seria regrada.

O item (i) é agora consequência de g ser parabólica e regular. ∎

Assim, as parabólicas cujo vetor $\xi_2^{\tau^f}$ normal é não nulo, em particular as parabólicas regulares não regradas, admitem a seguinte descrição paramétrica.

Teorema 50. *Sejam $g\colon L^2 \to \mathbb{Q}_\epsilon^N$ uma superfície parabólica com vetor normal $\xi_2^{\tau^g}$ não nulo em todo o ponto, $1 \le s \le \tau_*^g$ e $\Psi\colon \Lambda_s \to \mathbb{R}^N$ a função definida por,*

$$\Psi(\delta) = h(x) + \delta, \ \ \delta \in \Lambda_s(x), \tag{59}$$

onde $\Lambda_s = N_{s+1}^g \oplus \ldots \oplus N_{\tau_g}^g$ e h é uma s-seção arbitrária de g. Então, nos pontos regulares, $M^n = \Psi(\Lambda_s)$ é uma subvariedade parabólica regular com superfície polar g. Além disso, se g não é regrada então $M^n = \Psi(\Lambda_s)$ não é regrada.

Reciprocamente, qualquer subvariedade parabólica $f\colon M^n \to \mathbb{R}^N$ com $\xi_2^{\tau^f}$ não nulo em todo o ponto e sem fator Euclidiano, admite uma parametrização local na forma de (59), onde g é uma superfície polar de f.

Demonstração: Seja $g\colon L^2 \to \mathbb{Q}_\epsilon^N$ uma superfície polar associada a f. Pela Proposição 49 temos $\Delta_f = \Lambda_{\tau_*^f}$ e $TM = \Lambda_{\tau_*^f-1}$ ao longo de L^2. Logo, a seção $h = f_{|_{L^2}}$ é uma τ_*^f-seção de g. ∎

Observe que variando γ_0 em (49) obtemos apenas uma reparametrização de $\Psi(\Lambda_s)$. Por esta razão é conveniente tomar $\gamma_0 = 0$ no processo recursivo descrito na Proposição 39 para gerar s-seções. Observe ainda que este tipo de parametrização é mais adequada para subvariedades com codimensão baixa, uma vez que nesta situação o processo recursivo tem menos iterações. Por exemplo, em codimensão 2 é suficiente tomar uma 1-seção da forma

$$h_\varphi = \nabla\varphi + \gamma_1,$$

onde $\gamma_1 \in N_1^f$ é o único vetor que satisfaz $A_{\gamma_1} = \mathrm{Hess}_\varphi$ para uma dada solução φ de (44).

11 Parametrização bipolar

Introduzimos agora a superfície bipolar associada às subvariedades parabólicas não regradas. Ao contrário da superfície polar, a superfície bipolar só está bem definida no caso não regrado. Começamos por justificar este fato. Em seguida mostramos que, como no caso polar, estas superfícies permitem descrever parametricamente as subvariedades parabólicas não regradas. A esta parametrização chamaremos *parametrização bipolar*. Esta parametrização é mais útil em relação à parametrização polar, quando a codimensão da subvariedade parabólica é grande, atendendo ao processo iterativo de construção de s-seções. Em [DF1] esta parametrização foi definida para subvariedades elípticas, e foi provado que toda a subvariedade elíptica podia ser parametrizada desta forma.

Começamos por definir superfície bipolar.

Definição 51. Chamamos *superfície bipolar* associada a uma subvariedade parabólica não regrada f a qualquer superfície polar associada a uma superfície polar de f.

Observação 52. O fato de f ser não regrada permite concluir, como vimos na seção anterior, que f admite uma superfície polar g não regrada, e portanto $\xi_2^{\tau^g} \neq 0$ em todo o ponto. Fica assim garantida a existência da superfície bipolar.

Faremos uso da seguinte noção.

Definição 53. Seja $g\colon L^2 \to \mathbb{Q}_\epsilon^N$ um superfície parabólica e $0 \leq s \leq \tau_*^g - 1$. Dizemos que $h \in C^\infty(L^2, \mathbb{R}^{N+\epsilon})$ é uma *s-seção dual* de g se

$$h_*(TL) \subset \epsilon\, \mathrm{ger}\{g\} \oplus N_0^g \oplus \ldots \oplus N_s^g.$$

Observe que uma 0-seção dual de uma superfície parabólica Euclidiana é uma superfície bipolar de g.

Proposição 54. *Seja $g\colon L^2 \to \mathbb{Q}_\epsilon^N$ uma superfície parabólica com superfície polar $\hat{g}$. Uma s-seção dual de g é uma $([N/2]-s-1)$-seção de $\hat{g}$.*

Demonstração: Basta observar que $\tau_*^g = \tau_*^{\hat{g}} = [N/2]-1$. O resultado segue agora da Proposição 49. ∎

A parametrização bipolar é da seguinte forma.

Teorema 55. *Dada uma superfície parabólica $g\colon L^2 \to \mathbb{Q}_\epsilon^N$ com $\xi_2^{\tau^g}$ não nulo em todo o ponto e $0 \leq s \leq \tau_*^g - 1$, considere a aplicação $\tilde{\Psi}\colon \tilde{\Lambda}_s \to \mathbb{R}^N$ definida por*

$$\tilde{\Psi}(\tilde{\delta}) = \tilde{h}(x) + \tilde{\delta}, \qquad \tilde{\delta} \in \tilde{\Lambda}_s, \tag{60}$$

onde $\tilde{\Lambda}_s = \epsilon\,\mathrm{ger}\{g\} \oplus N_0^g \oplus \ldots \oplus N_{s-1}^g$ e $\tilde{h}$ é qualquer s-seção dual de g. Então, nos pontos regulares, $M^n = \tilde{\Psi}(\tilde{\Lambda}_s)$ é uma subvariedade parabólica não regrada com superfície bipolar g.

Reciprocamente, qualquer subvariedade parabólica $f\colon M^n \to \mathbb{R}^N$ com $\xi_2^{\tau^f}$ não nulo em todo o ponto e sem fator Euclidiano, pode ser parametrizada localmente da forma (60), onde g é uma superfície bipolar de f.

Demonstração: Tendo em conta o fato de qualquer subvariedade parabólica não regrada admitir uma superfície polar, basta ter em conta a proposição anterior, a Proposição 49 e o Teorema 50. ∎

Apresentamos de seguida uma forma alternativa para a construção de parametrizações para as subvariedades parabólicas.

Considere $g\colon L^2 \to \mathbb{Q}_\epsilon^N$ uma superfície parabólica não regrada simplesmente conexa munida da métrica induzida por g, $Z \in TL$ um vetor assintótico unitário de g e $X \in TL$ tal que $\{X, Z\}$ seja uma base ortonormal de TL. Seja $J \in End\,(TL)$ definido por

$$J(X) = Z \ \text{ e } \ J(Z) = 0$$

e seja $R \in End\,(TL)$ a reflexão dada por

$$R(X) = X \ \text{ e } \ R(Z) = -Z.$$

Consideremos o operador parabólico

$$L(\varphi)=ZZ(\varphi)+\Gamma_2X(\varphi)-\Gamma_1Z(\varphi)+(X(\Gamma_2)-Z(\Gamma_1)+(\Gamma_1)^2-(\Gamma_2)^2-\epsilon)\varphi, \tag{61}$$

onde $Y = [X, Z] = \Gamma_2 Z - \Gamma_1 X$. Sejam $\varphi \in C^\infty(L)$ solução de (61) e ψ a 1-forma tal que

$$d\psi(X, Z) = -\varphi.$$

Lema 56. *A equação diferencial*

$$d\theta = d\varphi \circ J + \varphi Y^* \circ R + \epsilon\psi$$

é integrável.

Demonstração: Temos,

$$\begin{aligned}
&d^2\theta(X,Z)\\
&\quad = X(-\varphi\Gamma_2 + \epsilon\psi(Z)) - Z(d\varphi(Z) - \varphi\Gamma_1 + \epsilon\psi(X)) + d\varphi(\Gamma_1 Z)\\
&\qquad -\varphi((\Gamma_1)^2 - (\Gamma_2)^2) - \epsilon\psi(\Gamma_2 Z - \Gamma_1 X)\\
&\quad = -X(\varphi)\Gamma_2 - \varphi X(\Gamma_2) + \epsilon X(\psi(Z)) - ZZ(\varphi) + \Gamma_1 Z(\varphi) + \varphi Z(\Gamma_1)\\
&\qquad -\epsilon Z(\psi(X)) + \varphi\Gamma_1(Z) - \varphi((\Gamma_1)^2 - (\Gamma_2)^2) - \epsilon\Gamma_2\psi(Z) + \epsilon\Gamma_1\psi(X)\\
&\quad = -ZZ(\varphi) + \Gamma_1 Z(\varphi) - \Gamma_2 X(\varphi) - (X(\Gamma_2) - Z(\Gamma_1) + (\Gamma_1)^2 - (\Gamma_2)^2 - \epsilon)\varphi\\
&\quad = -L(\varphi).
\end{aligned}$$

Logo a equação é integrável. ∎

Lema 57. *A equação diferencial*

$$dh = \epsilon\psi g + dg \circ (\theta I + \varphi J) \tag{62}$$

é integrável.

Demonstração: Temos,

$$\begin{aligned}
&d^2h(X,Z)\\
&\quad = X(\epsilon\psi(Z)g + \theta Z) - Z(\epsilon\psi(X)g + \theta X + \varphi Z) - \epsilon\psi(Y)g - \theta Y - \varphi JY\\
&\quad = \epsilon(X(\psi(Z))g + \psi(Z)X) + X(\theta)Z + \theta(\nabla_X Z + \alpha(X,Z))\\
&\qquad -\epsilon(Z(\psi(X))g + \psi(X)Z) - Z(\theta)X - \theta(\nabla_Z X + \alpha(X,Z))\\
&\qquad -Z(\varphi)Z - \varphi(\nabla_Z Z - \epsilon g) - \epsilon\psi(Y)g - \theta Y - \varphi JY\\
&\quad = \epsilon(X(\psi(Z)) - Z(\psi(X)) - \psi(Y))g + \epsilon(\psi(Z)X - \psi(X)Z) + \epsilon\varphi g\\
&\qquad +d\theta(X)Z - d\theta(Z)X - Z(\varphi)Z\\
&\quad = \epsilon(d\psi(X,Z) + \varphi)g + (d\theta(X) + \varphi\Gamma_1 - Z(\varphi) - \epsilon\psi(X))Z\\
&\qquad -(d\theta(Z) + \varphi\Gamma_2 - \epsilon\psi(Z))X.
\end{aligned}$$

Atendendo às hipóteses feitas sobre θ e ψ obtemos $d^2h = 0$. ∎

Teorema 58. *Sejam $g\colon L^2 \to \mathbb{Q}_\epsilon^{N-\epsilon}$ uma superfície parabólica não regrada e simplesmente conexa, $\varphi \in C^\infty(L)$ satisfazendo $L(\varphi) = 0$ e $h\colon L^2 \to \mathbb{R}^N$ uma solução de (62). Consideremos a aplicação*

$$\Psi\colon L^2 \times \mathbb{R}^{2s-\epsilon} \to \mathbb{R}^N$$

definida por,

$$\Psi(x,t) = h(x) + \epsilon\, t_0 g(x) + \sum_{j=1}^{s}\left(t_{2j-1}\frac{\partial^j g}{\partial v \partial u^{j-1}} + t_{2j}\frac{\partial^j g}{\partial u^j}\right)(x),$$

onde $0 \leq s \leq [(N-\epsilon)/2] - 2$ *e* (u,v) *é um sistema de coordenadas de* L^2 *tal que* $\partial/\partial v$ *seja uma direção assintótica. Então, nos pontos onde é não singular, a aplicação* Ψ *parametriza uma subvariedade parabólica.*

Reciprocamente, qualquer subvariedade parabólica não regrada sem fator Euclidiano que admita uma superfície bipolar pode ser parametrizada desta forma.

Demonstração: Por definição dos espaços N_j^g os vetores,

$$\left(\frac{\partial^{j+1} g}{\partial u^j \partial v}\right)_{N_j}, \left(\frac{\partial^{j+1} g}{\partial u^{j+1}}\right)_{N_j}, \quad 0 \leq j \leq \tau_*^g,$$

formam uma base de N_j^g. Por outro lado, pela definição da parametrização em (60) podemos tomar $\tilde{h}$ como sendo uma 0-seção dual de g sem perda de generalidade. Para concluir vamos mostrar que qualquer 0-seção dual de g é obtida através de uma solução de (62). Suponhamos então que $\tilde{h}$ é uma 0-seção dual de g. Assim, por definição, terá que existir uma 1-forma Ψ e uma seção $S \in End\,(TL)$ tal que

$$d\tilde{h} = \epsilon \Psi g + dg \circ S.$$

Usando as notações anteriores temos,

$$\begin{aligned}
d^2\tilde{h}(X,Z) &= \epsilon X(\psi(Z))g + \epsilon\psi(Z)X + \tilde{\nabla}_X SZ - \epsilon Z(\psi(X))g - \epsilon\psi(X)Z \\
&\quad -\tilde{\nabla}_Z SX - \epsilon\psi[X,Z]g - S(\nabla_X Z - \nabla_Z X) \\
&= \epsilon(X(\psi(Z)) - Z(\psi(X)) - \psi[X,Z])g + \epsilon(\psi(Z)X - \psi(X)Z) \\
&\quad +\nabla_X SZ + \alpha_g(X,SZ) - \epsilon\langle X, SZ\rangle g - \nabla_Z SX - \alpha_g(Z,SX) \\
&\quad +\epsilon\langle Z, SX\rangle g - S(\nabla_X Z) + S(\nabla_Z X) \\
&= \epsilon(d\psi(X,Z) - \langle X,SZ\rangle + \langle Z,SX\rangle)g + (\nabla_X S)Z + \alpha_g(X,SZ) \\
&\quad -(\nabla_Z S)X - \alpha_g(Z,SX) + \epsilon(\psi(Z)X - \psi(X)Z).
\end{aligned}$$

A condição de integrabilidade reduz-se assim às equações

$$\alpha_g(X,SZ) = \alpha_g(Z,SX) \tag{63}$$

e

$$(\nabla_X S)Z - (\nabla_Z S)X = \epsilon(\psi(X)Z - \psi(Z)X). \tag{64}$$

Quando $\epsilon = 1$ obtemos ainda

$$d\psi(X,Z) = \langle SZ, X\rangle - \langle SX, Z\rangle. \tag{65}$$

De (63), tendo em conta que os vetores $\alpha_g(X,X)$ e $\alpha_g(X,Z)$ são linearmente independentes, concluímos que existem $\theta, \varphi \in C^\infty(L)$ tais que

$$S = \theta I + \varphi J.$$

Desenvolvendo o lado esquerdo de (64), tendo em conta a estrutura do endomorfismo S, obtemos

$$\begin{aligned}
\nabla_X \theta Z \;-\; & \nabla_Z(\theta X + \varphi Z) + \Gamma_1 SX - \Gamma_2 SZ \\
&= d\theta(X)Z + \theta\nabla_X Z - d\theta(Z)X - \theta\nabla_Z X - d\varphi(Z)Z - \varphi\nabla_Z Z \\
&\quad +\Gamma_1(\theta X + \varphi Z) - \Gamma_2\theta Z \\
&= (d\theta(X) + \varphi\Gamma_1 - d\varphi(Z))Z - (d\theta(Z) + \varphi\Gamma_2)X.
\end{aligned}$$

Logo (64) é equivalente a

$$\begin{cases} d\theta(X) = -\Gamma_1\varphi + d\varphi(Z) + \epsilon\psi(X) \\ d\theta(Z) = \langle Y, -Z\rangle\varphi + \epsilon\psi(Z). \end{cases}$$

Logo,

$$d\theta = d\varphi \circ J + \varphi Y^* \circ R + \epsilon\psi,$$

De (65) e tendo em conta mais uma vez a estrutura de S, obtemos facilmente

$$d\psi(X,Z) = -\varphi.$$

A conclusão segue agora do Lema 57 e do Teorema 55. ∎

12 Singularidades

Nesta seção começamos por estudar as parabólicas regradas completas. Em seguida, mostramos que as subvariedades parabólicas completas que não são regradas em nenhum aberto, são de tipo superficie, isto é, isométricas a um produto $L^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$. Recordemos que as elípticas completas são isométricas a um produto $L^3 \times \mathbb{R}^{n-3}$ ([DF1]). Em seguida descrevemos as singularidades das subvariedades parabólicas não regradas de dimensão superior a 4, onde mostramos que o conjunto das singularidades contém uma subvariedade parabólica de dimensão $n-2$. Logo, as singularidades das parabólicas são abundantes, justificando assim o carácter local do nosso estudo.

As subvariedades completas $f\colon M^n \to \mathbb{R}^N$ com $\operatorname{rank}_f \leq 2$ foram estudadas em [DG2], onde se mostrou que, se M^n não contém um aberto $L^3 \times \mathbb{R}^{n-3}$ com L^3 não limitado, então as seguintes condições são verificadas no conjunto aberto $M^* \subset M^n$ onde $\operatorname{rank}_f = 2$.

(i) M^* é a união de *faixas regradas* suaves.

(ii) Se f é *completamente regrada* em M^*, então é completamente regrada em toda a parte e é um cilindro em cada componente do complementar do fecho de M^*.

Recordemos que uma subvariedade regrada se diz *completamente regrada* se cada folha é um espaço afim completo ([DG2]). A cada componente conexa chamamos *faixa regrada*, sendo um fibrado afim sobre uma curva com ou sem pontos finais.

Dada $f\colon M^n \to \mathbb{R}^N$ parabólica regrada, denotamos por $\tilde{M}^n$ a subvariedade (incluindo possíveis singularidades) obtida estendendo cada régua de $f(M^n)$ a um subespaço afim de $\mathbb{R}^N$. No caso particular das subvariedades parabólicas regradas temos o seguinte resultado onde usamos a notação da Seção 6.

Proposição 59. *Seja $f\colon M^n \to \mathbb{R}^N$ uma subvariedade parabólica regrada. Então $\tilde{M}^n$ é uma faixa regrada. Além disso, se a curva c é completa e a função a_1 definida em (23) satisfaz $|a_1(s)| \leq K < +\infty$, então $\tilde{M}^n$ é completa.*

Demonstração: Consideremos M^n parametrizada por (29), isto é,

$$f(s, t_1, \ldots, t_{n-1}) = c(s) + \sum_{j\geq 1} t_j e_j(s).$$

Recorde que

$$\frac{de_1}{ds} = a_1 e_0 + \delta + \eta, \quad \frac{de_j}{ds} = b_j e_1, \;\; 2 \leq j \leq n-1,$$

onde $\delta = (de_1/ds)_\Delta$ e $\eta \perp \operatorname{ger}\{e_0, e_1\} \oplus \Delta$ é não singular para todo $s \in I$. Atendendo a

$$TM = \operatorname{ger}\{(1 + t_1 a_1)e_0 + t_1\eta\} \oplus \operatorname{ger}\{e_1, \ldots, e_{n-1}\},$$

é simples concluir que f é não singular e assim $\tilde{M}^n$ é uma faixa regrada.

Suponhamos agora que a curva c é completa. Observe que

$$\|f_s\|^2 \geq (1 + t_1 a_1(s))^2 + t_1^2 \|\eta(s)\|^2.$$

Nestas condições vamos mostrar que se $|a_1(s)| \leq K < \infty$ então $\tilde{M}^n$ é completa. Se $|t_1| \leq M < \infty$, a condição $|a_1(s)| \leq K < \infty$ garante que $\|f_s\|^2 \geq L > 0$. Por outro lado, qualquer curva divergente $\gamma(u) = f(s(u), t_1(u), ..., t_{n-1}(u)), u \in [0, +\infty[$, em $\tilde{M}^n$ com pelo menos um $t_i, 1 \leq i \leq n-1$ ilimitado tem comprimento infinito. Assim todas as curvas divergente de $\tilde{M}^n$ têm comprimento infinito, logo $\tilde{M}^n$ é completa. ∎

Seja $f\colon M^n \to \mathbb{R}^N$ uma parabólica regrada parametrizada por (29). Atendendo a que $f_{st_j} = b_j e_1$ podemos concluir que se $b_j = 0$ em todo o ponto, $2 \leq j \leq n-1$ então $M^n = L^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$. Por outro lado, se existe um $b_j \neq 0$ em todo o ponto então M^n não contém nenhum aberto da forma $L^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$.

No caso geral temos o seguinte resultado.

Teorema 60. *Seja $f\colon M^n \to \mathbb{R}^N$, $n \geq 3$, uma subvariedade completa não regrada em nenhum aberto e parabólica num aberto denso $\mathcal{O}$ de M^n. Então, em cada componente conexa de $\mathcal{O}$ a subvariedade é isométrica a $L^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$ e $f = f_1 \times I$.*

Demonstração: Pelo item (vi) da Proposição 4 temos

$$C = 0 \quad \text{ou} \quad C_T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ n & 0 \end{bmatrix} \tag{66}$$

onde $T \perp \ker C$. Consideremos agora a união disjunta

$$\mathcal{O} = M_0 \cup M_1,$$

onde M_0 é o conjunto fechado onde $C = 0$. Queremos mostrar que o conjunto aberto M_1 é vazio e o resultado segue da Proposição 4. Pelo item (vi) da Proposição 4 os dois conjuntos são saturados, isto é, são a união das folhas completas de Δ.

Vamos mostrar que f é regrada em M_1. Pelo item (v) da Proposição 4 e (66), podemos concluir que

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla_X C_T)Z - (\nabla_Z C_T)X \\ &= -C_T \nabla_X Z - \nabla_Z C_T X + C_T \nabla_Z X \\ &= n\langle \nabla_X Z, X\rangle Z - Z(n)Z - n\langle \nabla_Z Z, X\rangle X \end{aligned} \tag{67}$$

onde $T \perp \ker C$ é um campo unitário. Portanto $\langle \nabla_Z Z, X\rangle X = 0$, e logo f é regrada em M_1. Logo temos que $M_1 = \emptyset$. ∎

Observe que se $f\colon M^n \to \mathbb{R}^N$ é parabólica, completa e simplesmente conexa, então M^n é difeomorfa a $\mathbb{R}^n$, uma vez que a sua curvatura seccional satisfaz

$K_M \leq 0$. No caso regrado, pelo Teorema 33, a variedade M^n admite uma imersão isométrica como hipersuperfície regrada com as mesmas réguas.

Existem muitos exemplos de hipersuperfícies regradas completas ([DG2]). Uma parametrização simples pode ser obtida da seguinte forma: considere $c\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma curva suave, parametrizada por comprimento de arco, e seja $E_0 = dc/ds, E_1, \ldots, E_n$ um referencial de Frenet. Então, é fácil verificar que a hipersuperfície regrada

$$(s, t_1, \ldots, t_{n-1}) \mapsto c(s) + \sum_{j=1}^{n-1} t_j E_{j+1}$$

é completa.

Para concluir vamos descrever o conjunto de singularidades das parabólicas não regradas de dimensão superior a quatro.

Teorema 61. *Seja $f\colon M^n \to \mathbb{R}^N$ uma subvariedade parabólica com $n \geq 4$. Então o conjunto dos pontos singulares de $\tilde{M}^n$ é a hipersuperfície de $\tilde{M}^n$ definida por,*

$$\{\lambda \in \tilde{M}^n : \langle \lambda, \xi_2^{s+1} \rangle = 0\}.$$

Demonstração: Consideremos a parametrização

$$\Psi(\delta) = h(x) + \delta, \ \ \delta \in \Lambda_s(x),$$

dada pelo Teorema 50, onde h é uma s-seção de g. Sem perda de generalidade, podemos considerar h uma τ_*^g-seção. Este fato segue de (46), uma vez que a diferença entre uma s-seção e uma τ_*^g-seção é um elemento de Λ_s.

Sendo (x, z) um sistema de coordenadas de g com $Z = \partial/\partial z$ assintótico e $\{\eta_1, \ldots, \eta_k\}$ um referencial ortonormal de Λ_s, podemos escrever

$$\Psi(x, z, t_1, \ldots, t_k) = h(x, z) + \sum_{j=1}^{k} t_j \eta_j(x, z)$$

onde $k = N - 2s$ e $(t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^k$. Recordemos que se tem $TM = \Lambda_{s-1}$ e $\Delta = \Lambda_s$. Assim, sendo $X = \partial/\partial x$, um ponto é singular se, e somente se, os campos

$$t_1(\nabla_X^\perp \eta_1)_{N_s} + t_2(\nabla_X^\perp \eta_2)_{N_s} \quad \text{e} \quad t_1(\nabla_Z^\perp \eta_1)_{N_s} + t_2(\nabla_Z^\perp \eta_2)_{N_s}$$

são linearmente dependentes. Atendendo às propriedades dos subespaços $\mathcal{V}_s$, temos que

$$\langle \nabla_Z^\perp \eta_1, \xi_2^s \rangle = \langle \nabla_Z^\perp \eta_2, \xi_2^s \rangle = 0. \tag{68}$$

Concluímos daqui que $t_1(\nabla^\perp_Z \eta_1)_{N_s} + t_2(\nabla^\perp_Z \eta_2)_{N_s}$ é normal a ξ_2^s. Logo, os campos atrás são linearmente dependentes se, e só se,

$$\langle t_1(\nabla^\perp_X \eta_1)_{N_s} + t_2(\nabla^\perp_X \eta_2)_{N_s}, \xi_2^s \rangle = 0. \tag{69}$$

Tendo em conta a Proposição 9, é fácil verificar que (69) é equivalente a

$$\langle t_1\eta_1 + t_2\eta_2, \xi_2^{s+1} \rangle = 0.$$

Concluimos assim que $\lambda \in \tilde{M}^n$ é um ponto singular se e só se $\langle \lambda, \xi_2^{s+1} \rangle = 0$. ∎

Referências

[Al] Allendoerfer, C., *Rigidity for spaces of class grater than one.* Amer. J. Math. **61** (1939), 633–644.

[BDJ] Barbosa, J. L., Dajczer, M. and Jorge, L., *Minimal Ruled Submanifolds in Spaces of Constant Curvature.* Indiana Math. J. **33** (1984), 531–547.

[CD] do Carmo, M. and Dajczer, M. *Conformal rigidity.* Amer. J. Math. **109** (1987), no. 5, 963–985.

[Da] Dajczer, M. et al., Submanifolds and isometric immersions, Mathematics. Lecture Ser. 13, Publish or Perish, Houston, 1990.

[DT] Dajczer, M. and Tojeiro, R., *Submanifolds with nonparallel first normal bundle.* Canad. Math. Bull. **37** (1994), 330–337.

[DFT] Dajczer, M., Florit, L. and Tojeiro, R.,*On deformable hypersurfaces in space forms.* Ann. Mat. Pura Appl. **147** (1998) 361–390.

[DF1] Dajczer, M. and Florit, L., *A Class of austere submanifolds.* Illinois J. Math. **45** (2001) 735–755.

[DF2] Dajczer, M. and Florit, L., *Genuine rigidity of Euclidean submanifolds in codimension two.* Geom. Dedicata **106** (2004) 195–210.

[DF3] Dajczer, M. and Florit, L., *On conformally flat submanifolds.* Comm. Anal. Geom. **4** (1996) 261–284.

[DG1] Dajczer, M. and Gromoll, D., *Gauss parametrization and rigidity aspects of submanifolds.* J. Diff. Geometry **22** (1985) 1–12.

[DG2] Dajczer, M. and Gromoll, D., *Rigidity of complete Euclidean hypersurfaces.* J. Diff. Geometry **31** (1990) 401–416.

[Ev] Evans, L. C., Partial differential equations, Graduate Studies in Mathematics 19, American Mathematical Society.

[FL] Florit, L., Parametrizações na teoria de subvariedades. 22º Colóquio Brasileiro de Matematica, IMPA (1999).

[Mo] Moore, J. D., *Submanifolds of Constant positive curvature I.* Duke Math. J. **44** (1977) 449–484.

[Sz1] Szabó, Z. I., *Structure theorems on Riemannian spaces satisfying $R(X,\, Y)R = 0$. I. The local version.* J. Differential Geom. **17** (1982), 531–582.

[Sz2] Szabó, Z. I., *Structure theorems on Riemannian spaces satisfying $R(X, Y)R = 0$ II. Global versions*. Geom. Dedicata **19** (1985), 65–108.