Ministério de Ciência e Tecnologia
Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

Métodos Algebro–Geométricos na Teoria Global das Folheações Holomorfas

Jorge Vitório Pereira

Tese apresentada para obtenção do título de Doutor em Ciências

Orientador: César Camacho

Rio de Janeiro – Brasil

2001

Agradecimentos

Esta tese é fruto de um esforço desenvolvido no IMPA ao longo dos últimos seis anos. Durante este período recebi apoio e incentivo de muitos. As linhas que seguem são dedicadas a estes.

Primeiramente não teria conhecido o IMPA se não tivesse tido a oportunidade de assistir ao curso de Introdução à Topologia Geral ministrado pelo professor Antônio Roberto na UFRJ. Este curso foi fundamental para despertar o meu interesse pela matemática.

Sou grato também ao professor Nicolau Saldanha e ao professor César Camacho que convidaram-me a ingressar no mestrado do IMPA mesmo sabendo que ainda estava por terminar a graduação em Informática. A transição não foi fácil. O seu impacto foi amenizado pela confiança e incentivo do professor André Nachbin, orientador ao longo do primeiro ano de mestrado.

Do segundo ano de mestrado até as vésperas do exame de qualificação do doutorado tive o prazer de ser orientando do professor Bruno Scárdua. Devo ele o meu gosto pelas folheações e por inúmeras questões propostas. Sem estas questões o meu trabalho sobre estabilidade de folheações certamente não teria sido feito.

Sou também grato aos Professores Karl Otto Stohr e Eduardo Esteves por terem apresentado-me a Geometria Algébrica sob duas perspectivas diferentes e complementares. Muitos dos resultados do capítulo 2 foram inspirados por inúmeras conversas com o Professor Eduardo Esteves.

Expresso aqui também a minha sincera gratidão aos membros do grupo de Dinâmica Complexa do IMPA, Professores César Camacho, Alcides Lins Neto e Paulo Sad. Devo grande parte da minha formação como matemático às incontáveis conversas que tive com eles. Agradeço em especial ao Professor César Camacho por ter aceito orientar a minha tese e por ter permitido-me trabalhar com liberdade e tranquilidade.

Agradeço também ao Professor Luís Gustavo Mendes por ter explicado-me alguns aspectos da teoria birracional de folheaões, pela amizade e pelo apoio durante toda a elaboração da tese.

Agradeço aos membros da banca os Professores César Camacho, Alcides Lins Neto, Luís Gustavo Mendes, Paulo Sad e Márcio Soares. Agradeço em especial aos Professores Luís Gustavo Mendes e Paulo Sad pela leitura atenciosa, pelas inúmeras sugestões para melhorar a exposição e por terem diminuído consideravelemente o número de imprecisões e erros presentes nesta tese.

Finalmente, não poderia deixar de agradecer a Dayse pela quase infinita paciência e pelo irrestrito apoio durante todo o período de elaboração desta tese.

Métodos Algebro-Geométricos na
Teoria Global das Folheações Holomorfas

Resumo

Esta tese estuda a teoria global das folheações holomorfas singulares. Ênfase é dada a questões relacionadas à existência de subvariedades algébricas invariantes e à integrabilidade de equações diferenciais complexas. Começa com um estudo sobre a relação entre pontos de inflexão de sistemas lineares com respeito a folheações holomorfas e a existência de subvariedades analíticas invariantes por estas. Assim são obtidos novos critérios para a existência de integrais primeiras meromorfas, novas cotas para o número de curvas algébricas invariantes por folheações em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ e teoremas sobre folheações com muitas folhas algébricas. Análogos de alguns desses resultados são obtidos para folheações regulares em variedades Kaehlerianas via diferentes métodos. Nesse caso a ferramenta principal é um teorema de estabilidade que diz que uma folheação holomorfa regular de codimensão arbitrária em uma variedade Kaehleriana admite uma folha compacta com holonomia finita se, e somente se, é uma fibração de Seifert.

Voltando a utilizar os pontos de inflexão é introduzida uma noção de multiplicidade para soluções algébricas de equações diferenciais complexas em duas variáveis. Além de ser teoricamente computável esta multiplicidade relaciona-se com a coalescência de soluções algébricas em famílias de equações diferenciais. Assim pode-se estabelecer relações com a existência de cofatores exponenciais, cuja abundância garante a existência de integrais primeiras liouvillianas. Com respeito a equações diferenciais que admitem integrais primeiras liouvillianas são investigadas restrições combinatoriais na geometria de seu conjunto de soluções algébricas.

Sob o prisma da recente teoria birracional de folheações holomorfas a tese trata de questões clássicas como a existência de integrais primeiras liouvillianas e o problema de Poincaré de limitar o grau de curvas algébricas invariantes. Quando $\mathcal{F}$ é uma folheação do plano projetivo com dimensão de Kodaira zero prova-se que $\mathcal{F}$ admite uma integral primeira liouvilliana. Quando $\mathcal{F}$ tem dimensão de Kodaira dois prova-se que fixados os invariantes bimeromorfos existe uma cota para o grau de qualquer curva algébrica irredutível invariante em função, apenas, de seu gênero geométrico e do grau da folheação.

A tese passa então ao estudo dos grupos de transformações de folheações. Destaca-se o resultado sobre a finitude do grupo de bimeromorfismos de folheações de tipo geral em superfícies complexas compactas. Um dos pontos fundamentais de sua demonstração é um teorema que descreve a estrutura de folheações com grupo de automorfismos algébrico linear e infinito. Ainda explorando relações entre grupos de automorfismos e integrabilidade obtem-se uma nova demonstração do teorema de Jouanolou sobre a genericidade de folheações complexas no plano projetivo sem curva algébrica invariante. Conclui-se mostrando o contraste com a situação em característica positiva onde qualquer campo de vetores de divergente não nulo em um espaço afim admite uma hipersuperfície algébrica invariante.

Conteúdo

CAPíTULO 1

Introdução

Após apresentar as noções básicas da teoria de folheações holomorfas este capítulo dedica-se a resumir o restante da tese.

O conceito de folheação é relativamente recente e remonta aos trabalhos de Ehresmann e Reeb nas décadas de 1940 e 1950. Entretanto, muitos dos resultados clássicos da teoria de equações diferenciais podem ser considerados teoremas sobre folheações. Uma análise dos trabalhos de Darboux, Poincaré e Painlevé sobre as equações diferenciais holomorfas imediatamente revela que estes autores podem ser considerados fundadores da moderna teoria das folheações holomorfas singulares. Este tese será dedicada a esta teoria e antes de apresentar os problemas nela abordados passemos a uma definição de nossos objetos centrais de estudo, as folheações holomorfas singulares.

1. Folheações Holomorfas Singulares

Seja M uma variedade complexa não singular de dimensão m. Por uma folheação holomorfa regular de dimensão p em M entendemos uma decomposição de M em subvariedades complexas de dimensão p, duas a duas disjuntas, tal que localmente esta decomposição é holomorficamente equivalente a uma fibração. Existem várias formas de formalizar esta *intuição* de folheação. Por exemplo:

1.1. Folheações como um conjunto de submersões. Uma folheação $\mathcal{F}$ de dimensão p em M^m, pode ser descrita por meio de uma coleção de submersões

$$\{z_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^{m-p}\}_{\alpha \in A}\,,$$

tais que:

1. os abertos $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ cobrem M;
2. se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ então existe $g_{\alpha\beta} : z_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to z_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ tal que $z_\alpha = g_{\alpha\beta}(z_\beta)$.

1.2. Folheações como um subfibrado do fibrado tangente. Se $\mathcal{F}$ é uma folheação de dimensão q em M, a cada ponto $p \in M$ podemos associar o subespaço vetorial $T_p\mathcal{F}$ de T_pM gerado pelos vetores que são tangentes a $\mathcal{F}$ em p. Dessa forma acabamos de descrever as fibras de $T\mathcal{F}$, um subfibrado do fibrado tangente de M, que chamaremos, por razões óbvias, de *fibrado tangente* de $\mathcal{F}$.

Para que um subfibrado $\mathcal{L}$ de TM seja fibrado tangente de uma folheação é necessário e suficiente que $\mathcal{L}$ seja involutivo, i.e., para quaisquer seções locais X e Y

de $\mathcal{L}$ temos que o colchete de Lie entre X e Y ainda está em $\mathcal{L}$. Essencialmente este é o conteúdo do Teorema de Frobenius para distribuições .

Frente a isto podemos definir uma folheação $\mathcal{F}$ de dimensão p como um subfibrado $T\mathcal{F}$ de TM que seja involutivo e de posto p. A $\mathcal{F}$ podemos associar a sequência exata de fibrados vetoriais

$$0 \to T\mathcal{F} \to TM \to \frac{TM}{T\mathcal{F}} \to 0\,, \tag{1}$$

denotaremos o quociente $\frac{TM}{T\mathcal{F}}$ por $N\mathcal{F}$. Diremos que $N\mathcal{F}$ é o *fibrado normal de $\mathcal{F}$.*

1.3. Folheações como um subfibrado do fibrado cotangente. Se $\mathcal{F}$ é uma folheação de dimensão q em M, a cada ponto $p \in M$ podemos associar o subespaço vetorial $N_p^*\mathcal{F}$ de T_p^*M gerado pelas 1–formas que se anulam em $T_p\mathcal{F}$. Como anteriormente os espaços vetoriais $N_p^*\mathcal{F}, p \in M$, são as fibras de $N^*\mathcal{F}$ um subfibrado do fibrado cotangente de M. Diremos que $N^*\mathcal{F}$ é o fibrado conormal de $\mathcal{F}$.

Para que um subfibrado $\mathcal{L}$ de T^*M seja fibrado conormal de uma folheação é necessário e suficiente que $\mathcal{L}$ seja integrável, i.e., $d\mathcal{L} \subset \mathcal{L} \wedge \Omega^1(M)$. Novamente esta caracterização é essencialmente o Teorema de Frobenius para sistemas de Pfaff.

Portanto uma folheação $\mathcal{F}$ de dimensão p em M, $\dim_{\mathbb{C}} M = m$, é um subfibrado $N^*\mathcal{F}$ de Ω_M^1 integrável e de posto $m - p$. A $\mathcal{F}$ podemos associar a sequência exata de fibrados vetoriais

$$0 \to N^*\mathcal{F} \to \Omega_M^1 \to T^*\mathcal{F} \to 0\,.$$

Observe que esta sequência exata pode ser obtida dualizando a sequência 1.

Como já observamos podemos entender o estudo das folheações holomorfas como uma generalização do estudo de equações diferenciais complexas. Como ao estudar as equações diferenciais complexas as singularidades são impossíveis de evitar surge naturalmente a noção de folheação holomorfa singular.

Definição 1. Seja M uma variedade complexa de dimensão m. Uma folheação holomorfa singular $\mathcal{F}$ de dimensão p em M é dada por um par $(\text{sing}(\mathcal{F}), \overline{\mathcal{F}})$, onde $\text{sing}(\mathcal{F})$ é um fechado anaítico de codimensão ao menos 2 e $\overline{\mathcal{F}}$ é uma folheação holomorfa regular de dimensão p em $M \setminus \text{sing}(\mathcal{F})$.

A hipótese sobre o conjunto singular de $\mathcal{F}$ pode parecer a primeira vista artificial além de não incluir equações diferenciais polinomias cujo conjunto singular possua dimensão 1. De fato, a hipótese não exclui singularidades algébricas de codimensão 1. Se o conjunto singular de X tem alguma componente de codimensão 1 então após dividir X pela equação da componente de codimensão 1 do conjunto singular, temos um novo campo com conjunto singular de codimensão no máximo 2.

2. Resumo da tese

Apresentamos a seguir um breve resumo dos capítulos deste trabalho.

2.1. Subvariedades Invariantes e Sistemas Lineares. No capítulo 2 relacionaremos as subvariedades algébricas invariantes com os pontos de inflexão de uma folheação por curvas com respeito a um dado sistema linear. Dessa forma poderemos obter vários resultados, entre os quais destacamos:

i. cotas para o número de curvas algébricas invariantes por folheações holomorfas por curvas em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$;
ii. cotas para o número de integrais primeiras racionais em famílias de folheações holomorfas em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$;
iii. critérios para a existência de integrais primeiras meromorfas de codimensão arbitrária em variedades complexas quaisquer;
iv. uma nova prova de um resultado de Gomez-Mont sobre integrais primeiras para folheações com todas as folhas compactas.

O capítulo 2 termina mostrando um teorema de estabilidade global para folheações holomorfas regulares em variedades Kaehlerianas. Apesar do tema destoar um pouco do restante do capítulo este resultado permite obter o resultado sobre folheações com todas as folhas compactas neste caso particular de forma direta e objetiva.

2.2. Integrabilidade. No capítulo 3 a integrabilidade de folheações por curvas em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ é investigada. Começa com uma exposição do método de integração de Darboux para equações diferenciais no plano complexo. Usando as noções introduzidas no capítulo 2 mostramos como introduzir uma noção de multiplicidade algébrica para curvas algébricas invariantes e buscamos através destas multiplicidades uma interpretação para os cofatores exponenciais que aparecem no método de Darboux.

Apresentamos então uma formalização do conceito de integral primeira liouvilliana e lembramos de um famoso resultado de Singer que garante que qualquer folheação que possua integral primeira liouvilliana pode ser integrada via o método de Darboux.

Terminamos o capítulo mostrando como obter diretamente a não-integrabilidade genérica de folheações em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ sem recorrer ao teorema de Jouanolou. Este resultado é obtido via uma análise combinatórica do lugar de ramificação dos possíveis fatores de integração de uma folheação genérica.

2.3. Teoria Birracional e Integrabilidade. No capítulo 4 veremos como aplicar idéias da recente teoria birracional de folheações em superfícies a questões clássicas como a integrabilidade de equações diferenciais complexas.

Após um breve resumo da teoria birracional, incluindo a classificação birracional e os modelos minimais para folheações analisamos a questão de integrabilidade sob a ótica da dimensão de Kodaira para folheações . Nesse contexto mostramos que uma folheação de dimensão de Kodaira zero sempre admite uma integral primeira liouvilliana e que uma folheação de dimensão de Kodaira admite um integral primeira liouvilliana desde que admita uma curva algébrica de grau suficientemente alto. Já no caso de folheações de tipo geral apesar de não termos resultados especificamente sobre a integrabilidade investigamos o problema de Poincaré para curvas algébricas invariantes. Mais precisamente mostramos que quando a dimensão de Kodaira de uma folheação $\mathcal{F}$ em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ é dois e C é uma curva algébrica invariante por $\mathcal{F}$ então existe uma cota do grau de C em função dos invarientes bimeromorfos de $\mathcal{F}$ e do gênero geométrico de C.

2.4. Grupos de Tranformações. No último capítulo da tese investigamos sob vários aspectos os grupos de transformações de folheações holomorfas. Começamos obtendo versões globais de resultados clássicos de Lie sobre a relação entre grupo de simetrias a 1-parâmetro e integrais primeiras liouvillianas. Passamos então ao estudo dos grupos de bimeromorfismos de uma folheação em uma superfície complexa sob o ponto de vista da teoria birracional. Neste contexto destaca-se o resultado sobre a finitude do grupo de bimeromorfismos de uma folheação de tipo geral.

Voltamos ao estudo de folheações em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ e vemos que um grupo de automorfismos suficientemente rico implica na não integrabilidade da folheação. Mostramos que se o grupo de automorfismos age sem pontos fixos no espaço de cofatores de uma folheação $\mathcal{F}$ em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ então, em geral, $\mathcal{F}$ não admite uma curva algébrica invariante. Em outras palavras, obtemos um novo critério para que folheações em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ não admita nenhuma curva algébrica invariante.

Passamos então a traçar um paralelo com a situação em característica positiva. Mostramos que nesse caso a situação é inteiramente oposta, i.e., um campo de vetores genérico em um espaço afim sempre admite uma hipersuperfície algébrica invariante. Justificamos introduzir esta análise em um capítulo sobre grupos de transformações pois o ingrediente principal da demonstração é uma espécie de automorfismo infinitesimal que todo campo de vetores em característica positiva possui.

CAPíTULO 2

Subvariedades Invariantes e Sistemas Lineares

Este capítulo trata dos pontos de inflexão de sistemas lineares com respeito a folheações. Utilizando este conceito investiga a existência de subvariedades algébricas invariantes e a existência de integrais primeiras. O estudo começa no plano projetivo $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ e aborda questões como o número de curvas algébricas invariantes e critérios para a existência de integrais primeiras racionais de grau determinado. Em seguida, dando uma roupagem mais intrínseca aos conceitos envolvidos, são estudados critérios para existência de integrais primeiras para folheações de codimensão qualquer em uma variedades complexa arbitrária. Em uma última seção é provado um resultado de estabilidade, no espírito de Reeb, para folheações holomorfas regulares em variedades Kaehlerianas.

1. Curvas de inflexão para campos de vetores em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

1.1. Pontos de Inflexão de Curvas Planas. Na literatura clássica sobre curvas algébricas planas os pontos de inflexão e os pontos de inflexão de ordem superior possuem lugar de destaque. Se C é uma curva plana lisa, i.e., uma superfície de Riemann compacta mergulhada em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, os pontos de inflexão de C são os pontos $p \in C$ onde a reta tangente a C passando por p possui contato de ordem maior ou igual a 3 com C. Os pontos de inflexão de ordem superior são definidos de forma análoga. Se $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ é uma curva plana então $p \in C$ é um ponto de inflexão de ordem d se existe uma curva de grau d com alta ordem de contato com C em p. Aqui alta ordem de contato significa que a ordem de contato é maior ou igual a dimensão do espaço vetorial de polinômios homogêneos em três variáveis de graus d.

Definição 2. Um ponto de n–flexão de uma curva C em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ é um ponto $p \in C$ onde a multiplicidade de intersecão de C com alguma curva de grau n é superior a

$$d(n) = \frac{n(n+3)}{2}.$$

Observe que $d(n)$ é a dimensão do espaço de curvas planas de grau n.

COMENTÁRIO 1. *Usaremos também a nomenclatura ponto extático* [1]*, seguindo V.I. Arnold(v.* [**2**]*), para denominar os pontos de inflexão.*

Observe que quando C é uma curva em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ tal que todo ponto de C é um ponto de n–flexão temos que o grau de C é no máximo n.

Para curvas planas, os pontos de inflexão são determinados pela Hessiana da equação da curva. Já os pontos de inflexão de ordem superior não são tão fáceis de

[1]Do inglês *extactic point.*

determinar. Até onde o autor sabe, o primeiro matemático a investigar a questão foi Cayley, veja [**15**]. Cayley obteve fórmulas explícitas para os pontos de inflexão de segunda ordem de uma curva plana. O leitor pode verificar em [**15**] que esta fórmula obtida por Cayley está longe de ser uma fórmula simples.

Segundo Cukierman, o problema de determinar fórmulas explícitas para os pontos de inflexão de curvas planas de ordem maior ou igual a 3 não é tratado na literatura clássica. Em [**21**], Cukierman, propõe uma abordagem para obter fórmulas *quase explícitas* para pontos de inflexão de ordem arbitrária para curvas de intersecção completa em espaços projetivos.

Segundo J.-M. Strelcyn e A. Maciejewski alguns dos resultados apresentados a seguir foram obtidos por Lagutinskii, um matemático russo no início do século XX. Entretanto, ver [**23**], quase toda a sua obra está em russo e seus artigos de difícil obtenção. Dessa forma não podemos situar precisamente o nosso trabalho em relação ao trabalho de Lagutinskii.

1.2. Curvas extáticas para campos de vetores. O objetivo agora é mostrar como calcular os pontos de inflexão de campos de vetores holomorfos no plano projetivo $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Mais precisamente, dado um campo de vetores X em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, definiremos divisores efetivos $\mathcal{E}_d(X)$, tal que a restrição de $\mathcal{E}_d(X)$ a qualquer das soluções de X coincide com os pontos de inflexão de ordem d da solucção.

Em contraste com o caso de curvas planas, as fórmulas obtidas para $\mathcal{E}_d(X)$ não são muito complicadas. À primeira vista isto pode parecer paradoxal, mas se C é uma curva invariante por X então $\mathcal{E}_d(X)$ restrito a C fornece algo além que os pontos de inflexão de ordem d de C. O fato é que além dos pontos de inflexão $\mathcal{E}_d(X)_{|C}$ também contém as singularidades de X ao longo de C.

Seja $X = a(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$ um campo de vetores em $\mathbb{C}^2$. Se $(x, y(x))$ é uma parametrização de uma órbita de X então

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & \frac{dy}{dx}\end{pmatrix} = a\frac{dy}{dx}(x) - b = 0\,,$$

e portanto $\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}$.

Para obter os pontos de inflexão da curva $(x, y(x))$ temos que calcular o determinante

$$\det\begin{bmatrix} 1 & \frac{dy}{dx} \\ 0 & \frac{d^2y}{dx^2}\end{bmatrix} = \frac{d}{dx}\frac{b(x,y(x))}{a(x,y(x))} = \frac{(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y}\frac{a}{b})b - (\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y}\frac{a}{b})a}{a^2}$$

Com isso temos uma expressão para os pontos de inflexão das órbitas de X que é valida no aberto $\mathbb{C}^2 \setminus \{a(x,y) = 0\}$. De forma análoga podemos obter equações para a curva de inflexão no aberto $\mathbb{C}^2 \setminus \{b(x,y) = 0\}$.

Para calcular o pontos de 2–flexão das órbitas de X primeiramente consideramos a imagem da curva $(x, y(x))$ pela mapa de Veronese de ordem 2. Está imagem é a curva parametrizada por

$$(x, x^2, x \cdot y(x), y(x), y(x)^2)$$

em $\mathbb{C}^5$. Com isso os pontos de 2-flexão desta solução são descritos através do anulamento do determinante da seguinte matriz,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2x & \frac{dxy(x)}{dx} & \frac{dy(x)}{dx} & \frac{dy(x)^2}{dx} \\ 0 & 2 & \frac{d^2xy(x)}{dx^2} & \frac{d^2y(x)}{dx^2} & \frac{d^2y(x)^2}{dx^2} \\ 0 & 0 & \frac{d^3xy(x)}{dx^3} & \frac{d^3y(x)}{dx^3} & \frac{d^3y(x)^2}{dx^3} \\ 0 & 0 & \frac{d^4xy(x)}{dx^4} & \frac{d^4y(x)}{dx^4} & \frac{d^4y(x)^2}{dx^4} \\ 0 & 0 & \frac{d^5xy(x)}{dx^5} & \frac{d^5y(x)}{dx^5} & \frac{d^5y(x)^2}{dx^5} \end{bmatrix}.$$

Os pontos de n-flexão podem ser obtidos de maneira similar utilizando o mapa de Veronese de ordem n.

Até o momento estivemos trabalhando localmente, entretanto também é possível obter fórmulas globais, em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, para as curvas de n–flexão.

Se

$$X = A\frac{\partial}{\partial x} + B\frac{\partial}{\partial y} + C\frac{\partial}{\partial z}$$

é um campo de vetores homogêneo em $\mathbb{C}^3$ então a equação da curva de inflexão, ou primeira curva extática (a qual denotaremos por $\mathcal{E}_1(X)$), da folheação induzida por X em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ é:

$$\mathcal{E}_1(X) = \det \begin{bmatrix} x & y & z \\ X(x) & X(y) & X(z) \\ X^2(x) & X^2(y) & X^2(z) \end{bmatrix}, \tag{2}$$

onde $X^k(f) = X(X^{k-1}(f))$, para qualquer polinômio f.

Exemplo 1. Sejam

$$X = (x^3 - z^3)x\frac{\partial}{\partial x} + (y^3 - z^3)y\frac{\partial}{\partial y},$$
$$Y = -y^2z^2\frac{\partial}{\partial x} + -x^2z^2\frac{\partial}{\partial y} + x^2y^2\frac{\partial}{\partial z}$$

e $Z = tX + sY$, onde $(s,t) \in \mathbb{C}^2$ e $s \cdot t \neq 0$. A família de campos de vetores é uma projetivização do exemplo de Lins Neto, v. [**37**]. Ao calcularmos a primeira curva extática de Z temos que

$$\mathcal{E}_1(Z) = 2L_9 \cdot (t^2sy^3 - xyzs^3 + 2xyzt^3 + z^3t^2s + st^2x^3),$$

onde $L_9 = (x^3 - y^3)(x^3 - z^3)(y^3 - z^3)$. Observe que a curva extática anula-se sobre as nove retas invariantes, $L_9 = 0$, para qualquer escolha de parâmetros (s,t).

Para entender por que a fórmula (2) funciona, suponha que $p \in \mathbb{C}^3$ é um ponto não-singular de X. Aqui, não singular significa que o campo de vetores homogêneo X não é colinear com o campo de vetores radial em p, ou, em outros termos, p é um ponto não -singular da folheação de codimensão de $\mathbb{C}^3$ induzida por X e R. Pelo teorema de existência de soluções para equações diferenciais ordinárias existe um germe de curva V em torno de $p \in \mathbb{C}^3$ o qual é uma órbita local de X. Consequentemente o campo de vetores X restringe a um campo de vetores em V, o que faz com que X atue como uma derivação nos germes de funções holomorfas definidas sobre V. Como V,visto como um germe de curva projetiva, possui dimensão 1 a restrição de X a V pode ser interpretada como a derivada de uma parâmetro local t. Desse modo a fórmula (2) pode ser escrita sobre V como:

$$\mathcal{E}_1(X)_{|V}(t) = \det \begin{bmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \\ \frac{\partial x(t)}{\partial t} & \frac{\partial y(t)}{\partial t} & \frac{\partial z(t)}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2} & \frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2} & \frac{\partial^2 z(t)}{\partial t^2} \end{bmatrix} .$$

Vê-se então que $\{\mathcal{E}_1(X)_{|V} = 0\}$ representa os pontos de inflexão de V em uma vizinhança de p.

Do mesmo modo podemos obter uma equação global para a curva de pontos de 2–flexão de X, ou segunda curva extática $\mathcal{E}_2(X)$. Esta equação é dada pelo determinante de

$$\begin{bmatrix} x^2 & xy & xz & y^2 & yz & z^2 \\ X(x^2) & X(xy) & X(xz) & X(y^2) & X(yz) & X(z^2) \\ X^2(x^2) & X^2(xy) & X^2(xz) & X^2(y^2) & X^2(yz) & X^2(z^2) \\ X^3(x^2) & X^3(xy) & X^3(xz) & X^3(y^2) & X^3(yz) & X^3(z^2) \\ X^4(x^2) & X^4(xy) & X^4(xz) & X^4(y^2) & X^4(yz) & X^4(z^2) \\ X^5(x^2) & X^5(xy) & X^5(xz) & X^5(y^2) & X^5(yz) & X^5(z^2) \end{bmatrix} .$$

A d-ésima curva extática, $\mathcal{E}_d(X)$, pode ser descrita de maneira completamente similar. A equação de $\mathcal{E}_d(X)$ é dada pelo determinante da matriz cuja primeira linha é formada por uma base dos monômios em x, y e z de grau d e a i–ésima linha é obtida aplicando a derivação X na $(i-1)$–ésima linha.

Proposição 1. *A equação reduzida de toda curva algébrica de grau n invariante pelo campo de vetores X aparece como fator de $\mathcal{E}_n(X)$.*

Prova: Seja F a equação reduzida de uma curva invariante de grau n. Escolhemos então uma base do espaço de polinômios homogêneos de grau n contendo F. Como

$$\begin{array}{lcllcl} X(F) & = & L_F F \ , & & & \\ X^2(F) & = & X(L_F F) & = & \left(L_F^2 + X(L_F)\right) F \ , \\ X^k(F) & = & X(X^{k-1}(F)) & = & (\,\text{polynomial}\,)\, F \ , \end{array}$$

onde L_F é um polinômio, pode-se ver que F é um fator de $\mathcal{E}_n(X)$. ∎

Teorema 1. *X admite uma integral primeira racional de grau d, mas não admite uma integral primeira de grau menor que d, se, e somente se, $\mathcal{E}_d(X) = 0$ e $\mathcal{E}_{d-1}(X) \neq 0$.*

Prova: Seja $p \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ um ponto não–singular de X. Suponha que a solução passando por p é parametrizada, localmente, por $(x, y(x))$. Como $\mathcal{E}_d(X)$ anula-se identicamente, a composição da solução local com o mapa de Veronese de ordem d está inteiramente contida em um hiperplano. Consequentemente o traço de $(x, y(x))$ deve estar contido em curva algébrica de grau no máximo d. Como toda folha é algébrica pelo critério de Darboux, veja capítulo 3, temos que X admite um integral primeira racional de grau no máximo d. Como $\mathcal{E}_{d-1}(X) \neq 0$ temos que a folha genérica tem grau exatamente d.

Se X admite uma integral primeira de grau d então toda curva invariant tem grau no máximo d e consequentemente todo ponto é um ponto de d–flexão, i.e., $\mathcal{E}_d(X) = 0$. Como nem toda curva invariante tem grau $d-1$, $\mathcal{E}_{d-1}(X) \neq 0$. ∎

Combinamos o Teorema 1 e a Proposição 1 no resultado abaixo.

Teorema 2. *Seja X um campo de vetor em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Para todo $d \in \mathbb{N}$ as equações das possíveis curvas invariantes de grau menor ou igual a d aparecem como fatores de $\mathcal{E}_d(X)$. Se $\mathcal{E}_d(X) = 0$ então X possui uma integral primeira racional de grau menor ou igual a d.*

1.3. Algumas aplicações.

1.3.1. *Cotas para o número de soluções algébricas.* Jouanolou, em [**35**], mostra que o campo uma folheação de grau d em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ sem integral primeira racional admite no máximo $d(d+2)/2$ soluções algébricas irredutíveis, v. capítulo 3. Observe que o grau das soluções algébricas não desempenham papel algum no resultado de Jouanolou.

Usando as curvas extáticas podemos obter diferentes cotas para o número de soluções algébricas irredutíveis. Se X é um campo de vetor em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ e $n_i(X)$ denota o número de soluções algébricas irredutíveis de grau i de X temos a seguinte proposição.

Proposição 2. *Seja X um campo de vetores de grau d em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Se X não admite uma integral primeira racional de grau menor ou igual a n então*

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot n_i(X) \leq \frac{d(n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n) - n^4 - 2n^3 + n^2 + 2n}{8}.$$

Prova: Basta observar que o lado esquerdo da desigualdade é limitado pelo grau de $\mathcal{E}_n(X)$. Como a dimensão do espaço de polinômios homogêneos em x, y, z de grau n é $\binom{n+2}{2}$, temos que o grau de $\mathcal{E}_n(X)$ é

$$\sum_{i=0}^{\binom{n+2}{2}-1} i(d-1) + n = (\binom{n+2}{2})n + (d-1)\frac{\binom{n+2}{2}(\binom{n+2}{2} - 1)}{2} =$$

$$= \frac{d(n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n) - n^4 - 2n^3 + n^2 + 2n}{8}.$$

∎

Corolário 1. *Seja X um campo de vetores de grau d em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Se X não possui uma integral primeira de grau menor ou igual a n então X possui no máximo*

$$\frac{d(n^3 + 6n^2 + 11n + 6) - n^3 - 2n^2 + n + 2}{8}$$

curvas invariantes de grau n.

Prova: Se C é uma curva invariante de grau n então C está contida em $\mathcal{E}_n(X)$, portanto temos no máximo

$$\frac{deg(\mathcal{E}_n(X))}{n} = \frac{d(n^3 + 6n^2 + 11n + 6) - n^3 - 2n^2 + n + 2}{8}$$

curvas invariantes de grau n. ∎

Exemplo 2. Aplicando a proposição 2 para limitar o número de retas invariantes por um campo de vetor X, observa-se que

$$n_1(X) \leq 3 \cdot \deg(X)\,.$$

Afirmamos que esta cota é otimal. Para verificar este fato, considere, para cada $d \in \mathbb{N}$, o campo de vetores X_d em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, dado em coordenadas homogêneas por

$$X_d = \left(x^{d-1} - z^{d-1}\right) x \frac{\partial}{\partial x} + \left(y^{d-1} - z^{d-1}\right) y \frac{\partial}{\partial y}\,.$$

O campo X_d deixa invariante a curva algébrica C_d, que é definida pelo polinômio F_d,

$$F_d = xyz(x^{d-1} - z^{d-1})(y^{d-1} - z^{d-1})(x^{d-1} - y^{d-1})\,.$$

Como F_d pode ser escrito como o produto de $3d$ retas distintas e $F_d = \mathcal{E}_1(X_d)$, concluímos que X_d admite exatamente $3d$ retas invariantes.

Observe que a mesma cota funciona para campos de vetores reais. Contudo, esta cota deixa de ser otimal. Para entender melhor o porque deste fenônemo consulte [**3**]. □

Usando os mesmos métodos podemos obter cotas melhores para, por exemplo, o número de retas invariantes passando por um ponto p dado. Ao invés de procurar as soluções no espaço vetorial das retas de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, o qual tem dimensão 3, podemos procurar as soluções no subespaço de dimensão 2 formado pelas retas que passam por p. Por exemplo, se $p = [0 : 0 : 1] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ então a equação de qualquer reta invariante passando por p aparecerá como um fator do determinante da seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} x & y \\ X(x) & X(y) \end{bmatrix}.$$

Portanto, se X tem grau d, então o número de retas invariantes passando por um ponto p dado é no máximo $d + 1$.

1.3.2. *Corpos de definição de curvas algébricas invariantes.* Considere um campo de vetores algébrico em $\mathbb{C}^2$, cujos coeficientes estão em $\mathbb{K}$, um subcorpo normal de $\mathbb{C}$. Põe-se, naturalmente, a seguinte questão : o que pode ser dito sobre o corpo de definição das curvas álgebricas invariantes? Em outros termos: qual é a menor extensão $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$ tal que qualquer curva invariante pode ser definida por um polinômio com coeficientes em $\mathbb{L}$?

Para investigar questões como essas podemos utilizar as cotas para o número de curvas invariantes obtidas na seção anterior.

Proposição 3. *Seja $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ uma extensão normal de $\mathbb{Q}$ e $X = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$ um campo de vetores em $\mathbb{C}^2$ de grau d, onde $a, b \in \mathbb{K}[x, y]$. Suponha que X admite uma curva invariante de grau l, definida por um polinômio $f \in \mathbb{L}[x, y]$, onde $\mathbb{L}$ é uma extensão normal de $\mathbb{K}$ contida em $\mathbb{C}$, tal que f não pode ser definido em nenhum subcorpo normal de $\mathbb{L}$. Se*

$$[\mathbb{L} : \mathbb{K}] > \min\left(\frac{d(n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n) - n^4 - 2n^3 + n^2 + 2n}{8}, \frac{d(d+2)}{2}\right),$$

então X admite uma integral primeira racional.

Proof: Como f é invariante por X, temos que $X(f) = L_f \cdot f$, para algum polinômio $L_f \in \mathbb{L}[x, y]$. Aplicando os automorfismos de Galois da extensão $[\mathbb{L} : \mathbb{K}]$, obtemos $[\mathbb{L} : \mathbb{K}]$ curvas algébricas invariantes distintas de grau l. Com isso a prova do teorema segue das cotas de Jouanolou e da proposição 2. ∎

1.3.3. *Famílias de folheações em* $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Em [**37**], Lins–Neto mostra a existência de famílias bem especiais de folheações em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ parametrizadas pela reta projetiva. Uma das propriedades interessantes destas famílias é que nem todas as folheações possuem integral primeira racional, mas para um subconjunto denso E no espaço de parâmetros as folheações possuem integral primeira racional. Se fixamos um inteiro d então o subconjunto do espaço de parâmetros com integral primeira racional de grau menor ou igual a d é certamente fechado. Portanto para tais famílias o grau da integral primeira racional é ilimitado e E admite a exaustão

$$E = \bigcup_{d \in \mathbb{N}} E_d \, ,$$

onde $p \in E_d$ se, e somente se, a folheação correspondente a p admite uma integral primeira racional de grau menor ou igual a d.

Mostraremos agora como usar as curvas extáticas para limitar o crescimento da cardinalidade de E_d para qualquer reta projetiva no espaço de folheações de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

Definição 3. Seja $C \subset Fol(k)$ uma curva algébrica no espaço de folheações de grau k em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Definimos a função contagem de C,

$$\pi_C : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup +\infty,$$

pela seguinte regra: $\pi_C(d) = n$ se o número de pontos em C representando uma folheação com integral primeira racional de grau menor ou igual a d é exatamente n.

Exemplo 3. Sejam $X = x\frac{\partial}{\partial x}$ e $Y = y\frac{\partial}{\partial y}$ campos de vetores em $\mathbb{C}^2$. A família de campos de vetores $tX + sY$ pode ser vista como um $\mathbb{C}P(1)$ linearmente mergulhado em $Fol(1)$. Denotaremos este $\mathbb{C}P(1)$ por C. Sempre que o quociente entre t e s é um número racional então $tX + sY$ admite uma integral primeira racional. Suponha que $t/s = p/q$ com p e q primos entre si. Se t/s é positivo então o grau da integral primeira é o máximo entre a $|p|$ e $|q|$, quando t/s é negativo então o grau da integral primeira é $|p| + |q|$.

Pelas considerações do parágrafo anterior temos que

$$\pi_C(d) \leq K \cdot d^2.$$

Para famílias de folheações parametrizadas por retas projetivas linearmente mergulhadas vale em geral:

Proposição 4. *Seja C um $\mathbb{C}P(1)$ linearmente mergulhado em $Fol(k)$. Se $\pi_C(d)$ é finito para todo inteiro positivo d então existe uma constante K, que depende de k, tal que*

$$\pi_C(d) \leq K d^4.$$

prova: Se tomarmos dois pontos distintos de C, digamos X e Y, podemos recuperar C considerando as combinações lineares $sX + tY$. Pela definição de $\mathcal{E}_d$, pode-se observar que:

$$\mathcal{E}_d(sX+tY) = \sum_{\alpha+\beta+\gamma=\deg(\mathcal{E}_d(X))} P_{\alpha,\beta,\gamma}(s,t)x^\alpha y^\beta z^\gamma \,.$$

Como $\pi_C(d) < \infty$ então existe um terno $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ tal que $P_{\alpha_0,\beta_0,\gamma_0}$ não é identicamente nulo. Portanto o número de parâmetros projetivos $(s:t)$ correspondendo a folheações com grau menor ou igual a d é limitado pelo grau de $P_{\alpha_0,\beta_0,\gamma_0}$.

∎

2. Divisores de inflexão para folheações por curvas

O objetivo agora é generalizar parte dos resultados das seções anteriores para folheações por curvas em variedades complexas arbitrárias. Para alcançar este objetivo é necessária a reformulação dos conceitos em uma forma mais intrínseca.

2.1. Fibrado de Jatos e Divisores Extáticos. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação por curvas na variedade complexa M, i.e., temos um morfismo $\Phi_\mathcal{F}$ de Ω^1_M para o feixe invertível $T^*\mathcal{F}$. Lembramos que em um aberto $U \subset M$ onde $\mathcal{F}$ é gerada por um campo holomorfo X, $\Phi_\mathcal{F}$ é dada por

$$\begin{array}{rcl} \Phi_{\mathcal{F}|U} : \Omega^1(U) & \to & T^*\mathcal{F}_{|U} \cong \mathcal{O}_U \\ \omega & \mapsto & i_X\omega \,. \end{array}$$

Dado um sistema linear $V \subseteq H^0(M,\mathcal{L})$ de dimensão finita, vamos definir o *divisor extático, $\mathcal{E}(\mathcal{F},V)$, com respeito a V*. Este divisor extático $\mathcal{E}(\mathcal{F},V)$ pode ser entendido geometricamente como o lugar de inflexão do sistema linear V com respeito ao morfismo $\Phi_\mathcal{F}$.

Primeiramente, considere a expansão local em série de Taylor da seção $s \in V$ com respeito ao campo de vetor definindo $\mathcal{F}$.

Formalmente, se temos o morfismo

$$\Phi_\mathcal{F} : \Omega^1_M \to T^*\mathcal{F}$$

e um sistema linear $V \subseteq H^0(M,\mathcal{L})$, escolhemos uma cobertura $\mathcal{U}$ de M que trivializa tanto $\mathcal{L}$ quanto $T^*\mathcal{F}$. Em um aberto $U \in \mathcal{U}$ podemos considerar o morfismo

$$T^{(k)}_{|U} : H^0(M,\mathcal{L}) \otimes \mathcal{O}_U \to \mathcal{O}^k_U$$

definido por

$$T^{(k)}(s) = s + X_\mathcal{F}(s)\cdot t + X^2_\mathcal{F}(s)\cdot\frac{t^2}{2!} + \cdots + X^k_\mathcal{F}(s)\cdot\frac{t^k}{k!} \tag{3}$$

onde $X_\mathcal{F}(\cdot) = \Phi_\mathcal{F}(d(\cdot))$ e $s \in \mathcal{O}_U$ é um elemento de $H^0(M,\mathcal{L}) \otimes \mathcal{O}_U$ expresso na trivialização escolhida.

Se tomarmos abertos $U_\lambda \in \mathcal{U}$ temos que

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}_{|U_\lambda} & = & \mathcal{O}_{U_\lambda}\cdot\alpha_\lambda \,, \\ T^*\mathcal{F}_{|U_\lambda} & = & \mathcal{O}_{U_\lambda}\cdot\beta_\lambda \,. \end{array}$$

Portanto, para quaisquer $s_\lambda \in H^0(M,\mathcal{L}) \otimes \mathcal{O}_{U_\lambda}$, obtemos:

$$\begin{aligned} s_\lambda &= s_\lambda^{(0)} \cdot \alpha_\lambda, \\ X_{\mathcal{F}}(s_\lambda) &= X_{\mathcal{F}}(s_\lambda^{(0)}) \cdot \beta_\lambda = s_\lambda^{(1)} \cdot \beta_\lambda . \end{aligned}$$

Geralmente, vale

$$X_{\mathcal{F}}^k(s_\lambda) = X_{\mathcal{F}}(s_\lambda^{(k-1)}) \cdot \beta_\lambda = s_\lambda^{(k)} \cdot \beta_\lambda ,$$

e quando $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$

$$\begin{aligned} s_\lambda &= s_\lambda^{(0)} \cdot \alpha_\lambda = l_{\lambda\mu} s_\mu^{(0)} \cdot \alpha_\mu , \\ X_{\mathcal{F}}(s_\lambda) &= s_\lambda^{(1)} \cdot \beta_\lambda = X_{\mathcal{F}}(s_\lambda^{(0)}) \cdot \beta_\lambda = (X_{\mathcal{F}}(l_{\lambda\mu}) \cdot s_\mu^{(0)} + l_{\lambda\mu} \cdot s_\mu^{(1)})) \cdot e_{\lambda\mu} \cdot \beta_\mu . \end{aligned}$$

Escrevendo em notação matricial obtemos

$$\begin{bmatrix} s_\lambda^{(0)} \\ s_\lambda^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{\lambda\mu} & 0 \\ X_{\mathcal{F}}(l_{\lambda\mu}) \cdot e_{\lambda\mu} & l_{\lambda\mu} \cdot e_{\lambda\mu} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_\mu^{(0)} \\ s_\mu^{(1)} \end{bmatrix}$$

Via cálculos análogos temos

$$\begin{bmatrix} s_\lambda^{(0)} \\ s_\lambda^{(1)} \\ s_\lambda^{(2)} \\ \vdots \\ s_\lambda^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{\lambda\mu} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X_{\mathcal{F}}(l_{\lambda\mu}) \cdot e_{\lambda\mu} & l_{\lambda\mu} \cdot e_{\lambda\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \ddots & \ddots & l_{\lambda\mu} \cdot e_{\lambda\mu}^2 & 0 & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & l_{\lambda\mu} \cdot e_{\lambda\mu}^k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_\mu^{(0)} \\ s_\mu^{(1)} \\ s_\mu^{(2)} \\ \vdots \\ s_\mu^{(k)} \end{bmatrix} . \tag{4}$$

Com isso, definimos o fibrado vetorial $J^k_{X_{\mathcal{F}}}\mathcal{L}$ como sendo o fibrado vetorial de posto $k+1$ cujas matrizes de transição são dadas por (4). Podemos agora considerar a *expansão de Taylor global* das seções em V com respeito a $\mathcal{F}$. Mais precisamente, podemos colar os morfismos da forma (3) para obter apenas um morfismo:

$$T^{(k)} : H^0(M,\mathcal{L}) \otimes \mathcal{O}_M \to J^k_{X_{\mathcal{F}}}\mathcal{L} \tag{5}$$

Estamos quase prontos para definir os pontos de inflexão do sistema linear V contido em $H^0(M,\mathcal{L})$ com respeito a $X_{\mathcal{F}}$. Se denotamos por k a dimensão sobre $\mathbb{C}$ de V, e tomarmos o determinante de (5),

$$\det T^{(k)} : \Lambda^k V \otimes \mathcal{O}_M \to \Lambda^k J^{k-1}_{X_{\mathcal{F}}}\mathcal{L} . \tag{6}$$

então após tensorizarmos por $(\Lambda^k V)^*$ obtemos uma seção de $\Lambda^k J^{k-1}_{X_{\mathcal{F}}}\mathcal{L} \otimes (\Lambda^k V)^*$

$$\mathcal{O}_M \to \Lambda^k J^{k-1}_{X_{\mathcal{F}}}\mathcal{L} \otimes (\Lambda^k V)^* . \tag{7}$$

Finalmente,

Definição 4. O divisor extático de $\mathcal{F}$ com respeito ao sistema linear V, $\mathcal{E}(\mathcal{F},V)$ é dada pelo lugar de zeros da seção (7).

Observe que as curvas extáticas, $\mathcal{E}_d(X)$, definidas em 1.2 coincidem com os divisores extáticos da folheação induzida por X com respeito à $H^0(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}}(d))$. Para tanto basta verificar que localmente as construções são as mesmas.

2.2. Ordem de contato e ideais extáticos. Até o momento definimos os divisores extáticos para folheações holomorfas por curvas em variedades complexas. Uma das motivações é tentar obter um análogo do Teorema 2. De fato por um argumento bem similar obtemos o seguinte:

Proposição 5. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação por curvas em uma variedade complexa M. Se V é um sistema linear de dimensão finita, então toda hipersuperfície invariante contida no lugar de zeros de algum elemento de V está contida no lugar de zeros de $\mathcal{E}(\mathcal{F}, V)$.*

Em variedades de dimensão arbitrária, os divisores extáticos estão longe de detectar as curvas invariantes. Para suplantar esta dificuldade introduziremos os *ideais extáticos*. Se fixamos um sistema linear de dimensão finita V, a idéia principal é considerar os pontos cuja ordem de contato com V é infinita.

Antes de definirmos os ideais extáticos, façamos a noção de contato mais precisa.

Definição 5. Seja X um campo de vetores holomorfo na variedade complexa M e s uma seção holomorfa de algum fibrado linear. Dizemos que a solução passando por p possui *contato de ordem k com s* quando k é o menor inteiro não negativo tal que o radical do ideal gerado por $\overline{s}, \overline{X(s)}, \overline{X^2(s)}, \ldots, \overline{X^k(s)}$ é todo o anel local $\mathcal{O}_{M,p}$. Caso não exista tal inteiro k dizemos que s possui *contato plano* com X. Aqui $\overline{s}$ é a imagem de qualquer representante local de s segundo o morfismo canônico $\mathcal{O}_M \to \mathcal{O}_{M,p}$. Denotaremos por $\nu(s, X_{\mathcal{F}}, p)$ o contato de s com X no ponto p.

Observe que qualquer s que se anule em um ponto singular p de X, possui contato plano com X em p.

Exemplo 4. Seja $X = \frac{\partial}{\partial x}$ um campo polinomial em $\mathbb{C}^3$ e f um polinômio. Caso f não se anule na origem então $\nu(f, X, 0) = 0$, caso contrário $\nu(f, X, 0) \geq 1$. Por exemplo, se

$$f(x, y, z) = \sum_{i=k}^{n} f_i(y, z) x^i \,,$$

com $f_k(0, 0) \neq 0$, então $\nu(f, X, 0) = k$.

Proposição 6. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação por curvas na variedade complexa M. Suponha que V é um sistema linear de dimensão finita e $s \in V$. Se $\nu(s, \mathcal{F}, p) \geq \dim_{\mathbb{C}} V$ então $p \in \mathcal{E}(\mathcal{F}, V)$. Reciprocamente se $p \in \mathcal{E}(\mathcal{F}, V)$ então existe um elemento $s \in V$ tal que $\nu(s, \mathcal{F}, p) \geq \dim_{\mathbb{C}} V$.*

Prova: Escolha um base de V começando com s. Usando a regra de Lagrange para calcular $\mathcal{E}(\mathcal{F}, V)$ em termos da primeira coluna da matriz verifica-se que $\mathcal{E}(\mathcal{F}, V)$ pertence ao ideal maximal correspondente ao ponto p.

Quando $\mathcal{E}(\mathcal{F}, V)(p) = 0$, temos que as colunas da matriz usada para calcular $\mathcal{E}(\mathcal{F}, V)$ são linearmente dependentes no ponto p. Portanto existe um elemento $s \in V$, tal que $s(p) = X(s)(p) = \ldots = X^l(s)(p) = 0$, onde $l = \dim_{\mathbb{C}} V$. ∎

Seja $X_{\mathcal{F}}$ uma folheação por curvas na variedade M. Se $\mathcal{L}$ é um feixe invertível então podemos considerar, como em 2.1, os morfismos

$$T^{(l)} : H^0(M, \mathcal{L}) \otimes \mathcal{O}_M \to J^l_{X_{\mathcal{F}}} \mathcal{L} \,,$$

para qualquer inteiro positivo l. Suponha que V é um espaço vetorial de dimensão finita contido em $H^0(M, \mathcal{L})$ e k é sua dimensão. Portanto após tomar o determinante e tensorizar por $(\Lambda^k V)^*$, obtemos seções

$$\sigma_l : \mathcal{O}_M \to \Lambda^k J^l_{X_{\mathcal{F}}} \mathcal{L} \otimes (\Lambda^k V^*) .$$

Definição 6. O feixe de ideais gerado por $\ker \sigma_l$, onde l é qualquer inteiro positivo, é o **ideal extático** de $X_{\mathcal{F}}$ com respeito ao sistema linear V. O denotaremos por $\mathcal{I}(X_{\mathcal{F}}, V)$.

Exemplo 5. Se X é um campo de vetores em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ o ideal extático de X com respeito ao sistema linear $V = H^0(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}}(k))$, $\mathcal{I}(X, V)$, é gerado, em coordenadas homogêneas, por $\sigma_{(k_1,\dots,k_l)}$, onde

$$\sigma_{(k_1,\dots,k_l)} = \det \begin{pmatrix} X^{k_1}(v_1) & X^{k_1}(v_2) & \cdots & X^{k_1}(v_l) \\ X^{k_2}(v_1) & X^{k_2}(v_2) & \cdots & X^{k_2}(v_l) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ X^{k_l}(v_1) & X^{k_l}(v_2) & \cdots & X^{k_l}(v_l) \end{pmatrix},$$

com $0 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_l$ e os k_i's são inteiros, $v_1, v_2, \dots, v_l$ é uma base do espaço de polinômios homogêneos em três variáveis.

Proposição 7. *A subvariedade $N \subset M$ associada ao radical de qualquer ideal extático de $X_{\mathcal{F}}$ é invariante.*

Prova: Fixe um sistema linear V em M. Se qualquer elemento de $\mathcal{I}(X, V)$ se anula em p, então p pertence ao radical do ideal extático de $X_{\mathcal{F}}$ associado a V. Portanto para qualquer número natural $l \geq \dim_{\mathbb{C}} V$ existe uma subespaço linear $L_l \subset V$ tal que qualquer elemento $f \in L_l$ satisfaz $f(p) = X(f)(p) = \ldots = X^l(f)(p) = 0$. Sendo a projetivização de V compacta podemos encontrar um elemento f_∞ que se anula em p junto com todas as derivadas com respeito ao campo de vetor X. Em outras palavras f_∞ possui contato plano com $X_{\mathcal{F}}$ em p.

Podemos então identificar N com o conjunto de pontos $p \in M$ tal que existe um elemento de V com contato plano com $X_{\mathcal{F}}$ em p, e com isso temos a invariaância.

∎

Exemplo 6. Em [**35**], Jouanolou mostrou que os campos de vetores em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ dados em coordenadas homogêneas por

$$X_d = y^d \frac{\partial}{\partial x} + z^d \frac{\partial}{\partial y} + x^d \frac{\partial}{\partial z} ,$$

não admitem curva algébrica invariante desde que d seja maior do que 1.

Considerar qualquer sistema linear V em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, é o mesmo que considerar um espaço vetorial de dimensão finita cujos elementos são polinômios homogêneos em três variaáveis. Como X_d, $d \geq 2$, não admite curva algébrica invariante temos que o radical do ideal extático $\mathcal{I}(X_d, V)$ é exatamente o ideal que define o conjunto singular de X_d, $d \geq 2$.

Comentário 2. Se $\mathcal{F}$ é uma folheação holomorfa em uma variedade complexa M, então, para nós, uma *integral primeira* para $\mathcal{F}$ é qualquer mapa holomorfo, ou meromorfo, não constante $f : M \to N$, onde N é uma variedade complexa, tal que as fibras de f são $\mathcal{F}$–invariantes.

Teorema 3. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação por curvas de uma variedade complexa M. Se V é um sistema linear de dimensão finita, tal que $\mathcal{E}(\mathcal{F}, V)$ é identicamente nulo então existe um aberto denso $U \subset M$ onde $\mathcal{F}_{|U}$ admite uma integral primeira holomorfa. Caso M seja uma variedade projetiva então $\mathcal{F}$ admite uma integral primeira meromorfa.*

Prova: Suponha que $\dim_{\mathbb{C}} V = k$, e escolha uma base $s_1, \ldots, s_k$ de V. Considere o conjunto $N \subset M \times \mathbb{P}^{k-1}_{\mathbb{C}}$ definido abaixo

$$N = \left\{ (p; a_1 : \ldots : a_k) \mid \nu\left(\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot s_i, \mathcal{F}, p\right) = \infty \right\} .$$

Afirmamos que N é um conjunto analítico fechado. Para verificar este fato defina, para cada inteiro positivo j, o conjunto $N_j \subset M \times \mathbb{P}^{k-1}_{\mathbb{C}}$

$$N_j = \left\{ (p; a_1 : \ldots : a_k) \mid \nu\left(\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot s_i, \mathcal{F}, p\right) \geq j \right\} .$$

Em um aberto U trivializante tanto para $\mathcal{F}$ quanto para o fibrado linear que suporta V podemos escrever N_j como

$$N_j = \left\{ (p; a_1 : \ldots : a_k) \mid X^l\left(\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot s_i\right)(p) = 0, l = 0, \ldots, j \right\} .$$

Portanto cada N_j é um conjunto analítico fechado. Como

$$N = \bigcap_{j=1}^{\infty} N_j \, ,$$

temos que N também é uma conjunto analítico fechado.

Observe que toda fibra da projeção natural $\pi : N \to M$ é um espaço projetivo linearmente mergulhado em $\mathbb{P}^{k-1}_{\mathbb{C}}$. É um fato bem conhecido que existe um aberto denso U onde a dimensão das fibras de π é constante e igual, digamos, a l. Com isso podemos definir, naturalmente, uma função holomorfa de $U \subset M$ para a Grassmaniana de $(l+1)$–planos de $\mathbb{C}^k$. Esta função é claramente constante ao longo de órbitas de $\mathcal{F}$ e portanto é uma integral primeira para $\mathcal{F}_{|U}$.

Quando M é uma variedade projetiva podemos estender esta função, como função meromorfa, para toda a variedade M, obtendo desta forma uma integral primeira meromorfa para $\mathcal{F}$. ∎

3. Uma generalização do critério de Darboux

Em [**39**], Jean-Marie Lion propôs a seguinte generalização do critério de Darboux para a existência de integrais primeiras meromorfas.

Theorem[Lion] *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa dada pela 1-forma integrável, ω, em U, onde U é um aberto limitado de $\mathbb{C}^n$. Suponha que existem infinitas folhas V_i de*

$\mathcal{F}$ contidas em diferentes hipersuperfícies algébricas $Q_i = 0$ de mesmo grau d. Então toda folha de $\mathcal{F}$ está contida em uma hipersuperfície algébrica de grau menor ou igual a d, e ω admite uma integral primeira meromorfa. Se $0 \in (\cap_i V_i)$, então existe uma integral primeira meromorfa cujo gráfico é um subconjunto algébrico de dimensão n de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

Utilizando as idéias desenvolvidas nesse capítulo generalizaremos a primeira parte do resultado de Lion. Ressaltamos que não precisamos nos restringir as folhas algébricas e aos subconjuntos de $\mathbb{C}^n$. Trabalharemos com seções de qualquer sistema linear em uma variedade complexa que, em princípio, não precisa ser aberta.

Teorema 4. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa, de codimensão arbitrária, em uma variedade complexa M, e V um sistema linear de dimensão finita em M. Suponha que existe uma coleção $\{L_i\}_{i\in\Lambda}$, tal que cada folha L_i possui contato plano com algum elemento de V. Se o fecho analítico de*

$$\bigcup_{i\in\Lambda} L_i$$

é igual a M então $\mathcal{F}$ admite uma integral primeira e toda folha de $\mathcal{F}$ possui contato plano com algum elemento de V.

Prova: Seja U um aberto Stein de M. Se consideramos o $\mathcal{O}_U$–módulo $\mathcal{X}(\mathcal{F})$ formado por todos os campo de vetores em U tangente a $\mathcal{F}_{|U}$, então para todo $Y \in \mathcal{X}(\mathcal{F})$ temos que $\mathcal{E}(Y, V) = 0$. Portanto, como na prova do Teorema 3, podemos considerar para cada $Y \in \mathcal{X}(\mathcal{F})$ um conjunto $N_{U,Y} \subset U \times \mathbb{P}^{k-1}_{\mathbb{C}}$ descrevendo os elementos de V com contato plano com Y.

Definindo $N \subset M \times \mathbb{P}^{k-1}_{\mathbb{C}}$ localmente como

$$N_{|U\times\mathbb{P}^{k-1}_{\mathbb{C}}} = \bigcap_{Y\in\mathcal{X}(\mathcal{F})} N_{U,Y}\ ,$$

obtemos um subconjunto analítico fechado de $M \times \mathbb{P}^{k-1}_{\mathbb{C}}$ cujas fibras pela projeção natural para M são espaços projetivos linearmente mergulhados em $\mathbb{P}^{k-1}_{\mathbb{C}}$. Portanto o resultado segue como no Teorema 3 ∎

4. Folheações com todas as folhas algébricas

Gomez–Mont, em [**30**], provou que uma folheação holomorfa singular de codimensão q com todas as folhas algébricas admite uma integral primeira cuja fibra genérica possui codimensão q. A sua prova utiliza o Teorema de Grothendieck sobre a existência do esquema de Hilbert. Propomos aqui uma prova diferente utilizando as idéias desenvolvidas ao longo deste capítulo.

Teorema[Gomez–Mont] *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa (com singularidades) de codimensão q em uma variedade projetiva irredutível M, e assuma que toda folha L de $\mathcal{F}$ é uma subvariedade quasiprojetiva de M; então existe uma variedade projetiva V de dimensão q e um mapa racional $f : M \to V$ tal que o fecho da fibra genérica de f é o fecho de uma folha de $\mathcal{F}$.*

Prova: Suponha, sem perda de generalidade, que M é uma subvariedade de $\mathbb{C}P(n)$ e tome $\mathcal{L}$ a restrição do fibrado hiperplano, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$, à M.

Denote por L_p a folha passando por p e por $\rho(L_p)$ o menor inteiro positivo l tal que L_p é um aberto em uma variedade definida através de seções de $\mathcal{L}^{\otimes l}$. Defina então

$$B_d = \{p \in M \setminus \mathrm{Sing}(\mathcal{F}) \mid \rho(L_p) \leq d\}\,.$$

Como toda a folha é algébrica, temos que

$$M \setminus \mathrm{Sing}(\mathcal{F}) = \bigcup_{d \in \mathbb{N}} B_d\,,$$

e consequentemente existe d_0 tal que B_{d_0} possui medida de Lebesgue positiva e consequentemente o seu fecho analítico é igual a M.

Tomando $V = H^0(M, \mathcal{L}^{\otimes d_0})$ temos pelo Teorema 4 que existe uma variedade projetiva N e um morfismo $g : M \to N$ tal que a fibra sobre qualquer $p \in N$ é invariante pela folheação.

Examinando a prova do Teorema 4 pode-se ver que a fibra genérica $p \in B_{d_0}$ terá codimensão q. Usando o Teorema de fatorização de Stein, veja [**27**], pode-se garantir a existência do diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & \overline{N} \\ {\scriptstyle \mathrm{Id}}\big\downarrow & & {\scriptstyle \pi}\big\downarrow \\ M & \xrightarrow{g} & N \end{array}$$

onde $\overline{N}$ é uma variedade projetiva, π um morfismo e f um morfismo cuja fibra genérica é irredutível. Portanto f satisfaz as afirmações do Teorema. ∎

5. Estabilidade global para folheações holomorfas

Apesar de destoar um pouco do restante do capítulo vamos investigar nessa seção a estabilidade global de folheações holomorfas regulares. Os métodos que utilizaremos agora são de natureza completamente distinta e tomam proveito do fato da folheação ser regular. De qualquer forma podemos relacionar o resultado aqui obtido com o Teorema de Gomez-Mont provado na seção anterior. Este, no caso particular de folheações regulares em variedades Kaehlerianas, é um corolário imediato do nosso teorema de estabilidade.

A questão de estabilidade global remonta aos trabalhos seminais de Eheresmann e Reeb e tornou-se recorrente na teoria de folheações sendo revisitada por vários outros autores. O trabalho de Ehresmann e Reeb estabelece o famoso teorema de estabilidade global, que diz que se $\mathcal{F}$ é uma folheação tranversalmente orientável e de codimensão um em uma variedade compacta M que admite uma folha compacta L com grupo fundamental finito então toda folha de L é compacta e possui grupo de holonomia finito, veja por exemplo [**12**]. Contra exemplos para codimensão maior que um são conhecidos , veja [**28**]. Mostraremos que no caso de folheações holomorfas em variedades Kaehler o resultado persiste em qualquer codimensão.

Teorema 5. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de codimensão q de uma variedade complexa compacta e Kaheleriana . Se $\mathcal{F}$ possui uma folha compacta com o grupo de holonomia finito então toda folha de $\mathcal{F}$ é compacta com grupo de holonomia finito.

Uma questão relacionada foi posta por Reeb and Haefliger. A questão era a estabilidade de folheações compactas, i.e., se uma folheação possui todas as folhas compactas o espaço de folhas é Hausdorff? Respostas positivas para esta questão aparecem em trabalhos de Epstein[**25**], Edwards-Millet-Sullivan[**24**], Holmann[**33**], etc. Entretanto existem bastantes situações em que o espaço de folhas não é Hausdorff. Sullivan encontrou um exemplo na categoria C^{∞}([**62**]), Thurston na categoria analítica([**62**]) e Müller na categoria holomorfa([**33**]). Os exemplos de Sullivan and Thurston vivem em variedades compactas, e o de Müller's numa variedade não compacta e não Kaehler. Como corolário do teorema reobtemos o resultado de Holmann e um caso especial do belíssimo teorema de Edwards-Millet-Sullivan.

Corolário 2 ([**24**],[**33**]). *Suponha que M é uma variedade Kaehleriana complexa, não necessariamente compacta. Se $\mathcal{F}$ é um folheação compacta, i.e., toda folha é compacta, então toda folha possui grupo de holonomia finito. Consequentemente, existe uma cota superior para o volume das folhas e o espaço de folhas é Hausdorff.*

5.1. A função volume das folhas. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa a variedade complexa Kaehleriana (M, ω). Como em [**10**] definimos

$$\Omega = \{p \in M | \text{a folha } L_p \text{ passando por } p \text{ e compacta com holonomia finita.}\}$$

Pelo teorema de estabilidade local de Reeb, veja por exemplo [**12**], Ω é uma aberto de M. Faça , para todo $p \in \Omega$, $n(p) \in \mathbb{N}$ ser a cardinalidade do grupo de holonomia de L_p. Se d é a dimensão das folhas então definimos a função volume de $\mathcal{F}$ como sendo:

$$T : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{+},\, T(p) = n(p) \int_{L_p} \omega^d$$

Lema 1. *T é uma função contínua e localmente constante em Ω.*

prova: A continuidade é óbvia. Para mostrar que T é localmente constante observe que T é constante no conjunto residual formado pela união das folhas sem holonomia, veja [**28**] p. 96. De fato, pelo teorema de estabilidade local de Reeb existe uma vizinhaça saturada de cada folha, onde duas folhas quaisquer são homólogas. Usando o fato de ω^d ser fechado e o teorema de Stokes provamos o lema. ∎

A prova do lema acima está essencialmente em [**33**].

5.2. Um lema sobre Diff($\mathbb{C}^n$, 0). Em 1905 Burnside [**11**] provou que se G é um subgrupo de $GL(n, F)$, onde F é um corpo de característica zero, com expoente e, então G é finito com $cardinalidade(G) \leq e^{n^3}$. Note que um grupo tem expoente e se todo elemento g pertencente ao grupo é tal que $g^e = 1$. Da generalização deste resultado por Herzog-Praeger [**31**] obtem-se,

Lema 2. *Se G é um subgrupo de $Diff(\mathbb{C}^n, 0)$ com expoente e então G é finito com cardinalidade menor ou igual a e^n.*

prova: Se para cada elemento de G considerarmos a sua derivada obtemos um subgrupo de $GL(n, \mathbb{C})$ com expoente e. Dessa forma temos apenas que provar que o subgrupo normal G_0 de G, formado pelos elementos tangentes a identidade é o grupo trivial.

Seja $g \in G_0$, então $g^e = Id$. Definindo $H(x) = \sum_{i=1}^{e} Dg(0)^{-i} g^i(x)$, observa-se que

$$H \circ g(x) = Dg(0)Dg(0)^{-1} \sum_{i=1}^{e} Dg(0)^{-i} g^{i+1}(x) = Dg(0)H(x)\,,$$

e portanto g é conjugado a sua parte linear e consequentemente g deve ser a identidade. ∎

5.3. Prova do Teorema 5. Seja $\mathcal{F}$ como no teorema. Considere a componente conexa de Ω contendo a folha L compacta com holonomia finita, e chame-a de Ω_L. Pelo lema 1, a função volume T é constante em Ω_L, portanto se $p \in \partial\Omega_L$ temos que a folha através de p é *aproximada* por folhas em Ω_L. Observando que a folhas em Ω_L tem o volume limitado pelo valor de $T_{|\Omega_L}$. Conclui-se que L_p tem volume finito. Como para variedades compactas uma folha tem volume limitado se, e somente se, é uma folha compacta temos que L_p também é compacta.

Tome qualquer transversal Σ de L_p. Portanto $\Sigma \cap \Omega_L$ é um aberto de Σ tal que toda folha de Ω_L corta no máximo em m pontos. Caso contrário a função volume não seria limitada em Ω_L. Com isso para todo germe de holonomia h de L_p vale que $(h^{m!})_{|\Sigma\cap\Omega_L} = Id$. Continuação analítica implica que $h^{m!} = Id$. Provamos portanto que o grupo de holonomia de L_p possui expoente finito. Finalmente usando o lema 2, vemos que $\partial\Omega_L = \emptyset$, e provamos o teorema.

O corolário segue observando que o conjunto de folhas sem holonomia é residual e que não precisamos da compacidade da variedade para garantir que a folha limite seja compacta. Com isso o grupo de holonomia de cada folha é finito e pelos resultados de Epstein [**25**] o corolário é obtido.

COMENTÁRIO 3. A mesma prova funciona em um contexto mais geral. Temos apenas que supor que a folheação é transversalmente quasi-analítica e que existe uma forma fechada positiva nos $(n-q)$-planos da distribuição associada a folheação.

CAPíTULO 3

Integrabilidade

Este capítulo trata da integrabilidade, no sentido liouvilliano, de equações diferenciais polinomiais no plano complexo. Após definir integrais primeiras liouvillianas e lembrar alguns resultados básicos é feita uma exposição das abordagens de Singer e de Darboux para o problema de existência de integrais primeiras liouvillianas. Como contribuição original o capítulo fornece resultados relacionando coalescência de curvas algébricas invariantes, curvas extáticas e cofatores exponenciais. Além disso investiga obstruções para a existência de integrais primeiras liouvillianas via métodos geométricos. Obtem-se dessa forma a não integrabilidade de folheações reduzidas em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ de grau maior ou igual a dois e livre de selas-nós e de centros.

1. Extensões liouvillianas e integrais primeiras

During the period between 1833 and 1841, J. Liouville presented a theory of integration in finite terms. He determined the form which the integral of an algebraic function must have when the integral can be expressed with the operations of elementary analysis, carried out a finite number of times.

J. F. Ritt [**54**]

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação algébrica de codimensão um de $\mathbb{C}^n$, i.e., $\mathcal{F}$ é definida por uma 1-forma polinomial ω tal que $\omega \wedge d\omega = 0$. Estamos interessados em descrever as folheações que admitem integrais primeiras liouvillianas. De forma imprecisa, uma função é dita liouvilliana se pode ser escrita a partir das funções racionais utilizando uma sequência finita das seguintes operações:

1. soma e produto;
2. diferenciação;
3. integração de 1-formas fechadas;
4. exponenciação ;
5. solução de equações algébricas.

Para definir o conceito de função liouvilliana de modo mais preciso utilizaremos livremente alguns conceitos básicos de álgebra diferencial.

Considere $K_0 = \mathbb{C}(x_1, x_2, \dots , x_n)$ como um corpo diferencial munido das derivações $\Delta = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots , \frac{\partial}{\partial x_n})$; uma *extensão liouvilliana* K de K_0 é um corpo diferencial obtido da seguinte maneira; existe uma torre de corpos diferenciais (K_i, Δ_i), $i = 1, \dots , n$, tal que:

1. $K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n = K$.
2. $\Delta_i|_{K_{i-1}} = \Delta_{i-1}$ e denotamos $\Delta_i = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots , \frac{\partial}{\partial x_n})$.
3. O corpo de constantes $C(K_i) = \{f \in K_i, \delta f = 0\ \forall \delta \in \Delta_i\} = C(K_0) = \mathbb{C}$.

4. $K_i = K_{i-1}(t_i)$ onde t_i é de um dos 3 tipos abaixo:
   4.a. t_i é algébrico sobre K_{i-1},
   4.b. $\forall \delta \in \Delta$ existe $a_\delta \in K_{i-1}$ tal que $\delta(t_i) = a_\delta$.
   4.c. $\forall \delta \in \Delta$ existe $a_\delta \in K_{i-1}$ tal que $\frac{\delta(t_i)}{t_i} = a_\delta$.

COMENTÁRIO 4. Se f é um elemento de K, por construção f pode ser visto como uma função analítica em um certo aberto U_f de $\mathbf{C}^n$.

A condição 4.b nos permite adicionar a primitiva de uma forma diferencial fechada com coeficientes em K_{i-1}; e 4.c permite que adicionemos a exponencial de um elemento de K_{i-1}.

Se K é uma extensão liouvilliana de $\mathbb{C}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ então para todo elemento $f \in K$ podemos considerar a sua diferencial exterior como

$$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \,,$$

e portanto df é uma 1-forma com coeficientes em K. Denotaremos o K-módulo de 1-formas com coeficientes em K por Ω^1_K, i.e., α pertence a Ω^1_K se, e somente se, α se escreve como $\alpha = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \ldots + a_n dx_n$, onde $a_i \in K$.

Utilizando as formas diferenciais podemos reformular as condições 4.b e 4.c na definição de extensão liouvilliana como

4.b. $dt_i \in \Omega^1_{K_{i-1}}$.
4.c. $\frac{dt_i}{t_i} \in \Omega^1_{K_{i-1}}$.

Definição 7. *Seja ω uma 1-forma racional em $\mathbb{C}^n$. Dizemos que ω possui uma integral primeira Liouvilliana se existe uma extensão liouvilliana $(K, (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, , \frac{\partial}{\partial x_n}))$ de $\mathbb{C}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e um elemento $f \in K$ tal que $df \neq 0$ e*

$$\omega \wedge df = 0\,.$$

O próximo resultado é uma generalização de um teorema de Singer[1] que caracteriza os campos racionais em $\mathbb{C}^2$ que admitem integral primeira liouvilliana. Ao traduzir o resultado para a linguagem de formas diferenciais obtemos uma simplificação da prova original além de estender o resultado para qualquer dimensão.

Teorema 6. *Se ω é uma 1-forma racional em $\mathbb{C}^n$ então, ω admite uma integral primeira liouvilliana se, e somente se, existe uma 1-forma racional fechada η tal que $d\omega = \eta \wedge \omega$.*

Como veremos a seguir a essência da prova do teorema está no seguinte lema.

Lema 3. *Seja K um extensão de $(\mathbb{C}(x_1, x_2, \ldots, x_n), (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, , \frac{\partial}{\partial x_n}))$ e $K(t)$ uma extensão de K tal que ou (a) t é algébrico, ou (b) $\frac{dt}{t} \in \Omega^1_K$ ou (c) $dt \in \Omega^1_K$. Se $\omega \in \Omega^1_K$ então*

$$\begin{aligned} d\omega &= \eta \wedge \omega \\ d\eta &= 0 \end{aligned}$$

[1] Em [**66**] encontra-se uma prova do mesmo resultado.

admite solução em Ω^1_K se, e somente se, admite solução em $\Omega^1_{K(t)}$.

prova: É claro que qualquer solução em Ω^1_K também é solução em $\Omega^1_{K(t)}$. Suponha então que temos um solução η em $\Omega^1_{K(t)}$. Vamos analisar cada possibilidade para t separadamente.

(a) t é algébrico. Seja σ uma automorfismo de Galois da extensão $K(t) : K$. Se η é fechada então $\sigma^*\eta$ também é , e portanto

$$dw = \left(\frac{1}{[K(t) : K]} \sum_{\sigma \in Gal(K(t):K)} \sigma^* \eta \right) \wedge \omega \,.$$

Temos portanto uma solução em Ω^1_K.

(b) $\frac{dt}{t} \in \Omega^1_K$. Uma solução $\eta \in \Omega^1_{K(t)}$ pode ser escrita como

$$\eta = \sum_{i=-k}^{\infty} t^i \eta_i \ \text{ com } \eta_i \in \Omega^1_K.$$

Comparando as potências de t em $d\omega = \eta \wedge \omega$ temos que $d\omega = \eta_0 \wedge \omega$. Sendo η fechada temos que

$$0 = \sum_{i=-k}^{\infty} t_i \left(d\eta_i + i \frac{dt}{t} \wedge \eta_i \right)$$

e portanto $d\eta_0 = 0$. Consequentemente $\eta_0 \in \Omega^1_K$ é uma solução.

(c) $dt \in \Omega^1_K$. Escreva η como

$$\eta = \frac{\sum_{i=0}^{k} t^i \eta_i}{p(t)}$$

onde $\eta_i \in \Omega^1_K$ e $p(t)$ é um polinômio mônico em $K[t]$ de grau l. Diferenciando obtemos

$$0 = p(t) \left(\sum_{i=0}^{k} t^i d\eta_i + i t^{i-1} dt \wedge \eta_i \right) - \left(\sum_{i=0}^{k} t^i \eta_i \right) \wedge dp(t) \,.$$

Lembrando que $p(t)$ é mônico, vê-se que o coeficiente de t^{l+k} na expressão acima é $d\eta_k$, e portanto $d\eta_k = 0$. Como $d\omega = \eta \wedge \omega$ temos que

$$p(t) d\omega = \left(\sum_{i=0}^{k} t^i \eta_i \right) \wedge \omega \,,$$

e portanto k é maior ou igual a l. Se $k = l$ então $d\omega = \eta_k \wedge \omega$ e temos uma solução em Ω^1_K. Caso $k > l$ então $\eta_k \wedge \omega = 0$ e consequentemente existe $h \in K$ tal que $\eta_k = h\omega$. Logo temos uma solução em Ω^1_K dada por

$$d\omega = -\frac{dh}{h} \wedge \omega \,.$$

■

Prova do teorema 6: Suponha que exista η fechada tal que $d\omega = \eta\wedge\omega$. Então existe uma extensão liouvilliana K de $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)$ onde podemos definir $F = \exp\left(\int \eta\right)$ e portanto $dF = F \cdot \eta$. Assim vemos que

$$d\left(\frac{\omega}{F}\right) = \frac{Fd\omega - dF \wedge \omega}{F^2} = 0\,,$$

e podemos adjuntar a primitiva de $\frac{\omega}{F}$ à K e obter uma extensão liouvilliana onde ω admite uma integral primeira.

Reciprocamente se ω admite uma integral primeira F na extensão liouvilliana K então existe $h \in K$ tal que $dF = h\omega$. Como anteriormente

$$dw = -\frac{dh}{h} \wedge \omega\,.$$

Aplicando repetidas vezes o lema 3 vemos que existe uma 1-forma racional η em $\mathbb{C}^n$ tal que $dw = \eta \wedge \omega$. ∎

O resultado abaixo foi provado por Christopher em [**20**] via diferentes métodos.

Corolário 3. *Seja ω uma 1-forma racional em $\mathbb{C}^n$. Se ω admite uma integral primeira liouvilliana então ω admite uma integral primeira liouvilliana da forma*

$$\int f_1^{\lambda_1} \cdot f_2^{\lambda_2} \cdots f_k^{\lambda_k} e^{\frac{g}{f_1^{n_1} \cdots f_k^{n_k}}}\,\omega\,,$$

onde $g, f_i \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$ e $n_i \in \mathbb{N}$ para $i = 1, \dots, k$.

prova: Pelo teorema 6 se ω possui integral primeira liouvilliana então existe uma 1-forma racional fechada η cuja exponencial da integral é uma fator integrante de ω, i.e., ω admite uma integral primeira liouvilliana da forma

$$\int e^{-\int \eta}\omega\,.$$

Pode-se demonstrar que uma 1-forma racional fechada η em $\mathbb{C}^n$ pode ser escrita na seguinte forma (ver teorema 2.1 página 37 de [**17**]):

$$\eta = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{df_j}{f_j} + d\left(\frac{g}{f_1^{n_1} \cdots f_p^{n_p}}\right), \qquad n_i \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{C}^*, H, P_j \in \mathbb{C}[x,y].$$

As hipersuperfícies álgebricas $f_j = 0$ são pólos de η e os λ_j's são os resíduos de η em torno de $f_j = 0$:

$$\lambda_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j} \eta$$

onde γ_j são pequenos círculos em torno de $f_j = 0$.

Integrando η obtemos o resultado. ∎

2. Integrabilidade de Darboux

No intuito de motivar alguns dos resultados da próxima seção, iremos agora descrever a abordagem clássica, cuja origem remonta a Darboux, da integrabilidade de campos de vetores polinômiais em $\mathbb{C}^2$.

Seja

$$X = a(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial}{\partial y} \tag{8}$$

um campo de vetores em $\mathbb{C}^2$ cujos coeficientes a e b são polinômios de grau menor ou igual a d. Uma curva algébrica, descrita implicitamente por $\{f = 0\}$ com $f \in \mathbb{C}[x,y]$, é invariante por X se, e somente se, o quociente de $X(f)$ por f é um polinômio. Quando este é o caso dizemos que este quociente é o *cofator de* f e o denotamos por L_f. Ou seja,

$$L_f = \frac{X(f)}{f}.$$

Um fato que é essencial para o algoritmo de Darboux, é que não importa qual seja o grau de f o grau de seu cofator é sempre menor ou igual que o grau de X menos um. Outro fato importante é que os cofatores comportam-se algebricamente bem, como mostra a seguinte proposição.

Proposição 8. *Seja $f \in \mathbb{C}[x,y]$ e $f = f_1^{n_1} \cdots f_r^{n_r}$ a sua fatoração em polinômios irredutíveis. Se f é invariante por X então*

$$L_f = n_1 L_{f_1} + \cdots + n_r L_{f_r}.$$

Suponha agora que existem curvas algébricas invariantes distintas f_1, f_2, ... , f_n cujos cofatores satisfazem alguma relação linear. Ou seja existem números complexos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tais que

$$\alpha_1 L_{f_1} + \alpha_2 L_{f_2} + \ldots + \alpha_n L_{f_n} = 0$$

Observando que a prova da proposição 8 funciona formalmente vemos que a função

$$F = f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \cdots f_n^{\alpha_n},$$

que em princípio é multivaluada, é uma integral primeira para X. Em outras palavras se tomarmos um aberto simplesmente conexo U contido no complementar de $\{f_1 \cdot f_2 \cdots f_n = 0\}$ temos que qualquer determinação de F é constante ao longo das órbitas de X.

Existe ainda uma outra forma de obter uma integral primeira. Isto ocorre quando os cofatores associado a curvas algébricas invariantes são linearmente dependentes ao divergente de X[2] . Caso existam números complexos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tais que

$$\alpha_1 L_{f_1} + \alpha_2 L_{f_2} + \ldots + \alpha_n L_{f_n} = \mathrm{div} X$$

[2]Lembramos que se X é como em (8) então o divergente X é dado por

$$\mathrm{div} X = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y}.$$

então a função multivaluada $F = f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \cdots f_n^{\alpha_n}$ é um fator de integração para X. Mais precisamente se tomarmos um aberto simplesmente conexo U contido no complementar de $\{f_1 \cdot f_2 \cdots f_n = 0\}$ temos que qualquer determinação de F é tal que $\operatorname{div}(F \cdot X) = 0$. Ou, equivalentemente, qualquer determinação em U da 1–forma

$$\omega_{FX} = i_{FX} dx \wedge dy$$

é fechada. Como U é simplesmente conexo temos que ω_{FX} é de fato exata e sua primitiva é uma integral primeira para X em U.

Além dos cofatores associados a curvas algébricas invariantes existem os *cofatores exponenciais* que são associados a exponenciais de funções racionais. Estes não aparecem no trabalho de Darboux e foram introduzidos recentemente motivado pela caracterização de Singer para campos de vetores com integral primeira liouvilliana, ver seção 1.

Definição 8. Sejam $f, g \in \mathbb{C}[x,y]$, dizemos que $e = \exp(g/f)$ é um *fator exponencial* do campo de vetores X de grau d, se $X(e)/e$ é um polinômio de grau no máximo $d-1$. Este polinômio é chamado de *cofator* do fator exponencial e, e o denotaremos por L_e. O quociente g/f será denominado um *coeficiente exponencial* de X.

Observe que o conjunto de singularidades essenciais do fator exponencial é deixado invariante por X como mostra a próxima proposição.

Proposição 9. *Se $e = \exp(g/f)$ é um fator exponencial do campo de vetores X, então f é uma curva algébrica invariante e g satisfaz a equação*

$$X(g) = gL_f + fL_e \ .$$

Podemos resumir a nossa discussão sobre a interação entre os cofatores e as integrais primeiras no teorema abaixo.

Teorema 7. *Seja X um campo de vetores polinomial em $\mathbb{C}^2$. Se X admite p curvas algébricas invariantes distintas f_i, for $i = 1, \ldots, p$, e q fatores exponenciais independentes e_j, for $j = 1, \ldots, q$, então valem as seguintes afirmações .*

(a) *Se existem $\lambda_i, \rho_j \in \mathbb{C}$ não todos zero tais que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i L_{f_i} + \sum_{j=1}^{q} \rho_j L_{e_j} = 0$, então a função (multi-valuada) $f_1^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p} e_1^{\rho_1} \cdots e_q^{\rho_q}$ é uma integral primeira para X.*

(b) *Se existem $\lambda_i, \rho_j \in \mathbb{C}$ não todos zero tal que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i L_{f_i} + \sum_{j=1}^{q} \rho_j L_{e_j} = -\operatorname{div} X$, então a função $f_1^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p} e_1^{\rho_1} \cdots e_q^{\rho_q}$ é um fator de integração de X.*

Diremos que X é integrável via o algoritmo de Darboux se X satisfaz as hipóteses de (a) ou (b) do teorema 7.

Como corolário obtemos o já citado critério de Darboux.

Corolário 4. *Seja X um campo de vetores polinomial em $\mathbb{C}^2$. Se X admite infinitas curvas algébricas invariantes então X possui uma integral primeira racional.*

O grande mérito do método que acabamos de expor é que se conhecemos todas as curvas algébricas invariantes e todos os fatores exponenciais de um campo de vetores polinomial então pode-se decidir se este é ou não integrável. De fato, segue facilmente do teorema 6 e seu corolário o seguinte resultado.

Teorema 8. *Um campo de vetores polinomial em $\mathbb{C}^2$ admite uma integral primeira liouvilliana se, e somente se, é integrável via o algoritmo de Darboux.*

3. Coalescência de curvas algébricas invariantes

Agora passaremos a buscar uma interpretação geométrica para os cofatores exponenciais baseada na coalescência de curvas algébricas invariantes em famílias de campos de vetores. Passemos as definições básicas.

Definição 9. Uma *família de campos de vetores* $\mathcal{X}$ de grau d parametrizada por $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| < 1\}$ é um campo de vetores holomorfo $\mathcal{X}$ em $\mathbb{D} \times \mathbb{C}^2$ da forma

$$\mathcal{X}(t,x,y) = a(t,x,y)\frac{\partial}{\partial x} + b(t,x,y)\frac{\partial}{\partial y}\,,$$

onde $a(t,x,y)$ e $b(t,x,y)$ são polinômios de grau d em x e y para todo $t \in \mathbb{D}$. Denotaremos o campo de vetores polinomial em $\mathbb{C}^2$ associado ao parâmetro t por $\mathcal{X}_t(x,y) = \mathcal{X}(t,x,y)$.

Seja X um campo de vetores polinomial de grau d em $\mathbb{C}^2$ que deixa a curva irredutível C de grau n invariante, e $\mathcal{X}$ uma família de campo de vetores de grau d tal que $\mathcal{X}_0 = X$. Suponha que $\mathcal{X}$ deixa invariante uma hipersuperfície reduzida $\mathcal{V} \subset \mathbb{D} \times \mathbb{C}^2$ tal que $\mathcal{V}_0 = C$ e para todo $t \neq 0$, $\mathcal{V}_t$ é uma união de curvas irredutíveis de grau n. Se o número de componentes para um t genérico é k dizemos que $\mathcal{V}$ é uma coalescência uniforme de ordem k em $\mathcal{X}_0$. Usamos aqui o adjetivo uniforme pois estamos supondo uma uniformidade no grau das componentes irredutíveis de $\mathcal{V}_t$. Sem estas hipóteses a situação complica-se bastante como se pode ver em [**19**].

3.1. Multiplicidade de curvas algébricas invariantes. Se X é um campo de vetores polinomial de grau d em $\mathbb{C}^2$ a sua n-ésima curva extática, $\mathcal{E}_n(X)$, anula-se ao longo de todas as curvas invariantes de grau menor ou igual a n. A ordem de anulamento de $\mathcal{E}_n(X)$ ao longo de uma curva irredutível invariante será a sua multiplicidade.

Definição 10. Seja X um campo de vetores em $\mathbb{C}^2$ de grau d e C uma curva algébrica invariante reduzida de grau n com equação reduzida dada pelo polinômio f. Dizemos que C possui *multiplicidade* m se m é o maior inteiro positivo tal que f^m divide $\mathcal{E}_n(X)$. Sucintamente escreveremos que $\mu(C,X) = m$.

A multiplicidade acima definida relaciona-se com a coalescência uniforme via a próxima proposição.

Proposição 10. *Seja $\mathcal{X}$ uma família de campos de vetores com $\mathcal{V}$ uma coalescência uniforme de ordem m em $\mathcal{X}_0$ então*

$$\mu(\mathcal{V}_0, \mathcal{X}_0) \geq m\,.$$

prova: Seja f um polinômio irredutível anulando-se sobre $\mathcal{V}_0$. Seja $\mathcal{X}_k$ uma sequência de campos de vetores convergindo a $X_0 = X$, tal que $\mathcal{V}_k$ possua m componentes irredutíveis distintas descritas pelos polinômios $f_k^{(1)}, \dots, f_k^{(m)}$ que convergem a f. Portanto o produto, $f_k^{(1)} \cdots f_k^{(m)}$ divide $\mathcal{E}_n(\mathcal{X}_k)$. Como $f_k^{(1)} \cdots f_k^{(m)}$ são distintos,

$$\lim_{k \to \infty} f_k^{(1)} \cdots f_k^{(m)} = f^m \ ,$$

e portanto f^m divide $\mathcal{E}_n(\mathcal{X}_0)$. ∎

Um corolário interessante é que apesar da multiplicidade de uma curva C invariante por X só depender de informação de X ela nos dá informação sobre qualquer família de campos de vetores centrada em X.

Corolário 5. *Seja X uma campo de vetores de grau d e C uma curva invariante. Se $\mu(C, X) \leq m$ então para qualquer família $\mathcal{X}$ com coalescência uniforme em $\mathcal{X}_0 = X$ temos que a ordem da coalescência é menor ou igual a m.*

3.2. Derivadas de curvas algébricas invariantes. Se $\mathcal{X}$ é uma família de campos de vetores com $\mathcal{V}$ uma coalescência de ordem maior que 1 em $\mathcal{X}_0$ podemos associar a curva invariante $\mathcal{V}_0$ uma *derivada*. Esta dará origem a cofatores exponenciais, fornecendo assim uma interpretação geométrica para estes.

Definição 11. Seja $\mathcal{X}$ uma família de campos de vetores de grau d. Sejam $f_t^{(1)}$ and $f_t^{(2)}$ curvas invariantes por $\mathcal{X}_t$, $t \neq 0$, distintas e de grau n. Seja f uma curva algébrica invariante de $X = \mathcal{X}_0$. Assuma que $f_t^{(1)}, f_t^{(2)} \to f$ quando $t \to 0$, e que

$$\lim_{t \to 0} \frac{f_t^{(2)} - f_t^{(1)}}{t^j} = 0 \quad \text{para } j = 1, \dots, r-1 \ , \tag{9}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f_t^{(2)} - f_t^{(1)}}{t^r} \neq 0 \ . \tag{10}$$

Nesse caso dizemos que o limite (10) é uma *derivada* da curva algébrica invariante f.

O seguinte lema será útil na prova de um teorema que evidencia relações entre derivadas e cofatores exponenciais.

Lema 4. *Usando a notação da definição 11, se valem (9) e (10) então*

$$L_t^{(2)} = L_t^{(1)} + t^r L + O(t^{n+1}) \ ,$$

onde $L_t^{(i)}$, $i = 1, 2$, são os cofatores de $f_t^{(i)}$ com respeito ao campo de vetores $\mathcal{X}_t$, e L é um polinômio de grau menor ou igual a $d - 1$.

prova: Combinando

$$X\left(\frac{f_t^{(2)} - f_t^{(1)}}{t^j}\right) = \frac{L_t^{(2)} f_t^{(2)} - L_t^{(1)} f_t^{(1)}}{t^j} = \frac{\left(L_t^{(2)} - L_t^{(1)}\right) f_t^{(1)}}{t^j} + O(t^{r-j}) \ ,$$

com (9) obtemos

$$\lim_{t \to 0} \frac{L_t^{(2)} - L_t^{(1)}}{t^j} f = 0 \ ,$$

sempre que $j < r$. Portanto, podemos escrever

$$L_t^{(2)} = L_t^{(1)} + t^r L + O(t^{r+1}) \ ,$$

e como $L_t^{(i)}$, $i = 1, 2$, são polinômios de grau menor ou igual a $d-1$ segue que L tem grau no máximo $d-1$. ∎

Teorema 9. *Seja X um campo de vetores de grau d. Se g é a derivada de uma curva algébrica f invariante por X, então g/f é um fator exponencial de X.*

prova: Como g é uma derivada de f existe uma família de campos de vetores $\mathcal{X}$ de grau d, tal que $X_0 = X$ e para t genérico $\mathcal{X}_t$ admite duas curvas algébricas invariantes $f_t^{(1)}$, $f_t^{(2)}$ convergindo a f quando t converge a zero e tais que

$$\lim_{t\to 0} \frac{f_t^{(1)} - f_t^{(2)}}{t^r} = g \ .$$

As seguintes fórmulas serão úteis:

$$\begin{aligned} X_t\left(\frac{f_t^{(2)}}{f_t^{(1)}}\right) &= \frac{X_t\left(f_t^{(2)}\right) f_t^{(1)} - X_t\left(f_t^{(1)}\right) f_t^{(2)}}{\left(f_t^{(1)}\right)^2} \\ &= \left(L_t^{(2)} - L_t^{(1)}\right) \frac{f_t^{(2)}}{f_t^{(1)}} \\ &= t^r L \frac{f_t^{(2)}}{f_t^{(1)}} + O(t^{r+1}) \ . \end{aligned} \tag{11}$$

Definimos g_t como

$$\frac{f_t^{(2)} - f_t^{(1)}}{t^r} \ .$$

De (11) segue que

$$\begin{aligned} X_t\left(\left(\frac{f_t^{(2)}}{f_t^{(1)}}\right)^{1/t^r}\right) &= \frac{1}{t^r}\left(\frac{f_t^{(2)}}{f_t^{(1)}}\right)^{1/t^r}\left(\frac{f_t^{(2)}}{f_t^{(1)}}\right)^{-1} X_t\left(\frac{f_t^{(2)}}{f_t^{(1)}}\right) \\ &= \left(\frac{f_t^{(1)} + t^r g_t}{f_t^{(1)}}\right)^{1/t^r}\left(\frac{f_t^{(1)} + t^r g_t}{f_t^{(1)}}\right)^{-1}\left(L\frac{f_t^{(2)}}{f_t^{(1)}} + O\left(t\right)\right) \\ &= \left(1 + t^r \frac{g_t}{f_t^{(1)}}\right)^{1/t^r}\left(1 + O\left(t^r\right)\right)\left(L\frac{f_t^{(2)}}{f_t^{(1)}} + O\left(t\right)\right) \ . \end{aligned}$$

Portanto

$$X_t\left(\left(1 + t^r \frac{g_t}{f_t^{(1)}}\right)^{1/t^r}\right) = \left(L\frac{f_t^{(2)}}{f_t^{(1)}} + O\left(t\right)\right)\left(1 + t^r \frac{g_t}{f_t^{(1)}}\right)^{1/t^r} \ .$$

Finalmente tomando o limite quando t tende a zero nesta última igualdade

$$X\left(\exp(g/f)\right) = L\exp(g/f)\ .$$

Consequentemente g/f é um coeficiente exponencial de X. ∎

Corolário 6. *Seja $\mathcal{X}$ uma família de campos de vetores com $\mathcal{V}$ uma coalescência uniforme de ordem m, $m \geq 2$ em $\mathcal{X}_0$ então $\mathcal{X}_0$ possui ao menos um coeficiente exponencial.*

Uma espécie de recíproca do resultado acima é provada em [**19**]. Não incluímos por precisar de muitos outros resultados de [**19**]. De qualquer forma enunciamos pois ratifica a tese de que existe uma estreita relação entre derivadas e cofatores exponenciais.

Teorema 10. *Seja C uma curva algébrica irredutível invariante pelo campo polinomial X. Suponha que C é dada pelo polinômio irredutível f. Se $\mu(C,X) \geq 2$ existe um polinômio g de grau menor ou igual a n tal que $\exp(g/f)$ é um fator exponencial de X.*

3.3. Um exemplo. Vamos analisar agora uma família de campos de vetores em $\mathbb{C}^2$ cujo elemento genérico possui quatro retas invariantes. Este exemplo nos foi comunicado por N. Vulpe e aparece em [**57**]. O cálculo da curva extática foi feito utilizando o software MAPLE.

Considere a seguinte família a 2–parâmetros de campos de vetores

$$X_{(t,b)} = \left(2t^2 - 2x^2\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(b - 4xy - 2t^3y^2\right)\frac{\partial}{\partial y}\ .$$

A primeira curva extática de $X_{(t,b)}$ é dada por

$$y\,(x-t)\,(x+t)\left(x + t^3y - t\sqrt{\frac{2+bt}{2}}\right)\left(x + t^3y + t\sqrt{\frac{2+bt}{2}}\right) \tag{12}$$

Verifica-se facilmente que y não é invariante por nenhum campo de vetor da forma $X_{(t,b)}$ com $b \neq 0$, e que dos demais quatro fatores são retas invariantes por $X_{(t,b)}$ para qualquer parâmetro.

Se L é a reta dada por $\{x = 0\}$ então segue de (12) que

$$\mu(L, X_{(0,b)}) = 4\ ,$$

e nesse caso temos sempre uma coalescência uniforme de ordem 4.

Denotemos as quatro retas invariantes por $X_{(t,b)}$ por $L_t^{(i)}$, $i = 1, \ldots, 4$. Para obtermos derivadas de x temos que computar os limites

$$\lim_{t\to 0}\frac{L_t^{(i)} - L_t^{(j)}}{t}\ , \quad \text{for } i,j \in \{1,2,3,4\} \quad \text{and } i \neq j\ .$$

Fazendo tais cálculos no MAPLE temos que

$$
\begin{aligned}
(13)\qquad & \lim_{t\to 0}\frac{L_t^{(2)}-L_t^{(1)}}{t} &=& \lim_{t\to 0}\frac{(x+t)-(x-t)}{t}=2\ ,\\
(14)\qquad & \lim_{t\to 0}\frac{L_t^{(3)}-L_t^{(1)}}{t} &=& \lim_{t\to 0}\frac{\left(x+t^3y-t\sqrt{1+bt/2}\right)-(x-t)}{t}=0\ ,\\
(15)\qquad & \lim_{t\to 0}\frac{L_t^{(4)}-L_t^{(1)}}{t} &=& \lim_{t\to 0}\frac{\left(x+t^3y+t\sqrt{1+bt/2}\right)-(x-t)}{t}=2\ .
\end{aligned}
$$

Das equações (13) e (15) o mesmo coeficiente exponencial, $2/x$. Como o limite (14) é zero, calculamos

$$\lim_{t\to 0}\frac{L_t^{(3)}-L_t^{(1)}}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\left(x+t^3y-t\sqrt{1+bt/2}\right)-(x-t)}{t^2}=-\frac{b}{4}\ .$$

Dessa forma obtemos o coeficiente exponencial $-b/(4x)$. Observe que este coeficiente exponencial difere do anterior pela multiplicação de uma constante e portanto geram um fatores exponenciais dependentes.

Para encontrar outros coeficientes exponenciais consideramos o produto de duas retas invariantes e fazemos cálculos similares. Por exemplo, se tomamos os produtos $L_t^{(1)}L_t^{(3)}$ e $L_t^{(2)}L_t^{(4)}$, obtemos assim

$$\lim_{t\to 0}\frac{L_t^{(1)}L_t^{(3)}-L_t^{(2)}L_t^{(4)}}{t}=-4x\ ,$$

e portanto $-4x/x^2=-4/x$ é um coeficiente exponencial e novamente não temos nada de novo. Se por outro lado computarmos

$$\lim_{t\to 0}\frac{L_t^{(1)}L_t^{(2)}-L_t^{(3)}L_t^{(4)}}{t^3}=-2xy+\frac{b}{2}\ ,$$

obtemos como coeficiente exponencial $(-2xy+b/2)/x^2$, que fornece um fator exponencial independente do anterior.

4. Obstruções para existência de integrais primeiras liouvillianas

Se uma folheação $\mathcal{F}$ de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ admite uma integral primeira liouvilliana, então pelo Teorema 6 temos que em um aberto conveniente $\mathcal{F}$ e gerada pela forma ω e existe uma forma racional fechada η tal que

$$d\omega=\omega\wedge\eta,.$$

Vemos então que o conjunto de pólos de η é invariante por $\mathcal{F}$ e buscaremos neste conjunto de pólos obstruções combinatóricas para a existência de integrais primeiras liouvillianas.

4.1. Índices de curvas invariantes. Seja C uma curva reduzida invariante por $\mathcal{F}$. Seja f um polinômio reduzido representando C em torno de um ponto $p \in C$ e ω uma 1–forma gerando $\mathcal{F}$ em torno de p. Sendo C invariante por $\mathcal{F}$, podemos escrever ω como

$$g\omega = hdf + f\eta\,,$$

onde η é uma 1–forma holomorfa, g e h são funções holomorfas relativamente primas, veja em [**45**]. Pode-se verificar que a ordem de anulamento de $\frac{h}{g}{}_{|C}$ não depende da fatoração escolhida, e portanto podemos definir

$$Z(\mathcal{F}, C, p) = \text{ordem de anulamento de } \frac{h}{g}|_C \,\text{em}\, p\,.$$

Esse índice coincide com o índice de Gomez–Mont-Seade–Verjovski. Uma definição mais cuidadosa e muito mais informação, incluindo a prova da próxima proposição, pode ser encontrada em [**5**].

Proposição 11. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em uma superfície complexa S e C uma curva reduzida invariante por $\mathcal{F}$. Então*

$$\begin{aligned} N_{\mathcal{F}} \cdot C &= C \cdot C + Z(\mathcal{F}, C) \\ T_{\mathcal{F}} \cdot C &= \chi(C) - Z(\mathcal{F}, C)\,. \end{aligned}$$

Da proposição anterior pode-se deduzir uma fórmula descrevendo o comportamento de $Z(\mathcal{F}, C, p)$ segundo blow-ups.

Proposição 12. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em um superfície projetiva complexa e seja C uma curva algébrica invariante por $\mathcal{F}$. Se $p \in C$ é uma singularidade de $\mathcal{F}$ então*

$$Z(\mathcal{F}, C, p) = (E \cdot \overline{C})(l(p) - E \cdot \overline{C}) + \sum_{q \to p} Z(\overline{\mathcal{F}}, \overline{C}, q)\,,$$

onde $\overline{C}$ é o transformado estrito de C, E o divisor excepcional obtido ao explodir p e $q \to p$ são todos os pontos de $\overline{C}$ que estão sobre p.

prova: Seja $\pi : \overline{S} \to S$ o blow–up de p. Se E é o divisor excepcional , i.e., $E = \pi^{-1}(p)$, então

$$\pi^* N_{\mathcal{F}} = N_{\overline{\mathcal{F}}} + l(p)E\,,$$

e

$$\pi^* C = \overline{C} + (E \cdot \overline{C})E\,.$$

Como $\pi^* N_{\mathcal{F}} \cdot \pi^* C = N_{\mathcal{F}} \cdot C$ obtemos que

$$\begin{aligned} N_{\mathcal{F}} \cdot C &= (N_{\overline{\mathcal{F}}} + l(p)E) \cdot (\overline{C} + (E \cdot \overline{C})E) \\ &= N_{\overline{\mathcal{F}}} \cdot \overline{C} + (E \cdot \overline{C})(N_{\overline{\mathcal{F}}} \cdot E) \\ &= N_{\overline{\mathcal{F}}} \cdot \overline{C} + l(p) \cdot (E \cdot \overline{C})\,. \end{aligned}$$

Comparando esta igualdade com a proposição 11 podemos deduzir que

$$C \cdot C + Z(\mathcal{F}, C) = \overline{C} \cdot \overline{C} + Z(\overline{\mathcal{F}}, \overline{C}) + l(p) \cdot (E \cdot \overline{C})\,.$$

Finalmente de

$$\overline{C} \cdot \overline{C} = C \cdot C - (E \cdot \overline{C})^2 \,,$$

obtemos a proposição. ∎

Exemplo 7. Seja $p \in \mathbb{C}$ uma singularidade a cruzamentos normais de uma curva invariante C. Se $C = C_1 \cup C_2$ então segue das proposições 11 e 12 que

$$Z(\mathcal{F}, C, p) = Z(\mathcal{F}, C_1, p) + Z(\mathcal{F}, C_2, p) + 2(l(p) - 2)\,.$$

Em particular se todas as singularidades de uma curva invariante são a cruzamentos normais então $Z(\mathcal{F}, C) \geq 0$. Quanto $\mathcal{F}$ é uma folheação em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ obtem-se dessa forma uma resultado de Cerveau e Lins Neto, veja [**16**]. Se C é uma curva invariante por uma folheação em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ com singularidades a cruzamentos normais então

$$\deg(C) \leq \deg(\mathcal{F}) + 2\,.$$

Essa desigualdade segue facilmente combinando a proposição 11 com $Z(\mathcal{F}, C) \geq 0$.

Em [**7**], Brunella mostra que $Z(\mathcal{F}, C, p) \geq 0$ para qualquer germe de curva invariante C e qualquer singularidade não dicrítica p. Obtem-se então de forma análoga a cota de Carnicer, ver [**15**], para o grau de curvas invariantes por folheações sem singularidades dicríticas em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

Voltaremos a abordar a questão de limitar o grau de curvas invariantes no próximo capítulo.

Exemplo 8. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em uma superfície algébrica S e $p \in S$ uma singularidade radial de $\mathcal{F}$. Suponha que $\mathcal{F}$ admite uma curva algébrica invariante C passando por p. Pela proposição 12 temos que $Z(\mathcal{F}, C, p) = r(2 - r)$, onde r é o número de ramos de C passando por p.

Exemplo 9. Seja C uma curva algébrica na superfície algébrica S. Suponha que C possui uma singularidade p da forma $y^k - x^{k+1} + \text{h.o.t.}$ e que todas as outras singularidades de C, caso existam, sejam na pior das hipóteses nós órdinarios. Suponha que $\mathcal{F}$ é qualquer folheação holomorfa deixando C invariante. Então pela proposição 12 obtemos

$$Z(\mathcal{F}, C, p) = k(l(p) - k) + Z(\overline{\mathcal{F}}, \overline{C}, q) \geq k(1 - k) + 1,$$

observando que $Z(\overline{\mathcal{F}}, \overline{C}, q) \geq 0$, por que q é um ponto liso de $\overline{C}$, e que $Z(\overline{\mathcal{F}}, \overline{C}, q) = 0$ implica que E é genericamente transversal a $\overline{\mathcal{F}}$ e consequentemente $l(p) \geq 2$. Como a contribuição de nós órdinários para $Z(\mathcal{F}, C)$ é sempre não negativa,

$$Z(\mathcal{F}, C) \geq Z(\mathcal{F}, C, p) \geq -k^2 + k + 1\,.$$

Em particular

$$\deg(C) \leq \deg(\mathcal{F}) + 2 + \frac{k^2 - k - 1}{\deg(C)} \leq \deg(\mathcal{F}) + 2 + \frac{k^2 - k - 1}{k + 1}\,.$$

4.2. Uma fórmula de intersecção. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa com a curva C invariante. Suponha que todas as singularidade de $\mathcal{F}$ sobre C são reduzidas e que nenhuma dessas singularidades é sela–nó. Podemos então decompor $\mathrm{Sing}(\mathcal{F}) \cap C$ como

$$\mathrm{Sing}(\mathcal{F}) \cap C = S_{\mathrm{I}} \cup S_{\mathrm{II}} \cup S_{\mathrm{III}}\,, \tag{16}$$

onde S_{I} são as singularidades de $\mathcal{F}$ localizadas na intersecção de componentes irredutíveis distintas de C, S_{II} são as singularidades de $\mathcal{F}$ localizadas nos nós de componentes irredutíveis de C e S_{III} são as singularidades de $\mathcal{F}$ em pontos lisos de C.

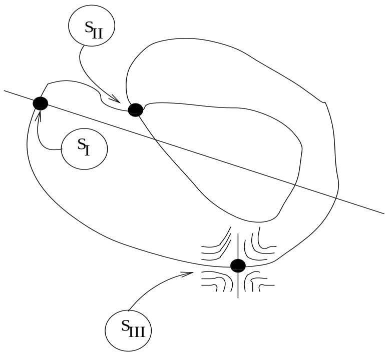

FIGURA 1. Tipos de Singularidades

Proposição 13. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de grau d em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Se C é uma curva reduzida invariante de grau c tal que todas as singularidades de $\mathcal{F}$ sobre C são reduzidas e tal que nenhuma dessas singularidades é uma sela–nó então*

$$d(d-2) - 2(k+1) + 3c + \left(\frac{s_{\mathrm{III}}}{c}\right)^2 + 2\sum_i g(C_i) = 2\sum_{p \notin C} \mu(p)\,,$$

onde C_i, $1 \le i \le k$, são as componentes irredutíveis de C, $\mathrm{Sing}(\mathcal{F}) \cap C$ é decomposto como em (16) e s_{III} denota a cardinalidade de S_{III}.

prova: Decomponha $\mathrm{Sing}(\mathcal{F}) \cap C$ como em (16) e denote por s_i a cardinalidade de S_i. Como todo nó p de C temos que $\mathbb{Z}(\mathcal{F}, C, p) = 0$, vemos que

$$s_{\mathrm{III}} = Z(\mathcal{F}, C)\,.$$

Segue, portanto, da proposição 11 que

$$\deg(\mathcal{F}) + 2 = \deg(C) + \frac{s_{\mathrm{III}}}{\deg(C)}$$

e consequentemente, após elevar ao quadrado,

$$(\deg(\mathcal{F}) + 2)^2 = \deg(C)^2 + 2s_{\mathrm{III}} + \left(\frac{s_{\mathrm{III}}}{\deg(C)}\right)^2\,. \tag{17}$$

Se escrevemos $C = C_1 \cup \ldots \cup C_k$, onde C_i são irredutíveis, então

$$\deg(C)^2 = \sum_i \deg(C_i)^2 + 2\left(\sum_{1\leq i<j\leq k} \deg(C_i)\cdot\deg(C_j)\right),$$

o que implica que

$$\deg(C)^2 = \sum_i \deg(C_i)^2 + 2s_{\mathrm{I}}\,, \tag{18}$$

pois

$$s_{\mathrm{I}} = \sum_{1\leq i<j\leq k} \deg(C_i)\cdot\deg(C_j)\,.$$

O *número* de singularidades de $\mathcal{F}$ é dado por

$$\#\mathrm{Sing}(\mathcal{F}) = \deg(\mathcal{F})^2 + \deg(\mathcal{F}) + 1 = \sum_p \mu(p)\,,$$

e portanto

$$\sum_{p\notin C} \mu(p) = \deg(\mathcal{F})^2 + \deg(\mathcal{F}) + 1 - s_{\mathrm{I}} - s_{\mathrm{II}} - s_{\mathrm{III}}\,. \tag{19}$$

Combinando (7), (14) e (19) obtemos

$$\sum_i \deg(C_i)^2 + \deg(\mathcal{F})^2 - 2\deg(\mathcal{F}) - 2 - 2s_{\mathrm{II}} + \left(\frac{s_{\mathrm{III}}}{\deg(C)}\right)^2 = 2\sum_{p\notin C}\mu(p)\,. \tag{20}$$

Se $n(C_i)$ denota o número de nós de C_i então pela fórmula do gênero

$$2g(C_i) = (\deg(C_i)-1)(\deg(C_i)-2) - 2n(C_i)$$

e após somar sobre i

$$2s_{\mathrm{II}} = -2\sum_i g(C_i) + \sum_i \deg(C_i)^2 - 3\deg(C) + 2k\,.$$

Finalmente, substituindo esta última equação em (20), temos

$$d(d-2) - 2(k+1) + 3c + \left(\frac{s_{\mathrm{III}}}{c}\right)^2 + 2\sum_i g(C_i) = 2\sum_{p\notin C}\mu(p)\,,$$

provando a proposição. ∎

4.3. Não-integrabilidade de folheações. Via a proposição 13 mostraremos como garantir a não–integrabilidade genérica para folheações no plano projetivo de grau d, $d \geq 2$.

O primeiro passo é entender a relação entre os fatores de integração e as singularidades de $\mathcal{F}$. Trabalharemos apenas com singularidades com a parte linear não degenerada. Nesse contexto o lema abaixo mostra que o traço da parte linear do campo definindo $\mathcal{F}$ na singularidade sempre que não nulo força a passagem do conjunto de zeros e pólos do fator de integração pela singularidade.

Lema 5. *Seja X um campo de vetor holomorfo em uma vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^2$ e $\omega = i_X dx \wedge dy$ a 1–forma dual a X. Suponha que 0 é uma singularidade de X Caso exista uma 1–forma η tal que $dw = \eta \wedge w$ então o traço de $DX(0)$ é nulo.*

prova: Se $\omega = i_X dx \wedge dy$ então $d\omega = \mathrm{div} X dx \wedge dy = (\mathrm{Tr}(DX(0)) + h.o.t.) dx \wedge dy$. Como 0 é uma singularidade de X então

$$(\eta \wedge \omega)(0) = 0 = (\mathrm{Tr}(DX(0)) dx \wedge dy\,.$$

∎

Podemos agora provar o seguinte resultado de não–integrabilidade.

Teorema 11. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ de grau $d \geq 2$. Se $\mathcal{F}$ é reduzida e livre de selas-nós e de centros então $\mathcal{F}$ não admite integral primeira liouvilliana.*

prova: Suponha que $\mathcal{F}$ admite uma integral primeira liouvilliana e seja C a curva reduzida associada ao conjunto de pólos do fator de integração η. Se p é uma singularidade de $\mathcal{F}$ então $p \in C$ pois caso contrário p seria um centro e os estamos excluindo por hipótese. Denotando o grau de C por c e o número de suas componentes irredutíveis por k temos pela proposição 13

$$d(d-2) - 2(k+1) + 3c + \left(\frac{s_{\mathrm{III}}}{c}\right)^2 + 2\sum_i g(C_i) = 0\,,$$

e como $\left(\frac{s_{\mathrm{III}}}{c}\right)^2 + 2\sum_i g(C_i)$ é sempre não -negativo

$$d(d-2) - 2(k+1) + 3c \leq 0\,. \tag{21}$$

O número de componentes irredutíveis de C é certamente menor que o grau de C e portanto

$$d(d-2) - 2(c+1) + 3c \leq 0\,,$$

ou ainda $d(d-2) \leq -c + 2$. Consequentemente $d \geq 2$ implica em $c \leq 2$.

Pela proposição 11 $d + 2 = c + \frac{s_{\mathrm{III}}}{c} \leq c + \frac{s_{\mathrm{III}}}{c}^2$ e combinando com (21) temos

$$d^2 - d + 2 - 2(k+1) + 2c \leq 0\,.$$

Como $d^2 - d > 0$ vale que $c < k - 1$ e obtemos assim uma contradição que prova o teorema. ∎

De fato utilizando as mesmas técnicas podemos obter um resultado ligeiramente mais forte que enunciamos aqui como um corolário da demonstração.

Corolário 7. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ de grau $d \geq 2$. Suponha que $\mathcal{F}$ é reduzida e livre de selas-nós. Se o número de centros de $\mathcal{F}$ é menor que $\frac{d(d-2)}{2}$ então $\mathcal{F}$ não admite integral primeira liouvilliana.*

prova: Seja $N = \sum_{p \notin C} \mu(p)$ o número de centros de $\mathcal{F}$. Suponha que $\mathcal{F}$ admite uma integral primeira liouvilliana. Então pela proposição 13 e pelo lema 5 temos que

$$d(d-2) - 2(k+1) + 3c \leq 2N\,.$$

Se $N < \frac{d(d-2)}{2}$ então $3c - 2k < 2$. Como k denota o número de componentes de uma curva de grau c segue que $c = 1$, um absurdo. ∎

CAPíTULO 4

Teoria Birracional e Integrabilidade

Após rever noções da teoria birracional de folheações este capítulo investiga como utilizar estes novos métodos para atacar problemas clássicos das folheações em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ como a existência de integrais primeiras liouvillianas e a limitação do grau de curvas invariantes.

1. Teoria Birracional de Folheações

Esta primeira seção possui caráter expositório e nela apresentamos as noções de dimensão de Kodaira e modelos minimais para folheações holomorfas em superfícies complexas. Esta exposição foi fortemente influenciada pela excelente monografia [**5**].

1.1. Dimensão de Kodaira. A dimensão de Kodaira no contexto de folheações holomorfas foi introduzida independentemente por McQuillan e Mendes em [**42**] e [**43**]. Para definir a dimensão de Kodaira de uma folheação reduzida[1] $\mathcal{F}$ consideramos o seu fibrado cotangente, que denotamos por $T^*\mathcal{F}$, e consideramos o seguinte limite

$$\operatorname{kod}(\mathcal{F}) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log h^0(S, T^*\mathcal{F}^{\otimes n})}{\log n}\,.$$

Pode-se demonstrar que o limite superior acima sempre existe e pode assumir um dos seguintes valores: $-\infty, 0, 1$ ou 2. [2] Diremos que a sequência de números inteiros

$$P_m(\mathcal{F}) = h^0(S, T^*\mathcal{F}^{\otimes m})\,, \quad \text{para } m \in \mathbb{N}^+,$$

é o *plurigênero* de $\mathcal{F}$. Nesses termos a dimensão de Kodaira mede o crescimento do plurigênero da folheação.

Quando estamos em uma variedade algébrica M consideramos o *canônico* de M como sendo o fibrado linear das formas diferenciais holomorfas de posto máximo. Vejamos como a dimensão de Kodaira comporta-se no caso de curvas algébricas.

Exemplo 10. Quando a variedade algébrica em questão é uma curva C, o fibrado em questão é o fibrado linear das 1–formas holomorfas. Portanto

$$\operatorname{kod}(C) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log h^0(C, {\Omega^1_C}^{\otimes n})}{\log n}\,.$$

[1] Reduzida no sentido de Seidenberg, ver apêndice

[2] De fato para qualquer fibrado em retas $\mathcal{L}$ e qualquer variedade projetiva M o limite superior

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log h^0(M, \mathcal{L}^{\otimes n})}{\log n}\,,$$

existe e é igual a dimensão de Iitaka do fibrado em retas $\mathcal{L}$. Esta dimensão pode assumir e um dos seguintes valores: $-\infty, 0, 1, 2, \ldots, \dim_{\mathbb{C}} M$.

No caso em que C é a esfera de Riemman temos que qualquer 1-forma diferencial meromorfa temos sempre dois pólos a mais do que zeros(contando com multiplicidade). Ou seja $\Omega^1_C = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}}(-2)$. Portanto temos que $h^0(C, \Omega^1_C{}^{\otimes n}) = 0$, para qualquer n, e conseqentemente $\mathrm{kod}(C) = -\infty$.

Quando C é um toro temos que C é um grupo de Lie e portanto tem fibrado tangente e cotangente triviais. Logo $h^0(C, \Omega^1_C{}^{\otimes n}) = 1$ e vemos que C é tal que $\mathrm{kod}(C) = 0$

Finalmente, quando C tem gênero maior ou igual a dois o Teorema de Riemman–Roch nos diz que

$$h^0(C, \Omega^1_C{}^{\otimes n}) = \begin{cases} g & \text{se } n = 1 \\ n(2g-2) + 1 - g & \text{se } n > 1 \end{cases},$$

e portanto temos que $\mathrm{kod}(C) = 1$. □

Um das propriedades essenciais do canônico de uma variedade algébrica é que ele comporta-se bem com respeito a mapas birracionais. O bom comportamento aqui é no sentido de que o plurigênero fica invariante, ou seja, se M e N são variedades algébricas, ambas de dimensão m, birracionalmente equivalentes então

$$h^0(M, \Omega^m_M{}^{\otimes n}) = h^0(N, \Omega^{m \otimes n}_N),$$

para qualquer inteiro positivo n. Já no caso das folheações o canônico não possui tão boas propriedades. Duas folheações birracionalmente equivalentes podem possuir plurigêneros distintos. Entretanto, se nos restringirmos a folheações reduzidas, o plurigênero torna-se um invariante por transformações birracionais como mostra a seguinte proposição. Sua demonstração pode ser encontrada em [**43**].

Proposição 14. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação reduzida na superfície algébrica S_1 e $\mathcal{G}$ uma folheação reduzida na superfície algébrica S_2. Se existe um mapa birracional $S_1 \to S_2$ mandando $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$, então $P_m(\mathcal{F}) = P_m(\mathcal{G})$, para qualquer inteiro positivo m. Em particular* $\mathrm{kod}(\mathcal{F}) = \mathrm{kod}(\mathcal{G})$.

Com este resultado em mente define-se então a dimensão de Kodaira de uma folheação holomorfa singular $\mathcal{F}$ em uma superfície complexa compacta S como sendo a dimensão de Kodaira de qualquer folheação reduzida birracionalmente equivalente $\mathcal{F}$. Observe que toda folheação holomorfa em uma superfície complexa possui um modelo reduzido como assegura o Teorema de Seidenberg.

Definição 12. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em uma superfície compacta S, e $\mathcal{G}$ qualquer folheação reduzida bimeromorficamente equivalente a $\mathcal{F}$. A *dimensão de Kodaira* de $\mathcal{F}$ é dada por

$$\mathrm{kod}(\mathcal{F}) = \limsup_{n \to \infty} \frac{\log h^0(S, T^*\mathcal{G}^{\otimes n})}{\log n}.$$

Em [**42**], McQuillan classifica, quase que completamente, as folheações em superfícies algébricas. Essa classificação, como no caso de curvas, não encerra a teoria de folheações, apenas as divide em quatro classes onde os problemas poderão ser atacados com métodos específicos para cada classe. Sumarizamos a classificação na tabela abaixo e aconselhamos o leitor interessado a consultar [**5**] para a prova da classificação.

kod($\mathcal{F}$)	**Descrição**
$-\infty$	fibração racional
	dimensão de Kodaira numérica 1
0	a menos de recobrimentos ramificados e mapas birracionais $\mathcal{F}$ é gerado por um campo holomorfo global.
1	folheação de Riccati
	folheação turbulenta
	fibração elíptica não isotrivial
	fibração isotrivial de gênero ≥ 2
2	tipo geral

Tabela 1: *Classificação de folheações holomorfas em superfícies algébricas*

Lembramos que uma folheação $\mathcal{F}$ em uma superfície S é de *Riccati* (resp. *turbulenta*), se existe uma fibração racional (resp. elíptica) em S, cuja fibra genérica é completamente transversal a $\mathcal{F}$.

Uma das idéias usadas para classificar as folheações é considerar, seguindo Mori, a dimensão de Kodaira númerica, que esta relacionada a propriedades de intersecção do fibrado canônico. A parte incompleta da classificação é justamente o caso em a dimensão de Kodaira é negativa e a dimensão numérica é 1. Conjectura-se que estas sejam exatamente as folheações ımodulares de Hilbert, para mais detalhes veja [**42**] and [**5**].

É importante entender que a tabela não está dizendo que toda folheação de Riccati tem dimensão de Kodaira 1, por exemplo. Existem folheações de Riccati que também são fibrações racionais, e portanto tem dimensão de Kodaira negativa. Um outro exemplo são folheações turbulentas que são geradas por campos holomorfos globais e tem dimensão de Kodaira 0.

O Teorema abaixo, devido a Mendes, veja o item 2 do Teorema 3.3.1 em [**43**], nos dá informações sobre folheações em superfícies que admitem uma fibração. Uma de suas consequências é que se $\mathcal{F}$ é de Riccati ou turbulenta então a dimensão de Kodaira de $\mathcal{F}$ é no máximo 1.

Teorema 12. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em uma superfície algébrica M e $p : M \to B$ uma fibração. Denote por C a fibra genérica de p. Se C é invariante por $\mathcal{F}$ então* $\mathrm{kod}(\mathcal{F}) \leq \mathrm{kod}(C) + 1$. *Se $\mathcal{F}$ é transversa a C então* $\mathrm{kod}(\mathcal{F}) \leq 1$.

1.2. Modelos minimais. Brunella, em [**6**], introduziu o conceito de modelo minimal para um folheação holomorfa em uma superfície complexa compacta. Este conceito pode ser entendido como o análogo folheado dos modelos minimais de Zariski para superfícies algébricas.

Como estamos investigando propriedades birracionais de folheações holomorfas é natural considerar sempre folheações reduzidas. Entretanto estas nunca são unicamente associadas a folheação original. Podemos, por exemplo, explodir um ponto liso e obter uma nova folheação reduzida. Queremos definir um *modelo minimal* que seja reduzido e essencialmente único (módulo bimeromorfismos). Para tanto temos que nos livrar desses blow-ups artificiais.

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação na superfície complexa M e seja $C \subset M$ uma curva algébrica.

Definição 13. Dizemos que C é $\mathcal{F}$*–excepcional* se

1. $C \cdot C = -1$;
2. a contração de C a um ponto p produz uma folheação $\mathcal{G}$ tal que p é um ponto liso ou uma singularidade reduzida.

Definição 14. Dizemos que uma folheação $\mathcal{F}$ em uma superfície compacta é *relativamente minimal* se

1. $\mathcal{F}$ é reduzida ;
2. $\mathcal{F}$ não admite curvas $\mathcal{F}$-excepcionais.

Pode-se demonstrar que toda folheação $\mathcal{F}$ possui um modelo relativamente minimal, i.e., existe uma folheação $\mathcal{G}$ relativamente minimal e bimeromorficamente equivalente a $\mathcal{F}$, veja [**5**]. Entretanto nem todas as folheações admitem um modelo minimal único. Um exemplo simples desse fato é a folheação produto em $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$. Se tomarmos qualquer fibra podemos fazer um flip na mesma e obter um novo modelo relativamente minimal para a folheação. Um exemplo mais elaborado é folheação $\mathcal{H}$ descrita por Brunella em [**6**] e nas páginas 56–58 de [**5**] que é caracterizada pelo fato de possuir uma curva racional invariante C tal que $C \cdot C = 3$ e a única singularidade da folheação sobre C é uma singularidade reduzida e não –degenerada que é também um nó de C.

Todavia as folheações que não admitem modelo relativamente minimal único foram caracterizadas de forma bem precisa, veja [**5, 6**], no seguinte Teorema.

Teorema 13. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa em uma superfície complexa compacta M sem modelo relativamente minimal único. Então $\mathcal{F}$ é bimeromorficamente equivalente a uma das folheações na lista abaixo:*

1. *fibrações racionais;*
2. *folheações de Riccati;*
3. *a folheação $\mathcal{H}$ mencionada acima.*

Desse modo definimos, finalmente, uma folheação *minimal*.

Definição 15. Dizemos que uma folheação $\mathcal{F}$ em uma superfície compacta é *minimal* se

1. $\mathcal{F}$ é relativamente minimal;
2. qualquer folheação relativamente minimal $\mathcal{G}$ bimeromorficamente equivalente a $\mathcal{F}$ é, de fato, biholomorficamente equivalente a $\mathcal{F}$.

Uma definição equivalente é dada pela próxima proposição.

Proposição 15. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa reduzida na superfície compacta M. Dizemos que $\mathcal{F}$ é minimal se, e somente se, para qualquer folheação reduzida $\mathcal{G}$ em uma superfície compacta N e qualquer mapa bimeromorfo $\phi : N \to M$ que envia $\mathcal{G}$ em $\mathcal{F}$ é de fato um bimeromorfismo.*

Um corolário útil dos resultados acima é que as folheações de tipo de geral sempre admitem um modelo minimal e, em particular, o estudo de seu grupo de bimeromorfismos pode ser reduzido ao estudo dos automorfismos de seu modelo minimal.

Corolário 8. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de tipo geral em uma superfície complexa M. Então existe um único modelo minimal $\mathcal{G}$ para $\mathcal{F}$ e* $\mathrm{Bim}(\mathcal{F}) \cong \mathrm{Aut}(\mathcal{G})$.

prova: O Teorema 12 implica que as fibrações racionais possuem dimensão de Kodaira negativa e as folheações de Riccati possuem dimensão de Kodaira no máximo um. Já no caso da folheação $\mathcal{H}$ a terceira potência do fibrado canônico é trivial, veja [**5**] página 102. Conseqüentemente $\mathcal{H}$ possui dimensão de Kodaira zero. Essas observações, juntamente com o Teorema 13, são suficientes para garantir que uma folheação de tipo geral sempre admite um modelo minimal. Com isso o corolário segue da proposição 15. ∎

2. Folheações parabólicas e integrabilidade

As folheações em superfícies complexas compactas com dimensão de Kodaira zero foram caracterizadas por McQuillan, em [**42**], com o seguinte teorema.

Teorema 14. *Seja $\mathcal{F}$ é uma folheação relativamente minimal em uma superfície projetiva X. Se $\mathrm{kod}(\mathcal{F}) = 0$ então existe um recobrimento ramificado $\pi : Y \to X$ e um morfismo birracional $p : Y \to Z$ tal que $p_*(\pi^*(\mathcal{F}))$ é uma folheação gerada por um campo de vetores holomorfo global com zeros isolados.*

Uma consequência interessante desse resultado é que se $\mathcal{F}$ possui dimensão de Kodaira zero então o gênero geométrico de toda curva irredutível invariante por $\mathcal{F}$ é menor ou igual a um.

As folheações geradas por campo de vetores globais também já estão classificadas. A classificação descrita nas páginas 84 a 88 de [**5**] pode ser resumida da seguinte forma. Quando a superfície tem dimensão de Kodaira não negativa a folheação é uma fibração de Seifert com fibras elípticas ou é uma folheação linear em um toro. Quando a dimensão da superfície é negativa a classificação pode ser resumida na seguinte tabela.

$h^{1,1}(X)$	**Descrição**
≥ 2	fibração racional
1	fibração racional
	suspensão de uma representação $\rho : \pi_1(Alb(X)) \to Aut(\mathbb{C}P(1))$
0	birracionalmente equivalente a um campo de vetores em $\mathbb{C}P(1) \times \mathbb{C}P(1)$ da forma $v_1 \oplus v_2$.

Tabela 2: *Classificação de campos de vetores globais em superfícies algébricas de dimensão de Kodaira negativa*

Segue da classificação acima que uma folheação gerada por um campo holomorfo global sempre pode ser descrita por uma forma meromorfa fechada.

Proposição 16. *Se $\mathcal{F}$ é uma folheação em uma superfície algébrica S gerada por um campo holomorfo global então $\mathcal{F}$ é gerada por uma forma meromorfa fechada.*

prova: Quando S tem dimensão de Kodaira não-negativa temos que $\mathcal{F}$ é uma fibração ou uma folheação linear no toro. No primeiro caso temos integral primeira racional e portanto várias formas fechadas definindo $\mathcal{F}$. No segundo caso o fibrado cotangente e o tangente do toro são triviais, e ao campo de vetores definindo $\mathcal{F}$ podemos associar a 1-forma dual que é obviamente fechada.

Quando S tem dimensão de Kodaira negativa e $\mathcal{F}$ é uma fibração temos infinidades de formas meromorfas fechadas definindo $\mathcal{F}$. Podemos então supor que $h^{1,1}(S) \leq 1$.

Se $h^{1,1}(S) = 1$ e $\mathcal{F}$ não admite integral primeira racional então $\mathcal{F}$ é uma suspensão de uma representação $\rho : \pi_1(Alb(X)) \to Aut(\mathbb{C}P(1))$. Como $\pi_1(Alb(X)) = \mathbb{Z}^2$ então vemos que o conjunto de pontos fixos de quaisquer dois elementos coincidem. Se o conjunto de pontos fixos possuir cardinalidade 1 podemos conjugar a representação a um subgrupo do grupo das translações $\{z \mapsto z + c; c \in \mathbb{C}\}$. Se

$$\pi : \mathbb{C} \times \mathbb{C}P(1) \to S$$

é o recobrimento universal de S vemos que a forma meromorfa em $\mathbb{C}P(1)$ com pólo no infinito de ordem 2, dz, é invariante pelo grupo das translações . Desse modo a forma $\pi_* dz$ está bem definida e define $\mathcal{F}$. Caso o conjunto de pontos fixos tenha dois elementos então a representação ρ é conjugado a um subgrupo de grupo de homotetias $\{z \mapsto \lambda \cdot z; \lambda \in \mathbb{C}\}$ o qual deixa a forma $\frac{dz}{z}$ invariante. Do mesmo modo a forma $\pi_*(\frac{dz}{z})$ está bem definida e define $\mathcal{F}$.

O último caso a ser analisado é $h^{1,1}(S) = 0$. Aqui temos que $\mathcal{F}$ é birracionalmente equivalente a folheação gerada por um campo holomorfo da forma $v_1 \oplus v_2$ em $\mathbb{C}P(1) \times \mathbb{C}P(1)$. Escolhendo coordenadas convenientes podemos escrever o campo X gerando $\mathcal{F}$ como

$$X(x,y) = (ax+b)\frac{\partial}{\partial x} + (cy+d)\frac{\partial}{\partial y}\,,$$

com $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4 \setminus \{0\}$. A 1-forma

$$\omega = \frac{(cy+d)dx - (ax+b)dy}{(ax+b)\cdot(cy+d)}\,,$$

é fechada e anula-se sobre $\mathcal{F}$. Estendendo esta ω para $\mathbb{C}P(1) \times \mathbb{C}P(1)$ temos o resultado. ∎

Corolário 9. *Se $\mathcal{F}$ é uma folheação em uma superfície algébrica S birracionalmente equivalente a uma folheação gerada por um campo holomorfo global então $\mathcal{F}$ é gerada por uma forma meromorfa fechada.*

prova: Segue imediatamente do fato de que o pull-back de uma forma meromorfa fechada por uma aplicação birracional ainda é uma forma meromorfa fechada. ∎

Combinando a proposição acima com o Teorema 14 temos:

Teorema 15. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Se $\mathrm{kod}(\mathcal{F}) = 0$ então $\mathcal{F}$ admite uma integral primeira liouvilliana.*

prova: Seja $\mathcal{G}$ a resolução de $\mathcal{F}$. Se $\mathcal{G}$ vive na superfície racional X e $\mathcal{G}$ possui dimensão de Kodaira zero temos pelo Teorema 14 que existe uma variedade projetiva Y e um recobrimento ramificado $\pi : Y \to X$ tal que $\pi^*\mathcal{F}$ é bimeromorficamente equivalente a uma folheação gerada por um campo holomorfo global. Portanto, pela proposição 16, $\pi^*\mathcal{F}$ é gerada por uma forma meromorfa fechada.

Denote por $k(Y)$, o corpo de funções racionais de Y. A aplicação π induz a inclusão

$$\begin{array}{rcl} \pi^* : K(X) & \to & k(Y) \\ f & \mapsto & f \circ \pi\,, \end{array}$$

de corpos diferenciais. Como π é um recobrimento finito então existem $t_1, \ldots, t_d \in k(Y)$ tais que

$$k(Y) = k(X)(t_1, \ldots, t_d) = k(x,y)(t_1, \ldots, t_d)\,.$$

Ou seja o corpo $k(Y)$ é uma extensão finita de $k(X) \cong k(x,y)$, obtida pela adjunção dos elementos $t_1, \ldots, t_d$.

As derivações $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ de $k(x,y)$ estendem-se de maneira única a derivações de $k(Y)$, ver [**4**] página 139. Dessa forma podemos ver $k(Y)$ como um corpo diferencial que estende $k(x,y)$ munido das derivações $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$. Como os elementos $t_1, \ldots, t_d$ são todos algébricos sobre $k(x,y)$ então $k(Y)$ é uma extensão liouvilliana de $k(X)$.

Como em Y a folheação é dada por uma forma meromorfa fechada, via uma extensão liouvilliana de $k(Y)$ podemos adicionar uma primitiva para a forma fechada definindo $\pi^*\mathcal{F}$. Consequentemente existe uma extensão liouvilliana de $k(x,y)$ onde $\mathcal{F}$ admite uma integral primeira. ∎

COMENTÁRIO 5. Se $\mathcal{F}$ é uma folheação em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ com dimensão de Kodaira *zero* nem sempre a folheação será descrita por uma forma meromorfa fechada. Se ω descreve $\mathcal{F}$ e $\pi : Z \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ é uma aplicação racional de recobrimento[3] tal que $\pi^*\mathcal{F}$ seja gerada por campo global. Nesse caso a proposição 16 garante que $\pi^*\mathcal{F}$ é gerada por uma 1-forma meromorfa fechada, que denotaremos por η. Como $\pi^*\omega$ também define $\pi^*\mathcal{F}$ temos que

$$\eta = f \cdot \pi^*\omega\,, \tag{22}$$

onde f é uma função racional em Y. Isso reflete-se em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ via a existência de um fator de integração multivaluado. De fato se tomarmos uma determinação qualquer de π^{-1} a equação (22) garante que

$$d((f \circ \pi^{-1}) \cdot \omega) = d(\pi^{-1})^*\eta = (\pi^{-1})^* d\eta = 0\,.$$

2.1. Altura de folheções holomorfas. Vamos agora considerar um outro invariante birracional para folheações holomorfas que será útil para obter resultados quantitativos sobre a integrabilidade de folheações.

Definição 16. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de dimensão de Kodaira k, $k \geq 0$, em uma superfície complexa compacta. Como de costume seja $\mathcal{G}$ qualquer resolução de $\mathcal{F}$. Definimos a *altura de* of $\mathcal{F}$, $h(\mathcal{F})$, como o primeiro inteiro positivo h tal que $K_{\mathcal{G}}^{\otimes h}$ possui $k+1$ seções algebricamente independentes.

[3]Estamos permitindo que π tenha pontos de indeterminação.

Quando $\mathcal{F}$ tem dimensão de Kodaira zero a altura de $\mathcal{F}$ é o menor inteiro positivo h tal que $h^0(K_{\mathcal{G}}^{\otimes h}) = 1$.

Seja $\mathcal{G} = \pi^*\mathcal{F}$, $\pi : X \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, uma folheação reduzida obtida via a resolução minimal de singularidades de $\mathcal{F}$. Se $\mathcal{G}$ não é minimal existe um curva reduzida contrátil C, que é $\mathcal{G}$-invariante e cuja contração produz uma folheação reduzida relativamente minimal em uma superfície lisa.

Cada componente de C será uma curva racional de auto–interseção negativa com uma ou duas singularidades. Podemos então escrever

$$C = C_0 \cup C_1 \,,$$

onde qualquer curva irredutível em C_0 possui apenas uma singularidade de $\mathcal{G}$ e qualquer curva irredutível em C_1 possui exatamente duas singularidades de $\mathcal{G}$. Denotemos por $E_0(\mathcal{F})$, resp. $E_1(\mathcal{F})$, a componente de codimensão 1 de $\pi_* C_0$, resp. $\pi_* C_1$. Usaremos também a notação $e_0(\mathcal{F})$, resp. $e_1(\mathcal{F})$ para designar o grau de $E_0(\mathcal{F})$, resp. $E_1(\mathcal{F})$.

Proposição 17. *Se $\mathcal{F}$ é uma folheação de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ com $\mathrm{kod}(\mathcal{F}) = 0$ então*

$$e_0(\mathcal{F}) \leq h(\mathcal{F}) \cdot (d(\mathcal{F}) - 1) \,.$$

prova: Seja D uma componente irredutível de C_0. Como D admite apenas uma singularidade de $\mathcal{F}$ e essa singularidade é tal que $Z(\mathcal{F}, D) = 1$ então $T^*\mathcal{G}_{|D} \cong T^*D(+p)$, onde $p = \mathrm{sing}(\mathcal{G}) \cap D$. Como $T^*D(+p) = \mathcal{O}_{\mathbb{C}P(1)}(-1)$ temos que qualquer seção de $T^*\mathcal{G}^{\otimes n}$ deve se anular sobre D para qualquer inteiro positivo n.

Seja σ uma seção não -nula de $T^*\mathcal{G}^{\otimes h(\mathcal{F})}$. Pelo parágrafo anterior temos $\sigma_{|C_0} = 0$ e portanto $\pi_*\sigma_{|E_0(\mathcal{F})} = 0$. Como $\pi_*\sigma$ é uma seção de $T^*\mathcal{F}^{\otimes h(\mathcal{F})} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}}(h(\mathcal{F}) \cdot (d(\mathcal{F}) - 1))$ temos o resultado. ∎

Proposição 18. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ de grau d com dimensão de kodaira zero. Se $\mathcal{F}$ é recoberta pela folheação linear no toro e admite uma curva invariante C tal que $\deg(C) > e_1(\mathcal{F}) + h(F) \cdot (d-1)$ então $\mathcal{F}$ admite uma integral primeira racional.*

prova: Se $\mathcal{G} = \pi^*\mathcal{F}$ é a resolução minimal de $\mathcal{F}$ então a transformada estrita de C por π terá alguma componente irredutível fora do lugar de ramificação do recobrimento de $\mathcal{G}$. Dessa forma $\mathcal{G}$ é recoberta por uma folheação linear no toro que admite uma curva algébrica invariante. Portanto $\mathcal{G}$ é recoberta por uma folheação que admite integral primeira racional e consequentemente $\mathcal{F}$ admite uma integral primeira racional. ∎

3. Integrabilidade de folheações com dimensão de Kodaira 1

Os exemplos genéricos de folheações de dimensão de Kodaira um em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ são as folheações de Riccati. E estas, genericamente, não são integráveis.Em contrapartida mostraremos nesta seção que a presença de curvas invariantes de *grau alto* força a existência de integrais primeiras liouvillianas.

Comecemos nosso estudo vendo como as curvas $E_0(\mathcal{F})$ e $E_1(\mathcal{F})$ comportam-se em dimensão de Kodaira um.

Proposição 19. *Se $\mathcal{F}$ é uma folheação de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ com $\mathrm{kod}(\mathcal{F}) = 1$ então*

a. $e_0(\mathcal{F}) \leq h(\mathcal{F}) \cdot (d(\mathcal{F}) - 1)$,
b. $e_1(\mathcal{F}) + 2e_0(\mathcal{F}) \leq (2h(\mathcal{F}) + 1) \cdot (d(\mathcal{F}) - 1)$.

prova: Seja $\mathcal{G} = \pi^*\mathcal{F}$, $\pi : X \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, a resolução minimal de $\mathcal{F}$. Seja D uma componente irredutível de C_0. Se D admite apenas uma singularidade então, como na prova da proposição 17, qualquer seção de $T^*\mathcal{G}^{\otimes h(\mathcal{F})}$ deve se anular sobre D para qualquer inteiro positivo n.

Quando D admite duas singularidades, digamos p e q, então

$$T^*\mathcal{G}_{|D} \cong T^*D(+p+q) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{C}P(1)} .$$

Portanto se σ_1 e σ_2 são duas seções algebricamente independentes de $T^*\mathcal{G}^{\otimes h(\mathcal{F})}$ então existe uma combinação linear de σ_1 e σ_2 que anula-se em D. Com isso ao considerarmos o pincel $V \subset H^0(X, T^*\mathcal{G}^{\otimes h(\mathcal{F})})$, gerado por σ_1 e σ_2 veremos que D é uma componente da curva extática $\mathcal{E}(\mathcal{G}, V)$. Consequentemente $\pi_*(D)$ deverá ser uma componente de $\mathcal{E}(\mathcal{F}, \pi_* V)$ e o resultado segue do fato de que $\deg(\mathcal{E}(\mathcal{F}, \pi_* V)) = (2h(\mathcal{F}) + 1) \cdot (d(\mathcal{F}) - 1)$. ∎

Teorema 16. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ de grau d com dimensão de Kodaira um. Suponha que $\mathcal{F}$ admite uma curva invariante de grau maior que $(2h(\mathcal{F}) + 1) \cdot (d(\mathcal{F}) - 1)$ então $\mathcal{F}$ tem integral primeira liouvilliana.*

prova: Seja $\mathcal{G} = \pi^*\mathcal{F}$, $\pi : X \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, a resolução minimal de $\mathcal{F}$. Mantendo a notação da prova anterior temos que o pincel $V \subset H^0(X, T^*\mathcal{G}^{\otimes h(\mathcal{F})})$, gerado por σ_1 e σ_2, induz uma fibração em X.

Se $\mathcal{G}$ é tangente a esta fibração, então a função meromorfa $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ é uma integral primeira racional de $\mathcal{G}$ e nada temos a fazer.

Se $\mathcal{G}$ for genericamente transversal a fibração então o lugar de tangência entre $\mathcal{G}$ e a fibração é invariante por $\mathcal{G}$ e coincide com o lugar de zeros de $\mathcal{E}(\mathcal{G}, V)$. Se a curva invariante C é tal que $\mathcal{E}(\mathcal{G}, V)_{|\pi^{-1}(C)} = 0$ então $\mathcal{E}(\mathcal{F}, \pi_* V)_{|C} = 0$. Como o grau de $\mathcal{E}(\mathcal{F}, \pi_* V)$ é exatamente $(2h(\mathcal{F}) + 1) \cdot (d(\mathcal{F}) - 1)$ temos que alguma componente irredutível de $\pi^{-1}(C)$ é transversal a fibração.

Se não temos integral primeira racional restam portanto duas possibilidades. A fibração é elíptica ou racional. Quando a fibração é elíptica o fato de existir uma curva invariante *horizontal* implica na existência de integral primeira racional, veja teorema 4.5(página 71) em [**47**].

Resta portanto o caso em que a fibração é racional, i.e., $\mathcal{G}$ é uma folheação de Riccati. Com isso temos que $\mathcal{G}$ é bimeromorficamente equivalente a uma folheação de Riccati em $\mathbb{C}P(1) \times \mathbb{C}P(1)$. Pelas nossas hipóteses temos uma curva horizontal e portanto $\mathcal{G}$ pode ser integrada por meio de duas quadraturas sucessivas, veja [**34**] páginas 23 e 24. Portanto $\mathcal{G}$, e consequentemente $\mathcal{F}$, admitem integrais primeiras liouvillianas e terminamos a prova do teorema. ∎

4. O problema de Poincaré para folheações de tipo geral

Em [**53**], Poincaré escreve:

> Pour reconnaître si une équation différentielle du premier ordre et du premier degré est intégrable algébriquement il sufit évidemment de

> trouver une limite supériore du degré de l'intégrale; il ne reste plus ensuite qua effectuer des calculs purement algébriques.

Ou seja o problema de determinar se uma folheação $\mathcal{F}$ admite uma integral primeira racional fica reduzido a conseguir uma cota para o grau da folha genérica de $\mathcal{F}$. Para uma versão moderna de alguns dos resultados de Poincaré nessa direção veja [**64**].

Muitos matemáticos abordaram esta questão nos últimos anos, o leitor interessado pode consultar os trabalhos de Cerveau e Lins Neto [**16**], Carnicer [**15**], Soares [**60, 61**], Brunella–Mendes [**8**], Esteves [**26**] e Zamora [**64, 65**] para ter uma idéia destas contribuições .

Recentemente, veja [**37**], Lins Neto construiu famílias de folheações de grau e tipo analítico de singularidades fixados onde folheações com integral primeira racional de grau arbitrariamente alto aparecem. Isso mostra que é impossível limitar o grau da integral primeira apenas em função de informações locais sobre as singularidades.

Vamos mostrar a seguir que para folheações de tipo geral com grau e invariantes bimeromorfos fixados é possível limitar o grau de curvas algébricas invariantes de gênero g. Discutiremos também alguns exemplos que demonstram a optimalidade do resultado.

4.1. Cotas para o grau de integrais primeiras. Vamos tratar primeiramente do caso mais simples onde supomos que a nossa folheação possui integral primeira racional. A diferença essencial com o caso geral é que, após resolução, podemos trabalhar com um curva invariante sem singularidades.

Teorema 17. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de tipo geral em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Suponha que $\mathcal{F}$ admite uma integral primeira racional. Então existe uma cota para o grau da integral primeira dependendo apenas do grau e do plurigênero de $\mathcal{F}$ e do gênero geométrico da folha genérica.*

prova: Seja $\sigma : S \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ a resolução minimal de $\mathcal{F}$. Denote por $\mathcal{G}$ a folheação reduzida $\sigma^*(\mathcal{F})$. Como $\mathcal{F}$ admite uma integral primeira meromorfa e $\mathcal{G}$ é livre de singularidades dicríticas vemos que $\mathcal{G}$ é uma fibração.

Seja C a fibra genérica de $\mathcal{G}$. Como $\mathcal{F}$ é de tipo geral podemos supor que o gênero de C é ao menos 2. O teorema de Riemman-Roch nos diz que

$$h^0(C, {\Omega^1_C}^{\otimes k}) = k(2g-2) - g + 1\,,$$

se k é pelo menos 2. Seja n_0 o menor inteiro não-negativo tal que $P_{n_0}(\mathcal{G}) > n_0(2g - 2) - g + 1$. Pela escolha de n_0, a aplicação de restrição

$$\phi : H^0(S, {K_{\mathcal{G}}}^{\otimes n_0}) \to H^0(C, {\Omega^1_C}^{\otimes n_0})\,,$$

possui núcleo não –trivial. Em outras palavras existe uma seção holomorfa global s_0 de ${K_{\mathcal{F}}}^{\otimes n_0}$ que se anula identicamente em C.

Como σ é um morfismo, para qualquer seção holomorfa s de ${K_{\mathcal{G}}}^{\otimes i}$ temos que $\sigma_* s$ é uma seção holomorfa de $T\mathcal{F}^{*\otimes i}$. Observando que

$$\sigma_*(H^0(S, K_{\mathcal{G}}^{\otimes i})) \subset H^0(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}, T\mathcal{F}^{*\otimes i}) \cong H^0(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}}(i \cdot \mathrm{d}(\mathcal{F}) - i))\,,$$

podemos identificar $\sigma_* s_0$ com um polinômio homogêneo de grau $n_0 \cdot (\mathrm{d}(\mathcal{F})-1)$ em três variáveis. Portanto a folha genérica de $\mathcal{F}$ possui grau menor ou igual a $n_0 \cdot (\mathrm{d}(\mathcal{F})-1)$. ∎

A cota obtida no Teorema acima parece depender em uma infinidade de invariantes de $\mathcal{F}$, $P_m(\mathcal{F})$ para todo inteiro positivo m. Podemos entretanto utilizar a *altura* de $\mathcal{F}$ para substituir o plurigênero como parâmetro para a cota.

Lema 6. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de tipo geral. Se a altura de $\mathcal{F}$ é h então*

$$P_{h \cdot n}(\mathcal{F}) \geq \binom{n+2}{2}.$$

prova: Seja $V \subset H^0(S, K_F^{\otimes h})$ o espaço vetorial gerado pelas três seções algebricamente independentes de $K_F^{\otimes h}$. Se denotarmos essas seções por s_0, s_1 e s_2 e considerarmos o morfismo $\phi : S \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$,

$$\phi(p) = (s_0(p) : s_1(p) : s_2(p)),$$

obtemos que $V = \phi^*(H^0(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}}(1)))$. Portanto

$$\phi^*(H^0(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}}(n))) \subset H^0(S, K_F^{\otimes h \cdot n}),$$

e o lema esá demonstrado. ∎

Corolário 10. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de tipo geral em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Se $\mathcal{F}$ admite uma integral primeira racional então existe uma cota para o grau da integral primeira dependendo apenas do grau e da altura de $\mathcal{F}$ e do gênero geométrico da fibra genérica.*

prova: Segue facilmente do lema 6 e a prova do teorema 17. ∎

4.2. Cotas para o grau de uma curva invariantes. Para podermos estender o teorema 17 para limitar o grau de uma curva invariante C, sem supor a existência de integrais primeiras, devemos controlar a ordem de anulamento de $\mathcal{F}$ ao longo de C.

Seja p uma singularidade reduzida da folheação holomorfa $\mathcal{F}$ e Σ uma separatriz suave local de $\mathcal{F}$ em p. Se, em uma vizinhança de p, $\mathcal{F}$ é gerada pelo campo de vetores holomorfos X então a ordem de anulamento de $\mathcal{F}$ ao longo de Σ em p é dada pelo índice de Poincaré-Hopf de $X_{|\Sigma}$ em p. Usaremos a notação $Z(\mathcal{F}, \Sigma, p)$ [4] Em termos mais concretos, como Σ é suave em p, podemos escrever em um sistema de coordenadas conveniente

$$X_{|\Sigma} = \left(z^k + \text{h.o.t.}\right) \frac{\partial}{\partial z},$$

e nesse caso $Z(\mathcal{F}, \Sigma, p)$ é k.

Lema 7. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa reduzida em uma superfície complexa S e C uma curva algébrica invariante lisa. Então*

[4] Observe este índice aparece em uma forma mais geral no o capítulo 3.

1. $(K_{\mathcal{F}})_{|C} = \Omega^1_C \otimes \mathcal{O}_C\left(\sum_{p\in C} Z(\mathcal{F},C,p)\cdot p\right)$;
2. $h^0(C,(K_{\mathcal{F}})^{\otimes m}_{|C}) \leq h^0(C,{\Omega^1_C}^{\otimes m}) + m\cdot Z(\mathcal{F},C)$.

prova: Para provar o item 1 considere uma cobertura $\{U_i\}$ de S por abertos de Stein. Sobre cada U_i da cobertura tome um campo de vetores holomorfo X_i gerando $T\mathcal{F}$. Suponha que temos no máximo uma singularidade de $\mathcal{F}$ sobre cada U_i. Se a restrição de X_i a C não admite nenhuma singularidade podemos interpretar $X_{i|C}$ como um gerador local de TC, i.e., temos um isomorfismo canônico entre $(K_{\mathcal{F}})_{|C\cap U_i}$ e $TC_{|U_i}$. Quando existe $p\in C$ tal que $X_i(p)=0$ então a restrição de X_i a C define uma seção de TC anulando-se em p com ordem $Z(\mathcal{F},C,p)$,i.e., temos um isomorfismo canônico entre $(K_{\mathcal{F}})_{|C\cap U_i}$ e $TC_{|U_i}\otimes\mathcal{O}_{U_i}(-Z(\mathcal{F},C,p))$.

Colando esse isomorfismos canônicos locais obtemos

$$(T\mathcal{F})_{|C} = TC\otimes\mathcal{O}_C\left(\sum_{p\in C} -Z(\mathcal{F},C,p)\cdot p\right) ,$$

e o item 1 segue após tomar o dual.

Item 2 segue do item 1 combinado com a sequência longa em cohomologia associada a

$$0\to {\Omega^1_C}^{\otimes m} \to {\Omega^1_C}^{\otimes m}\otimes\mathcal{O}_C(mD)\to\mathcal{O}_{mD}\to 0\,,$$

onde $D=\sum_{p\in C} Z(\mathcal{F},C,p)\cdot p$. ∎

Se $\mathcal{F}$ é uma folheação holomorfa em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ diremos que $\mathcal{G}$ é a *resolução segura* de $\mathcal{F}$, se $\mathcal{G}$ é obtida tomando a resolução minimal de $\mathcal{F}$ e em seguida explodindo cada singularidade uma vez. Portanto se $\mathcal{G}$ é uma resolução segura de $\mathcal{F}$ então toda curva irredutível C invariante por $\mathcal{G}$ é lisa.

O próximo lema mostra que a ordem de anulamento ao longo de uma curva álgebrica invariante, após resolução, depende apenas do grau da folheação.

Lema 8. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ e C uma curva algébrica invariante. Seja $\mathcal{G}$ a resolução segura de $\mathcal{F}$ e $\overline{C}$ a transformada estrita de C. Então existe uma cota para $Z(\mathcal{G},\overline{C})$ dependendo apenas de $\mathrm{d}(\mathcal{F})$.*

prova: Vamos dizer que uma singularidade é *quase reduzida* se o seu número de Milnor é 1 ou se a singularidade é uma sela-nó reduzida. Primeiramente suponha que toda singularidade de $\mathcal{F}$ é quase reduzida.

Se p é uma singularidade reduzida então temos no máximo dois ramos de C passando por p. Após explodirmos p a contribuição das singularidades infinitamente próximas de p para $Z(\mathcal{G},\overline{C})$ será no máximo dois. Quando temos uma singularidade do tipo Poincaré-Dulac a situação é mais simples e a contribuição é no máximo um.

Quando p é uma singularidade dicrítica podemos ter uma infinidade de ramos de C passando por p. Entretanto, após resolver p temos no máximo duas singularidades no transformado estrito de C que estão sobre p. Novamente, a contribuição das singularidades infinitamente próximas de p para $Z(\mathcal{G},\overline{C})$ é no máximo dois.

Se p é uma sela–nó reduzida então a separatriz forte irá contribuir com um para $Z(\mathcal{G},\overline{C})$ e a separatriz fraca , se existir, com no máximo $\mathrm{d}(\mathcal{F})+1$.

Como o número de singularidades de $\mathcal{F}$ é limitado por d^2+d+1, onde $d=\mathrm{d}(\mathcal{F})$, a existência de uma cota para $Z(\mathcal{G},\overline{C})$ no caso em que todas as singularidades são quase reduzidas está garantida.

Para mostrar o caso geral basta observar dois fatos. O primeiro fato é que existe um inteiro positivo k, dependendo do grau de $\mathcal{F}$, tal que com k blow-ups podemos sempre obter uma folheação com todas as singularidades quase reduzidas. O segundo fato é que a separatriz fraca de uma sela-nó reduzida que aparece depois de no máximo k explosões terá contribuição limitada para $Z(\mathcal{G},\overline{C})$. ∎

Teorema 18. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de tipo geral em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Suponha que $\mathcal{F}$ admite uma curva algébrica invariante C. Então existe uma cota para o grau de C dependendo apenas do grau e do plurigênero de $\mathcal{F}$ e do gênero geométrico de C.*

prova: A prova é completamente análoga a prova do Teorema 17. A única diferença é que usamos o lema 7 e o lema 14 para garantir a existência de um inteiro positivo n_0 tal que

$$P_{n_0}(\mathcal{F}) > h^0(C, K_{\mathcal{F}|C}{}^{\otimes n_0})\,.$$

∎

Novamente podemos substituir o plurigênero de $\mathcal{F}$ pela altura de $\mathcal{F}$ e obter o seguinte corolário.

Corolário 11. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de tipo geral em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Se $\mathcal{F}$ admite uma curva algébrica invariante C então existe uma cota para o grau de C dependendo apenas do grau e da altura de $\mathcal{F}$ e do gênero geométrico de C.*

4.3. Alguns exemplos.

Exemplo 11. Seja $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Q}}$ a família de folheações holomorfas em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ definidas, em uma carta afim, por

$$X_\alpha = x\frac{\partial}{\partial x} + \alpha y\frac{\partial}{\partial y}\,.$$

Escreva α como p/q. Se α é positivo temos uma integral primeira de grau $\max(p,q)$, caso contrário a integral primeira tem grau $|p|+|q|$. Como a resolução dessas folheações são folheações racionais temos que, $\mathrm{kod}(\mathcal{F}_\alpha)=-\infty$. □

Exemplo 12. Seja $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{C}}$ a família de folheações holomorfas em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ definidas por

$$X_\alpha = (x^3-1)(x-\alpha y^2)\frac{\partial}{\partial x} + (y^3-1)(y-\alpha x^2)\frac{\partial}{\partial y}\,.$$

Essas folheações , construídas por Lins Neto em [**37**], são folheações de grau 4 em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ com singularidades de tipo analítico local fixo e com integrais primeiras de grau arbitrariamente alto. Lins Neto também mostrou que sempre que temos integral primeira nesta família então a folha genérica tem gênero 1. McQuillan, veja [**42**] ou [**5**], mostrou que o exemplo de Lins Neto a menos de um recobrimento ramificado de três folhas e transformações birracionais é equivalente a campos de vetores globais em um toro complexo de dimensão 2 e, em particular, que a dimensão de Kodaira de cada exemplo específico é zero. □

Exemplo 13. A equação hipergeométrica de Gauss

$$z(1-z)w'' + (c - (a+b+1)z)\, w' - abw = 0\,, \tag{23}$$

sempre que $c \notin \mathbb{Z}_-$, admite como solução geral em uma vizinhança da origem a função (veja [**32**])

$$\phi(z) = C_1 F(a,b,c;z) + C_2 z^{1-c} F(a-c+1, b-c+1, 2-c; z)\,, \tag{24}$$

onde C_1, C_2 são constantes arbitrárias a serem determinadas pelas condições iniciais e

$$F(a,b,c;z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n\,(b)_n}{(c)_n} z^n\,.$$

Aqui, $(p)_n$ denota $p(p+1)(p+2)\cdots(p+n-1)$.

A clássica mudança de variáveis $y(z) = -d\log w(z)$, veja [**32**] p. 104, associa uma folheação de Riccati a qualquer equação diferencial linear de segunda ordem. Nesse novo sistema de coordenadas a folheação induzida pela equação hipergeométrica de Gauss pode ser escrita como

$$\omega = z(1-z)\,dy - \big(z(1-z)y^2 + (c-(a+b+1)z)\,y + ab\big)\;dz\,. \tag{25}$$

Se $c \notin \mathbb{Q}$, $a = 1-k$, $k \in \mathbb{N}$, e b é arbitrário então a folheação induzida por (25) não admite uma integral primeira racional e possui uma curva racional invariante de grau $k+1$ definida pelo polinômio

$$y \cdot F(1-k,b,c;x) - F'(1-k,b,c;x)\,.$$

Como essas folheações possuem dimensão de Kodaira um, é impossível limitar o grau de curvas racionais, i.e., gênero geométrico zero, para esta classe de folheações . □

Fazendo pull backs da família de folheações apresentada no exemplo 12 Lins Neto constrói famílias de folheações de tipo geral em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, novamente com singularidades com tipo analítico local fixo e integrais primeiras de grau arbitrariamente alto(assim como o gênero da folha genérica).

Exemplo 14. Seja $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{C}}$ a família de folheações do exemplo 12. Fazendo o pull-back desta família pelo morfismo $F(X,Y,Z) = (X^r, Y^r, Z^r)$ obtemos uma família de folheações $(G_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{C}}$ tal que existe um conjunto denso e enumerável de parâmetros $E \subset \mathbb{C}$, tal que para qualquer $\alpha \in E$ a folheação $\mathcal{F}_\alpha$ possui uma integral primeira racional de grau d_α, satisfazendo a propriedade de que para qualquer $k > 0$ os conjuntos $\{\alpha \in E | d_\alpha \leq k\}$ e $\{\alpha \in E|$ o gênero geométrico da folha genérica é no máximo $k\}$ são finitos.

□

CAPíTULO 5

Grupos de Transformações

Começamos investigando o grupo de transformações de folheações sob o ponto de vista da teoria birracional. Nessa direção provamos que o grupo de bimeromorfismos de uma folheação de tipo geral é finito. A seguir abordamos a inter-relação de automorfismos e não-integrabilidade. Nesse contexto provamos, sob certas hipóteses sobre as singularidades, que uma folheação em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ com grupo de automorfismos rico não possui curvas algébricas invariantes. Obtemos assim uma nova prova do Teorema de Jouanolou. Encerramos mostrando que o Teorema de Jouanolou não vale em característica positiva. Mais precisamente provamos que um campo de vetores em um espaço afim admite uma hipersuperfície algébrica invariante desde que possua divergente não nulo.

O estudo do grupo de transformações de equações diferencias, leia folheações, tem sua origem nos trabalhos de Sophus Lie. A abordagem de Lie para a integrabilidade de equações diferenciais é baseado em propriedades do grupo de transformações infinitesimais dessas equações. A grosso modo a filosofia de Lie é que se temos um grupo contínuo de transformações a 1–parâmetro podemos utilizar estas simetrias para construir fatores de integração e consequentemente integrais primeiras para a equação em questão.

Neste capítulo estudaremos os grupos de transformações globais de uma folheação holomorfa. Naturalmente a relação com a integrabilidade persiste pois passamos do geral ao particular. De qualquer forma reformulamos esses bem conhecidos resultados de integrabilidade em termos globais. Prestamos especial atenção as interpetrações geométricas tendo em vista o estudo do grupo de automorfismos de uma folheação sob o ponto de vista birracional.

Nesse sentido provamos[1] que o grupo de bimeromorfismos de uma folheação de tipo geral é finito. Pode-se interpretar este resultado como um análogo folheado do Teorema de Andreotti que diz que o grupo de bimeromorfismos de uma variedade algébrica de tipo geral é finito, ver [**1**].

Investigamos ainda folheações holomorfas no plano projetivo com grupo de automorfismos finito. Estes induzem uma ação no espaço de cofatores da folheações . Quando esta ação não possui pontos fixos provamos que a folheação, sob hipóteses adicionais nas singularidades, não admite curvas algébricas invariantes. Obtemos assim uma nova prova da genericidade de folheações de grau $d \geq 2$ no plano projetivo sem curva algébrica invariante.

[1] Este resultado é parte de um trabalho em coautoria com Percy Sanchez, veja [**51**].

Contrastando com a situação em característica zero mostramos, em uma última seção, que um campo de vetores em característica positiva genericamente admite uma hipersuperfície invariante.

1. Grupos de Automorfismos

1.1. Propriedades Básicas.

Definição 17. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa em uma variedade complexa M. O *grupo automorfismos de* $\mathcal{F}$, $\mathrm{Aut}(\mathcal{F})$, é o subgrupo maximal de $\mathrm{Aut}(M)$ entre aqueles que preservam $\mathcal{F}$. O *grupo de bimeromorfismos de* $\mathcal{F}$, $\mathrm{Bim}(\mathcal{F})$, é o subgrupo maximal de $\mathrm{Bim}(M)$ entre aqueles que preservam $\mathcal{F}$.

Na definição acima $\mathrm{Aut}(M)$ denota o grupo de biholomorfismos e $\mathrm{Bim}(M)$ denota o grupo de bimeromorfismos de uma variedade complexa M. Um bem conhecido resultado, devido a Bochner e Montgomery (veja [**36**] page 76), diz que se M é uma variedade complexa compacta então $\mathrm{Aut}(M)$ é um grupo de Lie complexo é a sua álgebra de Lie consiste nos campos de vetores holomorfos globais em M.

Proposição 20. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de codimensão p na variedade complexa compacta M. Então $\mathrm{Aut}(\mathcal{F})$ é um subgrupo de Lie fechado de $\mathrm{Aut}(M)$.*

prova: Tome qualquer p–forma meromorfa ω definindo $\mathcal{F}$. Como

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{F}) = \{g \in \mathrm{Aut}(M) | g^*\omega \wedge \omega = 0\}$$

segue a proposição. ∎

Observe que, em geral, não podemos concluir da proposição 20 que $\mathrm{Aut}(\mathcal{F})$ possui um número finito de componentes conexas, mesmo quando a variedade é projetiva. Isso é devido ao fato que o grupo de automorfismos de uma variedade projetiva pode possuir uma infinidade de componentes conexas.

Considere o toro complexo $T = \frac{\mathbb{C}}{\mathbb{Z}[i]} \times \frac{\mathbb{C}}{\mathbb{Z}[i]}$. Os elementos do grupo $PSL(2, \mathbb{Z}[i])$ agem naturalmente em $\mathbb{C}^2$ preservando o reticulado $\mathbb{Z}[i]^2$. Se identificamos $\mathbb{C}^2$ com $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{Z}[i]^2$ com $\mathbb{Z}^4$ vemos que se $\phi \in PSL(2, \mathbb{Z}[i])$ então a ação natural induzida por ϕ em $\mathbb{Z}^4$ é exatamente a ação do automorfismo induzido por ϕ em $H^2(T, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^4$, o segundo grupo de homologia singular de T. Portanto dois elementos distintos de $PSL(2, \mathbb{Z}[i])$ estão necessariamente em componentes conexas distintas de $\mathrm{Aut}(T)$. Este fato segue facilmente das observações acima bastando observar que elementos na mesma componente conexa são isotópicos e portanto geram a mesma ação na homologia.

1.2. Automorfismos e Integrabilidade.

Proposição 21. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de codimensão um em uma variedade complexa compacta M. Se X é um campo de vetores holomorfo pertencente a álgebra de Lie de $\mathrm{Aut}(\mathcal{F})$ e genericamente transversal a $\mathcal{F}$, então o lugar de tangência entre $\mathcal{F}$ e X é invariante tanto por X quanto por $\mathcal{F}$.*

prova. Seja $M = \cup U_i$ uma cobertura aberta e suponha que $\mathcal{F}$ é definida localmente por $\mathcal{F}_{|U_i} : \omega_i = 0$. Aqui as 1-formas ω_i satisfazem a relação $\omega_i = f_{ij}\omega_j$, onde $f_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j)$. Como X está na álgebra de Lie de $\mathrm{Aut}(\mathcal{F})$,

$$L_X(\omega_i) \wedge \omega_i = 0\,,$$

onde $L_X := di_X + i_X d$ é a *derivada de Lie* com respeito a X. Portanto

$$d\omega_i(X) \wedge \omega_i + \iota_X(d\omega_i) \wedge \omega_i = 0\,.$$

Pela integrabilidade de ω_i obtemos

$$\omega_i(X)d\omega_i + (\iota_X d\omega_i) \wedge \omega_i = 0\,.$$

Da última igualdade segue que

$$\omega_i \wedge d\omega_i(X) = \omega_i(X)d\omega_i\,, \tag{26}$$

e consequentemente $\omega_i(X)$ é invariante por ω_i. Isto é suficiente para assegurar que o lugar de tangência entre $\mathcal{F}$ e X é invariante por $\mathcal{F}$. ∎

Corolário 12. *Se $\mathcal{F}$ é uma folheação em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ com grupo de automorfismo infinito então $\mathcal{F}$ é dada por uma forma meromorfa fechada e em particular admite uma integral primeira liouvilliana.*

prova: Como o grupo de automorfismos de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ é algébrico linear temos que qualquer subgrupo fechado possui um número finito de componentes conexas. Portanto se o grupo de automorfismos de $\mathcal{F}$ é infinito temos que existe um campo de vetores X em sua álgebra de Lie. Se X é tangente a folheação então a folheação é gerada por um campo holomorfo global e, como vimos no capítulo anterior, existe uma forma meromorfa fechada que define $\mathcal{F}$.

Quando X é genericamente transversal a $\mathcal{F}$ pode-se deduzir da fórmula (26) que $\mathcal{F}$ é definida por uma 1-forma meromorfa fechada definida. De fato, na notação da proposição 21,

$$\frac{\omega_i}{\omega_i(X)} = \frac{\omega_j}{\omega_j(X)}$$

sempre que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ e

$$d\left(\frac{\omega_i}{\omega_i(X)}\right) = \frac{\omega_i \wedge d\omega_i(X) - \omega_i(X)d\omega_i}{\omega_i(X)^2} = 0\,.$$

∎

Em dimensão superior não temos o mesmo resultado pois todos os elementos da álgebra de Lie de $\mathrm{Aut}(\mathcal{F})$ podem ser tangentes a folheação e não termos integrabilidade. Para construir um exemplo basta tomar uma folheação não integrável em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ e considerar o produto de suas folhas com $\mathbb{C}^{n-2}$. Obtemos assim uma folheação em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}^{n-2}$ que estende-se a uma folheação de codimensão 1 em $\mathbb{C}P(n)$ com álgebra de Lie não trivial e sem integral primeira liouvilliana. Entretanto, com hipóteses mais restritivas, temos o seguinte resultado em dimensões superiores.

Corolário 13. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de codimensão um $\mathbb{C}P(n)$. Se existe um campo de vetores holomorfo X pertencente a álgebra de Lie de $\mathrm{Aut}(\mathcal{F})$ e genericamente transversal a $\mathcal{F}$, então $\mathcal{F}$ é dada por uma forma meromorfa fechada e consequentemente admite uma integral primeira liouvilliana.*

2. Bimeromorfismos de folheações de tipo de geral

Mostraremos nesta seção que o grupo de bimeromorfismos de uma folheação de tipo de geral é finito. Observamos que este resultado pode ser visto como uma versão folheada para o teorema de Andreotti[2]: uma variedade algébrica de tipo geral possui grupo de bimeromorfismos finito. A prova utiliza algumas idéias presentes na prova de Matsumura, ver [**41**], do teorema de Andreotti. Será essencial para a prova o teorema 19 que classifica as folheações com grupo de automorfismos algébrico linear infinito.

2.1. Redução ao caso algébrico linear. Quando $\mathcal{F}$ é uma folheação reduzida de tipo geral em uma superfície M temos que para m suficientemente grande a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \phi_m : M & \to & \mathbb{C}P(k) \\ p & \mapsto & (s_0(p) : \cdots : s_k(p)) \end{array}$$

é um bimeromorfismo entre M e o fecho da imagem de ϕ_m, veja [**63**] página 57. Aqui os s_i são seções de $K_{\mathcal{F}}{}^{\otimes m}$ e $k = h^0(M, K_{\mathcal{G}}{}^{\otimes m}) - 1$. A aplicação ϕ_m será chama de *m–ésima aplicação pluricanônicade $\mathcal{F}$.*

Proposição 22. *Se $\mathcal{F}$ é uma folheação holomorfa de tipo geral na superfície complexa compacta M então $\mathrm{Bim}(\mathcal{F})$ é isomorfo a um grupo algébrico linear.*

prova: Pelo corolário 8 podemos supor que $\mathcal{F}$ é uma folheação minimal e nesse caso $\mathrm{Bim}(\mathcal{F}) \cong \mathrm{Aut}(\mathcal{F})$. Portanto, para m suficientemente grande , a m-ésima aplicação pluricanônica ϕ_m é um bimeromorfismo entre M e o fecho de sua imagem, que denotaremos por N.

Observe que $\mathrm{Aut}(\mathcal{F})$ age naturalmente na projetivização de $H^0(M, K_{\mathcal{F}}^{\otimes m})$. Se σ é uma seção de $K_{\mathcal{F}}^{\otimes m}$ e α é um automorfismo de $\mathcal{F}$ então a ação é dada por $\alpha(\sigma) = \alpha^*\sigma$.

Como ϕ_m é um bimeromorfismo entre M e N, a ação acima induz um monomorfismo de grupos

$$\psi : \mathrm{Aut}(\mathcal{F}) \to PSL(k, \mathbb{C}),$$

onde $k = \dim_{\mathbb{C}} H^0(M, K_{\mathcal{F}}^{\otimes m})$.

Observando que a imagem de ψ são precisamente os automorfismos de $\mathbb{C}P(k)$ que preservam N e $\mathcal{G}$, vemos que $\mathrm{Bim}(\mathcal{F})$, que é isomorfo a $\mathrm{Aut}(\mathcal{F})$, é um subgrupo fechado de $PSL(k, \mathbb{C})$. ∎

[2]Veja [**1**].

2.2. Folheações com grupo de automorfismos infinito. Descrevemos a seguir a estrutura das folheações cujo grupo de automorfismos é algébrico linear e infinito. No que segue precisaremos do resultado abaixo apenas no caso particular de dimensão 2, e consequentemente codimensão 1. Entretanto provamos a seguir uma versão mais geral que possui interesse independente.

Teorema 19. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de codimensão q na variedade projetiva M^m. Suponha que $\mathrm{Aut}(\mathcal{F})$ contém um subgrupo algébrico linear infinito. Então $\mathcal{F}$ pertence a uma das seguintes classes de folheações :*

1. *$\mathcal{F}$ é birracionalmente equivalentes a uma folheação de Riccati;*
2. *$\mathcal{F}$ é o pull-back de uma folheação holomorfa em uma variedade projetiva N^{m-1};*
3. *$\mathcal{F}$ é tangente a uma folheação holomorfa $\mathcal{G}$ de codimensão $q-1$.*

prova. Seja $G \subset \mathrm{Aut}(\mathcal{F})$ um grupo algébrico linear infinito. Como é infinito possui álgebra de Lie não -trivial. Tome um elemento X da álgebra de Lie de G. Se denotarmos por G_X o subgrupo a 1–parâmetro de $\mathrm{Aut}(\mathcal{F})$ gerado pela exponencial de X, então o fecho de Zariski $\overline{G}_X$ será um subgrupo comutativo fechado de $G \subset \mathrm{Aut}(\mathcal{F})$. Como $\overline{G}_X$ é comutativo pode-se encontrar um subgrupo a 1-parâmetro fechado H. Denotemos por Y um elemento da álgebra de Lie de $\mathrm{Aut}(\mathcal{F})$ que gera H.

O Teorema 10 de [**55**] diz que M/H é uma variedade quasiprojetiva de dimensão $m-1$ e que M é birracionalmente equivalente a $M/H \times \mathbb{C}P(1)$. Portanto o morfismo

$$\pi : M \to \frac{M}{H}\,,$$

induz uma folheação por curvas em M, tangente a Y, tal que o fecho de toda folha é uma curva racional. Como o conjunto de indeterminações de π está contido nas singularidades de Y, após a resolução obtemos uma variedade projetiva munida de uma campo de vetores holomorfos global que é tangente a fibração por curvas racionais induzida pela resolução de π. Podemos então supor sem perda de generalidade que π é uma fibração.

Suponha que a fibra genérica de π está contida em uma folha de $\mathcal{F}$. Seja $\sigma : \frac{M}{H} \to M$ uma seção de π. Defina $\mathcal{G}$ como o pull–back de $\mathcal{F}$ por σ, i.e., $\mathcal{G} \cong \sigma^*(\mathcal{F})$. Portanto $\mathcal{F} \cong \pi^*(\mathcal{G}) \cong \pi^*(\sigma^*(\mathcal{F}))$ e $\mathcal{F}$ está no caso do enunciado.

Se a fibra genérica de π não está contida em uma folha de $\mathcal{F}$ e a codimensão de $\mathcal{F}$ é ao menos 2 então para todo $p \in M$ ponto regular de $\mathcal{F}$, existe uma vizinhança de p onde $\mathcal{F}$ é gerada por um sistema de $(m-q)$ campos de vetores involutivos, denotados por $X_1, X_2, \ldots, X_{m-q}$. Considere portanto o sistema de $(m-(q-1))$ campos vetores, $X_1, \ldots, X_{m-q}, Y$. Como Y preserva as folhas de $\mathcal{F}$, veja figura, temos que

$$[X_i, Y] = \sum_{i=1}^{m-q} \lambda_i \cdot X_i\,,$$

para aλ_i funções holomorfas. Como o sistema é involutivo ele define uma folheação holomorfa $\mathcal{G}$ de codimensão $q-1$ que contém $\mathcal{F}$. Portanto $\mathcal{F}$ está no caso 3 do enunciado.

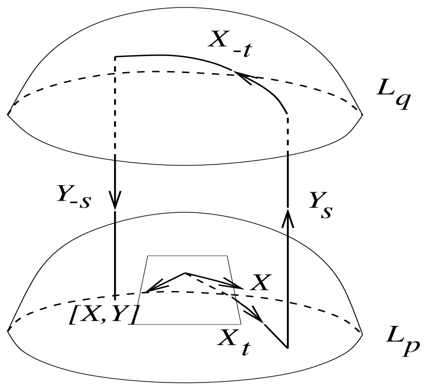

FIGURA 1. O colchete de Lie entre X_i e Y.

Quando a fibra genérica de π é transversal a $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ com codimensão um, pela proposição 21 o lugar de tangências entre $\mathcal{F}$ e π é formado por fibras de π e é invariante por $\mathcal{F}$. Em resumo $\mathcal{F}$ é uma folheação de Riccati com respeito a π e está no caso 1 do enunciado. ∎

2.3. Finitude do grupo de bimeromorfismos. Agora já temos todos os ingredientes necessários para a prova do teorema sobre a finitude do grupo de bimeromorfismos para folheações de tipo geral.

Teorema 20. *Se $\mathcal{F}$ é uma folheação holomorfa de tipo geral em uma superfície complexa M então* $\mathrm{Bim}(\mathcal{F})$ *é finito.*

prova: Como já observamos podemos supor que $\mathcal{F}$ é uma folheação minimal e pela proposição 22 obtemos que $\mathrm{Bim}(\mathcal{F}) \cong \mathrm{Aut}(\mathcal{F})$ é um grupo algébrico linear.

Suponha que $\mathrm{Aut}(\mathcal{F})$ é infinito. Pelo Teorema 19 temos que $\mathcal{G}$ é uma folheação de Riccati ou uma fibração por curvas racionais. Finalmente pelo Teorema 12 obtemos que $kod(\mathcal{F}) < 2$. Portanto se $\mathcal{F}$ é de tipo geral seu grupo de bimeromorfismos é finito. ∎

3. Automorfismos e (não)-integrabilidade

Vimos na seção anterior que uma folheação em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ com grupo de automorfismos infinito sempre admite uma integral primeira liouvilliana. Investigaremos agora relações entre automorfismos e integrabilidade quando o grupo de automorfismos é finito. O conceito central é uma ação do grupo de automorfismos de uma folheação no espaço de cofatores. Provaremos que as folheações cuja ação no espaço de cofatores é livre de pontos fixos não triviais, sob hipóteses suaves em uma das singularidades, não possuem curva algébrica invariante. Um exemplo de folheação que satisfaz as hipóteses do teorema é folheação de Jouanolou.

O resultado obtido nessa seção foi fortemente motivado por idéias apresentadas em [**40**].

3.1. Uma ação no espaço de cofatores. Se $\mathcal{F}$ é uma folheação em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ podemos descreve-la por uma 1-forma homogênea em $\mathbb{C}^3$, ω, que satisfaça a condição

$$i_R\omega = 0 \quad \text{onde } R = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\,.$$

Se ϕ for um automorfismo de $\mathcal{F}$ então existe um número complexo não -nulo $\lambda(\phi)$ tal que para qualquer aplicação linear $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ representando ϕ temos

$$T^*\omega = \lambda(\phi) \cdot \omega\,.$$

Verifica-se facilmente que

$$\begin{array}{rcl} \lambda : \mathrm{Aut}(\mathcal{F}) & \to & \mathbb{C}^* \\ \phi & \mapsto & \lambda(\phi)\,, \end{array}$$

é um homomorfismo de grupos.

Se $F \in \mathbb{C}[x,y,z]$ é um polinômio homogêneo descrevendo uma curva algébrica invariante por $\mathcal{F}$ então

$$dF \wedge \omega = F\theta_F\,,$$

onde

$$\theta_F = \frac{\deg(F)}{d+q} \cdot dw + i_R\beta_F\,,$$

para alguma 3-forma homogênea β_F. Dessa forma verifica-se facilmente que se ϕ é um automorfismo de $\mathcal{F}$ então

$$\beta_{\phi * F} = \frac{\phi^*\beta_F}{\lambda(\phi)}\,.$$

Se $\mathcal{F}$ é uma folheação de grau d então β_F tem grau $d-1$. Denominaremos o espaço de 3-formas em $\mathbb{C}^3$ de grau $d+2$ como o *espaço de cofatores* de $\mathcal{F}$ e o denotaremos por $\mathcal{C}(\mathcal{F})$.

Seja $\Phi_{\mathcal{F}} : \mathrm{Aut}(\mathcal{F}) \times \mathcal{C}(\mathcal{F}) \to \mathcal{C}(\mathcal{F})$ a ação definida por

$$\Phi_{\mathcal{F}}(\phi, \beta) = \frac{\phi^*\beta}{\lambda(\phi)}\,.$$

Exemplo 15. Se J_d é a folheação de Jouanolou de grau $d \geq 2$, i.e., J_d é a folheação gerada por X_d,

$$X_d = z^d\frac{\partial}{\partial x} + x^d\frac{\partial}{\partial y} + y^d\frac{\partial}{\partial z}\,,$$

ou pela 1-forma $\omega_d = i_R i_{X_d} dx \wedge dy \wedge dz$. Jouanolou mostrou em [**35**] que o grupo de automorfismos de J_d é gerado por γ e μ_d onde

$$\begin{array}{rcl} \gamma(x,y,z) & = & (y,z,x) \\ \mu_d(x,y,z) & = & (\delta x, \delta^d y, \delta^{d^2})\,, \end{array}$$

onde δ uma (d^2+d+1)-ésima raiz primitiva da unidade. Como $\gamma^* X_d = X_d$ e

$$\mu_d^* X_d = (\delta^{d^2} z)^d \delta^{-1}\frac{\partial}{\partial x} + (\delta x)^d \cdot \delta^{-d}\frac{\partial}{\partial y} + (\delta^d y)^d \cdot \delta^{-d^2}\frac{\partial}{\partial z} = X_d\,,$$

então $\gamma^*\omega_d = \mu_d^*\omega_d = \omega_d$. Se $\alpha \in \mathcal{C}(J_d)$ então $\alpha = f_\alpha dx \wedge dy \wedge dz$ onde f_α é um polinômio homogêneo de grau $d-1$. Como

$$\gamma^*(dx \wedge dy \wedge dz) = \mu_d^*(dx \wedge dy \wedge dz) = dx \wedge dy \wedge dz$$

temos que a ação induzida por $\mathrm{Aut}(J_d)$ no espaço de cofatores de J_d identifica-se com a ação induzida pelo subgrupo de $GL(3,\mathbb{C})$ gerado por γ e μ_d no espaço de polinômios homogêneos de grau $d-1$. Pode-se demonstrar que sempre que $d \neq 1 \bmod 3$ esta ação possui um único ponto fixo, o polinômio identicamente nulo.

3.2. Ações sem ponto fixo, folheações sem curva algébrica invariante.

Proposição 23. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Se o único ponto fixo de $\Phi_{\mathcal{F}}$ é $0 \in \mathcal{C}(\mathcal{F})$ então ou $\mathcal{F}$ admite integral primeira liouvilliana ou $\mathcal{F}$ não admite curva algébrica invariante.*

prova: Suponha que $\mathcal{F}$ admite uma curva algébrica invariante C dada pelo polinômio homogêneo F. Se considerarmos o polinômio homogêneo

$$G = \prod_{\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathcal{F})} \sigma^* F \,,$$

vemos que G também é invariante por $\mathcal{F}$ e, pela definição, é invariante por $\mathrm{Aut}(\mathcal{F})$. Consequentemente o cofator associado a G é um ponto fixo pela ação $\Phi_{\mathcal{F}}$ e portanto igual a zero. Vale então que

$$d\omega = \frac{d+q}{\deg(G)} \cdot \frac{dG}{G} \wedge \omega \,,$$

e $\mathcal{F}$ admite uma integral primeira liouvilliana pelo teorema 6. ∎

Impondo hipotéses em uma das singularidades da folheação podemos obter uma versão mais forte da proposição acima. Entretanto, não sabemos se as hipóteses são de fato necessárias.

Teorema 21. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ com ao menos uma singularidade reduzida com quociente de auto–valores λ tal que λ é irracional e λ não é uma raiz da unidade. Se o único ponto fixo de $\Phi_{\mathcal{F}}$ for $0 \in \mathcal{C}(\mathcal{F})$ então $\mathcal{F}$ não admite curva algébrica invariante.*

prova: Seja p a singularidade reduzida cujo quociente de autovalores não pertence aos racionais. Se $\mathcal{F}$ admite uma curva invariante C podemos supor, sem perda de generalidade, que C é reduzida e invariante por $\mathrm{Aut}(\mathcal{F})$. Como não temos ponto fixo não trivial para $\Phi_{\mathcal{F}}$ temos que

$$d\omega = \frac{d+q}{\deg(F)} \cdot \frac{dF}{F} \wedge \omega \,, \tag{27}$$

onde F é um polinômio homogêneo reduzido definindo C.

Pelo lema 5 temos que $p \in C$. Como p é reduzida podemos escolher coordenadas locais (x,y) onde $p=(0,0)$ e $\mathcal{F}$ é gerada por

$$\omega = \lambda x dy - y dx + \text{h.o.t.}\,. \tag{28}$$

Suponha que C é lisa e dada por $\{x = 0\}$ ou $\{y = 0\}$. Comparando (27) e (28) obtemos em ambos os casos, que λ é racional. Como, por hipótese, $\lambda \notin \mathbb{Q}$ vemos que C deve possuir dois ramos passando por p. Como

$$\frac{d(xy)}{xy} \wedge \omega = (\lambda + 1)dx \wedge dy + h.o.t = d\omega$$

temos que xy é um fator de integração para ω, i.e., $d\frac{\omega}{xy} = 0$.

Ou seja a folheação é dada por uma forma meromorfa fechada com pólos simples $\frac{\omega}{F}$. Segue do teorema 2.1(página 37) de [**17**] que $\mathcal{F}$ é dada por uma forma meromorfa fechada da forma

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot \frac{dF_i}{F_i},$$

onde F_i são os fatores irredutíveis de F, i.e., $F = F_1 \cdot F_2 \cdots F_k$. Escrevendo a forma fechada acima em coordenadas locais (x, y) vemos que x e y devem dividir localmente polinômios F_i distintos, digamos que x divide F_1 e y divide F_2, e nesse caso vale que

$$0 = \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot \frac{dF_i}{F_i}\right) \wedge \omega = (\lambda \cdot \alpha_1 + \alpha_2)dx \wedge dy + \text{h.o.t}\ .$$

Consequentemente temos que $\lambda = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que existe $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{F})$ tal que $\phi^* \frac{dF_1}{F_1} = \frac{dF_2}{F_2}$. Aplicando ϕ a $\frac{\omega}{F}$ vemos que existe uma raiz da unidade β tal que

$$\phi^* \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot \frac{dF_i}{F_i}\right) = \beta \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot \frac{dF_i}{F_i}\right).$$

Comparando os coeficientes de $\frac{dF_2}{F_2}$ em ambos os lados da equação concluímos que $\alpha_1 = \beta \cdot \alpha_2$ e portanto $\lambda = -\beta^{-1}$ contrariando a nossa hipótese. Só nos resta concluir que $\mathcal{F}$ não admite nenhuma curva algébrica invariante. ∎

Como corolário do teorema obtemos uma nova prova da inexistência de curvas algébricas invariantes pelas folheações de Jouanolou J_d, $d \geq 2$, $d \neq 1 \text{mod} 3$, tratadas no exemplo 15.

Corolário 14. *Para $d \geq 2$ e $d \neq 1 \bmod 3$, J_d não admite curva algébrica invariante.*

prova: Já observamos, no exemplo 15, que o único ponto fixo de $\mathrm{Aut}(J_d)$ é o zero. Na página 99 de [**38**] mostra-se que o quociente de qualquer uma das singularidades de J_d é dado por

$$\frac{-d^2 + 2d + 2 + id(d+2)\sqrt{3}}{2(d^2 + d + 1)},$$

ou seu inverso. Verifica-se facilmente que estes números complexos não são raízes da unidade e portanto temos o resultado pelo teorema anterior. ∎

3.3. Genericidade de folheações sem curva algébrica invariante. Podemos identificar o espaço de folheações de grau d com o projetivizado do espaço vetorial das 1-formas homogêneas em $\mathbb{C}^3$ que são anuladas pelo campo radial. Denotaremos este espaço por $\mathrm{Fol}(d)$. O teorema abaixo é devido a Jouanolou e o incluímos aqui por ser um interessante corolário do corolário 14.

Teorema 22. *Existe um conjunto residual $R \subset \mathrm{Fol}(d)$, $d \geq 2$, tal que qualquer $\mathcal{F} \in R$ não admite curva algébrica invariante.*

prova: Seja $C_k = \{\mathcal{F} \in \mathrm{Fol}(d) | \mathcal{F}$ admite curva invariante de grau $\leq k\}$. Como C_k é um fechado de Zariski para todo $k \in \mathbb{N}$ basta mostrar que para qualquer $k \in \mathbb{N}$ que $C_k \neq \mathrm{Fol}(d)$. O corolário 14 mostra que $J_d \notin C_k$ e temos portanto o teorema. ∎

COMENTÁRIO 6. Lins Neto mostrou que podemos tomar R contendo um aberto denso, veja [**38**]. Para tanto basta observar que existe um aberto denso onde existe uma cota para o grau de curvas invariantes.

Até o momento não se sabe se existe um aberto de Zariski em $\mathrm{Fol}(d)$ sem curvas algébricas invariantes, ou se $\cup C_k$ é um fechado de Zariski.

4. Campos de vetores polinomialmente involutivos

O objetivo agora é definir a noção de família polinomialmente involutiva de campos de vetores e mostraremos como utilizar este conceito para garantir a existência de hipersuperfícies algébricas invariantes pela família. Incluímos este estudo neste capítulo que trata de grupos de automorfismos pois um caso particular de uma família polinomialmente involutiva é a combinação linear de campos de vetores X e Y, onde Y é um automorfismo infinitesimal da folheação definida por X.

4.1. Lugar de dependência de campos de vetores.

Definição 18. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ campos de vetores em $\mathbb{A}^n_k$. O seu *lugar de dependência* é a hipersuperfície definida por $\mathrm{Dep}(X_1, \ldots, X_n)$, onde:

$$\mathrm{Dep}(X_1, \ldots, X_n) = i_{X_1} \cdots i_{X_n} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

Proposição 24. *Se $X_1, \ldots, X_n$ são campos de vetores genericamente independentes em $\mathbb{A}^n_k$ então existem polinômios $p_{ij}^{(k)}$ e um inteiro não -negativo m tal que*

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{n} \frac{p_{ij}^{(k)}}{\mathrm{Dep}(X_1, \ldots, X_n)^m} X_k \,.$$

prova: No aberto principal $\mathbb{A}^n \setminus (\mathrm{Dep}(X_1, \ldots, X_n) = 0) = \mathbb{A}^n_{\mathrm{Dep}(X_1, \ldots, X_n)}$ os campos de vetores são independentes, e portanto vale o lema. ∎

Lema 9. (**Lema Fundamental**) *Sejam $X_1, .., X_n$ campos de vetores em $\mathbb{A}^n_k$ e $a_{ij}^{(k)}$ funções racionais tais que $[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^n a_{ij}^{(k)} X_k$. Denotando* $\mathrm{Dep}(X_1, \ldots, X_n)$ *por F, temos*

$$i_{X_k}\Omega \wedge dF = \left[\left((-1)^{k+1}div(X_k) + \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}^{(j)} + \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i-k+1}a_{ik}^{(i)}\right) F\right]\Omega\,,$$

onde $\Omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$.

prova: A prova do lemma segue de algumas simples manipulações envolvendo as seguintes identidades

$$[L_X, i_Y] = i_{[X,Y]} \quad \text{e} \quad [L_X, L_Y] = L_{[X,Y]}\,.$$

Provas para estas identidades podem sem encontradas em [**29**].

Pela definição de derivada de Lie podemos ver que

$$\begin{aligned} d\mathrm{Dep}(X_1,\cdots,X_n) &= di_{X_1}\cdots i_{X_n}\Omega = (L_{X_1} - i_{X_1}d)i_{X_2}\cdots i_{X_n}\Omega \\ &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}i_{X_1}\cdots i_{X_{i-1}}L_{X_i}i_{X_{i+1}}\cdots i_{X_n}\Omega\ . \end{aligned}$$

Esta última expressão pode ser escrita como

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}i_{X_1}\cdots i_{X_{i-1}}L_{X_i}i_{X_{i+1}}\cdots i_{X_n}\Omega \\ =\ &\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\left(div(X_i)\beta_i + \sum_{j=i+1}^{n} i_{X_1}\cdots i_{X_{i-1}}i_{X_{i+1}}\cdots i_{X_{j-1}}i_{[X_i,X_j]}i_{X_{j+1}}\cdots i_{X_n}\right)\Omega \\ =\ &\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\left(div(X_i)\beta_i + \sum_{j=i+1}^{n}(-1)^{i-j+1}a_{ij}^{(i)}\beta_j + a_{ij}^{(j)}\beta_i\right)\,, \end{aligned}$$

onde $\beta_i = i_{X_1}\cdots i_{X_{i-1}}i_{X_{i+1}}\cdots i_{X_n}\Omega$.

Observando que $i_{X_k}\Omega\wedge\beta_l = \delta_{kl}(i_{X_1}\cdots i_{X_n}\Omega)\Omega$, obtemos

$$i_{X_k}\Omega\wedge di_{X_1}\cdots i_{X_n}\Omega = \left[\left((-1)^{k+1}div(X_k) + \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}^{(j)} + \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i-k+1}a_{ik}^{(i)}\right) i_{X_1}\cdots i_{X_n}\Omega\right]\Omega\,.$$

∎

4.2. Campos de vetores polinomialmente involutivos.

Definição 19. Uma coleção de campos de vetores $X_1,\dots,X_n$ de $\mathbb{A}_k^n$ é *polinomialmente involutiva* se existem polinômios $p_{ij}^{(k)}$ tal que

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)} X_k\ .$$

Proposição 25. *Seja k um corpo de característica arbitrária e $X_1,\dots,X_n$ uma coleção de campos de vetores em $\mathbb{A}_k^n$. Suponha que $\{X_i\}_{i=1}^n$ é conjunto polinomialmente involutivo de campos de vetores. Se o lugar de dependência não é uma constante de derivação então ele é invariante por X_j para todo $j = 1,\dots,n$.*

prova: Seja $F := \mathrm{Dep}(X_1, \cdots, X_n)$. Pelo lema fundamental,

$$X_k(F) = \frac{i_{X_k}\Omega \wedge dF}{\Omega} = \left((-1)^{k+1} div(X_k) + \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}^{(j)} + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i-k+1} a_{ik}^{(i)} \right) F.$$

Como $\{X_i\}_{i=1}^n$ são polinomialmente involutivos, pode-se ver que

$$\frac{X_k(F)}{F}$$

é um polinômio. Portanto se dF é diferente de zero, o lugar de dependência é invariante por X_j. ∎

Em geral a recíproca da proposição acima não vale. Por exemplo se considerarmos os campos de vetores X, Y, Z em $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$ dados por $X = y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}, Y = x\frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial y}$ e $Z = \frac{\partial}{\partial x}$ temos que

$$\mathrm{Dep}(X, Y, Z) = z^2$$

e

$$[X, Z] = \frac{\partial}{\partial y} = \frac{Y - xZ}{z}.$$

Portanto os campos de vetores não são polinomialmente involutivos mas o lugar de dependência é invariante tanto por X quanto por Y ou Z. Restringindo ao caso bidimensional temos o seguinte resultado.

Proposição 26. *Sejam X e Y campos de vetores em $\mathbb{A}^2_k$. Se $\mathrm{Dep}(X, Y)$ é invariante tanto por X quanto por Y então X e Y são polinomialmente involutivos.*

prova: Sabemos que $[X, Y] = \frac{p}{\mathrm{Dep}(X,Y)^m}X + \frac{q}{\mathrm{Dep}(X,Y)^m}Y$. Pelo lema fundamental,

$$X(\mathrm{Dep}(X, Y)) = (div(X) + \frac{q}{\mathrm{Dep}(X, Y)^m})\mathrm{Dep}(X, Y) \ ,$$

e pelas nossas hipótese podemos concluir que $\frac{q}{\mathrm{Dep}(X,Y)^m}$ é um polinômio. Mutatis mutandis, podemos concluir que $\frac{p}{\mathrm{Dep}(X,Y)^m}$ também é um polinômio. Portanto X e Y são polinomialmente involutivos. ∎

4.3. Hipersuperfícies invariantes em característica positiva. Se k é um corpo de característica p e X é um campo de vetores em $\mathbb{A}^n_k$, é bem simples decidir se X possui uma hipersuperfície invariante ou não. Esta simplicidade está longe de existir em característica zero onde não se sabe é decidível saber se X admite uma hipersuperfície algébrica invariante.

Teorema 23. *Seja X um campo de vetores em $\mathbb{A}^n_k$, onde k é um corpo de característica positiva. Se o divergente de X é diferente de zero, então X admite uma hipersuperfície algébrica invariante. Se $\mathrm{div}(X) = 0$ então os polinômios reduzidos definindo possíveis hipersuperfícies invariantes aparecem como fatores de um único polinômio F completamente determinado por X.*

prova: Em característica positiva temos um sistema de campos de vetores polinomialmente involutivo canonicamente associado a X.Quando X é um campo de vetores em $\mathbb{A}_k^n$ então o sistema polinomialmente involutivo é

$$X, X^p, \ldots, X^{p^{n-1}}.$$

De fato este sistema é comutativo. Se

$$\mathrm{Dep}(X, \ldots, X^{p^{n-1}}) = 0$$

então X admite uma integral primeira(ver [**44**]) e em particular uma hipersuperfície algébrica invariante. Se $\mathrm{div}(X) \neq 0$ e

$$\mathrm{Dep}(X, \ldots, X^{p^{n-1}}) \neq 0$$

então pela proposição 25 X admite uma hipersuperfície algébrica invariante. Quando $div(X) = 0$, se existe uma hipersuperfície algébrica invariante então sua equação reduzida divide $\mathrm{Dep}(X, \ldots, X^{p^{n-1}})$. De fato, se F é uma hipersuperfície invariante então F divide $X(F)$, e consequentemente, F também divide $X^k(F)$, para qualquer inteiro positivo k. Conseqüentemente F divide o lugar de dependência de $X, \ldots, X^{p-1}$. ∎

Exemplo 16. Em geral, quando $div(X) = 0$, não podemos garantir a existência de uma hipersuperfície algébrica invariante.

Se $X = y^3\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ é um campo de vetores definido sobre um corpo de característica dois, então $X^2 = xy^2\frac{\partial}{\partial x} + y^3\frac{\partial}{\partial y}$ e $\mathrm{Dep}(X, X^2) = (y^3 + xy)^2$. Portanto as únicas curvas invariantes possíveis são y e $y^2 + x$, que não são invariantes como pode ser facilmente verificado. X portanto não admite nenhuma curva algébrica invariante.

Corolário 15. *Seja X um campo de vetores em $\mathbb{A}_k^2$, onde k é um corpo de característica $p > 0$. Se o grau de X é menor que $p - 1$ então X admite uma curva algébrica invariante.*

prova: Pelo teorema 23 podemos supor que $\mathrm{div}(X) = 0$. Então a 1-forma $\omega = i_X dx_1 \wedge dx_2$ é fechada, e seus coeficientes possuem grau menor que $p - 1$. Nesse caso o fato de ω ser fechada implica que $\omega = df$, para algum $f \in R$. ∎

Exemplo 17. Sobre os números complexos, Jouanolou em [**35**] mostrou que

$$X = (1 - xy^d)\frac{\partial}{\partial x} + (x^d - y^{d+1})\frac{\partial}{\partial y}$$

não possue curva algébrica invariante para $d \geq 2$. Em característica dois, por exemplo, se d é ímpar então $x^{2d+1}y^{d-1} + x^d y^d + x^{d-1} + y^{2d+1}$ é invariante, e se d é par X possui integral primeira da forma $y^{d+1}x + x^{d+1} + y$. Observe que para $d = 2$ a integral primeira é a quártica de Klein, uma curva de genus 3 que possui 168 automorfismos. Portanto em característica dois o exemplo de Jouanolou possui mais automorfismos que em característica zero, onde possui 42.

Bibliografia

[1] A. Andreotti, *Sopra le superficie che possegono transformazioni birazionali in se*, Red. Mat. e Appl. **9**, 1950, 255–279.

[2] V. I. Arnold, *Remarks on the Extactic Points of Plane Curves*, The Gelfand Mathematical Seminars, 1993–95.

[3] J. Artés, B. Grünbaum and J. Llibre, *On the number of invariant straight lines for polynomial differential systems*, Pacific Journal of Mathematics, 184 (2), 1998.

[4] Bourbaki, *Álgebre II*

[5] M. Brunella, *Birational Geometry of Foliations*, First Latin American Congress of Mathematicians, IMPA, 2000.

[6] M. Brunella, *Minimal models of foliated algebraic surfaces*, Bull. SMF **127**, 1999, 289–305.

[7] M. Brunella, *Some remarks on indices of holomorphic vector fields*, Publicacions Matemàtiques, **41** (1997), 527-544.

[8] M. Brunella and L.G. Mendes, *Bounding the degree of solutions to Pfaff equations*, preprint 206, U. Bourgogne, 1999.

[9] M. Brunella and M. Nicolau, *Sur les Hypersurfaces Solutions des Équations de Pfaff*, Preprint , 1999

[10] M. Brunella, *A global stability theorem for transversely holomorphic foliations*, Annals of Global Analysis and Geometry **15** (1997), 179–186

[11] W. Burnside , *On criteria for the finiteness of the order of a group of linear substitutions* Proc. London Math. Soc. (2) **3** (1905), 435–440

[12] C. Camacho and A. Lins Neto, *Geometric theory of foliations*, Birkhauser, 1985

[13] C. Camacho e P. Sad, *Pontos singulares de equações diferenciais analíticas*, IMPA, 16^o Colóquio Brasileiro de Matemática, Rio de Janeiro, 1987.

[14] M. Carnicer, *The Poincaré problem in the nondicritical case*, Annals of Mathematics **140** (1994), 289–294.

[15] A. Cayley, *On the sextactic points of a plane curve*, Collected Mathematical Paper V (341) ; Trans. Royal Soc. London CLV, 1865.

[16] D. Cerveau and A. Lins Neto, *Holomorphic foliations in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ having an invariant algebraic curve*, Ann. Inst. Fourier **41** (1991), 883-903.

[17] D. Cerveau and J-F. Mattei , *Formes intégrables holomorphes singulières*, Astérique **97**, SMF, 1982.

[18] D. Cerveau and P. Sad, *Liouvillian integration and Bernoulli foliations*, Transactions of the American Mathematical Society **350**(8) (1998), 3065–3081.

[19] C. Christopher, J. Llibre e J. V. Pereira, *Multiplicity of invariant algebraic curves and Darboux integrability*, Em preparação.

[20] C. Christopher, *Liouvillian first integrals of second order polynomial differential equations*, Eletronic Journal of Differential Equations, **49** (1999), 1–7.

[21] F. Cukierman, *Determinant of complexes and higher Hessians*, Mathematische Annalen, 307 , 1997.

[22] G. Darboux, *Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré (Mélanges)*, Bulletin Sciences Mathématiques 2ème série **2** (1878), 60–96; 123–144; 151–200.

[23] V. A. DOBROVOL'SKII, N.V. LOKOT' E J.-M. STRELCYN, *Mikhail Nikolaevich Lagutinskii(1871-1915), un mathématician méconnu*, Historia Mathematica **25** 3 (1998), 245–264.

[24] R. EDWARDS, K. MILLETT AND D. SULLIVAN, *Foliations with all leaves compact*, Topology **16** (1977), 13–32

[25] D. B. A. EPSTEIN, *Foliations with all leaves compact*, Ann. Inst. Fourier **26** (1976), 265—282

[26] E. ESTEVES, *The Castelnuovo-Mumford regularity of a variety left invariant by a vector field on projective space*, Preprint, IMPA, 2000.

[27] G. FISCHER , *Complex Analytic Geometry*, Lecture Notes in Math. **538**, Springer, 1976

[28] C. GODBILLON, *Feuilletages, études géométriques*, Birkhäuser, Basel, 1991

[29] C. GODBILLON, *Géométrie différentielle et mécanique analytique*, Hermann-Paris, 1969

[30] X. GOMEZ–MONT , *Integrals for holomorphic foliations with singularities having all leaves compact* , Ann. Inst. Fourier, Grenoble **39** 2, 1989

[31] M. HERZOG AND C. PRAEGER, *On the order of linear groups with fixed finite exponent*, Jr. of Algebra **43** (1976), 216–220

[32] E. HILLE, *Ordinary differential equations in the complex domain*, John Wiley & Sons, 1976.

[33] H. HOLMANN, *On the stability of holomorphic foliations*, LNM **798** (1980), 192–202

[34] E. L. INCE, *Ordinary differential equations*, Dover, 1956.

[35] J. P. JOAUNOLOU , *Equations de Pfaff Algébriques* , Lecture Notes in Math. **708**, Springer, 1979

[36] S. KOBAYASHI, *Transformations Groups in Differential Geometry*, Springer–Verlag, 1972.

[37] A. LINS NETO , *Some Examples for Poincaré and Painlevé Problems*, Preprint, IMPA, 2000.

[38] A. LINS NETO AND B. SCÁRDUA, *Folheações Algébricas Complexas*, IMPA, 21^o Colóquio Brasileiro de Matemática, Rio de Janeiro, 1997.

[39] JEAN–MARIE LION, *Un critère de Darboux d'existence d'intégrale première pour les 1-formes diffrentielle analytiques*, Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática, 31 (2), 2000

[40] A. J. MACIEJEWSKI, J. MOULIN OLLAGNIER, A. NOWICKI AND J.-M. STRELCYN, *Around Jouanolou non-integrability theorem*, Indagationes Mathematicae **11** (2), 239–254, 2000.

[41] H. MATSUMURA , *On algebraic groups of birational transformations*, Atti Accad. Naz. dei Lincei **34**, 1964, 151–155.

[42] M. MCQUILLAN , *Non–Commutative Mori Theory*, Preprint, IHES, 2000.

[43] L. G. MENDES, *Kodaira dimension of holomorphic singular foliations*, Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática, **31**, 127–143, 2000

[44] Y. MIYAOKA AND T. PETERNELL, *Geometry of Higher Dimensional Algebraic Varieties*, DMV Seminar **26**, Birkhäuser , 1997

[45] R. MOL E M. SOARES, *Índices de campos de vetores holomorfos*, Colóquio Brasileiro de Matemática, 2001.

[46] J. MOULIN OLLAGNIER, A. NOWICKI AND J.-M. STRELCYN, *On the non–existence of constants of derivations: the proof of a theorem of Jouanolou and its development*, Bull. Sci. math. **119**, 195–233, 1995.

[47] I. PAN E M. SEBASTIANI, *Les équations différentielles algébriques et les singularités mobiles*, Preprint, UFRGS.

[48] J. V. PEREIRA, *Global stability for holomorphic foliations on Kaehler manifolds*, Qualitative Theory of Dynamical Systems, to appear.

[49] J. V. PEREIRA, *Hypersurfaces invariant by positive characteristic vector fields*, Journal of pure and applied algebra, to appear.

[50] J. V. PEREIRA, *On the Poincaré problem for foliations of general type*, Mathematische Annalen, to appear.

[51] J. V. PEREIRA E P. F. SANCHEZ, *Transformations groups of holomorphic foliations*, Preprint, IMPA, 2001.

[52] J. V. PEREIRA, *Vector fields, invariant varieties and linear systems*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, to appear.

[53] H. POINCARÉ, *Sur l'integration algébrique des équations différentielles du premier ordre et du premier degré* I and II, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **5** (1891), 161–191; **11** (1897), 193–239.

[54] J. F. Ritt, *Integration in finite terms: Liouville's Theory of Elementary Methods*, Columbia University Press, 1948.

[55] M. Rosenlicht, *Some basic theorems on algebraic groups*, American Journal of Mathemathics **78**, 401–443, 1956.

[56] B. A. Scárdua, *Transversely affine and transversely projective foliations*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Quatrième Série **30** (1997), 169–204.

[57] D. Schlomiuk and N. I. Vulpe, *Planar Quadratic Differential Systems with Invariant Straight Lines*, in preparation.

[58] J. B. Seaborn, *Hypergeometric Functions and their applications*, Springer–Verlag, 1991.

[59] M. F. Singer, *Liouvillian first integrals of differential equations*, Transactions of the American Mathematical Society **333** (1992), 673–688.

[60] M. Soares, *The Poincaré problem for hypersurfaces invariant by one–dimensional foliations*, Invent. Math. **128** (1997), 495–500.

[61] M. Soares, *Projective varieties invariant by one–dimensional foliations*, to appear in Annals of Mathematics.

[62] D. Sullivan, *A counterexample to the periodic orbit conjecture*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **46** (1976),5–14

[63] K. Ueno, *Classification Theory of Algebraic Varieties and Compact Complex Spaces*, LNM 439, Springer–Verlag, 1975.

[64] A. G. Zamora, *Foliations in Algebraic Surfaces having a rational first integral*, Publicacions Matemàtiques **41** (1997), 357–373.

[65] A. G. Zamora, *Sheaves associated to holomorphic first integrals*, Ann. Inst. Fourier **50**, 3 (2000), 909–919

[66] H. Zoladek, *The extended monodromy group and liouvillian first integrals*, Journal of Dynamical and Control Systems **4**(1), 1–28, 1998.

Índice