

INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

ESTABILIDADE DE UM TREM DE ONDAS SOBRE
UM FUNDO MARINHO ALTAMENTE VARIÁVEL

Autora: Ana Maria Soares Luz

Orientador: Prof. Dr. André Nachbin

25 de Março de 2009



Ministério
da Ciência
e Tecnologia



Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Ana Maria Soares Luz

Licenciada em Matemática pela Universidade Federal do Pará - UFPA (Belém, Pará). Mestre em Matemática pela Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada- IMPA (Rio de Janeiro).

Ficha Catalográfica

Luz, A. M. S.

Estabilidade de um trem de ondas sobre um fundo marinho altamente variável / Ana Maria Soares Luz; orientador: André Nachbin. — Rio de Janeiro : IMPA, 2009.

v., 65 f: il. ; 29,7 cm

1. Tese (doutorado) - Instituto de Matemática Pura e Aplicada.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese. 2. Ondas Aquáticas. 3. Equação de Schrödinger Não-Linear. 4. Teoria assintótica. I. Nachbin, A. II. Instituto de Matemática Pura e Aplicada.. III. Título.

CDD: 510

Para três exemplos de vida: minha mãe Sonia, vó Zezé (*in memoriam*) e vó
Leonor.

Agradecimentos

- À Deus, pois sua presença é real na minha vida. Obrigada por todas as graças concedidas para eu chegar até aqui!
- À minha mãe por todo amor, apoio e por sempre me incentivar
- À minha avó Zelinda (deve estar feliz por mim aí no céu!)
- Ao meu irmão José Luiz.
- Ao Thiago, por todo apoio, porque sei “Que Deus me ama, que não estou só. Que Deus cuida de mim, quando fala pela tua voz, que me diz: Coragem.”
- Ao meu orientador, Prof. André Nachbin, por todos os conhecimentos que pude adquirir sob sua orientação e por todos os seus conselhos.
- Aos demais membros da Banca: Prof. Dan Marchesin (IMPA), Prof. Daniel G. Alfaro Vigo (IMPA), Prof. Roberto André Kraenkel (IFT-UNESP) e a Prof^a. Stefanella Boatto (UFRJ) pela presença e sugestões!
- Aos professores do IMPA, profissionais dedicados, pelos ensinamentos adquiridos durante o mestrado e doutorado.
- Aos meus amigos do IMPA por todos os momentos que desfrutamos juntos: lazer, estresse, amizade, estudo. Principalmente pelo apoio para chegar até o fim!
- Aos amigos que fiz no Rio, que por saberem que vim para cá estudar sempre me incentivaram. Obrigada aos amigos do Remo (Botafogo), amigos da Igreja (SJB) e do Centro Cultural Itaporã.
- Um agradecimento especial à Vanessa Luiz, Cláudia e Ana Paula.
- Aos demais funcionários do IMPA (verdadeiros amigos que foram minha família durante estes anos) por todo auxílio.
- À ANP pelo suporte financeiro durante o doutorado.

Resumo

Luz, A. M. S.; Nachbin, A. **Estabilidade de um trem de ondas sobre um fundo marinho altamente variável**. Rio de Janeiro, 2009. 65p. Tese de Doutorado — Instituto de Matemática Pura e Aplicada.

Obtemos uma equação de Schrödinger não linear para a envoltória da amplitude de ondas moduladas lentamente sobre uma topografia variável em profundidade intermediária. Para a obtenção de tal modelo, consideramos as equações de Euler para fluidos invíscidos e utilizamos a técnica de análise assintótica em múltiplas escalas a nível das equações da teoria do potencial para obter um modelo reduzido. Tal modelo é dito reduzido no sentido que reduz a teoria do potencial não linear em duas dimensões espaciais para uma dimensão ao longo da fronteira livre. No que diz respeito à geometria do problema, consideramos no fundo a topografia do solo oceânico e/ou a presença de estruturas submarinas e uma fronteira livre na superfície do mar. Para modelagem de tal geometria usamos coordenadas curvilíneas. Através de uma aplicação conforme transformamos o nosso sistema de coordenadas em um de coordenadas curvilíneas que representam o domínio físico original mapeado em um domínio mais simples geometricamente (uma faixa). Nesta etapa usamos o Schwarz-Christoffel Toolbox do Matlab como ferramenta para auxiliar no processo de modelagem. Do ponto de vista matemático, e para simulações computacionais, o modelo obtido é mais simples que o problema em sua formulação original. Através deste pode-se obter informações importantes sobre as regiões costeiras e questões como viabilidade de atividades de exploração de petróleo e gás nestas regiões. O modelo engloba topografias mais gerais do que Pihl *et al.* [18] e Mei e Hancock [15], que exigem a restrição de suavidade e pequena amplitude para a batimetria. Aqui não vamos exigir tais restrições, consideraremos até grandes variações na amplitude da topografia. A equação de Schrödinger que obtivemos apresenta informações sobre a topografia em mais de um coeficiente, inclusive no que está agregado ao termo não linear. Este fato nos possibilitou fazer um estudo de como a topografia afeta o ponto de focalização/defocalização (“*focusing/defocusing*”) para ondas de Stokes.

Palavras-chave

Ondas Aquáticas. Equação de Schrödinger Não-Linear. Teoria assintótica.

Abstract

Luz, A. M. S.; Nachbin, A. **Wave train stability in the presence of a highly variable topography**. Rio de Janeiro, 2009. 65p. PhD Thesis — Instituto de Matemática Pura e Aplicada.

We derive a nonlinear Schrödinger equation for the envelope of slowly modulated waves propagating over a large amplitude topography at intermediate depth. To obtain such a model, we consider the Euler equations for inviscid fluids. We perform the asymptotic simplification of the nonlinear potential theory equations by a method of multiple scales resulting in a reduced model. Such model is called reduced because it simplifies the equations of the nonlinear potential theory from two spatial dimensions to a one dimensional model at the free boundary. Regarding the geometry of the problem, we consider a mean-zero large amplitude topography at the bottom and/or the presence of submarine structures together with a free boundary at the surface of the sea. For such a geometry we use curvilinear coordinates. Through a conformal mapping we transform our cartesian system into curvilinear coordinates, namely mapping the original physical domain into a simpler domain (a uniform strip). At this stage we use Matlab's Schwarz-Christoffel Toolbox to help us gain intuition. From the mathematical point of view, and computational simulations, the derived model is simpler than the problem in its original formulation. By means of an efficient model one can get important information in coastal regions and address questions like viability of oil and gas recovery in these regions. The model includes more general topographies than Pihl *et al.* [18] and Mei and Hancock [15], that required restrictions on the smoothness of the small amplitude bathymetry. Here we will not require such restrictions. The Schrodinger equation derived contains information about the topography in more than one coefficient, including the cubic nonlinear term. This allowed us to make a study on how the topography affects the focusing/defocusing properties of Stoke's waves.

Keywords

Water Waves. Nonlinear Schrödinger Equation. Asymptotic theory.

Sumário

Introdução	8
1 Equações de evolução para um trem de ondas sobre um fundo plano	11
1.1 O Problema em Primeira Ordem	16
1.2 O Problema em Segunda Ordem	16
1.3 O Problema em Terceira Ordem	21
1.4 Obtendo a Forma Clássica de uma Equação de Schrödinger Não Linear (SNL)	23
2 Equações de Evolução para um trem de ondas sobre um fundo variável	25
2.1 Formulação em Coordenadas Curvilíneas	25
2.2 O coeficiente da superfície livre	30
2.3 Análise assintótica em múltiplas escalas para topografias de grande amplitude	37
2.4 Forma Clássica de uma Equação de Schrödinger Não Linear (SNL) com Amortecimento	48
2.5 Ondas de Stokes: Estabilidade <i>versus</i> Topografia	50
Considerações Finais	55
A Aplicação de Schwarz-Christoffel (SC)	57
B Função de Green	59
C Definições de probabilidade	63
Referências Bibliográficas	64

“Aí onde estão as nossas aspirações, o nosso trabalho, os nossos amores - aí está o lugar do nosso encontro cotidiano com Cristo. É no meio das coisas materiais da terra que nos devemos santificar, servindo a Deus e a todos os homens. Na linha do horizonte, meus filhos, parecem unir-se o céu e a terra. Mas não: onde de verdade se juntam é no coração, quando se vive santamente a vida diária...”

São Josemaria Escrivá, da homília *“Amar o mundo apaixonadamente”*,
8-X-1967.

Introdução

As inovações tecnológicas têm refletido positivamente para o crescimento e desenvolvimento da exploração *offshore* no Brasil. Neste tipo de exploração são necessárias informações sobre a viabilidade e segurança das plataformas. Deste modo, é importante um estudo da dinâmica de ondas de superfície sobre topografias variáveis.

O nosso objetivo é apresentar um modelo que capture como a topografia do fundo marinho e/ou estruturas submersas podem influenciar a evolução de um trem de ondas na superfície do mar em uma região com profundidade intermediária. Entenda-se aqui que o comprimento de onda é da mesma ordem da profundidade média por onde a onda propaga. Em Ruiz de Zárate Fábregas [19] um estudo semelhante foi feito para ondas internas utilizando uma outra abordagem (transformada de Hilbert e o operador Dirichlet-to-Neumann).

Para obter tal modelo consideramos as equações para ondas aquáticas conhecidas na literatura (Mei [14] ou Whitham [20]), obtidas a partir das equações de Euler para fluidos invíscidos. Deduziremos um conjunto de equações que governa a evolução de um trem de ondas de superfície com as amplitudes moduladas lentamente. No fundo temos uma topografia que pode, entre outras propriedades, ter grande variação de amplitude, ser aleatória e não ser contínua, podendo apresentar múltiplos valores. Suporemos que as ondas na superfície livre são essencialmente senoidais e propagam-se em uma direção. Mais especificamente, obteremos uma equação de Schrödinger para a envoltória do trem de ondas senoidais, utilizando expansões assintóticas em múltiplas escalas.

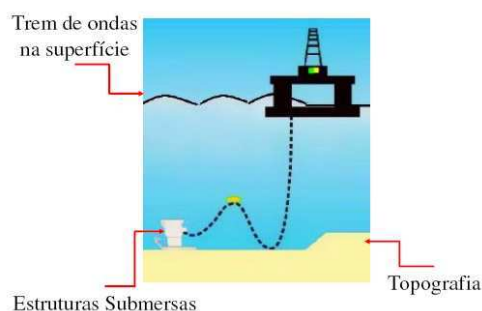


Figura 1: Figura esquemática do problema que está sendo modelado.

Consideraremos um escoamento numa região delimitada inferiormente por

um fundo impermeável e estacionário. No Capítulo 1 suporemos que este fundo é plano a uma profundidade finita e apresentaremos a abordagem de Mei [14] para obtenção dessas equações. No Capítulo 2, consideraremos primeiramente a presença de topografia e/ou estruturas submersas com perfis periódicos para estimular uma intuição física do problema, e, num segundo momento, com perfis aleatórios na dedução das equações de evolução para a envoltória do trem de ondas.

Entre as técnicas utilizadas no Capítulo 2 para deduzir tais equações destacamos o mapeamento conforme, mais especificamente, a aplicação de Schwarz-Christoffel. Tal aplicação será utilizada para lidar com a geometria do problema. Mapearemos o domínio físico original em um domínio mais simples geometricamente (uma faixa uniforme), deste modo transformando o nosso problema em um outro semelhante ao qual já trabalhamos no Capítulo anterior. Realiza-se tal procedimento seguindo a abordagem de Nachbin [16] e Hamilton [9]. Nesta etapa usamos o Schwarz-Christoffel Toolbox (**SCT**) do Matlab [4] como ferramenta para auxiliar no processo de modelagem. Os exemplos gerados pelo SCT mostram o benefício trazido pelo uso da aplicação conforme: englobar topografias mais gerais do que os já conhecidos para o mesmo modelo físico (trem de ondas sobre topografias variáveis a uma profundidade intermediária). Por exemplo, em Pihl *et al.* [18] e Mei e Hancock [15], a função que descreve a batimetria aleatória deve ser suave e de pequena amplitude enquanto que no nosso modelo a variação do solo marinho pode ter amplitude grande, ser aleatória e não precisa ser contínua. Depois de fazermos a análise assintótica em múltiplas escalas a nível das equações da teoria do potencial (após o mapeamento conforme), obtemos como resultado uma equação de Schrödinger cúbica não linear em coordenadas curvilíneas acompanhando a topografia. A essência da análise assintótica é transformar o problema não linear de evolução em uma sequência de problemas de valor de contorno lineares. A equação de Schrödinger surge a partir da condição de compatibilidade dos problemas de valor de contorno.

A abordagem via a aplicação conforme trouxe novos desafios: o problema de valor de contorno a derivadas parciais que antes tinha coeficientes constantes passou a ter coeficientes variáveis. Além disso o termo forçante na condição de fronteira de fundo mudou para a fronteira da superfície livre. Desafios interessantes que nos ajudaram também a ter resultados mais interessantes ainda. Por exemplo a função de Green utilizada na solução do problema de valor de contorno é diferente da encontrada em Mei e Hancock [15]. Por conta da aplicação conforme e das técnicas que usamos para lidar com os desafios listados acima (como a expansão do coeficiente variável $M(\xi)$, por exemplo), obtemos uma equação de Schrödinger que apresenta informações sobre a topografia em mais de um coe-

ficiente, inclusive no que está agregado ao termo não linear. Isto não consta no trabalho de Mei e Hancock [15]; no modelo deles toda a informação da topografia está no coeficiente do termo linear de amortecimento que é adicionado à forma clássica da equação de Schrödinger não linear. Este diferencial no modelo obtido possibilitou-nos fazer um estudo sobre a relação entre a estabilidade das ondas de Stokes e os efeitos da topografia em um regime diferente do que já havia sido feito na literatura (Benilov [3] apresenta tal estudo para topografias periódicas consideradas somente em uma escala lenta). Este estudo é feito na seção 2.5 do Capítulo 2. Basicamente mostramos como a topografia afeta o ponto de focalização/defocalização (“*focusing/defocusing*”) para as ondas de Stokes, que no caso do fundo plano é um resultado clássico com $kh = 1,363\dots$ (ver Johnson [12]).

Considerações finais e comentários sobre trabalhos futuros são feitos ao final deste trabalho.

1

Equações de evolução para um trem de ondas sobre um fundo plano

Neste Capítulo apresentaremos a abordagem de Mei [14] para obtenção de um modelo que descreva a evolução de um trem de ondas sobre um fundo plano.

Considere um escoamento invíscido e irrotacional numa região bidimensional descrita pelas coordenadas (x, z) , onde x é a direção de propagação das ondas de superfície presente nesse escoamento e z é a coordenada vertical. A região de interesse é delimitada inferiormente por um fundo plano e impermeável (a uma profundidade finita e constante h) e na parte superior pela superfície livre dada por $z = \eta(x, t)$.

As equações para ondas aquáticas em termos do potencial de velocidade $\Phi(x, z, t)$ e da elevação da superfície livre $\eta(x, t)$ são:

$$\Phi_{xx} + \Phi_{zz} = 0, \quad -h < z < \eta, \quad (1-1)$$

com as condições de fronteira (dinâmica e cinemática) para a superfície livre $z = \eta$:

$$g\eta + \Phi_t + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 = -\frac{P_a}{\rho}, \quad (1-2)$$

$$\eta_t + \Phi_x \eta_x = \Phi_z, \quad (1-3)$$

e a condição de Neumann no fundo

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0, \quad z = -h. \quad (1-4)$$

Temos que g é a aceleração da gravidade, P_a é a pressão atmosférica e ρ é a densidade. A Figura 1.1 é um esboço da configuração que pretendemos modelar.

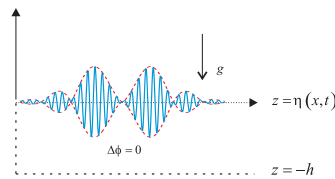


Figura 1.1: Esboço da região de interesse

Para fazer as expansões assintóticas usaremos uma equação que é uma combinação das condições na superfície livre e também a condição dinâmica. Desta forma eliminamos η de uma das condições de fronteira livre. Tomando a derivada total ($\frac{D}{Dt} \equiv \partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla$, onde $\mathbf{u} = \nabla\Phi$ é o vetor velocidade) da condição dinâmica e usando a identidade (que aparece em Mei [14]):

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \mathbf{u}^2, \quad (1-5)$$

obtemos, através da combinação das condições cinemática e dinâmica, que em $z = \eta$

$$\frac{D}{Dt} \frac{P_a}{\rho} + \left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{\partial\mathbf{u}^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^2 \right] = 0. \quad (1-6)$$

Se além disso, assumirmos que $P_a = \text{constante}$, a condição acima fica da forma

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{\partial\mathbf{u}^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^2 = 0. \quad (1-7)$$

Seja A a amplitude característica da onda na superfície livre e k o número de onda característico. Destacamos que $\eta = O(A)$. Suporemos que $kA \ll 1$, ou seja, estamos considerando um regime de ondas abatidas (pequena variação relativa da amplitude, com respeito ao comprimento de onda). Além disso vamos supor que estamos em um regime de profundidade intermediária, isto é, $kh = O(1)$, onde h é a escala de profundidade.

Suponha que qualquer função analítica $[f(x, z, t)]_{z=\eta}$ possa ser expandida em série de Taylor ao redor de $z = 0$,

$$f(x, \eta, t) = [f]_0 + \eta \left[\frac{\partial f}{\partial z} \right]_0 + \frac{\eta^2}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right]_0 + \dots,$$

onde

$$[f]_0 = f(x, 0, t).$$

Suponha ainda que $\partial f / \partial z = O(kf)$. Isto é, $f(z) = O(e^{kz})$, o que implica que nas situações limites: águas rasas ($z \rightarrow 0$) temos $f(z) \approx O(1)$ e águas profundas ($z \rightarrow -\infty$) temos $f(z) \approx 0$. Vamos fazer expansões das equações para superfície livre (1-7) e (1-2) em torno de $z = 0$. Observe que os termos estão crescendo em potências de kA . Façamos as expansões até a terceira ordem $O(kA)^3$:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right]_0 + \eta \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right) \right]_0 + \left[\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}^2 \right]_0 + \\ & + \frac{\eta^2}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right) \right]_0 + \eta \left[\frac{\partial^2}{\partial t \partial z} \mathbf{u}^2 \right]_0 + \\ & + \frac{1}{2} [\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^2]_0 + \dots = 0 \end{aligned} \quad (1-8)$$

$$-g\eta = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right]_0 + \eta \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial z} \right]_0 + \left[\frac{\mathbf{u}^2}{2} \right]_0 + \frac{\eta^2}{2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right]_0 + \eta \left[\frac{\partial}{\partial z} \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right]_0 + \dots \quad (1-9)$$

Sem perda de generalidade supomos na condição (1-9) acima que $P_a = \text{constante} = 0$.

Seja x a direção da onda portadora. Para permitir a modulação lenta, introduziremos variáveis em múltiplas escalas:

$$\begin{aligned} x, \quad x_1 = \varepsilon x, \quad x_2 = \varepsilon^2 x \dots, \\ t, \quad t_1 = \varepsilon t, \quad t_2 = \varepsilon^2 t \dots, \end{aligned}$$

onde $\varepsilon = kA \ll 1$ e expandimos o potencial de velocidade, Φ , e a elevação da superfície livre, η , como

$$\Phi = \sum_{n=1} \varepsilon^n \phi_n = \varepsilon \phi_1 + \varepsilon^2 \phi_2 + \varepsilon^3 \phi_3 + \dots, \quad (1-10)$$

$$\eta = \sum_{n=1} \varepsilon^n \eta_n = \varepsilon \eta_1 + \varepsilon^2 \eta_2 + \varepsilon^3 \eta_3 + \dots, \quad (1-11)$$

onde

$$\begin{aligned} \phi_n &= \phi_n(x, x_1, x_2, \dots; z; t, t_1, t_2, \dots), \\ \eta_n &= \eta_n(x, x_1, x_2, \dots; t, t_1, t_2, \dots). \end{aligned}$$

As derivadas originais são substituídas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &\rightarrow \frac{\partial}{\partial x_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} &\rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x_0 \partial x_1} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_0 \partial x_2} \right) + \dots \end{aligned}$$

Note que $x_0 = \varepsilon^0 x = x$. Procedemos de forma análoga para a variável t .

Substituiremos as derivadas na forma acima na equação de Laplace, nas condições expandidas da superfície livre (1-8) e (1-9) e na condição de fundo (1-4). Agrupamos os termos até ordem $O(\varepsilon^3)$. Então obtemos uma seqüência de

problemas da forma:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi_n = F_n, \quad -h < z < 0, \quad (1-12)$$

$$\mathcal{L}\phi_n \equiv \left(g \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi_n = G_n, \quad z = 0, \quad (1-13)$$

$$-g\eta_n = H_n, \quad z = 0, \quad (1-14)$$

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial z} = 0, \quad z = -h. \quad (1-15)$$

Onde:

$$F_1 = 0, \quad F_2 = -2\phi_{1xx_1}, \quad F_3 = - \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right) \phi_1 + 2\phi_{1xx_2} + 2\phi_{2xx_1} \right]; \quad (1-16)$$

$$G_1 = 0, \quad G_2 = - \left[\eta_1 \mathcal{L}_z \phi_1 + (\phi_{1x}^2 + \phi_{1z}^2)_t + 2\phi_{1tt_1} \right], \quad (1-17)$$

$$\begin{aligned} G_3 = - & \left[\eta_2 \mathcal{L}_z \phi_1 + \eta_1 \mathcal{L}_z \phi_2 + \frac{1}{2} \eta_1^2 \mathcal{L}_{zz} \phi_1 + 2(\phi_{1x} \phi_{2x} + \phi_{1z} \phi_{2z})_t + \right. \\ & + \eta_1 (\phi_{1x}^2 + \phi_{1z}^2)_{tz} + \frac{1}{2} \left(\phi_{1x} \frac{\partial}{\partial x} + \phi_{1z} \frac{\partial}{\partial z} \right) (\phi_{1x}^2 + \phi_{1z}^2) \\ & + 2\phi_{2tt_1} + 2\phi_{1z} \phi_{1zt_1} + 2\phi_{1x_1} \phi_{1xt} + 2\phi_{1x} \phi_{1xt_1} + \\ & \left. + 2\phi_{1x} \phi_{1tx_1} + 2\eta_1 \phi_{1ztt_1} + 2\phi_{1tt_2} + \phi_{1t_1t_1} \right]; \quad (1-18) \end{aligned}$$

com $\mathcal{L}_z = \partial_z \mathcal{L}$.

$$H_1 = \phi_{1t}, \quad H_2 = \phi_{2t} + \frac{1}{2} (\phi_{1x}^2 + \phi_{1z}^2) + \phi_{1t_1} + \eta_1 \phi_{1zt}, \quad (1-19)$$

$$\begin{aligned} H_3 = & \phi_{3t} + \phi_{1x} \phi_{2x} + \phi_{1z} \phi_{2z} + \eta_1 \phi_{2zt} + \eta_2 \phi_{1zt} + \\ & + \frac{1}{2} \eta_1^2 \phi_{1zzt} + \frac{1}{2} \eta_1 (\phi_{1x}^2 + \phi_{1z}^2)_z + \phi_{2t_1} \\ & + \phi_{1x} \phi_{1x_1} + \phi_{1t_2} + \eta_1 \phi_{1zt_1}. \quad (1-20) \end{aligned}$$

Observe que nas equações (1-12)-(1-15), η_n é uma variável passiva, no sentido em que primeiro resolvemos o problema para o potencial de velocidade ϕ_n a partir das equações (1-12), (1-13), (1-15), e só então obtemos a elevação da superfície η_n que segue da condição dinâmica (1-14).

Sejam ϕ_n , F_n e G_n séries envolvendo modos de Fourier, então escrevemos:

$$\{\phi_n, F_n, G_n\} = \sum_{m=-n}^n e^{im\psi} \{\phi_{nm}, F_{nm}, G_{nm}\}, \quad (1-21)$$

onde $\psi = kx - \omega t$ com

$$\omega^2 = gk \tanh kh. \quad (1-22)$$

A escolha da representação em uma série de Fourier truncada em n é baseada no fato de que cada problema para ϕ_n é uma EDP linear com forçantes F_n, G_n, H_n ($n = 2, 3$) que envolvem termos não lineares (potências) de ϕ_{n-1} calculadas a partir da solução conhecida do problema anterior, introduzindo desta forma novos modos de Fourier que correspondem a potências cruzadas (potências de exponenciais em frequências diferentes). Com efeito, supondo que possamos escrever ϕ_1 da forma

$$\phi_1 = \sum_{-\infty}^{+\infty} \phi_{1m} e^{im\psi},$$

é possível mostrar que $\phi_{1m} = 0 \forall m \geq 2$, chegando a uma contradição com a relação de dispersão (1-22). Como as expressões de F_2, G_2 , dependem da expressão de ϕ_1 , estendemos o resultado para $n = 2$, procedemos de forma análoga para $n = 3$, de forma que verificamos a escolha da representação (1-21).

Destacamos ainda que ψ está na escala de referência $(x, t) = (x_0, t_0)$. Já os termos que representam as amplitudes nas séries de Fourier acima dependem das variáveis lentas e de z :

$$\begin{aligned} (\phi_{nm}, F_{nm}) &= \text{funções de } (x_1, x_2, \dots, z, t_1, t_2, \dots), \\ G_{nm} &= G_{nm}(x_1, x_2, \dots, t_1, t_2, \dots). \end{aligned}$$

Para a ϕ resultante ser real, requeremos que:

$$\phi_{n,-m} = (\phi_{nm})^*,$$

onde $*$ denota o complexo conjugado.

Substituindo (1-21) nas equações (1-12), (1-13) e (1-15), obtemos a sequência de problemas de valor de contorno (lineares) para ϕ_{nm}, F_{nm} e G_{nm} ($n = 1, 2, 3$ e $m = 0, \dots, n$):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - m^2 k^2 \right) \phi_{nm} = F_{nm}, \quad -h < z < 0, \quad (1-23)$$

$$\left(g \frac{\partial}{\partial z} - m^2 \omega^2 \right) \phi_{nm} = G_{nm}, \quad z = 0, \quad (1-24)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \phi_{nm} = 0, \quad z = -h. \quad (1-25)$$

Daqui por diante adotaremos a seguinte notação:

$$Q = k(z + h), \quad q = kh. \quad (1-26)$$

1.1

O Problema em Primeira Ordem

Para $n = 1$ os termos forçantes são:

$$F_1 = G_1 = 0.$$

O que implica que

$$F_{1m} = G_{1m} = 0, \quad \forall m.$$

Como até a ordem estudada ($O(\varepsilon^3)$) não temos forçantes com termos em x_3 , t_3 ou adiante, a partir deste ponto simplificaremos a notação no que diz respeito à dependência nas variáveis lentas destacando somente a dependência até x_2 , t_2 .

As soluções homogêneas¹ são:

$$m = 0 : \quad \phi_{10} = \phi_{10}(x_1, x_2, t_1, t_2, \dots) = \phi_{10}^* \quad (1-27)$$

$$m = 1 : \quad \phi_{11} = -\frac{g \cosh Q}{2\omega \cosh q} iA, \quad (1-28)$$

e $A = A(x_1, x_2, t_1, t_2, \dots)$. A solução de primeira ordem para ϕ é:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi_{1-1}e^{-i\psi} + \phi_{10} + \phi_{11}e^{i\psi} \\ &= (\phi_{11})^*e^{-i\psi} + \phi_{10} + \phi_{11}e^{i\psi} \\ &= \phi_{10} - \frac{g \cosh Q}{2\omega \cosh q} (iAe^{i\psi} + *) \\ &= \phi_{10} - \frac{g \cosh Q}{2\omega \cosh q} (iAe^{i\psi} + (-iAe^{-i\psi})). \end{aligned} \quad (1-29)$$

Chamaremos A de função envoltória para a amplitude do trem de ondas representado por η . Usando a equação resultante da condição dinâmica obtemos:

$$-g\eta_1 = H_1 = \phi_{1t},$$

deste modo temos que:

$$\eta_1 = \frac{1}{2} (Ae^{i\psi} + *).$$

Isto termina o problema em primeira ordem.

1.2

O Problema em Segunda Ordem

Observamos que para $n \geq 2$ teremos que nos preocupar com a condição de compatibilidade para $m = 0$ e $m = 1$ (estamos procurando soluções não triviais

¹Note que ϕ_{10} não depende de z . Para compreender este fato escreva o sistema (1-23)-(1-25) para $n = 1$ e $m = 0$.

para os problemas homogêneos).

Para $m = 0$ a solução homogênea é constante em z deste modo a condição de compatibilidade é:

$$\frac{1}{g} G_{n0} = \int_{-h}^0 F_{n0} dz. \quad (1-30)$$

Para $m = 1$ a condição de compatibilidade segue da Fórmula de Green (pág. 52 do Capítulo 2 de Mei [14]):

$$\int_{-h}^0 dz \left[\Psi_0 \left(\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z^2} - k^2 \Psi_1 \right) - \Psi_1 \left(\frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial z^2} - k^2 \Psi_0 \right) \right] = \left[\Psi_0 \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} - \Psi_1 \frac{\partial \Psi_0}{\partial z} \right]_{-h}^0, \quad (1-31)$$

onde Ψ_0 é a solução não trivial para o problema de valor de contorno homogêneo e Ψ_1 é a solução para o problema não homogêneo. Deste modo, usando (1-23)-(1-25), com $\Psi_0 = \phi_{11}$ e $\Psi_1 = \phi_{n1}$, então obtemos

$$\frac{1}{g} G_{n1} = \int_{-h}^0 \left(F_{n1} \frac{\cosh Q}{\cosh q} \right) dz. \quad (1-32)$$

As condições de compatibilidade (1-30) e (1-32) produzirão as *equações de evolução* da envoltória de ondas denotada por A . Preocuparemos-nos somente com $|m| < 2$, pois para $|m| \geq 2$ os problemas de valores de contorno não admitem soluções homogêneas não triviais.² Com efeito, se existisse uma solução homogênea ela seria da forma (1-28) com (k, ω) substituído por $(mk, m\omega)$. Entretanto, mk e $m\omega$ estariam sujeitos a relação de dispersão (1-22), o que não é possível quando $|m| > 1$.

Para encontrarmos os termos forçantes para o problema de segunda ordem ($n = 2$) ($F_{2(-2)}, F_{2(-1)}, F_{20}, F_{21}$ e F_{22}), escrevemos F_2 na forma (1-21)

$$F_2 = \sum_{m=-2}^2 F_{2m} e^{im\psi} = F_{2-2} e^{-i2\psi} + F_{2-1} e^{-i\psi} + F_{20} + F_{21} e^{i\psi} + F_{22} e^{i2\psi} = -2\phi_{1xx_1}$$

²Fato relacionado ao Teorema de alternativa de Fredholm. No contexto de problemas de valores de contorno o Teorema pode ser enunciado como segue (ver Garabedian [7]): “Ou o problema de valor de contorno tem solução, quaisquer que sejam os forçantes, ou o problema homogêneo tem uma ou mais auto-funções (soluções não-triviais). No primeiro caso a solução não-homogênea é única. No segundo caso, o problema não homogêneo tem solução se, e somente se, os termos forçantes são ortogonais a todas as auto-funções do problema homogêneo”.

e comparamos com a expansão de ϕ_{1xx_1} (vide (1-16)):

$$\begin{aligned}
 -2\phi_{1xx_1} &= -2 \left(\sum_{m=-1}^1 \phi_{1m} e^{im\psi} \right)_{xx_1} \\
 &= -2 \left(\phi_{10} - \frac{g \cosh Q}{2\omega \cosh q} (iAe^{i\psi} + *) \right)_{xx_1} \\
 &= -2 \left(\frac{\partial \phi_{10}}{\partial x_1} - \frac{g \cosh Q}{2\omega \cosh q} \left(i \frac{\partial A}{\partial x_1} e^{i\psi} + * \right) \right)_x \\
 &= -\frac{\omega \cosh Q}{\sinh q} \left(\frac{\partial A}{\partial x_1} e^{i\psi} + * \right).
 \end{aligned}$$

Deste modo obtemos que

$$F_{20} = 0, \quad F_{21} = -\frac{\omega \cosh Q}{\sinh q} \frac{\partial A}{\partial x_1}, \quad F_{22} = 0, \quad (1-33)$$

onde $F_{2(-m)} = (F_{2m})^*$.

Procedemos de forma análoga para G_2 ($G_{2(-m)} = (G_{2m})^*$) e obtemos

$$G_{20} = 0, \quad G_{21} = \frac{\omega^2 \cosh q}{k \sinh q} \frac{\partial A}{\partial t_1}, \quad G_{22} = \frac{3i\omega^3 A^2}{4 \sinh^2 q}. \quad (1-34)$$

A solução para $m = 0$ é:

$$\phi_{20} = \phi_{20}(x_1, x_2, y_1, y_2, t_1, t_2, \dots) = \phi_{20}^*.$$

Para $m = 1$, o problema fica na forma:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right) \phi_{21} = -\frac{\omega \cosh Q}{\sinh q} \frac{\partial A}{\partial x_1}, \quad -h < z < 0, \quad (1-35)$$

$$\left(g \frac{\partial}{\partial z} - \omega^2 \right) \phi_{21} = \frac{\omega^2 \cosh q}{k \sinh q} \frac{\partial A}{\partial t_1}, \quad z = 0, \quad (1-36)$$

$$\frac{\partial \phi_{21}}{\partial z} = 0, \quad z = -h. \quad (1-37)$$

Invocando a condição de compatibilidade (1-32) temos que

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{g} \frac{\omega^2 \cosh q}{k \sinh q} \frac{\partial A}{\partial t_1} &= - \int_{-h}^0 \left(\frac{\omega \cosh Q}{\sinh q} \frac{\partial A}{\partial x_1} \frac{\cosh Q}{\cosh q} \right) dz, \\
 \frac{\partial A}{\partial t_1} &= -\frac{gk}{\omega} \frac{\partial A}{\partial x_1} \int_{-h}^0 \left(\frac{\cosh^2 Q}{\cosh^2 q} \right) dz.
 \end{aligned}$$

Fazendo uso da fórmula (5.12), pg 16 de Mei [14], ou seja, que:

$$\int_0^{kh} \cosh^2 \xi d\xi = \frac{1}{4} (\sinh 2kh + 2kh),$$

obtemos

$$-\frac{1}{4k} (\sinh 2kh + 2kh) \frac{1}{\cosh^2 kh} \frac{gk}{\omega} \frac{\partial A}{\partial x_1} = \frac{\partial A}{\partial t_1},$$

ou ainda,

$$-\frac{1}{4k} \frac{\sinh 2q}{\cosh^2 q} \left(1 + \frac{2q}{\sinh 2q}\right) \frac{gk}{\omega} \frac{\partial A}{\partial x_1} = \frac{\partial A}{\partial t_1}.$$

Usando a relação de dispersão (1-22) temos que:

$$-\frac{\omega}{2k} \left(1 + \frac{2q}{\sinh 2q}\right) \frac{\partial A}{\partial x_1} = \frac{\partial A}{\partial t_1},$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{\partial A}{\partial t_1} + C_g \frac{\partial A}{\partial x_1} = 0, \quad (1-38)$$

onde $C_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$ é a velocidade de grupo. Este resultado é esperado, confirmando que em termos dominantes na expansão assintótica a amplitude de um trem de ondas viaja com velocidade de grupo $C_g(k)$. Mais adiante esta equação será aperfeiçoada ao agregarmos novos termos a ela. Eventualmente teremos uma equação de Schrödinger não linear. Destacamos ainda que (1-38) implica que

$$\frac{\partial A^*}{\partial t_1} + C_g \frac{\partial A^*}{\partial x_1} = 0. \quad (1-39)$$

Vamos resolver (1-35)-(1-37) como um problema de valor de contorno para EDOs. Nosso candidato à solução é da forma:

$$\phi_{21} = b_1 Q \cosh Q + b_2 Q \sinh Q. \quad (1-40)$$

Substituindo (1-40) em (1-35) obtemos que $b_1 = 0$ e $b_2 = -\frac{\omega}{2k^2} \frac{\partial A}{\sinh q \partial x_1}$.

Reescrevendo ϕ_{21} com os valores encontrados para b_1 e b_2 temos que:

$$\phi_{21} = -\frac{\omega}{2k^2 \sinh q} (Q \sinh Q) \frac{\partial A}{\partial x_1},$$

desse modo satisfaz o problema de valor de contorno (1-35)-(1-37) por causa de (1-38).

Observação 1.1 Note que ϕ_{21} explode quando $q = kh \uparrow \infty$, como estamos considerando $kh = O(1)$ excluimos esta possibilidade. Fisicamente estamos excluindo o regime de profundidade infinita. Como estamos interessados no regime de interação com a topografia (Capítulo a seguir), isto não significa restrição alguma.

Para $m = 2$, o problema fica:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - 4k^2 \right) \phi_{22} = 0, \quad -h < z < 0, \quad (1-41)$$

$$\left(g \frac{\partial}{\partial z} - 4\omega^2 \right) \phi_{22} = \frac{3i\omega^3 A^2}{4 \sinh q}, \quad z = 0, \quad (1-42)$$

$$\frac{\partial \phi_{22}}{\partial z} = 0, \quad z = -h. \quad (1-43)$$

Neste caso o candidato à solução é da forma:

$$\phi_{22} = c_1 \sinh 2Q + c_2 \cosh 2Q, \quad (1-44)$$

visto que essa é a solução homogênea geral de (1-41). Substituindo (1-44) na condição de fundo (1-43) obtemos que $c_1 = 0$. Uma vez feito isso usamos a equação (1-42) juntamente com a relação de dispersão (1-22) e encontramos $c_2 = \frac{-3\omega i A^2}{16 \sinh^4 q}$. Deste modo encontramos a solução:

$$\phi_{22} = -\frac{3}{16} \frac{\omega \cosh 2Q}{\sinh^4 q} i A^2.$$

A solução de segunda ordem é:

$$\phi_2 = \phi_{20} - \frac{\omega}{2k^2 \sinh q} (Q \sinh Q) \left(\frac{\partial A}{\partial x_1} e^{i\psi} + * \right) - \frac{3}{16} \frac{\omega \cosh 2Q}{\sinh^4 q} (i A^2 e^{2i\psi} + *).$$

Uma vez que ϕ_2 foi encontrada, η_2 segue da condição dinâmica de pressão constante:

$$\eta_2 = \left\{ -\frac{1}{g} \phi_{10t_1} - \frac{k}{2 \sinh 2q} |A|^2 \right\} + \frac{1}{2\omega} \left(i \frac{\partial A}{\partial t_1} e^{i\psi} + * \right) - \frac{q \sinh q}{2k \cosh q} \left(i \frac{\partial A}{\partial x_1} e^{i\psi} + * \right) + \frac{k \cosh q (2 \cosh^2 q + 1)}{8 \sinh^3 q} (A^2 e^{2i\psi} + *) \quad (1-45)$$

onde o lado direito é obtido através de H_2 . Com isto terminamos o problema de segunda ordem.

1.3

O Problema em Terceira Ordem

Para $n = 3$ os termos forçantes F_{30} e G_{30} são:

$$F_{30} = - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right) \phi_{10} \quad (1-46)$$

$$G_{30} = - \frac{\partial^2 \phi_{10}}{\partial t_1^2} - \frac{\omega^2}{4 \sinh^2 q} (2 \cosh^2 q - 1) (AA^*)_{t_1} + \frac{\omega^3}{4 k \sinh^2 q} \left(\cosh^2 q + 1 - \frac{2q \sinh q}{2 \cosh} \right) (AA^*)_{x_1}. \quad (1-47)$$

Para obter uma expressão mais simples de G_{30} , primeiro escrevemos que:

$$\begin{aligned} - \frac{\omega^2}{4 \sinh^2 q} (2 \cosh^2 q - 1) (AA^*)_{t_1} &= - \frac{\omega^2}{4 \sinh^2 q} (1 + 2 \cosh^2 q - 2) (AA^*)_{t_1}, \\ &= - \frac{\omega^2}{4 \sinh^2 q} (2 \cosh^2 q - 2) (AA^*)_{t_1} \\ &\quad - \frac{\omega^2}{4 \sinh^2 q} (AA^*)_{t_1} \end{aligned} \quad (1-48)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\omega^3}{4 k \sinh^2 q} (\cosh^2 q + 1) (AA^*)_{x_1} &= \frac{\omega^3}{2 k \sinh^2 q} (\cosh^2 q) (AA^*)_{x_1} + \\ &\quad + \frac{\omega^3}{4 k \sinh^2 q} (1 - \cosh^2 q) (AA^*)_{x_1}. \end{aligned} \quad (1-49)$$

Agora vamos usar a equação (1-38) numa versão para AA^* (resultado da soma de ((1-38) com (1-39)), ou seja:

$$\frac{\partial(AA^*)}{\partial t_1} + C_g \frac{\partial(AA^*)}{\partial x_1} = 0. \quad (1-50)$$

Multiplicando esta equação por $\frac{\omega^2}{4 \sinh^2 q} (2 \cosh^2 q - 2)$ obtemos

$$\frac{\omega^2}{4 \sinh^2 q} (2 \cosh^2 q - 2) \left(\frac{\partial(AA^*)}{\partial t_1} + C_g \frac{\partial(AA^*)}{\partial x_1} \right) = 0. \quad (1-51)$$

Substituindo (1-48), (1-49) e (1-51) em (1-47), podemos reescrever G_{30} :

$$G_{30} = - \frac{\partial^2 \phi_{10}}{\partial t_1^2} - \frac{\omega^2}{4 \sinh^2 q} (AA^*)_{t_1} + \frac{\omega^3 \cosh^2 q}{2 k \sinh^2 q} (AA^*)_{x_1}. \quad (1-52)$$

Substituindo F_{30} e esta última expressão para G_{30} em (1-30) obtemos a partir desta condição de compatibilidade que:

$$\frac{\partial^2 \phi_{10}}{\partial t_1^2} - gh \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right) \phi_{10} = \frac{\omega^3 \cosh^2 q}{2k \sinh^2 q} (AA^*)_{x_1} - \frac{\omega^2}{4 \sinh^2 q} (AA^*)_{t_1}. \quad (1-53)$$

Esta equação descreve uma onda longa gerada por ondas curtas com amplitudes suavemente moduladas.

Para $m = 1$, os termos forçantes são:

$$F_{31} = \frac{\omega}{k \sinh q} \left[Q \sinh Q + \frac{1}{2} \cosh Q \right] i \frac{\partial A}{\partial x_1^2} - \frac{\omega \cosh Q}{\sinh q} \left(\frac{\partial A}{\partial x_2} \right) \quad (1-54)$$

$$\begin{aligned} G_{31} = & \frac{1}{16 \sinh^5 q} \omega^3 k \cosh q (\cosh 4q + 8 - 2 \tanh^2 q) i |A|^2 A - \\ & - \frac{\omega k}{\sinh 2q} \left(\frac{\partial \phi_{10}}{\partial t_1} - \frac{2\omega \cosh^2 q}{k} \frac{\partial \phi_{10}}{\partial x_1} \right) i A + \\ & + \frac{\omega \cosh q}{2k \sinh q} i \frac{\partial^2 A}{\partial t_1^2} - \frac{\omega^2 q}{k^2} i \frac{\partial^2 A}{\partial x_1 \partial t_1} + \frac{\omega^2 \cosh q}{k \sinh q} \frac{\partial A}{\partial t_2}. \end{aligned} \quad (1-55)$$

Usando a condição de compatibilidade (1-32) para F_{31} e G_{31} obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A}{\partial t_2} + C_g \frac{\partial A}{\partial x_2} - \frac{i\omega q}{k^2 \sinh 2q} \cosh^2 q \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2\omega} \frac{\partial^2 A}{\partial t_1^2} - \\ & - \frac{ik^2 A}{2\omega \cosh^2 q} \left(\frac{\partial \phi_{10}}{\partial t_1} - \frac{2\omega \cosh^2 q}{k} \frac{\partial \phi_{10}}{\partial x_1} \right) - \frac{i q \sinh q}{k \cosh q} \frac{\partial^2 A}{\partial x_1 \partial t_1} + \\ & + \frac{i\omega k^2 (\cosh 4q + 8 - 2 \tanh^2 q)}{16 \sinh^4 q} |A|^2 A = 0. \end{aligned} \quad (1-56)$$

De (1-38), podemos escrever:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t_1^2} = C_g^2 \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2}, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial t_1 \partial x_1} = -C_g \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2}. \quad (1-57)$$

Multiplicando (1-56) por ε , adicionando (1-38) e considerando que ϕ_{10} e A são funções de apenas duas escalas transcritas em x_1 e t_1 somente, isto é,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_2} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_2} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t_1},$$

utilizando (1-57) chegamos à seguinte expressão:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial A}{\partial t_1} + C_g \frac{\partial A}{\partial x_1} \right) + i\varepsilon \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right) \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} + \frac{\omega k^2 (\cosh 4q + 8 - 2 \tanh^2 q)}{16 \sinh^4 q} |A|^2 A - \right. \\ & \left. - \left(\frac{k^2}{2\omega \cosh^2 q} \frac{\partial \phi_{10}}{\partial t_1} - k \frac{\partial \phi_{10}}{\partial x_1} \right) A \right\} = 0, \end{aligned} \quad (1-58)$$

onde

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} = \frac{C_g^2}{2\omega} - \frac{\omega q \cosh^2 q}{k^2 \sinh 2q} + \frac{q \sinh q}{k \cosh q} C_g > 0. \quad (1-59)$$

Note que esta equação é um aperfeiçoamento de (1-38) conforme anunciamos

anteriormente. A equação (1-58) é uma equação de Schrödinger não linear (com uma dimensão espacial - observe que começamos com duas). As equações (1-58) e (1-53) governam a evolução lenta da envoltória A de ondas curtas e do potencial de ondas longas ϕ_{10} .

1.4

Obtendo a Forma Clássica de uma Equação de Schrödinger Não Linear (SNL)

Seguindo Mei [14] podemos fazer simplificações adicionais na equação (1-58) para envoltória de ondas A , de modo a obter a forma clássica de uma equação de Schrödinger não linear. Para tal vamos fazer uma mudança de variáveis do tipo:

$$\nu = x_1 - C_g t_1, \quad \tau = \varepsilon t_1.$$

Então

$$\frac{\partial}{\partial t_1} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau} - C_g \frac{\partial}{\partial \nu} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial \nu}.$$

Substituímos as novas variáveis na equação (1-53) e integramos com respeito a ν , de modo que obtemos:

$$\frac{\partial \phi_{10}}{\partial \nu} = S(\tau) - \frac{\omega^2 (2\omega \cosh^2 q + kC_g)}{4k \sinh^2 q (gh - C_g^2)} |A|^2 + O(\varepsilon),$$

sendo $S(\tau)$ é uma função arbitrária do tempo τ . Substituindo este resultando em (1-58) e depois de algumas manipulações algébricas temos que

$$-i \frac{\partial A}{\partial \tau} + \alpha_1 \frac{\partial^2 A}{\partial \nu^2} + \alpha_2 |A|^2 A + \gamma A = 0, \quad (1-60)$$

onde

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2},$$

$$\alpha_2 = \frac{\omega k^2}{16 \sinh^4 q} (\cosh 4q + 8 - 2 \tanh^2 q) - \frac{\omega}{2 \sinh^2 2q} \frac{(2\omega \cosh^2 q + kC_g)^2}{gh - C_g^2}$$

e

$$\gamma(\tau) = \frac{S(\tau)k}{2\omega \cosh^2 q} (2\omega \cosh^2 q + kC_g).$$

Podemos ainda reescrever a equação (1-60) eliminando o termo γA . Para tal basta introduzir:

$$A = B \exp \left(-i \int \gamma d\tau \right).$$

Deste modo obtemos uma equação de Schrödinger cúbica na forma clássica:

$$-iB_\tau + \alpha_1 B_{\nu\nu} + \alpha_2 |B|^2 B = 0. \quad (1-61)$$

Observação 1.2 *Por (1-59) temos que $\alpha_1 > 0$, esta condição tem um significado físico. Note que temos uma equação de difusão embutida na equação de Schrödinger e fisicamente precisamos de um coeficiente de difusão positivo. Para obter a equação de difusão a partir de (1-61), note que B é complexo e substitua as expansões $B = |B|e^{i\theta}$ ou $B = \text{Re}\{B\} + i\text{Im}\{B\}$.*

A equação (1-61) foi deduzida para profundidade finita por Hashimoto e Ono [10]. Uma equação similar foi deduzida anteriormente para profundidade infinita por Zakharov [21]. Nosso interesse restringe-se ao caso de profundidade finita, uma vez que, no próximo Capítulo, seguiremos a abordagem de Mei [14], mas a generalizando para fundos marinhos variáveis.

2

Equações de Evolução para um trem de ondas sobre um fundo variável

Neste Capítulo apresentaremos a dedução de um modelo que descreva a evolução de um trem de ondas sobre um fundo com topografia variável. Consideraremos primeiramente a presença de topografia e/ou estruturas submersas com perfis periódicos para estimular uma intuição física do problema, e, num segundo momento, com perfis aleatórios na dedução das equações de evolução para a envoltória do trem de ondas.

2.1

Formulação em Coordenadas Curvilíneas

Considere um escoamento invíscido, irrotacional no plano (usaremos a mesma notação adotada por Mei [14] e Mei e Hancock [15]: x é coordenada horizontal e z a vertical). A região de interesse é delimitada inferiormente por uma topografia impermeável e estacionária definida por uma função $z = -h(x)$ aleatória com média zero (para motivação, apresentaremos inicialmente o caso $h(x)$ periódica)¹, e na parte superior pela superfície livre dada por $z = \eta(x, t)$. O campo de velocidades \mathbf{u} é definido através do potencial de velocidade $\Phi(x, z, t)$ na forma $\mathbf{u} = (u, v) = \nabla\Phi$.

As equações para ondas aquáticas em termos do potencial de velocidade $\Phi(x, z, t)$ e da elevação da superfície livre $\eta(x, t)$ foram apresentadas no Capítulo anterior. De agora em diante consideraremos a versão para fundo variável. A condição de Neumann no fundo merece destaque, pois ela será transformada pela aplicação conforme. Ela é descrita pela seguinte equação:

$$h_x \Phi_x + \Phi_z = 0, \quad z = -h(x). \quad (2-1)$$

Definiremos a aplicação conforme como segue:

$$\mathfrak{z}(\xi + i\zeta) = x + iz. \quad (2-2)$$

¹Nas figuras deste Capítulo, não será observada periodicidade nos extremos do intervalo, porque elas foram geradas, com excessão da Figura 2.1, usando o **SCT**, que representa polígonos infinitos simulando comportamento de canais. Observa-se que os perfis das topografias foram gerados como se o origem estivesse no fundo do canal, pois esta é a convenção do Matlab. Maiores detalhes sobre a aplicação de Schwarz-Christoffel serão apresentados no Apêndice A.

Esta leva a faixa uniforme (domínio canônico)

$$\Omega_w : -1 < \zeta < 0, \quad -\infty < \xi < \infty, \quad (2-3)$$

no domínio do escoamento em repouso (domínio físico)

$$\Omega_3 : -h(x) < z < 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad (2-4)$$

com $x = x(\xi, \zeta)$ e $z = z(\xi, \zeta)$ sendo um par de funções harmônicas conjugadas em Ω_w .

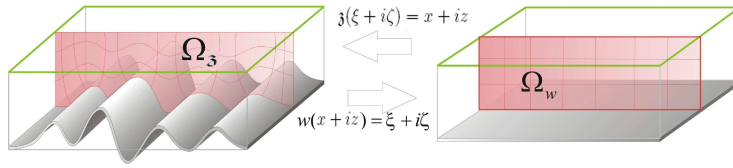


Figura 2.1: Representação esquemática da aplicação conforme (2-2) e de sua inversa.

O conjunto de equações para ondas aquáticas escrito no sistema de coordenadas curvilíneas (ξ, ζ) fica, respectivamente, da forma:

$$\Phi_{\xi\xi} + \Phi_{\zeta\zeta} = 0, \quad -1 < \zeta < N(\xi, t), \quad (2-5)$$

com as condições de fronteira (cinemática e dinâmica) para a superfície livre $\zeta = N(\xi, t)$:

$$|J|N_t + \Phi_\xi N_\xi - \Phi_\zeta = 0, \quad (2-6)$$

$$|J|(g\eta + \Phi_t) + \frac{1}{2}|\nabla_{\xi\zeta}\Phi|^2 = 0, \quad (2-7)$$

e a condição de Neumann no fundo

$$\Phi_\zeta = 0, \quad \zeta = -1. \quad (2-8)$$

Para mais detalhes de como são obtidas as equações (2-5)-(2-8) e sobre o mapeamento conforme, ver Hamilton [9], Nachbin [16] e Artiles Roqueta [2]. Estes dois últimos apresentam uma versão adimensional para os cálculos.

Em (2-5)-(2-7), $N(\xi, t)$ é a função que descreve o perfil da superfície livre no novo sistema de coordenadas e $|J| = |J|(\xi, \zeta)$ é o Jacobiano da transformação (2-2). A matriz Jacobiana $J(\xi, \zeta)$ da troca de coordenadas só depende do ponto do espaço na qual está sendo avaliada. Na superfície livre a matriz adquire valores diferentes pois a superfície muda no tempo e $J(\xi, N(\xi, t))$ também. Vamos eliminar esta dependência temporal através de aproximações. Usando as condições

de Cauchy-Riemann, temos que em $\zeta = N(\xi, t)$ o Jacobiano pode ser escrito como:

$$|J|(\xi, t) \doteq |J|(\xi, N(\xi, t)) = z_\xi^2 + z_\zeta^2. \quad (2-9)$$

Fazendo expansão em polinômio de Taylor de $z(\xi, \zeta)$ em $\zeta = 0$, o Jacobiano pode ainda ser escrito em função de um coeficiente variável $M(\xi)$ independente do tempo com um resto \mathcal{R}_J que é $O(A^2)$ (ver Artiles Roqueta [2] e Nachbin [16]):

$$|J|(\xi, t) = M(\xi)^2 + \mathcal{R}_J(\xi, \zeta_m), \quad 0 < |\zeta_m| < |N(\xi, t)| \quad (2-10)$$

com $M(\xi) \equiv z_\zeta(\xi, 0)$, onde $z(\xi, \zeta)$ é definido como solução de

$$\begin{aligned} z_{\xi\xi} + z_{\zeta\zeta} &= 0, & (\xi, \zeta) \in \Omega_w \\ z &= 0, & \zeta = 0 \\ z &= -h(x(\xi, -1)), & \zeta = -1. \end{aligned} \quad (2-11)$$

Resolvendo o problema de valor de contorno acima (ver [2]) obtemos que:

$$M(\xi) \equiv z_\zeta(\xi, 0) = \frac{\pi}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(x(\xi', -1))}{\cosh^2 \frac{\pi}{2}(\xi - \xi')} d\xi'. \quad (2-12)$$

$M(\xi)$ expressa como as perturbações do fundo vêm-se refletidas na superfície.

Destacamos que quando avaliamos o Jacobiano na superfície em repouso, $\zeta = 0$, temos a mesma expressão que o Jacobiano assume no problema linear:

$$|J|(\xi, t)|_0 = z_\zeta^2(\xi, 0) = M(\xi)^2, \quad (2-13)$$

ou seja, $\mathcal{R}_J(\xi, \zeta_m) = 0$.

Podemos ainda relacionar a função que descreve o perfil da superfície livre em coordenadas curvilineas, $N(\xi, t)$, e a elevação da superfície, $\eta(x, t)$, em função do coeficiente livre, $M(\xi)$ (ver [16]). Para obter-se tal relação, deve-se expandir $\zeta(x, z)$ na forma de polinômio de Taylor perto da superfície livre não perturbada ($z = 0$). Observamos que

$$\begin{aligned} \zeta(x, z) &= \zeta(x, 0) + \zeta_z(x, 0)z + \mathcal{R}(x, \tilde{z}), \quad 0 < |\tilde{z}| < |z| \\ &= 0 + z_\zeta(\xi, 0) \frac{1}{|J|_{\zeta=0}} z + \mathcal{R}(x, \tilde{z}). \end{aligned}$$

Observe que na superfície livre $\zeta = N(\xi, t)$, temos que

$$\begin{aligned} N(\xi, t) &= \frac{M(\xi)}{M(\xi)^2} \eta(x(\xi), t) + \mathcal{R}(x(\xi), \tilde{z}), \quad 0 < |\tilde{z}| < |\eta(x(\xi), t)| \\ &= \frac{1}{M(\xi)} \eta(x(\xi), t) + \mathcal{R}(x(\xi), \tilde{z}), \end{aligned} \quad (2-14)$$

onde o resto \mathcal{R} também é $O(A^2)$ (ver Artiles Roqueta [2] e Nachbin [16]).

Destacamos que quando avaliamos $N(\xi, t)$ na superfície em repouso, $\zeta = 0$, temos a mesma expressão do problema linear:

$$N(\xi, t) = \frac{1}{M(\xi)}\eta(\xi, t), \quad (2-15)$$

isto é, $\mathcal{R}(x(\xi), \tilde{z}) = 0$.

Vamos fazer expansões das equações (2-5)-(2-8) da mesma forma que no caso do fundo plano e deste modo obter uma família de problemas mais simples. Assim como no caso do fundo plano, para a condição de fronteira na superfície livre, usaremos uma equação que é combinação das condições cinemática e dinâmica. No entanto agora teremos um coeficiente variável. Para obter tal equação precisamos definir a derivada total em coordenadas curvilíneas:

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t} \equiv \partial_t + \frac{1}{|J|} \mathbf{u} \cdot \nabla,$$

onde

$$\mathbf{u} = \nabla_{\xi\zeta}\Phi = (\Phi_\xi, \Phi_\zeta)$$

é o vetor velocidade. Daqui por diante usaremos somente a notação ∇ para representar $\nabla_{\xi\zeta} = (\partial_\xi, \partial_\zeta)$. Tomando a derivada total da condição dinâmica (2-7) e usando a identidade (que aparece em Mei [14]) numa versão em coordenadas curvilíneas:

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \mathbf{u}^2, \quad (2-16)$$

obtemos

$$|J| \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + |J| g \eta_t + \frac{\partial \mathbf{u}^2}{\partial t} + g \Phi_\xi \eta_\xi + \frac{1}{2|J|} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^2 = 0. \quad (2-17)$$

De fato, queremos eliminar η da equação (2-17). Assim vamos escrever a equação cinemática (2-6) em função de η usando (2-14), deste modo obtemos

$$\begin{aligned} |J| \left(\frac{\eta}{M} + \mathcal{R} \right)_t + \Phi_\xi \left(\frac{\eta}{M} + \mathcal{R} \right)_\xi - \Phi_\zeta &= 0, \\ \frac{|J|}{M} \eta_t + \Phi_\xi \left(\frac{\eta_\xi M - \eta M_\xi}{M^2} + \mathcal{R}_\xi \right) - \Phi_\zeta &= 0, \\ \frac{|J|}{M} \eta_t + \frac{M}{M^2} \Phi_\xi \eta_\xi - \frac{M_\xi}{M^2} \eta \Phi_\xi + \Phi_\xi \mathcal{R}_\xi - \Phi_\zeta &= 0. \end{aligned}$$

Vamos isolar $\Phi_\xi \eta_\xi$ na equação acima para substituir em (2-17):

$$\Phi_\xi \eta_\xi = \frac{M_\xi}{M} \eta \Phi_\xi + M \Phi_\zeta - |J| \eta_t - M \Phi_\xi \mathcal{R}_\xi,$$

substituindo em (2-17) obtemos

$$|J| \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g M \Phi_\zeta + \frac{\partial \mathbf{u}^2}{\partial t} + \frac{1}{2|J|} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^2 + \frac{M_\xi}{M} \Phi_\xi g \eta - g M \Phi_\xi \mathcal{R}_\xi = 0. \quad (2-18)$$

Usando novamente a equação dinâmica (2-7) obtemos que

$$g\eta = -\frac{1}{2|J|}\mathbf{u}^2 - \Phi_t. \quad (2-19)$$

Substituindo em (2-18), dividindo a equação resultante por $|J|$, obtemos que a condição, que é combinação das condições cinemática e dinâmica, fica da forma

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{gM}{|J|} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} + \frac{1}{|J|} \frac{\partial \mathbf{u}^2}{\partial t} + \frac{1}{2|J|^2} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^2 - \frac{M_\xi}{M|J|} \Phi_\xi \left(\frac{1}{2|J|} \mathbf{u}^2 + \Phi_t \right) - \frac{gM}{|J|} \Phi_\xi \mathcal{R}_\xi = 0. \quad (2-20)$$

Vamos supor como no Capítulo 1 que $\eta = O(A)$ e para quaisquer derivadas em ζ temos $\partial f / \partial \zeta = O(kf)$, sendo A a amplitude característica da onda na superfície livre e k o número de onda característico. Temos como hipótese que $kA \ll 1$. Vamos fazer expansões das equações para superfície livre (2-20) e (2-19) em torno de $\zeta = 0$ até a terceira ordem $O(kA)^3$, logo nos permitindo utilizar a expressão exata $|J|_{\zeta=0} = M(\xi)^2$ e $N(\xi, t)|_{\zeta=0} = \frac{\eta(x(\xi), t)}{M(\xi)}$ (com $\mathcal{R}(\xi, 0) \equiv 0 \Rightarrow \mathcal{R}_\xi(\xi, 0) = 0$):

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{g}{M} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right]_0 + \eta \left[\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{g}{M} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) \right]_0 + \frac{\eta^2}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{g}{M} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) \right]_0 + \\ & + \frac{1}{M^2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}^2 \right]_0 + \frac{1}{M^2} \eta \left[\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}^2 \right) \right]_0 + \frac{1}{M^4} \left[\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^2 \right]_0 - \\ & - \frac{M_\xi}{M^3} \left[\frac{1}{2M^2} \Phi_\xi (\Phi_\xi^2 + \Phi_\zeta^2) + \Phi_\xi \Phi_t \right]_0 + \dots = 0, \end{aligned} \quad (2-21)$$

$$-g\eta = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right]_0 + \eta \left[\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \right]_0 + \frac{\eta^2}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \right]_0 + \frac{1}{M^2} \left[\frac{\mathbf{u}^2}{2} \right]_0 + \frac{1}{M^2} \eta \left[\frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right]_0 + \dots \quad (2-22)$$

Consideremos novamente a seguinte expansão para o potencial de velocidade, Φ , e a elevação da superfície livre, η :

$$\Phi = \sum_{n=1} \varepsilon^n \phi_n, \quad \eta = \sum_{n=1} \varepsilon^n \eta_n, \quad (2-23)$$

onde $\varepsilon = kA \ll 1$. Do mesmo modo que no Capítulo anterior suporemos que estamos em um regime de profundidade intermediária, isto é, $kh = O(1)$. Note que $O(A/h) = O(kA/kh) = O(kA)$, ou seja, consideremos um regime de ondas abatidas (pequena variação da amplitude). Em (2-23) temos que:

$$\begin{aligned} \phi_n &= \phi_n(\xi, \xi_1, \xi_2, \dots; \dots; \zeta; t, t_1, t_2, \dots), \\ \eta_n &= \eta_n(\xi, \xi_1, \xi_2, \dots; t, t_1, t_2, \dots), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \xi, \quad \xi_1 = \varepsilon\xi, \quad \xi_2 = \varepsilon^2\xi \dots, \\ t, \quad t_1 = \varepsilon t, \quad t_2 = \varepsilon^2 t \dots, \end{aligned}$$

são as variáveis em múltiplas escalas introduzidas no problema para permitir a modulação lenta. Quando passamos o problema para múltiplas escalas, as derivadas originais são substituídas conforme procedemos no Capítulo anterior. Vamos agrupar os termos nas expansões até ordem $O(\varepsilon^3)$.

Apresentaremos a seguir duas possibilidades de representação do coeficiente variável $M(\xi)$ nas equações (2-21) e (2-22). Como mencionamos anteriormente exigimos menos restrições da função que descreve a topografia do solo oceânico. Este fato vai servir de ponto de partida para a motivação da expressão do coeficiente $M(\xi)$.

2.2

O coeficiente da superfície livre

Suponha que a função que descreve a topografia do solo marinho seja da forma:

$$h(x) = \begin{cases} 1 + n(x), & -L < x < L \\ 1, & x < -L \quad \text{e} \quad x > L, \end{cases} \quad (2-24)$$

onde L é uma distância característica de propagação da onda. A variação no solo marinho $n(x)$ pode ter amplitude grande. Em um primeiro momento vamos considerá-la como sendo periódica só como motivação, não precisando ter flutuações pequenas, nem ser contínua, nem de variação lenta. No nosso estudo a escala de variação da topografia será comparável à da onda.

Quando $h(x)$ é escrita desta forma, o coeficiente da superfície livre (também conhecido como o termo métrico) tem a forma:

$$M(\xi) = 1 + m(\xi). \quad (2-25)$$

Em Nachbin [16], $M(\xi)$ é obtido na versão adimensional (conforme expressão (2-12)). Deste modo,

$$m(\xi) = \frac{\pi}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n(x(\xi'), -1)}{\cosh^2 \frac{\pi}{2} (\xi - \xi')} d\xi'. \quad (2-26)$$

Na parte de análise assintótica que será feita na próxima seção trabalharemos com a hipótese de que $n(x)$ tem média zero (notação: $\langle n \rangle = 0$). No entanto, como ilustraremos em um dos casos a seguir, $m(\xi)$ não é necessariamente de média zero. Este fato tem um impacto interessante na análise assintótica.

Quando considerarmos $n(x)$ periódica, estaremos considerando a média no sentido que

$$\langle n(x) \rangle = \frac{1}{L} \int_0^L n(x) dx, \quad (2-27)$$

onde L é o período da topografia.

Quando considerarmos $n(x)$ aleatória, estaremos considerando que a altura em um dado ponto x_j é uma variável aleatória. Para pontos x_m e x_n distintos consideramos que $n(x_m)$ e $n(x_n)$ são variáveis aleatórias identicamente distribuídas e independentes. Além disso $n(x)$ como processo estocástico é suposto ser um processo estacionário (como $b(x)$ em Mei e Hancock [15]), para maiores detalhes sobre processo estocástico estacionário ver Fouque *et al.* [6]. A média no sentido de valor esperado (esperança matemática) da variável aleatória $n(x_j)$ é dada por:

$$\langle n(x_j) \rangle = \langle n_j \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s f(s) ds, \quad (2-28)$$

onde $f(s)$ é a função densidade de probabilidade $\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(s) ds = 1 \right)$. Supomos que temos ergodicidade, ou seja, para uma realização longa o suficiente a média espacial no limite é igual a média do espaço de estados, ou seja,

$$\langle n(x_j) \rangle = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_{-L}^L n(x) dx.$$

2.2.1

1^o Caso

Seja $h(x)$ a função que descreve a topografia, como em (2-24). Em alguns casos podemos adotar para $M(\xi)$ a seguinte representação:

$$M(\xi) = 1 + \varepsilon m(\xi), \quad (2-29)$$

indicando funções de pequena amplitude. Deste modo, teremos nas equações (2-21) e (2-22), que:

$$\left(\frac{1}{M(\xi)} \right) = \left(\frac{1}{1 + \varepsilon m(\xi)} \right) = 1 - \varepsilon m(\xi) + \varepsilon^2 m(\xi)^2 - O(\varepsilon^3).$$

Em alguns casos podemos supor que a função $m(\xi)$ tem média igual a zero. Estes são os casos, em geral, em que $n(x)$ é de pequena amplitude. Seja $\langle m \rangle$ a média e m' a perturbação em torno desta. Então $m = \langle m \rangle + m'$. Logo quando $\langle m \rangle = 0$ então $\langle m' \rangle = 0$. Esta representação de M nas equações (2-21) e (2-22) limita a batimetria a situações não tão distintas daquelas consideradas nos modelos apresentados por Mei e Hancock [15], apesar da nossa abordagem de utilizar a aplicação conforme ter vantagens que serão comentadas a posteriori.

Para fortalecer a intuição física, considere uma batimetria periódica com média zero. A Figura 2.2 (gerada usando o Schwarz-Christoffel Toolbox do Matlab) apresenta um perfil que se encaixa nesta situação.

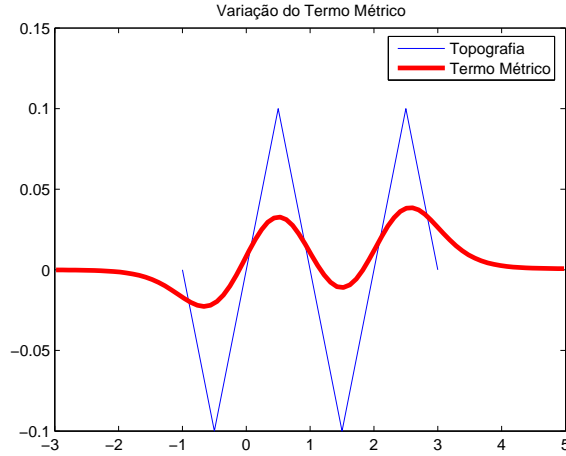


Figura 2.2: Variação do Termo Métrico: $m(\xi) = M(\xi) - 1$. O perfil da topografia é superimposto ao de $m(\xi)$, que é $O(\varepsilon)$. A topografia é formada por picos e vales pontiagudos cuja altura corresponde a $1/10$ da profundidade do canal em questão.

Apesar da batimetria apresentar pequena variação, ela tem picos pontiagudos. Mas a onda na superfície livre não será afetada pelos picos e sim vai “sentir” a topografia suavizada como se fosse a curva representada pelo gráfico do termo métrico da aplicação conforme mostrado na Figura 2.2 superimposto à batimetria.

Vamos considerar agora, uma representação para $M(\xi)$, que possibilita uma gama de perfis muito mais gerais e mais próximos do que pode se apresentar numa situação real.

2.2.2 2º Caso

Seja $h(x)$ a função que descreve a topografia, conforme (2-24). Considere a notação $\langle \dots \rangle$ para a média e $(\dots)'$ para a perturbação desta componente. Agora vamos considerar topografias com flutuações de grande amplitude e para tal adotaremos a seguinte expansão para $M(\xi)$,

$$M(\xi) = a + \varepsilon m'(\xi). \quad (2-30)$$

Agora a representa a profundidade efetiva (“sentida” na superfície livre) enquanto que a função $m'(\xi)$ representa a flutuação que tem média igual a zero ($\langle m' \rangle = 0$). De fato $a = 1 - \delta$, com $0 < \delta < 1$. O “ansatz” desta representação de $M(\xi)$ está

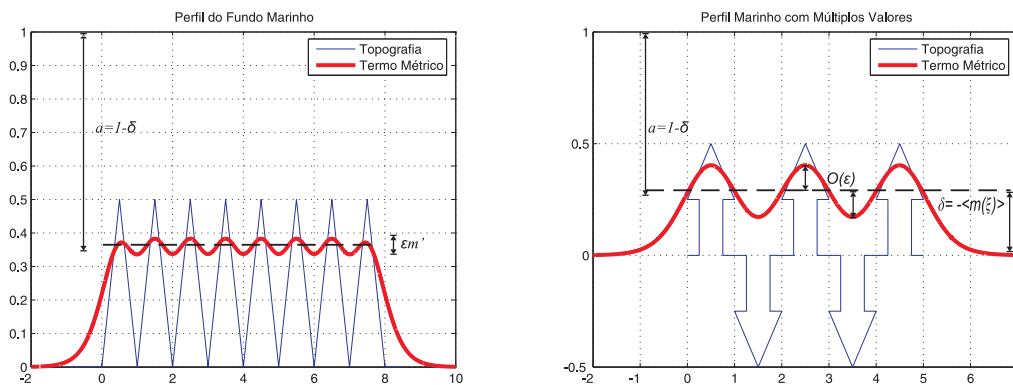
baseado na expressão $h(x)$ da forma (2-24) de modo que:

$$\begin{aligned} M(\xi) &= 1 + m(\xi) \\ &= 1 + \langle m(\xi) \rangle + \varepsilon m'(\xi) \\ &= \underbrace{1 + \langle m(\xi) \rangle}_a + \varepsilon m'(\xi) \Rightarrow \delta = -\langle m(\xi) \rangle. \end{aligned} \quad (2-31)$$

Para ilustrar esse “ansatz” e obtermos intuição física, considere primeiramente uma batimetria periódica. A Figura 2.3(a) e Figura 2.3(b) apresentam perfis que se encaixam nesta situação. Na Figura 2.3(a), a onda na superfície livre vai “sentir” a topografia suavizada, como se fosse sem picos pontiagudos. Em ambas as Figuras o δ representa o efeito de que as oscilações estão em um nível mais elevado. Na Figura 2.3(b) temos um perfil marinho que pode representar a presença de estruturas submersas. Observamos que apesar de neste caso $n(x)$ ter média zero, temos que $\langle m(\xi) \rangle \neq 0$.

Estabeleceremos algumas hipóteses para o termo métrico $m'(\xi)$ que são herdadas a partir de $n(x)$ e utilizadas no desenvolvimento da análise assintótica. Provar que estas propriedades são herdadas é uma tarefa não trivial (ver Garnier [8]), mas em primeira aproximação, em termos dominantes consideraremos $m'(\xi)$ como sendo:

- um processo aleatório estacionário,
- satisfazendo a hipótese de ergodicidade,
- e que sua função de correlação (ver Apêndice C) decai para zero rapidamente.



a) Grande variação da amplitude de solo marinho em relação a profundidade média da lâmina d’água. b) Grande variação da amplitude do solo marinho descrito por $h(x)$ que assume múltiplos valores.

Figura 2.3: Exemplos gerais do caso: $M(\xi) = a + \varepsilon m'(\xi)$

Vejam os alguns exemplos de perfis que se enquadram nesta representação de $M(\xi)$, ainda considerando $h(x)$ como em (2-24) periódica:

Exemplo 2.1 A Figura 2.4 apresenta variação lenta da amplitude do solo marinho em relação à profundidade média da lâmina d'água. Temos um canal com uma topografia contendo seis montanhas triangulares. A Figura 2.4 mostra o perfil das montanhas superimposto ao perfil do gráfico do coeficiente da superfície livre (termo métrico - $m'(\xi)$) avaliado na fronteira superior. A onda na superfície livre vai “sentir” as montanhas, como se fossem morros suaves. A profundidade efetiva, representada pelo a na expressão do M , é a profundidade que vai de fato ser “sentida” na superfície do canal.

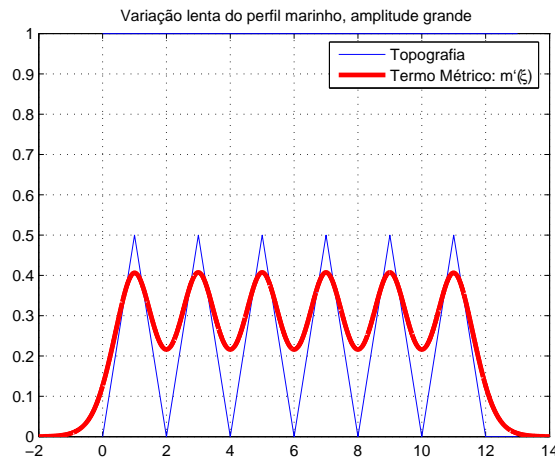


Figura 2.4: Batimetria de variação lenta, amplitude grande - Exemplo 2.1.

Exemplo 2.2 A Figura 2.5 mostra o efeito da topografia na superfície livre de acordo com a variação da profundidade média. A altura das montanhas no fundo do canal é a mesma, o que muda é a profundidade média da lâmina d'água. Quanto maior a profundidade, menos a topografia é sentida na superfície do canal, a ponto de as seis montanhas serem “vistas” praticamente como um único morro suave (um “plateau”). Note que a Figura 2.5 justifica nosso “ansatz” de $M(\xi) = a + \varepsilon m'(\xi)$. A medida que a profundidade efetiva aumenta (representada pelo $a(1-\delta, 1, 5-\delta, 2-\delta)$ na expressão do M), a onda na superfície livre é menos influenciada pelas flutuações de $O(\varepsilon)$ que tem média igual a zero ($\langle m' \rangle = 0$).

Exemplo 2.3 A Figura 2.6 representa um perfil marinho de múltiplos valores, todos estes de grande variação na amplitude em relação à profundidade média da lâmina d'água. Este perfil pode simular a presença de estruturas submersas comuns na exploração off-shore. Observamos mais uma vez como a variação da amplitude da profundidade média influencia no efeito da suavização com que a onda vai “sentir” o que está no fundo marinho.

Vejamos alguns exemplos de perfis, considerando agora $h(x)$ como uma função aleatória com média zero. Nos exemplos a seguir temos um perfil marinho

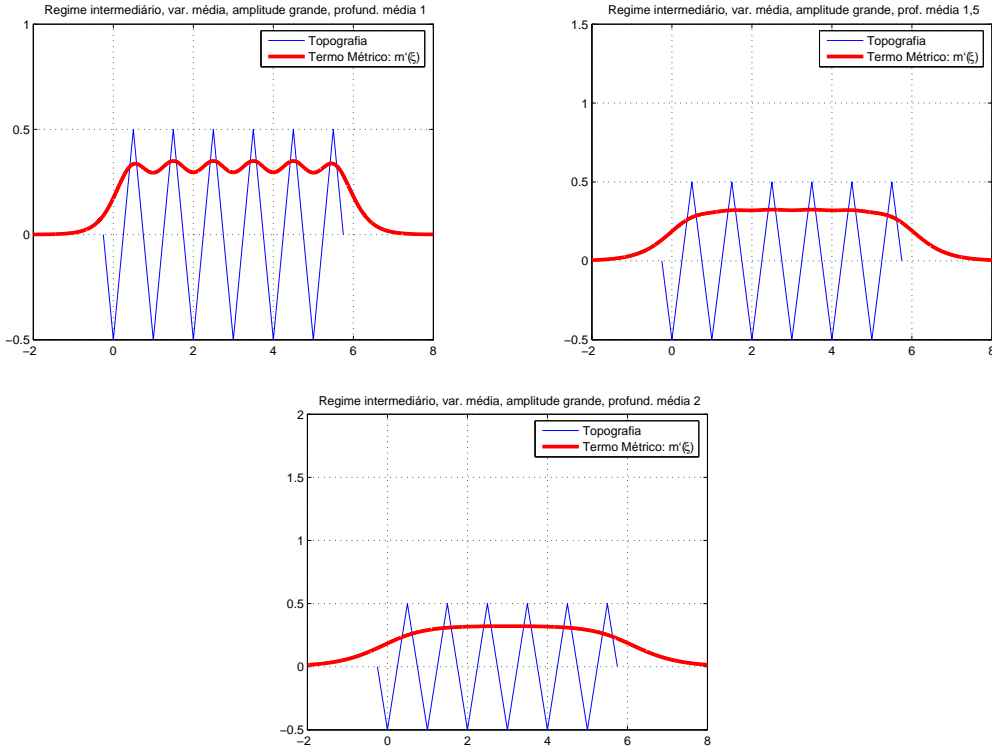


Figura 2.5: Efeito da Topografia com a variação da profundidade média - Exemplo 2.2.

aleatório com 100 quinas distribuídas com 0.5 de comprimento de correlação, tendo o nível de flutuação da topografia em 80%. Nos exemplos abaixo o valor esperado foi calculado usando o método de Monte Carlo para aproximação da integral do valor esperado:

$$\langle m(\xi) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s dF(s) \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N m(\xi),$$

onde $F(s)$ é a função de distribuição de probabilidade e N é o número de realizações do método.

Exemplo 2.4 A Figura 2.7, apresenta a batimetria com as características descritas acima. Para este exemplo temos somente o perfil da topografia de variação aleatória superimposto ao gráfico do coeficiente livre.

Exemplo 2.5 A Figura 2.8 apresenta o gráfico do Jacobiano calculado para uma topografia com as características descritas acima. O valor esperado $\langle m(\xi) \rangle$ da batimetria (mostrada na Figura 2.9) foi calculado com 20 realizações pelo método Monte Carlo. De acordo com a expressão de $M(\xi)$ em (2-12) e as propriedades desta provadas em Nachbin [16] e Artiles Roqueta [2], fora da região onde há variação de topografia, o Jacobiano deve ser a identidade (vide a descrição de

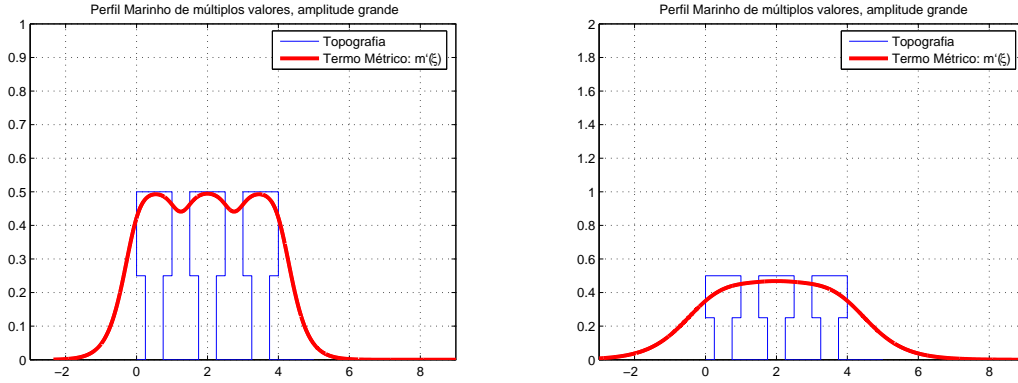


Figura 2.6: Perfil marinho de múltiplos valores, variação da profundidade média - Exemplo 2.3.

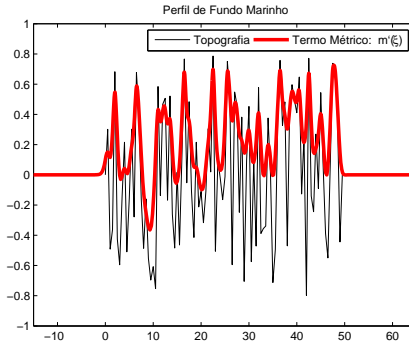


Figura 2.7: Perfil da Topografia aleatória superimposto ao Termo Métrico - Exemplo 2.4.

$h(x)$ em (2-24)). De acordo com (2-10), dentro da região onde há variação da batimetria, devemos ter $|J| < 1$. De fato temos que:

$$\begin{aligned} \sqrt{|J|} &\approx M(\xi) \\ &\approx a + \varepsilon m'(\xi) \\ &\approx (1 - \delta) + \varepsilon m'(\xi), \end{aligned}$$

onde $0 < \delta < 1$ e $\varepsilon \ll 1$.

A Figura 2.9, apresenta a batimetria, para qual foi calculado o Jacobiano acima. Como mencionado o valor esperado $\langle m(\xi) \rangle$ foi calculado pelo método Monte Carlo com 20 realizações.

Exemplo 2.6 A Figura 2.10, apresenta a mudança que acontecerá com o efeito da variação no número de realizações do método Monte Carlo para o cálculo do valor esperado, $\langle m(\xi) \rangle$. Basicamente estamos ilustrando a convergência do Método Monte Carlo para o cálculo da Média. O perfil marinho é aleatório com 100 quas distribuídas com 0.5 de comprimento de correlação e o nível de flutuação da

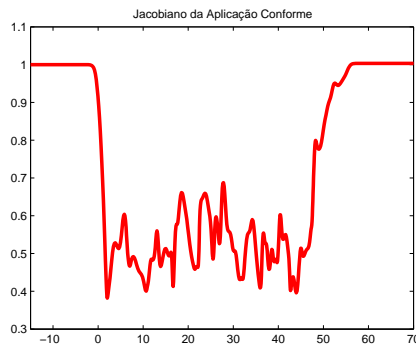


Figura 2.8: Jacobiano - Exemplo 2.5.

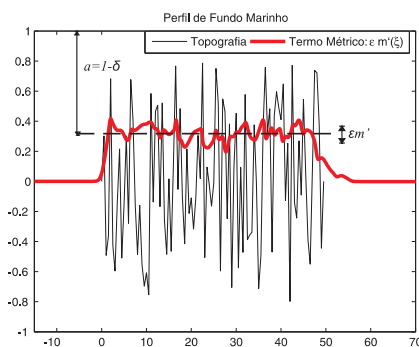


Figura 2.9: Topografia usado para cálculo do Jacobiano - Exemplo 2.5.

topografia é de 80%. A profundidade média da lâmina d'água é $h = 2$. Para a onda na superfície livre, a batimetria terá o efeito da curva representada pelo gráfico do termo métrico. Observe que quando usamos mais realizações para o método de Monte Carlo, o perfil médio fica mais suavizado, indicando mais claramente a profundidade efetiva $a = 1 - \delta = 1 + \langle m \rangle$.

As representações para o coeficiente métrico (2-29) e (2-30) consideradas neste trabalho são válidas devido ao fato de estarmos trabalhando com a aplicação de Schwarz-Christoffel. No Apêndice A descrevemos esta aplicação com mais detalhes.

2.3

Análise assintótica em múltiplas escalas para topografias de grande amplitude

Suponha que a função $h(x)$ que descreve a topografia é aleatória, com média² zero. Para topografias com flutuações de grande amplitude consideramos que

²Deste ponto em diante quando nos referirmos à média (notação $\langle \dots \rangle$) entenda-se valor esperado, definido anteriormente em (2-28).

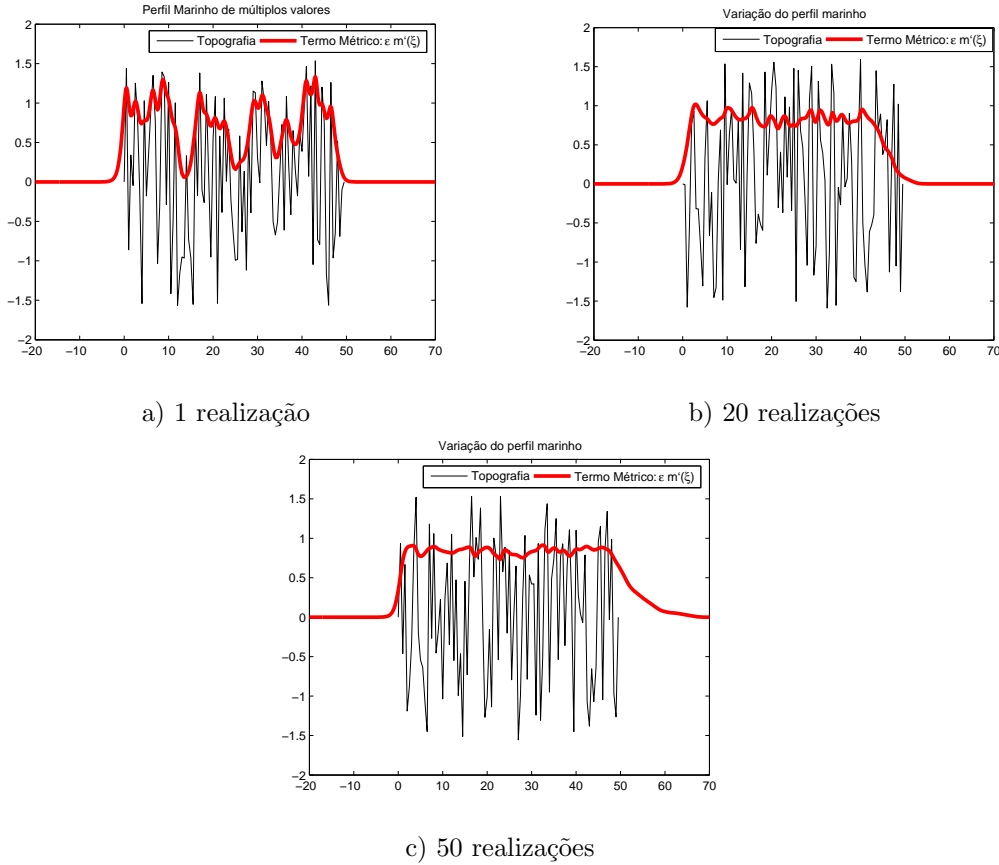


Figura 2.10: Perfil aleatório - Variação no número de realizações do método Monte Carlo - Exemplo 2.6.

$M(\xi) = a + \varepsilon m'(\xi)$ com $a < 1$ e $\varepsilon \ll 1$. Deste modo teremos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{M(\xi)} &= \frac{1}{a + \varepsilon m'(\xi)} = \frac{1}{a \left(1 + \frac{\varepsilon}{a} m'\right)} = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{a} m'} \right); \\ \frac{1}{M(\xi)} &= \frac{1}{a} \left(1 - \frac{\varepsilon}{a} m'(\xi) + \frac{\varepsilon^2}{a^2} m'(\xi)^2 - O(\varepsilon^3) \right); \\ &= \frac{1}{a} - \frac{\varepsilon}{a^2} m'(\xi) + \frac{\varepsilon^2}{a^3} m'(\xi)^2 - O(\varepsilon^3), \end{aligned}$$

com $\varepsilon < a$ por definição do SC. Vamos substituir estas expansões nas condições expandidas da superfície livre (2-21)-(2-22), aqui reproduzidas:

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{g}{M} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right]_0 + \eta \left[\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{g}{M} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) \right]_0 + \frac{\eta^2}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{g}{M} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) \right]_0 + \\ &+ \frac{1}{M^2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}^2 \right]_0 + \frac{1}{M^2} \eta \left[\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}^2 \right) \right]_0 + \frac{1}{M^4} \left[\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^2 \right]_0 - \\ &- \frac{M_\xi}{M^3} \left[\frac{1}{2M^2} \Phi_\xi (\Phi_\xi^2 + \Phi_\zeta^2) + \Phi_\xi \Phi_t \right] + \dots = 0, \\ -g\eta &= \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right]_0 + \eta \left[\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \right]_0 + \frac{\eta^2}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \right]_0 + \frac{1}{M^2} \left[\frac{\mathbf{u}^2}{2} \right]_0 + \frac{1}{M^2} \eta \left[\frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right]_0 + \dots \end{aligned}$$

Introduzimos as expansões em múltiplas escalas na equação de Laplace (2-5) e nas condições da superfície livre (2-21)-(2-22) contendo expansões para M^{-1} e prosseguimos conforme o Capítulo anterior. Agrupando os termos em ordem ε , obtemos:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) \phi_n = F_n, \quad -1 < \zeta < 0, \quad (2-32)$$

com

$$\mathcal{L}_a \phi_n \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{g}{a} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \phi_n = G_n, \quad \zeta = 0, \quad (2-33)$$

na superfície livre. A condição de fundo, em coordenadas curvilíneas, é trivial:

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial \zeta} = 0, \quad \zeta = -1. \quad (2-34)$$

Por fim, usando a condição dinâmica, recuperamos a elevação da superfície livre através de

$$-g\eta_n = H_n, \quad \zeta = 0. \quad (2-35)$$

Os novos termos forçantes, até ordem $O(\varepsilon^3)$, são descritos por:

$$F_1 = 0, \quad F_2 = -2\phi_{1\xi\xi_1}, \quad F_3 = -\left[\phi_{1\xi_1\xi_1} + 2\phi_{1\xi\xi_2} + 2\phi_{2\xi\xi_1} \right]; \quad (2-36)$$

$$G_1 = 0, \quad G_2 = -\left[\eta_1 \mathcal{L}_{a\zeta} \phi_1 + \frac{1}{a^2} \left(\phi_{1\xi}^2 + \phi_{1\zeta}^2 \right)_t + 2\phi_{1tt_1} \right] + g \frac{m'(\xi)}{a^2} \phi_{1\zeta}, \quad (2-37)$$

$$\begin{aligned} G_3 = & -\left[\eta_2 \mathcal{L}_{a\zeta} \phi_1 + \eta_1 \mathcal{L}_{a\zeta} \phi_2 + \frac{1}{2} \eta_1^2 \mathcal{L}_{a\zeta\zeta} \phi_1 + \frac{2}{a^2} \left(\phi_{1\xi} \phi_{2\xi} + \phi_{1\zeta} \phi_{2\zeta} \right)_t + \right. \\ & + \eta_1 \left(\phi_{1\xi}^2 + \phi_{1\zeta}^2 \right)_{t\zeta} + \frac{1}{2a^4} \left(\phi_{1\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \phi_{1\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \left(\phi_{1\xi}^2 + \phi_{1\zeta}^2 \right) \\ & + 2\phi_{2tt_1} + \frac{2}{a^2} \phi_{1\zeta} \phi_{1\zeta t_1} + \frac{2}{a^2} \phi_{1\xi_1} \phi_{1\xi t} + \frac{2}{a^2} \phi_{1\xi} \phi_{1\xi t_1} + \frac{2}{a^2} \phi_{1\xi} \phi_{1t\xi_1} + \\ & \left. + 2\eta_1 \phi_{1\zeta t t_1} + 2\phi_{1t t_2} + \phi_{1t_1 t_1} \right] + \eta_1 g \frac{m'(\xi)}{a^2} \phi_{1\zeta\zeta} + g \frac{m'(\xi)}{a^2} \phi_{2\zeta} - \\ & - g \frac{m'(\xi)^2}{a^3} \phi_{1\zeta} + 2 \frac{m'(\xi)}{a^3} \left(\phi_{1\xi}^2 + \phi_{1\zeta}^2 \right)_t + \frac{m'_\xi(\xi)}{a^3} \phi_{1\xi} \phi_{1t}, \end{aligned} \quad (2-38)$$

$$H_1 = \phi_{1t}, \quad H_2 = \phi_{2t} + \frac{1}{2a^2} \left(\phi_{1\xi}^2 + \phi_{1\zeta}^2 \right) + \phi_{1t_1} + \eta_1 \phi_{1\zeta t}, \quad (2-39)$$

$$\begin{aligned} H_3 = & \phi_{3t} + \phi_{1\xi} \phi_{2\xi} + \phi_{1\zeta} \phi_{2\zeta} + \eta_1 \phi_{2\zeta t} + \eta_2 \phi_{1\zeta t} + \\ & + \frac{1}{2} \eta_1^2 \phi_{1\zeta\zeta t} + \frac{\eta_1}{2a^2} \left(\phi_{1\xi}^2 + \phi_{1\zeta}^2 \right)_\zeta + \phi_{2t_1} \\ & + \phi_{1\xi} \phi_{1\xi_1} + \phi_{1t_2} + \eta_1 \phi_{1\zeta t_1} - \frac{m'(\xi)}{a^3} \left(\phi_{1\xi}^2 + \phi_{1\zeta}^2 \right). \end{aligned} \quad (2-40)$$

Note o efeito do parâmetro a , indicando topografias de grande amplitude.

Observação 2.7 Na análise a ser apresentada a seguir, o regime para escalas rápidas não pode ser considerado, uma vez que para tal caso deveríamos adotar uma representação de M da forma:

$$M(\xi) = 1 + \varepsilon m\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right). \quad (2-41)$$

A presença do ξ dividido por ε , altera os subproblemas que aparecem no momento da análise assintótica, quando os termos até ordem $O(\varepsilon^3)$ são agrupados. Por exemplo, a presença da derivada em relação a ξ na equação (2-21) que vai gerar o termo $\frac{1}{\varepsilon}M(\xi)$.

Voltando ao problema em questão seguimos a análise do artigo de Mei e Hancock [15], que esta restrita a topografias suaves de pequena amplitude. Através do uso da aplicação conforme podemos adaptá-la a este caso mais geral de topografias de grande amplitude.

As soluções em todas as ordens são expressas por:

$$\phi_n = \langle \phi_n \rangle + \phi'_n, \quad \eta_n = \langle \eta_n \rangle + \eta'_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Os forçantes também podem ser escritos desta forma:

$$F_n = \langle F_n \rangle + F'_n, \quad G_n = \langle G_n \rangle + G'_n, \quad H_n = \langle H_n \rangle + H'_n.$$

(i) O Problema em Primeira Ordem

Visto que $F_1 = G_1 = 0$, a solução em primeira ordem não é afetada pelo efeito da topografia, deste modo:

$$\phi'_1 = \eta'_1 = 0; \quad \phi_1 = \langle \phi_1 \rangle, \quad \eta_1 = \langle \eta_1 \rangle.$$

Lembrando que a fase da onda é $\psi = k\xi - \omega t$, temos como solução em primeira ordem um trem de ondas monocromático propagando da esquerda para direita:

$$\langle \phi_1 \rangle = \phi_{10} - \frac{g \cosh Q}{2\omega \cosh q} (iAe^{i\psi} + *) \quad (2-42)$$

$$\langle \eta_1 \rangle = \frac{1}{2} (Ae^{i\psi} + *), \quad (2-43)$$

onde $\phi_{10} = \phi_{10}(\xi_1, \xi_2, t_1, t_2, \dots)$ representa o potencial de ondas longas, aqui $A = A(\xi_1, \xi_2, t_1, t_2, \dots)$ denota o termo dominante da amplitude, $Q = k(\zeta + 1)$, $q = kh = k$ (com a aplicação conforme $h = 1$) e $*$ denota o complexo conjugado. A relação de dispersão que relaciona a frequência da onda ω e o número de onda k aqui é descrita por:

$$\omega^2 = \frac{gk}{a} \tanh q. \quad (2-44)$$

Aqui o efeito do a indica uma profundidade efetiva diferente de 1. Este é o único ponto em que esta difere da solução de primeira ordem para o caso de fundo plano do Capítulo anterior. Destacamos que para $M = 1 + \varepsilon m(\xi)$, a expressão de ω é semelhante a do fundo plano (1-22).

Observação 2.8 Usaremos a linearidade do problema e o fato de que $\langle m' \rangle = 0$, para encontrar as soluções em $O(\varepsilon^2)$ e $O(\varepsilon^3)$.

(ii) O Problema em Segunda Ordem

Os termos forçantes podem ser decompostos em uma parte determinística $\langle \dots \rangle$ e uma parte aleatória $(\dots)'$, dependendo das flutuações $m'(\xi)$ ou de soluções parciais afetadas por elas.

$$\begin{aligned} \langle F_2 \rangle &= -\frac{a\omega \cosh Q}{\sinh q} \left(\frac{\partial A}{\partial \xi_1} e^{i\psi} + * \right), & F_2' &= 0; \\ \langle G_2 \rangle &= -\left[\eta_1 \mathcal{L}_{a\zeta} \phi_1 + \frac{1}{a^2} \left(\phi_{1\xi}^2 + \phi_{1\zeta}^2 \right)_t + 2\phi_{1t_1} \right], & G_2' &= g \frac{m'(\xi)}{a^2} \phi_{1\zeta}; \\ \langle H_2 \rangle &= \langle \phi_{2t} \rangle + \frac{1}{2a^2} \left(\phi_{1\xi}^2 + \phi_{1\zeta}^2 \right) + \phi_{1t_1} + \eta_1 \phi_{1\zeta t}, & H_2' &= \phi_{2t}'. \end{aligned}$$

Observamos que as equações para $\langle \phi_n \rangle$ e $\langle \eta_n \rangle$, ($n = 1, 2$) são semelhantes às equações apresentadas para fundo plano no Capítulo anterior.

Resolveremos o problema para $\langle \phi_2 \rangle$. A presença de termos quadráticos nos forçantes nos motiva a escrever $\langle \phi_2 \rangle$, $\langle F_2 \rangle$ e $\langle G_2 \rangle$ como séries envolvendo modos de Fourier de modo análogo a (1-21) na seção (1), ou seja,

$$\{\langle \phi_2 \rangle, \langle F_2 \rangle, \langle G_2 \rangle\} = \sum_{j=-2}^2 e^{ij\psi} \{\langle \phi_{2j} \rangle, \langle F_{2j} \rangle, \langle G_{2j} \rangle\}, \quad (2-45)$$

Deste modo obtemos:

$$\langle F_{20} \rangle = 0, \quad \langle F_{21} \rangle = -\frac{a\omega \cosh Q}{\sinh q} \frac{\partial A}{\partial \xi_1}, \quad \langle F_{22} \rangle = 0; \quad (2-46)$$

$$\langle G_{20} \rangle = 0, \quad \langle G_{21} \rangle = -\frac{a\omega^2 \cosh q}{k \sinh q} \frac{\partial A}{\partial t_1}, \quad \langle G_{22} \rangle = \frac{(2+a)i\omega^3 A^2}{4 \sinh^2 q}. \quad (2-47)$$

Substituindo (2-45), (2-46)-(2-47) em (2-32)-(2-34) obtemos os subproblemas de valor de contorno para $j = 0, 1$ e 2 .

Para $j = 0$ temos um problema de valor de contorno homogêneo, cuja solução é:

$$\langle \phi_{20} \rangle = \langle \phi_{20} \rangle(\xi_1, \xi_2, t_1, t_2, \dots) = \langle \phi_{20} \rangle^*.$$

Para $j = 1$, o problema fica da forma:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} - k^2 \right) \phi_{21} &= -\frac{a \omega \cosh Q}{\sinh q} \frac{\partial A}{\partial \xi_1}, \quad -1 < \zeta < 0, \\ \left(\frac{g}{a} \frac{\partial}{\partial \zeta} - \omega^2 \right) \phi_{21} &= \frac{a \omega^2 \cosh q}{k \sinh q} \frac{\partial A}{\partial t_1}, \quad \zeta = 0, \\ \frac{\partial \phi_{21}}{\partial \zeta} &= 0, \quad \zeta = -h. \end{aligned}$$

Como podemos observar, para $j = 1$, o problema não é homogêneo. Logo temos que nos preocupar com a condição de compatibilidade. Usando a Fórmula de Green descrita em (1-31) obtemos que:

$$\frac{a}{g} G_{21} = \int_{-1}^0 \left(F_{21} \frac{\cosh Q}{\cosh q} \right) d\zeta, \quad (2-48)$$

de onde resulta que:

$$\frac{\partial A}{\partial t_1} + \widetilde{C}_g \frac{\partial A}{\partial \xi_1} = 0, \quad (2-49)$$

onde

$$\widetilde{C}_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\omega}{2k} \left(1 + \frac{2k}{\sinh 2k} \right), \quad (2-50)$$

ou seja, em termos dominantes a velocidade da amplitude do trem de ondas é afetada pelo parâmetro a , devido à relação de dispersão (2-44).

Seguindo os passos do Capítulo anterior, a solução que satisfaz o problema de valor de contorno acima é:

$$\langle \phi_{21} \rangle = \frac{-a \omega}{2k^2 \sinh q} \frac{\partial A}{\partial \xi_1} (Q \sinh Q).$$

Para $j = 2$ obtemos como solução

$$\langle \phi_{22} \rangle = -\frac{(a+2)iA^2\omega}{16 \sinh^4 q} \cosh 2Q.$$

A solução total para a parte determinística em segunda ordem é:

$$\langle \phi_2 \rangle = \phi_{20} - \frac{a\omega}{2k^2 \sinh q} (Q \sinh Q) \left(\frac{\partial A}{\partial \xi_1} e^{i\psi} + * \right) - \frac{(a+2)\omega \cosh 2Q}{16 \sinh^4 q} (iA^2 e^{2i\psi} + *).$$

$$\begin{aligned} \langle \eta_2 \rangle &= \left\{ \frac{1}{g} \phi_{10t_1} - \frac{k}{2a^2 \sinh 2q} |A|^2 [2a(-a \sinh^2 q + \cosh^2 q) - 1] \right\} + \frac{1}{2\omega} \left(i \frac{\partial A}{\partial t_1} e^{i\psi} + * \right) - \\ &\quad - \frac{aq \sinh q}{2k \cosh q} \left(i \frac{\partial A}{\partial \xi_1} e^{i\psi} + * \right) + \frac{k \cosh q (2 \cosh^2 q + a)}{8a^2 \sinh^3 q} (A^2 e^{2i\psi} + *). \end{aligned}$$

Os resultados a serem obtidos para a componente (...)’ da solução de segunda ordem são novos. Na abordagem por aplicação conforme a topografia

afeta a condição de fronteira na superfície livre. No trabalho de Mei e Hancock [15], ela afeta a condição de Neumann no fundo. O uso do mapeamento conforme traz outras vantagens que serão destacadas a posteriori.

O problema em segunda ordem apresenta efeito da topografia através do forçante $G'_2 = g \frac{m'(\xi)}{a^2} \phi_{1\zeta}$. Vamos resolver o problema para ϕ'_2 :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) \phi'_2 = 0, \quad -1 < \zeta < 0, \quad (2-51)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{g}{a} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \phi'_2 = g \frac{m'(\xi)}{a^2} \phi_{1\zeta}, \quad \zeta = 0, \quad (2-52)$$

$$\frac{\partial \phi'_2}{\partial \zeta} = 0, \quad \zeta = -1. \quad (2-53)$$

Observa-se pela expressão de G'_2 que ϕ'_2 é forçado por somente um modo de Fourier. Vamos procurar soluções da forma:

$$\phi'_2 = \phi'_{21} e^{-i\omega t} + *, \quad \eta'_2 = \eta'_{21} e^{-i\omega t} + *.$$

Para tal devemos obter a solução do problema de valor de contorno para ϕ'_{21} :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) \phi'_{21} = 0, \quad -1 < \zeta < 0, \quad (2-54)$$

$$\left(\frac{g}{a} \frac{\partial}{\partial \zeta} - \omega^2 \right) \phi'_{21} = g \frac{m'(\xi)}{a^2} \left(-\frac{a\omega}{2} i A e^{ik\xi} \right), \quad \zeta = 0, \quad (2-55)$$

$$\frac{\partial \phi'_{21}}{\partial \zeta} = 0, \quad \zeta = -1. \quad (2-56)$$

Vale lembrar que $A = A(\xi_1, \xi_2, t_1, t_2, \dots)$ denota uma modulação lenta da amplitude, independente de ξ .

Resolvemos este problema usando uma função de Green $\mathcal{G}(\xi, \zeta; \xi')$, definida por

$$\mathcal{G}_{\xi\xi} + \mathcal{G}_{\zeta\zeta} = 0, \quad -1 < \zeta < 0, \quad (2-57)$$

$$\mathcal{G}_{\zeta} - \frac{a\omega^2}{g} \mathcal{G} = \delta(\xi - \xi'), \quad \zeta = 0, \quad (2-58)$$

$$\mathcal{G}_{\zeta} = 0, \quad \zeta = -1. \quad (2-59)$$

A condição de contorno (2-55) foi dividida por g e multiplicada por a antes de ser transformada na equação (2-58). \mathcal{G} satisfaz a condição de radiação para infinito. Para maiores detalhes ver Apêndice B, destacamos que $\mathcal{G}(\xi, \zeta; \xi') = \mathcal{G}(|\xi - \xi'|, \zeta)$.

A solução encontrada para ϕ'_{21} , usando o Teorema de Green é:

$$\phi'_{21} = \frac{-iA\omega}{2} \int_{-\infty}^{\infty} m'(\xi') e^{ik\xi'} \mathcal{G}(|\xi - \xi'|, \zeta) d\xi'. \quad (2-60)$$

Segue que:

$$\phi'_2 = -\frac{iA\omega}{2} \int_{-\infty}^{\infty} m'(\xi') e^{-ikr} \mathcal{G}(|r|, \zeta) dr e^{i\psi} + *,$$

com $r = \xi - \xi'$ ($dr = -d\xi'$).

(iii) O Problema em Terceira Ordem

A solução $\langle \phi_3 \rangle$ depende de $\langle F_3 \rangle$ e $\langle G_3 \rangle$, assim o problema determinístico desta ordem é afetado pela esperança matemática da topografia devido à presença dos termos: $\frac{g}{a^2} \langle m'(\xi) \phi'_{2\zeta} \rangle$ e $\frac{g}{a^3} \langle m'(\xi)^2 \rangle \phi_{1\zeta}$ em $\langle G_3 \rangle$, a saber:

$$\langle F_3 \rangle = - \left[\phi_{1_{\xi_1 \xi_1}} + 2\phi_{1_{\xi \xi_2}} + 2\langle \phi_{2_{\xi \xi_1}} \rangle \right]; \quad (2-61)$$

$$\begin{aligned} \langle G_3 \rangle = & - \left[\langle \eta_2 \rangle \mathcal{L}_{a\zeta} \phi_1 + \eta_1 \mathcal{L}_{a\zeta} \langle \phi_2 \rangle + \frac{1}{2} \eta_1^2 \mathcal{L}_{a\zeta \zeta} \phi_1 + \frac{2}{a^2} (\phi_{1_\xi} \langle \phi_{2_\xi} \rangle + \phi_{1_\zeta} \langle \phi_{2_\zeta} \rangle)_t + \right. \\ & + \eta_1 (\phi_{1_\xi}^2 + \phi_{1_\zeta}^2)_{t\zeta} + \frac{1}{2a^4} \left(\phi_{1_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \phi_{1_\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) (\phi_{1_\xi}^2 + \phi_{1_\zeta}^2) \\ & + 2\langle \phi_{2_{t t_1}} \rangle + \frac{2}{a^2} \phi_{1_\zeta} \phi_{1_{\zeta t_1}} + \frac{2}{a^2} \phi_{1_{\xi_1}} \phi_{1_{\xi t}} + \frac{2}{a^2} \phi_{1_\xi} \phi_{1_{\xi t_1}} + \frac{2}{a^2} \phi_{1_\xi} \phi_{1_{t \xi_1}} + \\ & \left. + 2\eta_1 \phi_{1_{\zeta t t_1}} + 2\phi_{1_{t t_2}} + \phi_{1_{t_1 t_1}} \right] + \frac{g}{a^2} \langle m' \phi'_{2\zeta} \rangle - \frac{g}{a^3} \langle m'(\xi)^2 \rangle \phi_{1_\zeta}. \end{aligned} \quad (2-62)$$

Novamente a presença de termos quadráticos nos forçantes motiva-nos a usar diferentes harmônicos na expressão da solução, deste modo procuramos uma solução da forma:

$$\langle \phi_3 \rangle = \langle \phi_{30} \rangle + (\langle \phi_{31} \rangle e^{i\psi} + *) + \dots \quad (2-63)$$

Para tal devemos escrever a expressão de $\langle F_3 \rangle$ e $\langle G_3 \rangle$ também em diferentes harmônicos de modo análogo à expressão (2-63) e comparar com (2-61) e (??).

Deste modo verificamos que

$$\begin{aligned} \langle F_{30} \rangle &= -\frac{\partial^2 \phi_{10}}{\partial \xi_1^2}, \\ \langle F_{31} \rangle &= -\frac{i a \omega}{k \sinh q} \left[Q \sinh Q + \frac{1}{2} \cosh Q \right] \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \xi_1^2} \right) - \frac{a \omega \cosh Q}{\sinh q} \left(\frac{\partial A}{\partial \xi_2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle G_{30} \rangle &= -\frac{\partial^2 \phi_{10}}{\partial t_1^2} - \frac{a^2 \omega^2}{4 \sinh^2 q} (AA^*)_{t_1} + \frac{a \omega^3}{2k \sinh^2 q} (AA^*)_{\xi_1} + \\ &+ \frac{\omega^3}{4k \sinh^2 q} \left\{ \frac{2q}{\sinh 2q} \left(\cosh^2 q (2 - a - a^2) - (1 - a^2) + \frac{(a - a^2)}{2} \right) + \right. \\ &\left. + (1 - a) \left(2 \cosh^2 q - 1 + \frac{a}{2} \right) \right\} (AA^*)_{\xi_1} \\ \langle G_{31} \rangle &= \frac{\omega^3 a k \cosh q}{16 \sinh^5 q} \{ \Xi \} i |A|^2 A - \frac{\omega k}{\sinh 2q} \left(\frac{\partial \phi_{10}}{\partial t_1} - \frac{2 \omega \cosh^2 q}{ak} \frac{\partial \phi_{10}}{\partial \xi_1} \right) i A + \\ &+ \frac{i g}{2 \omega} \frac{\partial^2 A}{\partial t_1^2} - \frac{a \omega^2 q}{k^2} i \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_1 \partial t_1} + \frac{a \omega^2 \cosh q}{k \sinh q} \frac{\partial A}{\partial t_2} - i A g \beta_a + \frac{g \omega}{2a^2} \langle m'(\xi)^2 \rangle i A, \end{aligned}$$

onde

$$\Xi = \{ (6a^2 + 2) \cosh^4 q + (37 - 45a^2) \cosh^2 q + 1 + (36a^2 - 28) - 2 \tanh^2 q \},$$

$$\beta_a = \frac{gk \sinh q}{2\omega a^3 \cosh q} \int_{-\infty}^{\infty} \langle m'(\xi) m'(\xi') \rangle e^{-ikr} \mathcal{G}_\zeta(|r|, 0) dr. \quad (2-64)$$

Em resumo, o problema de valor de contorno para o j -ésimo harmônico de $\langle \phi_3 \rangle$ é:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} - j^2 k^2 \right) \langle \phi_{3j} \rangle = \langle F_{3j} \rangle, \quad -1 < \zeta < 0, \quad (2-65)$$

$$\left(\frac{g}{a} \frac{\partial}{\partial \zeta} - j^2 \omega^2 \right) \langle \phi_{3j} \rangle = \langle G_{3j} \rangle, \quad \zeta = 0, \quad (2-66)$$

$$\frac{\partial \langle \phi_{3j} \rangle}{\partial \zeta} = 0, \quad \zeta = -1. \quad (2-67)$$

Para $j = 0$, a solução homogênea é constante em ζ , então a condição de compatibilidade é

$$\frac{a}{g} \langle G_{30} \rangle = \int_{-1}^0 \langle F_{30} \rangle d\zeta. \quad (2-68)$$

Substituímos $\langle F_{30} \rangle$ e $\langle G_{30} \rangle$ em (2-68) e obtemos uma equação que descreve uma onda longa (nas variáveis lentas ξ_1, t_1) gerada pela modulação de uma onda curta (em ψ):

$$\begin{aligned} a \frac{\partial^2 \phi_{10}}{\partial t_1^2} - g \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \phi_{10} &= \frac{a^2 \omega^3}{2k \sinh^2 q} (AA^*)_{\xi_1} - \frac{a^3 \omega^2}{4 \sinh^2 q} (AA^*)_{t_1} + \\ &+ \frac{a \omega^3}{4k \sinh^2 q} (\Upsilon) (AA^*)_{\xi_1}, \end{aligned} \quad (2-69)$$

onde

$$\Upsilon = \left\{ (1 - a) \left(2 \cosh^2 q - 1 + \frac{a}{2} \right) + \frac{2q}{\sinh 2q} \left(\cosh^2 q (2 - a - a^2) - (1 - a^2) + \frac{(a - a^2)}{2} \right) \right\}. \quad (2-70)$$

Para $j = 1$, usando a Fórmula de Green (1-31), obtemos uma condição de compatibilidade semelhante a (2-48):

$$\frac{a}{g} \langle G_{31} \rangle = \int_{-1}^0 \langle F_{31} \rangle \frac{\cosh Q}{\cosh q} d\zeta. \quad (2-71)$$

Substituindo $\langle F_{31} \rangle$ e $\langle G_{31} \rangle$ em (2-71) obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A}{\partial t_2} + \widetilde{C}_g \frac{\partial A}{\partial \xi_2} - \frac{i\omega q \cosh^2 q}{k^2 \sinh 2q} \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_1^2} + \frac{i}{2\omega} \frac{\partial^2 A}{\partial t_1^2} - \\ & - \frac{ik^2 A}{2a\omega \cosh^2 q} \left(\frac{\partial \phi_{10}}{\partial t_1} - \frac{2\omega \cosh^2 q}{ak} \frac{\partial \phi_{10}}{\partial \xi_1} \right) - \frac{i q \sinh q}{k \cosh q} \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_1 \partial t_1} + \\ & + \frac{i\omega k^2}{16 \sinh^4 q} \{ \Xi \} |A|^2 A - iA \beta_a + \langle m'(\xi)^2 \rangle \frac{iA\omega}{2a^2} = 0. \end{aligned} \quad (2-72)$$

Multiplicando (2-72) por ε , somando (2-49) à equação, utilizando as relações (1-57) (Capítulo 1) e considerando que ϕ_{10} e A são funções de apenas duas escalas transcritas em ξ_1 e t_1 , isto é,

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi_2} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi_1}, \quad \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_2} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t_1},$$

obtemos um aprimoramento de (2-49):

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial A}{\partial t_1} + \widetilde{C}_g \frac{\partial A}{\partial \xi_1} \right) + i\varepsilon \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right) \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_1^2} + \frac{\omega k^2}{16 \sinh^4 q} \{ \Xi \} |A|^2 A - \right. \\ & \left. - \left(\frac{k^2}{2a\omega \cosh^2 q} \frac{\partial \phi_{10}}{\partial t_1} - \frac{k}{a^2} \frac{\partial \phi_{10}}{\partial \xi_1} \right) A \right\} - i\varepsilon A \tilde{\beta}_a = 0, \end{aligned} \quad (2-73)$$

onde

$$\tilde{\beta}_a = \left(\beta_a - \frac{\omega}{2a^2} \langle m'(\xi)^2 \rangle \right), \text{ com} \quad (2-74)$$

$$\beta_a = \frac{gk \sinh q}{2\omega a^3 \cosh q} \int_{-\infty}^{\infty} \langle m'(\xi) m'(\xi') \rangle e^{-ikr} \mathcal{G}_\zeta(|r|, 0) dr$$

e ainda

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} = \frac{\widetilde{C}_g^2}{2\omega} - \frac{\omega q \cosh^2 q}{k^2 \sinh 2q} + \frac{q \sinh q}{k \cosh q} \widetilde{C}_g > 0.$$

A equação (2-73) é uma equação de Schrödinger não linear (**SNL**) unidimensional modificada pelo termo linear com o coeficiente complexo e determinístico $\tilde{\beta}_a$. As equações (2-73) e (2-69) governam a evolução lenta da envoltória A de ondas moduladas lentamente e do potencial de ondas longas ϕ_{10} .

2.3.1

O que podemos observar nas equações (2-73) e (2-69) quando as comparamos com as equações (2.44) e (2.39) obtidas em [15] por Mei e Hancock?

Quando fazemos $a = 1$, as equações (2-73), (2-69), (2.44) e (2.39) ficam iguais a menos do termo com $\tilde{\beta}_a$ que equivale ao β em (2.44) de Mei e Hancock [15]. Vamos comparar estes termos. Primeiramente usemos as definições C.3 e C.2 do Apêndice C, para escrever em $\tilde{\beta}_a$ a função de correlação como

$$\langle m'(\xi)m'(\xi') \rangle = \sigma^2 \gamma(r),$$

onde o coeficiente de correlação γ é uma função par e real de $r = \xi - \xi'$ e σ^2 é a variância. Deste modo podemos reescrever o coeficiente $\tilde{\beta}_a$ da forma:

$$\tilde{\beta}_a = \left(\frac{gk\sigma^2 \sinh q}{2\omega a^3 \cosh q} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(r) e^{-ikr} \mathcal{G}_\zeta(|r|, 0) dr - \frac{\omega}{2a^2} \langle m'(\xi)^2 \rangle \right). \quad (2-75)$$

O coeficiente β descrito em (2.37) de Mei e Hancock [15], sem perda de generalidade, pode ser escrito como:

$$\beta = \frac{g(k\sigma)^2}{2\omega \cosh^2 q} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left(\frac{d}{dr} - ik \right)^2 \gamma(r) \right\} e^{-ikr} \mathcal{G}(|r|, -h) dr. \quad (2-76)$$

No contexto deles r seria $x - x'$, pois eles não trabalham com coordenadas curvilíneas e β e σ , dependem das variáveis lentas x_1 e x_2 .

A grande diferença entre $\tilde{\beta}_a$ e β é que neste último é necessário o cálculo da segunda derivada da função de correlação, enquanto que no primeiro isso não é necessário! Este ganho é proveniente de estarmos trabalhando com a aplicação conforme! Observe que a função de Green em β está avaliada em $-h$, porque como Mei e Hancock abordam o problema (com topografias suaves e de pequena amplitude, e fazem expansões em torno desta), eles obtiveram as equações (2-73) e (2-69) da análise assintótica das equações de ondas aquáticas (um problema de Neumann) com as informações da topografia na condição de fundo. Quando usamos a aplicação conforme, a informação da topografia passa para a condição de fronteira na superfície livre. Na análise assintótica usamos a derivada da função de Green avaliada na superfície livre em repouso, evitando assim derivadas de funções que correspondem à topografia, neste caso a função de correlação. A função de Green que obtivemos também é diferente da obtida por eles porque as condições de contorno foram modificadas pela aplicação conforme (mais detalhes sobre a função de Green estão no Apêndice B). Outra verificação de consistência entre os modelos é que quando fazemos $a = 1$ e $\tilde{\beta}_a = 0$ recuperamos o resultado apresentado por Mei [14] para fundo plano.

2.4

Forma Clássica de uma Equação de Schrödinger Não Linear (SNL) com Amortecimento

Seguindo um procedimento semelhante ao realizado no Capítulo 1, podemos escrever a equação de Schrödinger para a envoltória de ondas A de forma desacoplada do potencial de ondas longas ϕ_{10} . Resultará a forma clássica de uma equação de Schrödinger não linear, modificada por um termo linear com coeficiente complexo.

Fazendo a mudança de variáveis:

$$\nu = \xi_1 - \widetilde{C}_g t_1, \quad \tau = \varepsilon t_1,$$

temos que

$$\frac{\partial}{\partial t_1} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau} - \widetilde{C}_g \frac{\partial}{\partial \nu} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \xi_1} = \frac{\partial}{\partial \nu}.$$

Substituindo na equação (2-69) e a integrando com respeito a ν obtemos:

$$\frac{\partial \phi_{10}}{\partial \nu} = S(\tau) - \frac{\left(a^2 \omega^2 (a k \widetilde{C}_g + 2 \omega \cosh^2 q) + a \omega^3 (\Upsilon) \right)}{4k \sinh^2 q (g - a C_g^2)} |A|^2 + O(\varepsilon), \quad (2-77)$$

onde $S(\tau)$ é uma função arbitrária de τ . Substituindo este resultado em (2-73) retornando às variáveis originais ξ_1 , t_1 e eliminando termos com ordem $O(\varepsilon^2)$, obtemos:

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t_1} + \widetilde{C}_g \frac{\partial A}{\partial \xi_1} \right) + i\varepsilon \left\{ \frac{\omega}{k^2} \alpha_1 \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_1^2} + \omega k^2 \alpha_2 |A|^2 A + \frac{k}{a^2} \left(1 + \frac{a \widetilde{C}_g}{2c_p \cosh^2 q} \right) S(t_1) A \right\} - i\varepsilon A \tilde{\beta}_a = 0, \quad (2-78)$$

c_p é a velocidade de fase definida por $c_p = w/k$ e

$$\alpha_1 = -\frac{k^2}{2\omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}, \quad \text{com } \omega^2 = \frac{gk}{a} \tanh q \quad (2-79)$$

$$\alpha_2 = \frac{\omega k^2}{16 \sinh^4 q} \left\{ (6a^2 + 2) \cosh^4 q + (37 - 45a^2) \cosh^2 q + 1 + (36a^2 - 28) - \right. \\ \left. - 2 \tanh^2 q \right\} - \frac{\left(a \widetilde{C}_g / c_p + 2 \cosh^2 q \right)^2}{2 a \sinh^2 2q \left(\frac{q}{\tanh q} - \frac{\widetilde{C}_g^2}{c_p} \right)} - \frac{\left(a \widetilde{C}_g / c_p + 2 \cosh^2 q \right) (\Upsilon)}{2 a^2 \sinh^2 2q \left(\frac{q}{\tanh q} - \frac{\widetilde{C}_g^2}{c_p} \right)}. \quad (2-80)$$

Podemos ainda realizar transformações de forma a escrever a equação (2-78) numa forma mais simplificada. Fazemos a transformação:

$$A(x_1, t_1) = \frac{1}{\varepsilon} \tilde{A}(x_1, t_1) e^{P(t_1)}, \quad (2-81)$$

com

$$P(t_1) = i\varepsilon\tilde{\beta}_{ar}t_1 - i\varepsilon\frac{k}{a^2}\left(1 + \frac{a\tilde{C}_g}{2c_p\cosh^2 q}\right)\int S(t_1)dt_1, \quad (2-82)$$

onde $\tilde{\beta}_{ar}$ e $\tilde{\beta}_{ai}$ são respectivamente as partes real e imaginária de $\tilde{\beta}_a$. Vamos substituir (2-81) em (2-78) e retornar à coordenada curvilínea original ξ e à coordenada t . Deste modo podemos escrever:

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{\partial\tilde{A}}{\partial t} + \tilde{C}_g\frac{\partial\tilde{A}}{\partial\xi}\right) + i\left\{\frac{\omega\alpha_1}{k^2}\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2\tilde{A}}{\partial\xi^2} + \frac{1}{\varepsilon^2}\omega k^2\alpha_2|\tilde{A}|^2\tilde{A}\right\} + \tilde{A}\tilde{\beta}_{ai} = 0,$$

multiplicando por $-i\varepsilon^2$ temos que:

$$-i\left(\frac{\partial\tilde{A}}{\partial t} + \tilde{C}_g\frac{\partial\tilde{A}}{\partial\xi}\right) + \frac{\omega}{k^2}\alpha_1\frac{\partial^2\tilde{A}}{\partial\xi_1^2} + \omega k^2\alpha_2|\tilde{A}|^2\tilde{A} - i\tilde{A}\varepsilon^2\tilde{\beta}_{ai} = 0,$$

Seja σ_0 a raiz quadrada da variância dimensional (desvio padrão) da perturbação no coeficiente da superfície livre ($M = a + \varepsilon m'(\xi)$), que é de ordem ε . Se $\sigma_0 = \varepsilon\sigma \Rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma_0}{\sigma} \Rightarrow \varepsilon^2 = \frac{(k\sigma_0)^2}{(k\sigma)^2} \Rightarrow \varepsilon^2\tilde{\beta}_{ai} = (k\sigma_0)^2\frac{\hat{\beta}_{ai}}{(k\sigma)^2}$. Reescreveremos a equação acima com o coeficiente $\hat{\beta}_{ai} = \frac{\tilde{\beta}_{ai}}{(k\sigma)^2}$ (que contém informações sobre a função de correlação da topografia - vide expressão (2-75)).

$$-i\left(\frac{\partial\tilde{A}}{\partial t} + \tilde{C}_g\frac{\partial\tilde{A}}{\partial\xi}\right) + \frac{\omega}{k^2}\alpha_1\frac{\partial^2\tilde{A}}{\partial\xi_1^2} + \omega k^2\alpha_2|\tilde{A}|^2\tilde{A} - i\tilde{A}\hat{\beta}_{ai}(k\sigma_0)^2 = 0. \quad (2-83)$$

Visando obter a equação SNL cúbica clássica, a equação (2-83) pode ainda ser escrita de forma mais simples. Introduziremos o sistema de coordenadas viajantes e adimensionais:

$$B = \tilde{A}/A_0, \quad \chi = k^2A_0(\xi - \tilde{C}_g t)\sqrt{|\alpha_2|/\alpha_1}, \quad \tau = |\alpha_2|(kA_0)^2\omega t.$$

Então

$$\frac{\partial}{\partial t} = |\alpha_2|(kA_0)^2\omega\frac{\partial}{\partial\tau} - k^2A_0\tilde{C}_g\sqrt{|\alpha_2|/\alpha_1}\frac{\partial}{\partial\chi} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial\xi} = k^2A_0\sqrt{|\alpha_2|/\alpha_1}\frac{\partial}{\partial\chi}.$$

Substituindo as novas variáveis e suas respectivas derivadas em (2-83) e dividindo a equação primeiramente por A_0 e depois por $|\alpha_2|(kA_0)^2\omega$, obtemos:

$$-i\frac{\partial B}{\partial\tau} + \frac{\partial^2 B}{\partial\chi^2} + \frac{\alpha_2}{|\alpha_2|}|B|^2B - i\Theta B = 0, \quad (2-84)$$

onde

$$\Theta = \frac{\hat{\beta}_{ai}}{\omega|\alpha_2|}\left(\frac{\sigma_0}{A_0}\right)^2. \quad (2-85)$$

A equação (2-84) é uma equação de Schrödinger cúbica com amortecimento na forma adimensional para uma envoltória de ondas B . Esta forma permite o estudo da estabilidade de ondas de Stokes seguindo Johnson [12], conforme veremos a seguir.

2.5

Ondas de Stokes: Estabilidade versus Topografia

Analisaremos como podemos relacionar estabilidade das Ondas de Stokes com a topografia. Em (2-84) a informação da topografia está nos coeficientes de não linearidade α_2 , que depende da profundidade efetiva a , e no coeficiente de amortecimento Θ , que depende da função de correlação através de $\widehat{\beta}_{a_i}$. O efeito da topografia no coeficiente de não linearidade é nossa contribuição e não foi obtido por Mei e Hancock [15].

Mei e Hancock em [15] fizeram uma análise da interferência de Θ na estabilidade das soluções, também analisaram a interação entre o amortecimento gerado pelo termo $-i\Theta B$ (a aleatoriedade presente na topografia) e a não linearidade do termo $\frac{\alpha_2}{|\alpha_2|}|B|^2 B$. No modelo de Mei e Hancock (equação (4.7) de [15]) toda informação da topografia está no coeficiente Θ . Eles verificaram que para o caso de valores de Θ grande, em relação à não linearidade, as bandas laterais (em Fourier) inicialmente instáveis crescem, podem oscilar e trocar energia com a onda portadora; no entanto, depois de um longo intervalo de tempo, tanto as bandas laterais quanto a onda portadora decaem devido ao amortecimento pela topografia. Para o caso de valores de Θ pequeno o amortecimento já é perceptível depois de um intervalo de tempo curto.

Como Mei e Hancock já fizeram a análise da estabilidade usando o parâmetro Θ , faremos uma análise detendo-nos na novidade do nosso modelo: o coeficiente α_2 , uma vez que este apresenta informação da batimetria através da profundidade efetiva a .

Usaremos uma solução da equação de Schrödinger não linear e faremos um estudo da estabilidade de ondas de Stokes. Ondas de Stokes são ondas periódicas, com um “ansatz” monocromático. Por causa do efeito da não linearidade estas ondas acabam apresentando algumas peculiaridades.

Escreveremos a equação (2-83) de uma forma mais simples, um pouco diferente do que foi feito acima, mas seguindo os mesmos passos. Primeiro consideraremos $\widehat{\beta}_{a_i} = 0$, de modo que as informações estatísticas da topografia estarão contidas somente nos outros coeficientes. Assim, podemos isolar os efeitos destes coeficientes. Introduzindo o sistema de coordenadas viajantes e

adimensionais:

$$B = \tilde{A}/A_0, \quad \chi = k^2 A_0(\xi - \tilde{C}_g t), \quad \tau = (kA_0)^2 \omega t,$$

obtemos:

$$-i \frac{\partial B}{\partial \tau} + \alpha_1 \frac{\partial^2 B}{\partial \chi^2} + \alpha_2 |B|^2 B = 0, \quad (2-86)$$

com α_1 e α_2 dados em (2-79) e (2-80). A partir das expressões destes coeficientes observamos que α_1 independe de a enquanto que α_2 depende, ou seja, depende da profundidade efetiva e assim sendo depende de $\langle m \rangle$. Devido a este fato faremos um estudo sobre a relação entre estabilidade das onda de Stokes e topografia. A análise da estabilidade será feita seguindo Johnson [12].

Faremos o seguinte “ansatz” para as ondas de Stokes:

$$B = B_0 e^{i(K\chi - \Omega\tau)}, \quad (2-87)$$

onde B_0 é uma constante complexa e K uma constante real. Esta é uma onda plana não linear com amplitude constante, que será solução da equação (2-86), desde que Ω satisfaça a relação de dispersão:

$$\Omega = \alpha_2 |B_0|^2 - \alpha_1 K^2. \quad (2-88)$$

Aqui, α_1 e α_2 são funções de k (> 0), o número de onda da onda portadora (2-43); K (> 0) é o número de onda da modulação. Se escolhermos o número de onda desta solução como sendo unicamente k , então fazemos $K = 0$.

Para estudar questões de estabilidade procuramos uma solução que na sua forma inicial é dada com uma pequena perturbação em torno de uma onda plana não linear. De acordo com esta proposta definimos

$$B = B_0 (1 + \Delta b) e^{i(-\Omega\tau + \Delta\theta)}, \quad (2-89)$$

onde $b = b(\chi, \tau)$, $\theta(\chi, \tau)$ (ambas tidas como funções reais) e lembrando que $K = 0$ e deste modo a relação de dispersão (2-88) fica da forma

$$\Omega = \alpha_2 |B_0|^2. \quad (2-90)$$

No que segue consideraremos Δ um parâmetro pequeno. Substituindo (2-89) em (2-86) obtemos

$$- \{ \Delta b_\tau + i(1 + \Delta b)(\Delta\theta_\tau - \Omega) \} B_0 \mathcal{E} \quad (2-91)$$

$$+ \alpha_1 \{ \Delta b_{\chi\chi} + 2i\Delta^2 b_\chi \theta_\chi + \Delta(1 + \Delta b)(i\theta_{\chi\chi} - \Delta\theta_\chi^2) \} B_0 \mathcal{E} \quad (2-92)$$

$$+ \alpha_2 (1 + \Delta b)^3 B_0 |B_0|^2 \mathcal{E} = 0, \quad (2-93)$$

onde \mathcal{E} é o termo exponencial em (2-89). Os termos que não são de $O(\Delta)$ cancelam-se devido à relação de dispersão acima (2-90), restando então os termos

de $O(\Delta)$:

$$-(b_\tau + i\theta_\tau - ib\Omega) + \alpha_1(b_{\chi\chi} + i\theta_{\chi\chi}) + 3\alpha_2|B_0|^2b = 0.$$

Visto que b e θ são funções reais e usando novamente a relação (2-90) para eliminar Ω na equação acima, temos que:

$$\theta_\tau + \alpha_1 b_{\chi\chi} + 2\alpha_2 |B_0|^2 b = 0; \quad (2-94)$$

$$-b_\tau + \alpha_1 \theta_{\chi\chi} = 0. \quad (2-95)$$

Como as equações (2-94)-(2-95) são lineares com coeficientes constantes procuraremos uma solução da forma:

$$\begin{pmatrix} b \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_o \\ \theta_o \end{pmatrix} e^{i(\kappa\chi - \mu\tau)} + *, \quad (2-96)$$

onde b_o , θ_o , κ (> 0) e μ são constantes. Esta solução existe desde que

$$\begin{vmatrix} i\mu & -\kappa^2\alpha_1 \\ -\alpha_1\kappa^2 + 2|B_0|^2\alpha_2 & -i\mu \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \mu^2 = (\alpha_1\kappa)^2(\kappa^2 - 2\frac{\alpha_2}{\alpha_1}|B_0|^2). \quad (2-97)$$

O critério de estabilidade fica evidente. Podemos observar que, para valores de $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} < 0$, μ é real para todos os valores de κ . Isto indica um regime de estabilidade para a onda de Stokes (2-89), visto que a perturbação persiste mas não cresce. Entretanto se $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} > 0$, teremos μ imaginário para algum κ , isto é, para

$$0 < \kappa < 2|B_0|\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}.$$

Neste caso, a solução perturbada (2-89) cresce exponencialmente quando $\tau \rightarrow \infty$. A onda de Stokes é instável à perturbações neste regime. Assim o sinal de $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ é crítico para a estabilidade de certas soluções das equações SNL. Temos que $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} > 0$ corresponde à equação de SNL+ (notação de Johnson [12]). Em inglês este regime é chamado de: “*focusing*”³. Para esta onda instável o crescimento da amplitude continua até ser alcançado um balanço entre o efeito não linear e o dispersivo presente na equação SNL+. Quando isto ocorre a solução alcança uma estrutura em consonância com a estrutura de um soliton, ou seja, a solução não crescerá indefinidamente (a Figura 2.11 ilustra o efeito de “*focusing*” para uma onda monocromática). Tal solução não existe para $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} < 0$.

Conforme este breve relato baseado na Seção 4.3.1 de Johnson [12], aspectos sobre a estabilidade de ondas de Stokes podem ser relacionados aos coeficientes

³Informalmente dizemos que uma equação é “*focusing*” se a não linearidade tende a agir no sentido de reforçar a solução quando é grande e diminuí-la quando é pequena, assim, neutralizar os efeitos da dispersão. O oposto de “*focusing*” é “*defocusing*”.

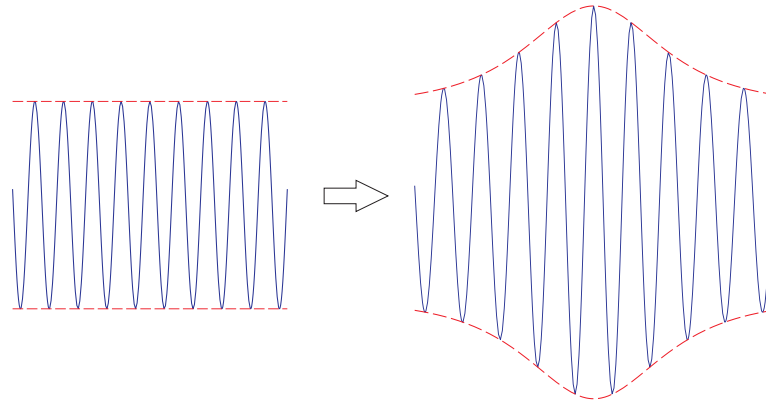


Figura 2.11: Representação esquemática do efeito de “*focusing*” em uma onda monocromática.

α_1 e α_2 da equação de Schrödinger. As expressões de α_1 e α_2 foram apresentadas em (2-79) e (2-80). Observem que estes coeficientes são funções do número de onda k , uma vez que $q = kh$ e $h = 1$. Além disso a profundidade efetiva a é uma constante, um número conhecido entre 0 e 1. Portanto o comportamento de α_1 e α_2 pode ser examinado em função de k quando $k \rightarrow 0$ e $k \rightarrow \infty$. Faremos o gráfico de $\alpha_1 \times k$ e de $\alpha_2 \times k$ (para diferentes valores de a).

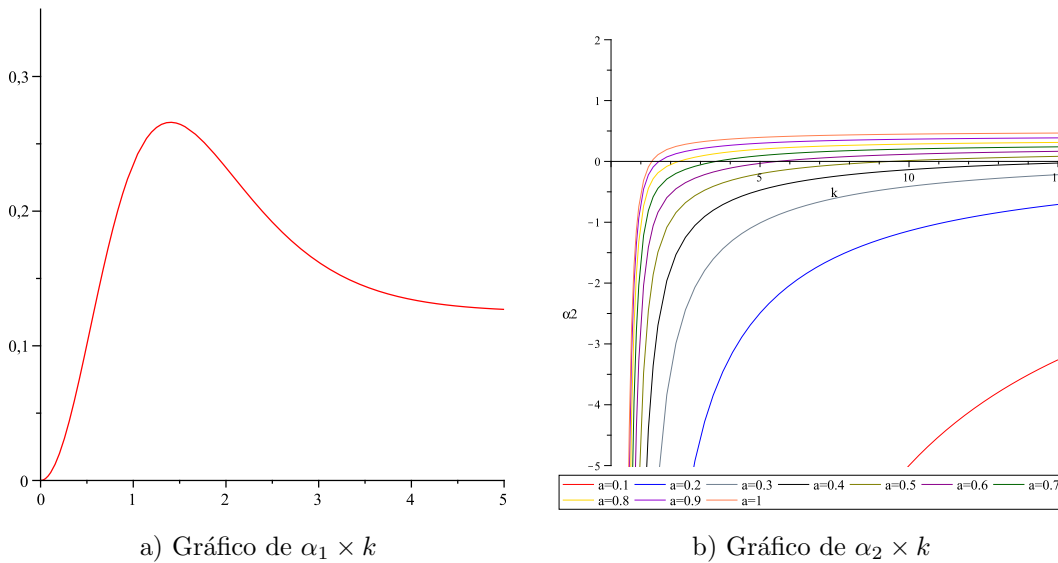


Figura 2.12: Gráficos de α_1 e α_2 para diferentes valores de a .

O coeficiente α_1 é positivo para todo $k > 0$, e independe de a . Porém, para um valor de a fixo, α_2 muda de sinal para um determinado valor de k . A tabela 2.1 mostra os valores aproximados deste valor crítico (k_0) onde o coeficiente α_2 muda de sinal. Gráficos com detalhes encontram-se na Figura 2.12.

Baseados na análise feita anteriormente, podemos dizer que, para um valor de a fixo, a onda de Stokes é estável para pequenas perturbações (supomos Δ pequeno em (2-89)) se $k < k_0$, isto é, para onda de Stokes suficientemente longas

a	$k_0 \approx$
1	1.363
0.9	1.609
0.8	2.272
0.7	3.528
0.6	5.592
0.5	9.393
0.4	17.142
0.3	35.245
0.2	89.536
0.1	388.6

Tabela 2.1: Valores de k onde α_2 muda de sinal

(afinal $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, onde λ é o comprimento de onda). Caso contrário, se $k > k_0$, então $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} > 0$ e a onda de Stokes é instável. Assim, segundo Johnson [12], para um valor fixo de a , com k neste intervalo, conseguimos encontrar soluções para (2-86), cuja modulação da amplitude apresenta (em algum momento) uma estrutura de soliton (neste caso (2-86) é do tipo SNL+).

Como podemos relacionar a estabilidade de (2-86) com a topografia?

Os coeficiente α_2 contém a informação estatística da topografia através do parâmetro a (lembramos que a está relacionado com o valor de $\langle m(\xi) \rangle$). À medida que o valor de a diminui, o valor crítico k_0 (onde α_2 muda de sinal) aumenta, isto é, a região com soluções potencialmente instáveis é deslocada para direita, aumentando assim a região de estabilidade onde $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} < 0$. Podemos então concluir que diminuindo o valor do parâmetro a , ou seja aumentando a amplitude das flutuações da topografia, regularizamos a solução: números de onda que eram instáveis passam a ser estáveis. Em outras palavras, conforme a topografia flutua mais, a equação passa a ser “*defocusing*”⁴ em regiões onde antes era “*focusing*”.

A conclusão final sobre estabilidade \times topografia é que tanto o termo de amortecimento (com coeficiente que depende de $\widehat{\beta}_{a_i}$), como esta análise de estabilidade (para o coeficiente do termo não linear que está relacionado à profundidade efetiva a , e assim sendo dependente de $\langle m \rangle$) indicam que a topografia é um agente estabilizador das soluções da SNL.

⁴Informalmente dizemos que uma equação é “*defocusing*” se a não linearidade tende a agir de forma a dissipar a solução quando está concentrada e assim reforçar os efeitos da dispersão.

Considerações Finais

Destacamos algumas importantes aplicações do nosso modelo:

- Verificamos como a topografia do fundo marinho e/ou estruturas submersas podem influenciar a evolução de um trem de ondas na superfície do mar de uma região com profundidade intermediária, por exemplo, quanto ao grau de atenuação/ estabilização das ondas.
- Entendemos a dinâmica de ondas aquáticas numa região onde já exista ou vá existir atividade de exploração *offshore*. Podendo ser utilizado para se obter informações importantes sobre questões como viabilidade/custo e segurança de atividades de exploração de petróleo e gás nestas regiões.

A principal vantagem deste modelo é que o coeficiente variável $M(\xi)$ (proveniente da aplicação conforme) possibilita representar topografias ou estruturas submersas com perfis de grande amplitude com múltiplos valores, ou descontínuos, ou aleatórios e podem ter grande variação de amplitude, entre outras propriedades. Isto contrasta com o modelo apresentado por Mei e Hancock [15] que está restrito a perfis suaves com pequena variação em relação a profundidade média da lâmina d'água.

Como foi observado no Capítulo 2, a abordagem por aplicação conforme, trouxe algumas modificações ao problema original e vantagens para o nosso modelo que merecem destaque:

- No problema original abordado por Mei e Hancock [15], a informação da topografia era fornecida na condição de Neumann do fundo. Após a aplicação conforme, esta informação foi transferida para a condição de fronteira da superfície livre, através do coeficiente variável $M(\xi)$, relacionado ao Jacobiano pela expressão (2-10).
- No coeficiente $\tilde{\beta}_a$, do termo de amortecimento de (2-73), não é necessário o cálculo da segunda derivada da função de correlação, diferentemente do caso apresentado por Mei e Hancock [15] onde isso é necessário. Observa-se que a função de Green que aparece no coeficiente $\tilde{\beta}_a$ também é diferente da obtida por eles, porque o problema original foi modificado pela aplicação conforme (mais detalhes sobre a Função de Green estão no Apêndice B).

- A equação de Schrödinger (2-84) obtida apresenta informações sobre a topografia em mais de um coeficiente, inclusive no que está agregado ao termo não linear, α_2 . Este parâmetro contém informações estatísticas da topografia (em (2-31) temos que $a = 1 + \langle m(\xi) \rangle$). Tal fato possibilitou fazer um estudo sobre a relação entre o efeito de estabilidade e a profundidade efetiva a . Variando o valor do parâmetro a descobrimos novas regiões onde uma SNL pode mudar de “*focusing*” para “*defocusing*”, isto é, torna-se estável.
- De um modo geral, observamos através do estudo de estabilidade apresentado em Mei e Hancock [15], como na análise feita na Seção 2.5, que tanto o coeficiente do termo de amortecimento Θ , como o coeficiente do termo não linear α_2 em (2-84), indicam que a topografia é um agente estabilizador da equação de Schrodinger não linear.

Pretendemos continuar este trabalho desenvolvendo simulações numéricas para o modelo. Como aplicações futuras do trabalho podemos vislumbrar ainda:

- Simulações numéricas que forneçam previsões rápidas e confiáveis sobre a evolução das ondas numa determinada região. Tais informações podem ser utilizadas para prevenir acidentes naturais como grandes distúrbios em alto mar. Também pode ter aplicação direta na indústria do petróleo: utilizado-se tais simulações para auxiliar nas operações de instalações de plataformas e nas pesquisas sobre custo/benefício das operações de produção *offshore*.

A Aplicação de Schwarz-Christoffel (SC)

A aplicação SC é uma transformação conforme f que leva o semi-plano superior $\{\zeta \in \mathbb{C} : \text{Im}\zeta > 0\}$ em um polígono. A idéia por trás da transformação SC e suas variações é que a aplicação conforme f pode ter a derivada expressa na forma de um produtório

$$f' = \prod f_k \quad (\text{A-1})$$

utilizando certas funções auxiliares f_k . A importância desta estrutura na forma de produto é que

$$\arg f' = \sum \arg f_k. \quad (\text{A-2})$$

Como a aplicação de SC se presta a mapear regiões com fronteiras poligonais esta propriedade do argumento descrita acima, é de importância vital. Assim se formos capazes de construir f_k tais que $\arg f_k$ sejam funções *degrau* (com saltos), então $\arg f_k$ será uma função constante por partes e $f(\mathfrak{z})$ irá mapear o eixo real em uma poligonal. No processo de construção da aplicação a parte mais difícil está relacionado ao mapeamento da fronteira, isto é, mapear a fronteira do plano complexo $\Omega_{\mathfrak{z}}$ - domínio físico, corretamente na fronteira do plano complexo Ω_w - domínio canônico, onde $w = f(\mathfrak{z})$ (veja a figura Figura A.1).

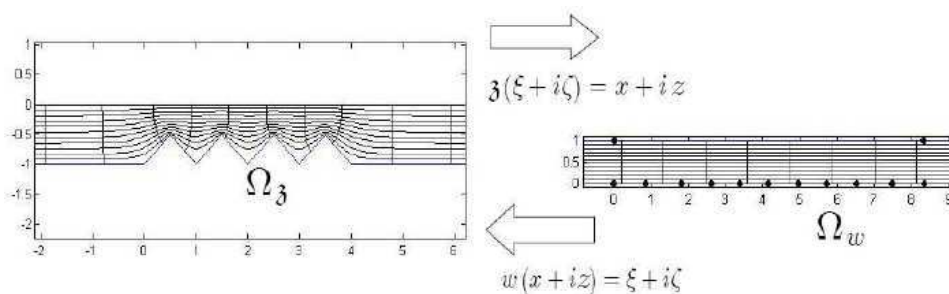


Figura A.1: Representação esquemática da Aplicação Conforme SC

Uma das versões do Teorema de existência de tal aplicação é dada a seguir.

Teorema A.1 (Teorema para a fórmula de Schwarz-Christoffel) *Seja P o interior de um polígono Γ . Sejam os vértices definidos pelos pontos w_1, w_2, \dots, w_n e, em cada vértice, os ângulos interiores $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \dots, \alpha_n\pi$ no sentido anti-horário. Seja f uma aplicação conforme qualquer no semiplano superior do polígono P , com a pré-imagem de w_n no infinito (simbolicamente $f(\infty) = w_n$). Então a fórmula de*

SC para o semiplano (como domínio canônico) é:

$$f(\mathfrak{z}) = C + c \int^{\mathfrak{z}} \prod_{k=1}^{n-1} (\zeta - \mathfrak{z}_k)^{\alpha_k - 1} d\zeta, \quad (\text{A-3})$$

para valores complexos das constantes C e c . Os pontos \mathfrak{z}_k são as pré-imagens dos vértices w_n .

Prova. Veja página 11 de Driscoll e Trefethen [4] ■

Observação A.2 *A versão computacional da aplicação de Schwarz-Christoffel, um Toolbox do Matlab desenvolvido pelo Prof. Driscoll, foi uma ferramenta de muita utilidade para nos auxiliar no processo de modelagem e perceber quais perfis marinhos estão englobados no nosso modelo dependendo da representação do coeficiente da superfície livre $M(\xi)$. Esta ferramenta computacional também foi utilizada, em [16], por Nachbin. Em [17], Nachbin e Zárate apresentam um breve tutorial ao Schwarz-Christoffel Toolbox (SCT). Maiores detalhes também podem ser encontrados no livro de Driscoll e Trefethen ([4]) ou no site do Driscoll ([5]) onde se pode baixar o SCT.*

B Função de Green

Para obter a função de Green resolvemos o problema (2-57)-(2-59) aplicando o par de transformadas de Fourier:

$$\widehat{\mathcal{G}}(\alpha, \zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(r, \zeta) e^{-i\alpha r} dr; \quad (\text{B-1})$$

$$\mathcal{G}(r, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\mathcal{G}}(\alpha, \zeta) e^{i\alpha r} d\alpha. \quad (\text{B-2})$$

Deste modo o problema se reduz a resolver o problema de valor de contorno de uma equação diferencial ordinária:

$$-\alpha^2 \widehat{\mathcal{G}} + \widehat{\mathcal{G}}_{\zeta\zeta} = 0, \quad -1 < \zeta < 0, \quad (\text{B-3})$$

$$\widehat{\mathcal{G}}_{\zeta} - \frac{a\omega^2}{g} \widehat{\mathcal{G}} = e^{-i\alpha\xi'}, \quad \zeta = 0, \quad (\text{B-4})$$

$$\widehat{\mathcal{G}}_{\zeta} = 0, \quad \zeta = -1. \quad (\text{B-5})$$

A solução é:

$$\widehat{\mathcal{G}} = e^{-i\alpha\xi'} \frac{\cosh \alpha(\zeta + 1)}{\alpha \sinh \alpha - \frac{a\omega^2}{g} \cosh \alpha}. \quad (\text{B-6})$$

Conseqüentemente

$$\mathcal{G}(\xi, \zeta; \xi') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh \alpha(\zeta + 1)}{\alpha \sinh \alpha - \frac{a\omega^2}{g} \cosh \alpha} e^{i\alpha(\xi - \xi')} d\alpha. \quad (\text{B-7})$$

Considerando α real, $-\infty < \alpha < \infty$, (B-7) não está bem definido porque o integrando apresenta singularidades em $\alpha = k$ e $\alpha = -k$. Com efeito, verificamos que estes valores anulam o denominador do integrando:

$$\begin{aligned} \alpha \sinh \alpha - \frac{a\omega^2}{g} \cosh \alpha &= 0, \\ \alpha \sinh \alpha - \frac{a g k \sinh q}{g a \cosh q} \cosh \alpha &= 0, \\ \alpha \sinh \alpha - k \frac{\sinh q}{\cosh q} \cosh \alpha &= 0, \\ \alpha \frac{\sinh \alpha}{\cosh \alpha} &= k \frac{\sinh q}{\cosh q}. \end{aligned}$$

Uma escolha aceitável é especificar um contorno C que é recuado acima de $\alpha = -k$ e abaixo de $\alpha = k$, o que elimina as singularidades no denominador (Figura B.1).



Figura B.1: Contorno C

Podemos rescrever (B-7) da forma:

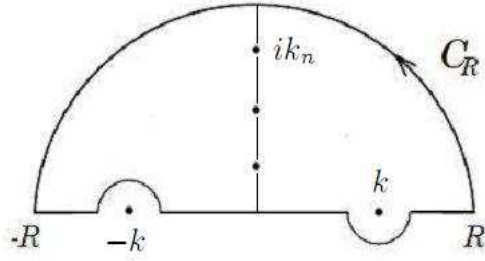
$$\mathcal{G}(r, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_C f(\alpha, \zeta) e^{i\alpha r} d\alpha, \quad (\text{B-8})$$

onde $f(\alpha, \zeta) = \frac{\cosh \alpha (\zeta + 1)}{\alpha \sinh \alpha - \frac{a\omega^2}{g} \cosh \alpha}$, α é complexo e $r = \xi - \xi'$.

A escolha deste contorno produz soluções satisfazendo a condição de radiação no infinito (ver Ablowitz [1] págs. 292 e 293). Uma condição de radiação é uma condição de contorno especial, que especifica a direção das ondas nas fronteiras. No nosso problema original (em coordenadas cartesianas), as ondas estão indo da esquerda para a direita e propagam sobre um fundo com topografia variável. A presença de topografia reflete as ondas, deste modo esperamos que em $x = -\infty$ tenhamos ondas “entrando” (“*incoming waves*”) e “saindo” (“*outgoing waves*”) - refletidas, enquanto que em $x = \infty$ as ondas estão apenas “saindo” (sendo transmitidas). Não há ondas “entrando” em $x = \infty$, esta é a configuração do nosso problema original e não é alterada pela aplicação conforme, ou seja, o mesmo vale em relação ξ . Em resumo, temos ondas indo para direita, $e^{-ik(\xi-ct)}$ e ondas indo para esquerda, $e^{-ik(\xi+ct)}$, com o contorno adotado. Garantimos que, no nosso problema, só temos $e^{-ik(\xi-ct)}$ em $\xi = \infty$, mas ambas as formas em $\xi = -\infty$.

Observamos que $f(\alpha, \zeta)$ se anula quando $Im(\alpha) \rightarrow \infty$ ou $Re(\alpha) \rightarrow \infty$. Se $\xi > \xi'$ escolhemos o contorno circular fechado no semi-plano superior ($C_R \cup (C \cap [-R, R])$) - ver Figura B.2). Pelo Lema de Jordan (ver Ablowitz [1], pág. 222), a integral ao longo de C_R se anula quando o raio vai para infinito. Logo a integral (B-8) é igual a soma dos resíduos em k e nos polos imaginários ik_n , onde k é dado pela relação de dispersão $\omega^2 = \frac{gk}{a} \tanh kh$ ($h = 1$) e

$$\omega^2 = \frac{gk}{a} \tanh ik_n h = -\frac{gk}{a} \tan k_n h, \quad (h = 1) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$


 Figura B.2: $C_R \cup (C \cap [-R, R])$

Analogamente, para $\xi < \xi'$, escolhamos o contorno circular fechado no semi-plano inferior. Pelo Lema de Jordan, a integral ao longo do semi-círculo inferior se anula quando o raio vai para infinito. Aqui a integral (B-8) é igual a soma dos resíduos em $-k$ e nos polos imaginários $-ik_n$. Portanto em ambos os casos, \mathcal{G} pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(|r|, \zeta) &= \frac{1}{2\pi} \int_C f(\alpha, \zeta) e^{i\alpha|r|} d\alpha = i \operatorname{Res}(f(\alpha, \zeta) e^{i\alpha|r|}; k) + \\ &+ i \sum_n \operatorname{Res}(f(\alpha, \zeta) e^{i\alpha|r|}; ik_n). \end{aligned} \quad (\text{B-9})$$

Podemos escrever $f(\alpha, \zeta)$ da forma $f(\alpha, \zeta) = \frac{L(\alpha, \zeta)}{I(\alpha)}$, onde

$$\begin{aligned} L(\alpha, \zeta) &= \cosh \alpha(\zeta + 1), \\ I(\alpha) &= \alpha \sinh \alpha - \frac{a\omega^2}{g} \cosh \alpha. \end{aligned}$$

Segue de (B-9) que

$$\mathcal{G}(|r|, \zeta) = ie^{ik|r|} \frac{L(k, \zeta)}{I'(k)} + i \sum_n e^{-k_n|r|} \frac{L(ik_n, \zeta)}{I'(ik_n)}, \quad (\text{B-10})$$

onde

$$L(k, \zeta) = \cosh k(\zeta + 1),$$

$$L(ik_n, \zeta) = \cosh ik_n(\zeta + 1) = \cos k_n(\zeta + 1).$$

Observamos ainda que

$$I'(\alpha) = \alpha \cosh \alpha + \left(1 - \frac{a\omega^2}{g}\right) \sinh \alpha,$$

e deste modo, obtemos

$$\begin{aligned}
 I'(k) &= k \cosh k + \left(1 - \frac{a\omega^2}{g}\right) \sinh k \\
 &= \frac{1}{\sinh k} \left(\sinh^2 k + k \cosh k \sinh k - \frac{a\omega^2}{g} \sinh^2 k \right) \\
 &= \frac{1}{\sinh k} \left(\sinh^2 k + k \cosh k \sinh k - \frac{a\omega^2}{g} (1 - \cosh^2 k) \right) \\
 &= \frac{1}{\sinh k} \left(\sinh^2 k + \frac{a\omega^2}{g} + k \cosh k \sinh k - \frac{a\omega^2}{g} \cosh^2 k \right) \\
 &= \frac{1}{\sinh k} \left(\sinh^2 k + \frac{a\omega^2}{g} \right). \tag{B-11}
 \end{aligned}$$

Consequentemente

$$I'(ik_n) = \frac{1}{i \sin k_n} \left(-\sin^2 k_n + \frac{a\omega^2}{g} \right).$$

Substituindo $L(k, \zeta)$, $L(ik_n, \zeta)$, $I'(k)$ e $I'(ik_n)$ em (B-9) obtemos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}(|r|, \zeta) &= ie^{ik|r|} \frac{\cosh k(\zeta + 1) \sinh k}{\sinh^2 k + \frac{a\omega^2}{g}} + i \sum_n e^{-k_n|r|} \frac{\cos k_n(\zeta + 1) i \sin k_n}{\frac{a\omega^2}{g} - \sin^2 k_n} \\
 &= ie^{ik|r|} \frac{\cosh k(\zeta + 1) \sinh k}{\sinh^2 k + \frac{a\omega^2}{g}} - \sum_n e^{-k_n|r|} \frac{\cos k_n(\zeta + 1) \sin k_n}{\frac{a\omega^2}{g} - \sin^2 k_n}. \tag{B-12}
 \end{aligned}$$

Calculando a derivada de \mathcal{G} em relação a ζ obtemos:

$$\mathcal{G}_\zeta(|r|, \zeta) = ie^{ik|r|} \frac{k \sinh k(\zeta + 1) \sinh k}{\sinh^2 k + \frac{a\omega^2}{g}} + \sum_n e^{-k_n|r|} \frac{k_n \sin k_n(\zeta + 1) \sin k_n}{\frac{a\omega^2}{g} - \sin^2 k_n}. \tag{B-13}$$

Em $\zeta = 0$, temos que

$$\mathcal{G}_\zeta(|r|, 0) = ie^{ik|r|} \frac{k \sinh^2 k}{\sinh^2 k + \frac{a\omega^2}{g}} + \sum_n e^{-k_n|r|} \frac{k_n \sin^2 k_n}{\frac{a\omega^2}{g} - \sin^2 k_n}. \tag{B-14}$$

Este termo aparece na expressão de β_a em (2-64).

C

Definições de probabilidade

Definição C.1 O desvio padrão de uma variável aleatória X é definido como:

$$\sigma_X = \sqrt{\langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2}$$

onde $\langle X \rangle$ é o valor esperado de X .

Definição C.2 Se $\langle X \rangle$ é o valor esperado (a média) da variável aleatória X , então a variância é

$$\text{var}(X) = \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle.$$

Isto é, é o valor esperado do quadrado do desvio de X da sua própria média. A variância mede a dispersão de cada ponto em torno da média. Outra notação pode ser $\text{var}(X) = \sigma_X^2$.

Definição C.3 Sejam duas variáveis aleatórias X e Y com valores esperados $\langle X \rangle$ e $\langle Y \rangle$ e desvios padrão σ_X e σ_Y . O coeficiente de correlação $\gamma(X, Y)$ é definido como:

$$\gamma(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\langle (X - \langle X \rangle)(Y - \langle Y \rangle) \rangle}{\sigma_X \sigma_Y}$$

onde cov significa covariância. A correlação é definida apenas se ambos desvios padrões são finitos e diferentes de zero. Pelo corolário da desigualdade de Cauchy-Schwarz, a correlação não pode exceder 1 em valor absoluto.

Referências Bibliográficas

- [1] ABLOWITZ, M. J.; FOKAS, A. S. **Complex Variables: Introduction and Applications**. Cambridge University Press, 2003.
- [2] ARTILES ROQUETA, W. **Modelagem de ondas não lineares através do operador Dirichlet-to-Neumann**. Tese de Doutorado, IMPA, Rio de Janeiro: 2004. Orientador: Nachbin, A.
- [3] BENILOV, E. S., HOWLIN, C. P. **Evolution of Packets of Surface Gravity Waves over Strong Smooth Topography**. *Studies in Applied Mathematics*, 116:289-301, 2006.
- [4] DRISCOLL, T. A.; TREFETHEN, L. N. **Schwarz-Christoffel Mapping**. Cambridge University Press, 2002.
- [5] DRISCOLL, T. A. <http://www.math.udel.edu/~driscoll/software>.
- [6] FOUQUE, J.P. AND GARNIER, J. AND PAPANICOLAOU, G. AND SOLNA, K. **Wave propagation and time reversal in randomly layered media**. Springer Verlag, 2007.
- [7] GARABEDIAN, P. R. **Partial Differential Equations**. McGraw-Hill, New York, 1964.
- [8] GARNIER, J.; GRAJALES, J. C. M.; NACHBIN, A. **Effective behavior of solitary waves over random topography**. *Multiscale Model. Simul.*, 6:995-1025, 2007.
- [9] HAMILTON, J. **Differential equations for long-period gravity waves on a fluid of rapidly varying depth**. *J. Fluid Mech*, 83:289-10, 1977.
- [10] HASHIMOTO, H.; ONO, H. **Nonlinear modulation of gravity waves**. *J. Phys. Soc. Japan*, 33:805-811, 1972.
- [11] JAMES, B. R. **Probabilidade: um curso em nível intermediário**. Projeto Euclides. IMPA, Rio de Janeiro, 2006.
- [12] JOHNSON, R. S. **A modern introduction to the mathematical theory of water waves**. Cambridge University Press, 1997.

- [13] LINS NETO, A. **Funções de uma variável Complexa**. Projeto Euclides. IMPA, Rio de Janeiro, 2005.
- [14] MEI, C. C. **Applied dynamics of Ocean Surface Waves**. World Scientific, 1989.
- [15] MEI C. C.; HANCOCK, M. J. **Weakly nonlinear surface waves over a random seabed**. J. Fluid Mech, 475:247–268, 2003.
- [16] NACHBIN, A. **A terrain-following Boussinesq system**. SIAM J. Appl. Math, 63:905–922, 2003.
- [17] NACHBIN, A.; ZÁRATE, A. R. **Tópicos Introdutórios à Análise Complexa Aplicada**. 26º Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, 2007.
- [18] PIHL J. H.; MEI C. C.; HANCOCK, M. J. **Surface gravity waves over a two-dimensional random seabed**. Physical review E 66, (016611), 2002.
- [19] RUIZ DE ZARATE FÁBREGAS, A. **A reduced model for internal waves interacting with submarine structures at intermediate depth**. Tese de Doutorado, IMPA, Rio de Janeiro, Abril 2007. Orientador: Nachbin, A.
- [20] WHITHAM, G. B. **Linear and Nonlinear Waves**. John Wiley, New York, 1982.
- [21] ZAKHAROV, V. E. **Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid**. J. Appl. Mech. Tech. Phys., 2:190-194, 1968.