

Ministério de Ciência e Tecnologia
Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Famílias Lineares de Folheações
com Curvatura Zero
numa Superfície Complexa Compacta.

LILIANA PUCHURI MEDINA

Tese apresentada para a obtenção do título de Doutor em Ciências

ORIENTADOR: ALCIDES LINS NETO

Rio de Janeiro - Brasil
2010

Este trabajo se lo dedico a
mis queridos padres Víctor
y Nelly.

Agradecimientos

Gostaría de dedicar estas líneas para as personas e instituições que me deram apoio e força para o desenvolvimento deste trabalho.

Um agradecimento especial ao meu orientador Alcides Lins Neto, por ter aceito orientar a minha tese. Trabalhar com ele foi uma experiência inesquecível, já que as suas conversas e ideias foram valiosas no desenvolvimento da tese e me ensinaram e motivaram ser melhor cada dia. Agradeço também por toda a sua paciência e por ter me permitido trabalhar com liberdade e tranquilidade.

Agradeço aos membros da banca, aos professores Alcides Lins Neto, Bruno Scárdua, César Camacho, Marcio Soares, Paulo Sad e Thiago Fassarela. Em especial a Paulo Sad e Thiago Fassarela pela leitura atenciosa e sugestões que ajudaram na melhora da tese.

Expresso aqui também a minha sincera gratidão ao pessoal de dinâmica complexa do IMPA, aos professores Alcides Lins Neto, César Camacho, Hossein Movasati, Jorge Vitório e Paulo Sad que com seus valiosos ensinamentos ajudaram a minha formação na área. Em especial aos professores Jorge Vitório e Hossein Movasati pelas conversas e sugestões que ajudaram no desenvolvimento da tese. Sou grata também ao professor Paulo Sad por ter me recebido como orientador nos dois primeiros anos de meu doutorado.

Quero agradecer também ao professor Alexis Zamora que na sua estadia no IMPA eu tive interessantes conversas com ele. A Carlo Perroné pelo interesse e atenção prestada numa parte da tese.

Un agradecimiento especial a toda mi familia que siempre estan y estarán presentes en mi corazón. En especial a mi mamá ya que mi partida a Río fué muy difícil para ella y por su comprensión. Por todo el amor que me brinda cuando viajo a Lima, especialmente preparándome los deliciosos platos que me gustan. A mi papá Víctor Puchuri, por su enseñanza al valor del aprendizaje como un tesoro que toda persona tiene que cosechar y cultivar; por contar siempre con su confianza y apoyo para seguir adelante en mi carrera profesional. Quisiera agradecer a ellos muy en especial, porque sin su cariño en los viajes a Lima, hubiera sido mas difícil estar lejos de ellos en mis primeros años del doctorado. A mi hermana Nancy que sin sus consejos no estuviera estudiando, lo que tanto me gusta, las matemáticas. A mi hermanita Diana que con su inocencia y ternura acompaña a mis papás. A mi prima/hermana Lizbeth por su aliento y consejos impartidos todos estos años. A mis tíos Bertha, Ortencia, Roger, Isidro, Nery y a mis ahijados Renzo y Franco por todo su cariño y apoyo.

Un agradecimiento especial a Orestes por no sólo ser mi mejor amigo, sino por ser mi fuerza. Por haberme acompañado en los momentos más difíciles, por sus consejos que me motivaron a continuar trabajando, tomarse el tiempo de leer cuidadosamente mi trabajo, ayudarme en la parte de redacción y en el desarrollo de los gráficos. Por su agradable compañía en estos dos últimos años que me ayudaron a estar más tranquila lejos de mi familia.

A mis amigos en Perú; Hugo, Yboon, Oswaldo, Laura, Kathy, Molina y Milagros, por todos los buenos momentos que vivimos estudiando en el IMCA.

A todos los profesores del IMCA; en especial a mi asesor de maestría Percy Fernandez por despertar mi interés en análisis complejo y mi gusto por las foliaciones. A los

profesores Félix Escalante, Renato Benazic y Roger Metzger por todas sus enseñanzas inicialmente en mis estudios de pregrado en la UNI, que hicieron consolidar mi gusto por la matemática después de mi traslado de Ingeniería Química, y posteriormente en mis estudios de postgrado.

Gostaria também de agradecer a Maria Joao pela leitura atenciosa e ajuda na redação da tese. A Gabriela e Dalia pelos momentos bons que vivemos formando uma pequena família nos primeiros anos de doutorado.

Finalmente agradeço ao CNPq e a CAPES pelos auxílios concedidos.

Resumo

O trabalho é motivado pela questão dada por Poincaré em 1891:

“É possível decidir se uma folheação em \mathbb{P}^2 tem integral primeira racional?”.

Trataremos de responder esta pergunta no contexto das famílias lineares de folheações. Para isto, seja $\mathcal{P} := \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ uma família linear de folheações em uma superfície complexa compacta X . Logo podemos associar uma 2-forma meromorfa $\Theta(\mathcal{P})$ denominada **curvatura do pencil**. No caso em que $\Theta(\mathcal{P}) \equiv 0$, diremos que o pencil é **flat**. Seja

$$I_p(\mathcal{P}) := \{\alpha \in \overline{\mathbb{C}} : \mathcal{F}_\alpha \text{ possui uma integral primeira meromorfa em } X\}.$$

Assim, basicamente estudaremos o seguinte problema:

“Dado um pencil flat \mathcal{P} , descrever o conjunto $I_p(\mathcal{P})$ ”.

Abordaremos o problema estudando o conjunto de singularidades do pencil \mathcal{P} . Assim, definimos o **conjunto de tangência** de um pencil \mathcal{P} , denotado por $\Delta(\mathcal{P})$. Na primeira parte do trabalho estudaremos $I_p(\mathcal{P})$ no caso em que $\Delta(\mathcal{P})$ é vazio. Por outro lado o caso em que $\Delta(\mathcal{P})$ não é vazio é dividida no caso em que $\Delta(\mathcal{P})$ é invariante e no caso $\Delta(\mathcal{P})$ não invariante, neste caso somente trabalharemos em \mathbb{P}^2 .

Palavras - chave: Folheações Holomorfas. Pencil de Folheações. Integral primeira Meromorfa.

Prefácio

Um dos principais problemas na teoria dos campos vetoriais no plano é caracterizar os campos integráveis, ou seja, campos que admitem uma integral primeira.

Desde 1878, ano em que Darboux encontrou conexões entre curvas algébricas e a existência de integrais primeiras de campos vetoriais polinomiais em \mathbb{C}^2 , as curvas algébricas invariantes são objetos centrais na teoria da integrabilidade de campos. Assim, a primeira questão relacionada com a existência de integrais primeiras, é saber se um campo vetorial polinomial tem ou não curvas algébricas invariantes. O seguinte teorema, dado por Darboux-Jouanolou, responde parcialmente a esta questão.

Teorema ([22]). Um campo vetorial polinomial em \mathbb{P}^2 de grau m , que tem pelo menos $\frac{m(m+1)}{2} + 1$ curvas algébricas invariantes, possui uma integral primeira racional.

Uma generalização do teorema anterior foi dado em 2000 por E. Ghys.

Teorema ([14]). Seja X uma superfície complexa compacta e seja \mathcal{F} uma folheação singular em X . Se \mathcal{F} admite uma infinidade de curvas analíticas invariantes então \mathcal{F} admite uma integral primeira meromorfa.

As melhorias mais ressaltantes dos resultados de Darboux para campos vetoriais planares, foram dadas por Poincaré em 1891. Ele tentou responder à seguinte questão:

“É possível decidir se uma folheação em \mathbb{P}^2 tem integral primeira racional?”.

Em [36], ele observa que é suficiente acotar o grau de uma possível solução algébrica. De fato, impondo condições sobre as singularidades da folheação, apresentou condições necessárias que garantem a existência de uma integral primeira racional. O **problema de Poincaré** a ser discutida no trabalho consiste em acotar o grau de uma curva algébrica invariante em termos do grau da folheação.

Em 2002, Lins Neto em [26], construiu algumas famílias notáveis de folheações em \mathbb{P}^2 , onde o conjunto de parâmetros com integral primeira é denso e enumerável. Além disso, os graus das integrais primeiras podem ser tomados arbitrariamente grandes, e assim estas famílias fornecem contra-exemplos para o problema de Poincaré.

No presente trabalho generalizaremos o trabalho de Poincaré, no contexto das famílias lineares de folheações. Para isto, seja $\mathcal{P} := \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{C}}$ uma família linear de folheações em uma superfície complexa compacta X , definida por dois elementos \mathcal{F}_0 e \mathcal{F}_∞ de \mathcal{P} , cujos fibrados normais coincidem. A família \mathcal{P} será denominada **pencil de folheações**. Por

meio de uma reparametrização, caso seja necessário, dividindo os zeros comuns de \mathcal{F}_0 e \mathcal{F}_∞ , sempre podemos supor que \mathcal{F}_0 e \mathcal{F}_∞ têm singularidades isoladas.

Dado um pencil $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ em X podemos associar uma 2-forma meromorfa $\Theta(\mathcal{P})$ denominada **curvatura do pencil**. No caso em que $\Theta(\mathcal{P}) \equiv 0$, diremos que o pencil é **flat**. Seja

$$I_p(\mathcal{P}) := \{\alpha \in \overline{\mathbb{C}} : \mathcal{F}_\alpha \text{ possui uma integral primeira meromorfa em } X\}.$$

As famílias dadas por Lins Neto em [26] são exemplos de pencil flat \mathcal{P} em \mathbb{P}^2 , onde o conjunto $I_p(\mathcal{P})$ é denso e enumeravel.

No presente trabalho, basicamente estudaremos o seguinte problema:

“Dado um pencil flat \mathcal{P} , descrever o conjunto $I_p(\mathcal{P})$ ”.

Seguindo as ideias de Poincaré [36], abordaremos o problema estudando o conjunto de singularidades do pencil \mathcal{P} , isto é, o conjunto formado pelas singularidades de \mathcal{F}_α , com $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$. Assim, definimos o **conjunto de tangência** de um pencil \mathcal{P} , que é o conjunto de tangência de dois elementos de \mathcal{P} e será denotado por $\Delta(\mathcal{P})$. Este conjunto $\Delta(\mathcal{P})$ é um conjunto analítico formado por singularidades de \mathcal{P} . Isto motiva o estudo das componentes irredutíveis de $\Delta(\mathcal{P})$.

Diremos que \mathcal{P} tem uma **singularidade móvel**, se existem um aberto $V \subset \overline{\mathbb{C}}$ e uma aplicação holomorfa não constante $p : V \rightarrow X$ tal que $p(\alpha) \in \text{Sing}(\mathcal{F}_\alpha)$, para todo $\alpha \in V$. Por outro lado, diremos que $p \in \mathcal{P}$ é uma **singularidade fixa**, se p é uma singularidade comum a todos os \mathcal{F}_α . Dada uma componente irredutível C de $\Delta(\mathcal{P})$, então acontece somente uma das seguintes opções:

- C contém uma **singularidade móvel**, isto é, existe uma singularidade móvel $p : V \rightarrow X$ de \mathcal{P} , tal que $p(V) \subset C$.
- C é uma **componente NI**, isto é, existe $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$, tal que $C \subset \text{Sing}(\mathcal{F}_\alpha)$.

Primeiramente, no capítulo 2, consideramos o caso em que $\Delta(\mathcal{P}) = \emptyset$. Neste caso, se X é uma superfície Kähler compacta então pela Proposição 2.25, X é um toro e o pencil está formado por folheações lineares. Utilizando a Proposição 2.29 temos o seguinte teorema:

Teorema I. Seja X uma superfície Kähler compacta e seja \mathcal{P} um pencil em X . Se $\Delta(\mathcal{P}) = \emptyset$, então X é um toro e \mathcal{P} é um pencil de folheações lineares. Além disso, se $\#I_p(\mathcal{P}) \geq 3$ então $X = E \times E$, onde E é uma curva elíptica e

$$I_p(\mathcal{P}) \setminus \{\infty\} \simeq \text{End}(E) \otimes \mathbb{Q}.$$

Em particular, escrevendo $E = \mathbb{C}/\Gamma$ com $\Gamma = \langle 1, \tau \rangle$, se $0, \infty \in I_p(\mathcal{P})$ e existe $\alpha \in I_p(\mathcal{P}) \setminus \{\infty\} \cup \mathbb{Q}$, então

$$I_p(\mathcal{P}) \setminus \{\infty\} = \mathbb{Q}(\tau),$$

onde, $\tau = \sqrt{-d}$ com d livre de quadrados, ou seja, $\mathbb{Q}(\tau)$ é uma extensão quadrática imaginária de \mathbb{Q} .

Uma interessante aplicação do Teorema I será calcular o conjunto de parâmetros com integral primeira do pencil $\mathcal{P}_4 = \{\mathcal{F}_t^4\}_{t \in \overline{\mathbb{C}}}$ em \mathbb{P}^2 , dado por Lins Neto em [26] e que foi calculado originalmente em [25]. O pencil \mathcal{P}_4 é definido por

$$\mathcal{P}_4 : \quad \begin{aligned} \omega &= (x^3 - 1)xdy - (y^3 - 1)ydx \\ \eta &= (x^3 - 1)y^2dy - (y^3 - 1)x^2dx \end{aligned} .$$

Para isto, consideremos o toro complexo $X = \mathbb{C}/\Gamma \times \mathbb{C}/\Gamma$, onde $\Gamma = \langle 1, \tau_0 \rangle$ e $\tau_0 = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{G}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ pencil em X , onde cada folheação \mathcal{G}_α é gerada pela 1-forma holomorfa global $w_\alpha = dx + \alpha dy$. Como $0, \infty, \tau_0 \in I_p(\mathcal{P})$ então pelo teorema I,

$$I_p(\mathcal{P}) = \mathbb{Q}(\tau_0) \cup \{\infty\}.$$

A relação entre o pencil \mathcal{P} e o pencil \mathcal{P}_4 foi dada por McQuillan (cf. [4, p. 103]), onde ele prova que existe uma aplicação racional $g : X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$, tal que $g_*(\mathcal{P}) = \mathcal{P}_4$. Nós daremos a relação explícita entre as folheações de \mathcal{P} e \mathcal{P}_4 que será provado na seção 2.2.2, ou seja, dado $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$ então $g(\mathcal{G}_\alpha)_* = \mathcal{F}_{F_\alpha}$, onde $F : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ é definida por $F(\alpha) = (\tau_0^2 - 1)\alpha + 1$.

Em particular, se

$$I_p(\mathcal{P}_4) = \{\mathcal{F}_t : \mathcal{F}_t \text{ tem integral primeira racional } F_t\},$$

então $I_p(\mathcal{P}) = I_p(\mathcal{P}_4)$. Denotemos por d_t o grau de F_t . O seguinte teorema fornece uma maneira de calcular o grau d_t de F_t , onde $t \in I_p(\mathcal{P}_4)$.

Teorema II. Temos

$$I_p(\mathcal{P}_4) = \mathbb{Q}(\tau_0) \cup \{\infty\}.$$

Seja $t \in I_p(\mathcal{P}_4) \setminus \{1, \tau_0, \tau_0^2, \infty\}$, então $g^*(\mathcal{F}_t^4) = \mathcal{G}_\alpha$, onde $\alpha = \frac{t-1}{-2-\tau_0}$, e se escrevemos $\alpha = \frac{\alpha_1}{\beta_1}$, com $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{Z}[\tau_0]$ e $(\alpha_1, \beta_1) = 1$ então

$$d_t = N(\beta_1) + N(\alpha_1) + N(\beta_1 - \alpha_1) + N(\beta_1 + j\alpha_1),$$

onde d_t é o grau da integral primeira racional \mathcal{F}_t^4 .

Em particular, os graus das integrais primeiras podem ser tomados arbitrariamente grandes e esta família é um contra-exemplo para o problema de Poincaré.

Agora, vejamos o caso em que $\Delta(\mathcal{P}) \neq \emptyset$. Sejam

$$IS(\mathcal{P}) = \{\alpha \in \overline{\mathbb{C}} : \mathcal{F}_\alpha \text{ tem singularidades isoladas}\},$$

e $NI(\mathcal{P}) = \overline{\mathbb{C}} \setminus IS(\mathcal{P})$. Como $NI(\mathcal{P})$ é um conjunto algébrico de $\overline{\mathbb{C}}$ e \mathcal{F}_0 tem singularidades isoladas, então $NI(\mathcal{P})$ é finito.

No capítulo 3 veremos que $\#(\text{Sing}(F_\alpha)) \leq m(\mathcal{F})$, para todo $\alpha \in IS(\mathcal{P})$, onde $m(\mathcal{F})$ é a multiplicidade de \mathcal{F} . Se denotarmos $n(\alpha) := \#(\text{Sing}(F_\alpha))$, então podemos definir $n_0 = \max\{n(\alpha) : \alpha \in IS(\mathcal{P})\}$ e

$$GP(\mathcal{P}) = \{\alpha \in IS(\mathcal{P}) : n(\alpha) = n_0\}.$$

Note que $\overline{\mathbb{C}} \setminus GP(\mathcal{P})$ é finito, pois é algébrico. Estudaremos em separado os casos em que $\Delta(\mathcal{P})$ é ou não invariante. Primeiramente, no capítulo 4, consideramos o caso em que $\Delta(\mathcal{P})$ é invariante, isto é, todas as componentes de $\Delta(\mathcal{P})$ são curvas invariantes das folheações do pencil \mathcal{P} . Como estaremos interessados no caso em que $I_p(\mathcal{P})$ é infinito, podemos supor que $0 \in I_p(\mathcal{P}) \cap IS(\mathcal{P})$. Consideremos o caso em que \mathcal{F}_0 tem integral primeira holomorfa $f : X \rightarrow S$. Neste caso, dado $\alpha \in IS(\mathcal{P}) \setminus \{0\}$, diremos que \mathcal{F}_α é **transversa com respeito a f** , se o conjunto

$$\{c \in S : \text{Tang}(\mathcal{F}_\alpha, F_c) = 0\}$$

é genérico em S , e \mathcal{P} é **transversa com respeito a f** , se existe $\alpha_0 \in IS(\mathcal{P})$ tal que \mathcal{F}_{α_0} é transversa com respeito a f .

Logo, se $\text{gen}(f)$ representa ao gênero de uma fibra genérica de f então temos os teoremas II e III, que são provados nas seções 4.3.1 e 4.3.2, respectivamente.

Teorema III. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ um pencil flat em X tal que \mathcal{F}_∞ tem integral primeira holomorfa $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$, com $\text{gen}(f) = 0$. Suponha que $\Delta(\mathcal{P})$, então acontece uma das seguintes possibilidades:

1. $I_p(\mathcal{P})$ é finito.
2. $IS(\mathcal{P}) \subset I_p(\mathcal{P})$.
3. Existem $\alpha_0 \in I_p(\mathcal{P})$ e $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tais que $I_p(\mathcal{P}) \cap IS(\mathcal{P}) = \lambda\mathbb{Q} + \alpha_0$.

Teorema IV. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ um pencil flat em X tal que \mathcal{F}_∞ tem integral primeira holomorfa $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$, com $\text{gen}(f) = 1$. Suponha que $\Delta(\mathcal{P})$ é invariante. Se $\#I_p(\mathcal{P}) \cap IS(\mathcal{P}) \geq 3$, \mathcal{F}_α tem integral primeira local em todas as suas singularidades, para todo $\alpha \in IS(\mathcal{P})$, e $Z(\mathcal{F}_{\alpha_0}, C) \geq 1$, para toda a componente C de $\Delta(\mathcal{P})$ e para algum $\alpha_0 \in IS(\mathcal{P})$; então existem $\lambda \in \mathbb{C}^*$ e $a \in \mathbb{C}$ tais que

$$\lambda\mathbb{Q} + a \subset I_p(\mathcal{P}).$$

Na seção 4.3.3 consideramos o caso em que $\infty \in IS(\mathcal{P})$. Logo, se $\Delta(\mathcal{P})$ é invariante, $\infty \in IS(\mathcal{P})$ e $I_p(\mathcal{P})$ tem um ponto de acumulação ∞ , então pelo lema 4.27 temos que estas condições permitem aplicar o teorema 3 de [25], que prova o teorema IV.

Teorema V. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ um pencil em X tal que \mathcal{F}_∞ é reduzida e tem integral primeira holomorfa $f : X \rightarrow S$. Suponha que $\Delta(\mathcal{P})$ é invariante, $\infty \in IS(\mathcal{P})$ e $I_p(\mathcal{P})$ tem um ponto de acumulação em ∞ . Então,

- Se $K_X \neq 0$, onde K_X é o fibrado canônico de X , então existem $\lambda \in \mathbb{C}^*$ e $a \in \mathbb{C}$ tais que

$$I_p(\mathcal{P}) = (\lambda \cdot (\mathbb{Q} \oplus \tau\mathbb{Q}) + a) \cup \{\infty\},$$

onde $\tau \in \{i, e^{2\pi i/3}\}$.

- Se $K_X = 0$ e $\text{gen}(S) = 0$ então X é um toro algébrico; e se $X = E \times E$, com E curva elíptica, então

$$I_p(\mathcal{P}) \simeq \text{End}(E) \otimes \mathbb{Q}.$$

Na seção 4.4 estudamos o caso \mathcal{F}_∞ tem integral primeira meromorfa $F : X \dashrightarrow S$. Sejam $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ o processo de blow-up, usado para reduzir as singularidades de \mathcal{F}_∞ (no sentido de Seidenberg, cf. [37]), e $\tilde{\mathcal{P}} := \pi^*\mathcal{P}$ o pencil induzido em \tilde{X} . Sejam $\tilde{\mathcal{P}} = \{\tilde{\mathcal{F}}_\alpha\}_{\alpha \in \bar{\mathbb{C}}}$ e $\Delta(\tilde{\mathcal{P}})$ o seu conjunto de tangências. Para garantir que $\Delta(\tilde{\mathcal{P}})$ seja invariante suporemos que \mathcal{F}_∞ tem singularidades não degeneradas e que as singularidades fixas do pencil são **explosões não dicríticas fixas** (para mais detalhes veja a definição 4.45 e a proposição 4.46). Seja $f := F_\infty \circ \pi : \tilde{X} \rightarrow S$, então f é uma integral primeira holomorfa de $\tilde{\mathcal{F}}_\infty$.

Com as condições acima observemos que se $\Delta(\mathcal{P})$ é invariante pelo pencil e $\infty \notin IS(\tilde{\mathcal{P}})$, então pela proposição 4.48 podemos descrever o conjunto $I_p(\mathcal{P})$ usando os teoremas III e IV. Por outro lado, se $\infty \in IS(\tilde{\mathcal{P}})$, temos que o pencil $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \bar{\mathbb{C}}}$ é **quase-equirredutível**, isto é, o processo de blow-up, usado para reduzir as singularidades de \mathcal{F}_α é o mesmo para todo $\alpha \in IS(\mathcal{P})$, pela Proposição 4.43. Assim temos o seguinte teorema que será provado na seção 4.4.1.

Teorema VI. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \bar{\mathbb{C}}}$ um pencil em X tal que \mathcal{F}_0 é não-degenerada e tem integral primeira meromorfa $F : X \dashrightarrow S$. Suponha que $\Delta(\mathcal{P})$ é invariante e $I_p(\mathcal{P}) \setminus \{0\}$ é infinito. Se $0 \in IS(\tilde{\mathcal{P}})$ e todas as singularidades fixas de \mathcal{P} são explosões não dicríticas fixas, então:

1. $\text{gen}(F) = 1$.
2. Se $K_X \neq 0$, onde K_X é o fibrado canônico de X , então existem $\lambda \in \mathbb{C}^*$ e $a \in \mathbb{C}$ tais que

$$I_p(\mathcal{P}) = (\lambda \cdot (\mathbb{Q} \oplus \tau\mathbb{Q}) + a) \cup \{\infty\},$$

onde $\tau \in \{i, e^{2\pi i/3}\}$.

3. Se $K_X = 0$ e $\text{gen}(S) = 0$ então X é um toro algébrico; e se $X = E \times E$, com E curva elíptica, então

$$I_p(\mathcal{P}) \simeq \text{End}(E) \otimes \mathbb{Q}.$$

Finalmente, vejamos o caso em que $\Delta(\mathcal{P})$ é não invariante pelo pencil. Suponhamos que $X = \mathbb{P}^2$ e seja

$$\mathbb{F}ol(2, d) := \{\mathcal{F}, \text{onde } \mathcal{F} \text{ é uma folheação em } \mathbb{P}^2 \text{ de grau } d\}.$$

Observe que toda folheação de grau 0 tem integral primeira racional. Assim, se $\mathcal{P} \subset \mathbb{F}ol(2, 0)$ então $I_p(\mathcal{P}) = \bar{\mathbb{C}}$. Diremos que uma singularidade p de uma folheação em \mathbb{P}^2 é um centro, se \mathcal{F} possui uma integral primeira g numa vizinhança de p , tal que p é uma singularidade de Morse de g .

Seja

$$\mathbb{F}ol_c(2, d) := \overline{\{\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol(2, d) : \mathcal{F} \text{ tem um centro}\}}.$$

Em [25], é provado que o conjunto $\mathbb{F}ol_c(2, d)$ é algébrico. Em particular $\mathbb{F}ol_c(2, d)$ se decompõe nas suas componentes irredutíveis. Por exemplo quando $d = 2$, $\mathbb{F}ol_c(2, 2)$ tem oito componentes irredutíveis (cf. [12]). Esta classificação permite descrever o conjunto $I_p(\mathcal{P})$, se $\mathcal{P} \subset \mathbb{F}ol_c(2, 2)$.

Suponhamos que $\Delta(\mathcal{P})$ tem uma componente não invariante e não $NI(\mathcal{P})$, então pela proposição 5.1

$$\mathcal{P} \subset \mathbb{F}ol_c(2, d).$$

Assim, se $d = 1$ ocorre somente uma das seguintes opções, ou \mathcal{P} é um pencil de formas logarítmicas (em particular $I_p(\mathcal{P}) = \lambda\mathbb{Q}$, para algum $\lambda \in \mathbb{C}^*$), ou existe um subconjunto finito $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \overline{\mathbb{C}}$ tal que $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset I_p(\mathcal{P})$ (veja a proposição 5.8).

O caso $d > 2$, foi estudado por Movasati. Em [29], ele define o conjunto $\mathcal{I}(a, b)$, formado pelas folheações $\mathcal{F} = \mathcal{F}(pGdF - qFdG) \in \mathbb{F}ol(2, d)$, $d = a + b$, que têm integral primeira racional da forma

$$f : \mathbb{P}^2 \setminus (\{F = 0\} \cap \{G = 0\}) \rightarrow \mathcal{S}, \quad f(x, y) = \frac{F(x, y)^p}{G(x, y)^q}$$

onde $(F, G) \in \mathcal{P}_{a+1} \times \mathcal{P}_{b+1}$, $\frac{a+1}{b+1} = \frac{q}{p}$, $\text{mcd}(p, q) = 1$, e \mathcal{P}_d é o conjunto dos polinômios de grau d em \mathbb{C}^2 .

Sejam $\mathcal{F} \in \mathcal{I}(a, b)$ e p uma singularidade centro de \mathcal{F} . Seja \mathcal{F}_t uma deformação holomorfa de \mathcal{F} em $\mathbb{F}ol(2, d)$ tal que a única singularidade perto de p ainda é um centro. Assim, seguindo as ideias de Ilyashenko (cf. [20]), Movassati prova em [29] o seguinte teorema:

Teorema. Se $d = a + b > 2$ então existe um conjunto $U_{\mathcal{I}(a, b)}$ aberto e denso de $\mathcal{I}(a, b)$ tal que para todo $\mathcal{F}(pGdF - qFdG) \in U_{\mathcal{I}(a, b)}$ e para todas as deformações \mathcal{F}_t como antes, tem-se que F_t é também uma folheação integrável. Melhor ainda, existem polinômios F_t e G_t tais que $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}(pG_t dF_t - qF_t dG_t)$, onde F_t e G_t são holomorfas em t , $F_0 = F$ e $G_0 = G$.

Usando o teorema anterior podemos provar o seguinte teorema.

Teorema VII. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ um pencil flat em \mathbb{P}^2 , onde \mathcal{F}_0 é uma folheação não-degenerada. Seja $\Delta(\mathcal{P})$ não invariante pelo pencil com uma componente não invariante e não $NI(\mathcal{P})$. Então

1. Se $d = a + b > 2$ e $\mathcal{F} \in U_{\mathcal{I}(a, b)}$, temos $I_p(\mathcal{P}) = \overline{\mathbb{C}}$.
2. Se $d = 2$ então acontece somente uma das seguintes opções:
 - (a) $I_p(\mathcal{P})$ é finito.
 - (b) Existe um subconjunto finito $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \overline{\mathbb{C}}$ tal que $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset I_p(\mathcal{P})$.
 - (c) Existem $\lambda \in \mathbb{C}^*$ e $\mu \in \mathbb{C}$ tais que $I_p(\mathcal{P}) = \lambda\mathbb{Q} + \mu$.

No último capítulo, estudaremos o caso em que o pencil $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ é gerado por 1-formas meromorfas fechadas, isto é, \mathcal{F}_α é definido por $\omega + \alpha\eta$, para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$, onde ω e η são 1-formas meromorfas fechadas em X . Usando o teorema de Fuchs para webs folheadas parabólicas (cf. [8, p. 74]) e o teorema de Fuchs para webs folheadas abelianas e hiperbólicas (cf. [8, p. 80]) temos os seguintes resultados.

Proposição VIII. Seja \mathcal{P} um pencil flat em \mathbb{P}^2 , tal que toda componente de Δ_I tem multiplicidade um. Suponhamos que toda componente C de Δ_I é parabólica (veja definição 6.3). Se $\#I_p(\mathcal{P}) \geq 2$, então \mathcal{P} é gerado por uma família de formas logarítmicas. Em particular, \mathcal{P} é gerado por 1-formas meromorfas fechadas e

$$I_p(\mathcal{P}) = \mathbb{Q}.$$

Proposição IX. Seja \mathcal{P} um pencil flat em \mathbb{P}^2 , tal que toda componente de Δ_I tem multiplicidade um. Suponhamos que toda componente C de Δ_I é hiperbólica (veja definição 6.3) e o grupo de monodromia é abeliano (veja definição 6.5). Se $I_p(\mathcal{P}) \neq \emptyset$, então

$$I_p(\mathcal{P}) = \overline{\mathbb{C}}.$$

Além disso, o pencil \mathcal{P} é gerado por 1-formas meromorfas fechadas.

Proposição X. Sejam Ω e η duas 1-formas meromorfas não fechadas em uma superfície compacta X . Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$, o pencil em X , onde \mathcal{F}_α é induzido por $\Omega + \alpha\eta$. Suponha que existe uma 1-forma meromorfa θ em X , tal que $d\Omega = \theta \wedge \Omega$, $d\eta = \theta \wedge \eta$ e $P = (\theta)_\infty$ tem cruzamentos normais e $P \otimes N_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}_X$.

Se o pencil \mathcal{P} é flat, então existe uma função meromorfa f em X , tal que

$$d(f\Omega) = 0 \quad \text{e} \quad d(f\eta) = 0.$$

Em particular, \mathcal{P} é gerado por 1-formas meromorfas fechadas.

Para a prova da proposição anterior, usamos a proposição 10 de [4].

Capítulo 1

Introdução global

Neste capítulo recordaremos alguns conceitos básicos da teoria de folheações, como: fibrados lineares associados a folheações e interseção de fibrados lineares. Também introduziremos o conceito de isogenia entre curvas elípticas e enunciaremos propriedades relacionadas.

1.1 Folheações holomorfas numa superfície compacta

Uma **folheação holomorfa** \mathcal{F} numa superfície complexa compacta X é dada por uma família de 1-formas holomorfas $\{\omega_i\}_{i \in I}$ definida sobre uma cobertura por abertos $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ de X tais que $\omega_i = g_{ij}\omega_j$, com $g_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_{ij})$, onde $U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \emptyset$.

Os cociclos multiplicativos $\{g_{ij}\}_{i,j \in I}$ definem o fibrado linear $N_{\mathcal{F}}$ em X , chamado o **fibrado normal** de \mathcal{F} . Também podemos definir a folheação \mathcal{F} por meio de uma família de campos holomorfos X_i , definidos sobre uma cobertura por abertos $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ de X tais que $X_i = f_{ij}X_j$, com $f_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_{ij})$, onde $U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Então o **fibrado tangente** de \mathcal{F} em X , denotado por $T_{\mathcal{F}}$ é definido pelos cociclos multiplicativos $\{f_{ij}^{-1}\}_{i,j \in I}$.

Se $N_{\mathcal{F}}^*$ e $T_{\mathcal{F}}^*$ denotam os fibrados duais de $N_{\mathcal{F}}$ e $T_{\mathcal{F}}$, respectivamente, então eles estão relacionados por:

$$K_X = N_{\mathcal{F}}^* \otimes T_{\mathcal{F}}^*,$$

onde K_X é o fibrado canónico da superfície X . Seja $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ um blow-up num ponto $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$ e $E = \pi^{-1}(p)$ o divisor em \tilde{X} . Então, em $\tilde{X} \setminus E$ temos a folheação $\pi^*(\mathcal{F}_{X \setminus \{p\}})$, que pode ser estendida a todo \tilde{X} . Esta folheação será denotada por $\tilde{\mathcal{F}}$. Diremos que p é **dicrítica** se E não é invariante por $\tilde{\mathcal{F}}$. Assim,

$$N_{\tilde{\mathcal{F}}} = \pi^*(N_{\mathcal{F}}) \otimes \mathcal{O}(-l(p)E)$$

e

$$T_{\tilde{\mathcal{F}}} = \pi^*(T_{\mathcal{F}}) \otimes \mathcal{O}((l(p) - 1)E),$$

onde

$$l(p) = \begin{cases} m_p(\mathcal{F}), & \text{se } p \text{ é não dicrítica,} \\ m_p(\mathcal{F}) + 1, & \text{se } p \text{ é dicrítica.} \end{cases}$$

1.2 Fibrados lineares e interseção entre fibrados lineares

Fixaremos algumas notações e recordaremos algumas propriedades de fibrados lineares. Dado um fibrado linear L numa superfície compacta X , $c_i(L) \in H^i(X, \mathbb{Z})$ denota a i -ésima classe de Chern, com $i = 1, 2$. Dados dois fibrados lineares L_1 e L_2 em X , $c_1(L_1) \cdot c_1(L_2)$ denotará o produto cup $\langle c_1(L_1), c_1(L_2), [X] \rangle \in H^4(X; \mathbb{Z})$, onde $[X]$ representa a classe fundamental de X . Com tais identificações, dado dois divisores $D_1 \cdot D_2$ em X o **número de interseção** de um par de divisores é definido por:

$$D_1 \cdot D_2 = c_1(\mathcal{O}(D_1)) \cdot c_1(\mathcal{O}(D_2)),$$

onde $\mathcal{O}(D)$ denota o fibrado linear de X , associado ao divisor $D \subset X$.

Sejam $\varphi : X \rightarrow Y$ um morfismo e seja D um divisor de X . Então por definição existe uma cobertura por abertos $\{U_i\}_{i \in I}$ de X , localmente finita, onde em cada U_i temos equações locais f_i . Então as funções $\varphi^*(f_i)$ sobre $\varphi^{-1}(U_i)$ são equações locais (na cobertura $\varphi^{-1}(U_i)$) de algum divisor de X , que denotaremos como $\varphi^*(D)$. Seja $\varphi : X \rightarrow Y$ um morfismo de grau finito. Então a **formula da projeção** para $D_1 \in \text{Div } X$ e $D_2 \in \text{Div } Y$ é dada por

$$\varphi^*(D_1) \cdot \varphi^*(D_2) = \text{deg}(\varphi) D_1 \cdot D_2.$$

1.3 Alguns índices em superfícies

Seja $p \in X$ uma singularidade isolada de \mathcal{F} , e seja (x, y, U) um sistema de coordenadas com $p \in U$ e $x(p) = y(p) = 0$, tal que a folheação \mathcal{F} é representada em U por

$$X(x, y) = P(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y},$$

onde P e Q são funções holomorfas em U e $(P, Q) = 1$.

Seja $J(x, y)$ a matriz Jacobianna de (P, Q) em $(0, 0)$, então podemos definir o **índice de Poincaré-Hopf**, $PH(\mathcal{F}, p)$, como

$$PH(\mathcal{F}, p) = \text{Res}_{(0,0)} \left\{ \frac{\det J}{F \cdot G} dx \wedge dy \right\},$$

que coincide com o número de Milnor do campo X no ponto p , isto é

$$PH(\mathcal{F}, p) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_p}{\langle P, Q \rangle}.$$

Também podemos definir o **índice de Baum-Bott** no ponto singular p , $BB(\mathcal{F}, p)$, como

$$BB(\mathcal{F}, p) = \text{Res}_{(0,0)} \left\{ \frac{(\text{tr } J)^2}{F \cdot G} dx \wedge dy \right\}.$$

Se definimos, $m(\mathcal{F}) = \sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F})} PH(\mathcal{F}, p)$ e $BB(\mathcal{F}) = \sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F})} BB(\mathcal{F}, p)$ então temos a seguinte relação:

$$m(\mathcal{F}) = c_2(X) + BB(\mathcal{F}) - N_{\mathcal{F}} \cdot K_X,$$

(cf [4]).

Agora, seja $C \subset X$ uma curva que não é \mathcal{F} -invariante. Dado $p \in C$, tomamos $f = 0$ uma equação local reduzida de C e X um campo holomorfo como na equação que induz \mathcal{F} em U . O **índice de tangência** de \mathcal{F} em relação a C em p é dado por:

$$\text{Tang}(\mathcal{F}, C, p) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_p}{\langle f, X(f) \rangle}.$$

Definimos

$$\text{Tang}(\mathcal{F}, C) = \sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F}) \cap C} \text{Tang}(\mathcal{F}, p).$$

1.4 Folheações de Riccati e turbulenta

Uma folheação \mathcal{F} sobre uma superfície compacta conexa X é chamado **folheação de Riccati** se existe uma fibração racional $f : X \rightarrow S$, cuja fibra genérica é transversa a \mathcal{F} . Uma folheação \mathcal{F} é de Riccati se, e somente se, $N_{\mathcal{F}} \cdot F = 0$, para toda a fibra F regular de f (cf. [4, p. 50]).

Uma folheação \mathcal{F} sobre uma superfície compacta conexa X é chamado **folheação turbulenta** se existe uma fibração elíptica $f : X \rightarrow S$, cuja fibra genérica é transversa a \mathcal{F} . Uma folheação \mathcal{F} é turbulenta se, e somente se, $T_{\mathcal{F}} \cdot F = 0$, para toda a fibra regular F de f (cf. [4, p. 64]).

Seja X uma superfície complexa compacta e \mathcal{F} uma folheação em X . Diremos que \mathcal{F} tem integral primeira, se existe um mapa não constante $f : X \dashrightarrow S$, onde S uma superfície de Riemann. Suporemos que a fibra genérica de f é irredutível.

1.5 Grupo de Monodromia associado a um fibrado transversal a uma folheação

Seja $f : X \rightarrow S$ uma fibração transversa a uma folheação \mathcal{G} . Pela teoria de folheações transversais às fibras de uma fibração, existe um conjunto aberto $W \subset S$ tal que fixado $c \in W$, temos associada a **representação de holonomia global** \mathcal{H} de \mathcal{G} ,

$$\mathcal{H} : \Pi_1(W, c) \rightarrow \text{Aut}(F_c).$$

Além disso, \mathcal{H} satisfaz as seguintes propriedades:

1. Dado um caminho fechado $\gamma : [0, 1] \rightarrow W$ tal que $\gamma(0) = \gamma(1) = c$, com $[\gamma] \in \Pi_1(W, c)$, e dado um ponto $q \in L \cap F_c$, então $\mathcal{H}(\gamma)(q)$ é o ponto final do único caminho $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow L$ tal que $\tilde{\gamma}(1) = q$ e $f \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.

2. Se denotamos o subgrupo $\mathcal{H}(\Pi_1(W, c))$ de $\text{Aut}(F_c)$ por G_0 , então

$$L \cap F_c = \{g(q) : g \in G_0\}, \quad (1.1)$$

para todo $q \in L \cap F_c$. O grupo G_0 é chamado de **grupo de holonomia global** de \mathcal{G} .

Consideremos uma família de folheações $\{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{C}}$ tal que $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$. Então $\tilde{\mathcal{F}} = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{C}} \mathcal{F}_\alpha$ é uma folheação em $\mathcal{M} = X \times \mathbb{C}$. Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, seja $D_\varepsilon = \{|z| < \varepsilon\}$, então a **deformação de holonomia** de \mathcal{F}_0 é dada por

$$\begin{aligned} H_\delta : \Sigma' \times D_\varepsilon &\rightarrow \Sigma' \times D_\varepsilon \\ (q, \alpha) &\mapsto (h_\delta(q, \alpha), \alpha), \end{aligned}$$

onde $h_\delta(q, 0) = h_\delta(q)$ é a holonomia de \mathcal{F}_0 .

1.6 Algumas propriedades das curvas elípticas

Definição 1.1. Sejam E_1, E_2 duas curvas elípticas. Diremos que E_1 é **isógena** a E_2 se existe um homomorfismo sobrejetivo $\lambda : E_1 \rightarrow E_2$ cujo núcleo é finito. Tal homomorfismo é chamado de **isogenia**.

Sejam Λ_1 e Λ_2 dois reticulados em \mathbb{C} , e sejam E_1 e E_2 as curvas elípticas induzidas por Λ_1 e Λ_2 , respectivamente. Denotemos o conjunto das isogênias de E_1 em E_2 por $\text{Hom}(E_1, E_2)$. Então $\text{Hom}(E_1, E_2)$ é um grupo com as operações naturais de soma e multiplicação por escalar.

Seja $\text{End}(E) = \text{Hom}(E, E)$, onde E é uma curva elíptica. Suponha que $\alpha \in \mathbb{C}$ tem a propriedade $\alpha\Lambda_1 \subset \Lambda_2$. Então a multiplicação pelo escalar α induz um homomorfismo holomorfo bem-definido, a saber:

$$\phi_\alpha : \mathbb{C}/\Lambda_1 \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda_2, \quad \phi_\alpha(z) = \alpha z \pmod{\Lambda_2}.$$

Naturalmente, essa aplicação induz uma isogenia entre E_1 e E_2 .

Teorema 1.2 ([21]). A aplicação

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \{\alpha \in \mathbb{C} : \alpha\Lambda_1 \subset \Lambda_2\} & \rightarrow & \{\text{isogênias } \phi : E_1 \rightarrow E_2\} \\ \alpha & \mapsto & \phi_\alpha \end{array} \right\},$$

é um isomorfismo.

Sejam $X = E \times E$, onde $E \subset X$ é uma curva elíptica. Seja ainda C um subtoro de X passando por $(0, 0)$. Então existem $\alpha, \beta \in \text{End}(E)$ tais que C é a imagem do morfismo:

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha, \beta} : E &\rightarrow X \\ x &\mapsto (\alpha_1 \cdot x, \beta_1 \cdot x) \end{aligned} .$$

Denotaremos por $E_{\alpha, \beta}$ a imagem da aplicação $\varphi_{\alpha, \beta}$.

Definimos um **campo numérico** como um subcampo K de \mathbb{C} tal que $[K : \mathbb{Q}]$ é finito. Seja $B \subset \mathbb{C}$ o anel dos inteiros algébricos. Então definimos o **anel dos inteiros** de K como $\mathfrak{D} = K \cap B$. Além disso, dizemos que K é um **campo quadrático** se $[K : \mathbb{Q}] = 2$. Seja $E = \mathbb{C}/\Gamma$, onde $\Gamma = \langle 1, \tau \rangle$ é uma curva elíptica então $\text{End}(E) \simeq \{\alpha \in \mathbb{C} : \alpha\Gamma \subset \Gamma\}$. Se $K = \text{End}(E) \otimes \mathbb{Q}$ then K é um campo quadrático tal que $\mathfrak{D}_K \simeq \text{End}(E)$ (cf. [21, pág 176])

Seja K um campo numérico. Então, dado um ideal I de O_K , podemos definir a **norma do ideal** I como o ordem do ideal quociente O_K/I denotado por $N(I)$, que é finito (cf. [41]).

Dados $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \text{End}(E)$, onde E é uma curva elíptica, temos que o número de interseção das curvas elípticas $E_{\alpha, \beta}$ e $E_{\gamma, \delta}$ é dado por:

$$E_{\alpha, \beta} \cdot E_{\gamma, \delta} = \frac{N\left(\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\right)}{N(\alpha, \beta)N(\gamma, \delta)}, \quad (1.2)$$

onde $N(a_1, \dots, a_r)$ representa a norma do ideal gerado por $a_1, \dots, a_r \in \text{End}(E)$ (cf. [19, lema 3]).

Capítulo 2

Famílias lineares de folheações

Ao longo do presente trabalho, X denotará uma superfície complexa compacta.

Sejam \mathcal{F} e \mathcal{G} duas folheações distintas em X com singularidades isoladas, tais que $N_{\mathcal{F}} = N_{\mathcal{G}}$. Então, existem uma cobertura por abertos $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ de X e coleções $(w_i)_{i \in I}$, $(\eta_i)_{i \in I}$, $(g_{ij})_{U_{ij} \neq \emptyset}$, tais que:

1. w_i e η_i são 1-formas holomorfas em U_i , que definem \mathcal{F} e \mathcal{G} em U_i , respectivamente.
2. Se $U_{ij} \neq \emptyset$, então $w_i = g_{ij}w_j$ e $\eta_i = g_{ij}\eta_j$ em U_{ij} , onde $U_{ij} = U_i \cap U_j$.

Pela condição 2, dado $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$, as coleções $\{U_i, w_i + \alpha\eta_i, g_{ij}\}_{i \in I}$ definem uma folheação \mathcal{F}_α . Assim, temos uma família linear de folheações $\{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ tal que $N_{\mathcal{F}_\alpha} = N_{\mathcal{F}}$, para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$. Observe que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$ e $\mathcal{G} = \mathcal{F}_\infty$.

Definição 2.1. Dadas \mathcal{F} e \mathcal{G} duas folheações distintas em X , tais que $N_{\mathcal{F}} = N_{\mathcal{G}}$, diremos que $\mathcal{P}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) := \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ é o **pencil** gerado por \mathcal{F} e \mathcal{G} .

Observação 2.2. Se $\mathcal{P}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ é o pencil gerado por \mathcal{F} e \mathcal{G} , então para todo $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{C}}$, com $\alpha \neq \beta$, $\mathcal{P}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \mathcal{P}(\mathcal{F}_\alpha, \mathcal{F}_\beta)$. Isto justifica o fato que às vezes não faremos referência explícita aos geradores de um pencil, isto é, o pencil $\mathcal{P}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ por vezes será denotado simplesmente como \mathcal{P} .

Lembremos que, dadas duas folheações \mathcal{F} e \mathcal{G} , o **conjunto de tangência entre \mathcal{F} e \mathcal{G}** , $\text{Tang}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ é o conjunto analítico

$$\text{Tang}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \cap U_i = \{p \in X : w_i \wedge \eta_i(p) = 0\}.$$

Analogamente à observação anterior, se $\mathcal{P}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ é o pencil gerado por \mathcal{F} e \mathcal{G} , então para todo $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{C}}$, com $\alpha \neq \beta$,

$$\text{Tang}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \text{Tang}(\mathcal{F}_\alpha, \mathcal{F}_\beta).$$

Assim, podemos definir o **conjunto de tangência** $\Delta(\mathcal{P})$ do pencil $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ como

$$\Delta(\mathcal{P}) = \text{Tang}(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_\infty).$$

Também podemos definir o **conjunto singular de \mathcal{F}_α** , para $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$, como o conjunto analítico $\text{Sing}(\mathcal{F}_\alpha)$ tal que $\text{Sing}(\mathcal{F}_\alpha) \cap U_i = \{w_{i,\alpha} = w_i + \alpha\eta_i = 0\}$.

Exemplo 2.3. Seja $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ e seja (x, y, \mathbb{C}^2) um sistema de coordenadas em X . Considere \mathcal{F} e \mathcal{G} duas folheações em X tais que $\mathcal{F}|_{\mathbb{C}^2}$ é induzida pela 1-forma $dy = 0$ e $\mathcal{G}|_{\mathbb{C}^2}$ é induzida pela 1-forma $dx = 0$.

Então podemos definir o pencil $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ gerado por \mathcal{F} e \mathcal{G} , onde \mathcal{F}_α é definido em \mathbb{C}^2 por

$$dy + \alpha dx = 0.$$

Em outras coordenadas (x, t, \mathbb{C}^2) , (u, y, \mathbb{C}^2) e (u, t, \mathbb{C}^2) , onde $(u = \frac{1}{x}, t = \frac{1}{y})$, \mathcal{F}_α é definido por

$$\begin{aligned} dt - \alpha t^2 dx &= 0, \\ -u^2 dy + \alpha du &= 0, \\ u^2 dt + \alpha t^2 du &= 0, \end{aligned}$$

respectivamente. Neste caso,

$$\text{Sing}(\mathcal{F}_\alpha) = \begin{cases} \{\infty\} \times \mathbb{P}^1, & \text{se } \alpha = 0 \\ \mathbb{P}^1 \times \{\infty\}, & \text{se } \alpha = \infty \\ \{(\infty, \infty)\}, & \text{se } \alpha \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\} \end{cases}$$

e

$$\Delta(\mathcal{P}) = \text{Sing}(\mathcal{F}_0) \cup \text{Sing}(\mathcal{F}_\infty).$$

Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ um pencil de folheações em uma superfície X . Então claramente temos que $\text{Sing}(\mathcal{F}_\alpha) \subset \Delta(\mathcal{P})$, para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$. Seja $p \in \Delta(\mathcal{P}) \setminus (\text{Sing}(\mathcal{F}_0) \cup \text{Sing}(\mathcal{F}_\infty))$, então existe um aberto U_i , com $p \in U_i$, e existe $\alpha_0 \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\}$, tais que $(\omega_i + \alpha_0 \eta_i)(p) = 0$. Assim $p \in \text{Sing}(\mathcal{F}_{\alpha_0})$ e portanto

$$\bigcup_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}} \text{Sing}(\mathcal{F}_\alpha) = \Delta(\mathcal{P}).$$

Observação 2.4. Em particular, $\Delta(\mathcal{P}) = \emptyset$ se, e somente se, $\text{Sing}(\mathcal{F}_\alpha) = \emptyset$, para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$.

Exemplo 2.5. Sejam $X = \mathbb{C}^2/\Gamma$ um toro complexo e $\pi : \mathbb{C}^2 \rightarrow X$ a projeção natural. Seja \mathcal{P} o pencil induzido em X pela família linear de 1-formas holomorfas em \mathbb{C}^2

$$dx + \alpha dy.$$

Claramente $\text{Sing}(\mathcal{F}_\alpha) = \emptyset$, para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$, e portanto $\Delta(\mathcal{P}) = \emptyset$, pela observação 2.4.

Sejam $\mathcal{P}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ um pencil em uma superfície X , $\Delta(\mathcal{P})$ seu conjunto de tangência e denotemos por $[\Delta(\mathcal{P})]$ o divisor definido por $\Delta(\mathcal{P})$. Então

$$\mathcal{O}_X([\Delta(\mathcal{P})]) = T_{\mathcal{F}^*} \otimes N_{\mathcal{G}}. \quad (2.1)$$

Com efeito, seja $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ uma cobertura por abertos de X e sejam (w_i, g_{ij}, U_i) , (η_i, g_{ij}, U_i) coleções que definem as folheações \mathcal{F} e \mathcal{G} em U_i respectivamente, tais que

$w_i = g_{ij}w_j$ e $\eta_i = g_{ij}\eta_j$, sempre que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Para cada $i \in I$, a 1-forma w_i tem associada um campo X_i em U_i , tal que $X_i = f_{ij}X_j$ e o cociclo $\{f_{ij}\}$ define o fibrado cotangente $T_{\mathcal{F}^*}$. Agora, se $f_j = i_{X_j}(\eta_j)$, então $\Delta(\mathcal{P}) \cap U_j = \{f_j = 0\}$. Além disso, quando $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, temos

$$f_i = i_{f_{ij}X_j}(g_{ij}X_j) = f_{ij}g_{ij}f_j,$$

o que implica (2.1).

Um pencil $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ pode ter elementos com singularidades não isoladas, como mostra o exemplo 2.3 e o seguinte exemplo.

Exemplo 2.6. Seja $X = \mathbb{P}^2$ com coordenadas homogêneas $[X : Y : Z]$. Consideremos $E_1 := \{Z = 1\}$ e o sistema de coordenadas (x, y, E_1) , onde

$$(x, y) : \quad E_1 \quad \rightarrow \quad \mathbb{C}^2 \\ (X, Y, Z) \quad \mapsto \quad \left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z} \right) = (x, y) .$$

Considere o pencil $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ definido em E_1 por:

$$w_\alpha = xdy + \alpha ydx.$$

Neste caso, $\text{Sing}(\mathcal{F}_\alpha) = \{[0 : 0 : 1], [1 : 0 : 0], [0 : 1 : 0]\}$, para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, -1, \infty\}$, $\text{Sing}(\mathcal{F}_0) = \{X = 0\}$, $\text{Sing}(\mathcal{F}_\infty) = \{Y = 0\}$ e $\text{Sing}(\mathcal{F}_{-1}) = \{Z = 0\}$. Logo \mathcal{F}_0 , \mathcal{F}_∞ e \mathcal{F}_{-1} têm singularidades não isoladas.

Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ um pencil em X . Definimos o conjunto

$$NI(\mathcal{P}) := \{\alpha \in \overline{\mathbb{C}} : \mathcal{F}_\alpha \text{ tem singularidades não isoladas}\}.$$

Como $NI(\mathcal{P})$ é um conjunto algébrico de $\overline{\mathbb{C}}$, temos o seguinte lema:

Lema 2.7. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ um pencil em X . Se $\text{Sing}(\mathcal{F}_0) \cap \text{Sing}(\mathcal{F}_\infty)$ tem codimensão 2, então $NI(\mathcal{P})$ é finito.

Como consequência imediata do lema anterior temos o seguinte corolário:

Corolário 2.8. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ um pencil em X . Se \mathcal{F}_0 tem singularidades isoladas então $NI(\mathcal{P})$ é finito.

Observação 2.9. Sob as condições acima, suponha que \mathcal{F}_0 e \mathcal{F}_∞ são definidas pelas coleções $(w_i, g_{ij}, U_i)_{i \in I}$ e $(\eta_i, g_{ij}, U_i)_{i \in I}$, respectivamente, e seja $D := \text{Sing}(\mathcal{F}_0) \cap \text{Sing}(\mathcal{F}_\infty)$. Se D tem codimensão 1 (como queremos que o conjunto $NI(\mathcal{P})$ seja finito) fazemos o seguinte: para cada $i \in I$, sejam $D \cap U_i = \{d_i = 0\}$,

$$\tilde{w}_i = \frac{w_i}{d_i}, \quad \tilde{\eta}_i = \frac{\eta_i}{d_i} \quad \text{e} \quad \tilde{g}_{ij} = \frac{g_{ij}d_j}{d_i}.$$

Assim as coleções $(\tilde{w}_i, \tilde{g}_{ij}, U_i)_{i \in I}$, $(\tilde{\eta}_i, \tilde{g}_{ij}, U_i)_{i \in I}$, definem folheações $\tilde{\mathcal{F}}$ e $\tilde{\mathcal{G}}$, tais que $\tilde{D} = \text{Sing}(\tilde{\mathcal{F}}) \cap \text{Sing}(\tilde{\mathcal{G}})$, tem codimensão dois. Logo, pelo lema 2.7 o pencil $\tilde{\mathcal{P}} := \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{G}})$, tem conjunto $NI(\tilde{\mathcal{P}})$ finito.

2.1 Curvatura de um pencil

Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{C}}$ um pencil em X , definido pelas coleções $(\omega_i + \alpha\eta_i, U_i, g_{ij})_{i,j \in I}$. Dado $i \in I$, podemos encontrar uma única 1-forma meromorfa θ_i em U_i e holomorfa em $U_i \setminus \Delta$, tal que

$$\begin{aligned} dw_i &= \theta_i \wedge w_i \\ d\eta_i &= \theta_i \wedge \eta_i \end{aligned} \tag{2.2}$$

em U_i . De fato, existe um sistema de coordenadas locais (U_i, x, y) , tal que $w_i = A_i dy - B_i dx$ e $\eta_i = D_i dy - E_i dx$ em U_i . Então

$$\theta_i = \frac{1}{\Delta_i} ((B_i M_i - E_i N_i) dx + (D_i N_i - A_i M_i) dy)$$

onde $\Delta_i := \Delta(\mathcal{P}) \cap U_i = \{D_i B_i - A_i E_i = 0\}$, $M_i = \partial_y E_i + \partial_x D_i$ e $N_i = \partial_y B_i + \partial_x A_i$.

Como $w_i = g_{ij} w_j$ e $\eta_i = g_{ij} \eta_j$ em $U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \emptyset$, obtemos de (2.2) que

$$\begin{aligned} w_i \wedge \left(\theta_i - \theta_j - \frac{dg_{ij}}{g_{ij}} \right) &= 0, \\ \eta_i \wedge \left(\theta_i - \theta_j - \frac{dg_{ij}}{g_{ij}} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Logo em $U_{ij} \setminus \Delta(\mathcal{P})$ temos

$$\theta_i - \theta_j = \frac{dg_{ij}}{g_{ij}}. \tag{2.3}$$

De (2.3), podemos definir uma 2-forma holomorfa Θ em $X \setminus \Delta(\mathcal{P})$, tal que

$$\Theta|_{U_i \setminus \Delta(\mathcal{P})} = d\theta_i.$$

Lema 2.10. A 2-forma Θ pode ser estendida meromorficamente a $\Delta(\mathcal{P})$.

Prova: Segue de imediato pela unicidade de θ_i em U_i . □

Observação 2.11. A forma Θ não depende das formas que definem o pencil, ou seja, se o pencil é definido pelas coleções $\{\tilde{w}_i = f_i w_i\}$, $\{\tilde{\eta}_i = f_i \eta_i\}$ e $\{g_{ij}\}$, onde $f_i \in \mathcal{O}^*(U_i)$, então

$$\tilde{\theta}_i = \frac{df_i}{f_i} + \theta_i, \quad d\tilde{w}_i = \tilde{\theta}_i \wedge \tilde{w}_i, \quad d\tilde{\eta}_i = \tilde{\theta}_i \wedge \tilde{\eta}_i.$$

Assim $\Theta = d\theta_i = d\tilde{\theta}_i$, e portanto Θ depende somente do pencil \mathcal{P} .

Como vimos, dado um pencil \mathcal{P} em uma superfície X , associamos uma 2-forma meromorfa $\Theta(\mathcal{P})$ em X , a qual é holomorfa em $X \setminus \Delta(\mathcal{P})$.

Definição 2.12. Dado um pencil \mathcal{P} em X , diremos que $\Theta(\mathcal{P})$ é a **curvatura** de \mathcal{P} .

Definição 2.13. Diremos que o pencil \mathcal{P} é **flat** se a sua curvatura $\Theta(\mathcal{P})$ é nula, ou seja, $\Theta(\mathcal{P}) \equiv 0$.

Uma das propriedades importantes de um pencil flat $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ é a seguinte: dadas \mathcal{F}_{α_1} , \mathcal{F}_{α_2} e \mathcal{F}_{α_3} elementos de \mathcal{P} com $\alpha_i \neq \alpha_j$ se $i \neq j$, podemos definir uma 3-web regular local com curvatura zero fora do conjunto $\Delta(\mathcal{P})$, isto é, para cada $p \in X \setminus \Delta(\mathcal{P})$, existe um sistema de coordenadas $((x, y), U)$ com $p \in U$ e $x(p) = y(p) = 0$, tal que as 1-formas

$$dx = 0, \quad dy = 0 \quad \text{e} \quad dx + dy = 0$$

definem \mathcal{F}_{α_1} , \mathcal{F}_{α_2} e \mathcal{F}_{α_3} em U , respectivamente, como mostra a figura 2.1.

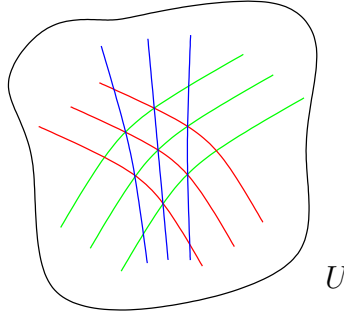


Figura 2.1: 3-web regular local com curvatura zero

O seguinte lema mostra esta propriedade geométrica de um pencil flat [25, lema 2.14].

Lema 2.14. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ um pencil flat sobre uma superfície compacta X . Dado $p \in X \setminus \Delta(\mathcal{P})$, existe um sistema de coordenadas locais (U, x, y) , com $p \in U$ e $(x, y) : U \rightarrow \mathbb{C}^2$, tal que dado $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$, a folheação \mathcal{F}_α é definida em U por

$$dy + \alpha dx.$$

Além disso, se $(V, (u, v))$ é um outro sistema de coordenadas com $U \cap V$ conexo e não vazio e \mathcal{F}_α é dado por $dv + \alpha du$, então $du = \lambda dx$ e $dv = \lambda dy$, onde $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Exemplo 2.15. Cada um dos exemplos abaixo define um pencil de curvatura zero em \mathbb{P}^2 . Estes exemplos podem ser encontrados em [25].

1. Pencil de grau 2 definido por:

$$\mathcal{P}_2 \begin{cases} w_1 = (4x - 9x^2 + y^2)dy - (6y - 12xy)dx \\ \eta_1 = (2y - 4xy)dy - 3(x^2 - y^2)dx \end{cases}$$

2. Pencil de grau 3 definido por:

$$\mathcal{P}_3 \begin{cases} w_2 = (-x + 2y^2 - 4x^2y + x^4)dy - y(-2 - 3xy + x^3)dx \\ \eta_2 = (2y - x^2 + xy^2)dy - (3xy - x^3 + 2y^3)dx \end{cases}$$

3. Pencil de grau 4 definido por:

$$\mathcal{P}_4 \begin{cases} w_3 = (x^3 - 1)xdy - (y^3 - 1)ydx \\ \eta_3 = (x^3 - 1)y^2dy - (y^3 - 1)x^2dx \end{cases}$$

4. Pencil de grau 3 definido por:

$$\mathcal{P}'_3 \begin{cases} w_4 = (-4x + x^3 + 3xy^2)dy - 2y(y^2 - 1)dx \\ \eta_4 = (x^2y - y^3)dy - 2x(y^2 - 1)dx \end{cases}$$

Para cada $i = 1, \dots, 4$, existe uma forma meromorfa fechada θ_i tal que:

$$\begin{aligned} dw_i &= \theta_i \wedge w_i, \\ d\eta_i &= \theta_i \wedge \eta_i, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{5}{6} \frac{d\Delta_1}{\Delta_1}, & \Delta_1 &= -4y^2 + 4x^3 + 12xy^2 - 9x^4 - 6x^2y^3 - y^4, \\ \theta_2 &= \frac{2}{3} \frac{d\Delta_2}{\Delta_2} + \frac{2}{3} \frac{dP_2}{P_2}, & \Delta_2 &= (y^2 - x) \left(y - \frac{x^2}{4} \right) (y^3 - x^3 + 3xy + 1), \quad P_2 = y - \frac{x^2}{4}, \\ \theta_3 &= \frac{2}{3} \frac{d\Delta_3}{\Delta_3}, & \Delta_3 &= (x^3 - 1)(y^3 - 1)(x^3 - y^3), \\ \theta_4 &= \frac{3}{4} \frac{d\Delta_4}{\Delta_4}, & \Delta_4 &= (y^2 - 1)(x + 2 + y^2 - 2x)(x^2 + y^2 + 2x). \end{aligned}$$

Observação 2.16. Sob certas condições Lins Neto em [25], prova que qualquer pencil em \mathbb{P}^2 tem que ser de umas das formas descritas acima.

Exemplo 2.17. Sejam Ω_0 e Ω_∞ 1-formas meromorfas fechadas em X tais que $\Omega_0 \wedge \Omega_\infty \neq 0$. Então podemos definir um pencil flat $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$.

De fato, seja $\{U_i\}_{i \in I}$ uma cobertura por abertos de X , tal que dado $i \in I$:

$$\Omega_0|_{U_i} = \frac{\omega_{i,0}}{f_i} \quad \text{e} \quad \Omega_\infty|_{U_i} = \frac{\omega_{i,\infty}}{g_i},$$

onde f_i e g_i são funções holomorfas em U_i . Dado $\alpha \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\}$,

$$\Omega_0 + \alpha \Omega_\infty|_{U_i} = \frac{\bar{\omega}_{i,\alpha}}{f_i g_i}.$$

Assim, fixados $\alpha_1, \alpha_2 \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\}$, definimos as 1-formas meromorfas $\Omega := \Omega_0 + \alpha_1 \Omega_\infty$ e $\eta := \Omega_0 + \alpha_2 \Omega_\infty$. Definimos ainda $\tilde{\omega}_i = \bar{\omega}_{i,\alpha_1}$ e $\tilde{\eta}_i = \bar{\omega}_{i,\alpha_2}$, para cada $i \in I$. Assim

$$\tilde{\omega}_i = \frac{f_i g_i}{f_j g_j} \tilde{\omega}_j \quad , \quad \tilde{\eta}_i = \frac{f_i g_i}{f_j g_j} \tilde{\eta}_j. \quad (2.4)$$

Logo, podemos definir o conjunto analítico T , dado por $T \cap U_i = \{\tilde{\omega}_i \wedge \tilde{\eta}_i = 0\}$. Como T tem finitas componentes irredutíveis, existe um conjunto finito $F \subset \overline{\mathbb{C}}$ tal que, dados $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{C}} \setminus F$, $|(\tilde{\omega}_i + \alpha \tilde{\eta}_i)_0| = |(\tilde{\omega}_i + \beta \tilde{\eta}_i)_0|$, para todo $i \in I$, implicando que $(\Omega + \alpha \eta)_0 = (\Omega + \beta \eta)_0$ e $(\Omega + \alpha \eta)_\infty = (\Omega + \beta \eta)_\infty$, para $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{C}} \setminus F$.

Dado $\alpha \in \overline{\mathbb{C}} \setminus F$, seja \mathcal{F}_α a folheação induzida por $\Omega + \alpha \eta$. Então por [4, p. 20], para $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{C}} \setminus F$, temos

$$N_{\mathcal{F}_\alpha} = (\Omega + \alpha \eta)_\infty - (\Omega + \alpha \eta)_0 = (\Omega + \beta \eta)_\infty - (\Omega + \beta \eta)_0 = N_{\mathcal{F}_\beta}.$$

Portanto podemos definir o pencil $\mathcal{P}(\mathcal{F}_\alpha, \mathcal{F}_\beta)$ gerado por \mathcal{F}_α e \mathcal{F}_β . Pela equação (2.4) note que é fácil provar que \mathcal{P} é flat.

Em particular, se consideramos o pencil $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \bar{\mathbb{C}}}$ de folheações logarítmicas em \mathbb{P}^2 , definidas num sistema afim pelas 1-formas meromorfas fechadas:

$$\Omega_\alpha = \sum_{i=1}^k (\lambda_i + \alpha \mu_i) \frac{df_i}{f_i},$$

onde $k \geq 2$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in (\mathbb{C}^*)^k$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k) \in (\mathbb{C}^*)^k$ e f_1, \dots, f_k são polinômios em \mathbb{C}^2 , então \mathcal{P} é flat.

Exemplo 2.18. Sejam $X = \mathbb{C}^2/\Gamma$ um toro complexo e $\pi : \mathbb{C}^2 \rightarrow X$ a projeção natural. Considere o pencil \mathcal{P} induzido em X pela família linear de 1-formas holomorfas fechadas em \mathbb{C}^2 dado por

$$dx + \alpha dy.$$

Então, pelo exemplo 2.17, o pencil é flat.

Observação 2.19. Sob as notações dos exemplos anteriores, lembremos que no exemplo 2.3 temos o pencil $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \bar{\mathbb{C}}}$, onde \mathcal{F}_α é definido em \mathbb{C}^2 por

$$dy + \alpha dx = 0.$$

Nesse caso $F = \{0, \infty\}$. Por outro lado, no exemplo 2.6 temos o pencil $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \bar{\mathbb{C}}}$, onde \mathcal{F}_α é definido em \mathbb{C}^2 por

$$\frac{dy}{y} + \alpha \frac{dx}{x} = 0,$$

e $F = \{0, -1, \infty\}$.

Exemplo 2.20. Sejam Ω e η duas 1-formas meromorfas em X . Seja o pencil $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \bar{\mathbb{C}}}$ em X , onde \mathcal{F}_α é induzido por $\Omega + \alpha \eta$. Suponha que existe uma 1-forma meromorfa fechada θ em X tal que :

$$d\Omega = \theta \wedge \Omega, d\eta = \theta \wedge \eta. \quad (2.5)$$

Então \mathcal{P} é um pencil flat.

De fato, pelo exemplo 2.17 podemos supor, após uma reparametrização, que $(\Omega)_0 = (\eta)_0$ e $(\Omega)_\infty = (\eta)_\infty$. Logo, existe uma cobertura por abertos $\{U_i\}_{i \in I}$ de X , tal que, dado $i \in I$:

$$\Omega|_{U_i} = \frac{w_i}{f_i} \quad \text{e} \quad \eta|_{U_i} = \frac{\eta_i}{f_i}, \quad (2.6)$$

onde $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$. Além disso, as coleções $(\omega_i + \alpha \eta_i, \frac{f_j}{f_i}, U_i)$ definem \mathcal{F}_α , para todo $\alpha \in \bar{\mathbb{C}}$.

Assim, das equações (2.5) e (2.6), temos que:

$$d\omega_i = \left(\frac{df_i}{f_i} + \theta\right) \wedge \omega \quad \text{e} \quad d\eta_i = \left(\frac{df_i}{f_i} + \theta\right) \wedge \eta_i,$$

logo \mathcal{P} é flat.

Exemplo 2.21 (O pull-back de um pencil flat é um pencil flat). Seja $f : Y \rightarrow X$ uma aplicação holomorfa, onde Y e X são superfícies complexas compactas. Se \mathcal{P} é um pencil em X , então podemos definir o pencil pull-back $f^*\mathcal{P}$ em Y .

De fato, como $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ é um pencil em X , então existe uma cobertura por abertos $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ de X , tal que \mathcal{F}_α é definida pelas coleções $(\omega_i + \alpha\eta_i, U_i, g_{ij})_{i,j \in I}$.

Logo, dado $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$ as coleções

$$(f^*(w_i) + \alpha f^*(\eta_i), V_i = (f^{-1}(U_i), g_{ij} \circ f)_{i,j \in I},$$

definem a folheação $f^*(\mathcal{F}_\alpha)$ em Y . Sejam $f^*(\mathcal{P}) = \{f^*(\mathcal{F}_\alpha)\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$, $f^*(\Delta(\mathcal{P}))$ o seu conjunto de tangência e $D = \text{Sing } f^*(\mathcal{F}_0) \cap \text{Sing } f^*(\mathcal{F}_\infty)$. Temos duas possibilidades

1. Se $\text{cod}(D) = 2$, então para $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$

$$f^*(\mathcal{N}_{\mathcal{F}_\alpha}) = \mathcal{N}_{\tilde{\mathcal{F}}_\alpha} + \sum_{k=1}^{n_\alpha} n_{k,\alpha} C_{k,\alpha}, \quad (2.7)$$

onde $\sum_{k=1}^{n_\alpha} n_{k,\alpha} C_{k,\alpha}$ denota o divisor de singularidades de $f^*(\mathcal{F}_\alpha)$ e $\tilde{\mathcal{F}}_\alpha$ tem singularidades isoladas. Além disso, $|C_{k,\alpha}| \subseteq f^*(\Delta(\mathcal{P}))$, para todo $k \in \{1, \dots, n_\alpha\}$. Logo $|C_{k,\alpha}|$ é uma componente de $f^*(\Delta(\mathcal{P}))$, para todo $k \in \{1, \dots, n_\alpha\}$. Porém, como $f^*(\Delta(\mathcal{P}))$ tem finitas componentes, então existem um conjunto finito $F \subset \overline{\mathbb{C}}$ e curvas C_1, \dots, C_l com $l \in \mathbb{N}$, tais que, dado $\alpha \in \overline{\mathbb{C}} \setminus F$ temos que $l = n_\alpha$ e $C_k = C_{k,\alpha}$ para todo $k \in \{1, \dots, l\}$. Assim podemos simplificar (2.7) obtendo:

$$f^*(\mathcal{N}_{\mathcal{F}_\alpha}) = \mathcal{N}_{\tilde{\mathcal{F}}_\alpha} + \sum_{k=1}^l n_{k,\alpha} C_k.$$

Além disso, como $\text{cod}(D) = 2$ podemos supor sem perda de generalidade que dado $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{C}} \setminus F$, $n_{k,\alpha} = n_{k,\beta}$ para todo $k = 1, \dots, l$. Então, $\mathcal{N}_{\tilde{\mathcal{F}}_\alpha} = \mathcal{N}_{\tilde{\mathcal{F}}_\beta}$, para todo $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{C}} \setminus F$, pois $f^*(\mathcal{N}_{\mathcal{F}_\alpha}) = f^*(\mathcal{N}_{\mathcal{F}_\beta})$. Logo definimos o pencil pull-back $f^*\mathcal{P} := \{\tilde{\mathcal{F}}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$.

2. Se $\text{cod}(D) = 1$, seja $D \cap V_i = \{d_i = 0\}$. Definamos

$$\tilde{w}_i = \frac{f^*(w_i)}{d_i} \text{ e } \tilde{\eta}_i = \frac{f^*(\eta_i)}{d_i}.$$

Assim, temos coleções $\left(V_i, \tilde{w}_i, f^*g_{ij} \frac{d_j}{d_i}\right)$ e $\left(V_i, \tilde{\eta}_i, f^*g_{ij} \frac{d_j}{d_i}\right)$, que definem folheações $\tilde{\mathcal{F}}$ e $\tilde{\mathcal{G}}$ em Y , respectivamente tais que $\text{Sing } \tilde{\mathcal{F}} \cap \text{Sing } \tilde{\mathcal{G}}$ tem codimensão 2. Então, pela primeira parte, existe um conjunto finito F tal que, dados $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{C}} \setminus F$ tem-se que $\mathcal{N}_{\tilde{\mathcal{F}}_\alpha} = \mathcal{N}_{\tilde{\mathcal{F}}_\beta}$. Logo definimos $f^*\mathcal{P} := \{\tilde{\mathcal{F}}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$.

De 1 e 2 é imediato provar que se o pencil \mathcal{P} é flat então $f^*\mathcal{P}$ também é.

Analogamente, seja $\pi : Bl_p(X) \rightarrow X$ o blow-up num ponto $p \in X$. Então, dado um pencil \mathcal{P} em $Bl_p X$, podemos definir o pencil $\pi_* \mathcal{P}$ em X .

Logo dada uma aplicação meromorfa $f : Y \dashrightarrow X$ e dado um pencil \mathcal{P} em X , podemos definir um pencil $f^* \mathcal{P}$ em Y . Com efeito, seja $\pi : \tilde{Y} \rightarrow Y$ a aplicação de dessingularização dos pontos de indeterminação de f . Então existe uma aplicação holomorfa $\tilde{f} : \tilde{Y} \rightarrow X$ que faz comutar o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Y} & & \\ \pi \downarrow & \searrow \tilde{f} & \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array} .$$

Assim definimos $f^* \mathcal{P} := \pi_* \tilde{f}^* \mathcal{P}$. Analogamente ao caso anterior, se \mathcal{P} é flat então $f^* \mathcal{P}$ também é.

Lema 2.22. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \bar{\mathbb{C}}}$ um pencil em X . Se $\Delta(\mathcal{P}) = \emptyset$ então o pencil \mathcal{P} é flat.

Prova: É suficiente provar que $\int_X \Theta \wedge \bar{\Theta} = 0$, onde Θ é a curvatura do pencil \mathcal{P} . Pela definição de \mathcal{P} , dado $\alpha \in \bar{\mathbb{C}}$, a folheação \mathcal{F}_α é definida pelas coleções $(\omega_i + \alpha \eta_i, U_i, g_{ij})_{i,j \in I}$ e, para cada $i \in I$, podemos encontrar uma única 1-forma meromorfa θ_i em U_i e holomorfa em $U_i \setminus \Delta$, tal que:

i) $dw_i = \theta_i \wedge w_i$ e $d\eta_i = \theta_i \wedge \eta_i$ em U_i ;

ii) $\theta_i - \theta_j = \frac{dg_{ij}}{g_{ij}}$ em $U_i \cap U_j \setminus \Delta(\mathcal{P})$.

Como $\Delta(\mathcal{P}) = \emptyset$ então $\theta_i \in \Omega^1(U_i)$, para todo $i \in I$. Assim pelo item ii), $\Theta|_{U_i} = d\theta_i$ é uma 2-forma holomorfa em X . Do isomorfismo

$$\begin{aligned} H^2(X, \mathbb{C}) &\simeq H_{\text{DR}}^2(X) \\ c_1(\mathcal{N}_{\mathcal{F}}) &\leftrightarrow 2\pi i \Theta \end{aligned}$$

obtemos que o representante de $c_1(\mathcal{N}_{\mathcal{F}})$ na cohomologia de DeRham é $2\pi i \Theta$. Pela equação (2.1) claramente temos que $T_{\mathcal{F}} = N_G$, e como $K_X = T_{\mathcal{F}}^* \otimes N_{\mathcal{F}}^*$ então $c_1(K_X) = -2c_1(N_{\mathcal{F}})$, e portanto $\Theta = -\frac{c_1(K_X)}{4\pi i}$. Logo

$$\int_X \Theta \wedge \bar{\Theta} = -\frac{1}{4\pi i} \int_X c_1(K_X) \wedge \bar{\Theta}. \quad (2.8)$$

Como $\Theta \in H^0(X, \Omega^2(X))$ então Θ define uma seção em $H^0(X, K_X)$ tal que $[K_X] = (\Theta)_0$. Logo se $(\Theta)_0 = [K_X] = \sum_{j=1}^n n_j C_j$, em (2.8) temos:

$$\int_X \Theta \wedge \bar{\Theta} = -\frac{1}{4\pi i} \sum_{i=1}^n n_i \int_X c_1(C_i) \wedge \bar{\Theta} = -\frac{1}{4\pi i} \sum_{i=1}^n n_i \int_{C_i} \bar{\Theta} = 0.$$

Portanto $\Theta = 0$. □

Lema 2.23. Seja $\mathcal{P}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ um pencil em uma superfície X tal que $\Delta(\mathcal{P}) = \emptyset$. Então X é uma superfície minimal.

Prova: Suponha que X não é minimal, então X contém uma curva racional e lisa C tal que $C \cdot C = -1$. De (2.1), $\mathcal{O}_X[\Delta(\mathcal{P})] = T_{\mathcal{F}}^* \otimes N_{\mathcal{G}} = \mathcal{O}_X$, e portanto $T_{\mathcal{F}} = N_{\mathcal{G}}$. Logo

$$T_{\mathcal{F}} = N_{\mathcal{F}} = N_{\mathcal{G}}. \quad (2.9)$$

Agora se C for \mathcal{F} -invariante, então por (2.9) e pelas fórmulas de interseção(cf. [4, p. 25]) teríamos:

$$T_{\mathcal{F}} \cdot C = \mathcal{X}(C) - Z(\mathcal{F}, C) = 2 = N_{\mathcal{F}} \cdot C = C \cdot C + Z(\mathcal{F}, C) = -1,$$

o que é uma contradição. Analogamente, se C for \mathcal{G} -invariante teríamos $2 = N_{\mathcal{G}} \cdot C = T_{\mathcal{G}} \cdot C = -1$. Assim C não é \mathcal{F} nem \mathcal{G} -invariante, logo

$$T_{\mathcal{F}} \cdot C = C \cdot C - \text{Tang}(\mathcal{F}, C) = N_{\mathcal{G}} \cdot C = \mathcal{X}(C) - \text{Tang}(\mathcal{G}, C). \quad (2.10)$$

Como $T_{\mathcal{F}} \cdot C = C \cdot C - \text{Tang}(\mathcal{F}, C) = T_{\mathcal{G}} \cdot C = C \cdot C - \text{Tang}(\mathcal{G}, C)$, temos $\text{Tang}(\mathcal{F}, C) = \text{Tang}(\mathcal{G}, C)$. Logo na equação (2.10) temos $C \cdot C = -1 = \mathcal{X}(C) = 2$, obtendo novamente uma contradição. Portanto, X é uma superfície minimal. \square

Exemplo 2.24. Seja X a superfície de Hopf, definida por $\frac{\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}}{\langle f \rangle}$, onde $f(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$. Seja $\pi : \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow X$ a projeção natural. Consideremos em $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}^*$ o pencil \mathcal{P} definido por $dx + \alpha dy = 0$. Seja $\mathcal{P}_* := \pi_*(\mathcal{P})$ o pencil induzido em X , então $\Delta(\mathcal{P}_*) = \emptyset$. Pela observação 2.22, concluímos que \mathcal{P}_* é flat.

Proposição 2.25. Seja $\mathcal{P}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ um pencil em uma superfície Kähler compacta X tal que $\Delta(\mathcal{P}) = \emptyset$. Então X é um toro e as folheações \mathcal{F} e \mathcal{G} são lineares.

Para a prova desta proposição usaremos o teorema 2.26 e a proposição 2.27 de [2], que enunciaremos em seguida.

Teorema 2.26. Sejam X uma superfície compacta, $f : X \rightarrow S$ uma fibração tangente a uma folheação \mathcal{H} , e \mathcal{F} uma folheação regular em X . Então:

- i) \mathcal{H} é uma folheação regular.
- ii) Se $\text{gen}(f) = 1$, com $\text{Kod}(X) \geq 0$, então ou $\mathcal{F} = \mathcal{H}$, ou \mathcal{F} é transversal a \mathcal{H} , ou \mathcal{F} é turbulenta com respeito a f .
- iii) Se $\text{gen}(f) = 0$ e $\text{gen}(S) = 0$, então, ou $\mathcal{F} = \mathcal{H}$, ou \mathcal{F} é transversal a \mathcal{H} .

O teorema anterior resume os resultados das proposições 2, 3 e 4 de [2].

Proposição 2.27 ([13]). Seja \mathcal{F} uma folheação regular num toro complexo X . Então existe um recobrimento $\pi : \mathbb{C}^2 \rightarrow X$, tal que \mathcal{F} é induzido via π por uma forma fechada $b dx + dy$, com $b \in \mathbb{C}$, ou por uma 1-forma fechada $b(x) dx + dy$, onde b é uma função elíptica.

Prova da proposição 2.25. Como $\Delta(\mathcal{P}) = \emptyset$, então $T_{\mathcal{F}} = N_{\mathcal{G}} = N_{\mathcal{F}}$ assim $K_X = N_{\mathcal{F}}^* \otimes N_{\mathcal{F}}^*$ e $c_1(X) = 2c_1(N_{\mathcal{F}})$. Além disso, $\text{Sing}(\mathcal{F}_{\alpha}) = \emptyset$, para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$. Logo $c_1^2(N_{\mathcal{F}}) = BB(\mathcal{F}) = 0$ (cf. [4, p. 34]). Portanto,

$$c_1^2(X) = 4N_{\mathcal{F}}^2 = 0.$$

De [4, p. 21] temos que:

$$c_2(X) = N_{\mathcal{F}}^2 + N_{\mathcal{F}} \cdot K_X - m_{\mathcal{F}} = N_{\mathcal{F}}^2 + N_{\mathcal{F}} \cdot K_X = N_{\mathcal{F}}^2 - 2N_{\mathcal{F}}^2 = -N_{\mathcal{F}}^2 = 0. \quad (2.11)$$

Assim, pelo lema 2.23, X é uma superfície minimal tal que $c_1^2(X) = c_2(X) = 0$. Como X é Kähler, o primeiro número de Betti $b_1(X)$ é par, então pelo teorema da classificação das superfícies compactas de Kodaira (cf. [1, p. 188]), $\text{Kod}(X) < 2$. Logo vale o seguinte:

1. Se $\text{Kod}(X) = -\infty$, então X é uma superfície regrada de gênero 0. Em particular, existe um fibrado $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ que define uma folheação \mathcal{H} em X . Pelo teorema 2.26, para $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$, ou $\mathcal{F}_{\alpha} = \mathcal{H}$, ou \mathcal{F}_{α} é transversal a f . Pelo lema 2.14, dado $p \in X$, existe um sistema de coordenadas (x, y, U) , com $p \in U$ e $x(p) = y(p) = 0$, onde o pencil \mathcal{P} é definido em U por $dx + \alpha dy$, portanto $T_p X = \langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \rangle$. Logo existe $\alpha_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ tal que $\text{Tang}(\mathcal{F}_{\alpha_0}, \mathcal{H}) > 0$, e assim $\mathcal{F}_{\alpha_0} = \mathcal{H}$. Além disso, para todo $\alpha \neq \alpha_0$, \mathcal{F}_{α} é uma folheação de Riccati com respeito a f . Fixado $\alpha \neq \alpha_0$ e F uma fibra de f , existe um sistema de coordenadas (x, y, U) tal que $F \subset U \simeq D \times \mathbb{P}^1$ e as projeções $\pi_2 : D \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$, $\pi_1 : D \times \mathbb{P}^1 \rightarrow D$ definem $\mathcal{F}_{\alpha}|_U, \mathcal{F}_{\alpha_0}|_U$, respectivamente. Portanto o pencil $\mathcal{P}|_U$ é definido por $w + \alpha\eta = dx + \alpha dy$, mas neste caso $\Delta(\mathcal{P}) \neq \emptyset$ (veja exemplo 2.3).
2. Se $\text{Kod}(X) = 0$, então, ou X é uma superfície hiperelíptica, ou X é um toro. Se X é uma superfície hiperelíptica, então admite uma fibração localmente trivial elíptica $f : X \rightarrow S$, com $\text{gen}(S) = 1$.
3. Se $\text{Kod}(X) = 1$, então X é uma superfície propriamente elíptica, em particular, X é uma superfície elíptica.

Assim X é um toro ou existe um fibrado elíptico $f : X \rightarrow S$ com $\text{Kod}(X) \geq 0$. No caso em que existe um fibrado elíptico $f : X \rightarrow S$, seja \mathcal{H} a folheação tangente a f . Pelo argumento feito no primeiro item, existe $\alpha_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ tal que $\mathcal{H} = \mathcal{F}_{\alpha_0}$. Como $\Delta(\mathcal{P}) = \emptyset$, então f não tem fibras críticas e \mathcal{F}_{α} é transversal a f , para todo $\alpha \neq \alpha_0$. Portanto f é um fibrado principal com funções de transição localmente constantes, e assim por [1, p. 197], X é um toro, como queríamos.

Para finalizar, veremos que \mathcal{F} e \mathcal{G} são folheações lineares. Como X é um toro, pela proposição 2.27, existe um recobrimento $\pi : \mathbb{C}^2 \rightarrow X$ tal que \mathcal{F} e \mathcal{G} são induzidas via π pelas 1-formas fechadas $w = b(x)dx + dy$ e $\eta = c(x)dx + dy$, respectivamente, onde b e c são constantes ou são funções elípticas.

Seja x_0 um ponto regular de b e c . Então existe uma vizinhança U de $\pi(x_0, 0)$ tal que $\Delta(\mathcal{P}) \cap U = \{\pi(x, y) \in U : b(x) - c(x) = 0\} = \emptyset$. Como $b(x) \neq c(x)$, então b e c são constantes. Em particular, \mathcal{P} é um pencil de folheações lineares. \square

Observação 2.28. No artigo [2], as únicas superfícies de classe *VII* que admitem uma folheação regular são as superfícies de Hopf e Inoue. No exemplo 2.24, X não é Kähler mas $\Delta(\mathcal{P}) = \emptyset$, logo a hipótese de X ser Kähler é necessária na proposição 2.25.

2.2 Pencils no Toro

Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ um pencil em X . Como já mencionamos, estamos interessados no estudo do seguinte conjunto

$$I_p(\mathcal{P}) := \{\alpha \in \overline{\mathbb{C}} : \mathcal{F}_\alpha \text{ possui integral primeira racional}\}$$

quando o pencil é flat.

Na seção anterior, vimos que se $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ é um pencil em X , tal que $\Delta(\mathcal{P}) = \emptyset$ e X é uma superfície Kähler compacta, então X é um toro e \mathcal{P} é um pencil flat de folheações lineares. Seja então $X = \mathbb{C}^2/\Gamma$, onde Γ é um reticulado. Assim, podemos identificar

$$\mathbb{P}(H^0(X, \Omega_X^1)) \simeq \{\mathcal{F}(\omega) \text{ folheações holomorfas em } X, \omega \in \Omega_X^1\},$$

e como $\Delta(\mathcal{P}) = \emptyset$,

$$I_p(\mathcal{P}) = \{\alpha \in \overline{\mathbb{C}} : \mathcal{F}_\alpha \text{ tem integral primeira holomorfa}\}.$$

A seguinte proposição descreve explicitamente o conjunto $I_p(\mathcal{P})$ quando X é um toro complexo.

Proposição 2.29 ([33, p. 61]). Seja $I(X) \subset \mathbb{P}(H^0(X, \Omega_X^1))$ o conjunto das folheações lineares que admitem integral primeira holomorfa. Então a cardinalidade $i(X)$ de $I(X)$ é 0, 1, 2 ou ∞ . Além disso,

1. Se $i(X) = 0$, então X é um toro simples complexo.
2. Se $i(X) = 1$, então X é um toro complexo não algébrico.
3. Se $i(X) = 2$, então X é isógeno ao produto de duas curvas simples não isógenas.
4. Se $i(X) \geq 3$, então $i(X) = \infty$ e X é isógeno ao quadrado de uma curva elíptica E . Além disso, se w_1, w_2 é um par de 1-formas linearmente independentes sobre X , admitindo integrais primeiras holomorfas, então

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : w_1 + \lambda w_2 \text{ tem integral primeira holomorfa}\} \cup \{\infty\} \simeq \text{End}(E) \otimes \mathbb{Q} \cup \{\infty\}. \quad (2.12)$$

Da proposição 2.29 concluímos que se \mathcal{P} é um pencil em X , com $\mathcal{P} \subset H^0(X, \Omega^1(X))$ e $\#I_p(\mathcal{P}) \geq 3$, então X é isógeno a $E \times E$ e

$$I_p(\mathcal{P}) \setminus \{\infty\} \simeq \text{End}(E) \otimes \mathbb{Q}. \quad (2.13)$$

Das proposições 2.29 e 2.25, temos o teorema I.

Teorema I. Seja X uma superfície Kähler compacta e seja \mathcal{P} um pencil em X . Se $\Delta(\mathcal{P}) = \emptyset$, então X é um toro e \mathcal{P} é um pencil de folheações lineares. Além disso, se $\#I_p(\mathcal{P}) \geq 3$ então $X = E \times E$, onde E é uma curva elíptica e

$$I_p(\mathcal{P}) \setminus \{\infty\} \simeq \text{End}(E) \otimes \mathbb{Q}.$$

Em particular, escrevendo $E = \mathbb{C}/\Gamma$ com $\Gamma = \langle 1, \tau \rangle$, se $0, \infty \in I_p(\mathcal{P})$ e existe $\alpha \in I_p(\mathcal{P}) \setminus \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, então

$$I_p(\mathcal{P}) \setminus \{\infty\} = \mathbb{Q}(\tau),$$

onde, $\tau = \sqrt{-d}$ com d livre de quadrados.

Observação 2.30 ([40, p. 164]). Seja $E = \mathbb{C}/\langle 1, \tau \rangle$, então ocorre uma das seguintes possibilidades:

1. $\text{End}(E) \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$.
2. $\text{End}(E) \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}(\tau)$, onde $\tau = \sqrt{-d}$ e d é livre de quadrados, ou seja, $\mathbb{Q}(\tau)$ é uma extensão quadrática imaginária de \mathbb{Q} .

Como estamos interessados no caso em que $I_p(\mathcal{P})$ é infinito, vamos considerar o toro $X = T_1 \times T_1$, onde $T_1 = \mathbb{C}/\Gamma_1$, $\Gamma_1 = \langle 1, \tau_1 \rangle$ e $\pi : \mathbb{C} \rightarrow T_1$ a projeção natural. Fixado $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, seja \mathcal{F}_α a folheação induzida por $dy + \alpha dx$ e consideremos $L_\alpha = \{(\pi(x), \pi(\alpha x)) : x \in \mathbb{C}\}$ a folha de \mathcal{F}_α que passa por $(0, 0)$. Então

$$\begin{aligned} \#(L_\alpha \cap (\{0\} \times T_1)) < \infty &\iff \exists k \in \mathbb{N} : k\alpha(m + \tau_1 n) \in \Gamma_1, \forall m, n \in \mathbb{Z} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{N} : k\Gamma_1(\alpha) \subset \Gamma_1 \text{ onde } \Gamma_1(\alpha) = \alpha\Gamma_1. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Assim, afirmamos que $\alpha \in I_p(\mathcal{P}) \setminus \{0, \infty\}$ se, e somente se, existe $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $k\Gamma_1(\alpha) \subset \Gamma_1$.

De fato, se $\alpha \in I_p(\mathcal{P}) \setminus \{0, \infty\}$, então existe $f_\alpha : X \rightarrow S$ integral primeira holomorfa, onde S é uma curva compacta. Como $\{0\} \times T_1$ não é folha de \mathcal{F}_α , então $f_\alpha|_{\{0\} \times T_1} : \{0\} \times T_1 \rightarrow S$ é uma aplicação holomorfa não constante. Logo,

$$\#(L_\alpha \cap \{0\} \times T_1) = \#(f_\alpha|_{\{0\} \times T_1})^{-1}(c) < \infty,$$

onde $c = f_\alpha(0, 0)$. Portanto por (2.14) existe $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $k\Gamma_1(\alpha) \subset \Gamma_1$. Reciprocamente, por (2.14), temos $\#(L_\alpha \cap \{0\} \times T_1) < \infty$, o que implica L_α compacta. Outra maneira de provar esta implicação é definindo a aplicação holomorfa

$$\begin{aligned} f : T_1 \times T_1 &\rightarrow T_1 \\ (x, y) &\mapsto x - \alpha ky \end{aligned} ,$$

que é uma integral primeira para \mathcal{F}_α .

Pelo mesmo argumento, se $T = T_1 \times T_2$, onde $T_1 = \mathbb{C}/\Gamma_1$ e $T_2 = \mathbb{C}/\Gamma_2$, então

$$\alpha \in I_p(\mathcal{P}) \setminus \{0, \infty\} \iff \exists k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ tal que } k\Gamma_1(\alpha) \subset \Gamma_2.$$

Observação 2.31. Seja $\mathcal{P} \subset H^0(X, \Omega_X^1)$ um pencil em X . Suponha que exista $\alpha \in I_p(\mathcal{P}) \setminus \{0, \infty\}$, então existe $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $k\Gamma_1(\alpha) \subset \Gamma_1$. Assim o isomorfismo em (2.13) é dado por

$$\begin{aligned} \tau : I_p(\mathcal{P}) &\rightarrow \text{End}(E) \otimes \mathbb{Q} \\ \alpha &\mapsto k\alpha \otimes \frac{1}{k} \end{aligned} .$$

2.2.1 Relação com os pencils de Lins Neto

Suponha que $\Gamma = \langle 1, \tau_0 \rangle$, com $\tau_0 = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Trabalharemos com folheações lineares na variedade abeliana $X = E \times E$, com $E = \mathbb{C}/\langle 1, \tau_0 \rangle$. Definamos a aplicação

$$\varphi : \begin{array}{ccc} X & \rightarrow & X \\ (x, y) & \mapsto & (\tau_0 x, \tau_0 y) \end{array} .$$

Fazendo uma conta simples, temos:

- $\varphi^3 = id_X$.
- $\text{Fix}(\varphi) = \{(p_l, p_k); 1 \leq l, k \leq 3 : p_1 = [0], p_2 = [\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\tau_0], p_3 = [\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\tau_0]\}$.

Denotemos por $\{l_k\}_{k=1}^9$ os 9 pontos fixos de φ . Seja $\pi : Bl_{\text{Fix}(\varphi)}(X) \rightarrow X$ o processo de nove blow-ups, em cada ponto de $\text{Fix}(\varphi)$ e $D_k = \pi^{-1}(l_k)$, para $k = 1, \dots, 9$, como na figura 2.2.

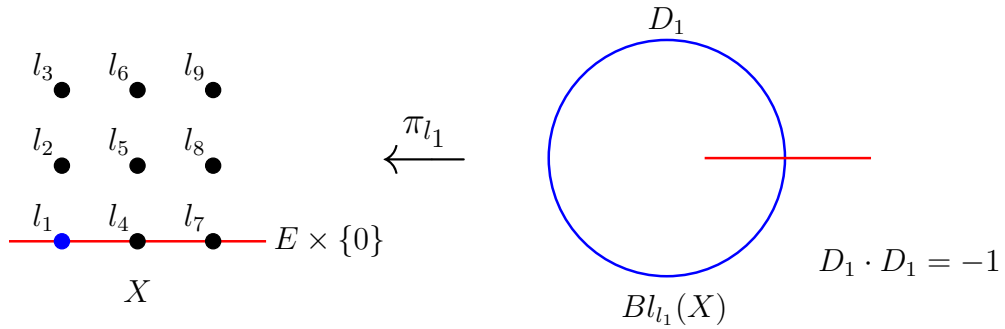


Figura 2.2: Blow-up em l_1

Sejam $\tilde{X} = Bl_{\text{Fix}(\varphi)}(X)$ e $\tilde{\varphi} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ o automorfismo em \tilde{X} , que faz o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \tilde{X} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{\varphi} & X \end{array} \quad (2.15)$$

Como $\varphi^3 = id_X$, temos que $\tilde{\varphi}^3 = id_{\tilde{X}}$. Assim, podemos considerar os grupos finitos $G = \langle \varphi \rangle$ e $\tilde{G} = \langle \tilde{\varphi} \rangle$, e as variedades quocientes $Y := X/G$ e $\tilde{Y} := \tilde{X}/\tilde{G}$. Seja $h : X \rightarrow Y$ a aplicação quociente e $\tilde{h} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ o morfismo canônico induzido. Então \tilde{h} é um morfismo finito de grau 3, tal que o seu divisor de ramificação R é dado por

$$R = \sum_{k=1}^9 3D_k.$$

De fato, como $\tilde{\varphi}^3 = id_{\tilde{X}}$, então \tilde{h} é de grau 3. Agora, fixado $p \in \text{Fix}(\varphi)$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $p = (0, 0)$. Seja $D = \pi^{-1}(p)$, então existem duas coordenadas locais (x, t, U_1) e (u, y, U_2) , obtidas fazendo um blow-up, e tais que $D \subset U_1 \cup U_2$.

Além disso, $\pi(x, t) = (x, tx)$ e $\pi(y, u) = (uy, y)$, nas coordenadas (x, t) e (y, u) , respectivamente. Logo, $\tilde{\varphi}(x, t) = (\tau_0 x, t)$ e $\tilde{\varphi}(y, u) = (\tau_0 y, u)$, nas coordenadas (x, t) e (y, u) , respectivamente. Portanto $\text{Fix}(\tilde{\varphi}) \cap (U_1 \cup U_2) = D$.

Algumas propriedades da superfície \tilde{Y} são dadas no seguinte teorema.

Teorema 2.32. Sob as condições acima, \tilde{Y} é uma superfície projetiva não singular. Além disso, \tilde{Y} é uma superfície racional que contém nove curvas racionais disjuntas $\tilde{D}_1, \dots, \tilde{D}_9$, com $\tilde{D}_k^2 = -3$, para $k = 1, \dots, 9$, e doze curvas racionais disjuntas $\tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_{12}$, com $\tilde{E}_j^2 = -1$, para $j = 1, \dots, 12$.

Prova: Primeiramente provemos que \tilde{Y} é uma superfície algébrica não singular. Como \tilde{Y} é lisa fora de $\tilde{h}(|R|)$, já que a ação gerada por $\tilde{\varphi}$ é propriamente descontínua em $\tilde{X} \setminus |R|$, então é suficiente provar que \tilde{Y} é liso em $\tilde{\varphi}(|R|)$. Se D é uma componente de $|R|$, então $D = D_{k_0}$ para algum $k_0 \in \{1, \dots, 9\}$. Seja $A = \mathbb{C}[\tilde{X} \cap U_1]$ o anel de coordenadas de $\tilde{X} \cap U_1$, isto é

$$A = \mathbb{C}[\tilde{X} \cap U_1] = \{f \in \mathbb{C}[x, t] : f \equiv 0 \text{ em } \tilde{X} \cap U_1\},$$

e seja

$$A^{\tilde{G}} = \{f \in A : f \circ g = f \text{ para todo } g \in \tilde{G}\} = \langle x^3, t \rangle.$$

Por [39, p. 136], $\tilde{Y} \cap \tilde{\varphi}(U_1)$ é algébrico e $A^{\tilde{G}} \simeq \mathbb{C}[\tilde{Y} \cap \tilde{\varphi}(U_1)]$. Logo \tilde{Y} é liso em $\tilde{\varphi}(U_1)$. Analogamente nas coordenadas (u, y) , \tilde{Y} é liso em $\tilde{\varphi}(U_2)$, e assim \tilde{Y} é liso em $\tilde{\varphi}(D)$.

Provaremos agora que \tilde{Y} é uma superfície racional. Pelo teorema de Castelnuovo-Enriques (cf. [17, p. 536]), é suficiente provar que $P_2(\tilde{Y}) = q_1(\tilde{Y}) = 0$.

Vejamos que $q_1(\tilde{Y}) = 0$. Fixado $w' \in H^0(\tilde{Y}, \Omega_{\tilde{Y}}^1)$, tem-se que $\tilde{h}^*(w')$ é uma forma \tilde{h} -invariante em $H^0(\tilde{X}, \Omega_{\tilde{X}}^1)$. Visto que π induz um isomorfismo $\pi^* : H^0(X, \Omega_X^1) \rightarrow H^0(\tilde{X}, \Omega_{\tilde{X}}^1)$ obtemos uma 1-forma $w \in H^0(X, \Omega_X^1)$ φ -invariante. Em particular, $\varphi^*w = w$. Como $w = adx + bdy$, onde $a, b \in \mathbb{C}$, obtemos $a = b = 0$, ou seja, $w = 0$. Analogamente prova-se que $p_2(\tilde{Y}) = 0$. Assim, \tilde{Y} é uma superfície racional.

Fixado $k \in \{1, \dots, 9\}$, sejam $D = D_k$ e $\tilde{D} = \tilde{h}(D_k)$. Então $\tilde{h}|_D : D \rightarrow \tilde{D}$ é um biholomorfismo e portanto \tilde{D} é uma curva racional. Além disso, $\tilde{h}^*(\tilde{D}) = 3D$ e assim

$$\tilde{h}^*(\tilde{D}) \cdot \tilde{h}^*(\tilde{D}) = 9D \cdot D = -9.$$

Logo, pela fórmula da projeção

$$\tilde{h}^*(\tilde{D}) \cdot \tilde{h}^*(\tilde{D}) = \deg(\tilde{h}) \cdot (\tilde{D} \cdot \tilde{D}) = 3\tilde{D} \cdot \tilde{D}$$

obtemos $\tilde{D}^2 = -3$. Assim, \tilde{Y} contém nove curvas racionais disjuntas $\tilde{D}_1, \dots, \tilde{D}_9$, com $\tilde{D}_k^2 = -3$, para $k = 1, \dots, 9$.

Agora, consideremos as seguintes quatro curvas elípticas em X :

$$\begin{aligned} E_{0,1} &= \{0\} \times E, & E_{1,1} &= \{(x, x) : x \in E\}, \\ E_{1,0} &= E \times \{0\}, & E_{1,-\tau_0} &= \{(x, -\tau_0 x) : x \in E\}. \end{aligned}$$

Estas curvas satisfazem as seguintes propriedades:

1. $E_{0,1} \cap \text{Fix}(\varphi) = \{l_1, l_2, l_3\}$, $E_{1,1} \cap \text{Fix}(\varphi) = \{l_1, l_5, l_9\}$, $E_{2,0} \cap \text{Fix}(\varphi) = \{l_1, l_4, l_7\}$ e $E_{1,-\tau_0} \cap \text{Fix}(\varphi) = \{l_1, l_6, l_8\}$.
2. Sejam $\mathcal{C} = \{E_{0,1}, E_{1,0}, E_{1,1}, E_{1,-\tau_0}\}$ e $F \in \mathcal{C}$. Dado $p \in \text{Fix}(\varphi)$, seja $F_p = F + p$, então $\varphi(F_p) = F_p$ e $\text{Fix}(\varphi) \cap F_p = (\text{Fix}(\varphi) \cap F) + p$. Logo, o conjunto

$$\mathcal{E} := \{F_p : p \in \text{Fix}(\varphi), F \in \mathcal{C}\},$$

é formado por doze curvas elípticas. Assim, denotemos por

$$\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots, E_{12}\}.$$

Se fixamos duas curvas elípticas $E_j, E_k \in \mathcal{E}$ com $j \neq k$, então E_j e E_k se intersectam somente em um ponto de $\text{Fix}(\varphi)$. Em particular, E_j e seus trasladados intersectam E_k somente em três pontos fixos de φ . Portanto, $\pi^*\mathcal{E} := \{\pi^*E_1, \dots, \pi^*E_{12}\}$, o conjunto dos transformados estritos das curvas em \mathcal{E} , está formado por doze curvas elípticas disjuntas de autointerseção -3 .

Fixado $j \in \{1, \dots, 12\}$, seja $F = \pi^*E_j$ e $\tilde{F} = \tilde{h}(F)$. Então $\tilde{h}|_F : F \rightarrow \tilde{F}$ é uma aplicação holomorfa de grau 3, tal que $\tilde{h}|_F$ tem três pontos de ramificação de ordem 3. Logo, pelo teorema de Riemann-Hurwitz, temos que $\text{gen}(\tilde{F}) = 0$.

Como $\tilde{h}^*(\tilde{F}) = F$ e $\tilde{h}^*(\tilde{F}) \cdot \tilde{h}^*(\tilde{F}) = F \cdot F = -3$, então pela fórmula da projeção

$$-3 = (\tilde{h}^*(\tilde{F}) \cdot \tilde{h}^*(\tilde{F})) = \text{deg}(\tilde{h})(\tilde{F} \cdot \tilde{F}) = 3(\tilde{F} \cdot \tilde{F}),$$

obtemos $\tilde{F}^2 = -1$. Portanto, se $\tilde{\mathcal{E}} := \{\tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_{12}\}$, com $\tilde{E}_j = \tilde{h}(E_j)$, para $j = 1, \dots, 12$, então $\tilde{\mathcal{E}}$ está formado por doze curvas (-1) racionais disjuntas, como na figura 2.3. \square

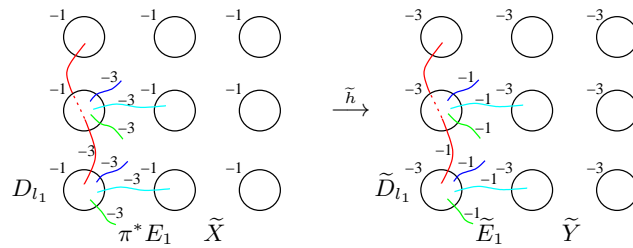


Figura 2.3

Corolário 2.33. Sob as condições do teorema anterior, \tilde{Y} só contém doze curvas (-1) que são disjuntas. Além disso, se $\pi_1 : \tilde{Y} \rightarrow X$ é a aplicação blow-down de tais curvas, então $X = \mathbb{P}^2$.

Para provar o corolário utilizaremos o seguinte teorema.

Teorema 2.34 (Fórmula de Riemann-Hurwitz para superfícies). Seja $f : X \rightarrow Y$ um recobramento ramificado entre duas superfícies compactas não singulares. Então

$$c_2(X) = nc_2(Y) - \sum_{k=1}^r (n_k - 1)\mathcal{X}(D_k),$$

onde $n = \deg(f)$, D_k são as componentes irredutíveis do lugar de ramificação $R = \sum_{k=1}^r n_k D_k$ e n_k é o índice de ramificação de D_k .

Prova do corolário 2.33: Seja $\pi_1 : \tilde{Y} \rightarrow X'$ a aplicação blow-down das curvas $\tilde{E}_j \in \tilde{\mathcal{E}}$, para $j = 1, \dots, 12$.

Como $\tilde{h} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ é uma aplicação de grau 3 e o seu divisor de ramificação é $R = \sum_{k=1}^9 3D_k$, aplicando o teorema 2.34 temos que $c_2(\tilde{Y}) = 15$, de onde segue que $c_2(X') = 3$. Afirmamos então que X' é minimal. Caso contrário, consideremos a aplicação blow-down $\pi_* : X' \rightarrow X_1$ das curvas (-1) em X' . Então X_1 é minimal e $c_2(X_1) < 3$. Agora, como $p_g(\tilde{Y}) = P_2(\tilde{Y}) = 0$, então $p_g(X_1) = P_2(X_1) = 0$. Assim, pela fórmula de Noether (cf. [17, p. 438]) temos:

$$\frac{c_1^2(X_1) + c_2(X_1)}{12} = 1 - p_g(X_1) + P_2(X_1) = 1.$$

Logo $c_1^2(X_1) = 12 - c_2(X_1) > 9$. Isto contradiz o teorema de classificação das superfícies de Kodaira, pois não existe uma superfície minimal X_1 tal que $c_2(X_1) < 3$ e $c_1^2(X_1) > 9$. Portanto X' é minimal. Agora usamos o fato que qualquer superfície racional minimal é uma superfície de tipo S_n (superfície de Hirzebruch, cf. [17]) ou \mathbb{P}^2 (cf. [17, p. 520]). Como $c_2(S_n) \geq 4$ e $c_2(\mathbb{P}^2) = 3$ então $X' = \mathbb{P}^2$. \square

Sob as notações acima, seja $(\text{Fix}(\varphi), \mathcal{E})$ a configuração de pontos e curvas elípticas em X , como mostra a figura 2.4.

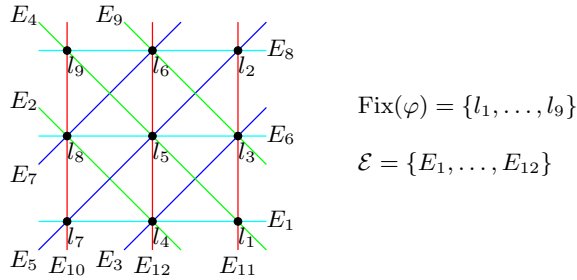


Figura 2.4

Seja $\pi_1 : X \rightarrow \mathbb{P}^2$, a aplicação de blow-downs das curvas $\tilde{E}_j \in \tilde{\mathcal{E}}$, para $j = 1, \dots, 12$. Então, pelo corolário anterior obtemos doze pontos $\mathcal{E}^* = \{e_1, e_2, \dots, e_{12}\}$ em \mathbb{P}^2 . Seja

$$\tilde{\mathcal{D}} := \{\tilde{D}_1, \dots, \tilde{D}_9\},$$

o conjunto das nove curvas racionais disjuntas em \tilde{Y} , tal que $\tilde{D}_k \cdot \tilde{D}_k = -3$, para todo $k = 1, \dots, 9$ e seja $L_k := \pi_1(\tilde{D}_k) \subset \mathbb{P}^2$, para $k = 1, \dots, 9$. Então $L_k \cdot L_k = 1$, e portanto L_k é uma reta em \mathbb{P}^2 , para todo $k = 1, \dots, 9$.

Consideremos a configuração de retas e pontos $\mathcal{C} = (\mathcal{E}^*, \text{Fix } \varphi^*)$ em \mathbb{P}^2 , onde $\text{Fix } \varphi^* = \{L_1, \dots, L_9\}$. Esta configuração apresenta as seguintes propriedades:

1. Cada reta $L \in \text{Fix } \varphi^*$ contém quatro pontos de \mathcal{E}^* .
2. Cada ponto em \mathcal{E}^* pertence a três retas de $\text{Fix } \varphi^*$.
3. Se três pontos de \mathcal{E}^* não estão contidos em uma reta $L \in \text{Fix } \varphi^*$, então não são colineares.

Logo por [26], por meio de um automorfismo de \mathbb{P}^2 (caso seja necessário), \mathcal{C} é descrito como na figura 3.2.

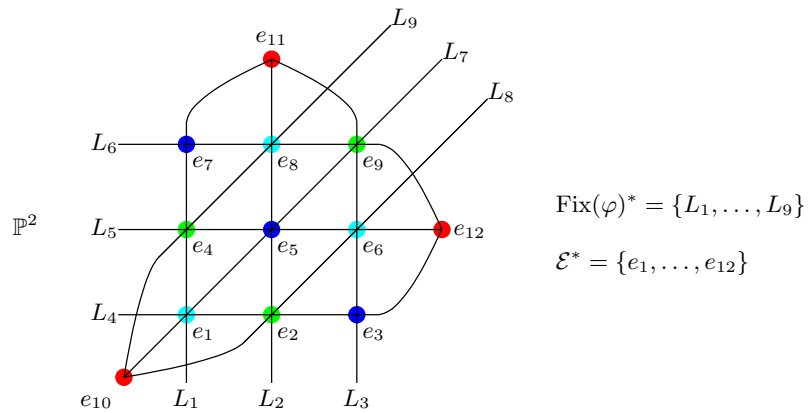


Figura 2.5

Agora consideremos o pencil $\mathcal{P} = \{\mathcal{G}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ de folheações lineares, onde \mathcal{G}_α é definida pela 1-forma holomorfa

$$\omega_\alpha = dy - \alpha dx.$$

Como ω_α é φ -invariante, então \mathcal{G}_α induz uma folheação $\tilde{\mathcal{F}}_\alpha$ em \tilde{Y} . Em particular, $\tilde{\mathcal{F}}_\alpha$ induz uma folheação \mathcal{F}_α em \mathbb{P}^2 .

Lema 2.35. Sob as notações acima:

1. Se $\alpha \notin \{1, \tau_0, \tau_0^2, \infty\}$, então \mathcal{F}_α tem 21 singularidades não degeneradas, onde nove são de tipo $(-3 : 1)$ e doze são singularidades radiais contidas em \mathcal{E}^* . Em particular \mathcal{F}_α tem grau 4.
2. Se $\alpha \in \{1, \tau_0, \tau_0^2, \infty\}$, então $\text{Sing}(\mathcal{F}_\alpha) = \mathcal{E}^*$.

Prova: Como as doze curvas elípticas $\tilde{E}_j \in \tilde{\mathcal{E}}$, com $j = 1, \dots, 12$, induzem doze pontos tais que por cada uma delas passam três retas de \mathcal{L}^* invariantes de \mathcal{F}_α para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$, então \mathcal{F}_α tem doze singularidades fixas, para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$.

Seja $\alpha \in \{1, \tau_0, \tau_0^2, \infty\}$. Fixado $q \in \text{Fix}(\varphi)$, seja l a folha de \mathcal{G}_α que passa por q , então $l \in \mathcal{E}$. Portanto \mathcal{F}_α tem somente doze singularidades, ou seja, $\text{Sing}(\mathcal{F}_\alpha) = \mathcal{E}^*$.

Por outro lado, se $\alpha \notin \{1, \tau_0, \tau_0^2, \infty\}$, fixado $q \in \text{Fix}(\varphi)$, seja l a folha de \mathcal{G}_α que passa por q , então $l \notin \mathcal{E}$. Sejam π^*l o transformado estrieto de l e $\tilde{l} := \tilde{h}(\pi^*l)$, então

existe uma única curva $\tilde{D} \in \tilde{\mathcal{D}}$, tal que $\tilde{D} \cap l = \{t_q\}$ e $t_q \in \text{Sing}(\tilde{\mathcal{F}}_\alpha)$. Como π_1 é um biholomorfismo local em uma vizinhança de t_q , então $\pi_1(t_q)$ é uma singularidade de \mathcal{F}_α , para todo $q \in \text{Fix}(\varphi)$, logo \mathcal{F}_α tem 21 singularidades. Em particular, \mathcal{F}_α tem grau 4 e é uma folheação não degenerada. Logo t_q é uma singularidade não degenerada de $\tilde{\mathcal{F}}_\alpha$, e pelo teorema do índice de Camacho-Sad (cf. [7]),

$$CS(\tilde{\mathcal{F}}_\alpha, \bar{l}) = \bar{l} \cdot \bar{l} = -3 = CS(\tilde{\mathcal{F}}_\alpha, \bar{l}, t) = \frac{\lambda}{\mu},$$

onde $(\lambda : \mu)$ é o quociente dos autovalores em t_q . Como $\text{Sing } \tilde{\mathcal{F}}_\alpha \cap \bar{l} = \{t_q\}$ então \bar{l} possui holonomia trivial. Pelo teorema de Mattei-Moussu [11], existe um sistema de coordenadas (x, y, U) , $t \in U$, $x(t) = y(t) = 0$ tal que $\tilde{\mathcal{F}}_\alpha|_U := d(x^3y)$, como se pode ver na figura 2.6.

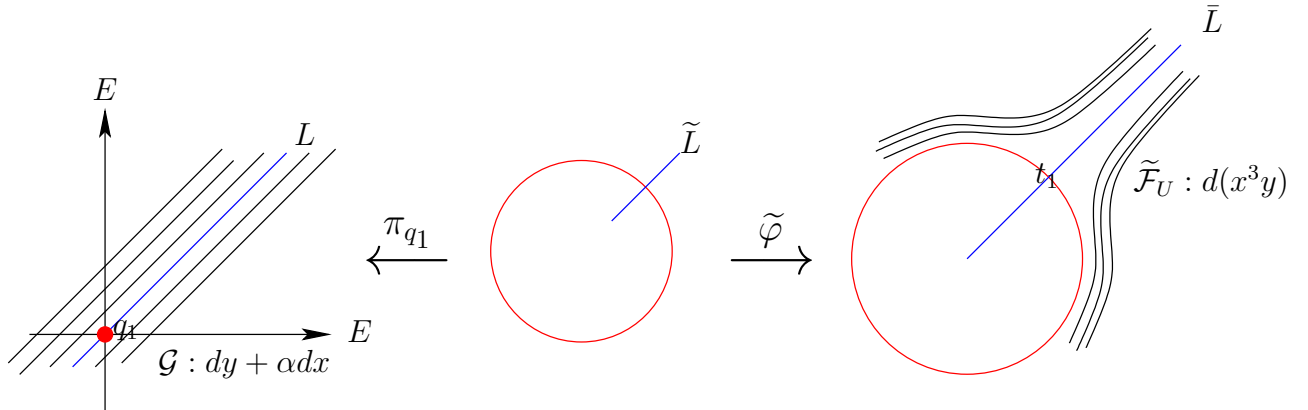


Figura 2.6

Resumindo, se $\alpha \notin \{1, \tau_0, \tau_0^2, \infty\}$, então \mathcal{F}_α tem 21 singularidades não degeneradas, onde nove são de tipo $(-3 : 1)$ e doze são singularidades radiais contidas em \mathcal{E}^* . Por outro lado, se $\alpha \in \{0, \tau_0, \tau_0^2, \infty\}$, então

$$\text{Sing}(\mathcal{F}_\alpha) = \mathcal{E}^*.$$

□

Em [26, §2.2], Lins Neto define o pencil de grau 4:

$$\mathcal{P}_4 \quad \begin{cases} \omega = (x^3 - 1)xdy - (y^3 - 1)ydx \\ \eta = (x^3 - 1)y^2dy - (y^3 - 1)x^2dx \end{cases}.$$

Observação 2.36. Como toda reta de \mathcal{L}^* é uma componente invariante de $\Delta(\mathcal{P}_4)$, então, para todo $\alpha \in \bar{\mathbb{C}}$, existe um único $F_\alpha \in \bar{\mathbb{C}}$ tal que $\mathcal{F}_\alpha = \mathcal{F}_{F_\alpha}^4$, onde $\mathcal{F}_{F_\alpha}^4$ é um elemento do pencil \mathcal{P}_4 . Em particular $h^*(\mathcal{P}_4) = \mathcal{P}(dx, dy)$.

Lema 2.37. Sob as notações acima, seja \mathcal{P} o pencil no toro X definido por $dy - \alpha dx$. Então existe uma aplicação racional $g : X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ tal que $g_*(\mathcal{P}) = \mathcal{P}_4$. Além disso, a aplicação $F : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ definida por $F(\alpha) = (\tau_0^2 - 1)\alpha + 1$ leva uma folheação $\mathcal{G}_\alpha \in \mathcal{P}$ em uma folheação $\mathcal{F}_{F_\alpha}^4 \in \mathcal{P}_4$.

Prova: Primeiramente caracterizaremos $\mathcal{F}_{F_\alpha}^4$ para $\alpha \in \{0, 1, -1, \infty\}$. Como \mathcal{F}_{F_0} , \mathcal{F}_{F_1} , $\mathcal{F}_{F_{-\tau_0}}$ e \mathcal{F}_{F_∞} têm doze singularidades, então

$$\{F_0, F_1, F_{-\tau_0}, F_\infty\} = \{1, \tau_0, \tau_0^2, \infty\}.$$

Seja $g = \pi_1^{-1} \circ \tilde{h} \circ \pi$, então $g : X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ é uma aplicação racional. Das configurações $(\mathcal{E}, \mathcal{P}t)$ em X e $(\mathcal{E}^*, \mathcal{P}t^*)$ em \mathbb{P}^2 (veja as figuras 2.4 e 3.2), obtemos

$$\begin{aligned} g^*(\mathcal{F}_\infty^4) &= \mathcal{G}_\infty, & g^*(\mathcal{F}_1^4) &= \mathcal{G}_0, \\ g^*(\mathcal{F}_{\tau_0^2}^4) &= \mathcal{G}_1, & g^*(\mathcal{F}_{\tau_0}^4) &= \mathcal{G}_{-\tau_0}. \end{aligned}$$

Logo, existe uma aplicação injetiva racional $F : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ tal que $F(\infty) = \infty$, $F(0) = 1$, $F(1) = \tau_0^2$ e $F(-\tau_0) = \tau_0$. Portanto $F(\alpha) = (\tau_0^2 - 1)\alpha + 1$. \square

Observação 2.38. Como $E = \mathbb{C}/\langle 1, \tau_0 \rangle$ e $\tau_0 \in I_p(\mathcal{P}) \setminus \{0, \infty\}$, pela observação 2.30,

$$\text{End}(E) \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}(\tau_0).$$

Além disso, como $0, 1, \infty \in I_p(\mathcal{P})$, pela observação 2.31,

$$I_p(\mathcal{P}) = \mathbb{Q}(\tau_0) \cup \{\infty\}$$

Em particular, $I_p(\mathcal{P}_4) = \mathbb{Q}(\tau_0) \cup \{\infty\}$.

2.2.2 Cálculo do grau da integral primeira de \mathcal{F}_t^4 , $t \in I_p(\mathcal{P}_4)$

Lembremos que na seção anterior definimos o pencil \mathcal{P}_4 em \mathbb{P}^2 e provamos que

$$I_p(\mathcal{P}_4) = \{\alpha \in \overline{\mathbb{C}} : \mathcal{F}_\alpha \text{ tem integral primeira racional } F_t \text{ de grau } d_t\} = \mathbb{Q}(\tau_0) \cup \{\infty\}.$$

Dado $t \in \mathbb{Q}(\tau_0) \setminus \{1, \tau_0, \tau_0^2\}$, queremos determinar no grau da integral primeira de \mathcal{F}_t^4 . Desde que $\Lambda^{-1}(t) = \alpha \in \mathbb{Q}(\tau_0)$ então existe $\beta_1, \alpha_1 \in \mathbb{Z}[\tau_0]$ tal que $\alpha_1 = \alpha\beta_1$, $(\alpha_1, \beta_1) = 1$ ($\mathbb{Z}[\tau_0]$ é um domínio de fatoração única) e $g^*(\mathcal{F}_4) = \mathcal{G}_\alpha$, onde \mathcal{G}_α é definido por $\omega = \alpha_1 dy - \beta_1 dx$. Em particular, $f_{\alpha_1, \beta_1} = \alpha_1 y - \beta_1 x$ é uma integral primeira de \mathcal{G}_α e E_{α_1, β_1} é uma folha de \mathcal{G}_α passing by $(0, 0)$, that is, $E_{\alpha_1, \beta_1} = f_{\alpha_1, \beta_1}^{-1}(0)$.

Seja F_t uma integral primeira de \mathcal{F}_t^4 e C_1 uma fibra genérica de F_t de grau d_t . Podemos supor que $g^*(F_t) = E_{\alpha_1, \beta_1} + p$, onde $p \notin \text{Fix}(\varphi)$. Seja $C := g^*(F_t)$ and $E := E_{1,0} + p$ in X . Portanto, dado \tilde{E} and \tilde{C} , os transformados estritos de E e C por π , respectivamente, então $C \cdot E = \tilde{C} \cdot \tilde{E}$.

Seja $\tilde{E} = \tilde{h}(\tilde{E})$ e $\tilde{C} = \tilde{h}(\tilde{C})$, então $\tilde{h}^*\tilde{C} = 3\tilde{C}$ e $\tilde{h}^*\tilde{E} = 3\tilde{E}$. Pela fórmula da projeção temos

$$3\tilde{C} \cdot 3\tilde{E} = (h^*\tilde{C} \cdot h^*\tilde{E}) = 3\tilde{C} \cdot \tilde{E}.$$

Logo

$$3C \cdot E = \tilde{C} \cdot \tilde{E}. \quad (2.16)$$

Denotemos por $C_1 = \pi_1(\tilde{C})$ and $E_1 = \pi_1(\tilde{E})$ as curvas obtidas em \mathbb{P}^2 (ver Figura 2.7).

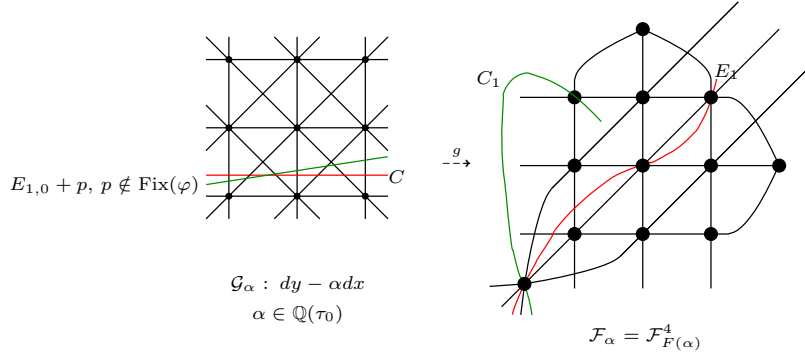


Figura 2.7

Como $E_1 \cap l_7 = \{a, p_5, p_9\}$ (veja figura 2.2) ea, p_5, p_9 são singularities radiais de \mathcal{F}_1^4 então $\deg(E_1) = 3$.

Assim obtemos

$$\pi_1^*(C_1) = \bar{C} + \sum_{p \in \mathcal{P}^* \cap C_1} m_p D_p, \quad (2.17)$$

onde m_p é a multiplicidade de C_1 in p , $D_p = \pi_1^{-1}(p)$. Além disso,

$$\pi_1^*(E_1) = \bar{E} + \sum_{p \in \mathcal{P}^* \cap E_1} D_p, \quad (2.18)$$

onde $\mathcal{P}^* \cap E_1 = \mathcal{P}^* \setminus \{p_1, p_6, p_8\}$. Então, por (2.16)–(2.18), temos

$$\begin{aligned} 3 \deg(C_1) &= C_1 \cdot E_1 \\ &= \pi_1^*(C_1) \cdot \pi_1^*(E_1) \\ &= \bar{C} \cdot \bar{E} + \sum_{p \in \mathcal{P}^* \cap C_1} m_p + \sum_{p \in \mathcal{P}^* \cap E_1} m_p - \sum_{p \in \mathcal{P}^* \cap C_1 \cap E_1} m_p \\ &= 3C \cdot E + \sum_{p \in \mathcal{P}^* \cap E_1} m_p \end{aligned}$$

Dado $p \in \mathcal{P}^* \cap E_1$, temos que

$$m_p = C \cdot E_p,$$

onde $E_p \in \mathcal{E}$ é uma curva elíptica correspondente ao ponto $p \in \text{Fix}^*(\varphi)$.

Portanto obtemos

$$\deg(C_1) = \frac{1}{3} (3C \cdot E + \sum_{p \in \mathcal{P}^* \cap E_1} C \cdot E_p)$$

Assim, para calcular d_t , só falta calcular $C \cdot E$. Da equação (??),

$$C \cdot E = C \cdot E_{1,0} = E_{\alpha_1, \beta_1} \cdot E_{1,0} = N(\beta_1) = a^2 - ab + b^2,$$

onde $\beta_1 = a + \tau_0 b$. Então

$$\deg(C_1) = \frac{1}{3}(3N(\beta_1) + 3N(\alpha_1) + 3N(\beta_1 - \alpha_1) + 3N(\beta_1 + j\alpha_1)),$$

e,

$$d_t = N(\beta_1) + N(\alpha_1) + N(\beta_1 - \alpha_1) + N(\beta_1 + j\alpha_1), \quad (2.19)$$

onde $t = \frac{\alpha_1}{\beta_1}$. Portanto temos provado o seguinte teorema.

Teorema 2.39. Temos

$$I_p(\mathcal{P}_4) = \mathbb{Q}(\tau_0) \cup \{\infty\}.$$

Seja $t \in I_p(\mathcal{P}_4) \setminus \{1, \tau_0, \tau_0^2, \infty\}$, então $g^*(\mathcal{F}_t^4) = \mathcal{G}_\alpha$, onde $\alpha = \frac{t-1}{-2-\tau_0}$, e se escrevemos

$\alpha = \frac{\alpha_1}{\beta_1}$, com $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{Z}[\tau_0]$ e $(\alpha_1, \beta_1) = 1$ então

$$d_t = N(\beta_1) + N(\alpha_1) + N(\beta_1 - \alpha_1) + N(\beta_1 + j\alpha_1),$$

onde d_t é o grau da integral primeira racional \mathcal{F}_t^4 .

Capítulo 3

Singularidades móveis e fixas

No presente capítulo consideraremos o caso em que $\Delta(\mathcal{P})$ é não-vazio. O nosso objetivo, é estudar as componentes de $\Delta(\mathcal{P})$. A partir disto, daremos condições para garantir que o pencil é flat. Por outro lado, na seção 3.2, descrevemos o conjunto $I_p(\mathcal{P})$ quando \mathcal{P} está definido em \mathbb{P}^2 .

3.1 Estudo das componentes de $\Delta(\mathcal{P})$

Consideremos o pencil $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$, onde \mathcal{F}_0 tem singularidades isoladas. Pelo corolário 2.8, o conjunto $NI(\mathcal{P}) = \{\alpha \in \overline{\mathbb{C}} : \mathcal{F}_\alpha \text{ tem singularidades não isoladas}\}$ é finito.

Seja $IS(\mathcal{P}) := \overline{\mathbb{C}} \setminus NI(\mathcal{P})$, então se $\alpha \in IS(\mathcal{P})$:

1. \mathcal{F}_α tem singularidades isoladas.
2. $N_{\mathcal{F}_\alpha} = N_{\mathcal{F}_0}$.
3. $m_{\mathcal{F}_\alpha} = N_{\mathcal{F}_\alpha}^2 + N_{\mathcal{F}_\alpha} \cdot K_X + c_2(X) = N_{\mathcal{F}}^2 + N_{\mathcal{F}} \cdot K_X + c_2(X) = m(\mathcal{F})$.

Dado $\alpha \in IS(\mathcal{P})$, seja $n(\alpha) := \#(\text{Sing}(\mathcal{F}_\alpha))$. Então pelo item 3, $n(\alpha) \leq m(\mathcal{F})$ para todo $\alpha \in IS(\mathcal{P})$. Assim, podemos definir $n_0 = \max\{n(\alpha) : \alpha \in IS(\mathcal{P})\}$ e

$$GP(\mathcal{P}) = \{\alpha \in IS(\mathcal{P}) : n(\alpha) = n_0\}.$$

Lema 3.1. Com as notações acima, $\overline{\mathbb{C}} \setminus GP(\mathcal{P})$ é finito.

Prova: Dado $\alpha_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ existe uma vizinhança U de α_0 tal que:

1. $n(\alpha) \geq n(\alpha_0)$, para todo $\alpha \in U$.
2. Ou $U \subset \{\alpha : n(\alpha) = n(\alpha_0)\}$, ou $n(\alpha) > n(\alpha_0)$, para todo $\alpha \in U \setminus \{\alpha_0\}$.

Em particular, $GP(\mathcal{P})$ é aberto e $\overline{\mathbb{C}} \setminus GP(\mathcal{P})$ é discreto. Daí segue o lema. \square

Definição 3.2. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ um pencil em X e seja C uma componente irredutível de $\Delta(\mathcal{P})$. Diremos que C é **invariante pelo pencil**, se C é \mathcal{F}_α -invariante, para todo $\alpha \in IS(\mathcal{P})$. Além disso, diremos que $\Delta(\mathcal{P})$ é **invariante** se todas as suas componentes são invariantes pelo pencil.

O seguinte lema pode ser encontrado em (cf. [25]).

Lema 3.3. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ um pencil em X e seja C uma componente irredutível de $\Delta(\mathcal{P})$ de multiplicidade $k \geq 1$. Então existe um conjunto finito $F \subset C$, tal que dado $p \in C \setminus F$ existe um sistema de coordenadas $(U, (x, y))$ com $p \in U$, $x(p) = y(p) = 0$, $C \cap U = (y = 0)$, e existem 1-formas holomorfas ω e η , tais que $\omega + \alpha\eta$ representa $\mathcal{F}_\alpha|_U$, onde

1. Se C é invariante pelo pencil, então temos

$$\begin{cases} \eta = dy \\ \omega = P(x, y)dy - y^k dx \end{cases}$$

onde $P \in \mathcal{O}(U)$. Se θ é tal que $d\omega = \theta \wedge \omega$ e $d\eta = \theta \wedge \eta$, então

$$\theta = \left(\frac{P_x}{y^k} + \frac{k}{y} \right) dy$$

Em particular, $\Theta|_U = y^{-k} P_{xx} dx \wedge dy$ nestas coordenadas.

2. Se C é não-invariante por \mathcal{F}_∞ (e portanto pelo pencil), então

$$\begin{cases} \eta = dx \\ \omega = y^k dy - Q(x, y)dx \end{cases}$$

onde $Q \in \mathcal{O}(U)$. Se θ é tal que $d\omega = \theta \wedge \omega$ e $d\eta = \theta \wedge \eta$, então

$$\theta = \frac{Q_y}{y^k} dx.$$

Em particular, $\Theta|_U = -\frac{\partial}{\partial y}(y^{-k} Q_y) dx \wedge dy$ nestas coordenadas.

Segue do lema 3.3 que dada uma componente irredutível C de $\Delta(\mathcal{P})$ acontece somente uma das seguintes opções:

- Existe um aberto V de $\overline{\mathbb{C}}$ e uma aplicação holomorfa injetiva $p : V \rightarrow C$, tal que $p(\alpha) \in \text{Sing}(\mathcal{F}_\alpha)$, para todo $\alpha \in V$.
- Existe $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$, tal que $C \subset \text{Sing}(\mathcal{F}_\alpha)$.

Logo, é natural fazer as seguintes definições:

Definição 3.4. Diremos que $p \in \mathcal{P}$ é uma **singularidade fixa**, se p é uma singularidade comum a todos os \mathcal{F}_α .

Definição 3.5. Seja \mathcal{P} um pencil em X , e seja C uma componente irredutível de $\Delta(\mathcal{P})$. Diremos que C **contém uma singularidade móvel**, se existe uma aplicação holomorfa injetiva $p : V \rightarrow X$ de \mathcal{P} , tal que $p(V) \subset C$. Por outro lado, diremos que C é uma **componente NI**, se existe $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$, tal que $C \subset \text{Sing}(\mathcal{F}_\alpha)$.

Logo dada uma componente irredutível C de $\Delta(\mathcal{P})$ então ou C é uma componente **NI** ou C contém uma singularidade móvel.

Exemplo 3.6. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{C}}$, um pencil em \mathbb{P}^2 , onde \mathcal{F}_0 e \mathcal{F}_∞ estão definidas pelas 1-formas polinomiais homogêneas de grau 3 em \mathbb{C}^3

$$\begin{aligned} w &= -z(ax^2 + 3y^2 + 3cz^2)dx + 2xyzdy + x(ax^2 + y^2 + 3cz^2)dz, \\ \eta &= -2z^2xdx + 2x^2zdz, \end{aligned}$$

respectivamente, onde $a, c \in \mathbb{C}^*$ são constantes fixas.

Neste caso, $\text{Sing}(\mathcal{F}_\infty) = \{x = 0\} \cup \{z = 0\}$ e se $A_\pm = [0 : \pm\sqrt{c} : 1]$, $D_1 = [0 : 0 : 1]$, $C_\pm = [1 : \pm\sqrt{a} : 0]$ e

$$B_\pm(\alpha) = \left[\frac{-2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 - 12ac}}{2a} : 0 : 1 \right],$$

então, para $\alpha \in \mathbb{C}$, temos

$$\text{Sing}(\mathcal{F}_\alpha) = \{A_\pm, B_\pm(\alpha), C_\pm, D_1\}.$$

Além disso, A_\pm , C_\pm e D_1 são singularidades fixas do pencil, e $B_\pm(\alpha)$ são singularidades móveis. O conjunto de tangência do pencil é dado por

$$\Delta(\mathcal{P}) = \{x^2yz^2 = 0\},$$

onde $\{x = 0\}$ e $\{z = 0\}$ são componentes *NI*, invariantes pelo pencil e $\{y = 0\}$ é uma componente não-invariante que contém uma singularidade móvel, como vemos na figura 4.1.

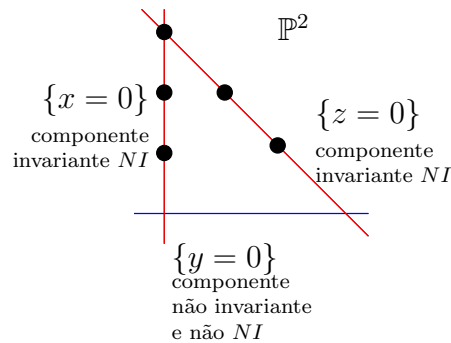


Figura 3.1: \bullet = singularidade fixa do pencil

Observações.

1. Se $\Delta(\mathcal{P})$ é invariante pelo pencil, então todo ponto $p \in \text{Sing}(\Delta(\mathcal{P}))$ é uma singularidade fixa do pencil. O exemplo 3.6, mostra que a hipótese de que $\Delta(\mathcal{P})$ seja invariante é necessária. De fato, no mesmo exemplo, temos que

$$\Delta(\mathcal{P}) = \{x^2yz^2 = 0\},$$

não é invariante pelo pencil e $p = (0, 0) \in \text{Sing}(\Delta(\mathcal{P}))$ não é uma singularidade do pencil.

2. Se $p \in \Delta(\mathcal{P})$ é uma singularidade fixa do pencil \mathcal{P} , então não temos necessariamente que $p \in \text{Sing}(\Delta(\mathcal{P}))$. De fato, no exemplo 3.6, temos que para cada singularidade fixa $p \in \{A_{\pm}, C_{\pm}, D_1\}$, existe uma componente lisa C de $\Delta(\mathcal{P})$ tal que p é um ponto regular de C .

Exemplo 3.7. Seja $\mathcal{P}_4 = \{\mathcal{F}_{\alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{C}}$, o pencil de grau 4 em \mathbb{P}^2 (veja o lema 2.35), onde \mathcal{F}_0 e \mathcal{F}_{∞} estão definidas pelas 1-formas polinomiais homogêneas de grau 3 em \mathbb{C}^3

$$\begin{aligned} w &= xz(x^3 - z^3)dx + yz(y^3 - z^3)dy + xy(y^3 - x^3)dz, \\ \eta &= y^2(x^3 - z^3)dx + x^2(y^3 - z^3)dy + z^2(y^3 - x^3)dz, \end{aligned}$$

respectivamente.

Neste caso, o conjunto de tangência é dado por

$$\Delta(\mathcal{P}) = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 : (x^3 - z^3)(y^3 - z^3)(x^3 - y^3) = 0\}$$

o qual está formado por nove linhas L_1, \dots, L_9 como vemos na figura 2.2.

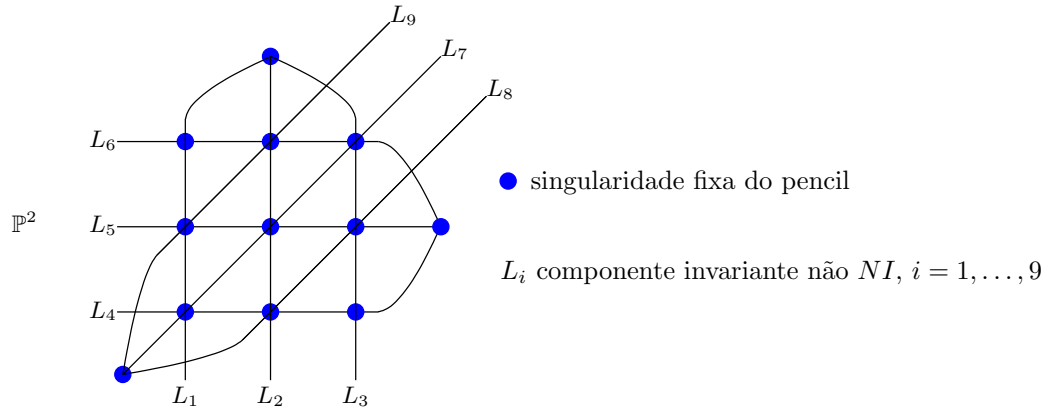


Figura 3.2

Tais linhas são componentes invariantes não NI e o conjunto de interseção das linhas são doze singularidades fixas do pencil.

Lema 3.8. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_{\alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{C}}$ um pencil em X , e seja C uma componente não- NI de $\Delta(\mathcal{P})$ com multiplicidade $k \geq 1$. Então existe uma singularidade móvel $\rho : V \rightarrow C$, com V aberto de \mathbb{C} , tal que:

1. $k = 1$ implica que $\rho(\alpha)$ é uma singularidade não-degenerada de \mathcal{F}_{α} , para todo $\alpha \in V$.
2. $k \geq 2$ implica que, dado $\alpha \in V$,
 - $\rho(\alpha)$ é uma sela-nó, se C é invariante.
 - $\rho(\alpha)$ é uma singularidade nilpotente ou uma sela-nó, se C é não-invariante.

Prova do lema 3.8: Seja C uma componente de $\Delta(\mathcal{P})$. Se C é invariante, pelo lema 2.7, existe um conjunto finito F tal que, dado $q \in C \setminus F$, podemos encontrar um sistema de coordenadas (x, y, U) onde U é uma vizinhança de q , com $x(q) = y(q) = 0$ e $C \cap U = \{y = 0\}$. Além disso, $\mathcal{F}_\alpha|_U$ está definida pelo campo vetorial X_α em U dado por:

$$X_\alpha = (P(x, y) + \alpha) \frac{\partial}{\partial x} + y^k \frac{\partial}{\partial y}. \quad (3.1)$$

Logo

$$\text{Sing}(\mathcal{F}_\alpha) \cap U = \{y = \alpha + P(x, y) = 0\}.$$

Coloquemos $P(x, y) = p_0(x) + yp(x, y)$. Se $p_0(x)$ é constante, $U \cap \{y = 0\} \subset \text{Sing}(\mathcal{F}_{-p_0})$, logo C é uma componente *NI*. Por outro lado, se $p_0(x)$ não é constante, seja $-\alpha_0$ um valor regular de p_0 . Então existe uma vizinhança $V \subset \mathbb{C}$ e um mapa holomorfo $\rho : V \rightarrow C$ tal que $\rho(\alpha) \in \text{Sing}(\mathcal{F}_\alpha)$, para todo $\alpha \in V$.

Deste modo, C contém uma singularidade móvel. De (3.1), dado $\alpha \in V$, a parte linear de X_α em $\rho(\alpha) = (x(\alpha), 0)$ é dada por

$$\begin{pmatrix} p'_0(x(\alpha)) & * \\ 0 & ky^{k-1} \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Em (3.2), se C tem multiplicidade $k = 1$, então $\rho(\alpha)$ é uma singularidade não-degenerada de \mathcal{F}_α , para todo $\alpha \in V$. Por outro lado, se $k \geq 2$, $\rho(\alpha)$ é uma sela-nó de \mathcal{F}_α , para todo $\alpha \in V$.

Se C é uma componente não-invariante, pelo lema 3.3, existe um conjunto finito F tal que para $p \in C \setminus F$, existe um sistema de coordenadas (x, y, U) , $p \in U$, com $x(p) = y(p) = 0$ e $\Delta(\mathcal{P}) \cap U = \{y = 0\}$, sendo $\mathcal{F}_\alpha|_U$ definida em U pelo campo vetorial X_α dado por

$$X_\alpha = (Q(x, y) + \alpha) \frac{\partial}{\partial y} + y^k \frac{\partial}{\partial x}. \quad (3.3)$$

Logo

$$\text{Sing}(\mathcal{F}_\alpha) \cap U = \{y = \alpha + Q(x, y) = 0\}.$$

Seja $Q(x, y) = q_0(x) + q_1(x)y + q(x, y)y^2$. Se q_0 é constante então $U \cap \{y = 0\} \subset \text{Sing}(\mathcal{F}_{-q_0})$, ou seja, C é uma componente *NI*. Por outro lado, se q_0 não é constante, seja $-\alpha_0$ um valor regular de q_0 . Então existe uma vizinhança $V \subset \mathbb{C}$ e um mapeo holomorfo $\rho : V \rightarrow C$ tal que $\rho(\alpha) \in \text{Sing}(\mathcal{F}_\alpha)$, para todo $\alpha \in V$.

Da equação (3.3), a parte linear de X_α em $\rho(\alpha) = (x(\alpha), 0)$, com $\alpha \in V$, é dada por:

$$\begin{pmatrix} 0 & ky^{k-1} \\ q'_0(x(\alpha)) & q_1(x(\alpha)) \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Em (3.4), se C tem multiplicidade $k = 1$, então $\rho(\alpha)$ é uma singularidade não-degenerada, e no caso em que $k \geq 2$, ou $\rho(\alpha)$ é uma sela-nó, ou $\rho(\alpha)$ é uma singularidade nilpotente, para todo $\alpha \in V$. \square

Observação 3.9. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{C}}$ um pencil, onde \mathcal{F}_0 é uma folheação não-degenerada. Note que:

$$n(\alpha) = n(0) = m_{\mathcal{F}_0} = m_{\mathcal{F}_\alpha},$$

para todo $\alpha \in GP(\mathcal{P})$. Portanto, \mathcal{F}_α é uma folheação não-degenerada, para todo $\alpha \in GP(\mathcal{P})$.

Observação 3.10. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{C}}$ um pencil em uma superfície X , onde \mathcal{F}_0 é uma folheação não-degenerada. Se C é uma componente não- NI de $\Delta(\mathcal{P})$, então C tem multiplicidade um.

De fato, pela observação 3.9, \mathcal{F}_α é uma folheação não-degenerada e $n(\alpha) = n(0) = n_0$, para todo $\alpha \in GP(\mathcal{P})$. Se C tem multiplicidade k , então pelas equações (3.2) e (3.4) da prova do lema 3.8 temos que $k = 1$.

Definição 3.11. Diremos que uma componente C de $\Delta(\mathcal{P})$ é **nice**, se uma das seguintes condições é satisfeita:

- C é invariante pelo pencil e não- NI , tal que para qualquer singularidade móvel $p : V \rightarrow C$ tem-se que a função $\alpha \in V \mapsto BB(\mathcal{F}_\alpha, p_\alpha)$ é constante, onde $BB(\mathcal{F}_\alpha, p_\alpha)$ denota o índice de Baum-Bott da folheação \mathcal{F}_α na singularidade $p(\alpha)$, para todo $\alpha \in V$.
- C é uma componente NI e invariante pelo pencil.
- C não é invariante pelo pencil e não- NI , tal que para qualquer singularidade móvel $p : V \rightarrow C$ tem-se que a função $\alpha \in V \mapsto BB(\mathcal{F}_\alpha, p_\alpha)$ é identicamente nula.
- C é uma componente NI e não-invariante pelo pencil, e é invariante pela folheação dividida correspondente.

O seguinte teorema pode ser encontrado em [27, p. 4].

Teorema 3.12. Sejam \mathcal{F} e \mathcal{G} duas folheações holomorfas em uma superfície complexa compacta, tais que $\mathcal{N}_{\mathcal{F}} = \mathcal{N}_{\mathcal{G}}$. Seja Θ a curvatura do pencil gerado por \mathcal{F} e \mathcal{G} . Suponha que todas as componentes de $\text{Tang}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ têm multiplicidade um. Então as seguintes condições são equivalentes:

1. O pencil é flat;
2. Todas as componentes de $\text{Tang}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ são nice;
3. Θ é holomorfa.

Uma aplicação imediata da observação 3.10 e do teorema 3.12 é o seguinte resultado:

Proposição 3.13. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{C}}$ um pencil em X , tal que $\Delta(\mathcal{P})$ não tem componentes NI . Suponha que \mathcal{F}_0 é uma folheação não-degenerada com uma singularidade de tipo $(1 : -1)$ em toda componente não-invariante e $I_p(\mathcal{P})$ é denso. Então o pencil é flat.

Prova: Como $\Delta(\mathcal{P})$ não tem componentes NI e \mathcal{F}_0 é uma folheação não-degenerada então, pela observação 3.10, toda componente C de $\Delta(\mathcal{P})$ tem multiplicidade 1. Assim, pelo teorema 3.12, é suficiente provar que as componentes de $\Delta(\mathcal{P})$ são nice. Seja então C uma componente irredutível de $\Delta(\mathcal{P})$. Se C é invariante, pelo lema 3.8, existe um conjunto finito F tal que, para cada $q \in C \setminus F$, podemos encontrar um sistema de coordenadas (x, y, U) onde U é uma vizinhança de q , com $x(q) = y(q) = 0$ e $C \cap U = \{y = 0\}$. Além disso, $\mathcal{F}_\alpha|_U$ é representada pelo campo vetorial $X_\alpha = (P + \alpha)\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$, onde $P(x, y) = p_0(x) + yp(x, y)$ para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$ e C contém uma singularidade móvel $\rho : V \rightarrow C$, definida por $\rho(\alpha) = (x(\alpha), 0)$. Logo, a parte linear de X_α em $\rho(\alpha)$ é dada por:

$$\begin{pmatrix} p'_0(x(\alpha)) & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Assim, $BB(\mathcal{F}_\alpha, p_j(\alpha)) : D_1 \rightarrow \mathbb{C}$ é dada por

$$BB(\mathcal{F}_\alpha, \rho(\alpha)) = \frac{(p'_0(x(\alpha)) + 1)^2}{p'_0(x(\alpha))}.$$

Note que $BB(\mathcal{F}_\alpha, p_j(\alpha)) \in \mathbb{Q}$ para todo $\alpha \in I_p(\mathcal{P})$. Como $I_p(\mathcal{P})$ é denso em $\overline{\mathbb{C}}$, obtemos que $\alpha \mapsto BB(\mathcal{F}_\alpha, p_j(\alpha))$ é constante, e portanto C é nice.

Por outro lado, se C é componente não-invariante, seja $\rho : V \rightarrow C$ uma singularidade móvel em C . Como $I_p(\mathcal{P})$ é denso em $\overline{\mathbb{C}}$, obtemos que $\alpha \mapsto BB(\mathcal{F}_\alpha, \rho(\alpha))$ é constante. Logo $BB(\mathcal{F}_\alpha, \rho(\alpha)) \equiv 0$, pois $\rho(0)$ é uma singularidade de tipo $(1 : -1)$, e portanto C é nice. \square

3.2 Algumas relações entre um pencil flat \mathcal{P} em \mathbb{P}^2 e o conjunto $I_p(\mathcal{P})$

As curvas algébricas invariantes são objetos centrais na teoria da integrabilidade. A primeira questão relacionada com a existência de integrais primeiras é saber se um campo vetorial polinomial, tem ou não curvas algébricas invariantes.

Em 1891, Poincaré tentou responder à seguinte questão:

“É possível decidir se uma folheação em \mathbb{P}^2 tem integral primeira racional?”.

Denotemos por $\mathbb{F}ol(2, d)$ o conjunto das folheações de grau d em \mathbb{P}^2 . Em [36], Poincaré obteve uma resposta parcial a esta questão, dado no seguinte teorema e que será usada na proposição

Teorema 3.14. Seja $\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol(2, d)$ uma folheação não-degenerada tal que todas as suas singularidades reduzidas têm autovalores cujo quociente é igual a -1 . Seja F uma integral primeira racional de \mathcal{F} com fibra genérica irredutível. Então, existem inteiros positivos $m, n \in \mathbb{N}$, com $(m, n) = 1$, tais que:

$$\deg(F) = \frac{mn}{m+n}(d+2). \quad (3.6)$$

No mesmo trabalho, Poincaré também faz a seguinte observação:

Observação 3.15. É possível limitar o grau da solução genérica de F em termos do grau da folheação de \mathcal{F} . Com efeito, como m e n são primos e $(m, n) = 1$, então $(m, m+n) = 1$, $(n, m+n) = 1$ e $(mn, m+n) = 1$. De (3.6)

$$(m+n) \deg(F) = mn(d+2),$$

e assim $m+n$ divide $d+2$. Em particular, m , n e $\deg(G)$ são limitados em função do grau d .

Definição 3.16. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ um pencil em X , tal que dado $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$, \mathcal{F}_α é representada pelas coleções $(X_i + \alpha Y_j, U_i, f_{ij})_{i,j \in I}$, onde X_i e Y_i são campos holomorfos em U_i . Suponha que \mathcal{F}_0 é uma folheação não-degenerada. Dada uma singularidade fixa p do pencil, diremos que p é de **tipo fixo**, se para todo $\alpha \in GP(\mathcal{P})$ o quociente dos autovalores associados ao campo $X_i + \alpha Y_i$ em p é constante.

Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ um pencil em uma superfície X , onde \mathcal{F}_0 e \mathcal{F}_∞ são folheações não-degeneradas, e seja $p \in X$ uma singularidade fixa do pencil. Daremos condições necessárias e suficientes para garantir quando p é de tipo fixo.

A menos de uma mudança de coordenadas, podemos supor que as partes lineares dos campos X_0 e X_∞ que definem as folheações \mathcal{F}_0 e \mathcal{F}_∞ em uma vizinhança U_p de p são dados por

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

respectivamente.

Assim, dado $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$, a parte linear do campo X_α que define \mathcal{F}_α em U_p é da forma

$$A + \alpha B = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \lambda_2 + \alpha d \end{pmatrix}.$$

Para cada $\alpha \in GP(\mathcal{P})$, o índice de Baum-Bott é:

$$BB(\mathcal{F}_\alpha, p) = \frac{((\lambda_1 + \lambda_2) + \alpha(a + d))^2}{(\lambda_1 + \alpha a)(\lambda_2 + \alpha d) - \alpha^2 cb},$$

seja $BB_p(\alpha) := BB(\mathcal{F}_{\alpha,p})$. Logo, $BB_p(\alpha)$ pode ser estendida a uma função meromorfa em $\overline{\mathbb{C}}$. Assim, p é de tipo fixo se, e somente se, $BB_p(\alpha)' = 0$ e, por meio de uma conta simples, obtemos que $BB_p(\alpha)' = 0$ se, e somente se, ou $BB(\mathcal{F}_0, p) = BB(\mathcal{F}_\infty, p) = 0$, ou

$$\lambda BB(\mathcal{F}_0, p) = \text{tr}(A) \text{tr}(B)$$

$$\lambda BB(\mathcal{F}_\infty, p) = \text{tr}(A) \text{tr}(B)$$

onde $\lambda = \lambda_1 d + \lambda_2 a$.

Proposição 3.17. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ um pencil flat em \mathbb{P}^2 . Suponha que \mathcal{F}_0 é uma folheação não-degenerada, com integral primeira racional, tal que todas as suas singularidades reduzidas são do tipo $(1 : -1)$. Se 0 é um ponto de acumulação de $I_p(\mathcal{P})$ e as singularidades fixas do pencil são de tipo fixo, então

$$I_p(\mathcal{P}) = \overline{\mathbb{C}}$$

Prova: Por hipótese $0 \in GP(\mathcal{P})$, logo existem uma vizinhança $V \subset \mathbb{C}$ de 0 e funções holomorfas $p_{k+1}, \dots, p_{n_0} : V \rightarrow \mathbb{P}^2$, tais que para todo $\alpha \in V$,

$$\text{Sing}(\mathcal{F}_\alpha) = \{p_1, \dots, p_k, p_{k+1}(\alpha), \dots, p_{n_0}(\alpha)\},$$

onde $n_0 = d^2 + d + 1$, p_i é singularidade fixa, para $i = 1, \dots, k$, e $p_j(\alpha)$ é singularidade móvel, para $j = k + 1, \dots, n_0$.

Fixados $\alpha \in V$ e $p \in \text{Sing}(\mathcal{F}_\alpha)$; temos

1. Se p é alguma singularidade fixa p_i , com $i \in \{1, \dots, k\}$, então, por hipótese, p é de tipo fixo. Em particular, $p \in \text{Sing}(\mathcal{F}_0)$, o que implica que p ou é de tipo $(m : n)$, com $m, n \in \mathbb{N}$, ou é de tipo $(1 : -1)$.
2. Se $p = p_j(\alpha)$, para algum $j \in \{k_0 + 1, \dots, k_{n_0}\}$, onde $p_j : V \rightarrow C$ é uma singularidade móvel e C é uma componente de $\Delta(\mathcal{P})$, então como o pencil é flat e C tem multiplicidade 1; segue que:
 - Se C é invariante, então $p = p_j(\alpha)$ é do mesmo tipo que $p_j(0)$. Portanto ou p é de tipo $(1 : -1)$, ou p é de tipo $(m : n)$, com $m, n \in \mathbb{N}$.
 - Se C não é invariante então p é de tipo $(1 : -1)$.

Portanto as singularidades de \mathcal{F}_α para $\alpha \in V$ ou são de tipo $(m : n)$, com $m, n \in \mathbb{N}$, ou são de tipo $(1 : -1)$. Logo, pelo teorema 3.14:

$$d + 2 = \frac{m_\alpha n_\alpha}{m_\alpha + n_\alpha} \deg(F_\alpha),$$

onde $d = \deg(\mathcal{F}_\alpha) = \deg(\mathcal{F})$. Assim, pela observação 3.15, existe $k_0 := k_0(d) \in \mathbb{N}$ tal que $\deg(F_\alpha) \leq k_0$, para todo $\alpha \in I_p(\mathcal{P}) \cap V$. Consideremos então o conjunto algébrico

$$IP(k_0) = \{\mathcal{F} \in \text{Fol}(2, d) : \mathcal{F} \text{ tem integral primeira } F, \deg(F) \leq k_0\}.$$

Assim, como 0 é um ponto de acumulação de $V \cap I_p(\mathcal{P})$ então

$$\mathcal{P} \subset IP(k_0).$$

Em particular, $I_p(\mathcal{P}) = \overline{\mathbb{C}}$. □

Capítulo 4

Estudo do conjunto $I_p(\mathcal{P})$ quando $\Delta(\mathcal{P})$ é invariante

Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \bar{\mathbb{C}}}$ um pencil em X . Ao longo deste capítulo, suporemos que $I_p(\mathcal{P}) \neq \emptyset$. Estudaremos o conjunto $I_p(\mathcal{P})$ quando $\Delta(\mathcal{P})$ é invariante. Para facilitar a leitura do presente capítulo, apresentamos a seguinte tabela.

Caso geral	Caso particular	$I_p(\mathcal{P})$	Seção
\mathcal{F}_0 com “i.p. holomorfa”	$\text{gen}(f) = 0$	Teorema II	4.3.1
	$\text{gen}(f) = 1$	Teorema III	4.3.2
	$\text{gen}(f) = 1$ e $0 \in IS(\mathcal{P})$	Teorema IV	4.3.3
$0 \in I_p(\mathcal{P})$	$0 \in IS(\tilde{\mathcal{P}})$	Teorema V	4.4.1
	$0 \notin IS(\tilde{\mathcal{P}})$	Teoremas II e III	4.4.2

4.1 Condições necessárias e suficientes para que $\Delta(\mathcal{P})$ seja invariante

Seja $f : X \rightarrow S$ uma fibração cujas fibras são conexas. Denotemos o conjunto dos valores críticos de f por $VC(f)$ e, para $c \in S$, denotemos $F_c = f^{-1}(c)$. Seja $V = f^{-1}(VC(f))$, então pelo Teorema de Fibração de Ehresman,

$$f|_{X \setminus V} : X \setminus V \rightarrow S \setminus VC(f)$$

é um fibrado C^∞ . Logo, $\chi(F_c) = \chi(F_{c'})$, para todo $c, c' \in S \setminus VC(f)$, onde $\chi(F_c)$ é a característica de Euler de F_c . Assim podemos definir o **gênero** de f como $\text{gen}(f) := \text{gen}(F_c)$, onde $c \in S \setminus VC(f)$.

Lema 4.1. Sejam \mathcal{F} e \mathcal{G} duas folheações em X com singularidades isoladas, tais que $\mathcal{N}_{\mathcal{F}} = \mathcal{N}_{\mathcal{G}}$. Suponha que \mathcal{F} tem integral primeira holomorfa $f : X \rightarrow S$, onde S é uma superfície de Riemann compacta. Assim, temos:

1. Se $\text{gen}(f) = 0$, então $\mathcal{F} = \mathcal{G}$.
2. Se $\text{gen}(f) = 1$ e $\mathcal{F} \neq \mathcal{G}$, então \mathcal{G} é turbulenta com respeito a f .
3. Se $\text{gen}(f) \geq 2$ e $\mathcal{F} \neq \mathcal{G}$, então para qualquer fibra regular F de f , não-invariante por \mathcal{G} , tem-se que $\text{Tang}(\mathcal{G}, F) > 0$.

Prova: Seja F uma fibra regular de f . Se F é \mathcal{G} -invariante então

$$T_{\mathcal{G}} \cdot F = 2 - 2 \text{gen}(f).$$

De fato, existe uma fibra regular F' de f tal que $F' \cap \text{Sing}(\mathcal{F}) = \emptyset$, ou seja, $Z(\mathcal{F}, F') = 0$. Portanto

$$T_{\mathcal{G}} \cdot F = T_{\mathcal{F}} \cdot F = T_{\mathcal{F}} \cdot F' = \chi(F') - Z(\mathcal{F}, F') = 2 - 2 \text{gen}(f).$$

Por outro lado, se F não é \mathcal{G} -invariante então

$$T_{\mathcal{G}} \cdot F = F \cdot F - \text{Tang}(\mathcal{G}, F) = -\text{Tang}(\mathcal{G}, F) = T_{\mathcal{F}} \cdot F = 2 - 2 \text{gen}(f) \leq 0. \quad (4.1)$$

Assim, por (4.1), se $\text{gen}(f) = 0$ então toda a fibra regular F de f é invariante por \mathcal{G} , e portanto $\mathcal{F} = \mathcal{G}$. Se $\text{gen}(f) = 1$ e $\mathcal{F} \neq \mathcal{G}$, seja F uma fibra regular de f não-invariante por \mathcal{G} . Então, por (4.1), $\text{Tang}(\mathcal{G}, F) = 0$, ou seja, \mathcal{G} é uma folheação turbulenta com respeito a f . Finalmente, quando $\text{gen}(f) \geq 2$ e $\mathcal{F} \neq \mathcal{G}$, seja F uma fibra regular genérica não-invariante por \mathcal{G} . Então, novamente por (4.1), $\text{Tang}(\mathcal{G}, F) > 0$. \square

Observação 4.2. No lema anterior não aparecem folheações de Riccati, pois \mathcal{F} e \mathcal{G} têm singularidades isoladas e $\mathcal{N}_{\mathcal{F}} = \mathcal{N}_{\mathcal{G}}$.

Definição 4.3. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_{\alpha}\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ um pencil em X tal que, dado $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$, \mathcal{F}_{α} é definido pelas coleções $(\omega_i + \alpha \eta_i, U_i, g_{ij})_{i,j \in I}$. Para $\alpha \in NI(\mathcal{P}) = \overline{\mathbb{C}} \setminus IS(\mathcal{P})$, seja $\text{Sing}(\mathcal{F}_{\alpha}) \cap U_i = \{f_i = 0\}$ e $\omega_i + \alpha \eta_i = f_i \omega'_{i,\alpha}$, para todo $i \in I$. Diremos que a folheação \mathcal{F}'_{α} definida pelas coleções $\left(\omega'_{i,\alpha}, \frac{f_j}{f_i} g_{ij}, U_i \right)_{i,j \in I}$ é a **folheação dividida** associada a \mathcal{F}_{α} .

Observação 4.4. Seja \mathcal{F} uma folheação em X tal que \mathcal{F} não tem singularidades isoladas. Diremos que \mathcal{F} tem integral primeira se a folheação dividida associada a \mathcal{F} tem integral primeira.

Proposição 4.5. Se $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_{\alpha}\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ é um pencil em X tal que \mathcal{F}_0 tem integral primeira holomorfa $f : X \rightarrow S$ e $0 \in IS(\mathcal{P})$, então $\text{gen}(f) \geq 1$. Além disso:

1. Se $\text{gen}(f) = 1$, então existem $c_1, \dots, c_k \in S$ tais que $\Delta(\mathcal{P}) \subset \bigcup_{j=1}^k f^{-1}(c_j)$.
2. Se $\text{gen}(f) \geq 2$ então $\Delta(\mathcal{P})$ tem uma componente não-invariante.

Prova: Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\infty \in IS(\mathcal{P})$. Como $\mathcal{F}_0 \neq \mathcal{F}_\infty$ então, pelo lema 4.1, $\text{gen}(f) \geq 1$.

Suponha $\text{gen}(f) = 1$ e seja C uma componente de $\Delta(\mathcal{P})$. Se C não está contida em uma fibra de f então C é uma componente não-invariante de $\Delta(\mathcal{P})$. Fixado $\alpha \in IS(\mathcal{P})$, existe fibra regular F não \mathcal{F}_α -invariante tal que $F \cap C \neq \emptyset$. Em particular, $\text{Tang}(\mathcal{F}_\alpha, F) > 0$. Porém,

$$T_{\mathcal{F}_\alpha} \cdot F = F \cdot F - \text{Tang}(\mathcal{F}_\alpha, F) = T_{\mathcal{F}} \cdot F = 0,$$

o que implica $\text{Tang}(\mathcal{F}_\alpha, F) = 0$, contradição. Assim, toda a componente C de $\Delta(\mathcal{P})$ está contida em uma fibra de f , e portanto existem $c_1, \dots, c_k \in S$ tais que

$$\Delta(\mathcal{P}) \subset \bigcup_{j=1}^k f^{-1}(c_j).$$

Por outro lado, suponha $\text{gen}(f) \geq 2$ e seja F fibra regular genérica de f não \mathcal{F}_∞ invariante. Então,

$$\text{Tang}(\mathcal{F}_\infty, F) > 0. \quad (4.2)$$

Se $\Delta(\mathcal{P})$ fosse invariante então existiriam $c_1, \dots, c_k \in S$ tais que $\Delta(\mathcal{P}) \subset \bigcup_{i=1}^k F_{c_i}$ e $F \cap \Delta(\mathcal{P}) = \emptyset$. Em particular,

$$\text{Tang}(\mathcal{F}_\infty, F) = 0,$$

o que contradiz (4.2). \square

O seguinte exemplo mostra que, na proposição 4.5, é necessária a hipótese que \mathcal{F}_0 tenha singularidades isoladas, ou seja, $0 \in IS(\mathcal{P})$.

Exemplo 4.6. Consideremos o pencil $\mathcal{P}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ em \mathbb{P}^2 , onde \mathcal{F} e \mathcal{G} são definidas pelas 1-formas polinomiais homogêneas de grau 3, em \mathbb{C}^3 :

$$\begin{aligned} w &= -z(3ax^2 + 3y^2 + cz^2)dx + 4xyzdy - x(3ax^2 + 3y^2 - cz^2)dz, \\ \eta &= z^2xdx - x^2zdz, \end{aligned}$$

onde $a, c \in \mathbb{C}^*$ são constantes fixas. Então:

1. Dado $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$H_\alpha = \frac{y^2 + ax^2 + \alpha xz + cz^2}{xz^3}$$

é uma integral primeira de \mathcal{F}_α . Por outro lado, $H_\infty = \frac{x}{z}$ é integral primeira de \mathcal{F}_∞ .

2. Sejam $A_\pm = [0 : \pm\sqrt{c} : 1]$, $D_1 = [0 : 1 : 0]$, $C_\pm = [1 : \pm\sqrt{a} : 0]$ e

$$B_\pm(\alpha) = \left[\frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 12ac}}{6a} : 0 : 1 \right].$$

Dado $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$\text{Sing}(\mathcal{F}_\alpha) = \{A_\pm, B_\pm(\alpha), C_\pm, D_1\}.$$

Neste caso, as singularidades A_\pm , C_\pm e D_1 são singularidades fixas de tipo $(2 : 1)$, $(2 : 3)$ e $(1 : -3)$, respectivamente, e $B_\pm(\alpha)$ estão contidas numa componente não NI de tipo fixo igual a $(-1 : 1)$. Por outro lado, $\text{Sing}(\mathcal{F}_\infty) = \{x = 0\} \cup \{z = 0\}$.

3. $\Delta(\mathcal{P}) = \{x^2yz^2 = 0\}$, onde $\{x = 0\}$ e $\{z = 0\}$ são componentes *NI* e invariantes pelo pencil, e $\{y = 0\}$ é uma componente não-invariante não *NI*. Isto é ilustrado na figura 4.1.

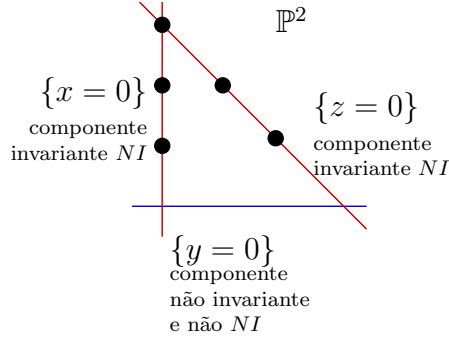


Figura 4.1: \bullet = singularidade fixa do pencil

4. Dado $\alpha \in \mathbb{C}$, seja $F_c = H_\alpha^{-1}(c)$, onde $c \in \mathbb{P}^1$, e $\text{gen}(F_c) = 1$. Então H_α tem quatro fibras críticas correspondentes aos valores $c \in \{0, \frac{16}{\sqrt{3}}, \frac{-16}{\sqrt{3}}, \infty\}$. Se $c \notin \{0, \frac{16}{\sqrt{3}}, \frac{-16}{\sqrt{3}}, \infty\}$, F_c é irredutível com dois pontos críticos $[1 : \pm\sqrt{a} : 0]$.

Seja $q_0 = C_+(0)$, então existe um sistema de coordenadas locais (x, y, U_0) , com $q_0 \in U_0$ e $x(q_0) = y(q_0) = 0$, tais que $\omega = 2xdy - 3ydx$ e $\eta = xdx$ representam \mathcal{F}_0 e \mathcal{F}_∞ em U , respectivamente. Seja $\pi_{q_0} := \pi_3 \circ \pi_2 \circ \pi_1$ o processo de dessingularização de \mathcal{F}_0 em q_0 como mostra a figura 4.2.

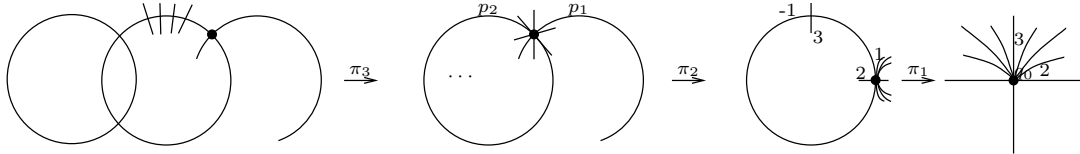


Figura 4.2

No primer blow-up, existe um sistema de coordenadas (x, t, U_1) tais que,

$$\pi_1^*(\omega + \alpha\eta) = x((\alpha - t)dx + 2xdt). \quad (4.3)$$

Portanto nas coordenadas (x, t) a folheação $\pi_1^*\mathcal{F}_\alpha|_{U_1}$ é dada por $(\alpha - t)dx + 2xdt$. No tercer blow-up, existe um sistema de coordenadas (s, w, U) tais que $\pi_{q_0}^*\mathcal{F}_\alpha|_U$ é dada por

$$s(sw + \alpha)dw + 2\alpha wds. \quad (4.4)$$

Seja $\pi : \widetilde{\mathbb{P}^2} \rightarrow \mathbb{P}^2$ a sequência de explosões que dessingulariza \mathcal{F}_0 . Logo se $\widetilde{\mathcal{P}} = \{\widetilde{\mathcal{F}}_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{C}}$ é o pencil induzido e $f = \pi \circ F_0 : \widetilde{\mathbb{P}^2} \rightarrow \mathbb{P}^2$ então:

1. f é uma fibração com $\text{gen}(f) = 1$, pelo item 4.
2. Por (4.4), temos que $0 \notin IS(\widetilde{\mathcal{P}})$.

3. Seja $D_1^1 = \pi_1^{-1}(q_0)$ então por (4.3) temos que D_1^1 contém uma singularidade móvel $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, com $p(\alpha) = -\alpha$. Em particular, $\tilde{\mathcal{F}}_\alpha$ não é dessingularizado por π , para $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Daqui é fácil provar que toda a componente não-invariante de $\Delta(\tilde{\mathcal{P}})$ é não- NI .
4. Por outro lado, como $\{y = 0\}$ é uma componente não-invariante e não- NI , e π é um biholomorfismo numa vizinhança de $\{y = 0\}$, então não podem existir $c_1, \dots, c_k \in S$ tais que $\Delta(\tilde{\mathcal{P}}) \subset \bigcup_{j=1}^k f^{-1}(c_j)$.

Logo o ítem 4 mostra que é necessária a hipótese que $\tilde{\mathcal{F}}_0$ tenha singularidades isoladas, caso contrario, isto contradiz a proposição 4.5 para $\tilde{\mathcal{P}}$.

O seguinte corolário é uma consequência imediata da proposição 4.5, e fornece uma condição necessária e suficiente para que $\Delta(\mathcal{P})$ seja invariante, no caso em que $0 \in IS(\mathcal{P})$.

Corolário 4.7. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{C}}$ um pencil em X tal que \mathcal{F}_0 tem integral primeira holomorfa $f: X \rightarrow S$ e $0 \in IS(\mathcal{P})$. Então, $\Delta(\mathcal{P})$ é invariante se, e somente se, $\text{gen}(f) = 1$.

Prova: Suponha que $\Delta(\mathcal{P})$ é invariante. Então, pela proposição 4.5, $\text{gen}(f) = 1$. Reciprocamente, se $\text{gen}(f) = 1$, seja C uma componente de $\Delta(\mathcal{P})$. Pela proposição 4.5, existe $c \in S$ tal que $C \subset f^{-1}(c)$, em particular C é \mathcal{F}_0 -invariante. Como $0 \in IS(\mathcal{P})$ e $C \subset \Delta(\mathcal{P})$ é \mathcal{F}_0 -invariante temos que C é invariante pelo pencil. \square

Observação 4.8. Sob as condições do corolário 4.7, se existem $c_1, \dots, c_k \in S$ tais que $\Delta(\mathcal{P}) \subset \bigcup_{j=1}^k f^{-1}(c_j)$, então $\Delta(\mathcal{P})$ invariante. De fato, se C é uma componente de $\Delta(\mathcal{P})$ então C é \mathcal{F}_0 -invariante, pois $0 \in IS(\mathcal{P})$ e C está contida numa fibra de f . Logo $\Delta(\mathcal{P})$ é invariante pelo pencil.

Definição 4.9. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{C}}$ um pencil em X tal que \mathcal{F}_0 tem integral primeira holomorfa $f: X \rightarrow S$. Dado $\alpha \neq 0$, diremos que \mathcal{F}_α é **transversa com respeito a f** , se o conjunto

$$\{c \in S : \text{Tang}(\mathcal{F}_\alpha, F_c) = 0\}$$

é genérico em S , em caso $\alpha \in IS(\mathcal{P})$; ou se a folheação dividida \mathcal{F}'_α associada a \mathcal{F}_α é transversa com respeito a f , em caso $\alpha \in NI(\mathcal{P})$.

Lema 4.10. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{C}}$ um pencil em X tal que \mathcal{F}_0 tem integral primeira holomorfa $f: X \rightarrow S$. Suponha que $\Delta(\mathcal{P})$ é \mathcal{F}_0 -invariante, isto é, existem $c_1, \dots, c_k \in S$ tais que

$$\Delta(\mathcal{P}) \subset \bigcup_{j=1}^k F_{c_j}. \quad (4.5)$$

Então, \mathcal{F}_α é transversa com respeito a f , para todo $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Prova: Seja $\alpha \in IS(\mathcal{P})$, então por (4.5) existe c genérico em S tal que F_c não é \mathcal{F}_α -invariante e $F_c \cap \Delta(\mathcal{P}) = \emptyset$, em particular, $\text{Tang}(\mathcal{F}_\alpha, F_c) = 0$. Por outro lado, se $\alpha \in NI(\mathcal{P})$, seja \mathcal{F}'_α a folheação dividida associada a \mathcal{F}_α . Então,

$$T_{\mathcal{F}_\alpha} = T_{\mathcal{F}'_\alpha} + \sum_{j=1}^n n_{j,\alpha} C_{j,\alpha},$$

onde $C_{j,\alpha} \subset \text{Sing}(\mathcal{F}_\alpha) \subset \Delta(\mathcal{P})$, para todo $j = 1, \dots, n$.

Novamente por (4.5), existe c genérico em S tal que F_c é uma fibra regular de f não contida em $\Delta(\mathcal{P})$. Segue que F_c não é \mathcal{F}'_α -invariante e $\text{Tang}(\mathcal{F}'_\alpha, F_c) = 0$. Logo \mathcal{F}'_α é uma folheação transversa com respeito a f , para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$. \square

Assim, o seguinte teorema resume os resultados anteriores.

Teorema 4.11. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ um pencil em X tal que \mathcal{F}_0 tem integral primeira holomorfa $f : X \rightarrow S$ e $0 \in IS(\mathcal{P})$. Então, são equivalentes:

1. $\text{gen}(f) = 1$.
2. $\Delta(\mathcal{P})$ é invariante pelo pencil.
3. Existem $c_1, \dots, c_k \in S$ tais que $\Delta(\mathcal{P}) \subset \bigcup_{j=1}^k f^{-1}(c_j)$.

Em particular, \mathcal{F}_α é uma folheação transversa com respeito a f , para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$.

4.2 Relação do pencil com os grupos de holonomia

Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ um pencil em X tal que \mathcal{F}_0 tem integral primeira holomorfa. Na seção anterior, vimos que se $\Delta(\mathcal{P})$ é invariante e $0 \in IS(\mathcal{P})$, então \mathcal{P} não contém folheações de Ricatti. Mas isto pode acontecer no caso em que $0 \notin IS(\mathcal{P})$, como mostra o seguinte exemplo:

Exemplo 4.12. Consideremos $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ um pencil em \mathbb{P}^2 , tal que \mathcal{F}_α é representado pela 1-forma polinomial homogênea de grau 3, em \mathbb{C}^3 :

$$\omega + \alpha\eta = yz(1 + \alpha)dx - xz(2 + 3\alpha)dy + xy(1 + 2\alpha)dz$$

Então:

1. $NI(\mathcal{P}) = \{-1/2, -2/3, -1\}$ e dado $\alpha \in IS(\mathcal{P})$

$$\text{Sing}(\mathcal{F}_\alpha) = \{[1 : 0 : 0], [0 : 0 : 1], [0 : 1 : 0]\}.$$

2. $\Delta(\mathcal{P}) = \{X = 0\} \cup \{Y = 0\} \cup \{Z = 0\}$ cujas componentes são invariantes e NI .

3. \mathcal{F}_0 e \mathcal{F}_∞ tem integrais primeiras meromorfas

$$F = \frac{xz}{y^2} \quad \text{e} \quad G = \frac{xz^2}{y^3}, \quad (4.6)$$

respectivamente.

Seja $\pi : \widetilde{\mathbb{P}^2} \rightarrow \mathbb{P}^2$ a sequência de explosões que dessingulariza \mathcal{F}_0 . Seja $\widetilde{\mathcal{P}} = \{\widetilde{\mathcal{F}}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ o pencil obtido em $\widetilde{\mathbb{P}^2}$, $\Delta(\widetilde{\mathcal{P}})$ o seu conjunto de tangencias e $f = F \circ \pi : \widetilde{\mathbb{P}^2} \rightarrow \mathbb{P}^1$. Então

4. $\Delta(\widetilde{\mathcal{P}})$ é invariante.

5. Pela equação (4.6), temos que $0 \notin IS(\widetilde{\mathcal{P}})$.

6. Dado $\alpha \in IS(\widetilde{\mathcal{P}}) \setminus \{0\}$ temos que $T_{\widetilde{\mathcal{F}}_\alpha} \cdot F_c = 0$, para c genérico em \mathbb{P}^1 . Como $\text{gen}(f) = 0$ então $\widetilde{\mathcal{F}}_\alpha$ é uma folheação de Riccati com respeito a f .

Pelo exemplo anterior é natural dar a seguinte definição.

Definição 4.13. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ um pencil em X tal que \mathcal{F}_0 tem integral primeira holomorfa $f : X \rightarrow S$. Diremos que \mathcal{P} é **transversa com respeito a f** , se existe $\alpha_0 \in IS(\mathcal{P})$ tal que \mathcal{F}_{α_0} é transversa com respeito a f .

Observação 4.14. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ um pencil em X tal que \mathcal{F}_0 tem integral primeira holomorfa $f : X \rightarrow S$. Se $\Delta(\mathcal{P})$ é invariante então \mathcal{P} é transversa com respeito a f . Isto é pois

$$\Delta(\mathcal{P}) = \bigcup_{i=1}^k f^{-1}(c_i) \cup \bigcup_{j=1}^l C_j,$$

onde $c_1, \dots, c_k \in S$ e $C_j \subset \text{Sing}(\mathcal{F}_0)$, para $i = 1, \dots, l$.

Proposição 4.15. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ um pencil em X tal que \mathcal{F}_0 tem integral primeira holomorfa $f : X \rightarrow S$. Suponha que \mathcal{P} é transversa com respeito a f . Então, dado $\alpha \in IS(\mathcal{P}) \setminus \{0\}$, temos

1. $\text{gen}(f) = 0$, implica que $0 \notin IS(\mathcal{P})$ e \mathcal{F}_α é uma folheação de Riccati com respeito a f .
2. $\text{gen}(f) = 1$, implica que \mathcal{F}_α é uma folheação turbulenta com respeito a f .

Prova: Claramente como $T_{\mathcal{F}_\alpha} = T_{\mathcal{F}_{\alpha_0}}$, para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$, então \mathcal{F}_α é transversa com respeito a f , para todo $\alpha \in IS(\mathcal{P}) \setminus \{0\}$. Em particular, se $\text{gen}(f) = 1$, se segue 2.

Pela proposição 4.5, se $0 \in IS(\mathcal{P})$ então $\text{gen}(f) \geq 1$, logo se segue 1. □

Sob as hipóteses da proposição 4.15, existe um aberto $W = S \setminus \{c_1, \dots, c_k\} \subset X \setminus \Delta(\mathcal{P})$ tal que, fixado $c \in W$, para todo $\alpha \in IS(\mathcal{P}) \setminus \{\infty\}$ temos associada a representação de holonomia global \mathcal{H}_α de \mathcal{F}_α ,

$$\mathcal{H}_\alpha : \Pi_1(W, c) \rightarrow \text{Aut}(F_c), \quad (4.7)$$

e o grupo de holonomia global $G_\alpha := \mathcal{H}_\alpha(\Pi_1(W, c))$ de \mathcal{F}_α .

Observação 4.16. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ um pencil em X tal que \mathcal{F}_0 tem integral primeira holomorfa $f : X \rightarrow S$. Se \mathcal{P} é transversa com respeito a f então $\text{gen}(f) \leq 1$. De fato, suponha que $\text{gen}(f) \geq 2$, logo de [25, p. 242], fixada uma curva $\gamma \in \Pi_1(W, c)$ temos o mapa holomorfo $F_\gamma : IS(\mathcal{P}) \setminus \{\infty\} \times F_c \rightarrow F_c$, dada por $F_\gamma(\alpha, p) = \mathcal{H}_\alpha(\gamma)(p)$. Como $\text{Aut}(F_c)$ é finito, então $F_\gamma(\alpha, z)$ não depende de α . Em particular, se $\alpha_0 \in IS(\mathcal{P})$ então $G_\alpha = G_{\alpha_0}$, para todo $\alpha \in IS(\mathcal{P}) \setminus \{\infty\}$. Com o mesmo argumento de [25, p. 34] temos que existe uma vizinhança V de α_0 tal que $\mathcal{F}_\alpha = \mathcal{F}_{\alpha_0}$, para todo $\alpha \in V$, contradição.

Pela observação 4.16 estudaremos os grupos de holonomia no caso em que $\text{gen}(f) \leq 1$. Para isto, precisaremos da hipótese de que o pencil seja flat.

Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ um pencil *flat* em X tal que \mathcal{F}_∞ tem integral primeira holomorfa $f : X \rightarrow S$. Suponhamos que \mathcal{P} é transversa com respeito a f .

Pela observação 8 de [25, p. 242], fixada uma curva $\gamma \in \Pi_1(W, c)$, podemos definir uma aplicação holomorfa $F_\gamma : IS(\mathcal{P}) \setminus \{\infty\} \times F_c \rightarrow F_c$ dada por

$$F_\gamma(\alpha, p) = \mathcal{H}_\alpha(\gamma)(p). \quad (4.8)$$

Em particular, temos um automorfismo holomorfo $f_\alpha : F_c \rightarrow F_c$ definido por

$$f_\alpha(p) := F_\gamma(\alpha, p).$$

Fixado $\alpha_0 \in IS(\mathcal{P}) \setminus \{\infty\}$, sejam $p \in F_c$ e L_{α_0} a folha da folheação \mathcal{F}_{α_0} que passa por p . Seja $\tilde{\gamma}_{\alpha_0} : [0, 1] \rightarrow L_{\alpha_0}$ o levantamento de γ sobre a folha L_{α_0} tal que $\tilde{\gamma}_{\alpha_0}(0) = p$, de forma que $f_{\alpha_0}(p) = \tilde{\gamma}_{\alpha_0}(1)$. Seja $\Sigma \subset F_c$ uma seção transversal em p . Logo existe $\varepsilon > 0$ tal que a deformação de holonomia de \mathcal{F}_{α_0} é dada por

$$H_\gamma : \begin{array}{ccc} D_\varepsilon \times \Sigma & \rightarrow & D_\varepsilon \times \Sigma \\ (\alpha, q) & \mapsto & (\alpha, f_\alpha(q)) \end{array},$$

onde $D_\varepsilon = \{|\alpha - \alpha_0| < \varepsilon\}$.

Gostaríamos de dar uma representação explícita de $f_\alpha(q)$ em função de α . Para isto usaremos que \mathcal{P} é flat.

Como \mathcal{P} é flat, pelo lema 2.14, existe uma cobertura por abertos $\{U_n\}_{1 \leq n \leq m}$ de $\tilde{\gamma}_{\alpha_0}[0, 1]$ tal que $U_n \cap U_{n+1}$ é conexo, e existe um sistema de coordenadas (x_n, y_n) em U_n tal que \mathcal{F}_α é representada em U_n pela 1-forma

$$\omega_{n,\alpha} = dy_n + \alpha dx_n, \quad (4.9)$$

para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$. Além disso, existem constantes $\lambda_n \in \mathbb{C}^*$ tais que $dx_{n+1} = \lambda_n dx_n$ e $dy_{n+1} = \lambda_n dy_n$, para $n = 1, \dots, m-1$. Portanto

$$y_{n+1} = \lambda_n y_n + a_n, \quad (4.10)$$

onde $a_n \in \mathbb{C}$, para $n = 1, \dots, m-1$.

Fixemos seções $\Sigma_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_m$ transversais à folheação \mathcal{F}_{α_0} e $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1\}$ uma partição de $[0, 1]$ tais que:

1. $\tilde{\gamma}_{\alpha_0}[t_{n-1}, t_n] \subset U_n$, para $n = 1, \dots, m$,

2. $\Sigma_0, \Sigma_m \subset \Sigma$.
3. $\gamma_p(t_n) \in \Sigma_n$, para $n = 0, 1, \dots, m$.
4. $\Sigma_n \subset \{x_n = c_n\}$, isto é, Σ_n está contido em uma folha de \mathcal{F}_∞ , para $n = 0, \dots, m$.

Das equações (4.9) e (4.10), a holonomia $f_\alpha|_{\Sigma_0}$ é da forma

$$f_\alpha|_{\Sigma_0}(q_0) = y_m^{-1}(\mu y_1(q_0) + \alpha b + c), \quad (4.11)$$

para todo $\alpha \in D_\varepsilon$.

Consideraremos separadamente os casos em que $\text{gen}(f) = 0$ e $\text{gen}(f) = 1$ quando $S = \mathbb{P}^1$.

4.2.1 Grupo de holonomia quando $\text{gen}(f) = 1$

Com as notações acima, se $W' = X \setminus f^{-1}(VC(f))$ então

$$f|_{W'} : W' \rightarrow S \setminus VC(f)$$

é um fibrado holomorfo. Então, existem uma vizinhança D de c e uma aplicação $\phi : f^{-1}(D) \rightarrow D \times F_c$ tal que ϕ é um biholomorfismo. Assim, podemos supor que as projeções $\pi_1 : D \times F_c \rightarrow D$ e $\pi_2 : D \times F_c \rightarrow F_c$ definem as folheações \mathcal{F}_∞ e \mathcal{F}_{α_0} em $D \times F_c$, respectivamente. Seja $P : \mathbb{C} \rightarrow F_c$ a aplicação de recobrimento universal de F_c e seja τ uma 1-forma não-nula em F_c tal que $P^*(\tau) = dz$. Consideremos o seguinte lema provado em [25, p. 9].

Lema 4.17. Sob as notações acima, se $\text{gen}(f) = 1$ então existem constantes $k_0, k_m \in \mathbb{C}^*$ tais que

$$dy_1|_{\Sigma_0} = k_0\tau|_{\Sigma_0} \quad \text{e} \quad dy_m|_{\Sigma_m} = k_m\tau|_{\Sigma_m}. \quad (4.12)$$

Fixemos discos $D_0, D_m \subset \mathbb{C}$ tais que $\phi_j := P|_{D_j} : D_j \rightarrow \Sigma_j$ seja um biholomorfismo, com $j = 0, m$. Pelo lema 4.17, existem constantes $k_0, k_m \in \mathbb{C}^*$ tais que satisfazem a equação (4.12). Então $\phi^*(dy_1) = k_0 dz$ e $\phi^*(dy_m) = k_m dz$. Em particular, $y_1 \circ \phi_0(z) = k_0 z + d_0$ e $y_m \circ \phi_m(z) = k_m z + d_m$. Seja $h_\alpha = f_\alpha|_{\Sigma_0}$ e $\tilde{h}_\alpha(z) = \phi_m^{-1} \circ h_\alpha \circ \phi_0(z)$ a aplicação de holonomia induzida, como mostra na figura 4.3.

Logo, pela equação (4.11),

$$\begin{aligned} \tilde{h}_\alpha(z) &= \phi_m^{-1} \circ h_\alpha \circ \phi_0(z) \\ &= (y_m \circ \phi_m)^{-1} \circ (y_m \circ h \circ y_1^{-1}) \circ (y_1 \circ \phi_0)(z) \\ &= k_m^{-1}(\mu y_1 \circ \phi_0(z) + \alpha b + c - d_m), \end{aligned}$$

e assim

$$\tilde{h}_\alpha(z) = \lambda z + a\alpha + b,$$

onde $\lambda = k_m^{-1}\mu k_0$, $a = k_m^{-1}b$ e $b = k_m^{-1}(d_0\mu + c + d_m)$.

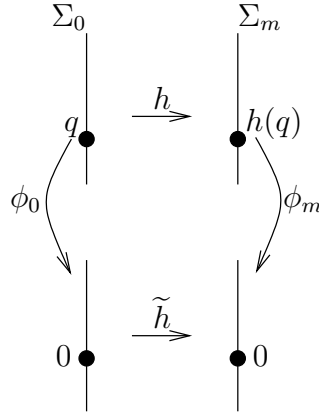


Figura 4.3: Aplicação de holonomia induzida.

Portanto, se $\text{gen}(f) = 1$ então

$$f_\alpha(z) = \lambda_l z + a_l \alpha + b_l, \quad (4.13)$$

onde $\lambda_l \in \mathbb{C}^*$, $a_l, b_l \in \mathbb{C}$.

Assim obtemos a seguinte proposição.

Proposição 4.18. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{C}}$ um pencil flat em X tal que \mathcal{F}_∞ tem integral primeira holomorfa $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$. Suponha que \mathcal{P} é transversa com respeito a f e que $\text{gen}(f) = 1$. Então, dado $\alpha \in IS(\mathcal{P})$, o grupo de holonomia global G_α é dado por

$$G_\alpha = \langle f_{1,\alpha}, \dots, f_{k,\alpha} \rangle,$$

onde $f_{j,\alpha}(z) = \lambda_j z + A_j(\alpha)$, com $A_j(\alpha) = a_j \alpha + b_j$ e $a_j, b_j \in \mathbb{C}$, para $j = 1, \dots, k$. Além disso:

1. Se $F_c \simeq \mathbb{C}/\langle 1, \tau \rangle$, com $\tau \notin \{i, e^{\frac{\pi i}{3}}, e^{\frac{2\pi i}{3}}\}$, então $\lambda_j \in \{\pm 1\}$, para todo $j = 1, \dots, k$.
2. Se $F_c \simeq \mathbb{C}/\langle 1, i \rangle$ então $\lambda_j \in \{\pm 1, \pm i\}$, para todo $j = 1, \dots, k$.
3. Se $F_c \simeq \mathbb{C}/\langle 1, \tau_0 \rangle$, com $\tau_0 \in \{e^{\frac{2\pi i}{3}}, e^{\frac{2\pi i}{6}}\}$, então $\lambda_j \in \{\pm 1, \pm \tau_0, \pm \tau_0^2\}$.

Em particular,

$$G_\alpha = \{\lambda z + n_2 A_2(\alpha) + \dots + n_k A_k(\alpha) : \lambda \in \langle \lambda_1, \dots, \lambda_k \rangle, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{Z}\}.$$

Prova: Pela equação (4.13), segue de imediato que

$$G_\alpha = \langle f_{1,\alpha}, \dots, f_{k,\alpha} \rangle,$$

onde $f_{j,\alpha}(z) = \lambda_j z + A_j(\alpha)$, com $A_j(\alpha) = a_j \alpha + b_j$, para $j = 1, \dots, k$.

Por outro lado, é bem conhecido que dado $f \in \text{Aut}(F_c)$, com $F_c \simeq \mathbb{C}/\Gamma$ e $\Gamma = \langle 1, \tau \rangle$, existem um recobrimento $\pi : \mathbb{C} \rightarrow F_c$ e um biholomorfismo $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tais que $f \circ \pi = \pi \circ g$. Além disso, se $g(z) = az + b$ então

- i) Se $\tau \notin \{i, e^{\frac{\pi i}{3}}, e^{\frac{2\pi i}{6}}\}$ então $a \in \{\pm 1\}$.
- ii) Se $\tau = i$ então $a \in \{\pm 1, \pm i\}$.
- iii) Se $\tau = \tau_0$, com $\tau_0 \in \{e^{\frac{2\pi i}{3}}, e^{\frac{2\pi i}{6}}\}$, então $a \in \{\pm 1, \pm \tau_0, \pm \tau_0^2\}$.

Daqui segue 1, 2 e 3. □

Corolário 4.19. Sob as condições da proposição 4.18, dado $\alpha \in IS(\mathcal{P})$, seja $G_\alpha = \langle f_{1,\alpha}, \dots, f_{k,\alpha} \rangle$, onde $f_{j,\alpha}$ é como na proposição 4.18. Então, se $F_c \simeq \mathbb{C}/\Gamma$ são equivalentes:

- i) G_α é finito.
- ii) Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 A_j(\alpha) \in \Gamma$, para todo $j \in J$.
- iii) A órbita de qualquer ponto $q \in F_c$ é finita.

Em particular, se $\alpha \in I_p(\mathcal{P}) \setminus \{\infty\}$ então G_α é finito.

Prova: Claramente (i) é equivalente a (ii) e (ii) implica (iii). Provemos então que (iii) implica (ii). Seja $q \in F_c$ e L a folha de \mathcal{F}_α que passa por q , então, por hipótese,

$$L \cap F_c = \{f(q) : f \in G_\alpha\}$$

é finito. Logo, fixado $j \in \{1, \dots, k\}$, como $g_\alpha(z) = z + A_j(\alpha) \in G_\alpha$ temos que $\{g_{j,\alpha}^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é finito. Portanto, existe $n_j \in \mathbb{N}$ tal que $n_j A_j(\alpha) \in \Gamma$. O resultado segue tomando $n_0 = n_1 \cdots n_k$. □

4.2.2 Grupo de holonomia quando $\text{gen}(f) = 0$

Nesta seção suporemos que $\Delta(\mathcal{P})$ é invariante então pela observação 4.14 temos que \mathcal{P} é transversa com respeito a f . Como \mathcal{F}_∞ tem integral primeira holomorfa então pela proposição 4.15, $\infty \notin IS(\mathcal{P})$ e \mathcal{F}_α é uma folheação de Riccati com respeito a f , para todo $\alpha \in IS(\mathcal{P})$.

Afirmamos que existe uma componente de $\Delta(\mathcal{P})$ que está contida em $\text{Sing}(\mathcal{F}_\infty)$. De fato, observe que existe uma componente C de $\Delta(\mathcal{P})$ não contida nas fibras de f . Como $\Delta(\mathcal{P})$ é invariante, C é \mathcal{F}_∞ -invariante e assim $C \subset \text{Sing}(\mathcal{F}_\infty)$. Daqui segue que

$$\Delta(\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^r n_j F'_j + \sum_{k=1}^l C'_k,$$

onde F'_j está contida numa fibra de f , para $j = 1, \dots, m$, e $C'_k \subset \text{Sing}(\mathcal{F}_\infty)$, para $k = 1, \dots, l$.

Fazendo blow-downs nas componentes das fibras críticas de f , obtemos uma aplicação holomorfa $\phi : X \rightarrow X_1$ sem fibras críticas (cf. [4, p. 56]). Em particular, se $g := f \circ \phi^{-1} :$

$X_1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ então g é localmente trivial, isto é, g é um fibrado holomorfo com fibra típica \mathbb{P}^1 .

Seja $\mathcal{P}_* := \{\mathcal{G}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ o pencil induzido em X_1 , onde \mathcal{G}_∞ tem integral primeira holomorfa g . Além disso, dado $\alpha \in IS(\mathcal{P}_*)$, \mathcal{G}_α é uma folheação de Riccati com respeito a g e o divisor de tangências $\Delta(\mathcal{P}_*)$ é dado por

$$\Delta(\mathcal{P}_*) = \sum_{j=1}^r n_j F_{c_j} + \sum_{k=1}^l C_k, \quad (4.14)$$

onde F_{c_j} é fibra de g , para $j = 1, \dots, r$, e $C_k \subset \text{Sing}(\mathcal{H}_0)$, para $k = 1, \dots, l$. Logo, fixado $c \in \mathbb{P}^1$ o grupo de holonomia global G_α de \mathcal{G}_α é da forma

$$G_\alpha = \langle f_{1,\alpha}, \dots, f_{r,\alpha} \rangle \subset \text{Aut}(G_c),$$

onde $G_c \simeq \mathbb{P}^1$ e $f_{j,\alpha}$ é conjugado com a holonomia ao redor de F_{c_j} , para $j = 1, \dots, r$.

Sem perda de generalidade, podemos supor que $0 \in IS(\mathcal{P})$. Fixado $j \in \{1, \dots, r\}$, existe uma vizinhança $D_j \subset \mathbb{C}$ de c_j , tal que $g^{-1}(D_j) \simeq D_j \times F_{c_j} \ni (x, y)$, onde $F_{c_j} \simeq \mathbb{P}^1$. Além disso, como \mathcal{F}_0 é transversa com respeito a f , podemos supor que as projeções $\pi_1 : D_j \times F_{c_j} \rightarrow D_j$ e $\pi_2 : D_j \times F_{c_j} \rightarrow F_{c_j}$ definem as folheações \mathcal{F}_∞ e \mathcal{F}_{α_0} em $D_j \times F_{c_j}$, respectivamente. Em particular, $dx = 0$ e $dy = 0$ representam \mathcal{F}_0 e \mathcal{F}_∞ em $D_j \times F_{c_j}$, respectivamente.

Em seguida, buscaremos uma expressão explícita de G_α . Para isto, primeiro consideremos o caso em que $c \in D_j$. Lembremos que $f_{j,\alpha} = \mathcal{H}(\gamma)$, para alguma curva $\gamma \in \Pi_1(W, c)$. Como $c \in D_j$, então $f_{j,\alpha}$ coincide com a holonomia de \mathcal{F}_α ao redor de F_{c_j} . Sejam $p \in F_{c_j}$, L_0 a folha da folheação \mathcal{F}_0 que passa por p e $\tilde{\gamma}_0 : [0, 1] \rightarrow L_0$ o levantamento de γ sobre a folha L_0 tal que $\tilde{\gamma}_0(0) = p$, de forma que $f_{j,\alpha}(p) = \tilde{\gamma}_0(1)$. Consideremos uma cobertura por abertos $\{U_n\}_{1 \leq n \leq m}$ de $\tilde{\gamma}_0[0, 1]$ tal que $U_n \simeq D_n \times \mathbb{P}^1$, onde D_n é biholomorfo a um disco, $D_n \cap D_{n+1} \neq \emptyset$, para $n = 1, \dots, m-1$, $D_m \cap D_1 \neq \emptyset$, e $D_n \cap D_j = \emptyset$, para $n = 1, \dots, m$. Além disso, como $0 \in IS(\mathcal{P})$, $\mathcal{F}_\alpha|_{U_n}$ é representada pela 1-forma:

$$\omega_\alpha = dy + \alpha P(x, y) dx, \quad (4.15)$$

onde $P(x, y) = \sum_{j=1}^k a_j(x) y^j$, com $a_j(x)$ holomorfa para $j = 1, \dots, k$ e $k \leq 2$.

Da equação (4.15), obtemos $d\omega_\alpha = \theta \wedge \omega_\alpha$, com $\theta = \frac{P_y}{P} dy$, para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$. Como \mathcal{P} é flat, obtemos $(a_0(x), a_1(x), a_2(x)) = (\lambda, \mu, \nu) a(x)$, onde $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ e $a(x)$ é holomorfa. Em particular, $P(x, y) = a(x) p_2(y)$, onde $p_2(y)$ é um polinômio de grau menor ou igual a 2 e $\mathcal{F}_\alpha|_{U_n}$ é representada pela 1-forma:

$$\omega_\alpha = dy + \alpha a(x) p_2(y) dx, \quad (4.16)$$

tal que $d\omega_\alpha = \theta \wedge \omega_\alpha$, onde $\theta = \frac{p_2'(y)}{p_2(y)} dy$, para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$. Logo, após mudança de coordenadas na fibra, temos duas possibilidades:

1. $p_2(y) = \lambda$. Neste caso $C_1 = \{y = \infty\} \subset \text{Sing}(\mathcal{F}_0)$ é uma componente de $\Delta(\mathcal{P})$ com multiplicidade 2. Além disso,

$$\omega_0 + \alpha \omega_\infty = d \left(y + \alpha \lambda \int_{x_0}^x a(t) dt \right) = d(Y_n + \alpha X_n),$$

onde

$$Y_n(x, y) = y + \text{cte}, \quad (4.17)$$

para todo $n = 1, \dots, m$. Lembremos que, pela relação (4.11),

$$f_{j,\alpha}|_{\Sigma_0}(q_0) = Y_m^{-1}(\mu Y_1(q_0) + \alpha b + c),$$

assim de (4.18) temos que

$$f_{j,\alpha}(z) = \lambda_j z + \alpha b_j + c_j.$$

2. $p_2(y) = y$. Neste caso $C_1 = \{y = 0\}$ e $C_2 = \{y = \infty\}$ são componentes invariantes de $\Delta(\mathcal{P})$ de multiplicidade um.

Além disso,

$$\frac{\omega_0 + \alpha \omega_\infty}{y} = \frac{dy}{y} + \alpha a(x) dx = d(Y_n + \alpha X_n),$$

onde

$$Y_n|_{\Sigma_n}(y) = \exp(2\pi i(\mu_j \alpha + \nu_j))y, \quad (4.18)$$

para $n = 0, \dots, m$. Portanto $f_{j,\alpha}(z) = A_j(\alpha)z$, onde $A_j(\alpha) = \exp(2\pi i(\mu_j \alpha + \nu_j))$ e $\mu_j, \nu_j \in \mathbb{C}$.

No caso geral, se $c \notin D_j$, temos que $f_{j,\alpha}$ é conjugado a uma das expressões obtidas nos itens 1 e 2. Logo, como g é um fibrado holomorfo e, dado $\alpha_0 \in IS(\mathcal{P}_*)$, \mathcal{G}_{α_0} é transversa com respeito a g , temos que f_{j,α_0} tem um ponto fixo comum, para todo $j = 1, \dots, k$. Logo, dado $j \in \{1, \dots, k\}$:

$$f_{j,\alpha}(z) = \lambda_j z + \alpha b_j + c_j, \quad \text{ou} \quad f_{j,\alpha}(z) = A_j(\alpha)z,$$

para todo $\alpha \in IS(\mathcal{P}_*)$.

Logo, temos a seguinte proposição.

Proposição 4.20. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ um pencil flat em X tal que \mathcal{F}_∞ tem integral primeira holomorfa $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$, com $\text{gen}(f) = 0$. Suponha que $\Delta(\mathcal{P})$ é invariante. Então, existe uma aplicação $\phi : X \rightarrow X_1$ obtida por contração das fibras críticas de f tal que $f \circ \phi^{-1}$ é um fibrado holomorfo. Sejam $\mathcal{P}_* = \{\mathcal{G}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ o pencil induzido em X_1 e $G_\alpha = \langle f_{1,\alpha}, \dots, f_{k,\alpha} \rangle$ o grupo de holonomia de \mathcal{G}_α . Então,

$$f_{j,\alpha}(z) = \lambda_j z + \alpha b_j + c_j, \quad \text{para todo } j = 1, \dots, k,$$

ou

$$f_{j,\alpha}(z) = A_j(\alpha)z, \quad \text{para todo } j = 1, \dots, k,$$

onde $A_j(\alpha) = \exp(2\pi i(\mu_j \alpha + \nu_j))$.

4.3 Cálculo de $I_p(\mathcal{P})$ no caso que \mathcal{F}_∞ tem integral primeira holomorfa

Nesta seção estudaremos o conjunto $I_p(\mathcal{P})$ usando os resultados da seção 4.2. Como nessa seção, dividiremos o nosso estudo nos casos $\text{gen}(f) = 0$ e $\text{gen}(f) = 1$.

Lema 4.21. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \bar{\mathbb{C}}}$ um pencil em X tal que \mathcal{F}_∞ tem integral primeira holomorfa $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$. Suponha que $\Delta(\mathcal{P})$ é invariante, $Z(\mathcal{F}_\alpha, C) \geq 1$, para toda componente C de $\Delta(\mathcal{P})$, e \mathcal{F}_α tem integral primeira meromorfa local em todas as suas singularidades, para $\alpha \in IS(\mathcal{P})$. Se G_α é finito, então $\alpha \in I_p(\mathcal{P})$.

Prova: Para provar que $\alpha \in I_p(\mathcal{P})$ é suficiente provar que \mathcal{F}_α tem infinitas curvas invariantes compactas (cf. [14]).

Seja então L uma folha de \mathcal{F}_α não contida em $\Delta(\mathcal{P})$. Vejamos que $\bar{L} \setminus L \subset \text{Sing}(\mathcal{F}_\alpha)$. Se $x \in \bar{L} \setminus L$ então existe uma componente C de $\Delta(\mathcal{P})$, tal que $x \in C$, pois se $x \notin \Delta(\mathcal{P})$, então G_α não é finito. Como $Z(\mathcal{F}_\alpha, C) \geq 1$, temos que $C \cap \text{Sing}(\mathcal{F}_\alpha) \neq \emptyset$. Seja $p \in C \cap \text{Sing}(\mathcal{F}_\alpha)$, então, por hipótese, \mathcal{F}_α tem uma integral primeira meromorfa em uma vizinhança U de p . Podemos supor, sem perda de generalidade, que $x \in U$ e portanto $x \in \text{Sing}(\mathcal{F}_\alpha)$.

Portanto, $\bar{L} \setminus L \subset \text{Sing}(\mathcal{F}_\alpha)$, em particular, $\bar{L} \setminus L$ tem codimensão 2. Pelo teorema de Remmert-Stein (cf. [18]), \bar{L} é uma curva compacta invariante de \mathcal{F}_α , e assim, \mathcal{F}_α tem integral primeira. \square

4.3.1 Caso $\text{gen}(f) = 0$

Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \bar{\mathbb{C}}}$ um pencil flat em X tal que \mathcal{F}_∞ tem integral primeira holomorfa $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$, com $\text{gen}(f) = 0$. Suponha que $\Delta(\mathcal{P})$ é invariante. Lembremos que na seção 4.2.2 vimos que existe uma aplicação $\phi : X \rightarrow X_1$ obtida por contração das fibras críticas de f . Seja \mathcal{P}_* o pencil induzido em X_1 e $G_\alpha = \langle f_{1,\alpha}, \dots, f_{k,\alpha} \rangle$, o grupo de holonomia de \mathcal{G}_α . Da proposição 4.20 temos que, para todo $j \in \{1, \dots, k\}$, $f_{j,\alpha}$ é do tipo

$$\lambda_j z + \alpha b_j + c_j \quad \text{ou} \quad A_j(\alpha)z,$$

sendo $A_j(\alpha) = \exp(2\pi i(\mu_j \alpha + \nu_j))$. Logo, temos as duas possibilidades:

1. $f_{j,\alpha}(z) = \lambda_j z + \alpha b_j + c_j$, para todo $j = 1, \dots, k$. Neste caso, se $\#(IS(\mathcal{P}) \cap I_p(\mathcal{P})) \geq 3$ então $IS(\mathcal{P}) \subset I_p(\mathcal{P})$. De fato, podemos supor que, sem perda de generalidade, $0 \in IS(\mathcal{P}) \cap I_p(\mathcal{P})$. Seja $n \leq k$ tal que $\lambda_j \neq 1$ se $1 \leq j \leq n$ e $\lambda_j = 1$ se $j \geq n+1$. Neste caso, como $0 \in I_p(\mathcal{P})$ então $f_{j,\alpha}$ tem ordem finita, para todo $j \in \{1, \dots, k\}$. Em particular, $c_j = 0$ para $j \geq n+1$. Além disto, G_0 é abeliano, e portanto os $f_{j,0}$ têm um ponto fixo comum $\frac{c_j}{1 - \lambda_j}$, para $1 \leq j \leq n$. Por tanto, $\frac{c_j}{1 - \lambda_j}$ independe de j e λ_j é raiz da unidade, $j \in \{1, \dots, n\}$. Suponha agora que $\alpha_0 \in I_p(\mathcal{P}) \setminus \{0\}$. Análogamente, devemos ter que $\alpha_0 b_j = 0$ para $j \geq n+1$, ou seja, $b_j = 0$ se $j \geq n+1$. Como no caso anterior, o ponto fixo comum para f_{j,α_0} , $1 \leq j \leq n$, é $\frac{\alpha_0 b_j + c_j}{1 - \lambda_j}$, ou seja, $\frac{b_j}{1 - \lambda_j}$ independe de $j \in \{1, \dots, n\}$.

Daí concluímos que G_α é finito para todo $\alpha \in IS(\mathcal{P})$. Logo, dado $\alpha \in IS(\mathcal{P})$, como $0 \in I_p(\mathcal{P})$ e \mathcal{G}_α é uma folheação de Ricatti então \mathcal{G}_α tem integral primeira meromorfa local em todas as suas singularidades, e $Z(\mathcal{G}_\alpha, C) \geq 1$ para toda a componente C de $\Delta(\mathcal{P}_*)$, então pelo lema 4.21 $\alpha \in I_p(\mathcal{P})$.

2. $f_{j,\alpha}(z) = A_j(\alpha)z$, onde $A_j(\alpha) = \exp(2\pi i(\mu_j\alpha + \nu_j))$, para todo $j = 1, \dots, k$. Neste caso, temos as seguintes possibilidades:

- (a) $\mu_j = 0$, para todo $j = 1, \dots, k$. Se $0 \in I_p(\mathcal{P})$ então $\nu_j \in \mathbb{Q}$, para todo $j = 1, \dots, k$. Em particular, dado $\alpha \in IS(\mathcal{P})$, \mathcal{G}_α tem integral primeira meromorfa local em todas as suas singularidades. Logo, pelo lema 4.21, $IS(\mathcal{P}) \subset I_p(\mathcal{P})$. Por outro lado, se $0 \notin I_p(\mathcal{P})$ então $I_p(\mathcal{P})$ é finito.
- (b) $\mu_j \neq 0$, para algum $j \in \{1, \dots, k\}$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\mu_j \neq 0$, para $j = 1, \dots, r$ e $\mu_j = 0$, para $j = r+1, \dots, k$. Suponhamos que $I_p(\mathcal{P}) \cap IS(\mathcal{P}) \neq \{\infty\}$. Neste caso, seja $\alpha_0 \in I_p(\mathcal{P}) \cap IS(\mathcal{P}) \setminus \{\infty\}$, como G_{α_0} é finito, $\mu_j\alpha_0 + \nu_j \in \mathbb{Q}$, para todo $j = 1, \dots, r$. Se $\alpha \in IS(\mathcal{P}) \setminus \{\alpha_0\}$ é tal que G_α é finito então

$$\mu_j\alpha + \nu_j = \mu_j(\alpha - \alpha_0) + \mu_j\alpha_0 + \nu_j \in \mathbb{Q} \iff \mu_j(\alpha - \alpha_0) \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}.$$

Em particular, dados $i, j \in \{1, \dots, r\}$, temos $\frac{\mu_i}{\mu_j} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, ou seja,

$$(\mu_1, \dots, \mu_r) = \mu_1(1, q_2, \dots, q_r),$$

onde $q_i \in \mathbb{Q}$, para $i = 2, \dots, r$. Decorre daí que

$$\begin{aligned} G_\alpha \text{ é finito} &\iff \mu_1(\alpha - \alpha_0) \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \\ &\iff \alpha \in \mu_1^{-1}\mathbb{Q} + \alpha_0. \end{aligned}$$

Isto implica que se $\#I_p(\mathcal{P}) \geq 3$ então

$$I_p(\mathcal{P}) \cap IS(\mathcal{P}) = \mu_1^{-1}\mathbb{Q} + \alpha_0.$$

Assim, provamos o teorema II.

Teorema II. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{C}}$ um pencil flat em X tal que \mathcal{F}_∞ tem integral primeira holomorfa $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$, com $\text{gen}(f) = 0$. Suponha que $\Delta(\mathcal{P})$ é invariante. Então acontece uma das seguintes possibilidades:

1. $I_p(\mathcal{P})$ é finito.
2. $IS(\mathcal{P}) \subset I_p(\mathcal{P})$.
3. Existem $\alpha_0 \in I_p(\mathcal{P})$ e $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tais que $I_p(\mathcal{P}) \cap IS(\mathcal{P}) = \lambda\mathbb{Q} + \alpha_0$.

4.3.2 Caso $\text{gen}(f) = 1$

Utilizaremos a seguinte proposição:

Proposição 4.22. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{C}}$ um pencil flat em X tal que \mathcal{F}_∞ tem integral primeira holomorfa $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$, com $\text{gen}(f) = 1$. Suponha que $\Delta(\mathcal{P})$ é invariante. Além disso, suponha que

1. $Z(\mathcal{F}_\alpha, C) \geq 1$, para toda a componente C de $\Delta(\mathcal{P})$ e para algum $\alpha \in IS(\mathcal{P})$;
2. \mathcal{F}_α tem integral primeira local em todas as suas singularidades, para todo $\alpha \in IS(\mathcal{P})$;

Se $\#I_p(\mathcal{P}) \cap IS(\mathcal{P}) \geq 3$ então existem $\lambda \in \mathbb{C}^*$ e $a \in \mathbb{C}$ tais que $\lambda\mathbb{Q} + a \subset I_p(\mathcal{P})$.

Prova: Pela proposição 4.18 temos que o grupo de holonomia global G_α é dado por

$$G_\alpha = \langle f_{1,\alpha}, \dots, f_{k,\alpha} \rangle,$$

onde $f_{j,\alpha}(z) = \lambda_j z + A_j(\alpha)$, com $A_j(\alpha) = a_j \alpha + b_j$, para $j = 1, \dots, k$. Além disso,

$$G_\alpha = \{ \lambda z + n_2 A_2(\alpha) + \dots + n_k A_k(\alpha) : \lambda \in \langle \lambda_1, \dots, \lambda_k \rangle, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{Z} \}.$$

Agora, pelo corolário 4.19 e o lema 4.21, dado $\alpha \in IS(\mathcal{P})$, temos as equivalencias:

$$G_\alpha \text{ finito} \iff \alpha \in I_p(\mathcal{P}) \iff \exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 A_j(\alpha) \in \Gamma, \forall j \in J.$$

Portanto

$$I_p(\mathcal{P}) \cap IS(\mathcal{P}) \setminus \{\infty\} = \{ \alpha \in IS(\mathcal{P}) : A_2(\alpha), \dots, A_k(\alpha) \in \mathbb{Q}\Gamma \}. \quad (4.19)$$

Como $\#(I_p(\mathcal{P}) \setminus \{\infty\}) \geq 2$ então, por meio de uma reparametrização, podemos supor que $0 \in IS(\mathcal{P}) \cap I_p(\mathcal{P})$. Isto implica que $A_j(0) = b_j \in \mathbb{Q}\Gamma$, e assim, em (4.19) obtemos

$$I_p(\mathcal{P}) \cap IS(\mathcal{P}) \setminus \{\infty\} = \{ \alpha \in IS(\mathcal{P}) : a_1 \alpha, \dots, a_k \alpha \in \mathbb{Q}\Gamma \}. \quad (4.20)$$

Seja $\alpha_0 \in I_p(\mathcal{P}) \setminus \{0, \infty\}$, então por (4.20), $a_j \alpha_0 \in \mathbb{Q}\Gamma$, para $j \in \{1, \dots, k\}$. Em particular, $a_j q \alpha_0 \in \mathbb{Q}\Gamma$, para todo $q \in \mathbb{Q}$ e $i \in \{1, \dots, k\}$. Portanto $q \alpha_0 \in I_p(\mathcal{P})$, para todo $q \in \mathbb{Q}$. \square

Logo das proposições 4.18 e 4.22 obtemos o seguinte teorema.

Teorema III. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{C}}$ um pencil flat em X tal que \mathcal{F}_∞ tem integral primeira holomorfa $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$, com $\text{gen}(f) = 1$. Suponha que $\Delta(\mathcal{P})$ é invariante.

Se $\#I_p(\mathcal{P}) \cap IS(\mathcal{P}) \geq 3$, \mathcal{F}_α tem integral primeira local em todas as suas singularidades, para todo $\alpha \in IS(\mathcal{P})$, e $Z(\mathcal{F}_{\alpha_0}, C) \geq 1$, para toda a componente C de $\Delta(\mathcal{P})$ e para algum $\alpha_0 \in IS(\mathcal{P})$; então existem $\lambda \in \mathbb{C}^*$ e $a \in \mathbb{C}$ tais que

$$\lambda\mathbb{Q} + a \subset I_p(\mathcal{P}).$$

4.3.3 Caso $\text{gen}(f) = 1$ e $0 \notin IS(\mathcal{P})$

Nesta seção, veremos que se $0 \notin IS(\mathcal{P})$ e $I_p(\mathcal{P})$ tem um ponto de acumulação em 0 então podemos usar as mesma ideias da prova do seguinte teorema, que pode ser encontrado em [25].

Teorema 4.23. Sejam \mathcal{F} e \mathcal{G} duas folheações distintas em X , com singularidades reduzidas, tais que $\mathcal{N}_{\mathcal{F}} = \mathcal{N}_{\mathcal{G}}$, e seja \mathcal{P} é o pencil gerado. Suponha que \mathcal{F} e \mathcal{G} têm integrais primeiras holomorfas $f : X \rightarrow S$ e $g : X \rightarrow S_1$, respectivamente, onde $\text{gen}(f) = 1$. Então

- Se $K_X \neq 0$, onde K_X é o fibrado canônico de X , então

$$I_p(\mathcal{P}) = \lambda.(\mathbb{Q} \oplus \tau\mathbb{Q}) \cup \{\infty\},$$

onde $\lambda \in \mathbb{C}^*$ e $\tau \in \{i, e^{2\pi i/3}\}$.

- Se $K_X = 0$ e $I_p(\mathcal{P})$ tem mais de três elementos então $I_p(\mathcal{P})$ tem um ponto de acumulação.

Observação 4.24. O exemplo 4.6 mostra que a hipótese de que \mathcal{F} tenha singularidades isoladas é necessária. Lembremos que no exemplo 4.6 obtemos um pencil $\tilde{\mathcal{P}} = \{\tilde{\mathcal{F}}_\alpha\}_{\alpha \in \bar{\mathbb{C}}}$, onde $\tilde{\mathcal{F}}_0$ e $\tilde{\mathcal{F}}_\infty$ tem integrais primeiras holomorfas $f : \tilde{\mathbb{P}}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$ e $g : \tilde{\mathbb{P}}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$, respectivamente, onde $\text{gen}(f) = 1$. Além disso, $0 \notin IS(\tilde{\mathcal{P}})$, mas neste caso

$$I_p(\tilde{\mathcal{P}}) = \bar{\mathbb{C}}.$$

Proposição 4.25. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \bar{\mathbb{C}}}$ um pencil em X tal que \mathcal{F}_0 tem integral primeira holomorfa $f : X \rightarrow S$. Suponha que $\Delta(\mathcal{P})$ é invariante e $0 \in IS(\mathcal{P})$. Então \mathcal{P} é flat.

Prova: Pelo teorema 4.11, temos que $\text{gen}(f) = 1$. Então segue de [4, p. 69] a existência de um recobrimento $\phi : X' \rightarrow X$, ramificado ao longo de um número finito de fibras de f , e de uma aplicação bimeromorfa $\psi : Z \dashrightarrow X'$ tais que $g := f \circ \phi \circ \psi : Z \rightarrow S$ é um fibrado elíptico, isto é, uma fibração elíptica sem fibras múltiplas nem fibras singulares. Seja $\mathcal{P}_* := (\phi \circ \psi)^*\mathcal{P}$ o pencil induzido em Z , então $(\phi \circ \psi)^*\mathcal{F}_\alpha$ é uma folheação turbulenta com respeito a g , para todo $\alpha \in IS(\mathcal{P}_*)$.

Sem perda de generalidade, podemos supor que $0 \in IS(\mathcal{P}_*)$. Seja $F = g^{-1}(c)$ uma fibra regular de g , então existe uma vizinhança D de c , biholomorfa ao disco unitario, tal que $c = 0 \in D$ e:

1. $U := g^{-1}(D) \simeq D \times F$.
2. $g(x, y) = x$ e $F = \{x = 0\}$.
3. As 1-formas holomorfas $\omega = dx$ e $\eta = dx - A(x)dy$, representam $g_*\mathcal{F}_0$ e $g_*\mathcal{F}_\infty$ em U , respectivamente, onde A é uma função holomorfa em D tal que $A \not\equiv 0$. Além disso, $\omega_\alpha = \omega + \alpha\eta = (1 + \alpha)dx - \alpha A(x)dy$ representa $g_*\mathcal{F}_\alpha$ em U , para todo $\alpha \in \bar{\mathbb{C}}$.

Pelo item 3, temos que $g_*\mathcal{F}_\alpha|_U$ é definida por $\omega_\alpha = (1+\alpha)dx - \alpha A(x)dy$, para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$. Logo

$$d\omega_\alpha = \frac{A'(x)}{A(x)}dx \wedge \omega_\alpha,$$

para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$. Isto implica que a curvatura de $g_*(\mathcal{P})$ em U é dada por:

$$\Theta|_U = d\left(\frac{A'(x)}{A(x)}dx\right) = 0,$$

e assim $\Theta \equiv 0$. □

Observação 4.26. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ um pencil em X tal que \mathcal{F}_0 e \mathcal{F}_∞ têm integrais primeiras meromorfas $f : X \dashrightarrow S$ e $g : X \dashrightarrow S_\infty$, respectivamente. Considere então duas funções meromorfas $\phi : S \dashrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ e $\phi_1 : S_1 \dashrightarrow \overline{\mathbb{C}}$. Logo $\phi \circ f : X \dashrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ e $\phi_1 \circ g : X \dashrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ são duas funções meromorfas algebricamente independentes no corpo das funções meromorfas $\mathcal{M}(X)$. Assim, a dimensão algébrica de X , $a(X) = [\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}]$ é maior ou igual a 2, o que implica que $a(X) = 2$. Portanto, X é uma variedade algébrica.

Lema 4.27. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ um pencil em X tal que \mathcal{F}_0 é reduzida e tem integral primeira holomorfa $f : X \rightarrow S$. Suponha que $0 \in IS(\mathcal{P})$ e $I_p(\mathcal{P})$ tem um ponto de acumulação em 0. Então existe uma vizinhança V de 0 tal que :

1. $V \subset IS(\mathcal{P})$ e \mathcal{F}_α é reduzida, para todo $\alpha \in V$.
2. Se $\alpha \in I_p(\mathcal{P}) \cap V$ então \mathcal{F}_α tem integral primeira holomorfa.

Em particular, existe $\alpha_0 \in (I_p(\mathcal{P}) \cap IS(\mathcal{P})) \setminus \{0\}$ tal que \mathcal{F}_{α_0} tem integral primeira holomorfa $g : X \rightarrow S_0$. Consequentemente X é algébrica

Prova: Como \mathcal{F}_0 é reduzida, as suas singularidades são não degeneradas e têm quociente de auto-valores real negativo. Logo, existe uma vizinhança V de 0 tal que $V \subset IS(\mathcal{P})$ e para todo $\alpha \in V$ as singularidades de \mathcal{F}_α , são não degeneradas e têm quociente de auto-valores que não são reais positivos. Em particular, a condição 1, é válida. A condição 2 também é válida, pois \mathcal{F}_α tem singularidades reduzidas. □

Lema 4.28. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ um pencil em X tal que \mathcal{F}_0 é reduzida e tem integral primeira holomorfa $f : X \rightarrow S$. Suponha que $\Delta(\mathcal{P})$ é invariante, $0 \in IS(\mathcal{P})$ e $I_p(\mathcal{P})$ tem um ponto de acumulação em 0. Então $\Delta(\mathcal{P})$ não contém fibras lisas de f .

Prova: Existe $\alpha_0 \in I_p(\mathcal{P}) \cap IS(\mathcal{P}) \setminus \{0\}$ tal que \mathcal{F}_{α_0} tem uma integral primeira holomorfa $g : X \rightarrow S_0$. Suponha por absurdo que existe $F_c \subset \Delta(\mathcal{P})$ uma fibra lisa de f . Como $\alpha_0 \in IS(\mathcal{P})$ temos que $F_c \cap \text{Sing}(\mathcal{F}_{\alpha_0}) = \emptyset$. Em particular, existe uma vizinhança $V \subset S$ de c tal que $F_{c'} \cap \text{Sing}(\mathcal{F}_{\alpha_0}) = \emptyset$, para todo $c' \in V$. Como $F_{c'}$ é \mathcal{F}_{α_0} -invariante então $g(F_{c'}) = b$. Sejam V' uma vizinhança de b e $U = f^{-1}(V) \cap g^{-1}(V')$. Então U é um aberto que contém F_c . Em particular, se $c' \in V$ está suficientemente próximo de c , então

$F_c \subset U$. Neste caso, $g|_{F_c} : F_c \rightarrow V'$ é holomorfa e não sobrejetora, e portanto constante. Isto implica que \mathcal{F}_0 e \mathcal{F}_{α_0} possuem uma infinidade de folhas comuns e portanto $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_{\alpha_0}$, contradição. Logo $\Delta(\mathcal{P})$ não contém fibras lisas de \mathcal{F}_0 . \square

Observação 4.29. Sob as condições do lema 4.28, dada uma componente racional C de uma fibra crítica de f , tem-se que $C \cdot C < 0$. Além disso, se C não é \mathcal{F}_∞ -invariante então $Z(\mathcal{F}_0, C) \geq 3$. A prova disto é analoga à prova do lema 3.2.2 em [25].

Definição 4.30. Sejam \mathcal{F} uma folheação em X e C uma curva \mathcal{F} -invariante. Dizemos que C é **contrátil** para \mathcal{F} se:

1. C é uma curva racional lisa com auto-interseção -1 .
2. Quando contrairmos a curva C num ponto p , obtemos uma nova superfície X' e uma aplicação blow-down $\pi : X \rightarrow X'$, onde $\pi(C) = p$. Então, p não é uma singularidade para a folheação transformada $\pi_*(\mathcal{F})$ ou é uma singularidade reduzida de $\pi_*(\mathcal{F})$.

Observação 4.31. Sob as condições do lema 4.28, toda curva contrátil de \mathcal{F}_0 é invariante pelo pencil. Com efeito, seja C uma curva contrátil. Então

$$1 \leq Z(\mathcal{F}_0, C) \leq 2,$$

(cf [4, pág 72]). Seja $\alpha \in IS(\mathcal{P}) \setminus \{0\}$, se C não é \mathcal{F}_α -invariante então

$$T_{\mathcal{F}_\alpha} \cdot C = -1 - \text{Tang}(\mathcal{F}_\alpha, C) = T_{\mathcal{F}_0} \cdot C = 2 - Z(\mathcal{F}_0, C),$$

o que implica $\text{Tang}(\mathcal{F}_\alpha, C) < 0$, contradição. Portanto toda curva contrátil de \mathcal{F}_0 é uma componente invariante pelo pencil.

Observação 4.32. Sejam \mathcal{F} uma folheação holomorfa não-degenerada em X e $f : X \rightarrow S$ uma integral primeira holomorfa de \mathcal{F} . Então, dado $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$, existe um sistema de coordenadas (U, x, y) , com U vizinhança de p , tal que $\mathcal{F}|_U$ é representado pelo campo

$$X = mx \frac{\partial}{\partial x} - ny \frac{\partial}{\partial y}, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Em particular, passam somente duas separatrizes locais por p , as quais são lisas.

Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \bar{\mathbb{C}}}$ um pencil em X tal que \mathcal{F}_0 é reduzida e tem integral primeira holomorfa $f : X \rightarrow S$. Suponha que $\Delta(\mathcal{P})$ é invariante, $0 \in IS(\mathcal{P})$ e $I_p(\mathcal{P})$ tem um ponto de acumulação em 0. Pelo lema 4.27, existe $\alpha_0 \in I_p(\mathcal{P}) \cap IS(\mathcal{P})$ tal que \mathcal{F}_{α_0} tem uma integral primeira holomorfa $g : X \rightarrow S_0$. A seguir, daremos uma descrição do conjunto $\Delta(\mathcal{P})$.

Como $\Delta(\mathcal{P})$ é invariante e $0 \in IS(\mathcal{P})$, pelo teorema 4.11, temos que $\text{gen}(f) = 1$. Seja C uma componente de $\Delta(\mathcal{P})$. Então, pelo lema 4.28, C está contida em uma fibra crítica F_c de f . Gostaríamos de aplicar o teorema de classificação de Kodaira para f , pois assim teríamos uma representação explícita de F_c . Porém, \mathcal{F}_0 pode ter curvas (-1) contráteis

que são componentes das fibras críticas de f . Se este é o caso, começaremos por contrair as curvas contráteis de \mathcal{F}_0 .

Suponhamos que C não é uma curva contrátil de \mathcal{F}_0 e que está contida em uma fibra crítica F_c de f . Pelo corolário 3.2.6 de [25], existe uma vizinhança $V \subset \mathbb{C}$ de 0 e existe um bimeromorfismo $\psi : X \rightarrow Y$, obtido fazendo blow-downs nas curvas contráteis de \mathcal{F}_0 , tais que:

1. Se $\phi = \psi^{-1}$ então $\tilde{f} = f \circ \phi : Y \rightarrow S$ é uma fibração de $\phi^*(\mathcal{F}_0)$ tal que $\text{gen}(\tilde{f}) = 1$.
2. Todas as singularidades de $\phi^*(\mathcal{F}_0)$ são reduzidas e $\phi^*(\mathcal{F}_0)$ não tem curvas contráteis.
3. $T_{\phi^*(\mathcal{F}_0)} = T_{\phi^*(\mathcal{F}_\alpha)}$, para todo $\alpha \in IS(\mathcal{P}) \setminus \{0\}$.

Agora consideremos o pencil induzido $\mathcal{P}^* := \{\phi^*\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ em Y . Como $\mathcal{P}(\phi^*(\mathcal{F}_0), \phi^*(\mathcal{F}_\infty)) = \mathcal{P}(\phi^*(\mathcal{F}_0), \phi^*(\mathcal{F}_\alpha))$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\infty \in IS(\mathcal{P}^*)$ e

$$T_{\phi^*(\mathcal{F}_0)} = T_{\phi^*(\mathcal{F}_\infty)}.$$

Sejam $F' = \psi(F_c)$ e $C' = \psi(C)$, então C' é uma componente de $\Delta(\mathcal{P}^*)$ e $C' \subset F'$. Se $F' = C'$ é uma fibra regular de \tilde{f} então, pela primeira parte da prova, C' é invariante por \mathcal{P}^* , e assim C é invariante por \mathcal{P} . Se F' é uma fibra crítica de \tilde{f} e no caso em que \tilde{f} ainda tenha curvas (-1) , fazendo um número finito de blow-downs, obtemos uma nova superfície Y_1 e um bimeromorfismo $\phi_1 : Y_1 \rightarrow Y$ que induz o pencil $\mathcal{P}_1 := \phi_1^*\mathcal{P}^*$ em Y_1 . Além disso, $f_1 = \tilde{f} \circ \phi_1$ é uma fibração elíptica tangente a $(\phi_1 \circ \phi)^*\mathcal{F}_0$ tal que f_1 não tem fibras (-1) . Logo, pelo teorema de classificação de Kodaira, cada fibra crítica de f_1 é de um dos seguintes tipos:

$${}_m I_{0,m} I_b \ (m \geq 2), I_0^*, II, III, IV, II^*, III^*, IV^*, I_b^*. \quad (4.21)$$

Pela observação 4.32, as fibras dos tipos II , III e IV contêm singularidades não reduzidas de $(\phi_1 \circ \phi)^*\mathcal{F}_0$, como mostra a figura 4.4.

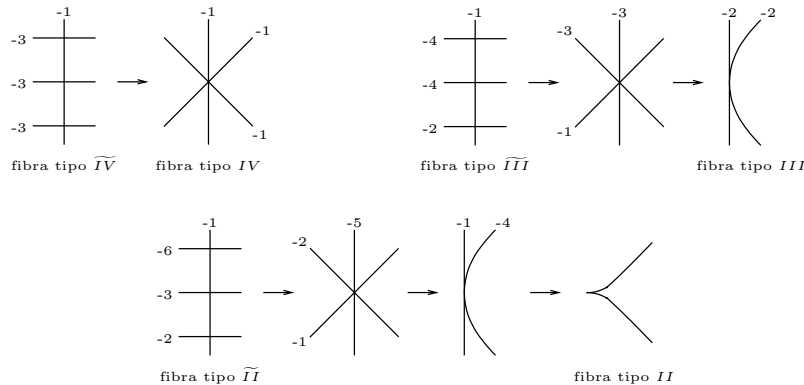


Figura 4.4

Depois de fazer um número finito de blow-ups nas singularidades não reduzidas contidas nas fibras II , III e IV obtemos uma aplicação holomorfa $\pi_2 : \tilde{Y}_1 \rightarrow Y_1$ e uma fibração elíptica $\tilde{f}_1 : \tilde{Y}_1 \rightarrow S$. Além disso, $(\pi_2 \circ \phi_1 \circ \phi)^* \mathcal{F}_0$ é uma folheação com singularidades reduzidas e sem fibras contráteis, portanto $(\pi_2 \circ \phi_1 \circ \phi)^* \mathcal{F}_0 = \phi^* \mathcal{F}_0$, $\tilde{Y}_1 = Y$ e $\tilde{f}_1 = \tilde{f}$. Portanto, se \tilde{f}_1 possui fibras de tipo II , III e IV , então $\tilde{f}_1 = \tilde{f}$ possuirá fibras de tipo \widetilde{II} , \widetilde{III} ou \widetilde{IV} , como mostra a figura 4.4.

Portanto obtemos uma fibração \tilde{f} cujas fibras críticas de podem ser de um dos seguintes tipos:

$${}_m I_{0,m} I_b (m \geq 2), I_1, I_0^*, \widetilde{II}, \widetilde{III}, \widetilde{IV}, II^*, III^*, IV^*, I_b^*, \quad (4.22)$$

como mostra a figura 4.5.

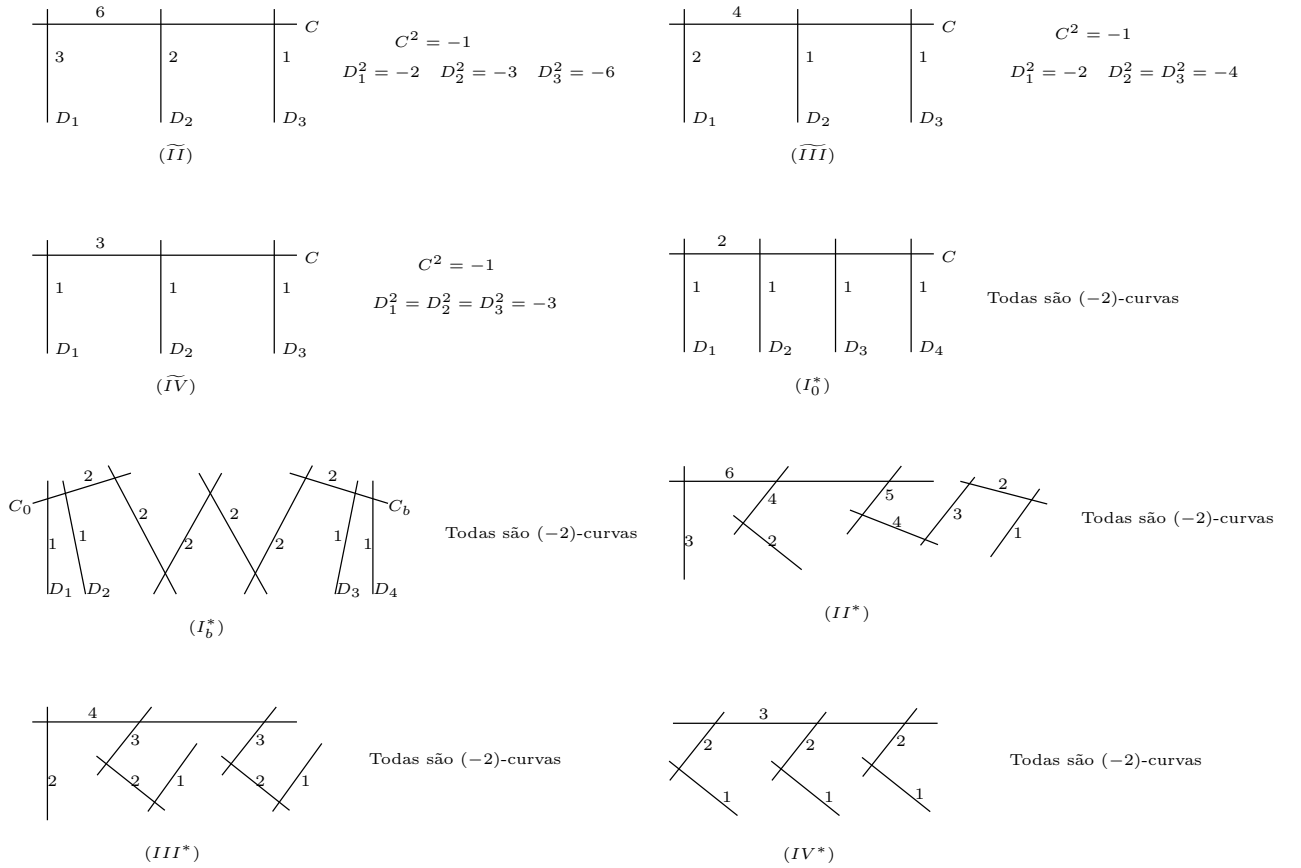


Figura 4.5: Fibras críticas de \tilde{f}

Agora, como \tilde{f} é isotrivial, então F' não é de tipo ${}_m I_b (m \geq 1)$ nem de tipo I_b^* (cf. [1, p. 165]), e pelo lema 4.28, F' não é de tipo ${}_m I_0 (m \geq 2)$. Logo, as fibras críticas de \tilde{f} podem ser somente dos seguintes tipos

$$I_0^*, \widetilde{II}, \widetilde{III}, \widetilde{IV}, II^*, III^*, IV^*, \quad (4.23)$$

Veremos em seguida que os tipos II^* , III^* e IV^* não ocorrem. Suponha que $F' \simeq II^*$, III^* ou IV^* . Seja $F' = \sum_{i=0}^k C_i$, onde C_i são as componentes irredutíveis de F' . Então existe uma única componente C_0 (a menos de uma reordenação dos índices) tal que $Z(\phi^*\mathcal{F}_0, C_0) \geq 3$ (veja a figura 4.5). Assim, pela observação 4.29, C_i é $\phi^*\mathcal{F}_\infty$ -invariante e $C_i \subset \Delta(\mathcal{P})$, para todo $i = 1, \dots, k$. Agora, se C_0 não é $\phi^*\mathcal{F}_\infty$ -invariante, então

$$T_{\phi^*\mathcal{F}_\infty} \cdot C_0 = -2 - \text{Tang}(\phi^*\mathcal{F}_\infty, C_0) = T_{\phi^*\mathcal{F}} \cdot C_0 = 2 - 3, \quad (4.24)$$

o que implica $\text{Tang}(\phi^*\mathcal{F}_\infty, C_0) = -1$, contradição. Portanto, $F' \subset \Delta(\mathcal{P})$, em particular F' é $\phi^*\mathcal{F}_{\alpha_0}$ -invariante.

Como $\phi^*\mathcal{F}_{\alpha_0}$ tem integral primeira holomorfa, digamos g , então existe $b_0 \in S_1$ tal que $F' \subset g^{-1}(b_0)$. Seja G_b uma fibra regular de g que não é $\phi^*\mathcal{F}_0$ -invariante, tal que $g(G_b) = b$ e $b \neq b_0$. Em particular, $G_b \cap F' = \emptyset$. Como $\tilde{f}|_{G_b} : G_b \rightarrow S$ é uma aplicação holomorfa não constante, ela é sobrejetiva. Em particular, existe $p \in G_b$ tal que $\tilde{f}|_{G_b}(p) = c$ e assim $p \in G_b \cap F'$, contradição. Isto mostra que $F' \simeq I_0^*$, \widetilde{II} , \widetilde{III} ou \widetilde{IV} .

Sejam $\{F_j\}_{j=1}^k$ as fibras críticas de \tilde{f} e $\{C_{j,i}\}_{i=0}^{n_j}$ o conjunto das suas componentes racionais irredutíveis, onde enumeramos de tal forma que $C_{j,0}$ contém pelo menos três singularidades nodais de F_j , para $j = 1, \dots, k$. Logo, pelo mesmo argumento acima, $C_{j,0}$ é a única componente de F_j não contida em $\Delta(\mathcal{P}^*)$, para $j = 1, \dots, k$. Portanto:

$$[\Delta(\mathcal{P}^*)] = \sum_{j=1}^k \sum_{i>0}^{n_j} n_{i,j} C_{j,i}. \quad (4.25)$$

Logo de 4.25 e da observação 4.31 temos que:

$$\Delta(\mathcal{P}) = \bigcup_{j=1}^k \bigcup_{i>0}^{n_j} \psi^* C_{j,i} \cup \{\text{curvas contráteis de } \mathcal{F}_0\}, \quad (4.26)$$

onde $\psi : X \rightarrow Y$, é o bimeromorfismo obtido fazendo blow-downs nas curvas contráteis de \mathcal{F}_∞ e $\psi^* C_{j,i}$ são os transformados estritos de $C_{j,i}$, para todo i, j .

4.3.4 Cálculo de $I_p(\mathcal{P})$ no caso: $\text{gen}(f) = 1$ e $\infty \notin IS(\mathcal{P})$

Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ um pencil em X tal que \mathcal{F}_∞ é reduzida e tem integral primeira holomorfa $f : X \rightarrow S$. Suponha que $\Delta(\mathcal{P})$ é invariante, $\infty \in IS(\mathcal{P})$ e $I_p(\mathcal{P})$ tem um ponto de acumulação em ∞ . Seja $\psi : X \rightarrow Y$, o bimeromorfismo obtido fazendo blow-downs nas curvas contráteis de \mathcal{F}_∞ . Como $I_p(\mathcal{P}) = I_p((\psi^{-1})^*\mathcal{P})$, daqui em diante suporemos que \mathcal{F}_∞ não tem curvas contráteis. Logo de 4.26,

$$\Delta(\mathcal{P}) = \bigcup_{j=1}^k \bigcup_{i>0}^{n_j} n_{i,j} C_{j,i}. \quad (4.27)$$

Proposição 4.33. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ um pencil em X tal que \mathcal{F}_∞ é reduzida, e tem integral primeira holomorfa $f : X \rightarrow S$. Suponha que $\Delta(\mathcal{P})$ é invariante e $\infty \in IS(\mathcal{P})$ (em particular, $\text{gen}(f) = 1$). Se $I_p(\mathcal{P})$ tem um ponto de acumulação em ∞ então:

1. $Z(\mathcal{F}_\alpha, C) = 1$, para toda componente C de $\Delta(\mathcal{P})$ e para todo $\alpha \in IS(\mathcal{P})$.
2. \mathcal{F}_α tem integral primeira holomorfa local em todas as suas singularidades, para todo $\alpha \in IS(\mathcal{P})$.

Prova: Sejam $\alpha \in IS(\mathcal{P})$ e C uma componente de $\Delta(\mathcal{P})$. Como C é lisa, \mathcal{F}_∞ é reduzida e $\#(C \cap \text{Sing}(\mathcal{F}_\infty)) = 1$ (veja a figura 4.5), então $Z(\mathcal{F}_\infty, C) = 1$. Como $T_{\mathcal{F}_\alpha} = T_{\mathcal{F}_\infty}$ temos $Z(\mathcal{F}_\alpha, C) = 1$, para todo $\alpha \in IS(\mathcal{P})$. Isto prova 1. Sejam $\alpha \in IS(\mathcal{P}) \setminus \{0\}$ e $p \in \text{Sing}(\mathcal{F}_\alpha)$, então existe uma fibra crítica F de f tal que $p \in F$. Em particular, existe uma componente C de F tal que $p \in C$. Como $Z(\mathcal{F}_\alpha, C) = 1$ então $C \cap \text{Sing}(\mathcal{F}_\alpha) = \{p\}$ e, pelo teorema do índice de Camacho-Sad,

$$CS(\mathcal{F}_\alpha, C) = C^2 = CS(\mathcal{F}_\alpha, C_\alpha, p_\alpha) < 0.$$

Como p é uma singularidade não-degenerada de \mathcal{F}_α , o quociente de autovalores com respeito a p é negativo e a holonomia de C é trivial, já que C é uma curva lisa e racional. Então, pelo teorema de Mattei-Moussu, \mathcal{F}_α tem integral primeira local em p . Assim, temos 2. \square

Corolário 4.34. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ um pencil em X tal que \mathcal{F}_∞ tem integral primeira holomorfa $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$. Suponha que $\Delta(\mathcal{P})$ é invariante, $\infty \in IS(\mathcal{P})$ e $I_p(\mathcal{P})$ tem um ponto de acumulação em ∞ . Dado $\alpha \in IS(\mathcal{P})$ são equivalentes:

1. \mathcal{F}_α tem integral primeira.
2. G_α é finito.
3. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 A_i(\alpha) \in \Gamma$ (veja o corolário 4.19).
4. \mathcal{F}_α tem uma folha algébrica não contida nas fibras críticas de f .

Em particular, se $\#(I_p(\mathcal{P}) \cap IS(\mathcal{P})) \geq 3$ e $0 \in I_p(\mathcal{P})$, então existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que $\lambda\mathbb{Q} \subset I_p(\mathcal{P})$.

Prova: Dado $\alpha \in IS(\mathcal{P})$, temos que se G_α é finito então $\alpha \in I_p(\mathcal{P})$, pelo lema 4.21. Assim, pelo corolário 4.19, temos o resultado. \square

Lema 4.35. Sob as condições da proposição 4.33

$$IS(\mathcal{P}) = \overline{\mathbb{C}}.$$

Em particular, todas as componentes de $\Delta(\mathcal{P})$ têm singularidades móveis.

Prova: Se $IS(\mathcal{P}) \neq \overline{\mathbb{C}}$ então existe $\alpha_0 \in \overline{\mathbb{C}} \setminus IS(\mathcal{P})$ tal que \mathcal{F}_{α_0} tem singularidades não isoladas. Logo, existe uma curva irreduzível holomorfa C' tal que $C' \subset \text{Sing}(\mathcal{F}_{\alpha_0}) \subset \Delta(\mathcal{P})$, isto é, C' é uma componente NI de \mathcal{P} . Por (4.27),

$$\Delta(\mathcal{P}) = \sum_j \sum_{i>0} n_{i,j} C_{j,i},$$

onde $\{C_{j,i}\}_{i=0}^{n_j}$ são as componentes das fibras críticas F_j , com $j = 1, \dots, k$, e $\text{Tang}(\mathcal{F}_\alpha, C_{j,0}) = 0$, para todo $\alpha \in IS(\mathcal{P}) \setminus \{0\}$. Logo, existe $C_{j,i} \subset \Delta(\mathcal{P})$ tal que $C_{j,i} \subset C'$. Podemos supor, sem perda de generalidade que $0 \in IS(\mathcal{P})$, assim como $Z(\mathcal{F}_\infty, C_{j,i}) = 1$ e $\text{Tang}(\mathcal{F}_0, C_{j,0}) = 0$, existe $p \in C_{j,i}$ tal que $p \in \text{Sing}(\mathcal{F}_\infty)$ e $p \notin \text{Sing}(\mathcal{F}_0)$. Então, existe um sistema de coordenadas $(U, (x, y))$, com $p \in U$ e $x(p) = y(p) = 0$, tal que $C_{j,i} \cap U = \{y = 0\}$. Além disso,

$$\omega|_{C_{j,i}} = (b + x^k u(x))dy, \quad b \neq 0,$$

e

$$\eta = xdy - mydx,$$

representam \mathcal{F}_0 e \mathcal{F}_∞ em U , respectivamente, e $\omega + \alpha\eta$ representa $\mathcal{F}_\alpha|_U$, para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$. Assim

$$(\omega + \alpha\eta)(x, 0) = (\alpha x + (b + x^k u(x)))dy.$$

Como $C_{j,i} \subset C'$, segue que $\alpha_0 x + (b + x^k u(x)) \equiv 0$ em $U \cap C_{j,i}$. Porém isto não é possível pois $b \neq 0$. \square

Lema 4.36. Sob as condições da proposição 4.33, suponha que $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ e tem fibra genérica $F_c = \mathbb{C} \setminus \Gamma$, com $\Gamma = \langle 1, \tau \rangle$. Se f tem somente três fibras críticas então existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ e $a \in \mathbb{C}$ tais que:

$$I_p(\mathcal{P}) = (\lambda \cdot (\mathbb{Q} \oplus \tau\mathbb{Q}) + a) \cup \{\infty\}.$$

Prova: Pela proposição 4.18 temos que o grupo de holonomia global G_α é dado por

$$G_\alpha = \langle f_{1,\alpha}, f_{2,\alpha} \rangle$$

onde $f_{j,\alpha}(z) = \lambda_j z + A_j(\alpha)$, com $A_j(\alpha) = a_j \alpha + b_j$, para $j = 1, 2$. Além disso,

$$G_\alpha = \{\lambda z + n_2 A_2(\alpha) : \lambda \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle, n_2 \in \mathbb{Z}\}.$$

Agora, pelo corolário 4.19 e lema 4.36 temos que

$$I_p(\mathcal{P}) \setminus \{\infty\} = \{\alpha \in \mathbb{C} : A_2(\alpha) \in \mathbb{Q}\Gamma\}.$$

Como $I_p(\mathcal{P})$ é infinito, por meio de uma reparametrização, podemos supor que $0 \in I_p(\mathcal{P})$. Isto implica que $A_2(0) = b_2 \in \mathbb{Q}\Gamma$, e assim, em (4.19) obtemos

$$I_p(\mathcal{P}) \setminus \{\infty\} = \{\alpha \in \mathbb{C} : a_2 \alpha \in \mathbb{Q}\Gamma\}. \quad (4.28)$$

Com o mesmo argumento de [25, p. 34] temos que $I_p(\mathcal{P}) \neq \overline{\mathbb{C}}$, isto é, $a_2 \neq 0$. Logo temos o resultado. \square

Lema 4.37. Consideremos $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ um pencil em X tal que \mathcal{F}_∞ é reduzida e tem integral primeira holomorfa $f : X \rightarrow S$. Suponha que $\Delta(\mathcal{P})$ é invariante, $\infty \in IS(\mathcal{P})$ e $I_p(\mathcal{P})$ tem um ponto de acumulação em ∞ . Então:

1. $\text{gen}(S) \leq 1$.

2. Se $\Delta(\mathcal{P}) \neq \emptyset$ então $\text{gen}(S) = 0$. Em particular, se $\text{gen}(S) = 1$ então X é um toro algébrico.

Prova: Podemos supor sem perda de generalidade que $0 \in IS(\mathcal{P})$ e \mathcal{F}_0 tem integral primeira holomorfa $g : X \rightarrow S_0$. Como $\Delta(\mathcal{P})$ é invariante e $0 \in IS(\mathcal{P})$, então pelo teorema 4.11 $\text{gen}(g) = 1$. Como $\mathcal{F}_\infty \neq \mathcal{F}_0$, existe uma fibra regular elíptica F de g tal que F não é \mathcal{F}_0 -invariante. Logo, a aplicação $f|_F : F \rightarrow S$ é não constante e pelo teorema de Riemann-Hurwitz temos $\text{gen}(S) \leq 1$.

Suponhamos que $\Delta(\mathcal{P}) \neq \emptyset$. Então, por 4.25 existe uma fibra crítica $F = \bigcup_{i=0}^k C_i$ de g tal que C_0 é uma curva racional não contida em $\Delta(\mathcal{P})$ e $\bigcup_{i=1}^k C_i \subset \Delta(\mathcal{P})$. Como C_0 não é componente de $\Delta(\mathcal{P})$ então não é \mathcal{F}_∞ -invariante, isto implica que a aplicação $f|_{C_0} : C_0 \rightarrow S$ não é constante e portanto $\text{gen}(S) = 0$.

Por outro lado, se $\text{gen}(S) = 1$ então $\Delta(\mathcal{P}) = \emptyset$. Como X é uma superfície algébrica e $\Delta(\mathcal{P}) = \emptyset$ então X é um toro algébrico. \square

Na seção 2.2 fizemos o estudo de $I_p(\mathcal{P})$ no caso em que X é um toro. Daqui em diante suporemos que $S = \mathbb{P}^1$.

Nas condições do teorema 4.23 e $S = \mathbb{P}^1$, Alcides Lins Neto em [25] calcula o número das fibras críticas de f . Os seguintes lemas 4.38 e 4.39 podem ser encontradas no lema 3.2.13 e no lema 3.2.15 em [25], respectivamente.

Dada $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ uma fibração elíptica, denotemos por:

i) $a_0 = \#\{ {}_m I_0 \}$, o número de fibras de f de tipo ${}_m I_0$,

ii) $a_0^* = \#\{ I_0^* \}$, o número de fibras de f de tipo I_0^* ,

iii) $a_2 = \#\{ \widetilde{II} \}$, $a_3 = \#\{ \widetilde{III} \}$ e $a_4 = \#\{ \widetilde{IV} \}$.

Sejam F_j uma fibra crítica de f e $\{C_{j,i}\}_{i=1}^{n_j}$ as componentes irredutíveis de F_j . Seja ainda a o número total das fibras críticas de f , isto é, $a = a_0 + a_0^* + a_2 + a_3 + a_4$.

Lema 4.38. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{C}}$ um pencil em X tal que \mathcal{F}_0 e \mathcal{F}_∞ são reduzidas e têm integrais primeiras holomorfas $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ e $g : X \rightarrow \mathbb{P}^1$, respectivamente. Então

$$\text{i) } N_{\mathcal{F}_0} = (a-2)[F] - \sum_{j=1}^r \Gamma_j - \sum_{i=1}^{a_0} [C_i], \text{ onde } F \text{ denota uma fibra fixa de } f \text{ e } \Gamma_j = \sum_{i=0}^{k_j} [C_{i,j}].$$

$$\text{ii) } K_X = [\Delta(\mathcal{P})] + 2N_{\mathcal{F}}^* = 2(a-2)[F] - \sum_{j=1}^r \widetilde{\Gamma}_j - 2 \sum_{i=1}^{a_0} [C_i], \text{ onde } K_X \text{ é o fibrado canônico}$$

de X e $\widetilde{\Gamma}_j = 2[C_{j,0}] + \sum_{i=1}^{k_j} [C_{j,i}]$. Em particular,

$$K_X^2 = c_1^2(X) = \sum_{j=1}^r \widetilde{\Gamma}_j^2 = -3a_2 - 2a_3 - a_4.$$

iii) $6a_0^* + 10a_2 + 9a_3 + 8a_4 + 12 \sum_{i=1}^{a_0} \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) = 24$, onde m_i é a multiplicidade de uma fibra de tipo mI_0 de f .

iv) $C_2(X) = 6a_0^* + 5a_2 + 5a_3 + 5a_4$.

Lema 4.39. Sob as mesmas hipóteses do lema 4.38, só existem 4 soluções possíveis e elas satisfazem:

Sol	(1)	(2)	(3)	(4)
a_0	0	0	0	0
a_0^*	0	1	1	4
a_2	0	1	0	0
a_3	0	0	2	0
a_4	3	1	0	0
a	3	3	3	4
$C_2(M)$	15	16	16	24
K_M^2	-3	-4	-4	0

Observação 4.40. Sob as condições do lema 4.38, seja $F_c \simeq \mathbb{C}/\langle 1, \tau \rangle$ uma fibra genérica fixa de f . Fazendo o mesmo argumento de [26, p. 243], temos

- No caso das soluções (1) e (2), $\tau = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.
- No caso da solução (3), $\tau = i$.
- No caso da solução (4), $\tau \notin \{i, e^{\frac{2\pi i}{3}}\}$.

Usando a observação 4.40 e o lema 4.39, podemos apresentar a seguinte tabela.

Solução	# de fibras críticas	$F_c \simeq \mathbb{C}/\langle 1, \tau \rangle$	G_α	$f_{j,\alpha}$
(1)	3	$\tau = e^{\frac{2\pi i}{3}}$	$\langle f_{1,\alpha}, f_{2,\alpha} \rangle$	$\tau z + A_j(\alpha)$
(2)	3	$\tau = e^{\frac{2\pi i}{6}}$	$\langle f_{1,\alpha}, f_{2,\alpha} \rangle$	$\tau z + A_j(\alpha)$
(3)	3	$\tau = i$	$\langle f_{1,\alpha}, f_{2,\alpha} \rangle$	$iz + A_j(\alpha)$
(4)	4	$\tau \notin \{i, e^{\frac{2\pi i}{3}}\}$	$\langle f_{1,\alpha}, f_{2,\alpha}, f_{3,\alpha} \rangle$	$-z + A_j(\alpha)$

Pelo lema 4.36:

1. No caso das soluções (1), (2) e (3),

$$I_p(\mathcal{P}) \setminus \{\infty\} = \{\alpha \in \mathbb{C} : a_2 \cdot \alpha \in \mathbb{Q}\Gamma\} = a_2^{-1} \mathbb{Q}\Gamma.$$

2. No caso da solução (4),

$$I_p(\mathcal{P}) \setminus \{\infty\} = \{\alpha \in \mathbb{C} : A_2(\alpha), A_3(\alpha) \in \mathbb{Q}\Gamma\}$$

onde $A_i(\alpha) = a_i \alpha + b_i$ com $i = 2, 3$ e $a_2 \neq 0$ ou $a_3 \neq 0$.

Assim temos o seguinte teorema

Teorema IV. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{C}}$ um pencil em X tal que \mathcal{F}_∞ é reduzida e tem integral primeira holomorfa $f : X \rightarrow S$. Suponha que $\Delta(\mathcal{P})$ é invariante, $\infty \in IS(\mathcal{P})$ e $I_p(\mathcal{P})$ tem um ponto de acumulação em ∞ . Então,

- Se $K_X \neq 0$, onde K_X é o fibrado canônico de X , então existem $\lambda \in \mathbb{C}^*$ e $a \in \mathbb{C}$ tais que

$$I_p(\mathcal{P}) = (\lambda \cdot (\mathbb{Q} \oplus \tau \mathbb{Q}) + a) \cup \{\infty\},$$

onde $\tau \in \{i, e^{2\pi i/3}\}$.

- Se $K_X = 0$ e $\text{gen}(S) = 0$ então X é um toro algébrico; e se $X = E \times E$, com E curva elíptica, então

$$I_p(\mathcal{P}) \simeq \text{End}(E) \otimes \mathbb{Q}.$$

4.4 Relação entre um pencil e o pencil obtido por blow-up

Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{C}}$ um pencil em X , tal que \mathcal{F}_0 é uma folheação não-degenerada. Logo, pela observação 3.9, \mathcal{F}_α é uma folheação não-degenerada para todo $\alpha \in GP(\mathcal{P})$.

Observe que nas seções anteriores consideramos o caso em que \mathcal{F}_0 tem integral primeira holomorfa. Em seguida, estudaremos o caso geral, isto é, \mathcal{F}_0 tem integral primeira meroomorfa $F : X \dashrightarrow S$, ou seja, $0 \in I_p(\mathcal{P})$.

Seja $x_0 \in X$ uma singularidade não reduzida de \mathcal{F}_0 . Como x_0 é não-degenerada e não reduzida, ela é necessariamente de tipo $(k : l)$, onde $k, l \in \mathbb{N}$ e $\text{mdc}(k, l) = 1$. Em particular, como \mathcal{F}_0 tem integral primeira existe um sistema de coordenadas em x_0 , (x, y, U) , com $x(x_0) = y(x_0) = 0$ e $x_0 \in U$, tal que \mathcal{F}_0 é representada em U por

$$\omega = kx dy - ly dx.$$

Temos então dois casos:

$k = l = 1$: Neste caso, como \mathcal{F}_0 se dessingulariza em x_0 após um blow-up em x_0 , $\pi : X_1 \rightarrow X$. Colocando $\mathcal{F}_0^1 = \pi^*(\mathcal{F}_0)$ e $D_1^1 = \pi^{-1}(x_0)$, obtemos que $\text{Sing}(\mathcal{F}_0^1) \cap D_1^1 = \emptyset$.

$k > 1$ ou $l > 1$: Neste caso, existe uma sequência finita de blow-ups $\pi_r \circ \pi_{r-1} \cdots \pi_{n-1} \circ \pi_1 : X_r \rightarrow X$ em x_0 tal que se $\mathcal{F}_0^r = \pi_{x_0}^*(\mathcal{F}_0)$ e $\bigcup_{i=1}^r D_i^r = \pi_{x_0}^{-1}(x_0)$ então \mathcal{F}_0^r tem somente uma singularidade não reduzida $x_r \in D_r^r$ de tipo $(1 : 1)$. Além disto, os divisores D_1^r, \dots, D_r^r são invariantes por \mathcal{F}_0^r .

Se \mathcal{F}_0^i é dado pela 1-forma holomorfa ω_i numa vizinhança U de x_i , então $l_0(x_i)$ denota o ordem de anulamento de $\pi_i^*(\omega_i)$ ao longo de D_i^i , para todo $i = 1 \dots, r$.

Sejam $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ o processo de blow-ups que dessingulariza \mathcal{F}_0 e $\tilde{\mathcal{P}} = \{\tilde{\mathcal{F}}_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{C}}$ o pencil induzido em \tilde{X} . Nas seções anteriores vimos a importancia de \mathcal{F}_0 ter ou não singularidades isoladas para descrever $I_p \mathcal{P}$. Estudaremos o pencil $\tilde{\mathcal{P}}$ e as relações entre os conjuntos de tangencia de \mathcal{P} e $\tilde{\mathcal{P}}$.

4.4.1 $\tilde{\mathcal{F}}_0$ tem singularidades isoladas

Utilizaremos as notações acima. Nesta seção veremos que se $0 \in IS(\tilde{\mathcal{P}})$, então para todo $\alpha \in GP(\tilde{\mathcal{P}})$, \mathcal{F}_α é dessingularizado por π . Em particular, se $I_p(\mathcal{P})$ é infinito então existe $\alpha_0 \in I_p(\mathcal{P}) \cap IS(\mathcal{P})$. Se $F_{\alpha_0} : X \dashrightarrow S_1$ é uma integral primeira meromorfa de \mathcal{F}_{α_0} , então $F_{\alpha_0} \circ \pi$ é uma integral primeira holomorfa de $\tilde{\mathcal{F}}_{\alpha_0}$, e assim estamos nas condições do teorema 4.23.

Lema 4.41. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \bar{\mathbb{C}}}$ um pencil em X tal que \mathcal{F}_0 é não-degenerada e tem integral primeira meromorfa $F : X \dashrightarrow S$. Suponha que $0 \in IS(\tilde{\mathcal{P}})$. Então, dado $\alpha \in GP(\tilde{\mathcal{P}}) \setminus \{0\}$, x_0 é uma singularidade não reduzida de \mathcal{F}_0 se, e somente se, x_0 é uma singularidade não reduzida de \mathcal{F}_α . Em particular, x_0 é uma singularidade fixa de \mathcal{P} .

Prova: Seja x_0 uma singularidade não reduzida de \mathcal{F}_0 , como \mathcal{F}_0 é uma folheação não degenerada e tem integral primeira então x_0 é uma singularidade dicrítica de tipo $(p : q)$, com $p, q \in \mathbb{N}$ e $(p, q) = 1$.

Afirmamos que x_0 é uma singularidade fixa. De fato, se x_0 não é uma singularidade fixa do pencil então fixemos $\alpha_0 \in IS(\tilde{\mathcal{P}})$ tal que $x_0 \notin \text{Sing}(\mathcal{F}_{\alpha_0})$. Seja $\pi_{x_0} := \pi_r \circ \pi_{r-1} \cdots \pi_2 \circ \pi_1$ o processo de dessingularização de \mathcal{F}_0 em x_0 e seja $x_{r-1} \in D_{r-1}^{r-1}$ a única singularidade não reduzida de \mathcal{F}_0^{r-1} , onde x_{r-1} é de tipo $(1 : 1)$. Logo como $l_0(x_{r-1}) = 2$ e $l_{\alpha_0}(x_{r-1}) = 1$, existe um sistema de coordenadas (x, y, U) , com $x_{r-1} \in U$, $x(x_{r-1}) = y(x_{r-1}) = 0$, e existem 1-formas holomorfas ω_{r-1}, η_{r-1} em U que definem \mathcal{F}_0^{r-1} e $\mathcal{F}_{\alpha_0}^{r-1}$ em U , respectivamente, onde

$$\begin{aligned} \pi_{r-1}^* \omega_{r-1} &= x^2 \omega, & \omega \text{ com singularidades isoladas,} \\ \pi_{r-1}^* \omega_{\alpha_0, r-1} &= x \omega_{\alpha_0}, & \omega_{\alpha_0} \text{ com singularidades isoladas.} \end{aligned}$$

Assim as 1-formas holomorfas $x\omega$ e ω_{α_0} definem \mathcal{F}_0^r e $\mathcal{F}_{\alpha_0}^r$ em $\pi_r^{-1}(U)$, respectivamente. Logo $D_r^r \subset \text{Sing}(\mathcal{F}_0^r)$ e $0 \notin IS(\tilde{\mathcal{P}})$, contradição. Portanto, x_0 é uma singularidade fixa do pencil. Em particular $x_0 \in \text{Sing}(\mathcal{F}_\alpha)$, para todo $\alpha \in \bar{\mathbb{C}}$.

Seja $\alpha \in GP(\tilde{\mathcal{P}}) \setminus \{0\}$, pelo mesmo argumento acima, se x_0 é uma singularidade reduzida de $\tilde{\mathcal{F}}_\alpha$, então $l_\alpha(x_{r-1}) = 1$ e $l_0(x_{r-1}) = 2$, que implica $0 \notin IS(\tilde{\mathcal{P}})$, contradição.

Reciprocamente, seja x_0 uma singularidade não reduzida de $\tilde{\mathcal{F}}_\alpha$. Pelo mesmo argumento utilizado acima, se x_0 é uma singularidade reduzida de \mathcal{F}_0 , obtemos que $\alpha \notin IS(\tilde{\mathcal{P}})$. Logo, x_0 é uma singularidade não reduzida de \mathcal{F}_0 . \square

Observação 4.42. Sob as condições do lema 4.41, seja x_0 é uma singularidade fixa de \mathcal{P} . Seja $\pi_{x_0} := \pi_r \circ \pi_{r-1} \cdots \pi_2 \circ \pi_1$ é o processo de dessingularização de \mathcal{F}_0 em x_0 . Se $x_i \in D_i^i$ é uma singularidade não reduzida de \mathcal{F}_0^i , então x_i é uma singularidade fixa de $(\pi_i \circ \pi_{i-1} \cdots \circ \pi_1)^* \mathcal{P}$, para todo $i = 1, \dots, r$.

Proposição 4.43. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \bar{\mathbb{C}}}$ um pencil em X tal que \mathcal{F}_0 é não-degenerada e tem integral primeira meromorfa $F : X \dashrightarrow S$. Suponha que $0 \in IS(\tilde{\mathcal{P}})$. Então, para todo $\alpha \in GP(\tilde{\mathcal{P}}) \setminus \{0\}$, \mathcal{F}_α é dessingularizado por π .

Prova: Fixado $\alpha \in GP(\tilde{\mathcal{P}}) \setminus \{0\}$, pelo lema 4.41, temos que o conjunto das singularidades não reduzidas de \mathcal{F}_0 coincide com o conjunto das singularidades não reduzidas de \mathcal{F}_α . Logo pela observação 4.42, basta provar que toda a singularidade não reduzida de \mathcal{F}_α é de tipo fixo, isto é, o seu tipo não depende de $\alpha \in GP(\mathcal{P})$.

Fixemos uma singularidade não-reduzida x_0 de \mathcal{F}_0 . Como $0 \in IS(\tilde{\mathcal{P}})$ e x_0 é não-degenerada para \mathcal{F}_0 , existe vizinhança V de 0 , com $V \subset IS(\tilde{\mathcal{P}})$ e x_0 é singularidade não-degenerada e não-reduzida para \mathcal{F}_α , se $\alpha \in V$. Em particular, o quociente dos autovalores de \mathcal{F}_α em x_0 tem que ser racional positivo. Como este quociente é função contínua de $\alpha \in V$, ele é necessariamente constante como função de $\alpha \in V$. Isto implica que este quociente é constante em $GP(\mathcal{P})$, pois $GP(\mathcal{P}) \supset V$ e $\mathbb{C} \setminus GP(\mathcal{P})$ é finito. \square

Observação 4.44. $\Delta(\tilde{\mathcal{P}})$ pode ser não invariante mesmo sendo $\Delta(\mathcal{P})$ invariante. De fato, no último blow-up pode acontecer que D_n^n não seja uma componente invariante do pencil como mostra a seguinte figura: FALTA FIGURA!!!

Assim daremos a seguinte definição para garantir que $\Delta(\tilde{\mathcal{P}})$ seja invariante.

Definição 4.45. Com as notações acima, seja p uma singularidade fixa do pencil de tipo fixo. Então diremos que p é uma **explosão não dicrítica fixa** se existe $\alpha_0 \notin GP(\mathcal{P})$ tal que $p_{r-1} \in D_{r-1}^{r-1}$ é uma explosão não dicrítica para $\mathcal{F}_{\alpha_0}^{r-1}$.

Proposição 4.46. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{C}}$ um pencil em X tal que \mathcal{F}_0 é não-degenerada. Suponha que todas as singularidades fixas de \mathcal{P} são explosões não dicríticas fixas. Seja $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ o processo de dessingularização de \mathcal{F}_0 e seja $\tilde{\mathcal{P}}$ o pencil induzido em \tilde{X} . Então, $\Delta(\mathcal{P})$ é invariante se, e somente se, $\Delta(\tilde{\mathcal{P}})$ é invariante.

Prova: Pelo lema 4.41, as singularidades não reduzidas de \mathcal{F}_0 são singularidades fixas e são de tipo fixo que, por hipótese, são explosões não dicríticas fixas. Assim, os divisores D_r^r não estão contidos em $\Delta(\tilde{\mathcal{P}})$. O resultado segue de imediato, pois os possíveis conjuntos não-invariantes de $\Delta(\tilde{\mathcal{P}})$ são os divisores D_r^r . \square

Suponhamos que $\Delta(\tilde{\mathcal{P}})$ é invariante. Como $0 \in IS(\tilde{\mathcal{P}})$, então, pelo corolário 4.7, $\text{gen}(f) = 1$ e $\tilde{\mathcal{F}}_\alpha$ é transversa com respeito a f , para todo $\alpha \in IS(\tilde{\mathcal{P}})$. Além disso, se $I_p(\mathcal{P})$ é infinito, existe $\alpha_0 \in I_p(\mathcal{P}) \cap IS(\mathcal{P})$ tal que $\tilde{\mathcal{F}}_{\alpha_0}$ tem uma integral primeira holomorfa $g : \tilde{X} \rightarrow S_1$. Assim o seguinte teorema segue da proposição 4.46 e o teorema 4.23.

Teorema V. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{C}}$ um pencil em X tal que \mathcal{F}_0 é não-degenerada e tem integral primeira meromorfa $F : X \dashrightarrow S$. Suponha que $\Delta(\mathcal{P})$ é invariante e $I_p(\mathcal{P}) \setminus \{0\}$ é infinito. Se $0 \in IS(\tilde{\mathcal{P}})$ e todas as singularidades fixas de \mathcal{P} são explosões não dicríticas fixas, então:

1. $\text{gen}(F) = 1$.
2. Se $K_X \neq 0$, onde K_X é o fibrado canônico de X , então existem $\lambda \in \mathbb{C}^*$ e $a \in \mathbb{C}$ tais que

$$I_p(\mathcal{P}) = (\lambda \cdot (\mathbb{Q} \oplus \tau\mathbb{Q}) + a) \cup \{\infty\},$$

onde $\tau \in \{i, e^{2\pi i/3}\}$.

3. Se $K_X = 0$ e $\text{gen}(S) = 0$ então X é um toro algébrico; e se $X = E \times E$, com E curva elíptica, então

$$I_p(\mathcal{P}) \simeq \text{End}(E) \otimes \mathbb{Q}.$$

4.4.2 $\Delta(\tilde{\mathcal{P}})$ invariante e $\tilde{\mathcal{F}}_0$ não tem singularidades isoladas

Daqui em diante consideraremos o caso em que exista pelo menos um divisor D obtido da dessingularização de \mathcal{F}_0 tal que $D \subset \text{Sing}(\tilde{\mathcal{F}}_0)$. Como \mathcal{F}_0 tem integral primeira meromorfa $F : X \dashrightarrow S$, então $f = F \circ \pi : \tilde{X} \rightarrow S$ é holomorfa. Observe que neste caso $\tilde{\mathcal{F}}_0$ não é tangente a f e $\Delta(\tilde{\mathcal{P}})$ não está contida nas fibras de f .

Lema 4.47. Sob as notações acima, se $\Delta(\tilde{\mathcal{P}})$ é invariante e $0 \notin IS(\tilde{\mathcal{P}})$, então $\tilde{\mathcal{F}}_\alpha$ é transversa com respeito a f , para todo $\alpha \in IS(\tilde{\mathcal{P}})$. Em particular, $\tilde{\mathcal{P}}$ é transversa com respeito a f .

Prova: Seja p uma singularidade não reduzida de \mathcal{F}_0 e $\pi_p = \pi_1 \circ \dots \circ \pi_{n-1} \circ \pi_n$ a sequência de blow-ups que dessingulariza \mathcal{F}_0 em p . Então $\pi^{-1}(p) = \bigcup_{i=1}^n D_i^n$, tal que $D_1^n, \dots, D_{n-1}^n, D_n^n$ são componentes de $\Delta(\tilde{\mathcal{P}})$. Além disso, $D_n^n \subset \text{Sing}(\tilde{\mathcal{F}}_0)$ e D_1^n, \dots, D_{n-1}^n estão contidas nas fibras de f . Como $x_{n-1} \in D_{n-1}^n$ é uma singularidade de \mathcal{F}_0^{n-1} de tipo $(1:1)$ então as fibras genéricas de f intersectam transversalmente a D_n^n . \square

Assim, temos a seguinte proposição:

Proposição 4.48. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{C}}$ um pencil em X tal que \mathcal{F}_0 tem integral primeira meromorfa $F : X \dashrightarrow S$. Sejam $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ a resolução das singularidades de \mathcal{F}_0 , $\tilde{\mathcal{P}} = \{\tilde{\mathcal{F}}_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{C}}$ o pencil induzido em \tilde{X} e $f = F \circ \pi$. Se $\Delta(\tilde{\mathcal{P}})$ é invariante pelo pencil e $0 \notin IS(\tilde{\mathcal{P}})$, então, dado $\alpha \in IS(\mathcal{P})$, temos

1. $\text{gen}(f) = 0$, implica que $\tilde{\mathcal{F}}_\alpha$ é uma folheação de Ricatti com respeito a f .
2. $\text{gen}(f) = 1$, implica que $\tilde{\mathcal{F}}_\alpha$ é uma folheação turbulenta com respeito a f .

Observe que nestas condições o estudo de $I_p(\mathcal{P})$ foi feito nas seções 4.2.2, 4.2.1.

Capítulo 5

Pencil de folheações com centro de Morse

Neste capítulo trabalharemos no caso que $X = \mathbb{P}^2$.

5.1 $\Delta(\mathcal{P})$ não-invariante pelo pencil

Lembremos que na seção 3.2 definimos $\mathbb{F}ol(2, d)$ como o conjunto das folheações de grau d em \mathbb{P}^2 . Em [25] é provado que o conjunto:

$$\mathbb{F}ol_c(2, d) = \overline{\{\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol(2, d) : \mathcal{F} \text{ tem um centro}\}}$$

é um conjunto algébrico. Portanto $\mathbb{F}ol_c(2, d)$ se decompõe nas suas componentes irredutíveis.

A seguinte proposição dá condições suficientes para garantir quando um pencil \mathcal{P} em $\mathbb{F}ol(2, d)$ está contida no conjunto $\mathbb{F}ol_c(2, d)$.

Proposição 5.1. Sejam $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{C}}$ um pencil flat em \mathbb{P}^2 , onde \mathcal{F}_0 é uma folheação não-degenerada. Suponha que $\Delta(\mathcal{P})$ tem uma componente C não-invariante e não- NI . Então C contém uma singularidade móvel $p : V \rightarrow C$, tal que $p(\alpha)$ é um centro de \mathcal{F}_α , para todo $\alpha \in V$. Em particular,

$$\mathcal{P} \subset \mathbb{F}ol_c(2, d).$$

Prova: Como \mathcal{F}_0 é não-degenerada, existe uma vizinhança V de 0, tal que \mathcal{F}_α é uma folheação não-degenerada, para todo $\alpha \in V$. Dada uma componente C não-invariante e não- NI de $\Delta(\mathcal{P})$, pela observação 3.10, existem um aberto $V_1 \subset V$ e uma aplicação holomorfa injetiva $p : V_1 \rightarrow C$ tal que $p(\alpha) \in \text{Sing}(\mathcal{F}_\alpha)$, para todo $\alpha \in V_1$. Além disso, C tem multiplicidade um. Como o pencil é flat, então, pelo teorema 3.12, C é nice, isto é,

$$BB(\mathcal{F}_\alpha, p_j(\alpha)) = 0, \tag{5.1}$$

para todo $\alpha \in V_1$.

Fixado $\alpha_0 \in V$, seja $x_0 = p(\alpha_0)$. Então, existe uma vizinhança U de x_0 tal que $\mathcal{F}_\alpha|_U$ é definida pela 1-forma holomorfa ω_α e existe uma 1-forma θ meromorfa fechada em U , tais que

$$d\omega_\alpha = \theta \wedge \omega_\alpha, \quad (5.2)$$

para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$.

Como $d\theta = 0$, então as componentes de $(\theta)_\infty$ são invariantes pelo pencil. Logo, existe uma vizinhança simplesmente conexa $W \subset U$ que contém x_0 e tal que $W \cap (\theta)_\infty = \emptyset$. Em particular, θ é holomorfa em W e existe $g \in \mathcal{O}^*(W)$ tal que $\theta = \frac{dg}{g}$. Assim em (5.2), obtemos

$$d\left(\frac{\omega_\alpha}{g}\right) = 0,$$

para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$. Logo, existe $h_\alpha \in \mathcal{O}(U_1)$ tal que $\omega_\alpha = gdh_\alpha$, para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$. Portanto, por (5.1), temos que $p_j(\alpha)$ é uma singularidade de \mathcal{F}_α de tipo Morse, para todo $\alpha \in V$, isto é, $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha \in V} \subset \mathbb{F}ol_c(2, d)$. Logo,

$$\mathcal{P} \subset \mathbb{F}ol_c(2, d),$$

pois $\mathbb{F}ol_c(2, d)$ é um conjunto algébrico. Em particular, \mathcal{P} está contida em uma componente irredutível de $\mathbb{F}ol_c(2, d)$. \square

A proposição anterior mostra que se conhecemos as componentes irredutíveis de $\mathbb{F}ol_c(2, d)$ podemos calcular $I_p(\mathcal{P})$. Por exemplo, se $d = 2$ então $\mathbb{F}ol_c(2, d)$ tem oito componentes irredutíveis, como mostra o corolário do seguinte teorema.

Teorema 5.2 ([12]). Seja $\mathcal{G} \in \mathbb{F}ol(2, 2)$ tal que \mathcal{G} possui um centro q . Então \mathcal{G} pode ser definida por uma 1-forma meromorfa fechada η . Além disso, se $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{P}^2$ é uma carta afim, então η pode ser escrita de uma das seguintes formas:

a) $\eta = dh$, onde $\deg(h) = 3$.

b) $\eta = \sum_{j=1}^3 \lambda_j \frac{df_j}{f_j}$, onde $\lambda_j \in \mathbb{C}^*$ e $\deg(f_j) = 1$, $1 \leq j \leq 3$.

c) $\eta = \lambda_1 \frac{df}{f} + \lambda_2 \frac{dg}{g}$, onde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}^*$, $\deg(f) = 1$ e $\deg(g) = 2$.

d) $\eta = \sum_{j=1}^2 \lambda_j \frac{df_j}{f_j} + dg$, onde $\deg(g) = 1$, $\lambda_j \in \mathbb{C}^*$ e $\deg(f_j) = 1$, $1 \leq j \leq 2$.

e) $\eta = \sum_{j=1}^2 \lambda_j \frac{df_j}{f_j} + d(g/f_1)$, onde $\lambda_1, \lambda_2, f_1, f_2, g$ são como em (d).

f) $\eta = \frac{df}{f} + d(g/f^2)$, onde $\deg(f) = 1$ e $\deg(g) = 2$.

$$\text{g)} \quad \eta = \frac{df}{f} + d(g/f), \text{ onde } \deg(f) = 1 \text{ e } \deg(g) = 2.$$

$$\text{h)} \quad \eta = \frac{df}{f} + dg, \text{ onde } \deg(f) = 1 \text{ e } \deg(g) = 2.$$

$$\text{i)} \quad \eta = \frac{dg}{g} + df, \text{ onde } \deg(f) = 1 \text{ e } \deg(g) = 2.$$

$$\text{j)} \quad \eta = 3\frac{dg}{g} - \frac{dh}{h}, \text{ onde } \deg(h) = 3 \text{ e } \deg(g) = 2.$$

Corolário 5.3 ([10]). Seja $\mathcal{G} \in \mathbb{F}ol(2, 2)$ tal que \mathcal{G} possui um centro q . Então \mathcal{G} pode ser definida em coordenadas homogêneas por uma 1-forma fechada η de um dos seguintes tipos:

$$A_1) \quad \eta = d(H/F^3), \text{ onde } \deg(H) = 3 \text{ e } \deg(F) = 1.$$

$$A_2) \quad \eta = \sum_{j=1}^4 \lambda_j \frac{dF_j}{F_j}, \text{ onde } \lambda_j \in \mathbb{C}^*, \deg(F_j) = 1, 1 \leq j \leq 4, \text{ e } \sum_j \lambda_j = 0.$$

$$A_3) \quad \eta = \sum_{j=1}^3 \lambda_j \frac{dF_j}{F_j}, \text{ onde } \lambda_j \in \mathbb{C}^*, 1 \leq j \leq 3, \deg(F_1) = \deg(F_2) = 1, \deg(F_3) = 2 \text{ e } \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0.$$

$$A_4) \quad \eta = \sum_{j=1}^3 \lambda_j \frac{dF_j}{F_j} + d(G/F_3), \text{ onde } \deg(G) = 1, \deg(F_j) = 1, 1 \leq j \leq 3, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}^*, \lambda_3 \in \mathbb{C} \text{ e } \sum_j \lambda_j = 0.$$

$$A_5) \quad \eta = \frac{dF_1}{F_1} - \frac{dF_2}{F_2} + d(G/F_1^2), \text{ onde } \deg(F_1) = \deg(F_2) = 1 \text{ e } \deg(G) = 2.$$

$$A_6) \quad \eta = \frac{dF_1}{F_1} - \frac{dF_2}{F_2} + d(G/F_1 \cdot F_2), \text{ onde } \deg(F_1) = \deg(F_2) = 1 \text{ e } \deg(G) = 2.$$

$$A_7) \quad \eta = \frac{dG}{G} - 2\frac{dF}{F} + d(F_1/F), \text{ onde } \deg(F) = \deg(F_1) = 1 \text{ e } \deg(G) = 2.$$

$$A_8) \quad \eta = 3\frac{dG}{G} - 2\frac{dH}{H}, \text{ onde } \deg(G) = 2 \text{ e } \deg(H) = 3.$$

Pelo corolário anterior, $\mathbb{F}ol_c(2, 2)$ tem oito componentes irredutíveis, as quais denotaremos por $C_c(2, i)$, $i = 1, \dots, 8$, onde cada elemento de $C_c(2, i)$ é do tipo A_i .

Assim temos o seguinte lema:

Lema 5.4. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \bar{\mathbb{C}}} \subset \mathbb{F}ol(2, 2)$ um pencil flat em \mathbb{P}^2 , onde \mathcal{F}_0 é uma folheação não-degenerada. Suponha que $\Delta(\mathcal{P})$ tem uma componente não-invariante e não- NI . Então exatamente uma das seguintes condições é satisfeita:

1. $I_p(\mathcal{P})$ é finito.

2. Existe um subconjunto finito $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \overline{\mathbb{C}}$ tal que $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset I_p(\mathcal{P})$.

3. Existem $\lambda \in \mathbb{C}^*$ e $\mu \in \mathbb{C}$ tais que $I_p(\mathcal{P}) = \lambda\mathbb{Q} + \mu$.

Prova: Pela proposição 5.1 temos

$$\mathcal{P} \subset \mathbb{F}ol_c(2, 2).$$

Assim pelo corolário 5.3, \mathcal{P} está contido em uma das componentes $C_c(2, 1), \dots, C_c(2, 8)$ de $\mathbb{F}ol_c(2, d)$. Logo temos as seguinte possibilidades:

- i) Se $\mathcal{P} \subset C_c(2, 1) \cup C_c(2, 8)$, claramente, $I_p(\mathcal{P}) = \overline{\mathbb{C}}$.
- ii) Se \mathcal{P} está contido em uma das componentes $C_c(2, 4), \dots, C_c(2, 7)$, então $I_p(\mathcal{P})$ é finito.
- iii) Se $\mathcal{P} \subset C_c(2, 2) \cup C_c(2, 3)$ então, dado $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$, \mathcal{F}_α é uma folheação logarítmica de um dos seguintes tipos:

- $\gamma_\alpha = f_{1,\alpha} f_{2,\alpha} f_{3,\alpha} f_{4,\alpha} \sum_{j=1}^4 \lambda_{j,\alpha} \frac{df_{j,\alpha}}{f_{j,\alpha}}$, onde $\lambda_{j,\alpha} \in \mathbb{C}^*$, $\deg(f_{j,\alpha}) = 1$, $1 \leq j \leq 4$, e $\sum_j \lambda_{j,\alpha} = 0$.

- $\gamma_\alpha = f_{1,\alpha} f_{2,\alpha} f_{3,\alpha} \sum_{j=1}^3 \lambda_{j,\alpha} \frac{df_{j,\alpha}}{f_{j,\alpha}}$, onde $\lambda_{j,\alpha} \in \mathbb{C}^*$, $\deg(f_{j,\alpha}) = 1$, $1 \leq j \leq 3$, $\deg(f_{1,\alpha}) = \deg(f_{2,\alpha}) = 1$, $\deg(f_{3,\alpha}) = 2$ e $\lambda_{1,\alpha} + \lambda_{2,\alpha} + 2\lambda_{3,\alpha} = 0$.

Sejam ω e η 1-formas polinomiais em \mathbb{C}^3 tais que \mathcal{F}_α está definida em coordenadas homogêneas por $\omega_\alpha = \omega + \alpha\eta$, para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$. Logo $\omega_\alpha = c_\alpha \gamma_\alpha$, para algum $c_\alpha \in \mathbb{C}^*$ e para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$. Seja θ a 1-forma meromorfa racional fechada tal que:

$$d\omega_\alpha = \theta \wedge \omega_\alpha, \quad (5.3)$$

para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$.

Considere também

$$\Omega_\alpha = \frac{\gamma_\alpha}{F_\alpha} = \frac{\omega_\alpha}{F_\alpha c_\alpha} = \sum_{i=1}^k \lambda_{i,\alpha} \frac{df_{i,\alpha}}{f_{i,\alpha}}, \quad \alpha \in \overline{\mathbb{C}}, \quad (5.4)$$

onde $F_\alpha = f_{1,\alpha} \dots f_{k,\alpha}$. Como Ω_α é fechada então, em (5.4),

$$d\omega_\alpha = \frac{dF_\alpha}{F_\alpha} \wedge \omega_\alpha. \quad (5.5)$$

Das equações (5.3) e (5.5), temos que $\left(\frac{dF_\alpha}{F_\alpha} - \theta\right) \wedge \omega_\alpha = 0$. Logo, existem polinômios G_α e H_α tais que

$$\theta = \frac{dF_\alpha}{F_\alpha} + \frac{H_\alpha}{G_\alpha} \omega_\alpha = \frac{dF_\alpha}{F_\alpha} + c_\alpha F_\alpha \frac{H_\alpha}{G_\alpha} \Omega_\alpha. \quad (5.6)$$

Como $d\theta = 0$ e Ω_α é fechada, obtemos

$$d\left(c_\alpha F_\alpha \frac{H_\alpha}{G_\alpha}\right) \wedge \Omega_\alpha = 0 \Rightarrow d\left(c_\alpha F_\alpha \frac{H_\alpha}{G_\alpha}\right) \wedge \omega_\alpha = 0.$$

Logo temos duas possibilidades:

1. Existe $\alpha_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ tal que $c_\alpha F_\alpha \frac{H_\alpha}{G_\alpha}$ não é constante como função em \mathbb{P}^2 . Neste caso, $\varphi_\alpha := c_\alpha F_\alpha \frac{H_\alpha}{G_\alpha}$ é não constante como função em \mathbb{P}^2 , exceto possivelmente num sub-conjunto finito $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \overline{\mathbb{C}}$. Como $d\varphi_\alpha \wedge \omega_\alpha = 0$ então $\alpha \in I_p(\mathcal{P})$. Assim, $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset I_p(\mathcal{P})$.
2. $c_\alpha F_\alpha \frac{H_\alpha}{G_\alpha}$ só depende de α , ou seja $c_\alpha F_\alpha \frac{H_\alpha}{G_\alpha} = \lambda_\alpha$, com $\lambda_\alpha \in \mathbb{C}$, logo de (5.6), obtemos

$$\theta = \frac{dF_\alpha}{F_\alpha} + \lambda_\alpha \frac{\Omega_\alpha}{F_\alpha} = \sum_{i=1}^k (1 + \lambda_\alpha \lambda_{i,\alpha}) \frac{df_{i,\alpha}}{f_{i,\alpha}}.$$

Como θ não depende de α e $1 + \lambda_\alpha \lambda_{i,\alpha} = \text{Res}_{C_{i,\alpha}}(\theta)$, onde $C_{i,\alpha} = \{f_{i,\alpha} = 0\}$ então $1 + \lambda_\alpha \lambda_{i,\alpha}$ não depende de α . Colocando $1 + \lambda_\alpha \lambda_{i,\alpha} := \rho_i$, obtemos

$$\theta = \sum_{i=1}^k \rho_i \frac{df_{i,\alpha}}{f_{i,\alpha}}. \quad (5.7)$$

Suponha que existe $\alpha_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ tal que $\lambda_{\alpha_0} = 0$. Então dado $i = 1, \dots, k$ temos que $\rho_i = 1$ e $\lambda_\alpha = 0$ para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$. Logo em 5.7

$$\theta = \sum_{i=1}^k \frac{df_{i,\alpha}}{f_{i,\alpha}}.$$

Como $\Delta(\mathcal{P})$ tem finitas componentes então $f_{i,\alpha} = h_i$, ou seja, $f_{i,\alpha}$ não depende de α para todo $i = 1, \dots, k$. Assim em 5.4 obtemos

$$\begin{aligned} \Omega_\alpha &= \frac{\gamma_\alpha}{H} = \frac{\omega_\alpha}{H} c_\alpha, & \text{onde } H &= h_1 \dots h_k, \\ \omega_\alpha &= H \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_{i,\alpha}}{c_\alpha} \frac{dh_i}{h_i}, & \alpha &\in \overline{\mathbb{C}}. \end{aligned}$$

Como $\omega_\alpha = \omega + \alpha\eta$ então $\frac{\lambda_{i,\alpha}}{c_\alpha} = a_i + \alpha b_i$, para $i = 1, \dots, k$, assim

$$\omega_\alpha = H \sum_{i=1}^k (a_i + \alpha b_i) \frac{dh_i}{h_i}, \quad \alpha \in \overline{\mathbb{C}}.$$

Em particular, se $\#I_p(\mathcal{P}) \geq 2$ então existem $\lambda \in \mathbb{C}^*$ e $\mu \in \mathbb{C}$ tais que $I_p(\mathcal{P}) = \lambda\mathbb{Q} + \mu$. Por outro, se $\lambda_\alpha \neq 0$, para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$ então de 5.4 e 5.7 obtemos

$$\lambda_\alpha \Omega_\alpha = c_\alpha \sum_{i=1}^k (\rho_i - 1) \frac{df_{i,\alpha}}{f_{i,\alpha}}, \quad \alpha \in \overline{\mathbb{C}}, \quad (5.8)$$

Logo de 5.8

$$I_p(\mathcal{P}) = \overline{\mathbb{C}} \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}^* \text{ tal que } (\rho_1 - 1, \dots, \rho_k - 1) \in \lambda \mathbb{Z}^k$$

□

Observação 5.5 ([28]). Seja $\alpha \in IS(\mathcal{P})$ e $\mathcal{F}_\alpha \in \mathbb{F}ol(2,1)$, então \mathcal{F}_α está definida por uma 1-forma Ω_α tal que

$$\Omega_\alpha = i_R i_{L_\alpha} (dx \wedge dy \wedge dz),$$

onde R é o campo radial em \mathbb{C}^3 e L_α é um campo homogêneo de grau um. Após uma mudança linear de coordenadas em \mathbb{C}^3 podemos supor que L_α está na forma canônica de Jordan. Logo temos três possibilidades:

1. $L_\alpha = \lambda_0 z_0 \frac{\partial}{\partial z_0} + \lambda_1 z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \lambda_2 z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$ e $\lambda_i \neq 0$ para algum $i = 0, 1, 2$.
2. $L_\alpha = \lambda_0 R + z_1 \frac{\partial}{\partial z_0} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_1}$, $\lambda_0 \in \mathbb{C}$.
3. $L_\alpha = \lambda_0 \left((z_0 + z_1) \frac{\partial}{\partial z_0} + z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} \right) + \lambda_2 z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$, $\lambda_0, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ e $\lambda_0 \neq 0$.

Para cada um dos três casos acima, existe 1-forma meromorfa fechada η_α e uma função racional F_α tal que $d\eta_\alpha = \frac{dF_\alpha}{F_\alpha} \wedge \eta_\alpha$.

Lema 5.6. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}} \subset \mathbb{F}ol(2,1)$ um pencil em X , onde \mathcal{F}_0 é uma folheação não-degenerada. Se o pencil é flat, então acontece somente uma das seguintes opções:

1. \mathcal{P} é um pencil de formas logarítmicas. Em particular, se $\#I_p(\mathcal{P}) \geq 2$ então existem $\lambda \in \mathbb{C}^*$ e $\mu \in \mathbb{C}$ tais que $I_p(\mathcal{P}) = \lambda\mathbb{Q} + \mu$.
2. Existe um subconjunto finito $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \overline{\mathbb{C}}$ tal que $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset I_p(\mathcal{P})$.

Prova: Da observação 5.5 e seguindo a mesma prova do lema 5.4, o lema segue de imediato. □

Dados os polinômios $f_j \in \mathbb{C}[x, y]$, com $\deg(f_j) = d_j \in \mathbb{N}$, para $1 \leq j \leq s$, e números complexos não nulos $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{C}^*$ tais que $\sum_{j=1}^s \lambda_j d_j = 0$. Definimos a folheação logarítmica:

$$\mathcal{F} \left(f_1 \cdots f_k \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{df_i}{f_i} \right), \quad (5.9)$$

de grau $d = \sum_{i=1}^k d_i - 2$.

Seja $\mathcal{L}(d_1, \dots, d_k)$ o conjunto das folheações como em 5.9, ou seja,

$$\mathcal{L}(d_1, \dots, d_k) = \left\{ \mathcal{F} \left(f_1 \cdots f_k \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{df_i}{f_i} \right) : \deg(f_i) = d_i, \lambda_i \in \mathbb{C}^*, 1 \leq i \leq k, \sum \lambda_j d_j = 0 \right\}.$$

Logo $\mathcal{L}(d_1, \dots, d_k) \subseteq \mathbb{F}ol(2, d)$, onde $d = \sum_{i=1}^k d_i - 2$.

Observação 5.7. Em [31], Movasati prova que existe um conjunto aberto denso $U_{\mathcal{L}}$ de $\mathcal{L}(d_1, \dots, d_k)$ tal que, para qualquer $\mathcal{F} \in U_{\mathcal{L}}$ com centro p , satisfazendo a propriedade de que toda a deformação holomorfa \mathcal{F}_ε de \mathcal{F} em $\mathbb{F}ol(2, d)$ tem uma única singularidade p_ε perto de p que ainda é um centro, então $\mathcal{F}_\varepsilon \in \mathcal{L}(d_1, \dots, d_k)$.

Mais precisamente, dado $\mathcal{F} \in U_{\mathcal{L}}$, existe $\varepsilon > 0$, existem polinômios $f_{j,\varepsilon}$ com $\deg(f_{j,\varepsilon}) = d_j$, onde $1 \leq j \leq k$, e existem números complexos $\lambda_j(\varepsilon) \in \mathbb{C}^*$, com $1 \leq j \leq k$, tais que $\sum \lambda_j(\varepsilon) d_j = 0$. Além disso, \mathcal{F}_ε é dada por:

$$f_1(\varepsilon) \cdots f_k(\varepsilon) \sum_{j=1}^k \lambda_j(\varepsilon) \frac{df_j(\varepsilon)}{f_j(\varepsilon)} = 0,$$

onde $f_j(\varepsilon)$ e $\lambda_j(\varepsilon)$ são holomorfas em ε , e $f_j(0) = f_j$ e $\lambda_j(0) = \lambda_j$, para todo $1 \leq j \leq k$.

Proposição 5.8. Com as notações acima, seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}} \subset \mathbb{F}ol(2, d)$ com $d = \sum_{i=1}^k d_i - 2$, um pencil flat em \mathbb{P}^2 tal que $\mathcal{F}_0 \in U_{\mathcal{L}}$. Se $\Delta(\mathcal{P})$ tem pelo menos uma componente não-invariante e não-*NI* então $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{F}ol_c(2, d)$. Além disso, tem-se uma das seguintes possibilidades:

1. \mathcal{P} é um pencil de formas logarítmicas. Em particular, se $\#I_p(\mathcal{P}) \geq 2$ então existem $\lambda \in \mathbb{C}^*$ e $\mu \in \mathbb{C}$ tais que $I_p(\mathcal{P}) = \lambda\mathbb{Q} + \mu$.
2. Existe um subconjunto finito $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \overline{\mathbb{C}}$ tal que $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset I_p(\mathcal{P})$.

Prova: Como $\mathcal{F}_0 \in U_{\mathcal{L}}$, pela observação 5.7, para toda a deformação holomorfa \mathcal{F}_ε de \mathcal{F} em $\mathbb{F}ol(2, d)$, com uma única singularidade p_ε perto de p que ainda é um centro, então $\mathcal{F}_\varepsilon \in \mathcal{L}(d_1, \dots, d_k)$.

Seja C uma componente não-invariante e não-*NI* de $\Delta(\mathcal{P})$. Então, pela proposição 5.1, existem $\varepsilon > 0$, uma vizinhança aberta $V \subset \{|z| < \varepsilon\}$ e uma singularidade móvel $p : V \rightarrow C$, tal que $p(\alpha)$ é um centro de \mathcal{F}_α , para todo $\alpha \in V$.

Em particular, $\mathcal{F}_\alpha \in \mathcal{L}(d_1, \dots, d_k)$ é dada por:

$$w + \alpha\eta = f_1(\varepsilon) \cdots f_k(\varepsilon) \sum_{i=1}^k \lambda_i(\varepsilon) \frac{df_i(\varepsilon)}{f_i(\varepsilon)}$$

onde $f_i(\varepsilon)$ são holomorfas em ε e $f_i(0) = f_i$, $\lambda_i(0) = \lambda_i$, $1 \leq i \leq s$, para todo $\alpha \in V$. Portanto

$$\mathcal{P} \subset \overline{\mathcal{L}(d_1, \dots, d_k)},$$

e dado $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$

$$w + \alpha\eta = f_1(\alpha) \cdots f_k(\alpha) \sum_{i=1}^k \lambda_i(\alpha) \frac{df_i(\alpha)}{f_i(\alpha)},$$

onde $f_i(\alpha)$ e $\lambda_i(\alpha)$ são funções holomorfas de α . Logo o resultado segue fazendo o mesmo argumento do lema 5.4. \square

Seja Pol_d o conjunto de polinômios de grau d em \mathbb{C}^2 e seja

$$(F, G) \in \text{Pol}_{a+1} \times \text{Pol}_{b+1}, \quad \text{onde } \frac{a+1}{b+1} = \frac{q}{p} \text{ e } \text{mcd}(p, q) = 1.$$

A folheação $\mathcal{F} = \mathcal{F}(pGdF - qFdG) \in \mathbb{F}ol(2, d)$ com $d = a + b$, tem integral primeira racional da forma:

$$f : \mathbb{P}^2 \setminus (\{F = 0\} \cap \{G = 0\}) \rightarrow \mathcal{S}, \quad f(x, y) = \frac{F(x, y)^p}{G(x, y)^q}.$$

Seja $\mathcal{I}(a, b)$ o fecho do conjunto das folheações holomorfas mencionadas acima. Para $\mathcal{F} \in \mathcal{I}(a, b)$, seja p uma das singularidades centro de \mathcal{F} , e seja \mathcal{F}_ε uma deformação holomorfa de \mathcal{F} em $\mathbb{F}ol(2, d)$, onde $d = a + b$, tal que a única singularidade perto de p ainda é um centro. O seguinte teorema pode ser encontrado em [29].

Teorema 5.9. Se $d = a + b > 2$ então existe um subconjunto $U_{\mathcal{I}(a,b)}$ aberto e denso de $\mathcal{I}(a, b)$ tal que para todo $\mathcal{F}(pGdF - qFdG) \in U_{\mathcal{I}(a,b)}$ e para todas as deformações \mathcal{F}_ε como antes, tem-se que \mathcal{F}_ε é também uma folheação com integral primeira. Melhor ainda, existem polinômios F_ε e G_ε tais que $\mathcal{F}_\varepsilon = \mathcal{F}(pG_\varepsilon dF_\varepsilon - qF_\varepsilon dG_\varepsilon)$, onde F_ε e G_ε são holomorfas em ε , $F_0 = F$ e $G_0 = G$.

Observação 5.10. A partir do teorema 5.9, Movassati prova o seguinte teorema: Se $d = a + b > 2$ então $\mathcal{I}(a, b)$ é uma componente irredutível de $\mathbb{F}ol_c(2, d)$.

Lema 5.11. Seja $d = a + b > 2$, e sejam $\mathcal{F} = \mathbb{F}ol(pFdG - qGdF) \in U_{\mathcal{I}(a,b)}$ e $\mathcal{G} \in \mathbb{F}ol(2, d)$ folheações holomorfas em \mathbb{P}^2 , e \mathcal{P} o pencil gerado. Se \mathcal{P} é flat e $\Delta(\mathcal{P})$ tem uma componente não-invariante e não- NI , então

$$I_p(\mathcal{P}) = \overline{\mathbb{C}}.$$

Prova: Como $\mathcal{F}_0 \in U_{\mathcal{I}(a,b)}$ então pelo teorema 5.9 para toda a deformação \mathcal{F}_ε como antes, tem-se que $\mathcal{F}_\varepsilon \in \mathcal{I}_{a,b}$. Como $\Delta(\mathcal{P})$ tem uma componente C não-invariante e não- NI , pela proposição 5.1, existe $\varepsilon > 0$ e existe uma singularidade móvel $p : V \rightarrow C$, onde $V \subset \{|z| < \varepsilon\}$ e tal que $p(\alpha)$ é um centro de \mathcal{F}_α , para todo $\alpha \in V$.

Assim dado $\alpha \in V$, $\mathcal{F}_\alpha \in U_{\mathcal{I}(a,b)}$ tem integral primeira do tipo:

$$pG_\alpha dF_\alpha - qF_\alpha dG_\alpha,$$

onde F_α e G_α são polinômios homogêneos de grau $a + 1$ e $b + 1$, respectivamente. Em particular, \mathcal{F}_α tem integral primeira de grau $d = a + b$, para todo $\alpha \in V_1$. Agora, dado $k \in \mathbb{N}$, podemos definir o conjunto algébrico:

$$IP_k = \{\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol(2, d) : \mathcal{F} \text{ tem integral primeira } F, \deg(F) \leq k\}.$$

Então, $\mathcal{F}_\alpha \in IP_d$, para todo $\alpha \in V$. Mas como IP_d é algébrico então

$$\mathcal{P} \subset IP_d,$$

e portanto, $I_p(\mathcal{P}) = \overline{\mathbb{C}}$. □

Usando os lemas 5.4 e 5.11 temos o teorema VI:

Teorema VI. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ um pencil flat em \mathbb{P}^2 , onde \mathcal{F}_0 é uma folheação não-degenerada. Seja $\Delta(\mathcal{P})$ não invariante pelo pencil com uma componente não invariante e não $NI(\mathcal{P})$. Então

1. Se $d = a + b > 2$ e $\mathcal{F} \in U_{\mathcal{I}(a,b)}$, temos $I_p(\mathcal{P}) = \overline{\mathbb{C}}$.
2. Se $d = 2$ então acontece somente uma das seguintes opções:
 - (a) $I_p(\mathcal{P})$ é finito.
 - (b) Existe um subconjunto finito $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \overline{\mathbb{C}}$ tal que $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset I_p(\mathcal{P})$.
 - (c) Existem $\lambda \in \mathbb{C}^*$ e $\mu \in \mathbb{C}$ tais que $I_p(\mathcal{P}) = \lambda\mathbb{Q} + \mu$.

Capítulo 6

Pencil gerado por 1-formas meromorfas fechadas

Definição 6.1. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ um pencil em X . Diremos que \mathcal{P} é gerado por 1-formas meromorfas fechadas, se \mathcal{F}_α é definida por $\omega + \alpha\eta$, para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$, onde ω e η são 1-formas meromorfas fechadas em X .

Nesta seção daremos condições para garantir quando um pencil \mathcal{P} é gerado por 1-formas meromorfas fechadas.

6.1 Pencil gerado por 1-formas meromorfas fechadas em \mathbb{P}^2

Lema 6.2. Seja \mathcal{P} um pencil flat em \mathbb{P}^2 então $\Delta(\mathcal{P})$ possui uma componente invariante.

Prova: Por meio de uma mudança de coordenadas, podemos supor que \mathbb{L}_∞ não está contida em $\Delta(\mathcal{P})$. Logo, nas coordenadas $(x, y) \in \mathbb{C}^2$, se \mathcal{F}_α é representado pela 1-forma holomorfa ω_α então existe uma 1-forma meromorfa θ tal que:

$$d\omega_\alpha = \theta \wedge \omega_\alpha, \quad d\theta = 0.$$

Como $\mathbb{L}_\infty \not\subset \Delta(\mathcal{P})$ então $\theta \not\equiv 0$ e $(\theta)_\infty \neq \emptyset$. Portanto $(\theta)_\infty \subset \Delta(\mathcal{P})$ é invariante pelo pencil. \square

Denotemos por $\Delta_I(\mathcal{P})$ o subconjunto formado pela união das componentes invariantes do pencil \mathcal{P} , isto é $\Delta_I(\mathcal{P}) = \bigcup_{j=1}^N C_j$, onde C_j é uma componente invariante de \mathcal{P} , para cada $j = 1, \dots, N$.

Seja L uma linha genérica projetiva em posição geral com respeito a $\Delta_I(\mathcal{P})$, isto é, L evita as singularidades de $\Delta_I(\mathcal{P})$ e intersesta $\Delta_I(\mathcal{P})$ transversalmente. Em particular, temos que $L \cap \Delta_I(\mathcal{P}) = \{p_1, \dots, p_r\}$, onde $r = \text{grau}(\Delta_I(\mathcal{P}))$. Fixemos um ponto genérico $p \in L \setminus \Delta_I(\mathcal{P})$. Então o mergulho

$$L \setminus \Delta_I(\mathcal{P}) \hookrightarrow \mathbb{P}^2 \setminus \Delta_I(\mathcal{P}) \tag{6.1}$$

induz um epimorfismo de grupos fundamentais $\pi_1(L \setminus \Delta_I(\mathcal{P}), p) \rightarrow \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \Delta_I(\mathcal{P}), p)$ (cf. [23, p. 46]).

Dado $j = 1, \dots, N$, seja C_j uma componente de $\Delta_I(\mathcal{P})$, temos que $C_j \cap L = \{q_1^j, \dots, q_{l_j}^j\}$. Assim, fixado $i \in \{1, \dots, l_j\}$, seja $\gamma_i^j : [0, 1] \rightarrow L$ uma curva fechada passando por p tal que tem índice um ao longo de q_i^j e tem índice zero ao longo de q_l^k , para todo $j \neq l$, $i \neq k$, onde $k \in \{1, \dots, N\}$ e $l \in \{1, \dots, l_k\}$, como mostra a figura 6.1.

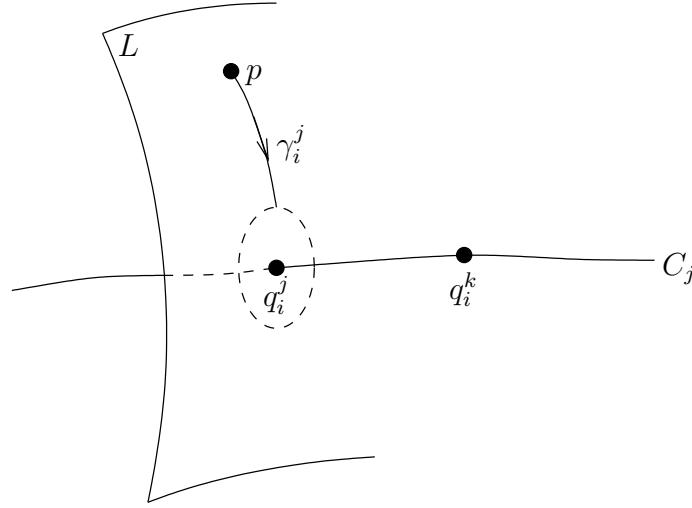


Figura 6.1

Logo de (6.1), temos que

$$\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \Delta_I(\mathcal{P}), p) = \langle \gamma_i^j \rangle_{\substack{j=1, \dots, N \\ i=1, \dots, l_j}}$$

Fixado $j = 1, \dots, N$, na seção 5.1 vimos que, para cada $i = 1, \dots, l_j$, existe uma cobertura por abertos $(U_n^{j,i})_{1 \leq n \leq m_{j,i}}$ de $\gamma_i^j[0, 1]$, tais que existe um sistema de coordenadas $(x_n^{j,i}, y_n^{j,i})$ em $U_n^{j,i}$, onde \mathcal{F}_α está definida em $U_n^{j,i}$ por:

$$dy_n^{j,i} + \alpha dx_n^{j,i} = 0,$$

para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$ e para qualquer $n \in \{1, \dots, m_{j,i}\}$. Além disso, $p \in U_1^{j,i} \cap U_{m_{j,i}}^{j,i}$ e existem constantes $\lambda_{j,i} \in \mathbb{C}^*$, $a_{j,i}, b_{j,i} \in \mathbb{C}$ tais que $y_{m_{j,i}}^{j,i} = \lambda_{j,i} y_1^{j,i} + b_{j,i}$ e $x_{m_{j,i}}^{j,i} = \lambda_{j,i} x_1^{j,i} + a_{j,i}$.

Seja

$$U = \bigcap_{\substack{j=1, \dots, N \\ i=1, \dots, l_j}} U_1^{j,i} \cap U_{m_{j,i}}^{j,i},$$

logo podemos definir a **monodromia** do pencil \mathcal{P} por

$$\begin{aligned} \text{Mon}(\mathcal{P}) : \Pi_1(\mathbb{P}^n \setminus \Delta_I(\mathcal{P}), p) &\rightarrow \text{aff}(2) \\ \gamma_i^j &\mapsto ((x_1^{j,i}, y_1^{j,i}) \mapsto \lambda_{j,i}(x_1^{j,i}, y_1^{j,i}) + (a_{j,i}, b_{j,i})) \end{aligned}$$

Dizemos que a imagem de $\text{Mon } \mathcal{P}$ é o **grupo de monodromia** do pencil \mathcal{P} .

Definição 6.3. Dada C_j uma componente de $\Delta_I(\mathcal{P})$, dizemos que C_j é **parabólica** se $\lambda_{j,i} = 1$, para algum $i = 1, \dots, l_j$.

Definição 6.4. Dada C_j uma componente de $\Delta_I(\mathcal{P})$, diremos que C_j é **hiperbólica** se $\lambda_i^j \neq 1$, para todo $i = 1, \dots, l_j$.

Proposição VII. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ um pencil flat em \mathbb{P}^2 , tal que toda a componente de $\Delta_I(\mathcal{P})$ tem multiplicidade um. Suponhamos que toda a componente C de $\Delta_I(\mathcal{P})$ é parabólica. Se $\#I_p(\mathcal{P}) \geq 2$, então existem $\lambda \in \mathbb{C}^*$ e $\mu \in \mathbb{C}$ tais que $I_p(\mathcal{P}) = \lambda\mathbb{Q} + \mu$.

Prova: Sejam ω e η 1-formas polinomiais em \mathbb{C}^2 tais que \mathcal{F}_α está definida por $\omega_\alpha = \omega + \alpha\eta$, para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$. Seja θ a 1-forma meromorfa racional fechada tal que:

$$d\omega_\alpha = \theta \wedge \omega_\alpha, \quad \alpha \in \overline{\mathbb{C}}$$

Usaremos o teorema de Fuchs para webs folheadas parabólicas (cf. [8, p. 74]). Seguindo as notações do artigo temos que $\Delta_I(\mathcal{P}) = \Sigma'$ no caso $n = 2$ e o pencil \mathcal{P} é uma *3-web folheada* denotada por \mathcal{W} . Seja $P_1 \dots P_k$ uma equação reduzida de $\Delta_I(\mathcal{P})$, então dada $C_j = \{P_j = 0\}$, $j = 1, \dots, k$, uma componente parabólica de $\Delta_I(\mathcal{P})$, existe $\gamma_j := \gamma_j^i$ tal que $\lambda_j^i = 1$, com $i \in \{1, \dots, l_j\}$. Logo pelo teorema de Fuchs,

$$q_j = \int_{\gamma_j} \theta \in \mathbb{Z},$$

para todo $j \in \{1, \dots, k\}$. Além disso, dado $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$,

$$\frac{\omega_\alpha}{P_1^{q_1} \dots P_k^{q_k}} = \sum_j \lambda_{j,\alpha} \frac{dP_j}{P_j} + d\left(\frac{h_\alpha}{P_1^{q_1-1} \dots P_k^{q_k-1}}\right), \quad (6.2)$$

onde $h_\alpha \in \mathbb{C}[x, y]$ e $\deg(h_\alpha) = \deg(P_1^{q_1-1} \dots P_k^{q_k-1})$. Como $\#I_p(\mathcal{P}) \geq 2$, sem perda de generalidade, podemos supor que $0, \infty \in I_p(\mathcal{P})$. Logo, de (6.2)

$$\frac{\omega_0}{P_1 \dots P_k} = \sum_j \lambda_{j,0} \frac{dP_j}{P_j}, \quad \frac{\omega_\infty}{P_1 \dots P_k} = \sum_j \lambda_{j,\infty} \frac{dP_j}{P_j}.$$

Isto implica que \mathcal{P} é um pencil de formas logarítmicas. □

Definição 6.5. Dada C_j uma componente de $\Delta_I(\mathcal{P})$, diremos que $\text{Mon}(\mathcal{P})$ é **abeliana** se o grupo de monodromia do pencil \mathcal{P} é abeliano.

Proposição VIII. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ um pencil flat em \mathbb{P}^2 , tal que toda a componente de $\Delta_I(\mathcal{P})$ tem multiplicidade um. Suponhamos que toda a componente C de $\Delta_I(\mathcal{P})$ é hiperbólica e o grupo de monodromia é abeliano. Se $I_p(\mathcal{P}) \neq \emptyset$, então

$$I_p(\mathcal{P}) = \overline{\mathbb{C}}.$$

Prova: Sejam ω e η 1-formas polinomiais em \mathbb{C}^2 tais que \mathcal{F}_α está definida por $\omega_\alpha = \omega + \alpha\eta$, para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$. Seja θ a 1-forma meromorfa racional fechada tal que:

$$d\omega_\alpha = \theta \wedge \omega_\alpha, \quad \alpha \in \overline{\mathbb{C}}$$

Usaremos o teorema de Fuchs para webs folheadas abelianas e hiperbólicas (cf. [8, p. 80]). Seja $P_1 \cdots P_k$ uma equação reduzida de $\Delta_I(\mathcal{P})$ em \mathbb{C}^3 , então, dado $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$, \mathcal{F}_α possui uma integral primeira multiforme do tipo

$$P_1^{\mu_1} \cdots P_k^{\mu_k} [Q_1 + \alpha Q_2], \quad (6.3)$$

onde Q_1 e Q_2 são polinômios homogêneos e

$$1 - \mu_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \theta.$$

onde $\gamma_j \in \{\gamma_j^1, \dots, \gamma_j^{l_j}\}$. Como $I_p(\mathcal{P}) \neq \emptyset$ obtemos que $\mu_j \in \mathbb{Q}$, $j = 1, \dots, k$, e portanto $I_p(\mathcal{P}) = \overline{\mathbb{C}}$. \square

Observação 6.6. Em particular, sob as condições das proposições VII e VIII, temos que o pencil \mathcal{P} é definido por 1-formas meromorfas fechadas.

6.1.1 Pencil gerado por 1-formas meromorfas fechadas numa superfície X

Sejam Ω e η duas 1-formas meromorfas não fechadas em X . Seja o pencil $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ em X , onde \mathcal{F}_α é induzido por $\Omega + \alpha\eta$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que \mathcal{F}_0 e \mathcal{F}_∞ têm singularidades isoladas e que $(\Omega)_0 = (\eta)_0$ e $(\Omega)_\infty = (\eta)_\infty$. Denotemos por D a união das componentes irredutíveis de $(\Omega)_0$ e $(\Omega)_\infty$.

Proposição IX. Sob as condições acima, se existe uma 1-forma meromorfa θ em X tal que:

- $d\Omega = \theta \wedge \Omega$, $d\eta = \theta \wedge \eta$, $d\theta = 0$.
- $P = (\theta)_\infty \setminus D$ tem cruzamentos normais, e $P \otimes N_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}_X$,

então \mathcal{P} é gerado por 1-formas meromorfas fechadas.

Prova: Como $d\theta = 0$ então o pencil \mathcal{P} é flat e toda a componente de P é invariante pelo pencil. Como $P \otimes N_{\mathcal{F}_0} = P \otimes N_{\mathcal{F}_\infty} = \mathcal{O}_X$ e P tem cruzamentos normais, então, pela proposição 10 de [4], existe uma cobertura por abertos $\{U_i\}_{i \in I}$ de X tal que $P \cap U_i = \{T_i = 0\}$, com T_i reduzida, para todo $i \in I$ e 1-formas holomorfas $\tilde{\omega}_i$ e $\tilde{\eta}_i$, que definem \mathcal{F}_0 e \mathcal{F}_∞ , tais que as 1-formas meromorfas fechadas

$$\Lambda_0|_{U_i} = \rho_i \frac{\tilde{\omega}_i}{T_i} \quad \text{e} \quad \Lambda_\infty|_{U_i} = \rho_i \frac{\tilde{\eta}_i}{T_i},$$

representam \mathcal{F}_0 e \mathcal{F}_∞ respectivamente.

Como $(\Omega)_0 = (\eta)_0$ e $(\Omega)_\infty = (\eta)_\infty$, para cada $i \in I$, existe uma função meromorfa g_i em U_i , tal que:

$$\Lambda_0|_{U_i} = \rho_i \frac{\Omega_i}{T_i g_i} \quad \text{e} \quad \Lambda_\infty|_{U_i} = \rho_i \frac{\eta_i}{T_i g_i},$$

onde $\Omega_i = \Omega|_{U_i}$ e $\eta_i = \eta|_{U_i}$, respectivamente. Assim, dado $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$, \mathcal{F}_α é gerada pela 1-forma meromorfa fechada

$$(\Omega + \alpha\eta)|_{U_i} = \rho_i \frac{\omega_i + \alpha\eta_i}{T_i g_i}.$$

□

Agora, por [24], podemos dar condições necessárias para ter uma família de formas logarítmicas.

Corolário 6.7. Sob as condições da proposição IX, se $H^1(X, \mathbb{C}) = 0$ e $H^1(X, \mathcal{O}^*)$ é livre de torção, então $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ é gerado por 1-formas logarítmicas. Em particular, se $\#I_p(\mathcal{P}) \geq 2$ então existem $\lambda \in \mathbb{C}^*$ e $\mu \in \mathbb{C}$ tais que $I_p(\mathcal{P}) = \lambda\mathbb{Q} + \mu$.

Prova: Pela proposição IX, dado $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$, \mathcal{F}_α é gerada pela 1-forma meromorfa fechada $\Lambda_0 + \alpha\Lambda_\infty$. Como $H^1(X, \mathbb{C}) = 0$ e $H^1(X, \mathcal{O}^*)$ é livre de torção, então seguindo a prova do lema 3.1 em [24], existem uma cobertura por abertos $\{U_i\}_{i \in I}$ de X e funções $\tilde{T}_i \in \mathcal{O}(U_i)$ tais que

$$\Lambda_0|_{U_i} := \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i \frac{d\tilde{T}_i}{\tilde{T}_i},$$

$$\Lambda_\infty|_{U_i} := \sum_{1 \leq i \leq n} \mu_i \frac{d\tilde{T}_i}{\tilde{T}_i},$$

onde $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ e $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{C}^n$, não todos nulos. Logo,

$$\Lambda_\alpha|_{U_i} = \sum_{1 \leq i \leq n} (\lambda_i + \alpha\mu_i) \frac{d\tilde{T}_i}{\tilde{T}_i}$$

representa \mathcal{F}_α , para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$.

□

Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{C}}}$ um pencil em X , onde \mathcal{F}_α é dada por uma cobertura por abertos $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ de X e é representada pela 1-forma holomorfa $\omega_i + \alpha\eta_i$ em U_i . Lembremos, pela definição de curvatura, que dado $i \in I$ podemos encontrar uma única 1-forma meromorfa θ_i em U_i tal que:

1. $d\omega_i = \theta_i \wedge \omega_i$ e $d\eta_i = \theta_i \wedge \eta_i$, em U_i ;
2. $\theta_i - \theta_j = \frac{dg_{ij}}{g_{ij}}$, em $U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \emptyset$.

Além disso,

$$\theta_i - \theta_j = \frac{dg_{ij}}{g_{ij}}, \quad \text{em } U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \emptyset.$$

Assim podemos definir o **conjunto polar** do pencil, $P(\mathcal{P})$, como:

$$P(\mathcal{P})|_{U_i} := (\theta_i)_\infty$$

Logo, como consequência imediata da proposição IX e do corolário 6.7 temos os seguintes corolários.

Corolário 6.8. Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \bar{\mathbb{C}}}$ um pencil flat em X . Suponha que o conjunto polar $P(\mathcal{P})$ tem cruzamentos normais, e $P(\mathcal{P}) \otimes N_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}_X$, então \mathcal{P} é gerado por 1-formas meromorfas fechadas.

Prova: Como \mathcal{P} é flat então toda componente de $P(\mathcal{P})$ é invariante pelo pencil. Logo a prova é análoga a proposição IX. \square

Corolário 6.9. Sob as hipóteses do corolário 6.8, suponha ainda que $H^1(X, \mathbb{C}) = 0$ e $H^1(X, \mathcal{O}^*)$ é livre de torsão. Então \mathcal{P} é gerado por 1-formas logarítmicas.

Bibliografia

- [1] W. Barth, C. Peters, and A. Van de Ven. *Compact complex surfaces*, volume 4 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [2] M. Brunella. Feuilletages holomorphes sur les surfaces complexes compactes. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 30(5):569–594, 1997.
- [3] M. Brunella. Some remarks on indices of holomorphic vector fields. *Publ. Mat.*, 41(2):527–544, 1997.
- [4] M. Brunella. *Birational geometry of foliations*. Publicações Matemáticas do IMPA. [IMPA Mathematical Publications]. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2004.
- [5] O. Calvo-Andrade. Irreducible components of the space of holomorphic foliations. *Math. Ann.*, 299(4):751–767, 1994.
- [6] O. Calvo Andrade. *El espacio de foliaciones holomorfas de codimensión uno*, volume 2 of *Monografías del Seminario Iberoamericano de Matemáticas [Monographs of the Seminario Iberoamericano de Matemáticas]*. Instituto Interuniversitario de Estudios de Iberoamerica y Portugal, Tordesillas, 2003.
- [7] C. Camacho and P. Sad. *Pontos singulares de equações diferenciais analíticas*. 16º Colóquio Brasileiro de Matemática. [16th Brazilian Mathematics Colloquium]. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 1987.
- [8] D. Cerveau. Théorèmes de type Fuchs pour les tissus feuilletés. *Astérisque*, (222):49–92, 1994. Complex analytic methods in dynamical systems (Rio de Janeiro, 1992).
- [9] D. Cerveau. Pinceaux linéaires de feuilletages sur $\mathbb{CP}(3)$ et conjecture de Brunella. *Publ. Mat.*, 46(2):441–451, 2002.
- [10] D. Cerveau and A. Lins Neto. Irreducible components of the space of holomorphic foliations of degree two in $\mathbb{CP}(n)$, $n \geq 3$. *Ann. of Math. (2)*, 143(3):577–612, 1996.
- [11] D. Cerveau and J.-F. Mattei. *Formes intégrables holomorphes singulières*, volume 97 of *Astérisque*. Société Mathématique de France, Paris, 1982. With an English summary.

- [12] H. Dulac. Détermination et intégration d'une certaine classe d'équations différentielles ayant pour point singulier un centre. *Bull. des Sc. Math*, 32, 1908.
- [13] É. Ghys. Feuilletages holomorphes de codimension un sur les espaces homogènes complexes. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 5(3):493–519, 1996.
- [14] É. Ghys. À propos d'un théorème de J.-P. Jouanolou concernant les feuilles fermées des feuilletages holomorphes. *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)*, 49(1):175–180, 2000.
- [15] X. Gómez-Mont. Integrals for holomorphic foliations with singularities having all leaves compact. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 39(2):451–458, 1989.
- [16] X. Gómez-Mont and A. Lins Neto. Structural stability of singular holomorphic foliations having a meromorphic first integral. *Topology*, 30(3):315–334, 1991.
- [17] P. Griffiths and J. Harris. *Principles of algebraic geometry*. Wiley Classics Library. John Wiley and Sons Inc., New York, 1994. Reprint of the 1978 original.
- [18] R. C. Gunning. *Introduction to holomorphic functions of several variables. Vol. II*. The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series. Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Monterey, CA, 1990. Local theory.
- [19] T. Hayashida and M. Nishi. Existence of curves of genus two on a product of two elliptic curves. *J. Math. Soc. Japan*, 17:1–16, 1965.
- [20] J. S. Il'jašenko. The appearance of limit cycles under a perturbation of the equation $dw/dz = -R_z/R_w$, where $R(z, w)$ is a polynomial. *Mat. Sb. (N.S.)*, 78 (120):360–373, 1969.
- [21] G. A. Jones and D. Singerman. *Complex functions*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987. An algebraic and geometric viewpoint.
- [22] J. P. Jouanolou. *Équations de Pfaff algébriques*, volume 708 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1979.
- [23] K. Lamotke. The topology of complex projective varieties after S. Lefschetz. *Topology*, 20(1):15–51, 1981.
- [24] S. Licanic. Logarithmic foliations on compact algebraic surfaces. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)*, 31(1):113–125, 2000.
- [25] A. Lins Neto. Exceptional families of foliations and the Poincaré problem. Preprint IMPA, www.preprint.impa.br, 2002.
- [26] A. Lins Neto. Some examples for the Poincaré and Painlevé problems. *Ann. Sci. École Norm*, 4(35):231–266, 2002.
- [27] A. Lins Neto. Curvature of pencil of foliations. *Astérisque*, (296):167–190, 2004.

- [28] A. Lins Neto. *Componentes Irredutíveis dos Espaços de Folheações*. Publicações Matemáticas do IMPA. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2007. 26° Colóquio Brasileiro de Matemática.
- [29] H. Movasati. On deformation of foliations with a center in the projective space. *An. Acad. Brasil. Ciênc.*, 73(2):191–196, 2001.
- [30] H. Movasati. Abelian integrals in holomorphic foliations. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 20(1):183–204, 2004.
- [31] H. Movasati. Center conditions: rigidity of logarithmic differential equations. *J. Differential Equations*, 197(1):197–217, 2004.
- [32] H. Movasati. Center conditions: rigidity of logarithmic differential equations. *J. Differential Equations*, 197(1):197–217, 2004.
- [33] J. Pereira and L. Pirio. The classification of exceptional cdql webs on compact complex surfaces. *International Mathematics Research Notices*, 2008.
- [34] J. V. Pereira. Vector fields, invariant varieties and linear systems. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 51(5):1385–1405, 2001.
- [35] J. V. Pereira. *Integrabilidade de folheações holomorfas*. Publicações Matemáticas do IMPA. [IMPA Mathematical Publications]. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2003. 24° Colóquio Brasileiro de Matemática. [24th Brazilian Mathematics Colloquium].
- [36] H. Poincaré. Sur l’integration algébrique des équations différentielles du premier ordre et du premier degré. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 5(11):161–169, 1891.
- [37] A. Seidenberg. Reduction of singularities of the differential equation $A dy = B dx$. *Amer. J. Math.*, 90:248–269, 1968.
- [38] I. R. Shafarevich. *Basic algebraic geometry. 1*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1994. Varieties in projective space, Translated from the 1988 Russian edition and with notes by Miles Reid.
- [39] I. R. Shafarevich. *Algebraic Geometry II*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Springer-Verlag, 1996.
- [40] J. H. Silverman. *The arithmetic of elliptic curves*, volume 106 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, Dordrecht, second edition, 2009.
- [41] I. Stewart and D. Tall. *Algebraic number theory and Fermat’s last theorem*. A K Peters Ltd., Natick, MA, third edition, 2002.
- [42] A. Walfisz. Über die Wirksamkeit einiger Abschätzungen trigonometrischer Summen. *Acta Arith.*, 4:108–180, 1958.

- [43] Y. Yomdin. The structure of strata $\mu = \text{const}$ in a critical set of a complete intersection singularity. In *Singularities, Part 2 (Arcata, Calif., 1981)*, volume 40 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 663–665. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983.