Problemas de Neumann para sistemas parabólicos quasilineares

Juan González
Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Orientador: Hermano Frid

Conteúdo

Agradecimentos

Agradeço a meu orientador Hermano Frid por me apresentar o mundo EDP e incentivar-me para continuar nessa área meus estudos de posgraduação. Pela orientação, ajuda com duvidas acadêmicas, conversas que foram um apoio fundamental em momentos difíceis e por compartilhar um interessante tema de pesquisa.

Aos membros da banca: Felipe Linares, Henrique Versieux, Jean Carlos da Silva, Marcelo dos Santos e Wladimir Neves. Especialmente a Henrique Versieux pela grande ajuda na revisão do texto e também a meu *irmão acadêmico* Jean Carlos da Silva, por um sem número de conversas matemáticas. Aqui quero agradecer também ao professor Vladimir Shelukhin pela colaboração na construção desta tese. A quem me encorajou para estar no IMPA, Sergio Plaza e Rafael Labarca por seu forte apoio.

Ao IMPA, pela incrível instituição que é, que nos permite ter um ótimo lugar de estudo. Ás gratas pessoas que conheci aqui, especialmente a Pablo e A formação: Alvaro, Cristián, Gerardo, Pancho e Pedro. Com eles teve muitas e ótimas conversas.

Dar gracias a mis padres, Hernan y Maria, mi hermana Macarena y mi abuela. Por entender sin cuestionar los años en distancia y siempre motivarme a continuar. También agradezco a Dalia, mi pie a tierra, compañera y amiga. Gracias por tu infinito apoyo y amor en estos años.

Finalmente, agradeço á CAPES pelo financiamento via o projeto PEC-PG.

Introdução

Sistemas parabólicos quasilineares, aparecem na modelagem de vários fenômenos físicos; ver livros de Courant, Hilbert [4] e de Ladyzhenskaya [8], para vários exemplos de aplicação. Nesta tese, são estudados sistemas quasilineares parabólicos com condição de bordo não linear. Tais sistemas têm aplicação em sedimentação de suspensões polidispersas em fluidos; veja [2]. Estes sistemas são da forma

$$u_t + f(u)_x = (B(u)u_x)_x \quad \text{em} \quad Q_T = \Omega \times [0,T] = (-1,1) \times [0,T], \tag{0.1}$$

onde

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B(u) = \begin{pmatrix} B_{11}(u) & B_{12}(u) \\ 0 & B_{22}(u_2) \end{pmatrix}.$$

Dado um $\theta \geq 0$, consideramos as seguintes condições de bordo não lineares e a condição inicial

$$f(u) - B(u)u_x = \pm\theta B(u)(u - u^{\pm}(t)) \quad \text{quando} \quad x = \pm 1 \quad \text{e} \quad u(x,0) = u_0(x) \quad \text{em } \Omega. \tag{0.2}$$

No ano 2003, considerando condição de bordo periódica, Frid e Shelukhin em [6] provam existência e unicidade de solução $u \in H^{2+\beta,1+\beta/2}(\mathbb{R} \times [0,T])$ de (0.1) com condição inicial $u_0(x)$ (Onde, $H^{2+\beta,1+\beta/2}(\mathbb{R} \times [0,T])$ é o espaço de funções as quais suas segundas derivadas no espaço e sua primeira derivada no tempo são Hölder contínuas com exponente β; veja seção 1.1). No ano 2005, os mesmos autores, consideraram o problema (0.1) com condições de bordo linear

$$\pm\delta u_x + u = u^{\pm} \quad \text{quando} \quad x = \pm 1 \quad \text{e} \quad u(x,0) = u_0(x) \quad \text{em } \Omega, \tag{0.3}$$

onde $\delta \geq 0$. Os autores também mostraram existência de solução única em $H^{2+\beta,1+\beta/2}(\bar{Q}_T)$. Um ano mais tarde, Berres, Bürger e Frid em [2], consideraram o problema (0.1) e (0.2). Neste ultimo trabalho, os autores provaram a existência e unicidade de solução clássica em Q_T, com $u \in H^{2+\beta,1+\beta/2}(Q_T)$ e $u, u_x \in H^{\beta,\beta/2}(\bar{Q}_T)$, quando $\theta > 0$. Também se estuda o caso $\theta = 0$, conseguindo existência de solução fraca em certo sentido, perdendo a unicidade.

O primeiro objetivo nesta tese é provar existência e unicidade de solução clássica em $H^{2+\beta,1+\beta/2}(\bar{Q}_T)$ para (0.1) e (0.2) no caso $\theta = 0$. O segundo objetivo, é estender a técnica utilizada para provar existência e unicidade de solução radial u do sistema

$$u_{1t} + \operatorname{div}(f_1(u)v) = \operatorname{div}(B_{11}(u)\nabla u_1) + \operatorname{div}(B_{12}(u)\nabla u_2), \tag{0.4}$$

$$u_{2t} + \operatorname{div}(f_2(u)v) = \operatorname{div}(B_{22}(u)\nabla u_2), \tag{0.5}$$

em $Q_T = \Omega \times [0, T]$, para $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : l_1 \leq |x| \leq l_2\}$. Com condição de bordo

$$(f_1(u)v - B_{11}(u)\nabla u_1 - B_{12}(u)\nabla u_2) \cdot \vec{n} = \theta[B_{11}(u)(u_1 - \psi_1) + B_{12}(u)(u_2 - \psi_2)], \tag{0.6}$$

$$(f_2(u)v - B_{22}(u)\nabla u_2) \cdot \vec{n} = \theta B_{22}(u_2)(u_2 - \psi_2). \tag{0.7}$$

Onde supomos que as condições iniciais e de bordo são funções radiais. O problema para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ arbitrário, fica em aberto.

Para provar a existência de solução em $H^{2+\beta,1+\beta/2}(\bar{Q}_T)$ de (0.1) e (0.2), utilizamos o teorema de ponto fixo de Leray-Schauder [11]. Nossas ideias são baseadas no trabalho clássico de Ladyzhenskaya e Ural'ceva [10]. Nesse trabalho as autoras, consideraram equações parabólicas da forma

$$u_t - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x, u, u_{x_k}) u_{x_j})_{x_i} + a(x, u, u_{x_k}) = 0, \tag{0.8}$$

com condição de bordo $u|_{S_T} = \psi$ e condição inicial $u(x, 0) = u_0(x)$, e provaram existência de soluções clássicas em $H^{2+\beta,1+\beta/2}(\bar{Q}_T)$. Observamos que, o trabalho referido acima se inspirou nas tecnicas introduzidas por De Giorgi [5] e Moser [12], para resolver problemas elíticos. Uma das ideias importantes também presente nesse trabalho, é introduzir certo tipo de classe de funções definidas a partir de estimativas obtidas para soluções de equações parabólicas e demonstrar a imersão da classe no espaço das funções Hölder contínuas.

O Teorema de Leray-Schauder foi introduzido para mostrar existência de soluções para problemas elíticos quasilineares. Este teorema nos permite mostrar existência de pontos fixos para aplicações completamente contínuas em espaços de dimensão infinita, sem que seja necessária a invariância do domínio. A grande dificuldade para se utilizar o Teorema de Leray-Schauder está em provar a existência de estimativas a priori de uma solução suave do problema a ser estudado.

No primeiro capítulo desta tese, são apresentadas ferramentas para provar existência e unicidade de nosso problema. A referência central do capítulo é o livro de Ladyzhenskaya, Solonnikov e Ural'ceva [9]. Começamos o capítulo definindo os espaços utilizados em nossa teoria, e enunciando o Teorema de Leray-Schauder. Também definiremos uma classe de funções imersa nos espaços de

Hölder. Em seguida enunciamos propriedades das soluções de problemas lineares, que são aplicadas a problemas quasilineares onde as não linearidades são tratadas como dados conhecidos.

No segundo capítulo, estudamos o problema (0.1),(0.2) para $\theta = 0$. Primeiro provamos que efetivamente existe uma única solução em $H^{2+\beta,1+\beta/2}(\bar{Q}_T)$, para $\theta > 0$, com norma de Hölder uniforme com respeito ao parâmetro θ. Isso nos permite obter uma solução clássica do problema. Para cada valor de θ temos unicidade, que é provada por meio do lema de Gronwall. As estimativas no espaço $H^{2+\beta,1+\beta/2}(\bar{Q}_T)$ são inspiradas no trabalho de Frid e Shelukhin em [7]. Para estimar as normas de Hölder em $H^{\alpha,\alpha/2}(\bar{Q}_T)$ de u se trabalha primeiro na segunda equação do sistema (0.1), onde há menor interação entre as componentes de u. Para obter tais estimativas nos baseamos no estudo feito no livro de Ladyzhenskaya, Solonikov e Ural'ceva [9]. Para provar que u_1 é Hölder contínua precisamos estimar a norma $L_4(Q_T)$ de u_{2x}. Uma das dificuldades que aparece para obter a última estimativa é a manipulação na condição de bordo. Para lidar com tal dificuldade Berres, Bürger e Frid em [2] introduziram uma discretização no tempo, onde se resolve em cada passo no tempo o problema (0.1),(0.3) com condições de bordo linearizadas. Entretando perde-se a suavidade das segundas derivadas no bordo. Na hora de estudar quando $\theta = 0$, também provaram existência de solução fraca em certo sentido, onde perde-se a unicidade. Nesta tese adotamos uma estrategia diferente. Primeiramente, seguindo as ideias de Frid-Shelukhin [7], provamos o principio de regiões positivamente invariantes; isto é mostramos que existe uma região Δ onde para qualquer dado inicial contido em Δ a solução u de (0.1), (0.2) pertence a Δ para todo $t > 0$; veja [3, 14, 13]. Limitamos u_x em $L_2(Q_T)$ e em seguida obtemos estimativa de u_2 no espaço de Hölder $H^{\alpha,\alpha/2}(\bar{Q}_T)$. Introduzimos uma primitiva de u_2 e vemos que ela satisfaz um problema parabólico linear, fato que nos permite verificar uma regularidade para a primitiva de u_2. Obtemos assim a regularidade necessaria para u_2. Que permite provar estimativa de u_1 no espaço de Hölder $H^{\alpha,\alpha/2}(\bar{Q}_T)$. Com as mesmas ideias obtemos limitações para as derivadas de u. Uma vez que conseguimos as estimativas uniformes, aplicamos o Teorema de Leray-Schauder e obtemos solução para $\theta > 0$. Por meio de limite, por compacidade dos espaço de Hölder, obtemos solução em $\theta = 0$, conseguindo unicidade em cada um dos valores de θ.

No terceiro capítulo, consideramos os problemas com variável espacial em $\Omega \in \mathbb{R}^n$. Em $Q_T = \Omega \times [0, T]$, tratamos o problema (0.4)-(0.7), com condição inicial dada. Nos restringimos em regiões $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : l_1 \leq |x| \leq l_2\}$. Para tais regiões procuramos soluções radiais e assim baixamos a ordem da dimensão do problema e temos um caso 1-dimensional, onde é possível estender os resultados do Capítulo 2. Tratamos também o caso $\theta = 0$. Notemos que não pode ser utilizada a técnica do segundo capítulo porque estamos em dimensão n.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo introduziremos as ferramentas, com as quais provaremos existência e unicidade de soluções clássicas dos sistemas quasilineares parabólicos considerados. Inspirados nos resultados do livro de Ladyzhenskaya, Solonnikov e Ural'ceva [9]. O sentido deste capítulo é simplesmente enunciar os resultados. A maioria estão provados no livro de Ladyzhenskaya, Solonnikov e Ural'ceva [9] e em caso contrário são dadas as citações das provas.

1.1 Espaços

Estabeleçamos uma base para trabalhar na frente. Os domínios onde estão definidas as soluções e os coeficientes dos diferentes problemas que vamos a estudar são subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Em $\mathbb{R}^n$ consideramos o produto interno usual e dados dos pontos em $\mathbb{R}^n$ denotamos-lhe por $x \cdot y$. Alem disso quando escrevemos $|\cdot|$ nos referimos à norma euclideana que provém do produto interno que estamos considerando em $\mathbb{R}^n$.

Dada um função u, denotamos seu gradiente por u_x ou por ∇u. Seu divergente por $\operatorname{div} u$. No caso que derivamos com respeito ao tempo usamos a notação u_t. Agora nas derivadas de ordem mais alta, denotamos a Hessiana da função u por $\operatorname{Hess} u$ e consideramos a norma

$$|\operatorname{Hess} u| = |u_{xx}| = \left(\sum_{i,j=1}^{n} u_{x_i x_j}^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

De maneira usual denotamos seu traço ou laplaciano de u, como Δu. Em geral para denotar qualquer derivada de ordem j escrevemos $D^j u$. Se derivamos com respeito ao tempo ou ao espaço botamos uma t ou uma x respetivamente, por exemplo se consideramos as r-ésimas derivadas no tempo e as s-ésimas derivadas no espaço escrevemos $D_t^r D_x^s u$.

Ao longo do texto os domínios são subconjuntos Ω abertos, conexos e limitados de $\mathbb{R}^n$. Dado um $T > 0$, definimos $Q_T = \Omega \times (0, T)$, i.e. o cilindro de base Ω e altura T. O bordo de Ω será denotado por S e a superfície lateral de Q_T é definida como o conjunto $S_T = S \times [0, T]$. A base do cilindro Q_T é definido por $\Gamma_0 = \{(x,t) : x \in \bar{\Omega}, t = 0\}$ e o bordo dela denotado por S_0.

Dado um $x_0 \in \mathbb{R}^n$, uma bola arbitrária de raio ρ é chamada de K_ρ e para $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times [0, T]$, temos que um cilindro arbitrário é definido como $Q(\rho, \tau) = K_\rho \times (t_0, t_0 + \tau)$. Para uma bola K_ρ e um domínio Ω definimos $\Omega_\rho = \Omega \cap K_\rho$.

Os espaços $L_p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$, são os espaços de funções tais que na potência p são integráveis no sentido de Lebesgue, com a norma

$$\|u\|_{p,\Omega} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

que faz ele completo. Em Q_T consideramos o espaço de Banach $L_{p,q}(Q_T)$ com norma

$$\|u\|_{p,q,Q_T} = \left(\int_0^T \left(\int_\Omega |u(x,t)|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} dt \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Trabalharemos também com espaços de Sobolev, onde o sentido de derivação fraca é o usual que existe na literatura. Dados, $l \geq 0$ inteiro e $p \geq 1$, denotamos por $W_p^l(\Omega)$ ao espaço de Banach de funções com potência p integrável e derivada fraca da ordem l com potência p integrável. Dotados com norma

$$\|u\|_{p,\Omega}^{(l)} = \sum_{j=0}^{l} \sum_{(j)} \|D^j u\|_{p,\Omega},$$

onde $\sum_{(j)}$ percorre todas as derivadas de ordem j. Analogamente no domínio Q_T consideramos o espaço de Sobolev $W_p^{2l,l}(Q_T)$ como o conjunto de funções com derivadas $D_t^r D_x^s u$ integráveis na potência p, até a ordem $2r + s \leq 2l$. Munido com a norma

$$\|u\|_{p,Q_T}^{(2l)} = \sum_{j=0}^{2l} \sum_{(j)} \|D_t^r D_x^s u\|_{p,Q_T}.$$

Definimos o espaço $V_2^{1,0}(Q_T)$, como o conjunto de funções em $L_2(Q_T)$ contínuas com respeito a t na norma de $L_2(\Omega)$ e que além disso satisfazem

$$|u|_{Q_T} = \max_t \|u(x,t)\|_{2,\Omega} + \|u_x\|_{2,Q_T} < \infty.$$

Norma que faz completo o espaço.

Dizemos que uma função $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ satisfaz a condição de Hölder em $\bar{\Omega}$ com exponente α, para $0 < \alpha < 1$ se

$$\langle u \rangle_{\Omega}^{(\alpha)} = \sup_{x, x' \in \Omega} \frac{|u(x) - u(x')|}{|x - x'|^{\alpha}} < \infty.$$

A definição faz sentido para bordos suaves por partes, hipótese satisfeita sempre neste trabalho. Adotando como convenção que $|u|_{\Omega}^{(0)} = \langle u \rangle_{\Omega}^{(0)} = \sup_{\bar{\Omega}} |u(x)|$ e denotando a parte inteira do número l por $[l]$. Definimos os espaços de Hölder $H^{l}(\bar{\Omega})$ com exponente não inteiro $l > 0$, como o conjunto de funções $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ tais que

$$|u|_{\Omega}^{(l)} = \langle u \rangle_{\Omega}^{(l)} + \sum_{j=0}^{[l]} \langle u \rangle_{\Omega}^{(j)} < \infty, \tag{1.1}$$

onde

$$\langle u \rangle_{\Omega}^{(j)} = \sum_{(j)} |D_x^{j} u|_{\Omega}^{(0)} \quad \text{e} \quad \langle u \rangle_{\Omega}^{(l)} = \sum_{([l])} \langle D_x^{[l]} u \rangle_{\Omega}^{(l-[l])}.$$

Como vamos trabalhar em problemas parabólicos, precisamos estender a noção de espaço de Hölder para funções definidas sobre cilindros. Considerando novamente como convenção que $|u|_{Q_T}^{(0)} = \langle u \rangle_{Q_T}^{(0)} = \sup_{Q_T} |u(x,t)|$ e para $l > 0$ não inteiro, definimos o espaço de Hölder $H^{l,l/2}(\bar{Q}_T)$ como o conjunto de funções $u : \bar{Q}_T \to \mathbb{R}$ tais que

$$|u|_{Q_T}^{(l)} = \langle u \rangle_{Q_T}^{(l)} + \sum_{j=0}^{[l]} \langle u \rangle_{Q_T}^{(j)} < \infty, \tag{1.2}$$

com

$$\langle u \rangle_{Q_T}^{(j)} = \sum_{(2r+s=j)} |D_t^{r} D_x^{s} u|_{Q_T}^{(0)} \quad \text{e} \quad \langle u \rangle_{Q_T}^{(l)} = \langle u \rangle_{x,Q_T}^{(l)} + \langle u \rangle_{t,Q_T}^{(l/2)}.$$

Onde na variável espacial, temos que

$$\langle u \rangle_{x,Q_T}^{(l)} = \sum_{(2r+s=[l])} \langle D_t^{r} D_x^{s} u \rangle_{x,Q_T}^{(l-[l])} \quad \text{e} \quad \langle u \rangle_{x,Q_T}^{(\alpha)} = \sup_{(x,t),(x',t) \in \bar{Q}_T} \frac{|u(x,t) - u(x',t)|}{|x - x'|^{\alpha}}, \text{ se } 0 < \alpha < 1$$

e no caso da variável temporal temos que

$$\langle u \rangle_{t,Q_T}^{(l/2)} = \sum_{0 < l-2r-s < 2} \langle D_t^{r} D_x^{s} u \rangle_{t,Q_T}^{(\frac{l-2r-s}{2})} \quad \text{e} \quad \langle u \rangle_{t,Q_T}^{(\alpha)} = \sup_{(x,t),(x,t') \in \bar{Q}_T} \frac{|u(x,t) - u(x,t')|}{|t - t'|^{\alpha}}, \text{ se } 0 < \alpha < 1.$$

Em geral, dizemos que $u \in H^{l}(\Omega)$ se $u \in H^{l}(\bar{M})$ para qualquer M tal que $\bar{M} \subset \Omega$. Analogamente $u \in H^{l,l/2}(Q_T)$ se $u \in H^{l,l/2}(\bar{M}_T)$ para qualquer M_T tal que $\bar{M}_T \subset Q_T$. Dada uma função $u = (u_1, \ldots, u_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$, dizemos que $u \in H^{l}(\bar{\Omega})$ se somente se $u_i \in H^{l}(\bar{\Omega})$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. A mesma ideia se aplica para os outros espaços definidos. De maneira usual, denotamos por $C^l(\bar{\Omega})$ e $C^{2,1}(\bar{Q}_T)$, respeitavemente, como o conjunto de funções com derivadas da ordem l contínuas em $\bar{\Omega}$ e o conjunto de funções com u_x, u_{xx} e u_t contínuas em $\bar{Q}_T$. Agora, dado um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, temos que uma função teste sobre Ω é uma função $\zeta \in C^1(\bar{\Omega})$ e que tem suporte compacto em Ω e $0 \leq \zeta \leq 1$.

Como vamos trabalhar com conjuntos limitados e problemas de fronteira, temos que estabelecer bem os significados de uma função definida no bordo pertencer a algum espaço. Para tal objetivo consideremos um ponto $x_0 \in S$. Chamamos um sistema de coordenadas $(y_1, \ldots, y_n)$ com origem em x_0 a um sistema de coordenadas de $\mathbb{R}^n$ trasladado a x_0 tal que conecta os pontos y com os $x \in \mathbb{R}^n$ por meio de uma matriz ortogonal $A = (a_{ik})$. Explicitamente, cada y escreve-se da forma $y_i = \sum_k a_{ik}(x_k - x_{0k})$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$ com a propriedade de y_n ter a mesma direção do normal exterior a S em x_0, o qual será denotado como $\vec{n} = \vec{n}(x_0)$.

Dizemos que $\Omega \in H^l$ quando o bordo $S \in H^l$, para $l > 1$. É dizer que dado qualquer $x_0 \in S$ existe um raio $\rho > 0$ e uma bola K_ρ tal que $S_\rho = S \cap K_\rho$ é um conjunto conexo. O sistema de coordenadas $(y_1, \ldots, y_n)$ tem a propriedade de $y_n = \omega(y_1, \ldots, y_n)$, onde ω é uma função de classe H^l em $\bar{D}$. Onde $\bar{D}$ é a projeção à superfície $y_n = 0$ do conjunto D, com D é Ω_ρ expressado no sistema de coordenadas $(y_1, \ldots, y_n)$. Em outras palavras temos que localmente o bordo S pode ser descrito pelo gráfico de uma função, definida em algum domínio de $\mathbb{R}^{n-1}$, a qual é Hölder em seu domínio. Com a ideia anterior, podemos definir o espaço $H^l(S)$, onde $S \in H^{l_1}$ e $l \leq l_1$. Como as funções ϕ tais que como função de $y_1, \ldots, y_{n-1}$ são um elemento de $H^l(\bar{D})$, com norma a maior norma $|\phi|_D^{(l)}$ em cada ponto x_0.

1.2 Alguns resultados

Agora apresentamos alguns resultados básicos, mas muito úteis. Por exemplo, a desigualdade de ε-Cauchy, que permite dados $a, b \in \mathbb{R}^n$ limitar para todo $\varepsilon > 0$ da forma

$$a \cdot b \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2. \tag{1.3}$$

Também utilizamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\left| \int_\Omega u \cdot v dx \right| \leq \left(\int_\Omega |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.4}$$

para qualquer par de funções em $L_2(\Omega)$.

Lembremos da continuidade do traço. Dada qualquer função $u \in W_1^1(\Omega)$ e Ω suave por partes. Temos que existe uma constante $c = c(\Omega)$ com

$$\int_S |u| ds \leq c \int_\Omega (|\nabla u| + |u|) dx. \tag{1.5}$$

Agora, usando a desigualdade de ε-Cauchy e (1.5) podemos provar o seguinte resultado

Lema 1.2.1. *Sejam $u \in C^2(\bar{\Omega})$ tal que $|u|_\Omega^{(\alpha)} \leq c$ com $\alpha \in (0,1)$, $\Omega \in C^2$, $s \geq 0$ e c independente de u. Então existe uma constante c_1 independente de u tal que para qualquer função teste ζ em K_ρ*

$$\int_{\Omega_\rho} |\nabla u|^{2s+2} \zeta^2 dx \leq c_1 \rho^\alpha \int_{\Omega_\rho} |\nabla u|^{2s-2} |u_{xx}|^2 \zeta^2 + |\nabla u|^{2s} |\nabla \zeta|^2 dx. \tag{1.6}$$

Uma versão com hipóteses mais fracas se encontra em [9], basicamente a prova é a mesma do caso acima, mas com as hipóteses de esta versão basta para nosso trabalho.

Dado que as soluções que procuramos são Hölder contínuas, precisamos conhecer propriedades do espaço de Hölder. Podemos observar que os espaços de Hölder são espaços de Banach. Usando o Teorema de Arzelà-Ascoli temos o seguinte resultado de compacidade:

Lema 1.2.2. *Dados $\alpha > \beta > 0$ temos que $H^{\alpha,\alpha/2}(\bar{Q}_T)$ está compactamente contido em $H^{\beta,\beta/2}(\bar{Q}_T)$.*

Em [1] estão os detalhes da prova, assim como também o fato de ser espaço de Banach este espaço e os espaços de Sobolev.

Também umas propriedades utilizadas ao longo do trabalho são os fatos que se $u \in H^{\alpha,\alpha/2}(\bar{Q}_T)$ e $v \in H^{\beta,\beta/2}(\bar{Q}_T)$ temos que, para $\delta_1 = \max\{\alpha, \beta\}$ o produto $uv \in H^{\delta_1,\delta_1/2}(\bar{Q}_T)$. Se temos uma função $h : U \to U$ tal que $h \in H^{l,l/2}(U)$ onde $U \subset \mathbb{R}$. Podemos dizer sempre e quando a composta tenha sentido, que para o produto dos exponentes $\delta_2 = \alpha l$ a função $w = h(u)$ é tal que $w \in H^{\delta_2,\delta_2/2}(\bar{Q}_T)$.

Como também queremos provar unicidade das soluções, enunciamos aqui a ferramenta com que provaremos unicidade, o Lema de Gronwall.

Lema 1.2.3. *Seja $u : [0,T] \to \mathbb{R}$ função não negativa e diferenciável, tal que satisfaz*

$$u'(t) \leq \phi(t) u(t) + \psi(t),$$

onde ϕ e ψ são não negativas e integráveis em $[0,T]$ então

$$u(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s) ds} \left[u(0) + \int_0^t \psi(s) ds \right].$$

1.2.1 Teorema de Leray-Schauder

A ferramenta utilizada no trabalho para provar existência de soluções para os problemas parabólicos é o Teorema de Leray-Schauder. Basicamente permite dizer quando temos um ponto fixo em aplicações completamente contínuas. Assim, a ideia é criar aplicações completamente contínuas, ligadas à solução de algum problema parabólico.

Seja $\mathcal{H}$ espaço de Banach, definimos $\mathcal{E} = \mathcal{H} \times [0,1]$ e do mesmo jeito, dado $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ aberto, limitado e conexo definimos $\bar{\mathcal{M}}_1 = \bar{\mathcal{M}} \times [0,1]$.

Teorema de Leray Schauder. *Consideremos uma aplicação $\Phi : \bar{\mathcal{M}}_1 \to \mathcal{H}$, onde $\mathcal{M}$ tem as hipóteses de acima. A equação*

$$\Phi(u,\tau) = u \tag{1.7}$$

tem ao menos uma solução em $\mathcal{M}$ para todo $\tau \in [0,1]$ se

1. *$\Phi(v,\tau)$ é completamente contínuo sobre $\bar{\mathcal{M}}_1$.*

2. *$\Phi(v,\tau)$ é uniformemente contínuo com respeito a τ em $\bar{\mathcal{M}}_1$.*

3. *O bordo de $\mathcal{M}$ para cada $\tau \in [0,1]$, não contém soluções de (1.7).*

4. *Para $\tau = 0$, (1.7) tem em $\mathcal{M}$ um número finito de soluções com índice diferente de zero.*

Observação 1.2.1. *A condição 4, é satisfeita no caso de $\Phi(v,0)$ ter um único ponto fixo. Assim não é necessário ter que calcular o índice.*

O resultado, pode ser encontrado em [9] e apareceu no trabalho de Leray e Schauder [11], aí está a demonstração deste fato. Veremos nos próximos capítulos que a hipótese mais importante, pelo mesmo a mais difícil de provar, é que os pontos fixos não se encontram no bordo de $\mathcal{M}$. Por tal motivo é necessário provar estimativas a priori da solução.

1.3 Espaços $\mathcal{B}_2$

Para provar que uma função pertence a algum espaço de Hölder, é suficiente ver que satisfaz certas desigualdades integro-diferenciais. Tal classe de funções contém de forma natural, como veremos nos próximos capítulos, as soluções de equações tanto lineares como quasilineares.

Definição 1.3.1. *Dizemos que uma função* $u(x,t)$ *pertence à classe* $\mathcal{B}_2(Q_T, M, \gamma, r, \delta, \kappa)$ *se* $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$, $\|u\|_{\infty,Q_T} \leq M$ *e para* $w(x,t) = \pm u(x,t)$ *são satisfeitas as desigualdades*

$$\max_{t_0 \leq t \leq t_0+\tau} \|w^{(k)}(x,t_0)\|^2_{2,K_{\rho-\sigma_1\rho}} \leq \|w^{(k)}(x,t)\|^2_{2,K_\rho} + \gamma[(\sigma_1\rho)^{-2}\|w^{(k)}\|^2_{2,Q(\rho,\tau)} + \mu(k,\rho,\tau)^{\frac{2}{r}(1+\kappa)}] \quad (1.8)$$

e

$$|w^{(k)}|^2_{Q(\rho-\sigma_1\rho,\tau-\sigma_2\tau)} \leq \gamma\{[(\sigma_1\rho)^{-2} + (\sigma_2\tau)^{-1}]\|w^{(k)}\|^2_{2,Q(\rho,\tau)} + \mu(k,\rho,\tau)^{\frac{2}{r}(1+\kappa)}\}. \quad (1.9)$$

Onde $w^{(k)}(x,t) = \max\{w(x,t)-k, 0\}$, ρ *e* τ *são números positivos quaisquer,* σ_1 *e* $\sigma_2 \in (0,1)$. *A função* $\mu(k,\rho,\tau) = \int_{t_0}^{t_0+\tau}(\operatorname{mes} A_{k,\rho}(t))^{r/q}dt$ *com* $A_{k,\rho}(t) = \{x \in K_\rho : w(x,t) > k\}$. *E* M, γ, q, r, δ *e* κ *são números positivos fixos, com* q *e* r *satisfazendo*

$$\frac{1}{r} + \frac{n}{2q} = \frac{n}{4}. \quad (1.10)$$

O número k *é arbitrário com a condição que* $\max_{Q(\rho,\tau)} w(x,t) - k \leq \delta$.

Observação 1.3.1. *Para ter as desigualdades* (1.8) *e* (1.9) *é suficiente provar uma desigualdade da forma*

$$\begin{aligned} \|w^{(k)}\zeta(x,t_0+\tau)\|^2_{2,K_\rho} + \nu\|w_x^{(k)}\zeta\|^2_{2,Q(\rho,\tau)} &\leq \|w^{(k)}\zeta(x,t_0)\|^2_{2,K_\rho} \\ + \gamma_1\int_{Q(\rho,\tau)}|w^{(k)}|^2(\zeta_x^2 + \zeta|\zeta_t|)dxdt &+ \gamma_2\left[\int_{t_0}^{t_0+\tau}\left(\int_{A_{k,\rho}(t)}\zeta dx\right)^{\frac{r}{q}}dt\right]^{\frac{2}{r}(1+\kappa)}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

com as mesmas definições para cada um dos termos que aparecem na desigualdade e a função suave $\zeta = \zeta(x,t)$, *com* $0 \leq \zeta \leq 1$ *e igual a zero na superfície lateral de* $Q(\rho,\tau)$.

O resultado principal com respeito aos espaços $\mathcal{B}_2(Q_T, M, \gamma, r, \delta, \kappa)$ é que estão imersos em $H^{\alpha,\alpha/2}(Q_T)$ para algum $\alpha \in (0,1)$ determinado só pelos parâmetros de $\mathcal{B}_2$. Isto está completamente provado na seção 7 do capítulo II de [9], depois de um bom número de lemas encontramos o seguinte resultado na página 120 de [9]

Proposição 1.3.1. *Dada uma função* $u \in \mathcal{B}_2(Q_T, M, \gamma, r, \delta, \kappa)$ *existe um* $\alpha \in (0,1)$ *dependendo dos parâmetros de* $\mathcal{B}_2$ *tal que* $u \in H^{\alpha.\alpha/2}(Q_T)$.

Agora, notemos que com o resultado anterior não podemos dizer nada das propriedades da função no bordo. Para tal objetivo precisamos definir outro tipo de espaços $\mathcal{B}_2$ e novamente citar algum resultado de imersão. Para isto, usamos a desigualdade (1.11), mas agora incluindo regiões que contém o bordo de Ω.

Definição 1.3.2. *Dizemos que* $u \in \hat{\mathcal{B}}_2(\bar{Q}_T, M, \gamma, r, \delta, \kappa)$ *se temos que*

$$\|w^{(k)}\zeta(x,t_0+\tau)\|^2_{2,\Omega_\rho} + \nu\|w^{(k)}_x\zeta\|^2_{2,Q(\rho,\tau)\cap Q_T} \leq \|w^{(k)}\zeta(x,t_0)\|^2_{2,\Omega_\rho}$$
$$+\gamma_1\int_{Q(\rho,\tau)\cap Q_T}(\zeta_x^2+\zeta|\zeta_t|)|w^{(k)}|^2dxdt + \gamma_2\left[\int_{t_0}^{t_0+\tau}\left(\int_{A_{k,\rho}(t)}\zeta dx\right)^{\frac{r}{q}}dt\right]^{\frac{2}{r}(1+\kappa)}. \quad (1.12)$$

Onde agora os cilindros $Q(\rho,\tau)$ *têm centro em* $(x_0,t_0) \in \bar{Q}_T$ *e os* k *têm a condição que*

$$k \geq \max_{Q(\rho,\tau)\cap Q_T} w(x,t) - \delta \quad e \quad k \geq \max_{Q(\rho,\tau)\cap\Gamma_0} w(x,t).$$

Agora definimos $A_{k,\rho}(t) = \{x \in \Omega_\rho : w(x,t) > k\}$. *As funções testes são tais que* ζ *é nula na superfície lateral e na base de* $Q(\rho,\tau)$. *Os* q *e* r *satisfazem a condição* (1.10).

Agora sim temos um bom resultado para tal tipo de classe e as funções $H^{\alpha,\alpha/2}(\bar{Q}_T)$. Para ver uma prova, novamente citamos [9]. Tal tipo de resultado é ótimo para resolver os problemas que estudaremos, onde consideramos uma condição de bordo não linear. Em tal caso não sabemos se nossa função pertence ou não a algum espaço de Hölder no bordo. Só podemos utilizar a pertença da condição inicial.

Proposição 1.3.2. *Seja uma função* $u \in \hat{\mathcal{B}}_2(\bar{Q}_T, M, \gamma, r, \delta, \kappa)$ *tal que satisfaz a condição de Hölder com expoente* $\varepsilon > 0$ *na região* Γ_0. *Então* $u(x,t)$ *é Hölder contínua em* $\bar{Q}_T$, *para algum expoente* α *que depende dos parâmetros de* $\hat{\mathcal{B}}_2$, *de* ε *e de* $|u(x,0)|^{(\varepsilon)}_{\Gamma_0}$.

1.4 Resultados lineares

As vezes para obter certas propriedades de soluções de problemas parabólicos quasilineares é conveniente tratar os problemas como uma equação linear. Assim, aproveitamos propriedades de equações lineares para a solução. Um dos resultados que precisaremos fala da possibilidade de limitar a norma no espaço $W^{2,1}_q(Q_T)$ da solução de um problema parabólico linear. O outro resultado estabelece um critério suficiente de quando dizer que a solução de uma equação tem norma em $H^{2+\beta,1+\beta/2}(\bar{Q}_T)$ controlada por normas de Hölder dos coeficientes. Quando falamos de problemas lineares, queremos dizer que temos um operador da forma

$$\mathcal{L}(x,t,D_x,D_t)u = u_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_{x_ix_j}.$$

Onde estamos supondo que $\mathcal{L}$ é parabólico, é dizer que existem constantes ν e μ tais que

$$\nu|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \leq \mu|\xi|^2 \tag{1.13}$$

para todo $(x,t) \in \bar{Q}_T$, onde $\xi \in \mathbb{R}^n$. O primeiro problema de fronteira é chamado a achar solução u das equações

$$\begin{cases} \mathcal{L}(x,t,D_x,D_t)u(x,t) = f(x,t) \\ u|_{t=0} = \phi, \quad u|_{S_T} = \Phi(x,t). \end{cases} \tag{1.14}$$

Agora, se no bordo temos um operador da forma

$$\mathfrak{B}(x,t,D_x)u|_{S_T} = \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)u_{x_i} + b(x,t)u|_{S_T}.$$

Dizemos que no bordo temos uma condição mista e nos referimos ao problema de bordo misto a encontrar uma função u que satisfaça as equações

$$\begin{cases} \mathcal{L}(x,t,D_x,D_t)u(x,t) = f(x,t) \\ u|_{t=0} = \phi, \quad \mathfrak{B}(x,t,D_x)u|_{S_T} = \Phi(x,t) \end{cases} \tag{1.15}$$

Onde supomos que as funções b_i são tais que

$$\left|\sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\vec{n}_i(x)\right| \geq \delta > 0.$$

Em outras palavras, lembrando que $\vec{n}$ é normal a S no ponto x, b não pode estar no tangente a S em x.

Dizemos que o problema (1.14) ou (1.15) satisfaz a condição de compatibilidade da ordem zero se

$$\phi(x) = \Phi(x,0) \quad \text{para} \quad x \in S.$$

Para os mesmos problemas dizemos que a condição de bordo e a condição inicial satisfazem a condição de compatibilidade da ordem 1, se

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,0)\phi_{x_ix_j}(x) - \sum_{i=1}^{n} a_i(x,0)\phi_{x_i}(x) - a(x,0)\phi(x) = \Phi_t(x,0) \quad \text{para} \quad x \in S. \tag{1.16}$$

Agora estamos em condições de formular os resultados comentados anteriormente, de novo sob hipóteses mais fracas os resultados são provados em [9], agora no capítulo IV.

Proposição 1.4.1. *Seja $q > 3$ e suponhamos que os a_{ij} são funções Hölder contínuas limitadas em Q_T e $S \in H^{2+\alpha}$. Então para qualquer $f \in L_q(Q_T)$, $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ e $\Phi : S_T \to \mathbb{R}$, onde ϕ e Φ admitem extensões em Q_T com as normas $\| \cdot \|^{(2)}_{q,Q_T}$ finitas. Satisfazendo a condição de compatibilidade da ordem zero. O problema* (1.14) *e* (1.15) *tem uma única solução $u \in W^{2,1}_q(Q_T)$ com a estimativa*

$$\|u\|^{(2)}_{q,Q_T} \leq c(\|f\|_{q,Q_T} + \|\phi\|^{(2)}_{q,Q_T} + \|\Phi\|^{(2)}_{q,Q_T}). \tag{1.17}$$

Com o mesmo espírito de usar teoria linear para ter propriedades de soluções de problemas quasilineares, lembramos o seguinte resultado o qual é extremamente útil, pois dá limitação na norma de Hölder. Como é de costume vamos a escrever uma situação particular de uma versão mais geral descrita em [9].

Proposição 1.4.2. *Suponhamos que $l \in (0,1)$, os coeficientes de $\mathcal{L}$ são de classe $H^{l,l/2}(\bar{Q}_T)$ e que o bordo S é de tipo H^{2+l}. Então para qualquer $f \in H^{l,l/2}(\bar{Q}_T)$, $\phi \in H^{2+l}(\bar{\Omega})$, $\Phi \in H^{2+l,1+l/2}(S_T)$ satisfazendo condição de compatibilidade da ordem 1. O problema* (1.14) *tem uma única solução de classe $H^{2+l,1+l/2}(\bar{Q}_T)$ que satisfaz a estimativa*

$$|u|^{(2+l)}_{Q_T} \leq c(|f|^{(l)}_{Q_T} + |\phi|^{(2+l)}_{\Omega} + |\Phi|^{(2+l)}_{S_T}). \tag{1.18}$$

Proposição 1.4.3. *Suponhamos que $l \in (0,1)$, $S \in H^{2+l}$, os coeficientes de $\mathcal{L}$ são de classe $H^{l,l/2}(\bar{Q}_T)$ e $b_i, b \in H^{1+l,(1+l)/2}(S_T)$. Então para qualquer $f \in H^{l,l/2}(\bar{Q}_T)$, $\phi \in H^{2+l}(\bar{\Omega})$, $\Phi \in H^{1+l,(1+l)/2}(S_T)$ satisfazendo condição de compatibilidade da ordem zero. O problema* (1.15) *tem uma única solução de classe $H^{2+l,1+l/2}(\bar{Q}_T)$, com*

$$|u|^{(2+l)}_{Q_T} \leq c(|f|^{(l)}_{Q_T} + |\phi|^{(2+l)}_{\Omega} + |\Phi|^{(1+l)}_{S_T}). \tag{1.19}$$

Capítulo 2

Problema 1-dimensional com condição de bordo não linear

2.1 Formulação do problema

Denotemos $u = (u_1, u_2)^\top$, $f(u) = (f_1(u), f_2(u))^\top$ e $B(u) = (B_{ij}(u))_{i,j=1}^2$. Supondo que $u : Q_T \to \mathbb{R}^2$, com $Q_T = \Omega \times (0, T) = (-1, 1) \times (0, T)$, estudaremos uma equação da forma

$$u_t + f(u)_x = (B(u)u_x)_x \quad \text{em } Q_T. \tag{2.1}$$

Com a condição inicial

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{se} \quad x \in \Omega, \tag{2.2}$$

onde estamos denotando $u_0 = (u_{01}, u_{02})^\top$. No bordo a condição que chamamos θ-fluxo de Neumann é da forma

$$f(u) - B(u)u_x = \pm\theta B(u)(u - u^\pm(t)) \quad \text{se} \quad x = \pm 1, \tag{2.3}$$

onde $u^\pm = (u_1^\pm, u_2^\pm)^\top$. Também estudamos o denominado 0-fluxo de Neumann, onde consideramos a condição de bordo não linear da forma

$$f(u) - B(u)u_x = 0, \quad \text{se} \quad x = \pm 1. \tag{2.4}$$

O propósito deste capítulo é provar existência e unicidade de solução dos problemas (2.1)-(2.3) e (2.1), (2.2) e (2.4). Para tal objetivo utilizamos os resultados do capítulo anterior. Supomos que existe uma solução clássica de (2.1)-(2.3), para obter uma estimativa uniforme em $H^{2+\beta,1+\beta/2}(\bar{Q}_T)$. Em consequência temos satisfeita a hipótese mais complicada do Teorema de

Leray-Schauder com o qual obtemos a existência de solução para (2.1)-(2.3). A solução de (2.1), (2.2) e (2.4) é justamente o limite em $H^{2+\beta,1+\beta/2}(\bar{Q}_T)$ quando $\theta \to 0$ das soluções u^θ de (2.1)-(2.3).

Motivados por aplicações do problema (2.1)-(2.3), consideremos o conjunto

$$\Delta = \{u \in \mathbb{R}^2 : u_i \geq 0, \quad u_1 + u_2 \leq 1\}.$$

Além de existência de solução, provamos que sob certas hipóteses nos fluxos, se a condição inicial e de bordo estão contidas em $\operatorname{int}(\Delta)$ temos que $u(x,t) \in \Delta$, para qualquer $t > 0$.

Para estimar as normas das soluções de (2.1) trabalhamos em cada uma das componentes. Assim nos vemos na obrigação de enfraquecer em alguma das equações a interação entre as duas componentes. Tal dificuldade se contorna supondo que a matriz de difusão é triangular superior, é dizer

$$B_{21}(u) \equiv 0. \tag{2.5}$$

Alem disso, supomos que

$$B_{22}(u) = B_{22}(u_2). \tag{2.6}$$

Também para a matriz B, pela natureza parabólica do problema. Existe uma constante $\nu > 0$ tal que

$$B_{ii}(u) \geq \nu > 0. \tag{2.7}$$

Para os problemas propostos, temos como objetivo provar existência e unicidade de solução no espaço $H^{2+\beta,1+\beta/2}(\bar{Q}_T)$, onde $\beta \in (0,1)$. Para conseguir isso, pedimos nos coeficientes que

$$f_i, \frac{\partial f_i}{\partial u_j}, B_{ij}, \frac{\partial B_{ij}}{\partial u_k} \in H^\beta(\Delta). \tag{2.8}$$

Para ter solução invariante, exigimos que a condição inicial e de bordo sejam tais que

$$u_0(x) \in \operatorname{int}(\Delta), u^{\pm}(t) \in \operatorname{int}(\Delta), \quad \text{para todo} \quad x \in \Omega \quad \text{e} \quad t \in (0,T). \tag{2.9}$$

No bordo de Δ os fluxos se comportam da forma

$$f_i|_{u_i=0} \equiv 0, \quad (f_1 + f_2)|_{u_1+u_2=1} \equiv 0 \tag{2.10}$$

$$B_{12}|_{u_1=0} = 0, \quad B_{11}|_{u_1+u_2=1} = (B_{12} + B_{22})|_{u_1+u_2=1}. \tag{2.11}$$

Com isso conseguimos desfazer as não linearidades na hora de querer provar a invariância de Δ. Com todas as hipóteses acima, podemos obter bons resultados com respeito a existência e unicidade de solução do problema

Teorema 2.1.1. *Sejam $\theta > 0$ fixo, $u_0 \in H^{2+\beta}(\Omega)$ e $u^{\pm} \in H^{(1+\beta)/2}([0,T])$. Se são satisfeitas a condição de compatibilidade*

$$f(u_0(\pm 1)) - B(u_0(\pm 1))(u_0'(\pm 1) \pm \theta(u_0(\pm 1) - u^{\pm}(0))) = 0, \tag{2.12}$$

$u_0'(\pm 1) = 0$ e as condições (2.5)-(2.11), então temos que o problema (2.1),(2.2) e (2.3) tem uma única solução $u \in H^{2+\beta,1+\beta/2}(\bar{Q}_T)$ e $u(x,t) \in \Delta$ para todo $(x,t) \in \bar{Q}_T$.

Agora, com respeito ao problema 0-fluxo de Neumann, temos que

Teorema 2.1.2. *Consideremos $u_0 \in H^{2+\beta}(\Omega)$ com $u_0 \in \operatorname{int}(\Delta)$. Se os coeficientes da equação (2.1) satisfazem as condições (2.5)-(2.8), (2.10)-(2.11), as condições de compatibilidade*

$$f(u_0(\pm 1)) - B(u_0(\pm 1))u_0'(\pm 1) = 0 \tag{2.13}$$

e $u_0'(\pm 1) = 0$. Existe uma única solução u para o problema (2.1), (2.2) e (2.4), com $u \in H^{2+\beta,1+\beta/2}(\bar{Q}_T)$ e $u(x,t) \in \Delta$ para todo $(x,t) \in \bar{Q}_T$.

A ideia na prova do primeiro teorema é supor que existe u, solução de (2.1)-(2.3). E achar estimativas a priori em $H^{2+\beta,1+\beta/2}(\bar{Q}_T)$. Primeiro, é provado o principio de regiões positivamente invariantes , para trabalhar nas normas em L_2 e Hölder. Para tais estimativas utilizamos as propriedades (2.5)-(2.9) e a condição de compatibilidade (2.12). Assim, podemos utilizar o Teorema de Leray-Schauder associando uma aplicação às soluções de versões linearizadas de (2.1)-(2.3). Para ter bem definida tal solução utilizamos a hipótese $u_0'(\pm 1) = 0$. Depois de provar a existência, aplicamos Gronwall para obter a unicidade. O Teorema 2.1.2 é consequência da uniformidade das normas achadas e da compacidade nos espaços de Hölder.

2.2 Problema Perturbado

Para provar a invariância de domínio na solução, usamos uma modificação do principio de regiões positivamente invariantes apresentado em [13] e também em [14]. Para tal objetivo precisamos fazer uma perturbação em (2.1) da forma

$$u_t + (f(u))_x = (B(u)u_x)_x + \varepsilon\left(\frac{e}{4} - u\right) \quad \text{onde} \quad e = (1,1)^T, \tag{2.14}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{para todo} \quad x \in \Omega \quad \text{e} \tag{2.15}$$

$$f(u) - B(u)(u_x \pm \theta(u - u^{\pm}(t))) = 0, \quad \text{quando} \quad x = \pm 1. \tag{2.16}$$

2.2.1 Estimativas a Priori

Para achar as estimativas a priori supomos que $u \in C^{2,1}(\bar{Q}_T)$ é solução do problema (2.14),(2.15) e (2.16). Para tal solução devemos obter limitação uniforme em $H^{2+\beta,1+\beta/2}(\bar{Q}_T)$ para usar o Teorema de Leray-Schauder. Em cada uma das estimativas apresentadas nos lemas, temos uma independência com respeito ao parâmetro θ presente na condição de bordo.

Lema 2.2.1. *Supondo satisfeitas as hipóteses do Teorema 2.1.1. Se u é solução clássica de* (2.14),(2.15) *e* (2.16)*. Temos que $u(x,t) \in \Delta$ para todo $(x,t) \in \bar{Q}_T$.*

Demonstração. Suponhamos que existe um ponto $(x,t) \in \bar{Q}_T$ tal que $u(x,t) \notin \Delta$ e definamos $t_0 = \inf_{t \geq 0} u(x,t) \notin \Delta$.

Da hipótese $u_0(x) \in \operatorname{int}(\Delta)$, assim temos que $t_0 > 0$. Definamos as funções $G_1(u) = u_1$, $G_2(u) = u_2$ e $G_3(u) = 1 - u_1 - u_2$ em $\mathbb{R}^2$ e denotemos por x_0 ponto em $\bar{\Omega}$ onde $u(x_0,t_0)$ está em $\partial\Delta$. Notemos que o fato de $u \in \partial\Delta$ é equivalente a dizer que $G_i(u) = 0$ para algum $i \in \{1,2,3\}$.

Vejamos o caso em que $G_1(u) = 0$. Primeiro denotando ∇_u o gradiente das funções G_i com respeito à variável u, temos que $\nabla_u G_1 = (1,0)$. Assim usando que $f_1(0,u_2) = 0$, temos que

$$\nabla_u G_1 Jf = \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1}, \frac{\partial f_1}{\partial u_2}\right) = \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \nabla_u G_1.$$

Portanto $(\nabla_u G_1)^\top$ é vetor próprio de $(Jf)^\top$ quando $u_1 \equiv 0$. Agora, notemos que $B_{12}(0,u_2) = 0$, pelo que

$$\nabla_u G_1 B = (B_{11}(u), 0) = B_{11}(u) \nabla_u G_1,$$

é dizer que $(\nabla_u G_1)^\top$ é vetor próprio de $B^\top$, com valor próprio estritamente positivo quando $u_1 = 0$.

Analogamente podemos ver que se $u_2 \equiv 0$, $(\nabla_u G_2)^\top$ é vetor próprio de $(Jf)^\top$ e $B^\top$, com valor próprio positivo no caso de $B^\top$.

Fazendo agora o caso $G_3(u) = 0$, usando que $f_1(u_1, 1-u_1) + f_2(u_1, 1-u_1) = 0$. Derivamos com respeito a u_1 e obtemos a igualdade

$$\frac{\partial f_1}{\partial u_1} + \frac{\partial f_2}{\partial u_1} = \frac{\partial f_1}{\partial u_2} + \frac{\partial f_2}{\partial u_2}.$$

Também notemos que $\nabla_u G_3 = -(1,1)$, então usando a igualdade de acima temos que

$$\nabla_u G_3 Jf = -\left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1} + \frac{\partial f_2}{\partial u_1}, \frac{\partial f_1}{\partial u_2} + \frac{\partial f_2}{\partial u_2}\right) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1} + \frac{\partial f_2}{\partial u_1}\right) \nabla_u G_3.$$

Da equação (2.11) e a mesma ideia que acima, temos que

$$\nabla_u G_3 B = -(B_{11}(u), B_{12}(u) + B_{22}(u)) = B_{11}(u) \nabla_u G_3.$$

Assim, quando $G_3(u) = 0$, $(\nabla_u G_3)^\top$ é vetor próprio de $(Jf)^\top$ e $B^\top$. Com valor próprio positivo no caso de $B^\top$.

Suponhamos que $x_0 \in (-1, 1)$. No caso que $u_i = 0$ quando $i \in \{1, 2\}$, multiplicamos (2.14) pela esquerda por $(\nabla_u G_i)^\top$. Das propriedades de acima, obtemos que

$$u_{it} + \lambda_i(u)u_{ix} = (\mu_i(u)u_{ix})_x + \varepsilon\left(\frac{1}{4} - u_i\right) = (\mu_i(u))_x u_{ix} + \mu_i(u)u_{ixx} + \varepsilon\left(\frac{1}{4} - u_i\right),$$

onde $\lambda_i(u)$ e $\mu_i(u)$ são os valores próprios de $(Jf)^\top$ e $B^\top$ respectivamente para o vetor próprio $(\nabla_u G_i)^\top$. Como estamos supondo que x_0 é ponto de mínimo das funções $G_i(u)$ i.e. $u_i = 0$, temos que $u_{ix}(x_0, t_0) = 0$, $u_{it}(x_0, t_0) \leq 0$ e $u_{ixx}(x_0, t_0) \geq 0$. Portanto na igualdade de acima, lembrando que $\mu_i(u) \geq 0$, temos o lado esquerdo com um sinal não positivo e na direita um sinal estritamente positivo e obtemos um absurdo.

No caso $G_3(u) = 0$, também multiplicamos (2.14) pela esquerda por $\nabla_u G_3$ e obtemos que

$$G_3(u)_t + \lambda_3(u)(G_3(u)_x) = (\mu_3(u)G_3(u)_x)_x - \varepsilon\left(\frac{1}{2} - u_1 - u_2\right) = \mu_3(u)_x G_3(u)_x + \mu_3(u)G_3(u)_{xx} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

De novo pelo fato de ser mínimo o ponto (x_0, t_0) temos na esquerda um sinal não positivo e na direita um estritamente positivo.

Suponhamos agora que $|x_0| = 1$, de fato que $x_0 = 1$ e que $i \in \{1, 2\}$. Multiplicando a condição de bordo (2.16) pela esquerda por $\nabla_u G_i$ e lembrando que quando $u_i = 0$ temos que $f_i(u) = 0$, obtemos a igualdade

$$-B_{ii}(u)u_{xi}(1, t_0) = -\theta B_{ii}(u)u_i^+(t_0).$$

Dado que $u_i^+(t_0) > 0$ para qualquer $t_0 > 0$, temos que $u_{xi}(1, t_0) > 0$ dando um absurdo pois $x_0 = 1$ é ponto de mínimo. O caso de $x_0 = -1$ é completamente análogo.

Agora se $i = 3$, somando as condições de bordo e usando (2.10) e (2.11) na região $G_3(u) = 0$ obtemos que

$$B_{11}(u)(G_3 \circ u)_x(1, t_0) = \theta B_{11}(u)(1 - (u_1^+(t_0) + u_2^+(t_0))).$$

Como $u_1^+(t_0) + u_2^+(t_0) < 1$, temos o lado direito estritamente positivo. Daí $(G_3 \circ u)_x(1, t_0) > 0$ o que é absurdo pelo mesmo motivo que antes. Assim provamos o lema. $\square$

Lema 2.2.2. *Supondo satisfeitas as hipóteses do Teorema 2.1.1. Se u é solução clássica de* (2.14),(2.15) *e* (2.16). *Existe uma constante $c > 0$, tal que $\|u_x\|_{2,Q_T} \leq c$.*

Demonstração. Na equação $(2.14)_2$, multiplicando por u_2 e integrando sobre Ω obtemos

$$\int_\Omega u_{2t}u_2 + f_2(u)_x u_2 dx = \int_\Omega (B_{22}(u_2)u_{2x})_x u_2 + \varepsilon\left(\frac{1}{4} - u_2\right) u_2 dx.$$

A ideia é utilizar o termo de difusão que tem bom sinal, para obter uma limitação do termo u_{2x}. Como não sabemos nada da limitação de integral das segundas derivadas e não queremos que apareça a derivada da primeira componente. Aplicamos integração por partes para obter uma igualdade da forma

$$\int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt}u_2^2 + B_{22}(u_2)u_{2x}^2 dx = (B_{22}(u_2)u_{2x} - f_2(u))u_2\Big|_{-1}^{+1} + \int_\Omega f_2(u)u_{2x} + \varepsilon\left(\frac{1}{4} - u_2\right) u_2 dx.$$

Agora usamos a condição de parabolicidade, aproveitando o termo com bom sinal que fica junto com a constante de parabolicidade. Para isso utilizamos a desigualdade de ε-Cauchy (1.3) como

$$f_2(u)u_{2x} \le \frac{1}{2\nu}f_2^2(u) + \frac{\nu}{2}u_{2x}^2$$

e usando a condição de bordo, obtemos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u_2^2 dx + \frac{\nu}{2}\int_\Omega u_{2x}^2 dx \le \mp\theta B_{22}(u_2)(u_2 - u_2^\pm)u_2\Big|_{-1}^{+1} + \int_\Omega c_1 f_2^2(u) + \varepsilon\left(\frac{1}{4} - u_2\right) u_2 dx.$$

Dado que $u, u^\pm \in \Delta$, $|B_{22}|_\infty \le M_{22}$ e que $f_2(u)$ é uniformemente limitado, conseguimos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u_2^2 dx + \frac{\nu}{2}\int_\Omega u_{2x}^2 dx \le 4M_{22}\theta + \int_\Omega c_1 f_2^2(u) + 2\varepsilon dx \le 4M_{22} + c_2,$$

pois $\theta \in (0,1)$. Integrando no tempo, temos que $\|u_{2x}\|_{L^2(Q_T)} \le c_3$, onde $c_3 > 0$ não depende de θ.

Agora fazendo o mesmo na equação $(2.14)_1$, multiplicando por u_1 e integrando por partes obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt}u_1^2 + B_{11}(u)u_{1x}^2 dx = {} & (B_{11}(u)u_{1x} + B_{12}(u)u_{2x} - f_1(u))u_1\Big|_{-1}^{+1} \\ & + \int_\Omega f_1(u)u_{1x} - B_{12}(u)u_{1x}u_{2x} + \varepsilon\left(\frac{1}{4} - u_1\right) u_1 dx.\end{aligned}$$

Usando a condição de parabolicidade, o fato que os coeficientes são limitados, a condição de bordo e as desigualdades

$$f_1(u)u_{1x} \le \frac{f_1^2(u)}{\nu} + \frac{\nu}{4}u_{1x}^2, \quad \text{e} \quad B_{12}(u)u_{1x}u_{2x} \le \frac{B_{12}^2(u)u_{2x}^2}{\nu} + \frac{\nu}{4}u_{1x}^2.$$

Obtemos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u_1^2 dx + \frac{\nu}{2}\int_\Omega u_{1x}^2 dx \leq \mp\theta(B_{11}(u)(u_1 - u_1^\pm) + B_{12}(u)(u_2 - u_2^\pm))u_1\Big|_{-1}^{+1}$$
$$+ c\int_\Omega f_1^2(u) + u_{2x}^2 + \varepsilon\left(\frac{1}{4} - u_1\right)u_1 dx$$

Dado que $u, u^\pm \in \Delta$ e a limitação uniforme dos termos de B e f conseguimos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u_1^2 dx + \frac{\nu}{2}\int_\Omega u_{1x}^2 dx \leq c + \int_\Omega u_{2x}^2 dx.$$

Assim, pelo feito anteriormente e integrando com respeito ao tempo, obtemos que $\|u_{1x}\|_{L^2(Q_T)} \leq c$ e provamos o lema. $\square$

Lema 2.2.3. *Supondo satisfeitas as hipóteses do Teorema 2.1.1. Se u é solução clássica de* (2.14),(2.15) *e* (2.16). *Existem constantes $c > 0$ e $\alpha \in (0,1)$, tais que*

$$|u_2|_{Q_T}^{(\alpha)} \leq c. \tag{2.17}$$

Demonstração. Dado um ponto $x^0 \in \bar{\Omega}$, consideremos $\zeta = \zeta(x,t)$ função suave onde $\zeta(x,\cdot)$ é uma função teste em K_ρ. Fixemos $\delta' \geq 0$ e definamos a função $u_2^{(k)} = \max\{u_2 - k, 0\}$ para $k \geq 1 - \delta'$. Pelo lema anterior $0 \leq u_2^{(k)} \leq \delta'$.

Denotando por $\Omega_\rho = \bar{K}_\rho \cap \bar{\Omega} = [x_-^0, x_+^0]$, onde $x_-^0 = \max\{-1, x_0 - \rho\}$ e $x_+^0 = \min\{1, x_0 + \rho\}$. Multiplicamos $(2.14)_2$ por $u_2^{(k)}\zeta^2$ e integramos por partes sobre Ω_ρ, permitido já que $u_2^{(k)}(\cdot, t) \in W_2^1(\Omega)$ e obtemos

$$\int_{\Omega_\rho} u_{2t}u_2^{(k)}\zeta^2 + B_{22}(u_2)u_{2x}u_{2x}^{(k)}\zeta^2 dx = (B_{22}(u_2)u_{2x} - f_2(u))u_2^{(k)}\zeta^2\Big|_{x_-^0}^{x_+^0}$$
$$+ \int_{\Omega_\rho} f_2(u)u_{2x}^{(k)}\zeta^2 + 2f_2(u)u_2^{(k)}\zeta_x\zeta - 2B_{22}(u_2)u_{2x}u_2^{(k)}\zeta_x\zeta + \varepsilon\left(\frac{1}{4} - u_2\right)u_2^{(k)}\zeta^2 dx.$$

Usando a definição de $u_2^{(k)}$ podemos dizer que nas integrais temos as igualdades $u_{2t}u_2^{(k)} = u_{2t}^{(k)}u_2^{(k)}$, $u_{2x}^{(k)}u_{2x} = |u_{2x}^{(k)}|^2$ e que $u_2^{(k)}u_{2x} = u_2^{(k)}u_{2x}^{(k)}$. Levando acima obtemos uma equação da forma

$$\int_{\Omega_\rho} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_2^{(k)}\zeta|^2 + B_{22}|u_{2x}^{(k)}\zeta|^2 dx = (B_{22}(u_2)u_{2x} - f_2(u))u_2^{(k)}\zeta^2\Big|_{x_-^0}^{x_+^0}$$
$$+ \int_{\Omega_\rho} |u_2^{(k)}|^2\zeta\zeta_t + f_2(u)u_{2x}^{(k)}\zeta^2 + 2f_2(u)u_2^{(k)}\zeta_x\zeta - 2B_{22}(u_2)u_{2x}^{(k)}u_2^{(k)}\zeta_x\zeta + \varepsilon\left(\frac{1}{4} - u_2\right)u_2^{(k)}\zeta^2 dx.$$

Como no lema anterior, usando a condição de parabolicidade para aproveitar o termo com bom sinal na esquerda da equação. E pela desigualdade de ε-Cauchy (1.3) para controlar os termos que aparecem com $u_{2x}^{(k)}$. Obtemos que

$$\int_{\Omega_\rho} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_2^{(k)}\zeta|^2 + \nu|u_{2x}^{(k)}\zeta|^2 dx \leq (B_{22}(u)u_{2x} - f_2(u))u_2^{(k)}\zeta^2\Big|_{x_-^0}^{x_+^0} + \frac{\nu}{4}\int_{\Omega_\rho}|u_{2x}^{(k)}\zeta|^2 dx$$
$$+ \int_{\Omega_\rho}|u_2^{(k)}|^2\zeta\zeta_t + cf_2(u)1_{A_{k,\rho}(t)}\zeta^2 + |u_2^{(k)}\zeta_x|^2 + c|u_2^{(k)}\zeta_x|^2 + \varepsilon\left(\frac{1}{4} - u_2\right)u_2^{(k)}\zeta^2 dx,$$

onde $A_{k,\rho}(t) = \{x \in \Omega_\rho : u_2^{(k)}(x,t) > 0\}$. Dado que os coeficientes da equação são limitados, que $u_2^{(k)} \leq \delta'$ e o Lema 2.2.1 conseguimos

$$\int_{\Omega_\rho} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_2^{(k)}\zeta|^2 + \nu|u_{2x}^{(k)}\zeta|^2 dx \leq (B_{22}(u)u_{2x} - f_2(u))u_2^{(k)}\zeta^2\Big|_{x_-^0}^{x_+^0} + \frac{\nu}{4}\int_{\Omega_\rho}|u_{2x}^{(k)}\zeta|^2 dx$$
$$+ c\int_{\Omega_\rho}|u_2^{(k)}|^2(\zeta|\zeta_t| + |\zeta_x|^2)dx + c\int_{\Omega_\rho}1_{A_{k,\rho}(t)}\zeta^2 dx. \quad (2.18)$$

Assim, vemos que temos uma desigualdade da forma (1.12) no capítulo 1. Só falta trabalhar no termo do bordo. Usando a condição de bordo e o suporte da função ζ, obtemos

$$(B_{22}(u)u_{2x} - f_2(u))u_2^{(k)}\zeta^2\Big|_{x_-^0}^{x_+^0} \leq \theta B_{22}(u)|u_2 - u_2^+|u_2^{(k)}\zeta^2\Big|_{x=1} + \theta B_{22}(u)|u_2 - u_2^-|u_2^{(k)}\zeta^2\Big|_{x=-1}.$$

Dado que $\theta B_{22}(u_2)|u_2 - u_2^\pm| \leq 2M_{22}$, a última desigualdade fica da forma

$$(B_{22}(u)u_{2x} - f_2(u))u_2^{(k)}\zeta^2\Big|_{x_-^0}^{x_+^0} \leq 2M_{22}\sum_{x=\pm 1}|u_2^{(k)}\zeta^2|.$$

Usando que, para ρ pequeno, temos uma constante $c > 0$ tal que

$$\sum_{x=\pm 1}|u_2^{(k)}\zeta|^2 \leq c\int_{\Omega_\rho}|u_{2x}^{(k)}\zeta^2 + u_2^{(k)}\zeta\zeta_x|dx.$$

Aplicamos a desigualdade de ε-Cauchy, aproveitando os termos onde temos bom sinal, para deixar uma desigualdade da forma

$$2M_{22}\sum_{x=\pm 1}|u_2^{(k)}\zeta^2| \leq \frac{\nu}{4}\int_{\Omega_\rho}|u_{2x}^{(k)}\zeta|^2 dx + c_1\int_{\Omega_\rho}1_{A_{k,\rho}(t)}\zeta^2 dx + c_2\int_{\Omega_\rho}|u_2^{(k)}\zeta_x|^2 dx.$$

Assim, levando a última desigualdade a (2.18), obtemos a estimativa

$$\int_{\Omega_\rho}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_2^{(k)}\zeta|^2 + \frac{\nu}{2}|u_{2x}^{(k)}\zeta|^2 dx \leq c_1\int_{\Omega_\rho}|u_2^{(k)}|^2(|\zeta\zeta_t| + |\zeta_x|^2)dx + c_2\int_{\Omega_\rho}1_{A_{k,\rho}(t)}\zeta dx.$$

Integrando com respeito ao tempo, conseguimos a desigualdade

$$\|u_2^{(k)}\zeta(x,t_0+\tau)\|_{2,\Omega_\rho}^2+\nu\|u_{2x}^{(k)}\zeta\|_{2,Q(\rho,\tau)\cap Q_T}^2\le\|u_2^{(k)}\zeta(x,t_0)\|_{2,\Omega_\rho}^2$$
$$+c_1\int_{Q(\rho,\tau)\cap Q_T}|u_2^{(k)}|^2(\zeta_x^2+\zeta|\zeta_t|)dxdt+c_2\int_{t_0}^{t_0+\tau}\int_{A_{k,\rho}(t)}\zeta dxdt.$$

Em forma análoga podemos obter uma desigualdade como a anterior para a função $-u_2$ com $k\le-\delta'$, pelo que temos $u_2\in\hat{\mathcal{B}}_2(\bar{Q}_T,M,\gamma,r,\delta',\kappa)$. Assim, pela Proposição 1.3.2, existe um $\alpha>0$ tal que $u_2\in H^{\alpha,\alpha/2}(\bar{Q}_T)$, notemos que cada um dos termos presentes na desigualdade acima, temos uma independência com respeito a θ, assim nem α nem c dependem de θ. $\square$

Agora que já provamos limitação de u_2 na norma de Hölder, tentamos usar a mesma técnica para provar que u_1 seja Hölder. Mas com os lemas provados até agora é impossível, já que na primeira equação temos interação entre as duas componentes da solução. Assim precisamos de uma limitação mais fina na norma $\|\cdot\|_{p,Q_T}$, para poder controlar aquela interação e conseguir provar que efetivamente a primeira componente é Hölder contínua.

Lema 2.2.4. *Supondo satisfeitas as hipóteses do Teorema 2.1.1. Se u é solução clássica de* (2.14),(2.15) *e* (2.16). *Existe constante $c>0$ tal que*

$$\int_{Q_T}u_{2x}^4dxdt<c.$$

Demonstração. Para obter tal limitação, consideramos a função auxiliar

$$U_2(x,t)=\int_{-1}^x u_2(y,t)dy.$$

Tentemos então procurar alguma boa propriedade da função U_2 para obter propriedades para a solução. Usando a equação $(2.14)_2$, podemos ver que

$$U_{2t}(x,t)=(B_{22}(u_2)u_{2x}-f_2(u))(x,t)-(B_{22}(u_2)u_{2x}-f_2(u))(-1,t)+\int_{-1}^x\varepsilon\left(\frac{1}{4}-u_2\right)dy.$$

Assim, utilizando da condição de bordo, obtemos a equação

$$U_{2t}(x,t)=B_{22}(u_2(x,t))U_{2xx}(x,t)+g_2(x,t),\tag{2.19}$$

onde

$$g_2(x,t)=\int_{-1}^x\varepsilon\left(\frac{1}{4}-u_2\right)dy-f_2(u(x,t))-\theta B_{22}(u_2(-1,t))(u_2(-1,t)-u_2^-(t)).$$

Além disso, são satisfeitas a condição inicial

$$U_2(x,0) = \int_{-1}^{x} u_{02}(y)dy \tag{2.20}$$

e a condição de bordo

$$U_2(\pm 1, t) = U_2^{\pm}(t) \quad \text{onde} \quad U_2^{-}(t) = 0 \quad \text{e} \quad U_2^{+}(t) = \int_{-1}^{1} u_2(y,t)dy. \tag{2.21}$$

Primeiro notemos que pelos lemas anteriores, temos que $\|g_2\|_{4,Q_T} \leq c$. Agora da hipótese de suavidade para u_0 e estendendo a definição de $U_2(x,0)$ em todo o domínio Q_T como constante no tempo. Temos que $U_2(x,0) \in W_4^{2,1}(Q_T)$.

A ideia agora é provar que a condição de bordo pertence a algum espaço de Sobolev. Para tal objetivo consideramos a função

$$z(x,t) = \frac{(x+1)U_2^{+}(t) - (x-1)U_2^{-}(t)}{2}.$$

Pela definição de $z(x,t)$, provar que $z \in W_4^{2,1}(Q_T)$ se reduz a provar que $z_t(x,t) \in L_4(Q_T)$. Ou equivalentemente, que $U_{2t}^{\pm}(t) \in L_4((0,T))$. Para isso notemos que

$$U_{2t}^{+}(t) = (B_{22}(u_2)u_{2x} - f_2(u))(s,t)\Big|_{s=-1}^{s=1} + \int_{-1}^{1} \varepsilon \left(\frac{1}{4} - u_2\right) dx$$

e usando a condição de bordo, obtemos que

$$U_{2t}^{+}(t) = -\theta \sum_{s=\pm 1} B_{22}(u_2)(u_2(s,t) - u_2^{\pm}(t)) + \int_{-1}^{1} \varepsilon \left(\frac{1}{4} - u_2\right) dx. \tag{2.22}$$

Da limitação uniforme dos termos da matriz B, do termo do bordo $u_2^{\pm}$ e de u_2, o termo de acima é uniformemente limitado na norma do supremo. Assim temos que $U_{2t}^{\pm}(t) \in L_4((0,T))$ e $z(x,t) \in W_4^{2,1}(Q_T)$.

Em resumo temos que para o problema (2.19),(2.20) e (2.21). São satisfeitas as propriedades $\|g_2\|_{4,Q_T} \leq c$, $U_2(x,0) \in W_4^{2,1}(Q_T)$ e que $z_2(x,t) \in W_4^{2,1}(Q_T)$. Pelo Lema 2.2.3 o coeficiente que acompanha o termo de segunda ordem é Hölder contínuo. Pelo fato de continuidade da solução da equação original. Temos que também é satisfeita a condição de compatibilidade de ordem zero. Consequentemente pela Proposição 1.4.1 e a desigualdade (1.17) temos que

$$\|U_2\|_{4,Q_T}^{(2)} \leq cte(\|g_2\|_{4,Q_T} + \|U_2(x,0)\|_{4,\Omega}^{(2)} + \|z_2\|_{4,S_T}^{(2)}).$$

Dado que

$$U_{2x} = u_2 \quad \text{e} \quad U_{2xx} = u_{2x},$$

em particular obtemos que

$$\int_{Q_T} u_{2x}^4 dxdt < c.$$

Notemos que só nos termos g_2 e $U_2^{\pm}$ aparece o termo θ. Como θ sempre está multiplicando algum termo e dado que $\theta \in (0,1)$. Obtemos estimativas as quais independem do parâmetro θ. Assim a constante c da última desigualdade não depende de θ. $\square$

Lema 2.2.5. *Supondo satisfeitas as hipóteses do Teorema 2.1.1. Se u é solução clássica de* (2.14),(2.15) *e* (2.16). *Existem constantes $c > 0$ e $\alpha \in (0,1)$ tais que*

$$|u_1|_{Q_T}^{(\alpha)} \leq c.$$

Demonstração. Consideremos $x^0 \in \bar{\Omega}$ e $\zeta = \zeta(x,t)$ como no Lema 2.2.3. Dado $\delta' \geq 0$ fixo, definamos a função $u_1^{(k)} = \max\{u_1 - k, 0\}$ para $k \geq 1 - \delta'$, igual que antes temos que $u_1^{(k)} \leq \delta'$. Novamente $\Omega_\rho = [x_-^0, x_+^0]$, com $x_-^0 = \max\{-1, x_0 - \rho\}$ e $x_+^0 = \min\{1, x_0 + \rho\}$. Multiplicando agora a equação $(2.14)_1$ por $u_1^{(k)}\zeta^2$ e integrando por partes sobre Ω_ρ obtemos

$$\int_{\Omega_\rho} u_{1t}u_1^{(k)}\zeta^2 + B_{11}(u)u_{1x}u_{1x}^{(k)}\zeta^2 dx = (B_{11}(u)u_{1x} + B_{12}(u)u_{2x} - f_1(u))u_1^{(k)}\zeta^2\Big|_{x_-^0}^{x_+^0}$$
$$+ \int_{\Omega_\rho} f_1(u)(u_1^{(k)}\zeta^2)_x - 2B_{11}(u)u_{1x}u_1^{(k)}\zeta_x\zeta - B_{12}(u)u_{2x}(u_1^{(k)}\zeta^2)_x + \varepsilon\left(\frac{1}{4} - u_1\right)u_1^{(k)}\zeta^2 dx.$$

Usando os fatos que $u_{1x}^{(k)}u_{1x} = |u_{1x}^{(k)}|^2$, $u_1^{(k)}u_{1x} = u_1^{(k)}u_{1x}^{(k)}$ e que $u_{1t}u_1^{(k)} = u_{1t}^{(k)}u_1^{(k)}$ obtemos a igualdade

$$\int_{\Omega_\rho} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_1^{(k)}\zeta|^2 + B_{11}(u)|u_{1x}^{(k)}\zeta|^2 dx = (B_{11}(u)u_{1x} + B_{12}(u)u_{2x} - f_1(u))u_1^{(k)}\zeta^2\Big|_{x_-^0}^{x_+^0}$$
$$+\int_{\Omega_\rho} |u_1^{(k)}|^2\zeta\zeta_t + f_1(u)(u_1^{(k)}\zeta^2)_x - 2B_{11}(u)u_{1x}^{(k)}u_1^{(k)}\zeta_x\zeta - B_{12}(u)u_{2x}(u_1^{(k)}\zeta^2)_x + \varepsilon\left(\frac{1}{4} - u_1\right)u_1^{(k)}\zeta^2 dx. \tag{2.23}$$

Agora, usamos a desigualdade de ε-Cauchy (1.3) fazendo como antes para manter o termo com bom sinal que acompanha a constante de parabolicidade. Assim, usando as limitações uniformes de f_1 e B, obtemos desigualdades da forma

$$f_1(u)(u_1^{(k)}\zeta^2)_x \leq \frac{\nu}{8}|u_{1x}^{(k)}\zeta|^2 + c_1 1_{A_{k,\rho}(t)}\zeta^2 + c_2|u_1^{(k)}\zeta_x|^2, \quad 2B_{11}(u)u_{1x}^{(k)}u_1^{(k)}\zeta_x\zeta \leq \frac{\nu}{8}|u_{1x}^{(k)}\zeta|^2 + c_2|u_1^{(k)}\zeta_x|^2$$

$$\text{e} \quad B_{12}(u)u_{2x}(u_1^{(k)}\zeta^2)_x \leq \frac{\nu}{8}|u_{1x}^{(k)}\zeta|^2 + c1_{A_{k,\rho}(t)}|u_{2x}\zeta|^2 + c_2|u_1^{(k)}\zeta_x|^2,$$

onde $A_{k,\rho}(t) = \{x \in \Omega_\rho : u_1^{(k)}(x,t) > 0\}$. Levando as desigualdades acima em (2.23) e a condição de parabolicidade, obtemos que

$$\int_{\Omega_\rho} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_1^{(k)}\zeta|^2 + \nu|u_{1x}^{(k)}\zeta|^2 dx \leq (B_{11}(u)u_{1x} + B_{12}(u)u_{2x} - f_1(u))u_1^{(k)}\zeta^2\Big|_{x_-^0}^{x_+^0} + \frac{3\nu}{8}\int_{\Omega_\rho} |u_{1x}^{(k)}\zeta|^2 dx$$
$$+ c\int_{\Omega_\rho} |u_1^{(k)}|^2(\zeta|\zeta_t| + |\zeta_x|^2)dx + c\int_{\Omega_\rho} 1_{A_{k,\rho}(t)}|u_{2x}\zeta|^2 + 1_{A_{k,\rho}(t)}\zeta^2 dx.$$

Aplicando Cauchy-Schwarz no ultimo termo da desigualdade anterior, obtemos

$$\int_{\Omega_\rho} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_1^{(k)}\zeta|^2 + \nu|u_{1x}^{(k)}\zeta|^2 dx \leq (B_{11}(u)u_{1x} + B_{12}(u)u_{2x} - f_1(u))u_1^{(k)}\zeta^2\Big|_{x_-^0}^{x_+^0} + \frac{3\nu}{8}\int_{\Omega_\rho} |u_{1x}^{(k)}\zeta|^2 dx$$
$$+ c\int_{\Omega_\rho} |u_1^{(k)}|^2(\zeta|\zeta_t| + |\zeta_x|^2)dx + c\left(\int_{\Omega_\rho} (|u_{2x}|^2+1)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega_\rho} 1_{A_{k,\rho}(t)}\zeta^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Agora, trabalhemos no termo de bordo. Como no Lema 2.2.3, notamos que

$$(B_{11}(u)u_{1x} + B_{12}(u)u_{2x} - f_1(u))u_1^{(k)}\zeta^2\Big|_{x_-^0}^{x_+^0} \leq \theta\sum_{x=\pm 1} |B_{11}(u_1 - u_1^{\pm}(t)) + B_{12}(u_2 - u_2^{\pm}(t))|u_1^{(k)}\zeta^2.$$

Das limitações uniformes de u_i, dos termos de B e $\theta \in (0,1)$ obtemos que existe M independente de θ tal que

$$(B_{11}(u)u_{1x} + B_{12}(u)u_{2x} - f_1(u))u_1^{(k)}\zeta^2\Big|_{x_-^0}^{x_+^0} \leq M\sum_{x=\pm 1} u_1^{(k)}\zeta^2.$$

Assim, obtemos uma desigualdade da forma

$$(B_{11}(u)u_{1x} + B_{12}(u)u_{2x} - f_1(u))u_1^{(k)}\zeta^2\Big|_{x_-^0}^{x_+^0} \leq c\int_{\Omega_\rho} |u_{1x}^{(k)}\zeta^2 + u_1^{(k)}\zeta\zeta_x|dx.$$

Levando a desigualdade de acima à desigualdade principal e usando desigualdade de ε-Cauchy temos que

$$\int_{\Omega_\rho} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_1^{(k)}\zeta|^2 + \frac{\nu}{2}|u_{1x}^{(k)}\zeta|^2 dx \leq c_1\int_{\Omega_\rho} |u_1^{(k)}|^2(\zeta|\zeta_t| + |\zeta_x|^2)dx$$
$$+ c_2\left(\int_{\Omega_\rho} (|u_{2x}|^2+1)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega_\rho} 1_{A_{k,\rho}(t)}\zeta^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Assim, integrando com respeito ao tempo, notando que $\zeta^2 \leq \zeta$ e usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz obtemos

$$\|u_1^{(k)}\zeta(x,t_0+\tau)\|_{2,\Omega_\rho}^2 + \nu\|u_{1x}^{(k)}\zeta\|_{2,Q(\rho,\tau)\cap Q_T}^2 \leq \|u_1^{(k)}\zeta(x,t_0)\|_{2,\Omega_\rho}^2$$
$$+ c_1\int_{Q(\rho,\tau)\cap Q_T} |u_1^{(k)}|^2(\zeta_x^2 + \zeta|\zeta_t|)dxdt + c_2\|u_{2x}^2 + 1\|_{2,Q(\rho,\tau)\cap Q_T}\left(\int_{t_0}^{t_0+\tau}\int_{A_{k,\rho}(t)} \zeta dxdt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pelo Lema 2.2.4

$$\|u_{2x}^2+1\|_{2,Q(\rho,\tau)\cap Q_T}\leq c,$$

onde c é uniforme. Assim finalmente obtemos a desigualdade

$$\|u_1^{(k)}\zeta(x,t_0+\tau)\|_{2,\Omega_\rho}^2+\nu\|u_{1x}^{(k)}\zeta\|_{2,Q(\rho,\tau)\cap Q_T}^2\leq\|u_1^{(k)}\zeta(x,t_0)\|_{2,\Omega_\rho}^2$$
$$+c_1\int_{Q(\rho,\tau)\cap Q_T}|u_1^{(k)}|^2(\zeta_x^2+\zeta|\zeta_t|)dxdt+c_2\left(\int_{t_0}^{t_0+\tau}\int_{A_{k,\rho}(t)}\zeta dxdt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Novamente da Proposição 1.3.2, agora com exponentes $r=q=6$ e $\kappa=1/2$, existe um $\alpha>0$ tal que $u_1\in H^{\alpha,\alpha/2}(\bar{Q}_T)$. □

Lema 2.2.6. *Supondo satisfeitas as hipóteses do Teorema 2.1.1. Se u é solução clássica de* (2.14),(2.15) *e* (2.16). *Existem constantes $c>0$ e $\alpha\in(0,1)$ tais que $|u_2|_{Q_T}^{(1+\alpha)}\leq c$.*

Demonstração. Seja U_2 como no Lema 2.2.4. A ideia é utilizar novamente o problema (2.19)-(2.21), aproveitando o ultimo lema provado. Do lema anterior por exemplo, podemos dizer que $g_2\in H^{\alpha,\alpha/2}(\bar{Q}_T)$. Das hipóteses em u_0, temos $U_2(x,0)\in H^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$.

Das propriedades de $u_2^{\pm}$ e dos lemas anteriores usados na equação (2.22), temos que $U_{2t}^{+}(t)\in H^{\alpha/2}([0,T])$. Assim, $U_2(\pm1,t)\in H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\bar{S}_T)$ pelo que faltaria provar as condições de compatibilidade da ordem 1, para usar a Proposição 1.4.2. Já que, como foi dito antes, as condições de ordem zero são satisfeitas por continuidade da solução u_2.

Para provar que são satisfeitas as condições de compatibilidade, definimos a função auxiliar como na igualdade (1.16)

$$u_2^{(1)}(s)=B_{22}(u_{02})(u_{02}')(s)+\int_{-1}^{s}\varepsilon\left(\frac{1}{4}-u_{02}\right)dx-f_2(u_0(s))-\theta B_{22}(u_{02}(-1))(u_{02}(-1)-u_2^-(0)),$$

$$\Phi_2^{(1)}(-1)=0\quad\text{e}\quad\Phi_2^{(1)}(1)=-\theta\sum_{\pm1}B_{22}(u_{02}(\pm1))(u_{02}(\pm1)-u_2^{\pm}(0))+\int_{-1}^{1}\varepsilon\left(\frac{1}{4}-u_{02}\right)dx.$$

Precisamos provar que $u_2^{(1)}(\pm1)=\Phi_2^{(1)}(\pm1)$. No caso de $u_2^{(1)}(1)=\Phi_2^{(1)}(1)$, subtraindo os termos que contem -1 e a integral, temos a igualdade

$$B_{22}(u_{02}(1))(u_{02}'(1))-f_2(u_0(1))=-\theta B_{22}(u_{02}(1))(u_{02}(1)-u_2^{+}(0)),$$

justificada pela condição de compatibilidade da solução. Notemos que $u^{(1)}(-1)=\Phi^{(1)}(-1)$, se é satisfeita a igualdade

$$B_{22}(u_{02}(-1))(u_{02}'(-1))-f_2(u_0(-1))-\theta B_{22}(u_{02}(-1))(u_{02}(-1)-u_2^{-}(0))=0.$$

Que é verdadeira, novamente pela condição de compatibilidade (2.12). Assim, pela Proposição 1.4.2 e a desigualdade (1.18), temos que

$$|U_2|_{Q_T}^{(2+\alpha)} \leq c(|g_2|_{Q_T}^{(\alpha)} + |U_2(x,0)|_{\Omega}^{(2+\alpha)} + |U_2^{\pm}|_{S_T}^{(2+\alpha)}),$$

onde cada um dos termos da direita são limitados por constantes que não dependem de θ.

Utilizando que $\langle U_2\rangle_{x,Q_T}^{(2+\alpha)} < c$ e $\langle U_2\rangle_{t,Q_T}^{(1+\alpha/2)} < c$ obtemos

$$|u_{2x}|_{Q_T}^{(0)} + \langle u_{2x}\rangle_{x,Q_T}^{(\alpha)} + \langle u_{2x}\rangle_{t,Q_T}^{(\alpha/2)} + \langle u_2\rangle_{t,Q_T}^{((1+\alpha)/2)} < c.$$

Em consequência $|u_2|_{Q_T}^{(1+\alpha)} < c$. □

Lema 2.2.7. *Supondo satisfeitas as hipóteses do Teorema 2.1.1. Se u é solução clássica de* (2.14),(2.15) *e* (2.16). *Existem constantes $c > 0$ e $\alpha \in (0,1)$ tais que $|u_1|_{Q_T}^{(1+\alpha)} < c$.*

Demonstração. Agora, consideremos a função auxiliar

$$U_1(x,t) = \int_{-1}^{x} u_1(y,t)dy.$$

Da equação $(2.14)_1$, temos que

$$\begin{aligned} U_{1t}(x,t) &= B_{11}(u(x,t))u_{1x}(x,t) + B_{12}(u(x,t))u_{2x}(x,t) - f_1(u(x,t)) \\ &\quad - [B_{11}(u(-1,t))u_{1x}(-1,t) + B_{12}(u(-1,t))u_{2x}(-1,t) - f_1(u(-1,t))] + \int_{-1}^{x} \varepsilon\left(\frac{1}{4} - u_1\right)dy. \end{aligned}$$

Usando a condição de bordo, obtemos a equação

$$U_{1t}(x,t) = B_{11}(u(x,t))U_{1xx}(x,t) + g_1(x,t) \tag{2.24}$$

onde

$$\begin{aligned} g_1(x,t) &= B_{12}(u(x,t))u_{2x}(x,t) + \int_{-1}^{x} \varepsilon\left(\frac{1}{4} - u_1\right)dy - f_1(u(x,t)) \\ &\quad - \theta[B_{11}(u(-1,t))(u_1(-1,t) - u_1^-(t)) + B_{12}(u(-1,t))(u_2(-1,t) - u_2^-(t))]. \end{aligned}$$

De (2.15), obtemos que

$$U_1(x,0) = \int_{-1}^{x} u_{01}(y)dy \tag{2.25}$$

e da condição de bordo, que

$$U_1(\pm 1,t) = U_1^{\pm}(t) \quad \text{onde} \quad U_1^-(t) = 0 \quad \text{e} \quad U_1^+(t) = \int_{-1}^{1} u_1(y,t)dy. \tag{2.26}$$

Vamos usar a mesma ideia que no lema anterior, agora no problema (2.24),(2.25) e (2.26). Primeiro dos Lemas 2.2.3 e 2.2.5 temos que $B_{11}(u(x,t)) \in H^{\alpha,\alpha/2}(\bar{Q}_T)$. Com respeito a função g_1 usando os lemas anteriores, temos que $g_1(x,t) \in H^{\alpha,\alpha/2}(\bar{Q}_T)$, com norma de Hölder uniforme com respeito a θ. Pela hipótese de suavidade na condição inicial, temos que $U_1 \in H^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$. Em U_1^+ usamos a mesma ideia que na função auxiliar anterior. Derivamos a função com respeito ao tempo. Passamos a derivada baixo o sinal da integral. E usamos a equação para u_1, para assim ficar com termos só de bordo. Depois de usar a condição de bordo para a equação original, obtemos que

$$U_{1t}^+(t) = -\theta \sum_{\pm 1} [B_{11}(u(\pm 1,t))(u_1(\pm 1,t) - u_1^\pm(t)) + B_{12}(u(\pm 1,t))(u_2(\pm 1,t) - u_2^\pm(t))] + \int_{-1}^{1} \varepsilon \left(\frac{1}{4} - u_1\right) dy.$$

Assim $U_1^\pm(t) \in H^{1+\alpha/2}([0,T])$ e $U_1(\pm 1,t) \in H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(S_T)$ com correspondente norma de Hölder uniforme em θ. Novamente faltariam provar as condições de compatibilidade de ordem 1 para usar a Proposição 1.4.2. Para tal objetivo definimos as funções

$$u_1^{(1)}(s) = (B_{11}(u_0)u_{01}' + B_{12}(u_0)u_{02}')(s) + \int_{-1}^{s} \varepsilon \left(\frac{1}{4} - u_{01}\right) dy - f_1(u_0(s)) - \theta[B_{11}(u_0(-1))(u_{01}(-1) - u_1^-(0)) + B_{12}(u_0(-1))(u_{02}(-1) - u_2^-(0))],$$

$$\Phi_1^{(1)}(1) = -\theta \sum_{\pm 1} [B_{11}(u_0(\pm 1))(u_{01}(\pm 1) - u_1^\pm(0)) + B_{12}(u_0(\pm 1))(u_{02}(\pm 1) - u_2^\pm(0))] + \int_{-1}^{1} \varepsilon \left(\frac{1}{4} - u_1\right) dy$$

e $\Phi_1^{(1)}(-1) = 0$. Temos então que provar a igualdade $u_1^{(1)}(\pm 1) = \Phi_1^{(1)}(\pm 1)$. Notemos que novamente, quando comparamos $u_1^{(1)}(1) = \Phi_1^{(1)}(1)$. Os termos que contem -1 e as integrais se subtraem e ficamos com a igualdade em 1

$$B_{11}(u_0)u_{01}' + B_{12}(u_0)u_{02}' - f_1(u_0) = -\theta[B_{11}(u_0)(u_{01} - u_1^+(0)) + B_{12}(u_0)(u_{02} - u_2^+(0))].$$

Satisfeita pelas condição (2.12). Agora no caso de $u_1^{(1)}(-1) = \Phi_1^{(1)}(-1)$, chegamos a uma igualdade no -1 da forma

$$B_{11}(u_0)u_{01}' + B_{12}(u_0)u_{02}' - f_1(u_0) - \theta[B_{11}(u_0)(u_{01} - u_1^-(0)) + B_{12}(u_0)(u_{02} - u_2^-(0))] = 0,$$

de novo satisfeita pela condição de bordo original. Assim pela Proposição 1.4.2, temos que

$$|U_1|_{Q_T}^{(2+\alpha)} \leq c(|g_1|_{Q_T}^{(\alpha)} + |U_1(x,0)|_{\Omega}^{(2+\alpha)} + |U_1^\pm|_{S_T}^{(2+\alpha)}).$$

Usando as mesmas ideias do lema anterior, temos que $|u_1|_{Q_T}^{(1+\alpha)} < c$. $\square$

Lema 2.2.8. *Supondo satisfeitas as hipóteses do Teorema 2.1.1. Se u é solução clássica de* (2.14),(2.15) *e* (2.16)*. Temos que existe uma constante $c > 0$ tal que satisfaz $|u|_{Q_T}^{(2+\beta)} < c$.*

Demonstração. Da equação $(2.14)_2$ temos que

$$u_{2t} = B_{22}(u_2)u_{2xx} + G_2(x,t), \tag{2.27}$$

onde

$$G_2(x,t) = \frac{\partial B_{22}}{\partial u_2}(u_2(x,t))u_{2x}^2(x,t) + \varepsilon\left(\frac{1}{4} - u_2\right) - \frac{\partial f_2}{\partial u_1}(u(x,t))u_{1x}(x,t) - \frac{\partial f_2}{\partial u_2}(u(x,t))u_{2x}(x,t).$$

A condição de bordo pode ser tratada como

$$B_{22}(u_2)u_{2x} \pm \theta B_{22}(u_2)u_2 = f_2(u) \pm \theta B_22(u_2)u_2^{\pm}(t) = \Phi_2^{\pm}. \tag{2.28}$$

A ideia é usar a Proposição 1.4.3 no problema (2.27), (2.28) e (2.15). Da propriedade de multiplicação e composição de funções Hölder ainda ser Hölder e aproveitando que $u \in H^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\bar{Q}_T)$, podemos dizer que $G_2 \in H^{\gamma,\gamma/2}(\bar{Q}_T)$, onde $\gamma = \min\{\alpha, \beta\}$. Também das hipóteses do problema temos $u_{02} \in H^{2+\gamma}(\bar{\Omega})$.

Temos que $f_2(u(\pm 1,t)), B_{22}(u_2)(\pm 1,t) \in H^{(1+\gamma)/2}([0,T])$ pelos lemas anteriores e da propriedade de composição de funções Hölder. Dado que $u_2^{\pm} \in H^{(1+\beta)/2}([0,T])$ temos que cada um dos termos que aparece na condição de bordo são Hölder. Da condição de parabolicidade estamos dentro das hipóteses da Proposição 1.4.3. As condições de compatibilidade de ordem zero são satisfeitas por hipótese. Assim, aplicando a Proposição 1.4.3 temos que $u_2 \in H^{2+\gamma}(\bar{Q}_T)$, onde da limitação de $\Phi_2^{\pm}$ temos que $|u_2|_{Q_T}^{(2+\gamma)} \leq c$, com c independente de θ.

No caso da primeira equação, podemos considerar ela como

$$u_{1t} = B_{11}(u)u_{1xx} + G_1(x,t) \tag{2.29}$$

onde

$$\begin{aligned} G_1(x,t) = u_{1x}&\left(\frac{\partial B_{11}}{\partial u_1}u_{1x}(x,t) + \frac{\partial B_{11}}{\partial u_2}u_{2x}(x,t)\right) + u_{2x}\left(\frac{\partial B_{12}}{\partial u_1}u_{1x}(x,t) + \frac{\partial B_{12}}{\partial u_2}u_{2x}(x,t)\right) \\ &+ \varepsilon\left(\frac{1}{4} - u_1\right) + B_{12}u_{2xx}(x,t) - \frac{\partial f_1}{\partial u_1}u_{1x}(x,t) - \frac{\partial f_1}{\partial u_2}u_{2x}(x,t), \end{aligned}$$

com condição de bordo

$$B_{11}(u)u_{1x} \pm \theta B_{11}(u)u_1 = f_1(u) - B_{12}(u)u_{2x} \pm \theta(B_{11}(u)u_1^{\pm} - B_{12}(u)(u_2 - u_2^{\pm})) = \Phi_1^{\pm}. \tag{2.30}$$

Tal como foi feito antes no lema, estudaremos a equação (2.29), com condição de bordo (2.30) e condição inicial (2.15). Primeiro, notemos que o coeficiente que acompanha o termo de segunda ordem é Hölder contínuo. Consideramos o γ de antes e notemos que na função G_1. Cada uma das composições que aparecem são derivadas dos coeficientes da equação original com a função u a qual já sabemos que tem derivada Hölder. Assim na hora de considerar a composta obtemos uma função em $H^{\beta,\beta/2}(\bar{Q}_T)$. Da propriedade de multiplicações de funções Hölder ainda ser Hölder e do fato que $u_{2xx} \in H^{\gamma,\gamma/2}(\bar{Q}_T)$, podemos afirmar que $G_1 \in H^{\gamma,\gamma/2}(\bar{Q}_T)$.

Agora no caso da condição de bordo temos que, pelos mesmo motivos que antes, cada um dos termos que aparecem estão em $H^{1+\gamma,(1+\gamma)/2}(S_T)$. Dado que $u_{01} \in H^{2+\gamma}(\bar{\Omega})$ e são satisfeitas as condições de compatibilidade, usamos o mesmo resultado que acima para obter que $|u_1|_{Q_T}^{(2+\gamma)} < c$, com c uniforme com respeito a θ.

Repetimos o mesmo processo que antes, só que agora já não temos a limitação do termo α dos lemas se não que temos em melhores espaços e assim conseguimos até a ordem β. Assim obtemos que efetivamente u pertence ao espaço $H^{2+\beta,1+\beta/2}(\bar{Q}_T)$, com limitação uniforme. $\square$

2.2.2 Existência de Solução

Agora vamos aplicar o Teorema de Leray-Schauder para provar a existência de solução clássica do problema (2.14)-(2.16). Para isso temos que definir uma família de operadores associados ao problema. Primeiramente, notemos que se u é solução do problema (2.14)-(2.16), entaão a função $v(x,t) = u(x,t) - u_0(x)$ é solução do problema

$$v_t + f(v+u_0)_x = (B(v+u_0)(v+u_0)_x)_x + \varepsilon\left(\frac{1}{4} - (v+u_0)\right) \tag{2.31}$$

com as condições

$$f(v+u_0) - B(v+u_0)(v+u_0)_x = \pm\theta B(v+u_0)(v+u_0-u^{\pm}) \text{ se } x=\pm 1 \quad \text{e} \quad v(x,0)=0 \text{ se } x\in\Omega. \tag{2.32}$$

Utilizando os lemas anteriores, obtemos que $|v|_{Q_T}^{(2+\beta)} \leq c$. Aplicaremos então o Teorema de Leray-Schauder para provar existência de solução clássica v do problema (2.31)-(2.32), e consequentemente obtemos que existe u solução clássica do problema (2.14)-(2.16). Definamos, para $\lambda \in [0,1]$, as funções $B_\lambda = \lambda B + (1-\lambda)\nu Id$. Para cada λ consideramos o problema

$$v_t + \lambda f(v+u_0)_x = (B_\lambda(v+u_0)(v+u_0)_x)_x + \varepsilon\lambda\left(\frac{1}{4} - (v+u_0)\right) \tag{2.33}$$

com as condições

$$\lambda f(v+u_0)-B_\lambda(v+u_0)(v+u_0)_x = \pm\theta\lambda B(v+u_0)(v+u_0-u^{\pm}) \text{ se } x=\pm 1 \quad \text{e} \quad v(x,0)=0 \text{ se } x\in\Omega. \tag{2.34}$$

Notemos que os coeficientes do problema acima, ainda têm o mesmo comportamento em $\partial\Delta$. Observamos ainda que $B_{\lambda ii} = \lambda B_{ii}(u) + (1-\lambda)\nu \geq \nu$, mantendo assim a natureza parabólica do problema. Notemos que se modificamos o problema (2.33)-(2.34) para o problema com condição inicial u_0. Temos que ainda é possível provar o principio de regiões positivamente invariantes, já que mantemos o bom comportamento dos coeficientes em $\partial\Delta$ e um bom sinal na condição de bordo em $\partial\Omega$. Com respeito aos outros lemas provados na seção anterior, ainda podem ser repetidas as provas com as mesmas funções auxiliares. Aproveitando o fato que mantemos as condições de compatibilidade para (2.34), dado que $u_0'(\pm 1) = 0$. Assim, se denotamos a solução de (2.33) e (2.34) como v_λ, temos que $|v_\lambda|_{Q_T}^{(2+\beta)} \leq M$, com M uniforme em λ como em θ.

Introduzimos o espaço de Banach $\mathfrak{B}$ de funções $v=(v_1,v_2)\in H^{1+\beta,(1+\beta)/2}(\bar{Q}_T)$, tais que $v(x,0)=0$ e munido da norma $|\cdot|_{Q_T}^{(1+\beta)}$. Definamos a função $A:[0,1]\times\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}$ como $A(\lambda,w)=v$, onde v é solução do problema

$$v_t + \lambda f(w+u_0)_x = (B_\lambda(w+u_0)(v+u_0)_x)_x + \varepsilon\lambda\left(\frac{1}{4}-(v+u_0)\right) \tag{2.35}$$

com as condições

$$\lambda f(w+u_0)-B_\lambda(w+u_0)(v+u_0)_x = \pm\theta\lambda B(w+u_0)(v+u_0-u^{\pm}) \text{ se } x=\pm 1 \quad \text{e} \quad v(x,0)=0 \text{ se } x\in\Omega. \tag{2.36}$$

Temos assim uma versão linearizada do problema original. Aqui aparece a importância de considerar o problema com condição inicial zero. Para provar que está bem definida a função A em (λ,w), consideramos primeiro a equação $(2.35)_2$ e usamos a Proposição 1.4.3. Note que precisamos mostrar que é satisfeita a condição de compatibilidade para o problema (2.35)-(2.36). Tal condição é satisfeita, pois $w(x,0)+u_0(x) = v(x,0)+u_0(x) = u_0(x)$, e u_0 e $u^{\pm}$ já satisfazem condição de compatibilidade. Se não consideráramos condição inicial zero no problema (2.35)-(2.36), ficaríamos no bordo com termos $w(x,0)$ e $u_0(x)$ para os quais não temos nenhum tipo de relação. Finalmente, observamos que são satisfeitas as hipóteses da proposição 1.4.3. Em consequência podemos aplicar a mesma Proposição para a equação $(2.35)_1$ e obtemos que a função A está bem definida.

Notemos que um ponto fixo, $A(\lambda,v_\lambda)=v_\lambda$ para $\lambda=1$ é solução do problema (2.31)-(2.32). Consideremos o conjunto

$$\mathcal{U} = \{v\in\mathfrak{B} : |v|_{Q_T}^{(1+\beta)} \leq M'\},$$

onde $M < M'$. Como qualquer ponto fixo $A(\lambda, v_\lambda) = v_\lambda$, satisfaz que $|v_\lambda|_{Q_T}^{(2+\beta)} \leq M$. Podemos dizer que $v_\lambda \notin \partial\mathcal{U}$ e temos satisfeita uma das hipóteses do Teorema de Leray-Schauder. Como consequência da Proposição 1.4.3, temos que $|A_\lambda(v)|_{Q_T}^{(2+\beta)} \leq c$ para qualquer λ, onde c é uniforme. Assim, pela compacidade de $H^{2+\beta}(\bar{Q}_T)$ em $H^{1+\beta}(\bar{Q}_T)$ obtemos a compacidade da aplicação A.

Agora, notemos que efetivamente A é uniformemente contínua com respeito a λ. Para tal fato, consideremos $\lambda', \lambda'' \in [0,1]$ e as respetivas soluções v' e v'' do problema (2.35) e (2.36). Definamos $v = v' - v''$ a qual claramente é solução do seguinte problema, onde omitimos o termo $w + u_0$ em B,

$$v_t + (\lambda' - \lambda'')f(w+u_0)_x = (B_{\lambda'}v_x)_x - \varepsilon\lambda' v + (\lambda' - \lambda'')\left[((B - \nu Id)(v'' + u_0)_x)_x + \varepsilon\left(\frac{1}{4} - v'' - u_0\right)\right]$$

com condição de bordo da forma

$$B_{\lambda'}(w+u_0)v_x \pm \theta\lambda' B(w+u_0)v = (\lambda' - \lambda'')[f(w+u_0) - (B - \nu Id)(v'' + u_0)_x \mp \theta(B(w+u_0))(v'' + u_0 - u^{\pm})]$$

e condição inicial

$$v(x,0) = 0.$$

Usando novamente a Proposição 1.4.3 e as limitações na norma de Hölder de v'', obtemos uma desigualdade da forma

$$|v|_{Q_T}^{(2+\beta)} \leq c|\lambda' - \lambda''|,$$

provando a continuidade uniforme com respeito ao parâmetro. Notemos que, quando $\lambda = 0$ o problema (2.35) e (2.36) fica da forma

$$v_t - \nu v_{xx} = \nu u_{0xx}$$

com condição de bordo e inicial da forma

$$v_x = -u_{0x} \text{ se } x = \pm 1 \quad \text{e} \quad v(x,0) = 0 \text{ se } x \in \Omega.$$

Que novamente pela Proposição 1.4.3 tem uma única solução, assim $A(0, w)$ tem um único ponto fixo e pelo Teorema de Leray-Schauder, existe função v solução do problema (2.31) e (2.32). Assim temos que existe solução de (2.14)-(2.16).

2.3 Prova do Teorema 2.1.1

Dado que cada uma das estimativas que encontramos para as soluções dos problemas (2.14)-(2.16) não dependem de ε, pela compacidade do espaço de Hölder, quando $\varepsilon' \to 0$ achamos uma função $u \in H^{2+\beta,1+\beta/2}(\bar{Q}_T)$ que de fato é solução de (2.1)-(2.3). Consideremos agora u' e u'' duas soluções do problema (2.1)-(2.3). Assim a função $u = u' - u''$ é solução do problema

$$u_t + (f(u') - f(u''))_x = (B(u')u_x + (B(u') - B(u''))u''_x)_x \tag{2.37}$$

com condição de bordo

$$f(u') - f(u'') - (B(u')u_x + (B(u') - B(u''))u''_x) = \pm\theta[B(u')u + (B(u') - B(u''))(u'' - u^{\pm})] \tag{2.38}$$

e condição inicial

$$u(x,0) = 0. \tag{2.39}$$

Multiplicando $(2.37)_2$ por u_2 e aplicando integração por partes, obtemos a igualdade

$$\int_\Omega u_{2t}u_2dx + \int_\Omega B_{22}(u'_2)u_{2x}^2dx = \int_{\partial\Omega}(B_{22}(u'_2)u_{2x} + (B_{22}(u'_2) - B_{22}(u''_2))u''_{2x} - (f_2(u') - f_2(u'')))u_2dy$$
$$+ \int_\Omega (f_2(u') - f_2(u''))u_{2x} - (B_{22}(u'_2) - B_{22}(u''_2))u''_{2x}u_{2x}dx.$$

Utilizando a condição de parabolicidade, desigualdade de ε-Cauchy, a limitação da solução u''_2, a condição de bordo e que os coeficientes são Hölder contínuos, obtemos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u_2^2dx + \nu\int_\Omega u_{2x}^2dx \leq \mp\theta\int_{\partial\Omega}(B_{22}(u'_2)u_2 + (B_{22}(u'_2) - B_{22}(u''_2))(u''_2 - u_2^{\pm}))u_2dy$$
$$+ \frac{\nu}{4}\int_\Omega u_{2x}^2dx + c\int_\Omega |u' - u''|^2dx = I_1 + I_2.$$

Trabalhando na condição de bordo utilizando novamente as propriedades de B_{22} e u''_2 e a desigualdade (1.5) conseguimos

$$I_1 \leq c\int_{\partial\Omega}|u_2|^2dy \leq c\int_\Omega u_2u_{2x} + u_2^2dx \leq \frac{\nu}{4}\int_\Omega u_{2x}^2dx + c\int_\Omega u_2^2dx.$$

Levando na desigualdade principal e integrando com respeito ao tempo, conseguimos

$$\frac{d}{dt}\int_{Q_T} u_2^2dxdt + \int_{Q_T} u_{2x}^2dxdt \leq c\int_{Q_T}|u' - u''|^2dxdt. \tag{2.40}$$

Na equação $(2.37)_1$ fazemos o mesmo para conseguir a igualdade

$$\int_\Omega u_{1t}u_1dx + \int_\Omega B_{11}(u')u_{1x}^2dx = \int_{\partial\Omega}[B_{11}(u')u_{1x} + B_{12}(u')u_{2x} + (B_{11}(u') - B_{11}(u''))u''_{1x}$$
$$+ (B_{12}(u') - B_{12}(u''))u''_{2x} - (f_1(u') - f_1(u''))]u_1dy + \int_\Omega [f_1(u') - f_1(u'') - B_{12}(u')u_{2x}$$
$$+ (B_{11}(u') - B_{11}(u''))u''_{1x} + (B_{12}(u') - B_{12}(u''))u''_{2x}]u_{1x}dx.$$

Novamente, utilizando condição de parabolicidade, boas propriedades dos coeficientes e u_1'' aplicando ideias como no caso de u_2 obtemos a desigualdade

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u_2^1 dx + \nu\int_\Omega u_{1x}^2 dx \leq c\int_{\partial\Omega}|u_1u_2| + |u' - u''||u_1|dy + \frac{\nu}{4}\int_\Omega u_{1x}^2 dx$$
$$+ c\int_\Omega |u' - u''|^2 + u_{2x}^2 dx.$$

Como antes trabalhamos na integral do bordo, integramos com respeito ao tempo e utilizamos a desigualdade (2.40) para conseguir a estimativa

$$\frac{d}{dt}\int_{Q_T} u_1^2 dxdt + \int_{Q_T} u_{1x}^2 dxdt \leq c\int_{Q_T}|u' - u''|^2 dxdt.$$

Assim, conseguimos a desigualdade

$$\frac{d}{dt}\int_{Q_T}|u' - u''|dxdt \leq c\int_{Q_T}|u' - u''|^2 dxdt.$$

Aplicando desigualdade de Gronwall e pela suavidade das funções temos que $u' = u''$ em $\bar{Q}_T$.

2.4 Prova do Teorema 2.1.2

Para o problema (2.1), (2.2) e (2.4). Pelo fato de ter as condições de compatibilidade, podemos perturbar a condição de bordo por um θ. E escolhendo um $u^\pm$ com $u^\pm(0) = u_0(\pm 1)$ para que as condições de compatibilidade sejam satisfeitas para tais problemas. Assim pelo teorema anterior temos existência de solução u^θ. Dado que cada uma das soluções u^θ dos problemas (2.1)-(2.3), são tais que $|u^\theta|_{Q_T}^{(2+\beta)} \leq c$, onde c não depende de θ. Podemos extrair uma subsequência $\theta' \to 0$ tal que $u^{\theta'} \to u$ em $H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\bar{Q}_T)$, com $u \in H^{2+\beta,1+\beta/2}(\bar{Q}_T)$. Em consequência u é uma solução clássica do problema (2.1), (2.2) e (2.4). Além disso $u(x,t) \in \Delta$ para todo $(x,t) \in \bar{Q}_T$. A unicidade é provada em forma análoga ao caso anterior.

Capítulo 3

Problema n-dimensional com condição de bordo não linear

3.1 Formulação do Problema

Ao longo deste capítulo consideraremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto limitado e conexo, tal que $\partial\Omega = S \in H^{2+\alpha}$. Procuramos uma função $u : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^2$ satisfazendo em Q_T a equação

$$u_{1t} + \operatorname{div}(f_1(u)v) = \operatorname{div}(B_{11}(u)\nabla u_1) + \operatorname{div}(B_{12}(u)\nabla u_2), \tag{3.1}$$

$$u_{2t} + \operatorname{div}(f_2(u)v) = \operatorname{div}(B_{22}(u)\nabla u_2). \tag{3.2}$$

A condição inicial

$$u(x,0) = u_0(x) \quad x \in \Omega \tag{3.3}$$

e fixo um $\theta > 0$, o θ-fluxo de Neumann no bordo

$$(f_1(u)v - B_{11}(u)\nabla u_1 - B_{12}(u)\nabla u_2) \cdot \vec{n} = \theta[B_{11}(u)(u_1 - \psi_1) + B_{12}(u)(u_2 - \psi_2)], \tag{3.4}$$

$$(f_2(u)v - B_{22}(u)\nabla u_2) \cdot \vec{n} = \theta B_{22}(u)(u_2 - \psi_2) \tag{3.5}$$

onde $\vec{n}(s,t)$ é o vetor normal exterior em (s,t) sobre S. Em (3.1) e (3.2) a função $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$ é suave, conhecida e satisfaz $\operatorname{div}(v) = 0$ em Ω. Também estamos interessados no problema de 0-fluxo de Neumann no bordo, é dizer a condição

$$(f_1(u)v - B_{11}(u)\nabla u_1 - B_{12}(u)\nabla u_2) \cdot \vec{n} = 0, \tag{3.6}$$

$$(f_2(u)v - B_{22}(u)\nabla u_2) \cdot \vec{n} = 0. \tag{3.7}$$

Notemos que, o problema (3.1)-(3.3) e (3.6)-(3.7) tem como solução o limite de soluções do problema (3.1)-(3.5), como veremos depois.

Tal como antes, trabalhamos sobre a região $\Delta = \{u \in \mathbb{R}^2 : u_i \geq 0,\, u_1 + u_2 \leq 1\}$, onde estão definidas as funções

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad B(u) = \begin{pmatrix} B_{11}(u) & B_{12}(u) \\ 0 & B_{22}(u) \end{pmatrix}.$$

Introduzindo a notação

$$\operatorname{div}(f(u)v) = (\operatorname{div}(f_1(u)v), \operatorname{div}(f_2(u)v))$$

e

$$\operatorname{div}(B(u)\nabla u) = (\operatorname{div}(B_{11}(u)\nabla u_1 + B_{12}(u)\nabla u_2), \operatorname{div}(B_{22}(u)\nabla u)),$$

a equação (3.1),(3.2) em forma vetorial fica da forma

$$u_t + \operatorname{div}(f(u)v) = \operatorname{div}(B(u)\nabla u). \tag{3.8}$$

Aceitando o mesmo tipo de notação, onde consideramos $\cdot$ como o produto interno em cada componente. Podemos escrever também a condição de bordo como

$$(f(u)v - B(u)\nabla u) \cdot \vec{n} = \theta B(u)(u - \psi). \tag{3.9}$$

O objetivo em este capítulo é provar existência e unicidade de solução clássica para o problema (3.8),(3.9) e (3.3), em regiões particulares Ω, com $u(x,t) \in \Delta$. Também temos como propósito ver existência e unicidade de solução clássica nessas regiões com o problema limite $\theta = 0$.

As hipóteses para o problema são bastante parecidas às consideradas no capítulo anterior. Na condição inicial e de bordo pedimos que

$$u_0(x) \in \operatorname{int}(\Delta) \quad \text{e} \quad \psi(s,t) \in \operatorname{int}(\Delta) \quad \forall\, x \in \Omega,\ s \in \partial\Omega \ \text{e}\ t > 0. \tag{3.10}$$

Na matriz B impomos que $B_{22}(u) = B_{22}(u_2)$ e parabolicidade. Isto é, que existe um $\nu \in \mathbb{R}$ tal que

$$B_{11}(u), B_{22}(u_2) \geq \nu > 0, \quad u \in \Delta. \tag{3.11}$$

Com respeito à diferenciabilidade supomos

$$f_i, \frac{\partial f_i}{\partial u_k}, B_{ij}, \frac{\partial B_{ij}}{\partial u_k} \in H^{\beta}(\Delta), \quad \beta \in (0,1) \tag{3.12}$$

e na condição inicial e de bordo pedimos que

$$u_0 \in H^{2+\beta}(\bar{\Omega}) \text{ e } \psi \in H^{1+\beta,(1+\beta)/2}(S_T). \tag{3.13}$$

Novamente estamos a procura de soluções que tem um perfil inicial em Δ, e permanecem a Δ ao longo do tempo. Para tal resultado precisamos que

$$f_i|_{u_i=0} \equiv 0, \quad (f_1+f_2)\Big|_{u_1+u_2} \equiv 0, \tag{3.14}$$

$$B_{12}|_{u_1=0} = 0, \quad B_{11}\Big|_{u_1+u_2=1} = (B_{12}+B_{22})\Big|_{u_1+u_2=1}. \tag{3.15}$$

Como agora estamos tratando um sistema n-dimensional, não é possível aplicar a mesma ideia de considerar a primitiva da solução como foi feito no capítulo anterior. Um caso particular que pode ser considerado é o caso de soluções radiais.

3.2 Soluções Radiais

Consideramos a região $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : l_1 \leq |x| \leq l_2\}$ e estudamos a existência de soluções radiais $u : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^2$ do problema (3.1)-(3.5). Isto é, consideramos funções $w_1(r,t) = u_1(x,t)$ e $w_2(r,t) = u_2(x,t)$, onde $r = |x|$.

A ideia é formular um problema para tais funções w_i supondo u_i soluções do problema original. Vamos também supor que $u_0(x)$ e $\psi(s,t)$ são funções radiais. Ou seja $u_0(x) = u_0(r)$ e $\psi(s,t) = \psi^{\pm}(t)$, onde $\psi^-(t) = \psi(l_1,t)$ e $\psi^+(t) = \psi(l_2,t)$.

Primeiro, notamos que

$$\nabla u_i = w_{ir}\frac{x}{r} \quad \text{e} \quad \Delta u_i = w_{irr} + \frac{n-1}{r}w_{ir}.$$

Também notemos que a função $v = h(r)x$ com $\operatorname{div}(v) = 0$, onde $h(r)$ da forma

$$h(r) = \frac{1}{r^n}.$$

Levando os termos às equações (3.1) e (3.5) obtemos o seguinte sistema na região $(l_1,l_2)\times(0,T) = L\times(0,T) = L_T$

$$w_{1t} + rh(r)(f_1(w))_r = \sum_{i=1}^{2}\left[(B_{1i}(w)w_{ir})_r + \frac{n-1}{r}B_{1i}(w)w_{ir}\right], \tag{3.16}$$

$$w_{2t} + rh(r)(f_2(w))_r = (B_{22}(w_2)w_{2r})_r + \frac{n-1}{r}B_{22}(w)w_{2r}. \tag{3.17}$$

Da geometria do domínio, com $+$ no caso de l_1 e com $-$ no caso de l_2, temos que

$$\vec{n}(x) = \pm \frac{x}{r}.$$

Assim a condição de bordo é

$$sh(s)f_1(w) - (B_{11}(w)w_{1r} + B_{12}(w)w_{2r}) = \pm\theta(B_{11}(w)(w_1 - \psi_1^{\pm}) + B_{12}(w)(w_2 - \psi_2^{\pm})) \tag{3.18}$$

$$sh(s)f_2(w) - B_{22}(w)w_{2r} = \pm\theta B_{22}(w)(w_2 - \psi_2^{\pm}) \tag{3.19}$$

em $\{l_1, l_2\} \times [0, T]$, com $-\theta$ se $s = l_1$ e $+\theta$ se $s = l_2$. Também as equações (3.16)-(3.19) têm uma versão vetorial da forma

$$w_t + rh(r)f(w)_r = (B(w)w_r)_r + \frac{n-1}{r}B(w)w_r \tag{3.20}$$

com condição de bordo

$$sh(s)f(w) - B(w)w_r = \pm\theta B(w)(w - \psi^{\pm}). \tag{3.21}$$

Na condição inicial ficamos com

$$w(r, 0) = w_0(r) = u_0(r). \tag{3.22}$$

Em consequência, transformamos o problema n-dimensional num problema que lembra muito o problema 1 dimensional do capítulo 2. A ideia é novamente limitar uniformemente uma solução clássica do problema (3.20)-(3.22) e utilizar Teorema de Leray-Schauder.

Notamos que as respetivas condições de 0-fluxo de Neumann para os problemas radiais, ficam da forma

$$sh(s)f_1(w) - (B_{11}(w)w_{1r} + B_{12}(w)w_{2r}) = 0, \tag{3.23}$$

$$sh(s)f_2(w) - B_{22}(w)w_{2r} = 0. \tag{3.24}$$

Já que temos um problema 1-dimensional, provaremos lemas análogos aos apresentados no Capítulo 2 e assim obter solução e unicidade para regiões em particular. Assim se solucionamos os problemas (3.20)-(3.22) temos o seguinte resultado

Teorema 3.2.1. *Fixos $l_1 > l_2 > 0$, sejam $Q_T = \{x \in \mathbb{R}^n : l_1 \leq |x| \leq l_2\} \times (0, T)$ e as funções $u_0 \in H^{2+\beta}(\Omega)$ e $\psi \in H^{1+\beta,(1+\beta)/2}(S_T)$, radiais com respeito a x. Se fixo $\theta > 0$, consideramos satisfeitas*

$$(f(u_0)v - B(u_0)\nabla u_0) \cdot \vec{n} = \theta B(u_0)(u_0 - \psi). \tag{3.25}$$

$\nabla u_0(s) \cdot \vec{n} = 0$ *e as condições* (3.10)-(3.15). *Temos que o problema* (3.8),(3.9) *e* (3.3) *tem uma única solução u radial, com $u \in H^{2+\beta,1+\beta/2}(\bar{Q}_T)$ e $u(x,t) \in \Delta$ para todo $(x,t) \in \bar{Q}_T$.*

Agora se solucionamos o problema (3.20) e (3.22)-(3.24), conseguimos o seguinte resultado

Teorema 3.2.2. *Fixos* $l_1 > l_2 > 0$, *sejam* $Q_T = \{x \in \mathbb{R}^n : l_1 \leq |x| \leq l_2\} \times (0, T)$ *e* $u_0 \in H^{2+\beta}(\Omega)$ *com* $u_0 \in \operatorname{int}(\Delta)$, *radial com respeito a* x. *Se os coeficientes das equações* (3.1)-(3.2) *satisfazem as condições* (3.11)-(3.12), (3.14)-(3.15), *a condição de compatibilidade*

$$(f(u_0)v - B(u_0)\nabla u_0) \cdot \vec{n} = 0 \tag{3.26}$$

e que $\nabla u_0(s) \cdot \vec{n} = 0$. *Então existe uma única solução* u *radial para o problema* (3.1)-(3.3) *e* (3.6)-(3.7), *com* $u \in H^{2+\beta, 1+\beta/2}(\bar{Q}_T)$ *e* $u(x,t) \in \Delta$ *para todo* $(x,t) \in \bar{Q}_T$.

3.3 Problema Perturbado

O problema (3.8),(3.9) e (3.3) pode ser perturbado como foi feito no Capítulo 2. Novamente tal perturbação é feita para provar regiões invariantes. A equação então é perturbada para um $\varepsilon > 0$, como

$$u_t + \operatorname{div}(f(u)v) = \operatorname{div}(B(u)\nabla u) + \varepsilon\left(\frac{e}{4} - u\right). \tag{3.27}$$

Veremos que cada uma das limitações encontradas não dependem de ε, assim podemos fazer $\varepsilon \longrightarrow 0$ e a solução do problema original também vai ser invariante e obviamente com as mesma limitações. Vamos a considerar $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ e omitiremos o termo ε em u.

Como foi dito anteriormente, nos vamos a restringir ao caso de soluções radiais. Por tal motivo também fazemos a perturbação na equação para tal tipo de soluções, ficando da forma

$$w_t + rh(r)f(w)_r = (B(w)w_r)_r + \frac{n-1}{r}B(w)w_r + \varepsilon\left(\frac{e}{4} - w\right). \tag{3.28}$$

Então de aqui na frente, o objetivo é provar solução para as equações (3.28) com condições de bordo e inicial da forma (3.21)-(3.22). Notemos que a condição de compatibilidade, no caso radial fica da forma

$$sh(s)f(w_0(s)) - B(w_0(s))w_0'(s) = \pm\theta B(w_0(s))(w_0(s) - \psi(s,0)) \quad \text{para } s = l_1, l_2 \tag{3.29}$$

e na condição de bordo (3.23)-(3.24) a condição de compatibilidade fica da forma

$$sh(s)f(w_0(s)) - B(w_0(s))w_0'(s) = 0, \quad \text{para } s = l_1, l_2. \tag{3.30}$$

3.3.1 Estimativas a Priori

Agora supomos que existe uma solução clássica de (3.28),(3.21) e (3.22). E estimamos a norma de Hölder de tais soluções. A existência de regiões positivamente invariantes é verdadeira ainda no problema (3.27) e (3.3)-(3.5).

Lema 3.3.1. *Qualquer solução clássica de* (3.27), (3.9) *e* (3.3) *satisfazendo as hipotéses* (3.10)-(3.15) *é tal que* $u(x,t) \in \Delta$.

Demonstração. Suponhamos que existe algum ponto (x,t) tal que $u(x,t) \notin \Delta$. E consideremos as funções $G_1(u) = u_1, G_2(u) = u_2$ e $G_3(u) = 1 - u_1 - u_2$. Para cada $i \in \{1,2,3\}$ definamos $z_i(x,t) = G_i \circ u(x,t)$. Notemos que um ponto $u(x,t) \in \partial\Delta$ se $z_i(x,t) = 0$ para algum i. Seja t_0 o menor dos tempos onde $z_i(x,t) = 0$ para algum i. Notemos que $t_0 > 0$, já que $u(x,0) \in \operatorname{int}(\Delta)$.

Seja $x_0 \in \bar{\Omega}$ tal que $z_i(x_0,t_0) = 0$. Se $x_0 \in \Omega$ podemos usar a equação (3.27) e o fato de $\operatorname{div}(v) = 0$, para obter uma igualdade do tipo

$$u_t + \sum_{j=1}^{n} Jf u_{x_j} v_j = \sum_{j=i}^{n} (B(u)u_{x_j})_{x_j} + \varepsilon\left(\frac{e}{4} - u\right). \tag{3.31}$$

Onde Jf representa a matriz jacobiana de f. Utilizando as hipóteses (3.14) e (3.15). Existem funções α_i e $\mu_i \geq 0$ que dependem de u tal que $\nabla_u G_i(u) Jf = \alpha_i(u)\nabla_u G_i(u)$ e $\nabla_u G_i(u)B(u) = \mu_i(u)\nabla_u G_i(u)$ sempre que $G_i(u) = 0$. Multiplicando (3.31) pela esquerda por $\nabla_u G_i(u)$, usando o dito acima e a definição de z_i obtemos

$$z_{it} + \sum_{j=1}^{n} \alpha_i(u) z_{ix_j} v_j = \sum_{j=1}^{n} (\mu_i(u))_{x_j} z_{ix_j} + \mu_i z_{ix_jx_j} + \varepsilon \nabla_u G_i \left(\frac{e}{4} - u\right)$$

Dado que (x_0,t_0) é ponto de mínimo, temos que $z_{ix_j} = 0$ para todo j, portanto

$$z_{it} = \mu_i \sum_{j=1}^{n} z_{ix_jx_j} + \varepsilon \nabla_u G_i \left(\frac{e}{4} - u\right).$$

Notemos que a Hessiana de z_i em (x_0,t_0) e não negativa, assim $\mu_i \sum_{j=1}^{n} z_{ix_jx_j} \geq 0$. Agora, no caso $i \in \{1,2\}$, temos que o segundo termo da direita fica $\varepsilon\nabla_u G_i\left(\frac{e}{4} - u\right) = \varepsilon\left(\frac{1}{4} - u_i\right) > 0$, pois $u_i = 0$. No caso $i = 3$ temos que $\varepsilon \nabla_u G_3 \left(\frac{e}{4} - u\right) = \varepsilon\left((u_1 + u_2) - \frac{1}{2}\right) > 0$ se $z_3(x_0,t_0) = 0$. Em consequência o lado direito da equação é estritamente positivo. Como o lado esquerdo é não negativo, por (x_0,t_0) ser ponto de máximo, obtemos um absurdo.

Agora suponhamos que $x_0 \in \partial\Omega$. No caso $i = 2$ se $z_2(x_0,t_0) = 0$, da condição de bordo obtemos $-B_{22}(u)z_{ix} \cdot \vec{n} = -\theta B_{22}(u)\psi_i$. Dado que $\psi_i \in \operatorname{int}(\Delta)$ obtemos que $z_{ix}(x_0,t_0) \cdot \nu > 0$

absurdo já que (x_0, t_0) é ponto de mínimo. O caso $i = 1$ é completamente análogo. No caso de $z_3(x_0, t_0) = 0$. Somando as componentes da condição de bordo obtemos $-B_{11}(u)\nabla(u_1 + u_2) \cdot \nu = \theta B_{11}(u)(u_1 + u_2 - (\psi_1 + \psi_2))$. Assim $z_{3x} \cdot \nu = \theta(u_1 + u_2 - (\psi_1 + \psi_2)) > 0$ e $z_{3x} \cdot \nu > 0$. Novamente pelo fato de ser mínimo o ponto (x_0, t_0) obtemos um absurdo. Em consequência, não existe tempo em qual $z_i = 0$. Portanto $u(x, t) \in \Delta$ para todo $(x, t) \in \bar{Q}_T$. □

Nas próximas limitações ficamos restringidos às soluções de (3.28),(3.21) e (3.22), onde também supomos uma solução clássica para o problema.

Lema 3.3.2. *Supondo satisfeitas as hipóteses do Teorema 3.2.1. Se w é solução clássica de* (3.28),(3.21) *e* (3.22). *Existe constante $c > 0$ tal que*

$$\int_{L_T} |\nabla w_i|^2 dxdt \le c \quad para \quad i \in \{1, 2\}.$$

Demonstração. Se multiplicamos a equação $(3.28)_2$ por w_2 e integramos por partes no intervalo $[l_1, l_2]$ obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_L w_2^2 dr + \int_L B_{22}(w) w_{2r}^2 dr = (B_{22}(w) w_{2r} - rh(r) f_2(w)) w_2 \Big|_{l_1}^{l_2}$$
$$+ \int_L f_2(w)(rh(r)w_2)_r + \left(\frac{n-1}{r}\right) B_{22}(w) w_{2r} w_2 + \varepsilon \left(\frac{1}{4} - w_2\right) w_2 dr.$$

Usando a condição de parabolicidade, desigualdade de ε-Cauchy, condição de bordo e limitações uniformes dos coeficientes obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_L w_2^2 dr + \nu \int_L w_{2r}^2 dr \le \theta \sum_{s=l_1,l_2} |B_{22}(w)(w_2 - \psi_2)| w_2 + \frac{\nu}{2}\int_L w_{2r}^2 dr + c.$$

Da limitação uniforme dos coeficientes que aparecem na soma, integrando com respeito ao tempo e aproveitando que $\theta \in (0, 1)$, obtemos um c uniforme com respeito a θ, tal que

$$\int_{L_T} w_{2r}^2 drdt \le c.$$

Na equação $(3.28)_1$, fazemos o mesmo trabalho para obter

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_L w_1^2 dr + \int_L B_{11}(w) w_{1r}^2 dr = (B_{11}(w) w_{1r} - B_{12}(w) w_{2r} - rh(r) f_1(w)) w_1 \Big|_{l_1}^{l_2} + \int_L f_1(w) rh(r) w_{1r}$$
$$+ f_1(w)(rh(r))_r w_1 - B_{12}(w) w_{1r} w_{2r} + \left(\frac{n-1}{r}\right)(B_{11}(w) w_{1r} + B_{12}(w) w_{2r}) w_1 + \varepsilon \left(\frac{1}{4} - w_1\right) w_1 dr.$$

Usando de novo as limitações uniformes e desigualdade de ε-Cauchy conseguimos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_L w_1^2 dr + \frac{\nu}{2}\int_L w_{1r}^2 dr \le \theta \sum_{s+l_1,l_2} |B_{11}(w)(w_1-\psi_1) + B_{12}(w)(w_2-\psi_2)|w_1 + c\int_L w_{2r}^2 dr + c.$$

Das boas propriedades do termo no bordo, que novamente são uniformes em θ e das limitações já encontradas para w_{2r}. Podemos integrar com respeito ao tempo e obter um $c>0$ que não depende de θ, tal que

$$\int_{L_T} |w_{1r}|^2 drdt \le c.$$

$\square$

Lema 3.3.3. *Supondo satisfeitas as hipóteses do Teorema 3.2.1. Se w é solução clássica de* (3.28),(3.21) *e* (3.22). *Existem constantes $\alpha\in(0,1)$ e $c>0$ tais que $|w_2|_{L_T}^{(\alpha)} \le c$.*

Demonstração. Sejam $r_0\in\bar{L}$ e $\zeta=\zeta(r,t)$ função teste em K_ρ, bola centrada em r_0. Fixemos um $\delta'>0$ e definamos para cada $k\ge 1-\delta'$ as funções $w_2^{(k)}(r,t)=\max\{w_2(r,t)-k,0\}$. Denotemos por $K_\rho=[r_0^-,r_0^+]$, onde $r_0^-=\max\{l_1,r_0\}$ e $r_0^+=\min\{r_0,l_2\}$. Multiplicando a equação $(3.28)_2$ por $w_2^{(k)}\zeta^2$ e integrando por partes. Obtemos a igualdade

$$\int_{L_\rho} w_{2t}w_2^{(k)}\zeta^2 + B_{22}(w)w_{2r}(w_2^{(k)}\zeta^2)_r dr = (B_{22}(w)w_{2r} - rh(r)f_2(w))w_2^{(k)}\zeta^2\Big|_{r_0^-}^{r_0^+}$$
$$+\int_{L_\rho} (rh(r)w_2^{(k)}\zeta^2)_r f_2(w) + \left(\frac{n-1}{r}\right)B_{22}(w)w_{2r}w_2^{(k)}\zeta^2 + \varepsilon\left(\frac{1}{4}-w_2\right)w_2^{(k)}\zeta^2 dr.$$

Usando que baixo o sinal de integral podemos trocar os termos w_2 pelos termos $w_2^{(k)}$ obtemos

$$\int_{L_\rho} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w_2^{(k)}\zeta|^2 + B_{22}(w)|w_{2r}^{(k)}\zeta|^2 dr = (B_{22}(w)w_{2r} - rh(r)f_2(w))w_2^{(k)}\zeta^2\Big|_{r_0^-}^{r_0^+} + \int_{L_\rho} |w_2^{(k)}|^2\zeta\zeta_t$$
$$+(rh(r)w_2^{(k)}\zeta^2)_r f_2 - 2B_{22}w_{2r}^{(k)}w_2^{(k)}\zeta_r\zeta + \frac{n-1}{r}B_{22}(w)w_{2r}^{(k)}w_2^{(k)}\zeta^2 + \varepsilon\left(\frac{1}{4}-w_2\right)w_2^{(k)}\zeta^2 dr = I_1 + I_2.$$

Notemos que, para ρ pequeno

$$I_1 \le c\sum_{s=\pm 1} w_2^{(k)}\zeta^2(s,t) \le c\int_{L_\rho} |w_{2r}^{(k)}|\zeta^2 + w_2^{(k)}\zeta\zeta_r dr \tag{3.32}$$

e que

$$I_2 \le \frac{\nu}{4}\int_{L_\rho} |w_{2r}^{(k)}\zeta|^2 dr + c\int_{L_\rho} |w_2^{(k)}|^2(\zeta_r^2 + \zeta|\zeta_t|)dr + c\int_{L_\rho} (|w_2^{(k)}|^2 + |rh'(r)|^2 + |rh(r)|^2)1_{A_{k,\rho}(t)}\zeta^2 dr,$$

onde $A_{k,\rho}(t) = \{x \in \Omega_\rho : u_2^{(k)}(x,t) > 0\}$. Levando as desigualdades na igualdade anterior, usando a limitação uniforme de h e que $w_2^{(k)} \leq \delta'$ conseguimos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{L_\rho} |w_2^{(k)}\zeta|^2 dr + \frac{\nu}{2}\int_{L_\rho} |w_{2r}^{(k)}\zeta|^2 dr \leq c\int_{L_\rho} |w_2^{(k)}|^2(\zeta_r^2 + \zeta|\zeta_t|)dr + c\int_{L_\rho} 1_{A_{k,\rho}(t)}\zeta^2 dr.$$

Assim integrando com respeito ao tempo em $[t_0, t_0+\tau]$, obtemos uma desigualdade da forma (1.12) e pela Proposição 1.3.2 achamos um $\alpha \in (0,1)$ tal que $w_2 \in H^{\alpha,\alpha/2}(\bar{L}_T)$. $\square$

Lema 3.3.4. *Supondo satisfeitas as hipóteses do Teorema 3.2.1. Se w é solução clássica de* (3.28),(3.21) *e* (3.22)*. Existe constante $c > 0$ tal que*

$$\int_{L_T} w_{2r}^4 dr dt < c.$$

Demonstração. Consideremos a função auxiliar

$$\tilde{w}_2(r,t) = \int_{l_1}^r w_2(y,t)dy.$$

Da equação $(3.28)_2$ temos que

$$\tilde{w}_{2t}(r,t) = B_{22}(w)\tilde{w}_{2rr} + g_2(r,t) \tag{3.33}$$

onde

$$g_2(r,t) = \int_{l_1}^r (yh(y))_y f_2(w) + \frac{n-1}{y}B_{22}(w)w_{2y} + \varepsilon\left(\frac{1}{4} - w_2\right)dy$$
$$- rh(r)f_2(w)(r,t) - \theta B_{22}(w_2(l_1,t))(w_2(l_1,t) - \psi_2(l_1,t)).$$

Com condição inicial e de bordo

$$\tilde{w}_2(r,0) = \int_{1_1}^r w_{02}(y)dy, \quad \tilde{w}_2(l_1,t) = 0 \quad \text{e} \quad \tilde{w}_2(l_2,t) = \int_{l_1}^{l_2} w_2(y,t)dy. \tag{3.34}$$

A ideia é achar alguma limitação em L_q para a função g_2, onde ainda temos o termo w_{2y} baixo no sinal de integral. Para desfazer aquele termo, consideramos a função

$$H_2(w_2) = \int_0^{w_2} B_{22}(u)du.$$

Para tal função temos que $(H_2(w_2))_r = B_{22}(w_2)w_{2r}$ e substituindo em g_2 obtemos que

$$g_2(r,t) = \int_{l_1}^r (yh(y))_y f_2(w) + \frac{n-1}{y^2}H_2(w_2) + \varepsilon\left(\frac{1}{4} - w_2\right)dy + \frac{n-1}{r}H_2(w_2)(r,t)$$
$$- rh(r)f_2(w)(r,t) - \theta B_{22}(w_2(l_1,t))(w_2(l_1,t) - \psi_2(l_1,t)) - \frac{n-1}{l_1}H_2(w_2(l_1,t)).$$

Pela definição de H_2 e das propriedades de B_{22} temos um bom comportamento de H_2. Pelas limitações dos outros termos que aparecem em g_2, temos que $\|g_2\|_{q,L_T} \le c$ para qualquer $q \in \mathbb{N}$.

Notemos que $\tilde{w}_{2rr}(r,0) = w_{02r}(r)$. Portanto estendendo $\tilde{w}_2(r,0)$ a L_T, conseguimos que $\tilde{w}_2(r,0) \in W_q^{2,1}(L_T)$ para qualquer q.

Agora tal como foi feito no capítulo anterior, consideramos a função

$$z_2(r,t) = \frac{(l_2 - r)\tilde{w}_2(l_1,t) + (r - l_1)\tilde{w}_2(l_2,t)}{l_2 - l_1}$$

e notamos que $z_2 \in W_q^{2,1}(L_T)$. Com efeito, basta ver que $\|\tilde{w}_{2t}(l_2,t)\|_{q,[0,T]} \le c$. Utilizando $(3.28)_2$, conseguimos a igualdade

$$\begin{aligned}\tilde{w}_{2t}(l_2,t) = -\theta \sum_{s=l_1,l_2} B_{22}(w)(w_2 - \psi_2)(s,t) + \frac{n-1}{l_2} H_2(w_2)(l_2,t) - \frac{n-1}{l_1} H_2(w_2)(l_1,t) \\ + \int_{l_1}^{l_2} (yh(y))_y f_2(w) + \frac{n-1}{y^2} H_2 + \varepsilon \left(\frac{1}{4} - w_2\right) dy. \quad (3.35)\end{aligned}$$

Do anterior $z_2 \in W_q^{2,1}(L_T)$ e pela Proposição 1.4.1 aplicado no problema (3.33) e (3.34) conseguimos que

$$\|\tilde{w}_2\|_q^{(2)} \le c, \quad \text{para qualquer } q > 2.$$

Em particular no caso $q = 4$, conseguimos a limitação desejada. □

Lema 3.3.5. *Supondo satisfeitas as hipóteses do Teorema 3.2.1. Se w é solução clássica de* (3.28),(3.21) *e* (3.22). *Existem constantes $c > 0$ e $\alpha \in (0,1)$ tais que $|w_1|_{L_T}^{(\alpha)} \le c$.*

Demonstração. Sejam $r_0 \in \bar{L}$, $\zeta = \zeta(r,t)$ função teste em K_ρ e fixo um $\delta' > 0$ consideramos para cada $k \ge 1 - \delta'$ as funções $w_1^{(k)} = \max\{w_1 - k, 0\}$. Multiplicando a equação $(3.28)_1$ por $w_1^{(k)}\zeta^2$ e integrando por partes obtemos

$$\begin{aligned}\int_{L_\rho} w_{1t} w_1^{(k)} \zeta^2 + B_{11}(w) w_{1r} (w_1^{(k)}\zeta^2)_r dr = (B_{11}(w)w_{1r} + B_{22}(w)w_{2r} - rh(r)f_1(w)) w_1^{(k)} \zeta^2 \Big|_{r_0^-}^{r_0^+} \\ + \int_{L_\rho} (rh(r) w_1^{(k)}\zeta^2)_r f_1(w) - B_{12}(w) w_{2r} (w_1^{(k)}\zeta^2)_r + \frac{n-1}{r}(B_{11}(w)w_{1r} + B_{12}(w)w_{2r}) w_1^{(k)}\zeta^2 \\ + \varepsilon\left(\frac{1}{4} - w_1\right) w_1^{(k)} \zeta^2 dr.\end{aligned}$$

Pelo comportamento de $w_1^{(k)}$ baixo o sinal da integral conseguimos a expressão

$$\int_{L_\rho} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w_1^{(k)}\zeta|^2 + B_{11}(w)|w_{1r}^{(k)}\zeta|^2 dr = (B_{11}(w)w_{1r} + B_{12}(w)w_{2r} - rh(r)f_1(w))w_1^{(k)}\zeta^2\Big|_{r_0^-}^{r_0^+}$$
$$+\int_{L_\rho} |w_1^{(k)}|^2\zeta\zeta_t + (rh(r)w_1^{(k)}\zeta^2)_r f_1(w) - B_{12}(w)w_{2r}(w_1^{(k)}\zeta^2)_r - 2B_{11}(w)w_1^{(k)}w_{1r}^{(k)}\zeta\zeta_r$$
$$+\frac{n-1}{r}(B_{11}(w)w_{1r}^{(k)} + B_{12}(w)w_{2r})w_1^{(k)}\zeta^2 + \varepsilon\left(\frac{1}{4} - w_1\right)w_1^{(k)}\zeta^2 dr = I_1 + I_2.$$

Fazendo o mesmo que na desigualdade (3.32) temos

$$I_1 \leq c\int_{L_\rho} |w_{1r}^{(k)}|\zeta^2 + w_1^{(k)}\zeta|\zeta_r|dr$$

e na última integral, utilizando as limitações uniformes dos coeficientes e que $w_1^{(k)} \leq \delta'$ conseguimos

$$I_2 \leq \frac{\nu}{4}\int_{L_\rho} |w_{1r}^{(k)}\zeta|^2 dr + c\int_{L_\rho} |w_1^{(k)}|^2(\zeta_r^2 + \zeta|\zeta_t|)dr + c\int_{L_\rho}(1 + w_{2r}^2)1_{A_{k,\rho}(t)}\zeta^2 dr.$$

Juntando as últimas expressões obtemos

$$\frac{d}{dt}\int_{L_\rho} |w_1^{(k)}\zeta|^2 dr + \nu\int_{L_\rho} |w_{1r}^{(k)}\zeta|^2 dr \leq c\int_{L_\rho} |w_1^{(k)}|^2(\zeta_r^2 + \zeta|\zeta_t|)dr + c\int_{L_\rho}(1 + w_{2r}^2)1_{A_{k,\rho}(t)}\zeta^2 dr.$$

Integrando a última expressão com respeito ao tempo e utilizando Cauchy-Schwarz na última integral, obtemos

$$\frac{d}{dt}\int_{Q_{\rho,\tau}} |w_1^{(k)}\zeta|^2 drdt + \nu\int_{Q_{\rho,\tau}} |w_{1r}^{(k)}\zeta|^2 drdt \leq c\int_{Q_{\rho,\tau}} |w_1^{(k)}|^2(\zeta_r^2 + \zeta|\zeta_t|)dr$$
$$+ c\left(\int_{Q_{\rho,\tau}}(1 + w_{2r}^2)^2 drdt\right)^{1/2}\left(\int_{L_\rho} 1_{A_{k,\rho}(t)}\zeta^4 drdt\right)^{1/2}.$$

Pelo lema anterior, caimos na definição da classe $\hat{\mathcal{B}}_2$. Podemos fazer a mesma conta para $w_1^{(k)} = \max\{-w_1 - k, 0\}$ e $k \geq -\delta'$ fixo. Assim temos que a função w_1 está no espaço $\hat{\mathcal{B}}_2(\bar{L}_T, 1, \gamma, r, \delta, \kappa)$, para $r = q = 6$ e $\kappa = 1/2$. Assim pela Proposição 1.3.2, existe um $\alpha \in (0,1)$ e uma constante $c > 0$ tais que $w_1 \in H^{\alpha,\alpha/2}(\bar{L}_T)$ e $|w_1|_{L_T}^{(\alpha)} \leq c$. $\square$

Lema 3.3.6. *Supondo satisfeitas as hipóteses do Teorema 3.2.1. Se w é solução clássica de* (3.28),(3.21) *e* (3.22). *Existem constantes $\alpha \in (0,1)$ e $c > 0$ tais que $|w_2|_{L_T}^{(1+\alpha)} \leq c$.*

Demonstração. Consideramos a equação (3.33), utilizando que $w_1 \in H^{\alpha,\alpha/2}(\bar{L}_T)$ e que $H_2(w_2)$ é uma função Hölder, temos que $g_2 \in H^{\alpha,\alpha/2}(\bar{L}_T)$. Das hipóteses $\tilde{w}_2(r,0) \in H^{2+\alpha}(L)$ e $\tilde{w}_2(s,t) \in$

$H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(S_T)$, já que agora na expressão (3.35) obtemos $\tilde{w}_{2t}(l_2,t) \in H^{\alpha,\alpha/2}([0,T])$. Queremos, do mesmo jeito que no capítulo anterior, utilizar a Proposição 1.4.2. Para tal objetivo, precisamos provar a condição de compatibilidade de ordem 1, para o problema (3.33)-(3.34). Consideremos a função

$$\begin{aligned} w_2^{(1)}(s) &= B_{22}(w_0)w_0'(s) - sh(s)f_2(w_0)(s) + \frac{n-1}{s}H_2(w_{02})(s) - \theta B_{22}(w_{02})(w_{02}-\phi_2)(l_1) \\ &\quad - \frac{n-1}{l_1}H_2(w_{02})(l_1) + \int_{l_1}^{s} (yh)_y f_2(w_0) + \varepsilon\left(\frac{1}{4} - w_{02}\right) + \frac{n-1}{y^2}H_2(w_{02}(y))dy. \end{aligned}$$

Agora precisamos provar que $w_2^{(1)}(s) = \Phi_2^{(1)}(s)$, para $s \in \{l_1, l_2\}$, onde $\Phi_2^{(1)}(l_1) = 0$ e

$$\begin{aligned} \Phi_2^{(1)}(l_2) = -\theta \sum_{s=l_1,l_2} B_{22}(w_0)(w_{02}-\psi_2)(s) + \int_{l_1}^{l_2} (yh)_y f_2(w_0) + \varepsilon\left(\frac{1}{4} - w_{02}\right) + \frac{n-1}{y^2}H_2(w_{02})dy \\ + \left(\frac{n-1}{y}H_2(w_{02})\right)\Bigg|_{l_1}^{l_2}. \end{aligned}$$

Da condição de compatibilidade (3.29), obtemos que $w_2^{(1)}(l_1) = 0$. Do mesmo jeito provamos que $w_2^{(1)}(l_2) = \Phi_2^{(1)}(l_2)$. Utilizamos a Proposição 1.4.2 temos que $|\tilde{w}_2|_{L_T}^{(2+\alpha)} \leq c$ e obtemos o resultado. $\square$

Lema 3.3.7. *Supondo satisfeitas as hipóteses do Teorema 3.2.1. Se w é solução clássica de* (3.28),(3.21) *e* (3.22). *Existem constantes $\alpha \in (0,1)$ e $c > 0$, tais que $|w_1|_{L_T}^{(1+\alpha)} \leq c$.*

Demonstração. Consideremos agora a função

$$\tilde{w}_1(r,t) = \int_{l_1}^{r} w_1(y,t)dy.$$

Usando a equação $(3.28)_1$ conseguimos a igualdade

$$\tilde{w}_{1t}(r,t) = B_{11}(w)\tilde{w}_{1rr}(r,t) + g_1(r,t), \tag{3.36}$$

onde

$$\begin{aligned} g_1(r,t) &= \int_{l_1}^{r} (yh(y))_y f_1(w) + \frac{n-1}{y}(B_{11}(w)w_{1y} + B_{12}(w)w_{2y}) + \varepsilon\left(\frac{1}{4} - w_1\right)dy \\ &\quad + B_{12}(w)w_{2r}(r,t) - rh(r)f_1(w)(r,t) + -\theta(B_{11}(w)(w_1-\psi_1) + B_{12}(w)(w_2-\psi_2))(l_1,t). \end{aligned}$$

Além disso, temos a condição inicial e de bordo

$$\tilde{w}_1(r,0) = \int_{1_1}^{r} w_{01}(y)dy, \quad \tilde{w}_1(l_1,t) = 0 \quad \text{e} \quad \tilde{w}_1(l_2,t) = \int_{l_1}^{l_2} w_1(y,t)dy. \tag{3.37}$$

Dado que não temos controle na norma de Hölder de w_{1y}, definimos a função auxiliar

$$H_1(w) = \int_0^{w_1} B_{11}(u, w_2)du.$$

Usando regra da cadeia e integração por partes, obtemos a igualdade

$$\int_{l_1}^{r} \frac{n-1}{y} B_{11}(w) w_{1y} dy = \frac{n-1}{y} H_1 \Big|_{l_1}^{r} + \int_{l_1}^{r} \frac{n-1}{y^2} H_1 - \frac{n-1}{y}\frac{\partial H_1}{\partial w_2} w_{2y} dy.$$

Levando o termo anterior na equação ficamos com

$$\begin{aligned} g_1(r,t) = &\int_{l_1}^{r} (yh(y))_y f_1(w) + \varepsilon\left(\frac{1}{4} - w_1\right) + \frac{n-1}{y^2} H_1(w) + \frac{n-1}{y}\left(B_{12}(w) - \frac{\partial H_1}{\partial w_2}\right) w_{2y}(y,t) dy \\ &+ B_{12}(w) w_{2r}(r,t) - rh(r) f_1(w)(r,t) + \frac{n-1}{r} H_1(w)(r,t) \\ &- \theta(B_{11}(w)(w_1 - \psi_1) + B_{12}(w)(w_2 - \psi_2))(l_1, t) - \frac{n-1}{l_1} H_1(l_1, t). \end{aligned}$$

Repetindo a ideia do Lema 3.3.4 obtemos a igualdade

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{1t}(l_2,t) = &-\theta \sum_{l_1,l_2} B_{11}(w)(w_1 - \psi_1) + B_{12}(w)(w_2 - \psi_2)(s,t) + \int_{l_1}^{l_2} (yh)_y f_1(w) \\ &+ \frac{n-1}{y}\left(B_{12} - \frac{\partial H_1}{\partial w_2}\right) w_{2y} + \varepsilon\left(\frac{1}{4} - w_1\right) + \frac{n-1}{y^2} H_1 dy + \frac{n-1}{y} H_1 \Big|_{l_1}^{l_2}. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Dado que $w_{2r} \in H^{\beta,\beta/2}(\bar{L}_T)$ e das propriedades de composição e multiplicação de funções Hölder, conseguimos que $g_1 \in H^{\alpha,\alpha/2}(\bar{L}_T)$. Por hipótese, temos que $w_{01}(r) \in H^{2+\alpha}(L)$ e pelo lema anterior e da expressão (3.38) temos que $\tilde{w}_1(s,t) \in H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(S_T)$. Considerando a função

$$\begin{aligned} w_1^{(1)}(s) = &B_{11}(w_0) w_{01}'(s) + B_{12}(w_0) w_{02}'(s) - sh(s) f_1(w_0) + \frac{n-1}{s} H_1(w_0) \\ &- \theta(B_{11}(w_0)(w_{01} - \psi_1(0)) + B_{12}(w_0)(w_{02} - \psi_2(0))) - \frac{n-1}{l_1} H_1(w_0)(l_1) \\ &+ \int_{l_1}^{s} (yh)_y f_1(w_0) + \varepsilon\left(\frac{1}{4} - w_{01}\right) + \frac{n-1}{y}\left(B_{12}(w_0) - \frac{\partial H_1}{\partial w_2}\right) w_{02}'(y) + \frac{n-1}{y^2} H_1 dy. \end{aligned}$$

Precisamos mostrar que $w_1^{(1)}(s) = \Phi_1^{(1)}(s)$, para $s \in \{l_1, l_2\}$, onde $\Phi_1^{(1)}(l_1) = 0$ e

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(1)}(l_2) = &-\theta \sum_{s=l_1,l_2} B_{11}(w_0)(w_{01} - \psi_1)(s) + B_{12}(w_0)(w_{02} - \psi_2)(s) + \int_{l_1}^{l_2} (yh)_y f_1(w_0) \\ &+ \varepsilon\left(\frac{1}{4} - w_{01}\right) + \frac{n-1}{y}\left(B_{12}(w_0) - \frac{\partial H_1}{\partial w_2}\right) w_{02}'(y) + \frac{n-1}{y^2} H_1 dy + \frac{n-1}{y} H_1 \Big|_{l_1}^{l_2}. \end{aligned}$$

As igualdades acima são novamente satisfeitas por causa da igualdade (3.29). Assim é satisfeita a condição de compatibilidade de ordem 1 para o problema (3.36)-(3.37) e utilizando a Proposição 1.4.2 obtemos que $|\tilde{w}_1|_{L_T}^{(2+\alpha)} \leq c$ e a estimativa desejada. $\square$

Lema 3.3.8. *Supondo satisfeitas as hipóteses do Teorema 3.2.1. Se w é solução clássica de* (3.28),(3.21) *e* (3.22). *Existe uma constante $c > 0$ tal que $|w|_{L_T}^{(2+\beta)} \leq c$.*

Demonstração. Notemos que a equação $(3.28)_2$ pode ser escrita como

$$w_{2t} = B_{22}(w_2)w_{2rr} + G_2(r,t) \tag{3.39}$$

onde

$$G_2(r,t) = \frac{\partial B_{22}}{\partial w_2}w_{2r}^2 + \frac{n-1}{r}B_{22}(w_2)w_{2r} + \varepsilon\left(\frac{1}{4} - w_2\right) - rh(r)\left(\frac{\partial f_2}{\partial w_1}w_{1r} - \frac{\partial f_2}{\partial w_2}w_{2r}\right)$$

e consideramos as condições inicial e de bordo da forma

$$w_{2r} \pm \theta w_2 = (shB_{22}^{-1}(w_2)f_2(w) \pm \theta\psi_2)(s,t) = \Phi_2(s,t) \quad (s,t) \in S_T \quad \text{e} \quad w_2(r,0) = w_{02}(r) \quad r \in L. \tag{3.40}$$

Seja α dos Lemas 3.3.6 e 3.3.7 e definamos $\gamma = \min\{\alpha, \beta\}$. Temos que $G_2 \in H^{\gamma,\gamma/2}(L_T)$ como consequência de $f \circ g$ ser Hölder com exponente a multiplicação dos exponentes de f e g, que a multiplicação de f e g seja Hölder com exponente o máximo dos exponentes de f e g conseguimos que $\Phi_2 \in H^{1+\gamma,(1+\gamma)/2}(S_T)$. Pela hipótese (3.25) são satisfeitas as condições de compatibilidade de ordem zero para o problema (3.39)-(3.40). Portanto, utilizando a Proposição 1.4.3 no problema (3.39)-(3.40) obtemos que $|w_2|_{L_T}^{(2+\gamma)} \leq c$.

Consideremos agora a equação $(3.28)_1$ como

$$w_{1t} = B_{11}(w)w_{1rr} + G_1(r,t) \tag{3.41}$$

onde

$$\begin{aligned} G_1(r,t) = \frac{\partial B_{11}}{\partial w_1}w_{1r}^2 + \frac{\partial B_{12}}{\partial w_2}w_{2r}^2 + \left(\frac{\partial B_{11}}{\partial w_2} + \frac{\partial B_{12}}{\partial w_1}\right)w_{1r}w_{2r} - rh(r)\left(\frac{\partial f_1}{\partial w_1}w_{1r} + \frac{\partial f_1}{\partial w_2}w_{2r}\right) \\ + \frac{n-1}{r}(B_{11}(w)w_{1r} + B_{12}(w)w_{2r}) + \varepsilon\left(\frac{1}{4} - w_1\right), \end{aligned}$$

condição inicial

$$w_1(r,0) = w_{01}(r) \quad \text{para } r \in L \tag{3.42}$$

e condição de bordo da forma

$$w_{1r} \pm \theta w_1 = \pm\theta\psi_1 + B_{11}^{-1}(w)[rh(r)f_1(w) - B_{12}(w)(w_{2r} \pm \theta(w_2 - \psi_2))] = \Phi_1 \quad \text{em } S_T. \tag{3.43}$$

Igual como foi feito anteriormente, conseguimos provar que $G_1(r,t) \in H^{\gamma,\gamma/2}(L_T)$. Agora usando que $|w_2|_{L_T}^{(2+\gamma)} \leq c$, obtemos que $w_{2r} \in H^{(1+\gamma)/2}([0,T])$. Em consequência, por multiplicação e composição de funções Hölder, conseguimos que $\Phi_1 \in H^{(1+\gamma)/2}([0,T])$. Da hipótese (3.25) temos satisfeitas as condições de compatibilidade de ordem zero para o problema (3.41)-(3.43). Assim, pela Proposição 1.4.3 obtemos $|w_1|_{L_T}^{(2+\gamma)} \leq c$. Usando novamente a mesma ideia, podemos obter as limitações para o exponente β. □

3.3.2 Existência de solução

Consideremos a função $v = w - w_0$, do problema (3.28),(3.21) e (3.22). Temos que v satisfaz a equação

$$v_t + rh(r)f(v+w_0)_r = (B(v+w_0)(v+w_0)_r)_r + \frac{n-1}{r}B(v+w_0)(v+w_0)_r + \varepsilon\left(\frac{e}{4} - (v+w_0)\right) \tag{3.44}$$

com condição de bordo

$$sh(s)f(v+w_0) - B(v+w_0)(v+w_0)_r = \pm\theta B(v+w_0)(v+w_0-\psi^{\pm}) \quad \text{em} \quad \{l_1,l_2\}\times[0,T] \tag{3.45}$$

e com condição inicial

$$w(r,0) = 0. \tag{3.46}$$

Definamos o espaço $\mathfrak{B} = \{v \in H^{1+\beta,(1+\beta)/2}(L_T) : v|_{t=0} = 0\}$ e seja $A : [0,1]\times\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$, o operador definido como $A(\lambda,\eta) = v$ onde v é solução da equação

$$v_t + \lambda rh(r)f(\eta+w_0)_r = (B_\lambda(\eta+w_0)(v+w_0)_r)_r + \frac{n-1}{r}B_\lambda(\eta+w_0)(v+w_0)_r + \lambda\varepsilon\left(\frac{e}{4} - (v+w_0)\right) \tag{3.47}$$

para $B_\lambda = \lambda B + (1-\lambda)\nu Id$. Também é satisfeita a condição de bordo

$$\lambda sh(s)f(\eta+w_0) - B_\lambda(\eta+w_0)(v+w_0)_r = \pm\theta\lambda B(\eta+w_0)(v+w_0-\psi^{\pm}) \quad \text{em} \quad \{l_1,l_2\}\times[0,T] \tag{3.48}$$

e a condição inicial

$$v(r,0) = 0. \tag{3.49}$$

Notemos que da condição $\nabla u_0 \cdot \vec{n} = 0$ e pelo fato de considerar $w(r,0) = v(r,0) = 0$, temos que a condição de compatibilidade se mantem para o problema (3.47)-(3.49). Assim pela Proposição 1.4.3 a função A está bem definida. De fato ao estudar os pontos fixos de $A(\lambda,\eta)$, pelos mesmos argumentos que no Capítulo 2, podemos utilizar os lemas anteriores e obter que para qualquer $A(\lambda,v) = v$, temos que $|v|_{L_T}^{(2+\beta)} \leq M$, para M uniforme de θ e λ.

Seja o conjunto

$$\mathcal{U} = \{v \in \mathfrak{B} : |v|_{L_T}^{(1+\beta)} \leq M'\},$$

onde $M < M'$. Pelo anterior não temos pontos fixos no bordo de $\mathcal{U}$ e temos que A é compacta. Também notemos que A é uniformemente contínua com respeito a λ. Com efeito, se consideramos $\lambda', \lambda'' \in [0,1]$ e as imagens v', v'', temos que para $v = v' - v''$ está associado o problema, onde omitimos o termo $\eta + u_0$ de B,

$$v_t + (\lambda' - \lambda'')f(\eta + u_0)_r = (B_{\lambda'} v_r)_r + \frac{n-1}{r} B_{\lambda'} v_r - \varepsilon \lambda' v + \varepsilon(\lambda' - \lambda'')\left(\frac{1}{4} - (v'' + w_0)\right)$$
$$+ (\lambda' - \lambda'')[((B - \nu Id)(v'' + u_0)_r)_r + (B - \nu Id)(v'' + w_0)_r]$$

com condição de bordo da forma

$$B_{\lambda'} v_r \pm \theta \lambda' B v = (\lambda' - \lambda'')[sh(s)f(w + u_0) - (B - \nu Id)(v'' + w_0)_r \mp \theta B(v'' + w_0 - \psi^{\pm})]$$

e condição inicial

$$v(x,0) = 0.$$

Utilizando a Proposição 1.4.3 conseguimos a limitação

$$|v|_{L_T}^{(2+\beta)} \leq c|\lambda' - \lambda''|,$$

que permite dizer que A é uniformemente contínua com respeito a λ. Agora basta ver que no caso $\lambda = 0$, temos o problema

$$v_t = \nu(v + w_0)_{rr} + \nu \frac{n-1}{r}(v + w_0)_r,$$

com as condições de bordo e inicial da forma

$$v_x = -u_{0x} \text{ se } x = \pm 1 \quad \text{e} \quad v(x,0) = 0 \text{ se } x \in \Omega.$$

Problema que tem uma única solução e suave, por Proposição 1.4.3 e pelo qual podemos utilizar o Teorema de Leray-Schauder para consequir uma função w solução do problema (3.28),(3.21) e (3.22).

3.4 Prova Teorema 3.2.1

Dado que cada uma das estimativas nas normas de Hölder são uniformes com respeito a ε considerando $\varepsilon \to 0$, conseguimos uma função w solução de (3.20),(3.21) e (3.22) com $w \in H^{2+\beta, 1+\beta/2}(\bar{L}_T)$ e $w(r,t) \in \Delta$. Assim temos que efetivamente existe solução u de (3.8), (3.9) e (3.3) na região $\Omega \times [0,T]$, com $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : l_1 \leq |x| \leq l_2\}$ e $u \in \Delta$. Para a unicidade da solução basta considerar u' e u'' duas soluções do problema (3.8), (3.9) e (3.3) e consideramos $u = u' - u''$. Notemos que satisfaz

$$u_t + \operatorname{div}((f(u') - f(u''))v) = \operatorname{div}(B(u')\nabla u) + \operatorname{div}((B(u') - B(u''))\nabla u'') \tag{3.50}$$

e a condição de bordo

$$[(f(u') - f(u''))v - (B(u)\nabla u + (B(u') - B(u''))\nabla u''] \cdot \vec{n} = \theta[B(u)u + (B(u') - B(u''))(u'' - \psi)]. \tag{3.51}$$

Multiplicamos a equação $(3.50)_2$ por u_2 e integramos por partes para obter

$$\int_\Omega u_{2t}u_2 dx + \int_\Omega |\nabla u_2|^2 dx = \int_{\partial\Omega} u_2(B_{22}(u')\nabla u_2 + (B_{22}(u') - B_{22}(u''))\nabla u_2'' - (f_2(u') - f_2(u''))v) \cdot \vec{n} dy$$
$$+ \int_\Omega (f_2(u') - f_2(u''))v \cdot \nabla u_2 - (B_{22}(u') - B_{22}(u''))\nabla u_2'' \cdot \nabla u_2 dx.$$

A integral do bordo é controlada utilizando $(3.51)_2$ e a desigualdade (1.5). Com respeito aos outro termos, utilizamos desigualdade de ε-Cauchy e suavidade dos coeficientes. Assim obtemos que

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u_2^2 dx + \nu \int_\Omega |\nabla u_2|^2 dx \leq c \int_\Omega |u' - u''|^2 dx. \tag{3.52}$$

Multiplicando a equação $(3.50)_1$ por u_1 e integrando por partes, consequimos

$$\int_\Omega u_{1t}u_1 dx + \int_\Omega |\nabla u_1|^2 dx = \int_{\partial\Omega} u_1(B_{11}(u')\nabla u_1 + B_{12}(u')\nabla u_2 + (B_{11}(u') - B_{11}(u''))\nabla u_1''$$
$$+ (B_{12}(u') - B_{12}(u''))\nabla u_2'' - (f_1(u') - f_1(u''))v) \cdot \vec{n} dy + \int_\Omega (f_1(u') - f_1(u''))v \cdot \nabla u_1$$
$$- (B_{11}(u') - B_{11}(u''))\nabla u_1'' \cdot \nabla u_1 - (B_{12}(u') - B_{12}(u''))\nabla u_2'' \cdot \nabla u_1 - B_{12}(u')\nabla u_1 \cdot \nabla u_2 dx.$$

Com o mesmo espirito no caso da segunda equação obtemos para u_1 a desigualdade

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u_1^2 dx + \nu \int_\Omega |\nabla u_1|^2 dx \leq c \int_\Omega |u' - u''|^2 + |\nabla u_2|^2 dx.$$

Integrando com respeito ao tempo cada uma das desigualdades e juntando obtemos que

$$\frac{d}{dt}\int_{Q_T} |u|^2 dx dt \leq c \int_{Q_T} |u|^2 dx dt.$$

Assim por Gronwall, conseguimos a unicidade.

3.5 Prova Teorema 3.2.2

Pela condição de compatibilidade (3.26) temos que podemos perturbar ela por um θ e conseguir uma condição da forma (3.25), com $\psi(s,0) = u_0$ no bordo. Depois podemos estender a função ψ suavemente e obter uma solução de (3.8), (3.9) e (3.3) dada pelo Teorema anterior, que vamos a denotar por u^θ. Como antes cada uma das soluções u^θ dos problemas (3.1)-(3.5), são tais que $|u^\theta|_{\bar{Q}_T}^{(2+\beta)} \leq c$, onde c não depende de θ. Em consequência, podemos extrair uma subsequência $\theta' \to 0$ tal que $u^{\theta'} \to u$ em $H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\bar{Q}_T)$, com $u \in H^{2+\beta,1+\beta/2}(\bar{Q}_T)$ e solução clássica do problema (3.1)-(3.3) e (3.6)-(3.7). Além disso $u(x,t) \in \Delta$ para todo $(x,t) \in \bar{Q}_T$. A unicidade é provada em forma análoga ao caso anterior.

3.6 Caso geral e problemas abertos

Dado que é impossível aplicar a técnica usada no capítulo anterior, uma forma como pode ser abordado o problema (3.1)-(3.5) é primeiro resolver para condição de bordo mista linear, da forma

$$\delta \nabla u_i \cdot \vec{n} + u_i = \psi_i, \quad \text{em } S_T \text{ para } i \in \{1,2\}. \tag{3.53}$$

Para resolver (3.1)-(3.3) e (3.53), a estratégia seria utilizar as ideias de [7]. Já vimos que o princípio de regiões positivamente invariantes pode ser provado em tal caso e de fato podemos conseguir limitação da norma L_2 de ∇u e que u_2 é Hölder contínua com norma uniformemente limitada, isso seguindo a mesma linha que no caso 1-dimensional.

Depois de conseguir tais limitações, multiplicamos a equação (3.2) por $\operatorname{div}(\nabla u_2 \zeta^2)$ e integramos num domínio Ω_ρ com ζ função teste em K_ρ. Aí aproveitando a parabolicidade da equação conseguimos um termo com sinal positivo para $|u_{2xx}|^2$. Ao utilizar a desigualdade de ε-Cauchy, aparece um termo da forma $|\nabla u_2|^4 \zeta^2$ que pode ser controlado com o Lema 1.2.1. Assim podemos achar uma estimativa tanto para u_{2xx} e u_{2x}^2 em L_2. Agora, deveríamos utilizar a mesma ideia do Lema 3.3.5 e assim provar que u_1 é Hölder contínua. Mas quando provamos a pertença de u_1 no espaço $\mathcal{B}_2$ obtemos no exponente $2(1+\kappa)/r$, na desigualdade (1.11), o exponente $1/2$. O que no caso geral n-dimensional, considerando $q = r$ na igualdade (1.10), é da forma $n/(n+2)$. Assim para $n \geq 2$ qualquer κ que procuremos é necessariamente menor o igual que zero.

Uma forma de contornar o problema, seria conseguir um exponente melhor que $1/2$, de tal jeito poderíamos atingir maiores dimensões. Assim, devemos ter uma limitação para $p > 4$ da norma L_p de u_{2x}. Para tal objetivo multiplicamos a equação (3.2) por $\operatorname{div}(|\nabla u_2|^s \nabla u_2 \zeta^2)$. O problema que aparece ao multiplicar por tal termo é que a interacção de ∇u_1 presente no fluxo f é maior do que temos controlado para ∇u_1. Até o momento, não aparece uma técnica suficiente para resolver tal comportamento no caso geral.

Uma forma de simplificar o problema, seria considerar $f_2(u) = f_2(u_2)$. Em tal caso, a segunda componente da equação (3.8), fica da forma

$$u_{2t} + \operatorname{div}(f_2(u_2)v) = \operatorname{div}(B_{22}(u_2)\nabla u_2)$$

e a condição de bordo, fica

$$(f_2(u_2)v - B_{22}(u_2)\nabla u_2) \cdot \vec{n} = \theta B_{22}(u_2)(u_2 - \psi_2).$$

Que tem uma única solução clássica, utilizando a teoria para equações quasilineares parabólicas no capítulo V do livro [9]. Em consequência, no problema (3.1),(3.3) e (3.4), consideramos u_2 como dado conhecido, o qual tem boas propriedades pelo dito anteriormente. Assim novamente usando [9], existe uma única solução u_1 e pelo provado no Lema 3.3.1 fica invariante no domínio Δ. Cada uma das estimativas que são achadas, são uniformes com respeito ao parâmetro θ, pelo que a existência de solução no caso de 0-fluxo de Neumann é análoga como foi feito anteriormente. O problema para uma f_2 em geral, fica em aberto para um trabalho próximo.

Bibliografia

[1] Adams, R. A. *Sobolev spaces.* Academic Press, New York-London, 1975. Pure and Applied Mathematics, Vol. 65.

[2] Berres, S., Bürger, R., and Frid, H. Neumann problems for quasi-linear parabolic systems modeling polydisperse suspensions. *SIAM J. Math. Anal. 38* (2006), 557–573.

[3] Chueh, K. N., Conley, C. C., and Smoller, J. A. Positively invariant regions for systems of nonlinear diffusion equations. *Indiana Univ. Math. J. 26*, 2 (1977), 373–392.

[4] Courant, R., and Hilbert, D. *Methods of mathematical physics. Vol. II: Partial differential equations.* (Vol. II by R. Courant.). Interscience Publishers (a division of John Wiley & Sons), New York-Lon don, 1962.

[5] De Giorgi, E. Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari. *Mem. Accad. Sci. Torino. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (3) 3* (1957), 25–43.

[6] Frid, H., and Shelukhin, V. A quasi-linear parabolic system for three-phase capillary flow in porous media. *SIAM J. Math. Anal. 35*, 4 (2003), 1029–1041.

[7] Frid, H., and Shelukhin, V. Initial boundary value problems for a quasi-linear parabolic system in three-phase capillary flow in porous media. *SIAM J. Math. Anal. 36*, 5 (2005), 1407–1425.

[8] Ladyzhenskaya, O. A. *The mathematical theory of viscous incompressible flow.* Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1969.

[9] Ladyzhenskaya, O. A., Solonnikov, V. A., and Ural'ceva, N. N. *Linear and quasilinear equations of parabolic type.* Translations of Mathematical Monographs, Vol. 23. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1968.

[10] Ladyzhenskaya, O. A., and Ural'ceva, N. N. A boundary-value problem for linear and quasi-linear parabolic equations. I, II, III. *Iaz. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 26 (1962), 5-52; ibid. 26 (1962), 753- 780; ibid. 27* (1962), 161–240.

[11] Leray, J., and Schauder, J. Topologie et équations fonctionnelles. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) 51* (1934), 45–78.

[12] Moser, J. A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations. *Comm. Pure Appl. Math. 13* (1960), 457–468.

[13] Serre, D. *Systems of conservation laws. 2.* Cambridge University Press, Cambridge, 2000. Geometric structures, oscillations, and initial-boundary value problems.

[14] Smoller, J. *Shock waves and reaction-diffusion equations*, second ed., vol. 258 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften.* Springer-Verlag, New York, 1994.