

Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

Tese de doutorado

TERMOSTATOS GAUSSIANOS

Ivana de Vasconcellos Latosinski

**Rio de Janeiro
Junho, 2012**

Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

Ivana de Vasconcellos Latosinski

TERMOSTATOS GAUSSIANOS

Tese apresentada ao Programa de Pós Graduação em Matemática do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Enrique Pujals

**Rio de Janeiro
2012**

Agradeço a Enrique Pujals, pela orientação e amizade. É uma honra e orgulho tê-lo como orientador. A banca examinadora: Gugu, Marcelo Viana, Mário Jorge e Zezé Pacífico. A Sylvie, Sônia e Mário Jorge. Sem vocês, com certeza, não estaria aqui. A Angela, Paulo e Vicente. A Loren e Samuel, pela amizade e força. A Zulu e Reginaldo, amigos que admiro muito. A Camila e Patricia por serem sóis, cada uma presente em momentos diferentes e cruciais. A Gabriela, por ser sempre essa querida. Por fim, meu muito obrigado aos amigos do IMPA, UFMG e UFSJ.

Na primeira etapa do trabalho, definimos os termostatos gaussianos e discutimos duas abordagens possíveis: como um fluxo de Weyl e como um fluxo conformalmente Hamiltoniano. Estudar os termostatos gaussianos como fluxo de Weyl tem uma perspectiva mais geométrica e, sob essa perspectiva, é possível mostrar uma relação entre curvatura e decomposição dominada. Um termostato gaussiano visto como um fluxo conformalmente Hamiltoniano é um exemplo de dinâmica conformalmente simplética. Os sistemas dinâmicos conformalmente simpléticos satisfazem a simetria do espectro de Lyapunov.

A segunda etapa do trabalho consiste em estabelecer propriedades dinâmicas para os termostatos gaussianos. Mostramos que o conjunto dos termostatos gaussianos Kupka-Smale é genérico. A segunda propriedade é um teorema perturbativo que consiste numa versão do lema de Franks para os termostatos gaussianos. Mostramos também uma dicotomia entre robustez de transitividade e existência de um número arbitrário de órbitas atratoras ou repulsoras, que utiliza como ferramentas principais o conceito de transições adaptado ao contexto conformalmente simplético e o teorema perturbativo.

Palavras-chave: termostatos gaussianos, dinâmica conformalmente simplética, fluxo de Weyl, fluxo conformalmente Hamiltoniano.

Resumo	vii
I Definições e ferramentas básicas	3
1 Dinâmica conformalmente simplética	5
2 Termostatos Gaussianos	11
2.1 Estados de não equilíbrio estáveis	11
2.2 Termostatos gaussianos	12
3 Fluxo de Weyl	17
3.1 Preliminares	17
3.2 Fluxo de Weyl	21
3.3 Propriedades dinâmicas do fluxo de Weyl	24
4 Fluxo conformalmente Hamiltoniano	29
4.1 Estrutura conformalmente Hamiltoniana	29
4.2 Coordenadas de Fermi	33
4.3 Equação de Jacobi	34
 II Propriedades dos termostatos gaussianos	 38
5 Hiperbolicidade genérica	40
5.1 Resultados auxiliares	41
5.2 Genericidade de órbitas fechadas hiperbólicas	43
5.3 Transversalidade das variedades invariantes	47
6 Teorema perturbativo	50
6.1 Condição genérica	51
6.2 Teorema perturbativo	52
6.3 Teorema perturbativo sobre um segmento de órbita	54

7	Dicotomia genérica	60
7.1	Sistemas lineares conformalmente simpléticos e transições	62
7.2	Restrições e decomposições	65
7.3	Caso bidimensional	67
7.4	Dicotomia genérica	68
7.5	Condição suficiente para um sistema linear ter l -decomposição dominada	69
7.6	Condição suficiente para criação de homotetias em um sistema linear	70
8	Estudo sobre órbitas periódicas em \mathbb{S}^2	74
A	Fenômenos conformalmente simpléticos	78
B	Estrutura Hamiltoniana para o fluxo geodésico da conexão de Weyl	87
C	Geometria do espaço tangente de variedades com estrutura Weyl	89
D	Propriedade do determinante	92
E	Resultado para difeomorfismos conformalmente simpléticos	94
F	Existência de seção transversal para o fluxo geodésico	95

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana, $E : M \rightarrow TM$ um campo vetorial sobre M . Chamamos de termostato gaussiano o fluxo $\phi : TM \rightarrow TM$ cujas órbitas $\eta(t) = (x(t), v(t))$ satisfazem as equações

$$\begin{cases} \dot{x} &= v \\ \nabla_v v &= E - \frac{g(E, v)}{g(v, v)}v \end{cases}$$

Os termostatos gaussianos podem ser abordados como fluxo de Weyl. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana, o fluxo de Weyl é o fluxo geodésico reparametrizado por comprimento de arco de uma conexão $\widehat{\nabla}$ simétrica e compatível com a estrutura de Weyl (e não compatível com a métrica), que pode ser escrita em termos da conexão Riemanniana ∇

$$\widehat{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \gamma(X)Y + \gamma(Y)X - g(X, Y)E.$$

em que γ é uma 1-forma sobre M . Mostramos que, em termos da conexão Riemanniana, uma órbita η do fluxo de Weyl satisfaz a mesma equação do termostato gaussiano.

Para um fluxo geodésico, curvatura negativa implica hiperbolicidade. Não temos mais o mesmo para o fluxo de Weyl, porém ainda podemos recuperar algo:

Teorema A. *Se a curvatura seccional da estrutura de Weyl é menor do que zero em todo ponto de M então o fluxo Weyl tem decomposição dominada transversal.*

Mesmo em regiões de curvatura zero, podemos ter decomposição dominada:

Teorema B. *Seja $\Lambda \subset SM$ um subconjunto invariante do fluxo de Weyl com curvatura seccional Λ menor ou igual a zero e para $\theta = (x, v) \in \Lambda$ tem-se $\gamma(v) > 0$. Então Λ tem decomposição dominada transversal.*

Outro tipo de abordagem para os termostatos gaussianos é como um fluxo conformalmente Hamiltoniano. Se a 1-forma γ definida a partir do campo vetorial E por $\gamma(\cdot) = g(E, \cdot)$ é fechada então os termostatos gaussianos são um exemplo de dinâmica conformalmente simplética. Assim, dada uma variedade Riemanniana (M, g) definimos $\mathcal{X}_g(M) \subset \mathcal{X}^\infty(M)$ como o conjunto dos campos vetoriais que definem uma 1-forma γ fechada. Sistemas conformalmente simpléticos são aplicações que preservam uma 2-forma ω em uma variedade M . A 2-forma ω é não-degenerada e satisfaz $d\omega = \gamma \wedge \omega$ em que γ é uma 1-forma fechada. Apesar de ω não ser simplética, a condição anterior garante que localmente ω pode ser multiplicada por uma função não nula, obtendo assim uma estrutura simplética. A principal propriedade destes sistemas está em [12] e consiste na simetria do espectro de Lyapunov. Esta

abordagem permite a realização da segunda parte do trabalho em que consideramos um subconjunto especial de $\mathcal{X}^\infty(M)$:

Definição. Definimos o conjunto $\mathcal{X}_g(M) \subset \mathcal{X}^\infty(M)$ como o conjunto dos campos vetoriais E que definem a 1-forma $\gamma(\cdot) = g(E, \cdot)$ fechada.

Um termostato gaussiano (M, g, E) sobre uma variedade compacta M é *Kupka-Smale* se as órbitas fechadas são hiperbólicas e se as interseções heteroclinicas são transversais. Provamos o seguinte fato:

Teorema C. O conjunto dos campos vetoriais que definem termostatos gaussianos Kupka-Smale é genérico em $\mathcal{X}_g(M)$.

Provamos também um teorema perturbativo que é uma versão do lema de Franks para termostatos gaussianos.

Teorema D. Sejam $E \in \mathcal{X}_g(M) \cap \mathcal{X}^r(M)$, $4 \leq r \leq \infty$, θ um ponto de uma órbita periódica η do termostato gaussiano (M, g, E) e $T : \hat{T}_\theta SM \rightarrow \hat{T}_\theta SM$ o cociclo derivada transversal ao longo de η .

Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que dada uma perturbação L de T com $\|L - T\| < \delta$ então existe $\tilde{E} \in \mathcal{X}_g(M)$ com $d(\tilde{E}, E)_{C^1} < \varepsilon$ que define o termostato gaussiano (M, g, \tilde{E}) tal que η é órbita e o cociclo derivada transversal associado a θ é L .

A dificuldade deste resultado reside no fato de que perturbações do termostato gaussiano são perturbações da métrica g e do campo vetorial E . Porém estas perturbações não são de natureza local pois perturbar a métrica ou o campo externo numa vizinhança da variedade significa uma perturbação em todo um cilindro no espaço tangente onde o fluxo está definido.

Finalmente, provamos uma dicotomia entre robustez de transitividade e existência de poços e fontes arbitrários para os termostatos gaussianos:

Teorema E. Seja $E \in \mathcal{X}_g(M)$ e η uma órbita periódica do tipo sela hiperbólica do termostato gaussiano (M, g, E) cujo fluxo é ϕ .

Para V uma vizinhança de η , vale uma das alternativas:

(i) a classe homoclínica $H(\eta, \phi) \subset V$ admite decomposição dominada

(ii) dados uma vizinhança $U \subset H(\eta, \phi) \subset V$, $k \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$, existe $\tilde{E} \in \mathcal{X}_g(M)$ com $d(\tilde{E}, E)_{C^1} < \varepsilon$ tal que o termostato gaussiano (M, g, \tilde{E}) possui k órbitas periódicas atratoras ou repulsoras arbitrariamente próximos de η cuja órbita está contida em V .

Para demonstrar o teorema, as ferramentas principais são o conceito de transições adaptado ao contexto conformalmente simplético e o teorema perturbativo.

Finalmente, terminamos o trabalho com um estudo dos termostatos gaussianos em \mathbb{S}^2 . Mostramos a existência de seção transversal global para um termostato gaussiano. O interesse nesta seção transversal é que, como projeto futuro, possamos garantir a existência de órbitas elíticas.

Parte I

Definições e ferramentas básicas

Neste capítulo preliminar, são introduzidos os conceitos para o estudo da dinâmica conformalmente simplética. Este é um capítulo mais técnico, com o intuito de mostrar que os sistemas conformalmente simpléticos são mais gerais que os simpléticos e intimamente relacionados a estes. Estão determinados por uma 2-forma Ω em uma variedade M não-degenerada que satisfaz $d\Omega = \gamma \wedge \Omega$ com γ uma 1-forma fechada. Esta última hipótese garante que localmente Ω pode ser multiplicada por uma função não nula obtendo uma estrutura simplética.

Introduzimos o conceito de difeomorfismo e fluxo conformalmente simplético além do fluxo conformalmente Hamiltoniano. A principal propriedade dos sistemas conformalmente simpléticos está em [12] e consiste na simetria do espectro de Lyapunov.

Seja $\Omega_0 = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$ a forma simplética canônica em \mathbb{R}^{2n} .

Proposição 1.1 ([12]). *Para uma aplicação linear invertível $S : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ são equivalentes:*

1. $\Omega_0(Su, Sv) = \mu\Omega_0(u, v)$ para um escalar $\mu > 0$ e todo $u, v \in \mathbb{R}^{2n}$
2. $\Omega_0(Su, Sv) = 0$ se e somente se $\Omega_0(u, v) = 0$
3. *Subespaços Lagrangeanos são invariantes por S*

Demonstração. **1 implica 2 e 2 implica 3:** Claro.

2 implica 1: Considerando a base simplética canônica $\{p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n\}$ de \mathbb{R}^{2n} , temos que $\Omega_0(Sp_i, Sp_j) = 0$ para $i, j = 1, \dots, n$, $\Omega_0(Sq_i, Sq_j) = 0$ para $i, j = 1, \dots, n$ e $\Omega_0(Sp_i, Sq_i) = \mu_i\Omega_0(p_i, q_i) = \mu_i$ para $i = 1, \dots, n$ com $\mu_i \neq 0$. Escrevendo explicitamente $\Omega_0(Su, Sv)$ e $\Omega_0(u, v)$, temos que o item 2 implica que todos os μ_i são iguais.

3 implica 2: Suponha que $\Omega_0(u, v) = 0$. Considere um subespaço Lagrangeano $E \subset \mathbb{R}^{2n}$ tal que $u, v \in E$ então $\Omega_0(Su, Sv) = 0$. Considerando S^{-1} temos a implicação contrária. □

Definição 1.1. *Chamaremos de grupo conformalmente simplético, $CS(\mathbb{R}^{2n})$, o conjunto das aplicações em $SL(\mathbb{R}^{2n})$ que satisfazem as propriedades da proposição [1.1].*

Chamaremos a base simplética canônica de *base conformalmente simplética* no contexto deste trabalho.

Observação 1.1. *Dada uma aplicação conformalmente simplética sempre é possível obter uma base conformalmente simplética associada a esta aplicação.*

Proposição 1.2. *Se λ é autovalor de $S \in CS(\mathbb{R}^{2n})$ então existe μ tal que $\frac{\mu}{\lambda}$ também é autovalor de S .*

Demonstração. Sabemos que $S^T JS = \mu J$, então:

$$\begin{aligned} p(t) &= \det(S - tI) = \det(S^T - tI) \\ &= \det(J^{-1}(S^T - tI)J) \\ &= \det(\mu S^{-1} - tI) \\ &= \det S^{-1} \det(\mu I - tS) \\ &= \det S^{-1} \det\left(\frac{\mu}{t}I - S\right) t^{2n} \end{aligned}$$

□

Vamos descrever agora o vetor tangente a uma curva X_t de matrizes em $CS(\mathbb{R}^{2n})$ tal que

- (i) $X_t^* J X_t = \mu(t) J$
- (ii) $X_0 = X$
- (iii) $\dot{\mu}(t) = v(t)$

em que μ e v são funções C^∞ . Um vetor $Y \in T_X CS(\mathbb{R}^2)$, dito *infinitesimalmente conformalmente simplético*, satisfaz

$$Y^* J X + X^* J Y = v J.$$

Se $X = I$ a matriz identidade então o espaço tangente neste ponto é dado pelo conjunto

$$T_I^v CS(\mathbb{R}^n) = \{Y \mid Y^* J + J Y = v J\}.$$

As matrizes em $T_I^v CS(\mathbb{R}^n)$ são da forma

$$\begin{pmatrix} \beta & \gamma \\ \alpha & vI - \beta^* \end{pmatrix}$$

onde α e γ são simétricas e β é qualquer.

Proposição 1.3. *O espaço tangente de uma matriz X em $CS(\mathbb{R}^{2n})$ no nível de energia v satisfaz a relação*

$$T_X^{v^2} CS(\mathbb{R}^n) = X T_I^v CS(\mathbb{R}^n)$$

em que $T_I^v CS(\mathbb{R}^n)$ é o espaço tangente da aplicação identidade.

Demonstração. Seja $Y \in T_I^v CS(\mathbb{R}^n)$, substituindo $Z = XY$ em $Y^* J X + X^* J Y$ temos:

$$Y^* X^* J X + X^* J X Y = Y^* v J + v J Y = v^2 J$$

□

Seja X um espaço mensurável com medida de probabilidade m e $f : X \rightarrow X$ uma aplicação ergódica. Seja $A : X \rightarrow GL(\mathbb{R}^{2n})$ aplicação mensurável e considere o cociclo associado. A partir do teorema de Oseledets, temos o seguinte teorema.

Teorema 1.1 ([12]). *Se o cociclo mensurável $A(x)$, $x \in X$, satisfaz a condição de integrabilidade, ou seja $\int_X \log_+ \|A(x)\| dm(x) < +\infty$, e tem seus valores no grupo conformalmente simplético $CS(\mathbb{R}^{2n})$ então temos bem definidos os expoentes de Lyapunov $\lambda_1 < \dots < \lambda_s$ e a bandeira*

$$\{0\} = \mathbb{V}_0 \subset \dots \subset \mathbb{V}_{s-1} \subset \mathbb{V}_s = \mathbb{R}^{2n}$$

que satisfazem as propriedades:

1. $\lambda_k + \lambda_{s-k+1} = b$ onde $b = \int_X \log |\det A(x)| dm(x)$
2. as multiplicidades de λ_k e λ_{s-k+1} são iguais, para $k = 1, 2, \dots, s$
3. \mathbb{V}_{s-k} é o complemento ortogonal de \mathbb{V}_s com respeito a Ω_0 .

A partir de agora consideramos M uma variedade diferenciável.

Definição 1.2. *Uma 2-forma Ω sobre uma variedade diferenciável M é dita conformalmente simplética se é*

1. não-degenerada
2. $d\Omega = \gamma \wedge \Omega$ onde γ é uma 1-forma fechada.

Chamamos variedade conformalmente simplética o par (M, Ω) .

O fato de w ser não-degenerada implica que M tem dimensão par.

Proposição 1.4. *Seja (M, Ω) variedade conformalmente simplética. Localmente, existe Ω' tal que M é uma variedade simplética com estrutura simplética (M, Ω') .*

Demonstração. Pelo lema de Poincaré, seja $U : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que localmente $\gamma = dU$. Então

$$d(e^{-U}\Omega) = d(e^{-U}) \wedge \Omega + e^{-U} d\Omega = 0.$$

Portanto, localmente a forma $\Omega' = e^{-U}\Omega$ é simplética em M . □

Observação 1.2. *Variedades simpléticas são exemplos de variedades conformalmente simpléticas. Isto acontece quando $\gamma \equiv 0$ ou a função U está definida globalmente.*

Definição 1.3. *Sejam (M, Ω_1) e (N, Ω_2) variedades conformalmente simpléticas tais que $d\Omega_1 = \gamma_1 \wedge \Omega_1$ e $d\Omega_2 = \gamma_2 \wedge \Omega_2$. Dizemos que $f : M \rightarrow N$ é um difeomorfismo conformalmente simplético se $f^*\Omega_2 = e^\beta \Omega_1$ com $\beta : M \rightarrow \mathbb{R}$. Denotamos $CS^k(M, N)$ o conjunto dos difeomorfismos conformalmente simpléticos $f : M \rightarrow N$ e quando $M = N$ denotamos simplesmente $CS^k(M)$.*

Proposição 1.5. *A função β não é qualquer, ela satisfaz $d\beta = f^*(\gamma_2) - \gamma_1$*

Demonstração.

$$\begin{aligned} d(f^*\Omega_2) &= d(e^\beta \Omega_1) \\ f^*(d\Omega_2) &= e^\beta d\beta \wedge \Omega_1 + e^\beta d\Omega_1 \\ f^*(\gamma_2 \wedge \Omega_2) &= e^\beta d\beta \wedge \Omega_1 + e^\beta \gamma_1 \wedge \Omega_1 \\ f^*(\gamma_2) \wedge f^*(\Omega_2) &= e^\beta (d\beta + \gamma_1) \wedge \Omega_1 \\ f^*(\gamma_2) \wedge e^\beta \Omega_1 &= e^\beta (d\beta + \gamma_1) \wedge \Omega_1 \\ e^\beta f^*(\gamma_2) \wedge \Omega_1 &= e^\beta (d\beta + \gamma_1) \wedge \Omega_1 \\ f^*(\gamma_2 - \gamma_1 - d\beta) \wedge \Omega_1 &= 0 \end{aligned}$$

Assim β deve satisfazer

$$d\beta = f^*(\gamma_2) - \gamma_1.$$

□

A partir da igualdade $(f^n)^*\Omega_{f^n(x)} = e^{\sum_{k=0}^{n-1} \beta(f^k(x))} \Omega_x$ denotaremos $\beta^n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \beta(f^k(x))$.

Definição 1.4. *Seja $f : (M, \Omega) \rightarrow (M, \Omega)$ um difeomorfismo conformalmente simplético e $\beta : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f^*\Omega = e^\beta \Omega$. Uma ϵ -perturbação conformalmente simplética de f é um difeomorfismo $g : (M, \Omega) \rightarrow (M, \Omega)$ conformalmente simplético ϵ -próximo de f que preserva a mesma estrutura conforme, ou seja, $\|f - g\| < \epsilon$ e $g^*\Omega = e^\beta \Omega$.*

Definição 1.5. *Seja um conjunto $U \subset CS^k(M)$, um difeomorfismo $f \in U$ e uma órbita periódica η de f . Uma cirurgia de f na vizinhança de η em U é um caminho contínuo $h : [0, 1] \rightarrow U$ tal que*

$$(i) \ h(0) = f$$

$$(ii) \ \eta \text{ é órbita periódica de } h(t) \text{ para todo } t \in [0, 1]$$

$$(iii) \ \text{Existe vizinhança } V \text{ de } \eta \text{ tal que } \|(h(t) - f)|_{V^c}\| = 0 \text{ para todo } t \in [0, 1]$$

Proposição 1.6. *Existem coordenadas, que chamaremos de coordenadas conformalmente simpléticas, que consistem num difeomorfismo local conformalmente simplético entre (M, Ω) e (\mathbb{R}^{2n}, w_0) com w_0 a forma simplética canônica.*

Demonstração. Do teorema de Darboux, temos a existência de coordenadas simpléticas que são um difeomorfismo local h entre $(M, \tilde{\Omega} = e^{-U}\Omega)$ e (\mathbb{R}^{2n}, w_0) com w_0 a forma simplética canônica. Chamamos $g = e^{-U}$, e sabemos que $h : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow M$ satisfaz $h^*(\tilde{\Omega}) = w_0$. Mas $h^*(\tilde{\Omega}) = h^*(g\Omega) = (g \circ h)^*\Omega$. Logo, $h^*(\Omega) = \frac{1}{g \circ h} \Omega_0$ e $\beta = \frac{1}{g \circ h}$. \square

Observação 1.3 (Coordenadas locais). *Seja $f : (M, \Omega) \rightarrow (M, \Omega)$ difeomorfismo conformalmente simplético tal que $y = f(x)$. Por [1.4], existem vizinhanças V_x e V_y e aplicações g_x e g_y de x e y , respectivamente, tais que*

$$d(g_x \Omega) = 0$$

$$d(g_y \Omega) = 0$$

Sejam h_x e h_y coordenadas simpléticas locais nas vizinhanças de x e y , respectivamente. Então podemos trabalhar em coordenadas locais

$$\begin{array}{ccc} (M, \Omega) & \xrightarrow{f} & (M, \Omega) \\ \uparrow h_x & & \uparrow h_y \\ (\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0) & \xrightarrow{\tilde{f}} & (\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0) \end{array}$$

Assim,

$$\tilde{f}^* \Omega_0 = \tilde{\beta} \Omega_0$$

em que $\tilde{\beta}$ é dada por $\tilde{\beta} = (g_y \circ f \circ h_x)(\beta \circ h_x)(g_x \circ h_x)^{-1}$.

Se (M, Ω) é uma variedade conformalmente simplética e $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo conformalmente simplético. A diferencial de f induz um cociclo sobre M , definido por

$$A(x) = df_x, \quad x \in M$$

Este cociclo é conformalmente simplético e se fixarmos uma probabilidade invariante e ergódica m em M , que assumimos compacta, satisfazendo a condição de integrabilidade temos então simetria do espectro de Lyapunov.

Teorema 1.2. *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo conformalmente simplético e $A(x)$, $x \in X$, o cociclo derivada associado a f . Se $A(x)$ satisfaz a condição de integrabilidade, ou seja $\int_X \log_+ \|A(x)\| dm(x) < +\infty$, então temos bem definidos os expoentes de Lyapunov $\lambda_1 < \dots < \lambda_s$ e a bandeira*

$$\{0\} = \mathbb{V}_0 \subset \dots \subset \mathbb{V}_{s-1} \subset \mathbb{V}_s = \mathbb{R}^{2n}$$

que satisfazem as propriedades:

1. $\lambda_k + \lambda_{s-k+1} = b$ onde $b = \int_X \log |\det A(x)| dm(x)$
2. as multiplicidades de λ_k e λ_{s-k+1} são iguais, para $k = 1, 2, \dots, s$
3. \mathbb{V}_{s-k} é o complemento ortogonal de \mathbb{V}_s com respeito a Ω .

Passamos ao estudo dos fluxos: conformalmente simpléticos e conformalmente Hamiltonianos.

Definição 1.6. *Dado um fluxo $X \in \mathcal{X}^r(M)$, dizemos que $\tilde{X} \in \mathcal{X}^r(M)$ é uma ϵ -perturbação de X se existe aberto $V \in M$ tal que*

- (i) Em V vale $\|X - \tilde{X}\| < \epsilon$
- (ii) Em V^c , $X \equiv \tilde{X}$

Definição 1.7. *Dado um fluxo $X \in \mathcal{X}^r(M)$ e η uma órbita periódica de X , dizemos que a família contínua $h : [0, 1] \rightarrow \mathcal{X}^r(M)$ é uma cirurgia de X se*

- (i) $h(0) = X$
- (ii) η é órbita periódica de $h(t)$ para todo $t \in [0, 1]$
- (iii) Existe vizinhança V de η tal que $\|h(t) - X\|_{U^c} = 0$ para $t \in [0, 1]$

Seja M variedade diferenciável, $F : M \rightarrow TM$ campo de vetores tal que $F(x) \neq 0$ para todo $x \in M$ em M e ϕ o fluxo associado. O campo F é invariante pela diferencial do fluxo $d_x \phi$, $x \in M$. Devido a este fato, podemos realizar o quociente do fibrado tangente TM pelo campo F e denotamos este quociente $\hat{T}M$.

Definição 1.8. *Seja $\pi : TM \rightarrow \hat{T}M$ a projeção de $v \in T_x M$ em $\hat{T}_x M$. A composição $A_x^t = \pi \circ d\phi_x^t : \hat{T}_x M \rightarrow \hat{T}_{\phi^t(x)} M$ define o cociclo derivada transversal associado a ϕ ou aplicação linear de Poincaré.*

Relação entre a aplicação linear de Poincaré e a aplicação de Poincaré: Dado $\eta = \{\phi_t(v) | t \in [0, \tau], v \in TM\}$ um segmento de órbita de comprimento τ com condição inicial v , considere Σ_0 e Σ_τ seções transversais a η para $t = 0$ e τ , respectivamente. Seja $\mathcal{P} : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma_\tau$ a aplicação de Poincaré correspondente. Se as seções Σ_0 e Σ_τ são escolhidas de forma que sejam ortogonais a η então a diferencial $d_{\eta(0)} \mathcal{P}$ é a aplicação linear de Poincaré $A_x^\tau : \hat{T}_x M \rightarrow \hat{T}_{\phi^\tau(x)} M$.

Definição 1.9. *Seja M variedade com $\dim(M) = 2n+1$, ϕ um fluxo sobre M , $A^t : \hat{T}M \rightarrow \hat{T}M$ o cociclo derivada transversal associado a ϕ e uma 2-forma Ω definida no quociente $\hat{T}M$, $\Omega_x : \hat{T}M \times \hat{T}M \rightarrow \mathbb{R}$ $x \in M$, tal que*

- (i) Ω é não degenerada
- (ii) existe uma 1-forma γ definida no quociente $\hat{T}M$, $\gamma_x : \hat{T}M \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $d\Omega = \gamma \wedge \Omega$
- (iii) existe $\beta : M \rightarrow \mathbb{R}$ em que

$$(\pi \circ \phi_x^t)^* \Omega = e^{\int_0^t \beta(\phi_x^s) ds} \Omega, \quad \forall x \in M \text{ e } t \in \mathbb{R}$$

dizemos que (M, ϕ, Ω) é um fluxo conformalmente simplético.

Seja η um segmento de órbita do fluxo conformalmente simplético ϕ . Então existem coordenadas tal que cociclo derivada transversal satisfaz

$$(A^t)^* J A^t = e^{\int_0^t \beta(\phi_x^s(s)) ds} J$$

em que $J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ é matriz $2n \times 2n$ com I a matriz identidade $n \times n$.

Terminamos esta seção com a definição de fluxos conformalmente Hamiltonianos. Seja (M, Ω) uma variedade conformalmente simplética e $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^∞ que chamaremos de Hamiltoniano. Consideramos o campo vetorial F unicamente definido pela relação $\Omega(\cdot, F) = dH$.

A forma ω restrita a $\hat{T}M$ define uma forma conformalmente simplética. De fato, defina a função $\Omega(t) = (\phi^t)^* \Omega$ e, calculando a derivada de Lie de $\Omega(t)$

$$\frac{d\Omega(t)}{dt} = \mathcal{L}_F \Omega(t) = \gamma(F(\phi^t)) \Omega + \gamma \wedge dH = \gamma(F(\phi^t)) \Omega$$

O Hamiltoniano H é uma primeira integral para o fluxo, $\frac{d}{dt} H = dH(F) = \Omega(F, F) = 0$. Portanto, restrito ao nível de energia, $H(\phi^t) = c$, o fluxo é conformalmente simplético e, fazendo $\beta(t) = \gamma(F(\phi^t))$,

$$(\phi^t)^* \Omega = e^{\int_0^t \beta(s) ds} \Omega$$

Finalizamos a seção com a simetria do espectro de Lyapunov para os fluxos conformalmente Hamiltonianos.

Teorema 1.3 ([12]). *Para um fluxo conformalmente Hamiltoniano ϕ^t restrito ao nível de energia c temos que se o cociclo derivada transversal $A_x^t(x)$ satisfaz a condição de integrabilidade, ou seja $\int_X \log_+ \|A(x)\| dm(x) < +\infty$, então temos bem definidos os expoentes de Lyapunov $\lambda_1 < \dots < \lambda_s$ e a bandeira*

$$\{0\} = \mathbb{V}_0 \subset \dots \subset \mathbb{V}_{s-1} \subset \mathbb{V}_s = \mathbb{R}^{2n}$$

que satisfazem as propriedades:

1. $\lambda_k + \lambda_{s-k+1} = b$ onde $b = \int_X \log |\det A(x)| dm(x)$
2. as multiplicidades de λ_k e λ_{s-k+1} são iguais, para $k = 1, 2, \dots, s$
3. \mathbb{V}_{s-k} é o complemento ortogonal de \mathbb{V}_s com respeito a Ω .

2.1 Estados de não equilíbrio estáveis

A mecânica estatística é dividida em duas partes: sistemas em equilíbrio e sistemas fora do equilíbrio. Essa distinção surge a partir do conceito de reversibilidade: sistemas em equilíbrio são reversíveis e sistemas fora do equilíbrio são irreversíveis. Um exemplo de sistema fora do equilíbrio é quando colocamos um corpo quente e um corpo frio em contato. Estes corpos irão equalizar suas temperaturas e não irão espontaneamente voltar a situação anterior. De acordo com a termodinâmica, mais exatamente com a segunda lei da termodinâmica, a entropia de um sistema cresce enquanto este não está em equilíbrio e assim que o equilíbrio é atingido a entropia é máxima. Portanto crescimento de entropia corresponde a sistemas irreversíveis.

Para manter um sistema fora do equilíbrio devemos sujeitar o sistema a forças não Hamiltonianas, assim não teremos conservação de energia e o sistema irá produzir calor. Num experimento, o excesso de calor é eliminado por um termostato. No laboratório, o sistema que estamos interessados, o sistema menor, é acoplado com outro sistema maior, que é chamado de termostato. O papel do termostato é absorver o calor produzido pelo sistema menor e o estado do termostato não sofre influência do sistema menor. Por exemplo, o sistema menor pode ser uma pequena quantidade de fluido cercado por uma quantidade grande de cobre, que faz o papel do sistema grande. O cobre tem uma condutividade termal alta e por estar em grande quantidade, a temperatura da interface fluido-cobre permanecerá praticamente constante.

Queremos manter o sistema em estado de não equilíbrio estável e por estável queremos dizer que a força de controle ou as variáveis termodinâmicas, como por exemplo a temperatura, são mantidas constantes. Precisamos então introduzir o equivalente matemático de um termostato.

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e $E : M \rightarrow TM$ um campo vetorial sobre M . O princípio da menor restrição de Gauss é utilizado para remover o calor de forma que o estado fora do equilíbrio seja estável. Este princípio diz que as forças de restrições E_c requeridas para impor uma restrições precisam ser o menor possível no seguinte sentido:

$$\frac{D}{dt}v = E + E_c \text{ com } E_c^2 \text{ mínimo}$$

em que v é a tangente a órbita e $\frac{D}{dt}$ é a derivada covariante. Com esta abordagem, chegamos a força de restrição

$$F_c = -\frac{g(E, v)}{g(v, v)}v.$$

2.2 Termostatos gaussianos

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e $E : M \rightarrow TM$ um campo vetorial sobre M . Chamamos de termostato gaussiano o fluxo $\phi : TM \rightarrow TM$ cujas órbitas $\eta(t) = (x(t), v(t))$ satisfazem as equações

$$\begin{cases} \dot{x} &= v \\ \frac{Dv}{ds} &= E - \frac{g(E, v)}{g(v, v)}v \end{cases}$$

O segundo termo a direita da segunda equação corresponde ao termostato. Este termo subtrai a componente tangencial do campo E fazendo com que somente a direção da trajetória seja alterada e não sua velocidade. Ou seja, dada uma condição inicial $\theta \in TM$, a órbita $\phi_t(\theta)$ se mantém no mesmo nível de energia $g(\dot{\phi}_t(\theta), \dot{\phi}_t(\theta)) = c$ com $c > 0$ uma constante, para todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto podemos considerar o fluxo ϕ restrito a um nível de energia c fixo. Mas vale notar que não necessariamente existe uma conjugação do fluxo entre diferentes níveis de energia. Utilizaremos a notação T^cM para a restrição de TM ao nível de energia c , ou seja, $T^cM = \{v \in TM | g(v, v) = c\}$ e no caso em que $c = 1$, chamamos T^1M de fibrado unitário e denotamos SM .

Apresentamos alguns exemplos de termostatos gaussianos:

(i) Fluxo geodésico

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Fazendo o campo vetorial $E \equiv 0$ então o termostato gaussiano é o fluxo geodésico sobre a variedade M .

(ii) Toro plano com campo externo vertical

Seja (\mathbb{T}^2, g) o toro plano, ou seja, o toro com a métrica g induzida por \mathbb{R}^2 .

Escrevemos $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ e para $v \in S\mathbb{T}^2$, consideramos $v = v_0 + v_1$ a decomposição de v em v_0 paralela a primeira esfera \mathbb{S}^1 da decomposição do toro e v_1 paralela a segunda esfera \mathbb{S}^1 .

Seja E um campo vetorial sobre \mathbb{T}^2 tal que $E = E_0$, ou seja, o campo E só tem componente paralela a primeira esfera \mathbb{S}^1 .

Para este exemplo, a equação do termostato gaussiano em coordenadas se escreve

$$\begin{cases} \dot{v}_0 &= E_0 - \langle E, v \rangle v_0 \\ \dot{v}_1 &= E_1 - \langle E, v \rangle v_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{v}_0 &= E_0(1 - v_0^2) \\ \dot{v}_1 &= -E_0 v_0 v_1 \end{cases}$$

A integral dessa EDO, supondo condição inicial da forma $(v_0, v_1) = (0, 1)$, é

$$\begin{cases} v_0(t) &= \tanh(E_0 t) \\ v_1(t) &= \operatorname{sech}(E_0 t) \end{cases}$$

e as órbitas se comportam conforme a figura abaixo

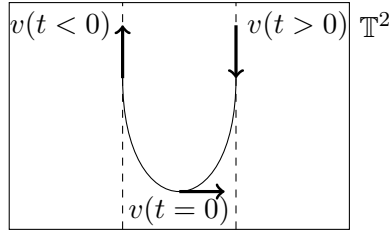


Figura 2.1: Órbita típica do termostato gaussiano no toro plano.

(iii) Toro plano com campo externo com inclinação irracional

Seja (\mathbb{T}^2, g) o toro plano, ou seja, o toro com a métrica g induzida por \mathbb{R}^2 . Considere agora E um campo vetorial sobre \mathbb{T}^2 tal que E seja um vetor constante sobre toda o toro com inclinação irracional. Para este exemplo, ainda temos um toro atrator e outro toro repulsor ambos normalmente hiperbólicos em $S\mathbb{T}^2$ porém a dinâmica nestes toros é uma rotação irracional.

(iv) Generalização do exemplo no toro plano

Seja N uma variedade Riemanniana arbitrária, considere a variedade $M = \mathbb{S}^1 \times N$ munida da métrica produto. Seja E um campo vetorial tangente a \mathbb{S}^1 de módulo constante $|E|$. Para $v \in SM$, tomamos $v = v_0 + v_1$ a decomposição de v em v_0 paralela a \mathbb{S}^1 e v_1 paralela a N .

A equação do termostato gaussiano na componente v_0 é

$$v_0(t) = |E|(1 - v_0^2).$$

As trajetórias do termostato gaussiano $\phi^t = (u_0(t), u_1(t))$, com $\dot{u}_i = v_i$, são linhas paralelas a \mathbb{S}^1 ou podem ser descritas na nesta componente como $v_0(t) = \tanh(|E|t)$, supondo a condição inicial $v_0 = 0$.

O comprimento da projeção da trajetória do fluxo sobre N é dado por

$$\begin{aligned} l(u_1) &= 2 \int_0^\infty |\dot{u}_1(t)| dt \\ &= 2 \int_0^\infty |1 - \tanh^2(|E|t)| dt \\ &= 2 \int_0^\infty |\tanh(|E|t)|' dt \\ &= \frac{2}{|E|}. \end{aligned}$$

Portanto a projeção de uma trajetória do fluxo sobre N é uma curva com comprimento $\frac{2}{|E|}$ com exceção das trajetórias que se projetam num único ponto.

O termostato gaussiano apresenta um atrator A e um repulsor R global dados por se $\xi \in A$ então $\xi = (\frac{E}{|E|}, \theta)$ e $\theta \in TN$ e se $\xi \in R$ então $\xi = (-\frac{E}{|E|}, \theta)$ e $\theta \in TN$.

Além disso, o atrator e o repulsor são normalmente hiperbólicos. De fato, considerando o atrator temos que as órbitas tem componente normal ao atrator da forma

$$v_1(t) = \operatorname{sech}(|E|t)$$

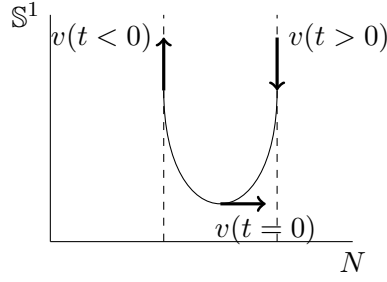


Figura 2.2: Órbita típica do termostato gaussiano sobre $\mathbb{S}^1 \times N$.

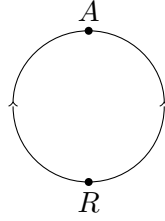


Figura 2.3: Representação esquemática do fibrado unitário $S(\mathbb{S}^1 \times N)$ termostato gaussiano sobre $\mathbb{S}^1 \times N$.

em que a derivada $v'_1(t) = -\text{sech}(|E|t)\tanh(|E|t)|E|$ satisfaz

$$|v'_1(t)| < C\lambda^t$$

para $C = |E|$ e $\lambda = e^{-|E|}$.

(v) Órbita circular

Considere uma região R do plano \mathbb{R}^2 com a métrica canônica g . Considere o campo vetorial $E(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}(-x, -y)$ observe que $\lim_{(x,y) \rightarrow 0} E(x, y) = \infty$ e portanto vamos tomar uma função do tipo salto $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\phi(x, y) = 1$ se $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$ e $\phi(x, y) = 0$ se $\frac{1}{2} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{5}{2}$. Defina $\tilde{E}(x, y) = \phi(x, y)E(x, y)$.

Considere a família de curvas $\alpha_c(t) = (x(t), y(t)) = (c \sin(\frac{t}{c}), c \cos(\frac{t}{c}))$. Então $\alpha'(t) = (\cos(\frac{t}{c}), -\sin(\frac{t}{c})) = \frac{1}{c}(-y(t), x(t))$ é vetor unitário e α está parametrizada por comprimento de arco. Além disso, $\alpha''(t) = \frac{1}{c}(-\sin(\frac{t}{c}), -\cos(\frac{t}{c})) = \frac{1}{c^2}(-x(t), -y(t))$. Se considerarmos $c = \sqrt{x^2 + y^2}$ então $\alpha''(t) = \tilde{E}(x, y)$.

Portanto, a família de curvas α_c , $c \in [1, 2]$ é solução do termostato gaussiano $(\mathbb{R}^2, g, \tilde{E})$.

Um termostato gaussiano não é um fluxo homogêneo. De fato, seja $\eta(t) = (x(t), v(t))$ uma órbita e considere $x^*(t) = x(at)$ para $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \dot{x}^*(t) &= a\dot{x}(at) = av(at) = x^*(t) \\ \frac{D}{dt}v^*(t) &= a^2\frac{D}{dt}v(at) = a^2(E - \alpha)v(at) \end{aligned}$$

Portanto, $\eta^*(t) = \eta(at)$ é uma órbita do termostato gaussiano (M, g, a^2E) no nível de energia igual a a vezes o nível de η .

Proposição 2.1. *Se considerarmos uma órbita $\eta(t) = (x(t), v(t))$ do termostato gaussiano (M, g, E) no nível de energia $\frac{1}{c}$ (ou seja, $\|\dot{x}\| = \|v\| = \frac{1}{c}$) então $\eta^* = (x(ct), av(ct))$ é uma órbita do termostato gaussiano (M, g, c^2E) .*

Além disso, o fluxo do termostato gaussiano não tem singularidades pois $g(v(t), v(t)) = c$ com $c > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Observando os exemplos, constatamos que dados dois pontos p e $q \in M$ não necessariamente existe uma órbita que liga estes dois pontos. Finalmente os subespaços estáveis e instáveis de um termostato gaussiano não são necessariamente Lagrangeanos (uma vez que temos atratores, o espaço estável não pode ser Lagrangeano).

Os termostatos gaussianos são um exemplo de dinâmica conformalmente simplética e podem ser abordados de duas formas:

- Fluxo conformalmente Hamiltoniano

Visto como fluxo conformalmente Hamiltoniano, podemos escrever os termostatos gaussianos em coordenadas amigáveis que nos permitiram obter os resultados genéricos da tese.

- Fluxo de Weyl

Esta abordagem, mais geométrica, permite introduzir o conceito de curvatura associada a estrutura conformalmente simplética e obter resultados a partir do sinal da curvatura.

Em 1918 H. Weyl introduziu uma generalização da geometria Riemanniana com o objetivo de formular uma teoria de corpos unificada. Esta teoria falhou por razões físicas, porém continua interessante do ponto de vista matemático. Neste capítulo, vamos estudar esta teoria sob a ótica dos sistemas dinâmicos.

A motivação física das ideias de Weyl seguem da observação de que universo não é uma variedade Riemanniana uma vez que não existe uma medida de comprimento absoluta. Ou seja, dado um ponto, não temos um comprimento absoluto (ou uma métrica absoluta) definido neste ponto e sim uma determinação deste a menos de um fator positivo.

O fluxo de Weyl coincide com o termostato gaussiano. Vamos introduzir o fluxo de Weyl, suas características geométricas e dinâmicas e finalmente mostrar os seguintes resultados:

Teorema A. *Se a curvatura seccional da estrutura de Weyl é menor do que zero em todo ponto de M então o fluxo Weyl tem decomposição dominada transversal.*

Teorema B. *Seja $\Lambda \subset SM$ um subconjunto invariante do fluxo de Weyl com curvatura seccional Λ menor ou igual a zero e para $\theta = (x, v) \in \Lambda$ tem-se $\gamma(v) > 0$. Então Λ tem decomposição dominada transversal.*

Considerando o trabalho de [3] para variedades de dimensão 3, temos o seguinte teorema:

Teorema 3.1. *Seja Λ um conjunto compacto invariante para um fluxo $X \in \mathcal{X}^2(M)$ com decomposição dominada tal que $Sing(X) \cap \Lambda = \emptyset$ e todos os pontos $Per(X) \cap \Lambda$ são selas hiperbólicas. Então $\Lambda = \tilde{\Lambda} \cup \mathcal{T}$ em que $\tilde{\Lambda}$ é um conjunto hiperbólico e \mathcal{T} é a união finita de toros irracionais.*

Portanto se M é uma superfície, $\Lambda \subset SM$ um subconjunto invariante do fluxo de Weyl ϕ que satisfaz hipóteses do teorema B e os pontos em $Per(\phi) \cap \Lambda$ são hiperbólicos então $\Lambda = \tilde{\Lambda} \cup \mathcal{T}$ em que $\tilde{\Lambda}$ é um conjunto hiperbólico e \mathcal{T} é um toro irracional. Se voltarmos ao exemplo no toro plano com campo externo com inclinação irracional, temos que sobre os toros invariantes (atrator e repulsor) satisfazem as hipóteses deste teorema.

3.1 Preliminares

Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n e $\Lambda^1(M)$ o espaço das 1-formas em M .

Definição 3.1. Duas métricas Riemannianas g_1 e g_2 em M são ditas equivalentes se $g_1 = e^\lambda g_2$ com $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ . Uma estrutura conforme em M é uma classe de equivalência G de métricas equivalentes em M . A variedade (M, G) é dita variedade conforme.

Definição 3.2. Uma estrutura de Weyl em M é uma aplicação $F : G \rightarrow \Lambda^1(M)$ satisfazendo $F(e^\lambda g) = F(g) - d\lambda$. Chamamos o par (M, F) de variedade de Weyl.

Fixada uma métrica Riemanniana g_0 e uma 1-forma γ_0 , temos F determinada por

$$F(e^\lambda g_0) = \gamma_0 - d\lambda$$

Definição 3.3. Dada uma curva $c : [0, 1] \rightarrow M$, considere g um elemento de G tal que em $T_p M$, $p \in M$, seja o produto escalar g_p . Definimos a translação \hat{g} do produto escalar g_p ao longo da curva c

$$\hat{g}_{c(t)} = \exp\left(\int_0^t c^*(F(g_{c(s)})) ds\right) g_{c(t)}$$

Dizemos que uma conexão é compatível com a estrutura de Weyl se o transporte paralelo de um produto escalar é dado pela translação acima.

Lema 3.1. Uma conexão $\widehat{\nabla}$ em um variedade de Weyl M é compatível com a estrutura de Weyl se e somente se $\widehat{\nabla}g + F(g) \otimes g = 0$ para todo $g \in G$.

Demonstração. Seja X um campo vetorial em M e c uma curva adaptada a X tal que $c(0) = p$. Seja τ_t o transporte paralelo da álgebra tensorial de $c(0)$ a $c(t)$. Da compatibilidade com a estrutura de Weyl, temos:

$$\tau_t g_{c(0)} = \exp\left(\int_0^t c^* F(g)\right) g_{c(t)}$$

então

$$\tau_t^{-1} g_{c(t)} = \exp\left(-\int_0^t c^* F(g)\right) g_{c(0)}$$

Então

$$\begin{aligned} (\widehat{\nabla}_X g)_p &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tau_t^{-1} g_{c(t)} - g_{c(0)}}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\exp(-\int_0^t c^* F(g)) - 1)}{t} g_p \\ &= \frac{d}{dt} (\exp(-\int_0^t c^* F(g)))|_{t=0} g_p \\ &= -F(g)_p g_p \end{aligned}$$

Suponha agora que $\widehat{\nabla}g + F(g) \otimes g = 0$ para todo $g \in G$. Seja C uma curva adaptada a um campo vetorial X . Se g é paralelo ao longo de c então $\widehat{\nabla}_X g = 0$ e isto implica que $F(g)(X) = 0$ logo $\widehat{\nabla}$ é compatível com a estrutura de Weyl. \square

Teorema 3.2. Numa variedade de Weyl (M, F) existe uma única conexão linear $\widehat{\nabla}$ compatível com a estrutura Weyl e livre de torsão (ou simétrica). Sejam g métrica e 2γ a 1-forma que definem F , ou seja, $F(g) = 2\gamma$. Sejam E o campo em M tal que $\gamma = g(E, \cdot)$ e ∇ a conexão Riemanniana associada a g . Então $\widehat{\nabla}$ é dada por

$$\widehat{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \gamma(X)Y + \gamma(Y)X - g(X, Y)E.$$

Chamamos $\widehat{\nabla}$ de conexão de Weyl.

Demonstração. A demonstração é a mesma da existência e unicidade da conexão Riemanniana, a menos dos seguintes fatos:

(i) Por não ser mais compatível com a métrica, a derivada tensorial satisfaz

$$X(g(Y, Z)) = \widehat{\nabla}_X(g(Y, Z)) = (\nabla_X g)(Y, Z) + g(\widehat{\nabla}_X Y, Z) + g(Y, \widehat{\nabla}_X Z)$$

(ii) Da compatibilidade da conexão com a estrutura de Weyl temos

$$(\widehat{\nabla}_X g)(Y, Z) = -\gamma(X)g(Y, Z).$$

para quaisquer campos vetoriais X, Y e Z e para qualquer $g \in G$.

Suponhamos a existência da conexão $\widehat{\nabla}$. Então

$$g(\widehat{\nabla}_X Y, Z) = X(g(Y, Z)) + 2\gamma(X)g(Y, Z) - g(\widehat{\nabla}_X Z, Y)$$

Pela simetria da conexão, $\widehat{\nabla}_X Z = [X, Z] + \widehat{\nabla}_Z X$

$$g(\widehat{\nabla}_X Y, Z) = X(g(Y, Z)) + 2\gamma(X)g(Y, Z) - g([X, Z], Y) - g(\widehat{\nabla}_Z X, Y)$$

Permutando ciclicamente X, Y e Z temos mais duas equações

$$g(\widehat{\nabla}_Y Z, X) = Y(g(Z, X)) + 2\gamma(Y)g(Z, X) - g([Y, X], Z) - g(\widehat{\nabla}_X Y, Z)$$

e

$$g(\widehat{\nabla}_Z X, Y) = Z(g(X, Y)) + 2\gamma(Z)g(X, Y) - g([Z, Y], X) - g(\widehat{\nabla}_Y Z, X)$$

Somando as duas primeiras e subtraindo a terceira, obtemos

$$\begin{aligned} g(\widehat{\nabla}_X Y, Z) &= \frac{1}{2}(Xg(Y, Z) + 2\gamma(X)g(Y, Z) - g([X, Z], Y) \\ &\quad + Yg(X, Z) + 2\gamma(Y)g(X, Z) - g([Y, X], Z) \\ &\quad - Zg(X, Y) - 2\gamma(Z)g(X, Y) + g([Z, Y], X)) \\ &= g(\nabla_X Y, Z) + \gamma(X)g(Y, Z) + \gamma(Y)g(Z, X) - \gamma(Z)g(X, Y) \end{aligned}$$

Além disso, expressão acima está bem definida e satisfaz as propriedades desejadas para $\widehat{\nabla}$. \square

Proposição 3.1. *A conexão de Weyl é única dentro de cada classe de equivalência de métricas, ou seja,*

$$\widehat{\nabla}_X^g Y = \widehat{\nabla}_X^{e^\lambda g} Y$$

em que $\widehat{\nabla}^g$ é a conexão de Weyl associada a g e $\widehat{\nabla}^{e^\lambda g}$ é a conexão de Weyl associada a $e^\lambda g$.

Demonstração. Se g e γ satisfazem igualdade $\nabla g + \gamma \otimes g = 0$ então $e^\lambda g$ e $\gamma - d\lambda$ também satisfazem a mesma igualdade e resultado segue do lema e do teorema anteriores. \square

Sejam c uma curva e X o campo tangente a essa curva, Y e Z campos vetoriais paralelos ao longo de c e g o transporte paralelo de g ao longo de c . Então

$$X(g(Y, Z)) = \widehat{\nabla}_X(g(Y, Z)) = (\nabla_X g)(Y, Z) + g(\widehat{\nabla}_X Y, Z) + g(Y, \widehat{\nabla}_X Z) = 0$$

Isto nos diz que, se considerarmos também o transporte paralelo da métrica, podemos dizer que o transporte paralelo de vetores (com respeito a estrutura de Weyl) preserva a norma de cada um e o ângulo entre eles.

Porém, se mantivermos a métrica g fixa ao longo da curva c , teremos

$$X(g(Y, Z)) = \widehat{\nabla}_X(g(Y, Z)) = -\gamma(x)g(Y, Z) = 0$$

Ou seja, o comprimento do transporte paralelo de vetores decresce exponencialmente a uma taxa de $\gamma(X)$ e o ângulo cresce exponencialmente a mesma taxa $\gamma(X)$.

Assim como no caso da conexão Riemanniana, podemos falar de tensor curvatura e de curvatura seccional para a conexão de Weyl. O tensor curvatura da conexão de Weyl é

$$\widehat{R}(X, Y) = \widehat{\nabla}_X \widehat{\nabla}_Y - \widehat{\nabla}_Y \widehat{\nabla}_X + \widehat{\nabla}_{[X, Y]}$$

e a curvatura seccional

$$\widehat{K}(\Pi) = \langle \widehat{R}(X, Y)X, Y \rangle.$$

Podemos relacionar a curvatura seccional Weyl com a Riemanniana

$$\widehat{K}(\Pi) = K(\Pi) - (E^2 - E_{\Pi}^2) - \operatorname{div}_{\Pi} E$$

em que Π é o plano gerado por X e Y ; e $\operatorname{div}_{\Pi} E = \langle \nabla_X E, X \rangle + \langle \nabla_Y E, Y \rangle$ é o divergente parcial do campo E , ou seja, a taxa de crescimento exponencial da área na direção Π do fluxo associado ao campo E .

Vamos considerar agora o fluxo geodésico associado a conexão de Weyl $\widehat{\nabla}$. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e $\widehat{\nabla}$ a conexão de Weyl. Uma geodésica em M é uma curva $u : \mathbb{R} \rightarrow M$ que satisfaz

$$\begin{cases} \frac{du}{ds} = w \\ \widehat{D}w = 0 \end{cases}$$

em que $\frac{\widehat{D}}{ds}$ é a derivada covariante ao longo de u com respeito a conexão de Weyl.

Portanto o fluxo geodésico associado a conexão de Weyl é um fluxo $\phi^s : TM \rightarrow TM$ em que a projeção de uma trajetória de ϕ sobre M é uma geodésica da conexão de Weyl. O fluxo geodésico de uma conexão Weyl não preserva nenhum fibrado esférico. De fato, já vimos que o módulo do transporte paralelo $w(s)$ de um vetor $w = w(0)$ pela conexão $\widehat{\nabla}$, satisfaz $\|w(s)\| = \exp(\int_0^s -\gamma(w(t))dt) \|w(0)\|$.

Vamos mostrar que é possível encontrar vizinhanças convexas do fluxo geodésico de uma conexão Weyl.

Proposição 3.2. *O fluxo geodésico de uma conexão Weyl é homogêneo com respeito a estrutura de Weyl.*

Demonstração. Seja $u : I \rightarrow M$ uma geodésica da conexão de Weyl. Considere $\tilde{u}(s) = u(as)$ para um escalar a . A curva \tilde{u} satisfaz:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{u}}{ds}(s) = a w(as) = \tilde{w}(s) \\ \widehat{D}\tilde{w}(s) = a^2 \widehat{D}w(as) = 0 \end{cases}$$

□

Proposição 3.3. *Dado $p \in M$ existem um aberto $V_1 \subset TM$, $p \in V_1$, números $\delta_1 > 0$ e $\epsilon_1 > 0$ tal que se $U = \{(q, w); q \in V_1, w \in T_q M, |w| < \epsilon_1\}$ então*

$$u : (-\delta_1, \delta_1) \times U \rightarrow M$$

é uma aplicação C^∞ e tal que para cada $q \in V_1$ e $v \in T_qM$, com $|w| < \epsilon_1$, a aplicação $s \rightarrow u(s, q, w)$, $s \in (-\delta_1, \delta_1)$, é a única órbita do fluxo geodésico associado a Weyl conexão que no instante $s = 0$ passa por q com velocidade w .

Demonstração. Segue do teorema de existência e unicidade para equações diferenciais. \square

A partir da proposição anterior, podemos associar o fluxo geodésico de uma conexão Weyl de uma variedade compacta a uma constante δ tal que todas órbitas deste fluxo estejam definidas no intervalo $(-\delta, \delta)$ e com este número definir a aplicação C^∞ , $\widehat{exp}_p : TM \rightarrow M$,

$$\widehat{exp}_p(w) = u\left(\frac{\delta}{2}, p, w\right)$$

que chamamos de *aplicação exponencial*.

Proposição 3.4. *A aplicação exponencial \widehat{exp}_p é um difeomorfismo local.*

Demonstração.

$$\begin{aligned} d(\widehat{exp}_p)(0) &= \left. \frac{d}{dt} u\left(\frac{\delta}{2}, p, sw\right) \right|_{s=0} \\ &= \left. \frac{d}{ds} u\left(s\frac{\delta}{2}, p, w\right) \right|_{s=0} \\ &= w \end{aligned}$$

\square

Chamamos de *vizinhança normal de p* a imagem de uma bola $B_\epsilon(0) \subset T_pM$ pela aplicação exponencial \widehat{exp}_p .

Teorema 3.3. *Para cada $p \in M$ existe uma vizinhança V_2 de p e um número $\epsilon_2 > 0$, tais que, para cada $q \in V_2$, \widehat{exp}_p é um difeomorfismo em $B_{\epsilon_2}(0)$ e $\widehat{exp}_p(B_{\epsilon_2}(0)) \supset V_2$, isto é, V_2 é vizinhança normal de cada um de seus pontos.*

Demonstração. Sejam V_1 e ϵ_1 dados pela proposição 3.3. Defina $U = \{(q, w) \in TM; q \in V_1, w \in T_qM, |w| < \epsilon_1\}$ e $F : U \rightarrow M \times M$ por $F(q, w) = (q, \widehat{exp}_q(w))$ e observe que $dF_{(p,0)} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ I & I \end{pmatrix}$. \square

Deste último teorema podemos concluir que dados dois pontos q_1 e $q_2 \in V_2$ existe uma única órbita do fluxo geodésico associado a conexão de Weyl u ligando q_1 a q_2 .

Se a variedade M é compacta, existe uma constante r_{inj} , chamada *raio de injetividade* tal que dado $p \in M$ a aplicação exponencial é um difeomorfismo entre uma bola $B(0, r_{inj}) \in T_pM$ e sua imagem por \widehat{exp}_p em M .

3.2 Fluxo de Weyl

Definição 3.4. *Seja $g \in G$. Chamamos de fluxo de Weyl o fluxo $\phi^t : SM \rightarrow SM$ obtido pela reparametrização por comprimento de arco (em relação a g) do fluxo geodésico da conexão de Weyl.*

De fato, a definição acima não depende da métrica, depende somente de G :

Proposição 3.5. *Duas métricas na mesma classe de equivalência produzem o mesmo fluxo de Weyl.*

Demonstração. Segue da unicidade da conexão de Weyl e da homogeneidade do fluxo geodésico com respeito a estrutura de Weyl. \square

Seja u uma geodésica de $\widehat{\nabla}$ e $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a reparametrização de u por comprimento de arco, tal que

$$\eta(t) = u(\psi(t)) \quad \text{e} \quad u(s) = \eta(\psi^{-1}(s)).$$

Suponha que $\frac{du}{ds} = w$ e $\frac{d\eta}{dt} = v$ então

$$\begin{aligned} w &= v \frac{dt}{ds} = v \|w\| \\ \frac{d\|w\|}{ds} &= -\gamma(w) \|w\| \\ \frac{d\|w\|}{dt} &= -\gamma(w) \frac{\|w\|}{\|w\|} = -\gamma(w) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 0 &= \widehat{\nabla}_w w \\ &= \nabla_w w + 2\gamma(w)w - \|w\|^2 E \\ &= \nabla_v \frac{dt}{ds} v \frac{dt}{ds} + 2\gamma\left(\frac{dt}{ds} v\right) \frac{dt}{ds} v - \left\| \frac{dt}{ds} v \right\|^2 E \\ &= \frac{dt}{ds} v \left(\frac{dt}{ds}\right) v + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \nabla_v v + 2\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \gamma(v)v - \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \|v\|^2 E \\ &= -\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \gamma(v)v + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \nabla_v v + 2\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \gamma(v)v - \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \|v\|^2 E \end{aligned}$$

Portanto, em termos da conexão Riemanniana, a equação do fluxo de Weyl se escreve

$$\begin{cases} \dot{x} &= v \\ \nabla_v v &= E - \gamma(v)v \end{cases}$$

Considere a aplicação $I(x, v) = (x, -v)$. Chamamos um fluxo ϕ que satisfaz a identidade

$$\phi^t \circ I = I \circ \phi^{-t}$$

de *reversível*. Portanto, na variedade base M , seguir o fluxo negativo para uma condição inicial (x, v) é igual ao fluxo positivo com condição inicial $(x, -v)$.

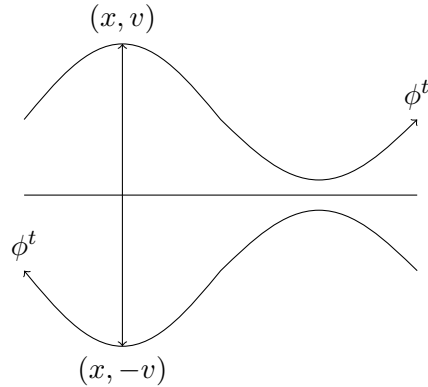


Figura 3.1: Diagrama representando a homogeneidade do fluxo de Weyl.

Proposição 3.6. *O fluxo de Weyl é reversível.*

Demonstração. Uma órbita $\eta : I \rightarrow TM$ do fluxo de Weyl $\eta(t) = (x(t), v(t))$ com condição inicial $\eta(0) = (x, v)$ satisfaz

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= v(t) \\ \dot{v}(t) &= E(x(t)) - \alpha(x(t), v(t))v(t).\end{aligned}$$

em que $\alpha(x(t), v(t)) = g_{x(t)}(v(t), v(t))$.

Considere a curva $\eta^*(t) = I \circ \phi^{-t}(x, v) = (x(-t), -v(-t))$. Afirmamos que η^* é uma solução do fluxo de Weyl com condições iniciais $(x, -v)$. De fato,

$$\begin{aligned}\dot{x}^*(t) &= -\dot{x}(-t) \\ &= -v(-t) \\ &= v^*(t) \\ \\ \dot{v}^*(t) &= \dot{v}(-t) \\ &= E(x(-t)) - \alpha(x(-t), v(-t))v(-t) \\ &= E(x(-t)) - \alpha(x(-t), -v(-t))(-v(-t)) \\ &= E(x^*(t)) - \alpha(x^*(t), v^*(t))v^*(t)\end{aligned}$$

Portanto $\phi^t \circ I = I \circ \phi^{-t}$. □

Definição 3.5. *Analogamente ao que foi feito para o fluxo geodésico da conexão Weyl, sobre o fluxo de Weyl de uma variedade compacta podemos definir a aplicação C^∞ , $exp_p : TM \rightarrow M$,*

$$exp_p(w) = u\left(\psi\left(\frac{\delta}{2}\right), p, w\right)$$

em que ψ é a reparametrização da geodésica u por comprimento de arco. chamamos esta aplicação de aplicação exponencial.

Proposição 3.7. *A aplicação exponencial exp_p é um difeomorfismo local.*

Demonstração.

$$\begin{aligned}d(exp_p)(0) &= \frac{d}{dt}u\left(\psi\left(\frac{\delta}{2}\right), p, sw\right)\Big|_{s=0} \\ &= \frac{d}{ds}u\left(s\psi\left(\frac{\delta}{2}\right), p, w\right)\Big|_{s=0} \\ &= w\end{aligned}$$

□

Chamamos de *vizinhança normal de p* a imagem de uma bola $B_\epsilon(0) \subset T_pM$ pela aplicação exponencial exp_p .

Teorema 3.4. *Para cada $p \in M$ existe uma vizinhança V_2 de p e um número $\epsilon_2 > 0$, tais que, para cada $q \in V_2$, exp_p é um difeomorfismo em $B_{\epsilon_2}(0)$ e $exp_q(B_{\epsilon_2}(0)) \supset V_2$, isto é, V_2 é vizinhança normal de cada um de seus pontos.*

Demonstração. Sejam V_1 e ϵ_1 dados pela proposição 3.3. Defina $U = \{(q, w) \in TM; q \in V_1, w \in T_qM, |w| < \epsilon_1\}$ e $F : U \rightarrow M \times M$ por $F(q, w) = (q, \exp_q(w))$ e observe que $dF_{(p,0)} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ I & I \end{pmatrix}$. \square

Deste último teorema podemos concluir que dados dois pontos q_1 e $q_2 \in V_2$ existe uma única órbita do fluxo de Weyl η ligando q_1 a q_2 .

Se a variedade M é compacta, existe uma constante r_{inj} , chamada *raio de injetividade* tal que dado $p \in M$ a aplicação exponencial é um difeomorfismo entre uma bola $B(0, r_{inj}) \in T_pM$ e sua imagem por \exp_p em M .

3.3 Propriedades dinâmicas do fluxo de Weyl

Para um fluxo geodésico, curvatura negativa implica hiperbolicidade. O mesmo não é verdadeiro para o fluxo de Weyl, porém ainda podemos recuperar algo: em dimensão dois curvatura negativa ainda implica hiperbolicidade ([20]) e em dimensões maiores provaremos que curvatura *menor que zero* implica decomposição dominada.

Seja M uma variedade de dimensão $n + 1$, $\phi : M \rightarrow M$ um fluxo sobre M e $T^t : \hat{T}_xM \rightarrow \hat{T}_{\phi^t(x)}M$ o cociclo derivada transversal associado a ϕ (ver definição na seção [1.8]).

Definição 3.6. Dizemos que ϕ tem decomposição dominada (transversal) se $\hat{T}M$ pode ser decomposto

$$\hat{T}M = E \oplus F$$

e existem $C > 0$ e $0 < \lambda < 1$

$$\|T^t|_{E(x)}\| \|T^{-t}|_{F(\phi^t(x))}\| < C\lambda^t \quad \forall x \in M$$

Se ϕ é um fluxo de Weyl com decomposição dominada (transversal), então $\hat{T}SM$ se decompõe em dois subfibrados invariantes

$$\hat{T}_\theta SM = \mathcal{E}^+(\theta) \oplus \mathcal{E}^-(\theta)$$

O subespaço \mathcal{E}^+ é definido por (\mathcal{E}^- é definido analogamente)

$$\mathcal{E}^+(\theta) = \bigcap_t A^t C_+(\phi^{-t}(\theta)).$$

Podemos representar os subespaços invariantes $\mathcal{E}^+(\theta)$ e $\mathcal{E}^-(\theta)$ como gráficos de operadores definidos no subespaço ortogonal a v , ou seja:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^+(\theta) &= \{(\xi_h, \xi_v) \in \hat{T}_\theta SM \mid \xi_v = U(\theta)\xi_h\} \\ \mathcal{E}^-(\theta) &= \{(\xi_h, \xi_v) \in \hat{T}_\theta SM \mid \xi_v = V(\theta)\xi_h\} \end{aligned}$$

A reversibilidade do fluxo ϕ implica que se $\theta = (x, v)$ então $U(x, v) = -V(x, -v)$. De fato, temos que se \mathcal{E} é invariante então $I(\mathcal{E})$ também é e, além disso, os dois únicos subespaços invariantes são \mathcal{E}^+ e \mathcal{E}^- . A reversibilidade implica que a dinâmica relevante encontra-se no quociente de \hat{S}_xM dado pela relação de equivalência: dados $u, v \in \hat{S}_xM$ então $u \sim v$ se e somente se $u = \pm v$. Logo para cada repulsor temos um atrator correspondente e vice-versa. De fato, se Λ_u é um repulsor e U é sua bacia, ou seja $\cap_{t>0} \phi_{-t}(U) = \Lambda_u$, então

$$\Lambda_s = I(\Lambda) = \cap_{t>0} I\phi_{-t}(U) = \cap_{t>0} \phi^t I(U)$$

e Λ_s é um atrator com bacia $I(U)$.

Definição 3.7. Uma função de Lyapunov é uma aplicação $\mathcal{L} : \hat{T}M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{L}_x : \hat{T}_xM \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in M$, é uma forma quadrática com índices de inércia positivo p e negativo q e $p + q = n$.

Definimos $C_{\pm} = \{v \in \hat{T}_xN \mid \pm \mathcal{L}(v) > 0\} \cup \{0\}$ os cones positivo e negativo que tem como fronteira o conjunto $C_0 = \{v \in \hat{T}_xN \mid \mathcal{L}(v) = 0\}$.

Proposição 3.8. Seja \mathcal{L} uma função de Lyapunov. Se um fluxo ϕ é estritamente \mathcal{L} -separado, ou seja,

$$\phi^t(C_0 \cup C_+) \subset C_+ \quad t \geq 0$$

então ele tem decomposição dominada.

Teorema A. Se a curvatura seccional da estrutura de Weyl é menor ou igual a zero em todo ponto de M então o fluxo de Weyl tem decomposição dominada (transversal).

Demonstração. Consideramos a função de Lyapunov $\mathcal{L} : \hat{T}SM \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\mathcal{L}(\xi) = \langle \xi_h, \xi_v \rangle$$

em que ξ_h e ξ_v são a componente horizontal e vertical de ξ , respectivamente.

Considere uma família de geodésicas da conexão de Weyl $f(s, u) = \pi \circ \phi^t(z(u))$ parametrizadas pelo parâmetro u e o campo de Jacobi J associado a essa família

$$\begin{aligned} w(s) &= \frac{\partial}{\partial s} f(s, u) \\ J(s) &= \frac{\partial}{\partial u} f(s, u) \\ \dot{J}(s) &= \widehat{\nabla}_{w(s)} J(s) \\ \ddot{J}(s) &= -\widehat{R}(w, J)w \end{aligned}$$

Considere agora a família de órbitas do fluxo de Weyl $\tilde{f}(t, u) = f(\psi(t, u), u)$ em que $\psi(t, u)$ é a reparametrização por comprimento de arco da geodésica $\phi_t(z(u))$. O campo de Jacobi $\tilde{J} = \frac{\partial}{\partial u} \tilde{f}$ satisfaz

$$\begin{aligned} \tilde{J} &= \frac{\partial \psi}{\partial u} w + J \\ \dot{\tilde{J}} &= v \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \right) w + \frac{1}{\|w\|} \dot{J} \\ \ddot{\tilde{J}} &= v \left(v \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \right) \right) w + \frac{1}{\|w\|} \gamma(v) \dot{J} + \frac{1}{\|w\|^2} \ddot{J} \\ &= v \left(v \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \right) \right) w + \frac{1}{\|w\|} \gamma(v) \dot{J} - \frac{1}{\|w\|^2} \widehat{R}(w, J)w \end{aligned}$$

O espaço $\widehat{T}_{\theta}SM$ é caracterizado pelos vetores $\xi \in T_xM$ tais que $\langle \xi, v \rangle = 0$ em que $\theta = (x, v)$ e estamos utilizando a identificação j_{θ} . Portanto em $\widehat{T}_{\theta}SM$, temos

$$\begin{aligned} \tilde{J} &= J \\ \dot{\tilde{J}} &= \frac{1}{\|w\|} \dot{J} \\ \ddot{\tilde{J}} &= \frac{\gamma(v)}{\|w\|} \dot{J} - \frac{1}{\|w\|^2} \widehat{R}_a(w, J)w \end{aligned}$$

em que \widehat{R}_a é a componente antissimétrica da curvatura de Weyl \widehat{R} .

Além disso, $\xi \in \widehat{TSM}$ então $\xi = (\xi_h, \xi_v)$ e $\xi_h = \dot{J}(t)$ e $\xi_v = \ddot{J}(t)$ e a derivada da função de Lyapunov sobre $\xi \in \widehat{TSM}$ satisfaz

$$\frac{d}{dt} \mathcal{J}(\xi_h, \xi_v) = \frac{d}{dt} \langle \xi_h, \xi_v \rangle = \|\xi_v\|^2 + \gamma(v) \langle \xi_h, \xi_v \rangle - \langle \widehat{R}_a(v, \xi_h)v, \xi_h \rangle$$

Uma vez que a aplicação \mathcal{J} é contínua e crescente sobre C_0 concluímos que cones positivos são enviados no interior de cones positivos pela aplicação A^t . Esta é a caracterização de decomposição dominada. \square

Teorema B. *Seja $\Lambda \subset SM$ um subconjunto invariante do fluxo de Weyl com curvatura seccional Λ menor ou igual a zero e para $\theta = (x, v) \in \Lambda$ tem-se $\gamma(v) > 0$. Então Λ tem decomposição dominada transversal.*

Demonstração. De fato, considerante a demonstração anterior, seja $\xi \in \widehat{TSM}$

$$\frac{d}{dt} \mathcal{J}(\xi_h, \xi_v) = \frac{d}{dt} \langle \xi_h, \xi_v \rangle = \|\xi_v\|^2 + \gamma(v) \langle \xi_h, \xi_v \rangle - \langle \widehat{R}_a(v, \xi_h)v, \xi_h \rangle$$

Se $\gamma(v) > 0$ então cones positivos continuam sendo levados no interior de cones positivos. \square

Teorema 3.5. [20] *Se a curvatura seccional da estrutura Weyl é negativa em toda variedade M então temos crescimento exponencial (uniforme) de volume em \mathcal{E}^+ e contração exponencial (uniforme) de volume em \mathcal{E}^- .*

Demonstração. Podemos representar \mathcal{E}^+ como o gráfico de um operador $U : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$

$$\mathcal{E}^+ = \{(\xi_h, \xi_v) \mid \xi_v = U\xi_h\}.$$

$$\begin{aligned} (\xi_h, \xi_v) &= (\xi_h, U\xi_h) \\ \left(\frac{d\xi_h}{dt}, \frac{d\xi_v}{dt}\right) &= \left(\frac{d\xi_h}{dt}, \frac{d}{dt}(U\xi_h)\right) \\ \left(\frac{d\xi_h}{dt}, \gamma(v)\xi_v - \widehat{R}_a(v, \xi_h)v\right) &= \left(\frac{d\xi_h}{dt}, \frac{dU}{dt}\xi_h + U\xi_v\right) \end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{dU}{dt}\xi_h = -U^2\xi_h + \gamma(v)U\xi_h - \widehat{R}_a(v, \xi_h)v$$

Escrevendo $\widehat{R}_a(v, \xi_h)v = \widehat{R}_a\xi_h$, temos que o operador U satisfaz a equação de Riccati

$$\frac{dU}{dt}\xi_h = (-U^2 + \gamma(v)U - \widehat{R}_a)\xi_h$$

Escrevemos o operador U como $U = U_a + U_s$ em que U_a e U_s são as componentes simétrica e antissimétrica de U , respectivamente. O traço da aplicação é maior que zero, portanto temos crescimento uniforme de volume. Finalmente, o decrescimento exponencial do volume em \mathcal{E}^- segue da reversibilidade do fluxo de Weyl. \square

Corolário 3.1. [20] *Se M tem dimensão 2 e a curvatura de Weyl é negativa em M então o fluxo Weyl é hiperbólico.*

Demonstração. Decomposição dominada, crescimento e decrescimento exponencial de volume em dimensão 2 implicam em hiperbolicidade. \square

Terminamos o capítulo com uma construção de um exemplo de fluxo de Weyl Anosov. Considere (M, g) o plano hiperbólico e ϕ o fluxo geodésico em M . O plano hiperbólico tem curvatura negativa então fluxo é Anosov e, visto como um fluxo de Weyl, associamos a métrica g a 1-forma $\gamma = 0$. Por estabilidade estrutural, se perturbarmos γ de modo que esta 1-forma deixe de ser trivial, γ pequeno ainda temos um fluxo de Weyl Anosov.

Este capítulo introduz as ferramentas básicas que serão utilizadas posteriormente na segunda parte do trabalho. Faremos a abordagem dos termostatos gaussianos como fluxo conformalmente simplético. Introduziremos as coordenadas de Fermi que permitem descrever o cociclo derivada transversal através da equação de Jacobi.

Se assumirmos que a 1-forma γ definida pelo campo vetorial E por $\gamma(\cdot) = g(E, \cdot)$ é fechada então o termostato gaussiano é o que chamamos de fluxo conformalmente simplético e, com essa perspectiva, temos a simetria do espectro de Lyapunov.

4.1 Estrutura conformalmente Hamiltoniana

Seja (M, g) variedade Riemanniana, TM o seu fibrado tangente. Para obtermos uma definição independente de coordenadas, obtemos 2-forma simplética em TM a partir da 1-forma canônica em T^*M : Seja $\theta^* \in T^*M$, $\xi \in T_{\theta^*}(T^*M)$ e $\pi : T^*M \rightarrow M$ a projeção canônica. Definimos a 1-forma *tautológica* $\kappa^* \in \Lambda(T^*M)$ por $\kappa_{\theta^*}^* : T_{\theta^*}(T^*M) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\kappa_{\theta^*}^* = \theta^*(d\pi(\xi))$. A 2-forma *simplética canônica* ω^* em T^*M é definida como a diferencial de κ^* , $\omega^* = d\kappa^*$.

A seguir, identificamos T^*M e TM através da métrica g . Definimos o isomorfismo $h : TM \rightarrow T^*M$ tal que $h(X) = g(X, \cdot)$. A aplicação bilinear g tem como aplicação dual g^* e, se $[g]_{ij}$ é a matriz que representa g em coordenadas então a aplicação dual g^* é representada por $[g^*]_{ij} = [g]_{ij}^{-1}$.

Em TM , a 2-forma simplética ω , dual a ω^* se escreve $\omega(\xi^1, \xi^2) = \omega^*(Dh(\xi^1), Dh(\xi^2))$.

Nota: As coordenadas (x, \dot{x}) em TM , induzidas pelas coordenadas (x) em M , em geral, não são coordenadas simpléticas para a forma simplética ω .

$$(x^i, \dot{x}^i) \mapsto (x^i, y^i) = (x^i, \sum_k g_{ik}(x) \dot{x}^k)$$

Portanto, $\sum_i dx^i \wedge dy^i$ se torna $\sum_i dx^i \wedge d(\sum_k g_{ik}(x) \dot{x}^k)$ que, em geral, não é igual a $\sum_i dx^i \wedge d\dot{x}^i$.

Proposição 4.1. *A 2-forma canônica simplética ω em TM pode ser descrita por*

$$2\omega(\xi^1, \xi^2) = g(\xi_h^1, \xi_v^2) - g(\xi_v^1, \xi_h^2)$$

Seja (M, g, E) um termostato gaussiano restrito ao nível de energia c . Para definirmos a estrutura conformalmente Hamiltoniana deste termostato gaussiano, precisamos definir:

(i) Uma aplicação de classe C^∞ , $H : TM \rightarrow \mathbb{R}$, chamada Hamiltoniano e definida por

$$H(q, p) = \frac{1}{2} g_{ij} p_i p_j,$$

(ii) A 1-forma tautológica em TM induzida por g

$$\kappa = h^{-1}(\kappa^*),$$

(iii) A 2-forma canônica em TM induzida por g

$$\omega = -d\kappa,$$

(iv) A 1-forma γ definida em TM por

$$\gamma = g(E, \cdot)$$

(v) A 2-forma não degenerada

$$\Omega = \omega - \frac{1}{c} \gamma \wedge \kappa$$

Proposição 4.2. *Restrito a a um nível de energia c , o fluxo conformalmente Hamiltoniano (M, H, Ω) associado a um campo $E \in \mathcal{X}_g(M)$ coincide com o termostato gaussiano (M, g, E) .*

Demonstração. Vamos escrever o fluxo conformalmente Hamiltoniano em T^*M . Escolhemos coordenadas (q, U) de M então:

1. $H(q, p) = \frac{1}{2} g_{ij}^*(q) p_i p_j$,
2. $\kappa^* = p_i dq_i$,
3. $w^* = dq_i \wedge dp_i$,
4. $\gamma^* = E_i dq_i$.

$$\begin{aligned} dH &= \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \\ \frac{\partial H}{\partial q_i} &= \frac{1}{2} \partial_i g_{kl}^* p_k p_l \\ \frac{\partial H}{\partial p_i} &= g_{il}^* p_l \end{aligned}$$

$$i_F \Omega = \det \begin{pmatrix} dq_i(F) & dp_i(F) \\ dq_i & dp_i \end{pmatrix} - \frac{1}{c} \det \begin{pmatrix} \gamma(v) & \kappa(v) \\ E_i dq_i & p_i dq_i \end{pmatrix}$$

Fazendo $dH = i_F \Omega$ encontramos as equações do termostato gaussiano (M, g, E) restrito ao nível de energia c

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= g_{ij}^* p_j \\ \dot{p}_i &= -\frac{1}{2} \partial_i g_{kl}^* p_k p_l - \frac{1}{c} (\gamma^*(v) p_i - \kappa^*(v) E_i)\end{aligned}$$

Considerando $v_i = \dot{q}_i$ e $c = H(q, p)$, temos

$$\begin{aligned}\dot{v}_i &= \partial_k g_{ij}^* v_k p_j + g_{ij}^* \dot{p}_j \\ &= \partial_k g_{ij}^* v_k p_j + g_{ij}^* \left(-\frac{1}{2} \partial_j g_{kl}^* p_k p_l - \frac{1}{c} (\gamma^*(v) p_j - \kappa^*(v) E_j) \right) \\ &= \left(\partial_k g_{ij}^* v_k p_j - g_{ij}^* \frac{1}{2} \partial_j g_{kl}^* p_k p_l \right) - \frac{g_{ij}^*}{c} (\gamma^*(v) p_j - \kappa^*(v) E_j) \\ &= \Gamma_{kl}^i v_k v_l - \frac{g_{ij}^*}{c} (\gamma^*(v) p_j + c E_j) \\ &= \Gamma_{kl}^i v_k v_l - \frac{1}{c} \gamma^*(v) v_i + g_{ij}^* E_j\end{aligned}$$

□

Se assumirmos que γ é uma forma fechada e assim a 2-forma Ω é conformalmente simplética. De fato,

$$\begin{aligned}d\Omega &= d\omega + \frac{1}{c} d\gamma \wedge \kappa - \frac{1}{c} \gamma \wedge d\kappa \\ &= -\frac{1}{c} \gamma \wedge \omega \\ &= -\frac{1}{c} \gamma \wedge (\Omega - \frac{1}{c} \gamma \wedge \kappa) \\ &= -\frac{1}{c} \gamma \wedge \Omega\end{aligned}$$

Definição 4.1. Definimos o conjunto $\mathcal{X}_g(M) \subset \mathcal{X}^\infty(M)$ como o conjunto dos campos vetoriais E que definem a 1-forma $\gamma(\cdot) = g(E, \cdot)$ fechada.

Definição 4.2. Uma órbita fechada η é dita prima se não é a iterada de uma órbita fechada de período menor.

A estrutura conformalmente simplética nos permite demonstrar os seguintes resultados:

Proposição 4.3. Fixe $\varepsilon > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Sejam $E \in \mathcal{X}_g(M)$ e o termostato gaussiano (M, g, E) com estrutura conformalmente Hamiltoniana (M, H, Ω) em que $\gamma = \langle E, \cdot \rangle$ e $\Omega = \omega + \gamma \wedge \kappa$. Suponha que o termostato gaussiano possua uma órbita fechada η com autovalores da aplicação linear de Poincaré em $p \in \eta$ satisfazem

$$\lambda_i \lambda_{i+n} = e^\beta.$$

Então é possível realizar uma cirurgia de forma a obter um termostato gaussiano (M, g, \tilde{E}) tal que $\|\tilde{E} - E\|_{C^0} < \frac{\alpha}{\text{período}(\eta)} + \varepsilon$, o termostato gaussiano (M, g, \tilde{E}) tem η como órbita e, além disso, os autovalores da aplicação de Poincaré em $p \in \eta$ satisfazem

$$\lambda_i \lambda_{i+n} = e^{\beta+\alpha}.$$

Demonstração. Considere μ dirac suportada em η . Pelo teorema [1.1],

$$\beta = \int_{M^c} \gamma(F(x)) d\mu(x)$$

em que $\beta = \lambda_1 \lambda_{n+1} = \lambda_2 \lambda_{n+2} = \dots = \lambda_n \lambda_{2n}$.

Escreva $E = E_0 \oplus E_1$ onde E_0 é a componente de E paralela a $\dot{\eta}$ e E_1 a componente ortogonal a $\dot{\eta}$. Seja

- $W \subset M$ uma vizinhança tubular de $c = \pi \circ \eta$
- $\tau > 0$ tal que $m\tau = \text{período}(\eta)$ com $m \in \mathbb{N}$ e $\tau < r_{inj}$ onde r_{inj} é o raio de injetividade de M . Considere, para $0 \leq k < m$, $\eta_k(t) = \eta((t+k)\tau)$ com $t \in [0, 1]$. Chamaremos c_k a projeção de η_k em M , $c_k = \pi \circ \eta_k$.

Pode acontecer que exista interseção transversal entre os segmentos c_k . Suponha que para c_0 o conjunto pontos de interseção de c_k com c_0 seja $\mathcal{F}_0 = \{p_1, \dots, p_l\}$. Observe que $l < m$.

Tome ε_1 tal que $\varepsilon = \frac{\alpha}{m} \left(\frac{l+1}{\tau - (l+1)\varepsilon_1} \right)$ e considere $I_0 = (0, \varepsilon_1)$ e $I_n = (\tau - \varepsilon_1, \tau)$. Para cada $p_i \in \mathcal{F}_0$ tal que $c(t_i) = p_i$ considere $I_i = (t_i - \varepsilon_1, t_i + \varepsilon_1)$. Considere $V \subset M$ uma vizinhança de c_0 e tome $h : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função do tipo salto definida por

- $h|_{\eta} = 1$ em $[0, \tau] \setminus I_0 \cup I_n \cup_{i=1}^l I_i$.
- $h|_{\eta} = \frac{t-p_i}{\varepsilon_1}$ em $I_0 \cup_{i=1}^l [p_i, p_i + \varepsilon)$.
- $h|_{\eta} = 1 - \frac{t-p_i}{\varepsilon_1}$ em $I_n \cup_{i=1}^l [p_i - \varepsilon_1, p_i)$.

Definimos $\tilde{E} = \frac{\alpha}{m} \left(\frac{l+1}{\tau - (l+1)\varepsilon_1} \right) h \frac{E_0}{\|E_0\|} + E$ e repetimos este procedimento para c_k , $k = 1, \dots, m$. Considere o fluxo conformalmente Hamiltoniano definido por $(M, H, \tilde{\omega})$ em que $\tilde{\gamma} = \langle \tilde{E}, \cdot \rangle$ e $\tilde{\Omega} = \omega + \tilde{\gamma} \wedge \kappa$.

Dessa forma, η é órbita periódica de associada ao fluxo $\tilde{\phi}$ e, além disso,

$$\begin{aligned} \tilde{b} &= \int_{M^c} \tilde{\gamma}(F(x)) d\mu(x) \\ &= \int_{M^c} \langle \tilde{E}(\pi(x)), F(x) \rangle d\mu(x) \\ &= \sum_{k=1}^m \int_0^\tau \langle \tilde{E}(\pi(\eta(t))), F(\pi(\eta(t))) \rangle dt \\ &= \beta + \alpha \end{aligned}$$

□

Proposição 4.4. *Fixe $\varepsilon > 0$. Sejam $E \in \mathcal{X}_g(M)$ e o termostato gaussiano (M, g, E) com estrutura conformalmente Hamiltoniana (M, H, Ω) em que $\gamma = \langle E, \cdot \rangle$ e $\Omega = \omega + \gamma \wedge \kappa$. Suponha que o termostato gaussiano possua uma órbita fechada prima η com autovalores da aplicação linear de Poincaré em $p \in \eta$ satisfazem*

$$\lambda_i \lambda_{i+n} = e^\beta.$$

Então é possível realizar uma cirurgia de forma a obter um termostato gaussiano (M, g, \tilde{E}) tal que $\|\tilde{E} - E\|_{C^\infty} < \varepsilon$, o termostato gaussiano (M, g, \tilde{E}) tem η como órbita e, além disso, os autovalores da aplicação de Poincaré em $p \in \eta$ satisfazem

$$\lambda_i \lambda_{i+n} > e^\beta.$$

Demonstração. Basta considerar na demonstração anterior h de classe C^∞ tal que $h(p_1) = 0$, $h(x) \neq 0$ para $x \in [0, \tau] \setminus \{p_i\}_{i=1, \dots, l}$ e $\|h\|_{C^\infty} < \epsilon$. \square

Introduziremos agora algumas das ferramentas úteis para a segunda etapa do trabalho.

4.2 Coordenadas de Fermi

Sejam (M, g) variedade Riemanniana de dimensão $n + 1$ e $E \in \mathcal{X}^r(M)$, denotamos

- (i) $\pi : SM \rightarrow M$ o fibrado unitário
- (ii) $\phi^t : SM \rightarrow SM$ o fluxo do termostado gaussiano (M, g, E)
- (iii) $\exp_\theta(v)$ a *aplicação exponencial* aplicada a $v \in T_\theta SM$ no ponto $\theta \in SM$.

Seja $\eta : [0, \tau] \rightarrow SM$ um segmento de órbita do termostato gaussiano e considere $c(t) = \pi \circ \eta(t)$. Assumimos que $\tau < r_{inj}$, onde r_{inj} é o raio de injetividade de (M, g) . Tome $\{e_0 = c'(0), e_1, \dots, e_{n-1}\}$ uma base de $T_{c(0)}M$ e considere $e_i(t)$, $i = 1, \dots, n - 1$, o transporte paralelo de e_i ao longo de c com respeito a conexão Riemanniana ∇ .

Considere $\psi : [0, \tau] \times \mathbb{R}^n \rightarrow M$ dada por

$$\psi(t, x) = \exp_{c(t)} \sum_{i=1}^{n-1} x_i e_i(t)$$

Esta aplicação é um difeomorfismo numa vizinhança $V \subset [0, \tau] \times \{0, \dots, 0\}$ portanto define um sistema de coordenadas locais na vizinhança de η . Além disso,

$$c(t) = \exp_{c(t)} 0 = \psi(t, 0, \dots, 0)$$

e considerando a parametrização canônica $\tilde{\psi}$ de TM , temos

$$\eta(t) = (c(t), \dot{c}(t)) = \tilde{\psi}(t, 1, 0, \dots, 0).$$

Nessas coordenadas, valem

1. Coeficientes da métrica

$$g_{ij}(t, 0) = g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

2. Símbolos de Christoffel

A imagem por $\psi(t, x)$ da curva $c(s) = (t, a_1 s, a_2 s, \dots, a_n s)$ é uma geodésica e em coordenadas temos

$$\sum_{ij} \Gamma_{ij}^k(t, 0, \dots, 0) a_i a_j = 0$$

para $k = 0, \dots, n$ e quaisquer a_1, \dots, a_n . Portanto

$$\Gamma_{ij}^k = 0 \quad i, j \in \{1, \dots, n\} \quad k \in \{0, 1, \dots, n\}$$

A reta $c(s) = (s, 0, \dots, 0)$ é uma órbita do termostato gaussiano que em coordenadas se escreve

$$2\Gamma_{00}^0(t, 0, \dots, 0) = 0$$

Além disso,

$$\nabla_{e_0} e_0 = \sum \Gamma_{00}^k e_k = (0, E_1, E_2, \dots, E_n)$$

e se $i \neq 0$

$$\nabla_{e_0} e_i = \sum \Gamma_{0i}^k e_k = 0$$

3. Os termos da forma $\partial_i g_{j0}$ satisfazem

$$\text{Se } i = 0 \text{ então } e_0 g(e_j, e_0) = g(\nabla_{e_0} e_j, e_0) + g(e_j, \nabla_{e_0} e_0) = \begin{cases} 0 & \text{se } j = 0 \\ E_j & \text{se } j \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Se } i \neq 0 \text{ então } e_i g(e_j, e_0) = g(\nabla_{e_i} e_j, e_0) + g(e_j, \nabla_{e_i} e_0) = 0$$

4.3 Equação de Jacobi

Usando a identidade $\frac{d}{dt}(d\phi_t) = (dX \circ \phi_t)d\phi_t$ com $X = \frac{d}{dt}\phi_t$, obtemos a equação diferencial para a linearização do fluxo conformalmente Hamiltoniano sobre a órbita $\eta(t)$, que chamamos de *equação de Jacobi* em TM .

Teorema 4.1. *Seja η uma órbita do termostato gaussiano. Então η satisfaz a equação de Jacobi que em coordenadas de Fermi se escreve*

$$\frac{d}{dt}X \Big|_{(t,x=0)} = \left\{ \begin{bmatrix} A & I \\ K & -A^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (E - \alpha v)_x & (-\alpha v)_v \end{bmatrix} \right\} X$$

em que

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & -K_{ij} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & \dots & E_n \\ 0 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}d\phi^t &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d\phi^{t+s} - d\phi^t}{s} \\ &= \left(\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d\phi^s - d\phi^0}{s} \right) d\phi^t \\ &= \frac{d}{dt}d\phi^t \Big|_{t=0} \circ d\phi^t \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}X \Big|_{(t,x=0)} = \left\{ \begin{bmatrix} H_{vx} & H_{vv} \\ -H_{xx} & -H_{xv} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (E - \alpha v)_x & (E - \alpha v)_v \end{bmatrix} \right\} X$$

Ao longo de η , temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial v_i} &= \frac{1}{2}g_{ii}v_i + \sum_{k \neq i} g_{ik}v_k \\ \frac{\partial H}{\partial x_i} &= \frac{1}{2} \sum_{k,l} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x_i} v_k v_l \\ \frac{\partial^2 H}{\partial v_j \partial v_i} &= g_{ij} = \delta_{ij} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x_j \partial x_i} &= \frac{1}{2} \sum_{kl} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x_j \partial x_i} v_k v_l = \frac{1}{2} \partial_{ij} g_{00} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial v_j \partial x_i} &= \sum_l \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} v_l = \partial_i g_{j0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{c} \sum_{kl} \delta_{kl} E_k v_l = \frac{1}{c} \sum_k E_k v_k = \frac{1}{c} E_0 \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x_j} &= \frac{1}{c} \sum_k v_k \frac{\partial E_k}{\partial x_j} = \frac{1}{c} \frac{\partial E_0}{\partial x_j} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial v_j} &= \frac{1}{c} E_j\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial(E - \alpha v)}{\partial x_j} \right)_i &= \frac{\partial E_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \alpha}{\partial x_j} v_i = \frac{\partial E_i}{\partial x_j} - \left(\frac{1}{c} \frac{\partial E_0}{\partial x_j} \right) \delta_{0i} \\ \left(-\frac{\partial(\alpha v)}{\partial v_j} \right)_i &= -\frac{\partial \alpha}{\partial v_j} v_i - \alpha \frac{\partial v_i}{\partial v_j} = -\frac{1}{c} (E_j \delta_{0i} + E_0 \delta_{ij})\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} g_{00} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \dot{\eta}, \dot{\eta} \rangle = -\langle R\left(\dot{\eta}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \dot{\eta}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle = -K_{ij}$$

Para verificar este último fato, se $i, j \neq 1$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} X_i X_j \langle \dot{\eta}, \dot{\eta} \rangle &= -\langle \nabla_{\dot{\eta}} \nabla_{X_i} X_j, \dot{\eta} \rangle + \langle \nabla_{X_i} \nabla_{X_j} \dot{\eta}, \dot{\eta} \rangle \\ &= -\langle \nabla_{\dot{\eta}} \nabla_{X_i} X_j, \dot{\eta} \rangle + \langle \nabla_{X_i} \nabla_{\dot{\eta}} X_j, \dot{\eta} \rangle \\ &= -\langle R(X_i, \dot{\eta}) X_j, \dot{\eta} \rangle\end{aligned}$$

Nas coordenadas de Fermi adaptadas a η vale que $\nabla_{X_i} X_j = 0$ para $i, j \neq 1$ assim como quando i ou j são iguais a 0 ao longo de η e $\nabla_{e_0} e_0$ é ortogonal a e_0 . Então $\langle R(X_i, \dot{\eta}) X_j, \dot{\eta} \rangle = 0$. \square

Seja $\eta : [0, \tau] \rightarrow M$ um segmento de órbita do termostato gaussiano associado a (g, E) . Considere o cociclo derivada transversal $T_{(g,E)} : \hat{S}_x^g M \rightarrow \hat{S}_{\phi_{(g,E)}(x)}^g M$. Fixe coordenadas de Fermi ao longo de η , assim podemos identificar o conjunto de aplicações $T_{(g,E)}$ com $CS(2n)$.

Teorema 4.2. *Seja η uma órbita do termostato gaussiano. Então o cociclo derivada transversal ao longo de η satisfaz a equação de Jacobi que em coordenadas de Fermi se escreve*

$$\left. \frac{d}{dt} \hat{T} \right|_{(t,x=0)} = \left\{ \left[\begin{array}{cc} 0 & I \\ \hat{K} & 0 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \hat{B} & \hat{C} \end{array} \right] \right\} \hat{T}$$

em que

$$\begin{aligned} \hat{K} &= (-K_{ij})_{ij} \quad i, j \in \{1, \dots, n\} \\ \hat{B} &= \left(\frac{\partial E_i}{\partial x_j} \right)_{ij} \quad i, j \in \{1, \dots, n\} \\ \hat{C} &= -\frac{E_0}{c} I = \sigma I \quad \text{com } I \text{ matriz identidade e } \dim(I) = n \end{aligned}$$

Demonstração. A equação de Jacobi da *aplicação linear de Poincaré* em SM é a equação de Jacobi do termostato gaussiano sem as coordenadas a_0 e b_0 . □

Parte II

Propiedades dos termostatos gaussianos

No capítulo anterior, vimos que o termostato gaussiano (M, g, E) com $E \in \mathcal{X}_g(M)$ define um fluxo conformalmente simplético com simetria do espectro de Lyapunov. Neste capítulo, mostraremos que o conjunto dos campos vetoriais que definem termostatos gaussianos Kupka-Smale é genérico em $\mathcal{X}_g(M)$. Para enunciar o rigorosamente o resultado, precisamos das seguintes definições.

Definição 5.1. *Dizemos que um termostato gaussiano (M, g, E) sobre uma variedade compacta M é Kupka-Smale se satisfaz:*

- (i) *As órbitas fechadas são hiperbólicas,*
- (ii) *As interseções heteroclinicas são transversais.*

Definição 5.2. *Uma propriedade P é genérica em $\mathcal{X}_g(M)$ se existe um subconjunto residual em $\mathcal{X}_g(M)$ que satisfaz P .*

O objetivo deste capítulo é mostrar

Teorema C. *A propriedade Kupka-Smale é genérica em $\mathcal{X}_g(M)$.*

O campo E define a 1-forma $\gamma_E(\cdot) = \langle E, \cdot \rangle$. Se $Per(E)$ é o conjunto das órbitas periódicas de (M, g, E) e $\eta \in Per(E)$ é uma órbita periódica com período L , definimos a aplicação $\beta_E : Per(E) \rightarrow \mathbb{R}$ por $\beta_E(\theta) = \int_0^L \gamma_E(\dot{\eta}(s)) ds$ em que η é a órbita de θ . Podemos também denotar $\beta_E(\theta)$ por $\beta_E(\eta)$. Dividimos o teorema principal em 2 partes, ou melhor, em dois lemas:

Definição 5.3. *O subconjunto $G_1 \subset \mathcal{X}_g(M)$, dos campos vetoriais que definem termostatos gaussianos tal que o cociclo derivada transversal associado a pontos de órbitas periódicas é hiperbólico e se η é uma órbita periódica então $\beta_E(\eta) \neq 0$.*

Lema 5.1. *O subconjunto $G_1 \subset \mathcal{X}_g(M)$ é um conjunto residual em $\mathcal{X}_g(M)$.*

Definição 5.4. *Seja G_2 o subconjunto de G_1 tal que sejam $\eta_i, \eta_j \in Per(E)$ e $W^u(\eta_i) \cap W^s(\eta_j) \neq \emptyset$ então essa interseção é transversal.*

Lema 5.2. *O conjunto G_2 é residual em $\mathcal{X}_g(M)$.*

Neste capítulo, fixado um sistema de coordenadas ao longo de uma órbita η tal que para $\tau > 0$ o segmento $\eta([0, \tau])$ está contida na imagem desse sistema de coordenadas, consideramos a aplicação $\psi : [0, \tau] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ tal que $\int_0^\tau \psi(t, 0) dt = 1$ e ψ tem suporte numa vizinhança de $[0, \tau] \times \{0\}$ contida na imagem do sistema de coordenadas. Além disso, $\pi_{V(\theta)} : T_\theta SM \rightarrow H(\theta)$ é a projeção no espaço vertical e $\pi_{H(\theta)} : T_\theta SM \rightarrow V(\theta)$ é a projeção no espaço horizontal.

5.1 Resultados auxiliares

Usaremos neste capítulo um teorema de transversalidade devido a Abraham. Sejam \mathcal{A} um espaço topológico Baire, M e N variedades que satisfazem o segundo axioma da enumerabilidade e com dimensão finita, $K \subset M$ um subconjunto, $V \subset N$ uma subvariedade e uma aplicação

$$\begin{aligned} F : \mathcal{A} &\longrightarrow C^1(M, N) \\ a &\longmapsto F_a. \end{aligned}$$

Quando

$$\begin{aligned} ev_F : \mathcal{A} \times TM &\longrightarrow TN \\ (a, v) &\longmapsto DF_a v \end{aligned}$$

é continua chamamos F de pseudorepresentação C^1 .

Se F é uma pseudorepresentação C^1 e existe um subconjunto $D \subset \mathcal{A}$ denso tal que para $a \in D$ existe um aberto B_a em um espaço de Banach separável, $\psi_a : B_a \rightarrow \mathcal{A}$ continua e $a' \in B_a$ tal que

- (i) $\psi_a(a') = a$
- (ii) $ev_{F\psi_a} : B_a \times M \rightarrow N$ é C^r transversal a V em $a' \times K$

então dizemos que F é C^r pseudotransversal a V em K .

Teorema 5.1 (Teorema de Transversalidade de Abraham). *Suponha que $F : \mathcal{A} \rightarrow C^1(M, N)$ é C^r pseudotransversal a V em K com*

$$r \geq \max(1, 1 + \dim M - \text{codim} V)$$

Seja $R = \{a \in \mathcal{A} : F(a) \pitchfork_K V\} = \{a \in \mathcal{A} : F(a) \text{ é transversal a } V \text{ em pontos de } K\}$.

Se $K = M$ então R é residual em \mathcal{A} . Se V é uma subvariedade fechada e $K \subset M$ é compacto então R é aberto e denso em \mathcal{A} .

Lema 5.3. *Sejam $T > 0$, η uma órbita periódica hiperbólica de um termostato gaussiano (M, g, E) com $E \in \mathcal{X}_g(M)$ e tal que $\beta_E(\eta) \neq 0$. Então existem vizinhanças $U \subset SM$ de η e $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}_g(M)$ de E tal que*

- (i) *todo $\tilde{E} \in \mathcal{U}$ possui uma órbita periódica $\eta_{\tilde{E}} \subset U$ e toda órbita de (M, g, \tilde{E}) diferente de $\eta_{\tilde{E}}$ que passa por U tem período $> T$*
- (ii) *A órbita $\eta_{\tilde{E}}$ depende continuamente de \tilde{E} .*
- (iii) *$\beta_{\eta_{\tilde{E}}}(\eta_{\tilde{E}}) \neq 0$*

Demonstração. Tome uma seção transversal Σ sobre o ponto $\theta \in \eta$ e considere $P_E : \Sigma \rightarrow \Sigma$ a aplicação de Poincaré associada a E em θ . Seja L o período de η e n um inteiro positivo tal que $nL > 2T$. A aplicação de Poincaré depende continuamente do termostato gaussiano então, para $V \subset \Sigma$ suficientemente pequeno, temos aplicação $(P_{\tilde{E}})^n$ está definida em V para todo $\tilde{E} \in \mathcal{U}$.

O ponto θ é um ponto fixo hiperbólico para P^E então existe para possivelmente \mathcal{U} e V menores, uma aplicação continua $\rho : \mathcal{U} \rightarrow V$ que associa a cada $E \in \mathcal{U}$ o único ponto fixo $\rho(E)$ de $P_{\tilde{E}}$ em V e este ponto é hiperbólico.

Pelo teorema de Hartman-Grobman e pela dependência continua da aplicação de Poincaré, existe uma vizinhança $\tilde{V} \subset V$ de θ e uma vizinhança \mathcal{U} de E tal que para $\tilde{E} \in \mathcal{U}$ então $(P_{\tilde{E}})^k(\theta) \in \tilde{V}$, $k = 1, \dots, n$, e toda órbita fechada de $\tilde{E} \in \mathcal{U}$ diferente de $\eta_{\tilde{E}}$ tem período $> T$.

Além disso, para \tilde{V} possivelmente menor, $\beta_{\eta_{\tilde{E}}}(\eta_{\tilde{E}}) \neq 0$. Tome $U = \cup_{t \in [0, L+\varepsilon]} \phi^t(\tilde{V})$ para ε pequeno o suficiente. \square

Lema 5.4. *Seja $E \in TG(M, g)$ e $K \subset SM$ um subconjunto compacto tal que todas as órbitas fechadas de K tem período $> T$. Então existe uma vizinhança $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}_g(M)$ de E tal que se $\tilde{E} \in \mathcal{U}$ então as órbitas fechadas de \tilde{E} que passam por K tem período $> T$.*

Demonstração. Tome $\theta \in K$. Uma vez que a órbita de θ é regular ou tem período $> T$, existe $\varepsilon > 0$ e uma vizinhança U_θ de θ tal que para $\tilde{\theta} \in U_\theta$ temos $\phi^t(\tilde{\theta}) \notin U_\theta$ para $t \in [\varepsilon, T + \varepsilon]$.

Além disso, o fluxo depende continuamente de E e logo existe uma vizinhança $\mathcal{U}_\theta \subset \mathcal{X}_g(M)$ tal que a mesma propriedade vale para os termostatos gaussianos em \mathcal{U}_θ .

Considere a cobertura de K formada pelos abertos U_θ , $\{U_\theta\}_{\theta \in K}$, tome uma subcobertura finita $\{U_{\theta_i}\}_{i=1, \dots, k}$ e assim a vizinhança $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}_g(M)$ que satisfaz as propriedades do lema é $\mathcal{U} = \bigcap_{i=1}^k U_{\theta_i}$. \square

Os dois próximos resultados dizem respeito a subespaços isotrópicos.

Definição 5.5. *Sejam $\theta \in SM$ e $U \subset T_\theta SM$ um subespaço. Dizemos que U é isotrópico quando $\Omega(u, v) = 0$ para $u, v \in U$.*

Lema 5.5. *Sejam $\theta \in \hat{T}_\theta SM$ e $Q \in S(\theta) = \hat{T}_\theta SM$ um subespaço isotrópico então o conjunto $t \in \mathbb{R}$ tal que $D\phi_t Q \cap V(\phi_t(\theta)) \neq \{0\}$ é discreto.*

Demonstração. Vamos mostrar que se Q é um subespaço isotrópico de $T_\theta SM$ tal que $E \cap V(\theta) \neq \{0\}$ então existe uma vizinhança W de $t = 0$ tal que $D\phi_t Q \cap V(\phi_t(\theta)) = \{0\}$ para todo $t \in W \setminus \{0\}$.

Seja $\pi_{H(\theta)} : \hat{T}_\theta SM \rightarrow H(\theta)$ a projeção ortogonal sobre o fibrado horizontal. Existe uma isometria $J_\theta : \hat{T}_\theta SM \rightarrow \hat{T}_\theta SM$ tal que $J_\theta^2 = -I$, $J_\theta V(\theta) = H(\theta)$, $J_\theta H(\theta) = V(\theta)$. Os subespaço $\pi_H(Q)$ e $J_\theta(Q \cap V(\theta))$ são ortogonais. De fato, seja $x \in \pi_H(Q)$. Podemos escrever $x = y - z$ em que $y \in Q$ e $z \in Q \cap V(\theta)$. Se $Jw \in J_\theta(Q \cap V(\theta))$ então $\Omega(y, w) = 0$ pois Q é isotrópico e, além disso, $(\gamma \wedge \kappa)(y, w) = 0$ pois w é um vetor vertical. Portanto $g(y, Jw) = 0$.

Temos também que $g(z, J_\theta w) = 0$ pois $z, w \in Q \cap V(\theta)$. Logo $g(x, Jw) = 0$.

Seja $\{h_1, \dots, h_k\}$ uma base de $\pi_{H(\theta)}(Q)$. Se t é suficientemente pequeno existe um conjunto de vetores linearmente independentes $\{h_1(t), \dots, h_k(t)\} \subset \pi_{H(\phi^t(\theta))} D\phi^t Q$.

Seja $\{w_1, \dots, w_l\}$ uma base de $Q \cap V(\theta)$. Tome os campos de Jacobi J_1, \dots, J_l com $J(0) = 0$ e $\dot{J}(0) = \pi_{V(\theta)} w_i$, para $i = 1, \dots, l$. Defina, para $t > 0$, os campos $W_i(t) = -\frac{1}{\|J_i(t)\|} J_i(t)$ e assim

$$\lim_{t \rightarrow 0} W_i(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J_i(t)}{\|J_i(t)\|} = -\pi_{V(\theta)} w_i = Jw_i$$

Assim, $\pi_{H(\phi^t(\theta))} D\phi^t w_i = J_i(t) \neq 0$ quando $t > 0$.

Portanto, $\{h_1(t), \dots, h_k(t), w_1(t), \dots, w_l(t)\} \subset \pi_{H(\phi^t(\theta))} (D\phi^t Q)$. Quando t é pequeno este conjunto está próximo de $\{h_1, \dots, h_k, J_\theta w_1, \dots, J_\theta w_l\}$ portanto é um conjunto linearmente independente.

Finalmente, concluímos que para t suficientemente pequeno $\dim(\pi_{H(\phi^t(\theta))} D\phi^t Q) = \dim(Q)$ e assim $D\phi^t Q \cap V(\phi^t(\theta)) = \{0\}$. \square

Corolário 5.1. *Seja $\theta \in SM$ e $Q \in \hat{T}_\theta SM$ um subespaço isotrópico então o conjunto $t \in \mathbb{R}$ tal que $\dim(\pi_H(D\phi^t Q)) \neq \dim(Q)$ é discreto.*

Dizemos assim que subespaços isotrópicos de termostatos gaussianos desviam a vertical. Finalmente, um lema técnico sobre aplicações simétricas.

Lema 5.6. *Sejam U e Q subespaços de \mathbb{R}^n tais que $\dim(U) = \dim(Q)$. Então existe aplicação simétrica $\tilde{B} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que*

$$\pi_Q(U) = Q$$

em que π_Q é a projeção ortogonal sobre Q .

Demonstração. Considere a seguinte decomposição de \mathbb{R}^n :

$$U \cap Q \oplus U \cap Q^\perp \oplus U^\perp \cap Q \oplus U^\perp \cap Q^\perp$$

Suponha $\dim(U \cap Q) = l$ e tome $\{w_1, \dots, w_l\}$ uma base de $\dim(U \cap Q)$. Defina neste subespaço $\tilde{B}(w_i) = w_i$, para $i = 1, \dots, l$, a aplicação identidade.

Suponha que $\dim(U \cap Q^\perp) = k$ então $\dim(U^\perp \cap Q) = k$. Seja $\{u_1, \dots, u_k\}$ base de $\dim(U \cap Q^\perp)$ e $\{v_1, \dots, v_k\}$ base de $U^\perp \cap Q$. Defina $\tilde{B}(u_i) = v_i$, para $i = 1, \dots, k$. No subespaço $U^\perp \cap Q$ defina a aplicação \tilde{B} de forma que ela seja simétrica.

Suponha que $\dim(U^\perp \cap Q^\perp) = m$ e $\{z_1, \dots, z_m\}$ uma base desse subespaço. Defina $\tilde{B}(z_i) = 0$, para $i = 1, \dots, m$. Assim temos a aplicação \tilde{B} completamente definida. \square

5.2 Genericidade de órbitas fechadas hiperbólicas

Nesta seção vamos demonstrar o lema 5.1. Sejam

- η uma órbita periódica de período L do termostato gaussiano (M, g, E) com $E \in \mathcal{X}_g(M)$,
- $\theta \in \eta$ um ponto desta órbita,
- Σ uma seção transversal no ponto $\theta \in \eta$,
- $T : \hat{T}_\theta SM \rightarrow \hat{T}_\theta SM$ o cociclo derivada transversal associado a θ .

Pelo teorema da função implícita, existe $\mathcal{O} \subset \mathcal{X}_g(M)$ vizinhança de E e $U \subset SM$ vizinhança de θ tais que a aplicação de Poincaré

$$P : \mathcal{O} \times \Sigma \cap U \rightarrow \Sigma$$

está bem definida bem como os seus iterados. Sejam ainda

- Para $i = 1, \dots, k$

$$\begin{aligned} \rho_i : \mathcal{O} &\rightarrow C^r(\Sigma \cap U, \Sigma \times \Sigma) \\ E &\mapsto \theta \mapsto (\theta, P_E^i \theta) \end{aligned}$$

- $W = \{(\theta, \theta) : \theta \in \Sigma\}$.
- $V \subset \bar{V} \subset U$ uma vizinhança de θ com \bar{V} compacto.
- $R_0 = \mathcal{O}$, $R_j = \{E \in \mathcal{O} : \rho_i \upharpoonright_{\Sigma \cap \bar{V}} W \text{ para } i = 1, \dots, j\}$,
- $S_0 = \mathcal{O}$, $S_j = \{E \in \mathcal{O} : \text{ todos os pontos fixos de } \rho_i \text{ são hiperbólicos e se } \theta \text{ é um ponto fixo de } \rho_i \text{ então } \beta_E(\theta) \neq 0 \text{ para } i = 1, \dots, j\}$.

No teorema 4.2, vimos que fixando coordenadas de Fermi ao longo de η a aplicação T se escreve $T = e^{\mathbb{A}}$ e \mathbb{A} é da forma

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ S & \lambda I \end{bmatrix}$$

em que

- $S = \int_0^L \hat{K}(t) + \hat{B}(t)dt$ é uma matriz simétrica tal que

$$\begin{aligned}\hat{K}(t) &= (-K_{ij})_{ij}(t) \quad i, j \in \{1, \dots, n\} \\ \hat{B}(t) &= \left(\frac{\partial E_i}{\partial x_j} \right)_{ij}(t) \quad i, j \in \{1, \dots, n\}\end{aligned}$$

- $\lambda = -\int_0^L E_0(t)dt = -\int_0^L \gamma_E(v(t))dt = -\int_0^L \langle E, v \rangle(t)dt$ (no nível de energia $c = 1$)
- I é a matriz identidade.

Lema 5.7. Se $\rho_i(\theta) \in W$, $\rho_j(\theta) \notin W$, $j < i$ e $E \in \mathcal{X}_g(M)$ então existe uma ε -perturbação $\tilde{E} \in \mathcal{X}_g(M)$ de E tal que θ seja uma órbita periódica hiperbólica e $\beta(\theta) \neq 0$.

Demonstração. Vamos realizar uma ε -perturbação \tilde{E}^1 do termostato gaussiano E para que \tilde{E}^1 tenha η como órbita periódica e os autovalores de T tenham módulo diferente de 1.

Em coordenadas de Fermi, a matriz $T_\theta = e^{\mathbb{A}}$ tem autovalor de módulo 1 se e somente se a matriz \mathbb{A} tem autovalor com parte real igual a zero. Se o autovalor for complexo, aplicamos a proposição 4.4 com $\alpha = \varepsilon > 0$.

Além disso, $\det(\mathbb{A}) = (-1)^n L \det(S)$ é igual ao produto dos seus autovalores. Então a aplicação \mathbb{A} tem autovalor real com módulo igual a 0 se e somente se $\det(S) = 0$. Denotamos S^k , $k \in \{1, \dots, n\}$ a matriz $(n-k) \times (n-k)$ construída a partir de S retirando-se as primeiras k linhas e as primeiras k colunas.

Seja k_0 o menor k tal que $\det(S^k) \neq 0$. Se $\det(S^k) = 0$ para $k = 1, \dots, n$ tome $k_0 = n$.

Considere $\tau > 0$ tal que $\eta([0, \tau])$ esteja contida em uma vizinhança coordenada (nas coordenadas de Fermi).

Tome $\lambda_1 < \varepsilon\tau$. A perturbação do termostato gaussiano é construída a partir da perturbação \tilde{E}^1 do campo externo E :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{E}_0^1(t, x) = E_0 \\ \tilde{E}_1^1(t, x) = E_1 + \psi(t, x) \frac{\lambda_1}{\tau} x_1 \\ \dots \\ \tilde{E}_{k_0}^1(t, x) = E_{k_0} + \psi(t, x) \frac{\lambda_1}{\tau} x_{k_0} \\ \tilde{E}_{k_0+1}^1(t, x) = E_{k_0+1} \\ \dots \\ \tilde{E}_n^1(t, x) = E_n \end{array} \right.$$

A matriz perturbada \tilde{S} se escreve

$$\tilde{S} = \hat{K} + \hat{B} + \varepsilon D = S + \varepsilon D$$

em que D é uma matriz diagonal tal que se $i \leq k_0$ então $D_{ii} = 1$ e se $i > k_0$ então $D_{ii} = 0$.

Calculando o determinante de \tilde{S} por cofatores em termos da primeira linha, temos

- Se $k_0 < n$ então $\det(\tilde{S}) > \lambda_1^{k_0} \det(S^{k_0}) \neq 0$
- Se $k_0 = n$ então $\det(\tilde{S}) > \lambda_1^n \neq 0$.

Se $\beta_{\tilde{E}^1}(\eta) \neq 0$ então não há mais nada a fazer. Caso contrário, tome $0 < \lambda_2 < \varepsilon\tau$ e \tilde{E}^2 definida por

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{E}_0^2 = \tilde{E}_0^1 + \psi(t, x) \frac{\lambda_2}{\tau} \\ \tilde{E}_i^2 = \tilde{E}_i^1 \text{ para } i = 1, \dots, (n-1) \end{array} \right.$$

Considerando a aplicação $\beta_{\tilde{E}^2}$ aplicada a η que também é órbita do termostato gaussiano (M, g, \tilde{E}^2) , temos

$$\beta_{\tilde{E}^2}(\eta) = \int_0^\tau \gamma_{\tilde{E}^2}(\dot{\eta}(s)) ds = \lambda_2 > 0$$

□

Lema 5.8. *Suponha S_{j-1} aberto e denso em \mathcal{O} . Então ρ_j é uma pseudo representação C^r transversal a W em $\Sigma \cap \tilde{V}$.*

Demonstração. Considere o conjunto denso da definição de pseudotransversalidade como $S_{j-1} \cap TG(M, g)$ e o espaço da Banach das perturbações $B = TG(M, g)$.

Precisamos provar para $E \in S_{j-1}$ que ρ_j é C^r transversal a W em $E \times \Sigma \cap V$.

Se $\rho_i(E, \theta) \in W$ para $i < j$ e $\rho_j(E, \theta) \in W$ então θ é um ponto periódico hiperbólico e $\rho_j(E) \pitchfork_\theta W$ e $\rho_j \pitchfork_{(E, \theta)} W$.

Se $\rho_i(E, \theta) \notin W$ para $i < j$, $\rho_j(E, \theta) \in W$ e $D\rho_j(E, \theta) \cap T_\theta W = \{0\}$ então temos a transversalidade.

Se $D\rho_j(E, \theta) \cap TW \neq \{0\}$ então seja $u \in T_\theta SM$ tal que $D\rho_i(u) = (u, D\phi^i u = u)$. Além disso, a projeção em $\hat{T}_\theta SM$ de um autovalor de $D\phi^i$ é um autovalor da aplicação linear de Poincaré.

Podemos tomar u com componente horizontal não nula. De fato, pelo lema 5.5, o subespaço gerado pelo vetor u , que denotamos por U , é isotrópico e portanto a interseção deste com o fibrado vertical ocorre em pontos isolados ao longo da órbita de θ . Basta então considerar o ponto θ' na órbita η de θ tal que $U \cap V(\theta') = \{0\}$. Continuaremos chamando θ' de θ .

Considere $Q \subset T_\theta SM$ o subespaço ortogonal a u . Coloque coordenadas de Fermi ao longo do segmento de órbita $\eta : [0, \tau] \rightarrow SM$ ($\tau < r_{inj}$) de forma que $\eta(0) = \tilde{\theta}$ e $\eta(\tau) = \theta$.

Considere o caminho $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow CS(\mathbb{R}^{2n})$ tal que $c(s) = e^{\mathbb{A}+sB}$ em que $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{B} & 0 \end{bmatrix}$ e $\tilde{B} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é simétrica.

Note que $c(0) = d\phi_{\tilde{\theta}}^\tau$ e este caminho representa o cociclo derivada transversal dos termostatos gaussianos (M, g, \tilde{E}^s) em que \tilde{E}^s é dado por

$$\begin{cases} \tilde{E}_0^s(t, x) &= E \\ \tilde{E}_i^s(t, x) &= E_i + \frac{s}{\tau} \sum_{j=1}^n \psi(t, x) \tilde{B}_{ij} x_j \text{ para } i = 1, \dots, n \end{cases}$$

Procuramos por uma aplicação B tal que para $s \neq 0$ temos

$$\pi_Q e^{i(\mathbb{A}+sB)} U \neq 0.$$

Calculando a diferencial desse caminho em $s = 0$

$$\left. \frac{d}{ds} \pi_Q e^{i(\mathbb{A}+sB)} U \right|_{s=0} = \pi_Q (ie^{i\mathbb{A}}) BU$$

é suficiente que esta diferencial seja não trivial e para isso é suficiente que $BU \neq U$ e $\dim(BU) = \dim(U)$ já que U é autoespaço do isomorfismo $e^{\mathbb{A}}$.

Seja $Q' \subset Q$ tal que $Q' \subset V(\theta)$. Essa escolha é possível pois $U \cap V(\theta) = \{0\}$. Tome aplicação simétrica \tilde{B} tal que $\tilde{B}\pi_{H(\theta)} U = Q'$ cuja existência está garantida pelo lema 5.6. Além disso, ainda devido a $U \cap V(\theta) = \{0\}$, temos que $1 = \dim(Q' = BU) = \dim(U)$.

□

Lema 5.9. *Existe ε -perturbação $\tilde{E} \in \mathcal{X}_g(M)$ de E tal que a aplicação de Poincaré P do termostato gaussiano (M, g, \tilde{E}) tem somente um número finito de pontos fixos, todos são hiperbólicos e se η é a órbita do fluxo associada a um ponto fixo então $\beta_{\tilde{E}}(\eta) \neq 0$.*

Demonstração. O argumento é indutivo: Pelo lema 5.8, se S_{j-1} aberto e denso em \mathcal{O} então ρ_j é uma pseudo representação C^r transversal a W em $\Sigma \cap \bar{V}$. Pelo teorema 5.1, R_j é aberto e denso em \mathcal{O} . Pelo lema 5.7, se $\rho_i(\theta) \in W$ e $\rho_j(\theta) \notin W$, $j \leq i$, então existe uma ε -perturbação \tilde{E} de E tal que θ é uma órbita periódica hiperbólica. Portanto se R_j é aberto e denso em \mathcal{O} então S_j é aberto e denso em \mathcal{O} . \square

Vamos agora a demonstração do lema 5.1, o resultado principal da seção :

Demonstração. Vamos mostrar que dado $T > 0$ um inteiro então o conjunto dos campos vetoriais $G_1(T) \subset \mathcal{X}_g(M)$ que definem termostatos gaussianos cujas órbitas de período $\leq T$ são hiperbólicas é aberto e denso. Uma vez que $G_1 = \bigcap_{T \geq 1} G_1(T)$ então G_1 é residual.

$G_1(T)$ é **aberto em** $\mathcal{X}_g(M)$. Seja $E \in G_1(M)$. O termostato gaussiano (M, g, E) tem apenas um número finito de órbitas de período $\leq T$.

Seja $\theta \in SM$. Temos duas possibilidades:

- (i) O ponto θ está contido numa órbita regular ou uma órbita periódica de período $> T$. Pelo teorema do fluxo tubular, existe uma vizinhança U_θ de θ em SM tal que toda órbita de (M, g, E) que intersecta \bar{U}_θ tem período $> T$. Pelo lema 5.4, existe uma vizinhança $N_\theta \subset \mathcal{X}_g(M)$ de E tal que as órbitas do termostato gaussiano em N_θ que passam por U_θ tem órbitas periódicas de período $> T$.
- (ii) O ponto θ está contido numa órbita periódica de período $\leq T$ e $\beta_E(\theta) \neq 0$. Pelo lema 5.3, existe uma vizinhança U_θ em SM e uma vizinhança N_θ em $\mathcal{X}_g(M)$ tal que se $E \in N_\theta$ tem apenas uma órbita fechada θ_E em U_θ que é hiperbólica, $\beta_E(\theta_E) \neq 0$ e todas as outras órbitas periódicas que intersectam U_θ tem período $> T$.

Seja $\{U_\theta, \theta \in SM\}$ uma cobertura aberta de SM . Tome uma subcobertura finita U_1, \dots, U_k e considere N_1, \dots, N_k as vizinhanças obtidas acima. Os campos vetoriais em $N = N_1 \cap \dots \cap N_k$ definem termostatos gaussianos com todas as suas órbitas periódicas θ_E de período $\leq T$ próximas as órbitas periódicas de período $\leq T$ de (M, g, E) . Além disso, as órbitas θ_E são todas hiperbólicas e $\beta(\theta_E) \neq 0$.

$G_1(T)$ é **denso em** $\mathcal{X}_g(M)$. Considere o conjunto $\Gamma(T) = \{\theta \in SM : \mathcal{O}(\theta) \text{ é fechada com período } \leq T\}$. Este conjunto é compacto. De fato, seja θ_n uma sequência em $\Gamma(T)$ tal que $\theta_n \rightarrow \theta$. Se a órbita de θ tem período $\leq T$ então $\theta \in \Gamma(T)$. Se a órbita de θ é regular ou fechada com período maior que T então, pelo teorema do fluxo tubular, existe uma vizinhança U_θ de θ tal que uma órbita fechada em \bar{U}_θ tem período maior do que T . Contradição.

Vamos mostrar que existe \tilde{E} arbitrariamente próximo de E tal que $\tilde{E} \in G_1(T)$.

Seja $\{W_\theta\}_{\theta \in \Gamma}$ a cobertura de Γ em que W_θ é uma vizinhança da órbita de θ e tome $\{W_{\theta_l}\}_{l=1, \dots, k}$ uma subcobertura finita. Considere $W = \bigcup_{l=1}^k W_{\theta_l}$ e o conjunto compacto $K = SM \setminus W$. Toda órbita periódica em K tem período maior que T . Pelo lema 5.4, existe um aberto N em $\mathcal{X}_g(M)$ tal que as órbitas fechadas em K dos termostatos gaussianos em N tem período maior que T . Considere agora a aplicação de Poincaré P_l associada a θ_l . Pelo lema 5.9, existe um termostato gaussiano ε -próximo tal que a aplicação P_l tem apenas pontos periódicos hiperbólicos e $\beta \neq 0$ para estes pontos. Aplicando o lema para $l = 1, \dots, k$, temos o resultado. \square

5.3 Transversalidade das variedades invariantes

Nesta seção vamos demonstrar o lema 5.2. Considere $T > 0$. Seja $E \in G_1(T)$ e η_1, \dots, η_l as órbitas periódicas de (M, g, E) de período $\leq T$. Para cada η_i , tome vizinhanças compactas $W_0^s(\eta_i, E)$ e $W_0^u(\eta_i, E)$ de η_i em $W^s(\eta_i, E)$ e $W^u(\eta_i, E)$, respectivamente, tal que as fronteiras de $W_0^s(\eta_i, E)$ e $W_0^u(\eta_i, E)$ são domínios fundamentais. Seja Σ_i^s uma subvariedade de SM de codimensão 1 transversal a direção do fluxo cuja interseção com $W^s(\theta_i, E)$ seja $\partial W_0^s(\theta_i, E)$. Para \tilde{E} numa vizinhança N^s de E em que o fluxo é transversal a Σ_i^s , tome a vizinhança $W_0^s(\tilde{\eta}_i, \tilde{E})$ em que $\tilde{\eta}_i$ é a continuação de η_i cuja fronteira é a interseção de $W^s(\tilde{\eta}_i, \tilde{E})$ com Σ_i^s . Faça a mesma construção para $W_0^u(\eta_i, E)$ para obter o conjunto N^u e faça $N = N^s \cap N^u$. Para cada inteiro positivo n , defina $W_n^s(\eta_i, E) = \phi_{-n}(W_0^s(\eta_i, E))$ e $W_n^u(\eta_i, E) = \phi_n(W_0^u(\eta_i, E))$.

Seja $G_2^n(T)$ o subconjunto de $G_1(T)$ tal que se $E \in G_2^n(T)$ então $W_n^s(\eta_i, E)$ é transversal a $W_n^s(\eta_j, E)$ para todas as órbitas η_i e η_j fechadas de período $\leq T$ de E . Para demonstrar o lema 5.2, é suficiente mostrar que

Lema 5.10. *Seja $E \in G_2(T)$ e N uma vizinhança de E como acima. Então para todo $n \in \mathbb{N}$, o conjunto $G_2^n(T)$ é aberto e denso em N .*

Demonstração. Denotamos $G_2^{n,i,j}(T)$ o conjunto dos termostatos gaussianos $E \in N$ tais que se η_1, \dots, η_k são as órbitas fechadas e hiperbólicas de (M, g, E) com período $\leq T$ e as variedades invariantes $W_n^s(\eta_i, E)$ e $W_n^u(\eta_j, E)$ são transversais.

O conjunto G_2^n satisfaz

$$G_2^n(T) = \bigcap_{i,j=1}^k G_2^{n,i,j}(T)$$

Portanto é suficiente mostrar que $G_2^{n,i,j}(T)$ é aberto e denso.

$G_2^{n,i,j}(T)$ é **aberto** em $\mathcal{X}_g(M)$. Seja $E \in G_2^{n,i,j}(T)$. Uma vez que $W_n^s(\eta_i, E)$ e $W_n^u(\eta_j, E)$ são transversais e as aplicações $E \rightarrow W_n^s(\eta_i, E)$ e $E \rightarrow W_n^u(\eta_j, E)$ são contínuas, segue que existe uma vizinhança $N_{ij} \in N$ de E tal que para todo $\tilde{E} \in N_{ij}$ as variedades $W_n^s(\eta_i, \tilde{E})$ e $W_n^u(\eta_j, \tilde{E})$ são transversais.

$G_2^{n,i,j}(T)$ é **denso** em $\mathcal{X}_g(M)$. Considere o conjunto compacto $K = W_n^s(\eta_i, E) \cap W_n^u(\eta_j, E)$. Para $\theta \in K$ considere A_θ uma vizinhança de θ com contém apenas uma componente conexa de K . Considere $\{A_{\theta_l}\}_{l=1, \dots, k}$ uma subcobertura finita de K da cobertura $\{A_\theta\}_{\theta \in K}$.

Existe uma vizinhança $\tilde{N} \in N$ tal que se $\tilde{E} \in \tilde{N}$ então $W_n^s(\eta_i, \tilde{E}) \cap W_n^u(\eta_j, \tilde{E}) \subset \cup_{l=1, \dots, k} A_{\theta_l}$. Considere $\tilde{N}^l \subset \tilde{N}$ o conjunto dos termostatos gaussianos tais que $W_n^s(\eta_i, E)$ é transversal a $W_n^u(\eta_j, E)$ em \bar{A}_{θ_l} . Vamos mostrar que \tilde{N}^l é denso em \tilde{N} . Considere $\hat{T}W^{s,u}W(\theta) \in \hat{T}_\theta SM$ o espaço tangente das variedades estável e instável, respectivamente, restrito ao cociclo derivada transversal no ponto $\theta \in SM$. Coloque coordenadas de Fermi ao longo do segmento de órbita $\eta : [0, \tau] \rightarrow SM$ ($\tau < r_{inj}$) de forma que $\eta(0) = \tilde{\theta}$ e $\eta(\tau) = \theta$. Considere o caminho $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow CS(\mathbb{R}^{2n})$ tal que $c(s) = e^{A+sB}$ em que $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{B} & 0 \end{bmatrix}$ e $\tilde{B} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é simétrica.

Note que $c(0) = T : \hat{T}_{\tilde{\theta}} SM \rightarrow \hat{T}_\theta SM$ é o cociclo derivada transversal de (M, g, E) e este caminho representa o cociclo derivada transversal dos termostato gaussianos (M, g, \tilde{E}) em que \tilde{E} é dado por

$$\begin{cases} \tilde{E}_0(t, x) &= E \\ \tilde{E}_i(t, x) &= E_i + \sum_{j=1}^n \psi(t, x) \tilde{B}_{ij} x_j \text{ para } i = 1, \dots, n \end{cases}$$

Considere $U = \hat{T}W^s(\theta) \cap \hat{T}W^u(\tilde{\theta})$, $Q = (\hat{T}W^s(\theta) + \hat{T}W^u(\theta))^\perp$ e $\dim(U) = \dim(Q) = k$.

Seja π_Q a projeção ortogonal sobre o subespaço Q então

$$\pi_Q e^A U = 0$$

e procuramos por uma aplicação B tal que para $s \neq 0$ temos

$$\pi_Q e^{A+sB} U \neq 0.$$

Considerando

$$\left. \frac{d}{ds} \pi_Q e^{A+sB} U \right|_{s=0} = \pi_Q e^A B U$$

precisamos que

$$B U = \pi_{V(\theta)}(B U) \subset \pi_{V(\theta)}(e^{-\mathbb{A}} Q)$$

e $\dim(U) = \dim(B \pi_{H(\theta)} U) \leq \pi_{V(\theta)}(e^{-\mathbb{A}} Q)$ em que $\pi_{V(\theta)}$ é a projeção no espaço vertical e $\pi_{H(\theta)}$ é a projeção no espaço horizontal. Do fato que $\beta(\eta_i) \neq 0$ e $\beta(\eta_j) \neq 0$ segue que $\hat{T}W^s(\theta)$ e $\hat{T}W^u(\tilde{\theta})$ são isotrópicos e o lema 5.5 nos diz que $\dim(\pi_{H(\theta)} U) = \dim(\pi_{V(\theta)} Q) = k$. Finalmente, a existência da aplicação \tilde{B} tal que $\tilde{B}(\pi_{H(\theta)} U) = Q$ é garantida pelo lema 5.6.

□

Franks demonstrou em [10] que para um difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ de classe C^1 sobre uma variedade Riemanniana M e dado $\varepsilon > 0$, se tomarmos um ponto $x \in M$ periódico, podemos realizar uma C^1 perturbação g de f de forma que $g^n(x) = f^n(x)$, $n \in \mathbb{Z}$, e dg^n é qualquer isomorfismo ε -próximo de df^n , para $n \in \mathbb{Z}$. Este resultado é hoje conhecido como o *lema de Franks*.

Para fluxos geodésicos, o resultado análogo exige uma técnica diferente da utilizada por Franks, uma vez que perturbações do fluxo geodésico são perturbações da métrica e estas não são de natureza local. Perturbar a métrica numa vizinhança da variedade significa uma perturbação em todo um cilindro no espaço tangente onde o fluxo está definido. Em [7], Contreras contorna a situação demonstrando uma versão do lema de Franks para fluxos geodésicos.

Para um termostato gaussiano, a situação é análoga ao fluxo geodésico. Neste caso, além de podermos perturbar a métrica g , temos mais um grau de liberdade: o campo vetorial E . O campo vetorial E esta definido sobre a variedade e portanto possui a mesma característica sobre perturbações: perturbar E numa vizinhança da variedade também significa uma perturbação em todo um cilindro no espaço tangente onde o fluxo está definido. Nesta seção, demonstraremos uma versão do lema de Franks para termostatos gaussianos cujo argumento segue das idéias utilizadas na demonstração de [7].

Seja (M, g) é uma variedade Riemanniana de dimensão $n + 1$. Denotamos $\mathcal{X}^k(M)$ o espaço dos campos vetoriais sobre M de classe C^k e $\mathcal{R}^l(M)$ é o espaço formado pelas métricas Riemannianas em M com topologia C^l .

Seja (M, g, E) o termostato gaussiano definido sobre a variedade (M, g) com $E \in \mathcal{X}_g(M) \cap \mathcal{X}^r(M)$ e η uma órbita fechada de (M, g, E) . Nosso objetivo é realizar perturbações em E que mantém η como órbita e, além disso, o cociclo derivada transversal associada a um ponto p em η do termostato gaussiano perturbado, seja qualquer aplicação conformalmente simplética próxima da original. Munimos $\mathcal{X}^r(M)$ com a topologia dada pelos abertos $B(E, r) = \{\tilde{E} \in \mathcal{X}^r(M) | \max\{\|\tilde{E} - E\|_{C^1}\} < r\}$.

O teorema principal deste capítulo:

Teorema D. *Sejam $E \in \mathcal{X}_g(M) \cap \mathcal{X}^r(M)$, $4 \leq r \leq \infty$, θ um ponto de uma órbita periódica η do termostato gaussiano (M, g, E) e $T : \hat{T}_\theta SM \rightarrow \hat{T}_\theta SM$ o cociclo derivada transversal ao longo de η .*

Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que dada uma perturbação L de T com $\|L - T\| < \delta$ então existe $\tilde{E} \in \mathcal{X}_g(M)$ com $d(\tilde{E}, E)_{C^1} < \varepsilon$ que define o termostato gaussiano (M, g, \tilde{E}) tal que η é órbita e o cociclo derivada transversal associado a θ é L .

Passamos a ideia da demonstração. Considere (M, g, E) o termostato gaussiano associado ao campo externo $E \in \mathcal{X}_g(M) \cap \mathcal{X}^r(M)$. Seja η uma órbita periódica de (M, g, E) , $p \in M$ um ponto contido

na trajetória de η e $T : \hat{T}_p M \rightarrow \hat{T}_p M$ a aplicação linear de Poincaré associada a p . Consideramos a aplicação $S : \mathcal{X}_g(M) \cap \mathcal{X}^r(M) \rightarrow CS(n)$ cujo domínio são os campos vetoriais de classe C^r que definem a 1-forma γ fechada e a imagem são as transformações conformalmente simpléticas definida por $S(E) = T$.

Consideramos subconjuntos em $\mathcal{X}_g(M)$ apropriados (cujas definições precisas serão vistas mais adiante):

\mathcal{G}_1 Considerando K a matriz de curvatura e $[B]_{ij} = \frac{\partial E_i}{\partial x_j}$ a matriz derivada do campo $E \in \mathcal{G}_1 \subset \mathcal{X}_g(M)$, todo segmento de órbita tenha um ponto onde os autovalores da matriz $K + B$ sejam todos distintos.

\mathcal{G}_2 As órbitas do termostato gaussiano em M podem ter interseções então as perturbações realizadas em cada segmento não podem interferir nos outros segmentos, além de que as perturbações devem manter a órbita η . O conjunto \mathcal{G}_2 nos garante que isto aconteça.

Seja uma vizinhança \mathcal{U} de E e demonstramos que a imagem por S de $\mathcal{U} \cap \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2$ contém uma bola de raio $\delta > 0$. Isto significa que qualquer δ -perturbação do cociclo derivada transversal T pode ser realizada com perturbações em $\mathcal{U} \cap \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2$.

Fazemos isso particionando a órbita η em diversos segmentos η_i , $i = 1, \dots, n$. Para cada um desses segmentos, consideramos o cociclo derivada transversal dos pontos extremos e definimos uma aplicação $S_i : \mathcal{X}_g(M) \cap \mathcal{X}^r(M) \rightarrow CS(M)$ que satisfaz $S_i(E) = T_i$ onde $T_i : \hat{T}_{\eta_i^0} M \rightarrow \hat{T}_{\eta_i^1} M$ é o cociclo derivada transversal para os pontos extremos η_i^0 e η_i^1 de η_i .

Utilizando como ferramenta a equação de Jacobi para os termostatos gaussianos, demonstramos que $\|dS_E\| > d > 0$ que implicará o resultado.

Consideramos $\pi : TM \rightarrow M$ a projeção canônica e r_{inj} o raio de injetividade de (M, g) , ou seja, dado $p \in M$ a aplicação exponencial em um ponto p , denotada por exp_p e definida em 3.5 é um difeomorfismo entre uma bola $B(0, r) \in T_p M$ e sua imagem. Denotamos $\mathcal{S}(n)$ o espaço das matrizes $n \times n$ simétricas, $\mathcal{S}^*(n)$ o espaço das matrizes $n \times n$ simétricas com diagonal nula e $\mathcal{O}(n)$ o espaço das matrizes $n \times n$ ortogonais.

Antes de demonstrar o resultado precisamos de algumas preliminares:

6.1 Condição genérica

Dado $g \in \mathcal{R}^2(M)$, definimos

- $K_g : SM \rightarrow \mathcal{S}(n)/\mathcal{O}(n)$

$$K_g(\theta)_{ij} = -\langle R_g(\theta, e_i)\theta, e_j \rangle_{\pi(\theta)}$$

- $\mathbb{K} : \mathcal{R}^2(M) \times [0, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathcal{S}(n)/\mathcal{O}(n)$:

$$\mathbb{K}(g, \theta, t)_{ij} = -K_g \left[\phi_t^{(g, E)} \left(\frac{\theta}{|\theta|_g} \right) \right]_{ij}$$

- $B_g : SM \rightarrow \mathcal{S}(n)/\mathcal{O}(n)$

$$B_g(\theta)_{ij} = \frac{\partial E_i}{\partial e_j^g}(\pi(\theta))$$

- $\mathbb{B} : \mathcal{X}^2(M) \times [0, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathcal{S}(n)/\mathcal{O}(n)$:

$$\mathbb{B}(E, \theta, t)_{ij} = B_g(c(t))_{ij}$$

em que $\{\theta, e_1^g = e_1^g(0), \dots, e_n^g = e_n^g(0)\}$ é uma base ortonormal de $T_{\phi_0^E(\theta)}M$ e $\{\theta(t), e_1^g(t), \dots, e_n^g(t)\}$ é o transporte paralelo desta base ao longo da curva $c(t) = \pi \circ \phi_t^E\left(\frac{\theta}{|\theta|_g}\right)$ com respeito a conexão Riemmaniana associada a métrica g .

Para demonstrar o Teorema D, o termostato gaussiano (M, g, E) deve estar contido em um conjunto especial. Precisamos que todo segmento de órbita de tamanho $\frac{r_{inj}}{2}$ tenha pelo menos um ponto tal que a matriz $K_g + B_g$ tenha todos autovalores distintos. Mostraremos que esta condição é, de fato, genérica.

- $h : \mathcal{S}(n) / \mathcal{O}(n) \rightarrow [0, +\infty[$ por

$$h([C]) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i - \lambda_j)^2$$

onde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são os autovalores da matriz C .

- $\bar{H} : \mathcal{R}^2(M) \times \mathcal{X}^{sim}(M) \cap \mathcal{X}^1(M) \times SM \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\bar{H}(g, E, \theta, t) = h(\mathbb{K}_g(g, \theta, t) + \mathbb{B}_g(E, \theta, t))$$

- $H : \mathcal{R}^2(M) \times \mathcal{X}_g(M) \cap \mathcal{X}^1(M) \rightarrow [0, +\infty[$ dada por

$$H(g, E) = \min_{\theta \in S^g M} \{ \max_{t \in [0, \frac{r_{inj}}{2}]} \{ \bar{H}(g, \theta, t) \} \}$$

O objetivo desta seção é demonstrar o resultado:

Teorema 6.1. *A função $H : \mathcal{R}^2(M) \times \mathcal{X}_g(M) \cap \mathcal{X}^1(M) \rightarrow [0, +\infty[$ é contínua e o conjunto*

$$\mathcal{G}_1 = \{E \in \mathcal{X}_g(M) \cap \mathcal{X}^1(M) \mid H(g, E) > 0\}$$

é aberto em $\mathcal{X}_g(M) \cap \mathcal{X}^1(M)$ e $\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{X}^\infty(M)$ é denso em $\mathcal{X}_g(M)$

Demonstração. A demonstração só difere da original (em [7]) por um ponto: Agora não queremos encontrar os autovalores apenas da matriz K_g mas sim da matriz $K_g + B_g$. \square

6.2 Teorema perturbativo

Iniciamos a seção, lembrando a definição de órbita prima:

Definição 6.1. *Uma órbita fechada η é dita prima se não é a iterada de uma órbita fechada de período menor.*

Dada uma órbita prima η , seja

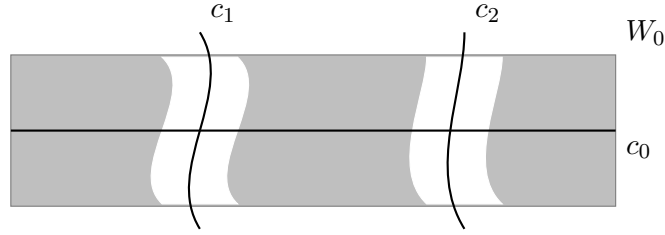
- $W \subset M$ uma vizinhança tubular de $c = \pi \circ \eta$
- $\tau > 0$ tal que $m\tau = \text{periodo}(\eta)$ com $m \in \mathbb{N}$ e $\tau < r_{inj}$ onde r_{inj} é o raio de injetividade de M . Considere, para $0 \leq k < m$, $\eta_k(t) = \eta((t+k)\tau)$ com $t \in [0, 1]$. Chamaremos c_k a projeção de η_k em M , $c_k = \pi \circ \eta_k$.

Para cada segmento η_k , definimos a aplicação $S_k : \mathcal{X}_g(M) \cap \mathcal{X}^r(M) \rightarrow CS(n)$ por

$$S_k(E) = T_k^E$$

em que T_k^E é o cociclo derivada transversal entre $\eta_k(0)$ e $\eta_k(1)$.

Na variedade M , pode acontecer que exista interseção transversal entre os segmentos c_k . Suponha que para c_0 o conjunto dos segmentos que intersectam c_0 seja $\mathcal{F}_0 = \{c_1, \dots, c_l\}$.



Definição 6.2. Seja c_0 um segmento de órbita e \mathcal{F}_0 o conjunto de segmentos de órbita que intersectam c_0 transversalmente. Seja $W_0 \subset W$ uma vizinhança tubular de c_0 tal que os extremos dos segmentos de \mathcal{F}_0 não estejam contidos em W_0 . Denotamos $\mathcal{G}_2(\eta_0, W_0, \mathcal{F}_0)$ o conjunto dos campos vectoriais $\tilde{E} \in \mathcal{X}^r(M)$ tais que

- $\text{supp}(\|\tilde{E} - E\|) \subset W_0$
- $\tilde{E} = E$ numa vizinhança U_0 de \mathcal{F}_0

Para o segmento de órbita η_0 , após encontrar \mathcal{F}_0 e W_0 , temos o conjunto $\mathcal{G}_2(\eta_0, W_0, \mathcal{F}_0)$ e aplicamos o seguinte resultado, que é o teorema perturbativo sobre um segmento de órbita:

Teorema 6.2. Sejam $E \in \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{X}_g(M) \cap \mathcal{X}^r(M)$, $4 \leq r \leq \infty$, e η_0 um segmento de órbita associado ao termostato gaussiano (M, g, E) . Dada uma vizinhança $\mathcal{U} \in \mathcal{X}_g(M) \cap \mathcal{X}^1(M)$, existe $\delta_0 = \delta_0(g, E, \mathcal{U}) > 0$ tal que dados W_0 e \mathcal{F}_0 como acima então a imagem de $\mathcal{U} \cap \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2(\eta_0, W_0, \mathcal{F}_0)$ pela aplicação S_0 contém uma bola de raio δ_0 centrada em $S_0(E)$.

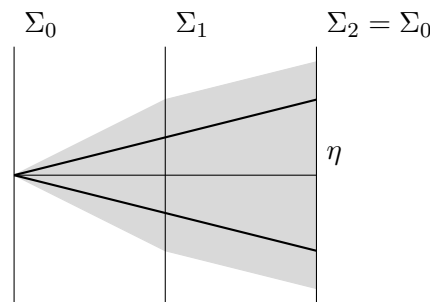
Para c_1 , encontramos \mathcal{F}_1 e W_1 e $\mathcal{G}_2(c_1, W_1, \mathcal{F}_1)$. A seguir, aplicamos novamente o teorema acima obtendo que a imagem de uma vizinhança do campo E pela aplicação S_1 contém uma bola de raio δ_1 centrada em $S_1(E)$, $B_{\delta_1}(S_1(E))$. Repetimos o processo para η_2, \dots, η_m .

Os conjuntos, $\mathcal{G}_2(c_i, W_i, \mathcal{F}_i)$, $i \in \{0, \dots, m\}$, garantem que não existe interferência entre uma perturbação e a próxima e, além disso, estão contidos num conjunto maior definido a seguir.

Definição 6.3. Definimos $\mathcal{G}_2(\eta, E, W)$ o conjunto dos campos vectoriais $\tilde{E} \in \mathcal{X}^\infty(M)$ tais que

$$\text{supp}(\|\tilde{E} - E\|) \subset W$$

Para finalizar a demonstração do teorema, considerando a aplicação $S = (S_0, \dots, S_m) : \mathcal{X}_g(M) \cap \mathcal{X}^r(M) \rightarrow CS(n) \times \dots \times CS(n)$, temos que a imagem de $\mathcal{U} \cap \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2(\eta, E, W)$ contém o produto $B_{\delta_0}(S_0(E)) \times \dots \times B_{\delta_m}(S_m(E))$. Este resultado, traduzido em termos de cociclo derivada transversal, significa que uma perturbação no cociclo derivada transversal contém uma bola centrada em T com raio $\min_{i \in \{0, \dots, m\}} \{\delta_i\}^m$ pode ser realizada considerando um campo \tilde{E} no conjunto $\mathcal{U} \cap \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2(\eta, E, W)$.



6.3 Teorema perturbativo sobre um segmento de órbita

Nesta seção vamos demonstrar o teorema [6.2] que é o passo intermediário para a demonstração do resultado principal do capítulo.

Vamos mostrar como perturbaremos o campo E . Coloque coordenadas de Fermi ao longo de η . Considere uma aplicação $\alpha : [0, \tau] \times \mathbb{R}^n \rightarrow S(n)$ de classe C^∞ com suporte numa vizinhança de $[0, \tau] \times \{0\}$ e $\tilde{\lambda} : [0, \tau] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tilde{\lambda}(t, 0) \equiv \frac{\lambda}{\tau}$ para $t \in [0, \tau]$, $\lambda > 0$ e tem o suporte em uma vizinhança de $[0, \tau] \times \{0\}$ com $\tau < r_{inj}$.

Seja η uma órbita do termostato gaussiano, $\eta(t) = (u(t), v(t))$, e considere

$$\begin{cases} \tilde{E}_0 &= E_0 + \tilde{\lambda}(t, x) \\ \tilde{E}_i &= E_i + \sum_j \alpha_{ij} x_j \text{ para } i = 1, \dots, n \end{cases}$$

Com a perturbação \tilde{E} de E , η também é órbita do termostato gaussiano (M, g, \tilde{E}) . De fato,

$$\begin{cases} \dot{u} &= v \\ \frac{D}{dt}v &= \tilde{E} - Proj_v \tilde{E} = E - Proj_v E \end{cases}$$

Chamaremos a interseção do conjunto das perturbações de E das formas acima com $\mathcal{G}_2(\eta_0, W_0, \mathcal{F}_0)$ de \mathcal{G}_2 .

Antes de iniciarmos, construiremos as vizinhanças, constantes e aplicações necessárias para a demonstração de [6.2].

\mathcal{U} Supomos que $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}_g(M) \cap \mathcal{X}^r(M)$.

k_0 Diminuindo \mathcal{U} , se necessário, podemos dizer que existe $k_0 = k_0(\mathcal{U}) > 0$ tal que

$$\|\mathbb{K}(g, \theta, t) + \mathbb{B}(E, \theta, t)\| \leq k_0 \quad \forall (E, \theta, t) \in \mathcal{U} \times SM \times [0, 1]$$

k_1 Seja $k_1 = k(\mathcal{U}) > 1$ tal que se $E \in \mathcal{U}$, então

$$\|d_\theta \phi_t^E\| \leq k_1 \quad \|d_\theta (\phi_t^E)^{-1}\| \leq k_1 \quad \forall t \in [0, 1] \quad \forall \theta \in SM.$$

k_2 e λ Dado $0 < \lambda \ll \frac{\tau}{8}$ seja $k_2 = k_2(\mathcal{U}, \lambda)$ tal que $\lim_{\lambda \rightarrow 0} k_2(\lambda) = 0$ e

$$\|d_\theta \phi_s^{(g, E)} - d_\theta \phi_t^{(g, E)}\| < k_2 \quad \|d_\theta (\phi_s^{(g, E)})^{-1} - d_\theta (\phi_t^E)^{-1}\| < k_2$$

$$|s - t| < \lambda \quad \forall s, t \in [0, 1] \quad \forall \theta \in SM.$$

O escalar λ deve ser pequeno o suficiente para $k_1^{-2} - 2k_1 k_2 > 0$ (pra conseguirmos definir k_5).

k_3, τ e \mathcal{U}_0 Uma vez que $E \in \mathcal{G}_1$ então existe $a_0 > 0$ tal que $H(E) > 2a_0^2$. Defina $A_0 = \{(\theta, t) \in SM \times [0, 1] \mid \bar{H}(E, \theta, t) \geq 2a_0^2\}$. Existe uma vizinhança $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ de E em $\mathcal{X}^2(M)$ tal que

$$A_0 \cap \left\{ \{\theta\} \times \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right] \right\} \neq \emptyset \quad \forall \theta \in SM$$

Fixe $\tau = \tau(\eta_0(0), \mathcal{U}_0) \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ tal que $(\eta(0), \tau) \in A_0 \setminus \mathcal{U}_0$ (lembrando que \mathcal{U}_0 é vizinhança de \mathcal{F}_0). Então

$$\min_{i \neq j} |\lambda_i - \lambda_j| > k_3$$

onde $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ são os autovalores da matriz $\mathbb{K}(g, \eta_0, \tau) + \mathbb{B}(E, \eta_0, \tau)$

k_4 Definimos k_4 como segue:

$$k_4 = \max\{1, k_3^{-1}, 1 + (4k_0 + \sigma^2)k_3^{-1}, \sigma, 1 + (4k_0 + \sigma^2)\sigma k_3^{-1}, \sigma^2, 2k_0 + \sigma^2, (4\sigma k_0 + \sigma^3)k_3^{-1}\}$$

δ Seja $\delta : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty]$ uma função C^∞ tal que $\delta(s) = 0$ se $|s - \tau| \geq \lambda$ e $\int_0^1 \delta(s)ds = 1$.

ρ e k_5 A constante ρ é definida de forma que

$$k_5 = \frac{k_1^{-2} - 2k_1k_2 - \rho k_1^2 \|\delta\|_0}{k_1k_4} > 0$$

ϕ_ε Dado $\varepsilon > 0$, seja $\phi_\varepsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ uma função C^∞ tal que $\phi_\varepsilon(x) = 1$ se $x \in [-\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4}]^n$ e $\phi_\varepsilon(x) = 0$ se $x \notin [-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}]^n$. O lema [6.1] a seguir, garante que ϕ_ε pode ser escolhido de forma que, para k_6 fixo,

$$\|\phi_\varepsilon(x)x^*p(t)x\| \leq k_6\|p\|_{C^0} + \varepsilon k_6\|p\|_{C^1} + \varepsilon^2 k_6\|p\|_{C^2}$$

ε_0 Seja $\varepsilon_0 = \varepsilon(E_0, \mathcal{U}) > 0$ tal que se $\|E - E_0\| < \varepsilon_0$ então $E \in \mathcal{U}_0$.

r Escolha r tal que

$$4rk_5^{-1}k_6\|\delta\|_{C^3} < \frac{1}{2}\varepsilon_0$$

\bar{h} Seja $\bar{h} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ uma função C^∞ com suporte longe dos pontos de interseção, ou seja, $\text{supp}(\bar{h}) \cap (\pi \circ \eta)^{-1}V_i = \emptyset$ em que V_i é uma vizinhança de \mathcal{F}_i e tal que

$$\int_0^1 (1 - \bar{h}(s))ds < \rho$$

\mathcal{V}_0 Escolha $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(E_0, \mathcal{U}_0, \eta, \mathcal{F})$ tal que

$$k_5^{-1}r(4k_6\|\delta\|_{C^3} + 8k_6\varepsilon_1\|h\|_{C^1}\|\delta\|_{C^4} + 16k_6\varepsilon_1^2\|h\|_{C^2}\|\delta\|_{C^5}) < \varepsilon_0$$

Seja um sistema de coordenadas de Fermi (ψ, V) ao longo do segmento $c = \pi \circ \eta$ associada a métrica g e tome ε_2 tal que $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0$ e $\eta_i \in \mathcal{F}$ não intersecta pontos com coordenadas (t, x) com $|x| < \varepsilon_2$ e $t \in \text{supp}(\bar{h})$ e $[0, 1] \times [-\varepsilon_2, \varepsilon_2]^n \in V$ e $\psi([0, 1] \times [-\varepsilon_2, \varepsilon_2]^n) \subset W$.

Suponha que α da definição das perturbações de g tem suporte contido em V $\psi^{-1}(\cap_i^m \eta_i)$ com $\eta_i \in \mathcal{F}$. Lembramos que o conjunto \mathcal{G}_2 é formado pelas perturbações de E que não alteram a órbita.

$$\mathcal{V}_0 = \mathcal{G}_2 \cap \mathcal{U}_0$$

Lema 6.1. *Existe $k_6 > 0$ e uma família de funções C^∞ , $\phi_\varepsilon : [-\varepsilon, \varepsilon]^n \rightarrow [0, 1]$ tal que $\phi_\varepsilon(x) = 1$ se $x \in [-\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4}]^n$, $\phi_\varepsilon(x) = 0$ se $x \notin [-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}]^n$ e para qualquer aplicação $W : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ a função $w(t, x) = \phi_\varepsilon(x)x^*W(t)x$ satisfaz:*

$$\|w\|_{C^2} \leq k_6\|B\|_{C^0} + \varepsilon k_6\|W\|_{C^1} + \varepsilon^2\|W\|_{C^2}$$

e k_6 é independente de $0 < \varepsilon < 1$.

Demonstração. Ver [7] □

Estamos prontos para enunciar o teorema perturbativo sobre um segmento de órbita.

Proposição 6.1. *Sejam $F : S(n)^3 \times S^*(n) \times \mathbb{R} \rightarrow CS(n)$ a aplicação $F(\sigma, \lambda) = d\phi_1^{\tilde{E}} = X_1$, onde $(\sigma, \lambda) \in S(n)^3 \times S^*(n) \times \mathbb{R}$ e*

- $\sigma = (a, b, c; d) \in S(n)^3 \times S^*(n)$
- $\alpha(t, x) = P(t)\phi_\varepsilon(x)x_j$
- $P(t) = \bar{h}(t)[a\delta(t) + b\delta'(t) + c\delta''(t) + d\delta'''(t)]$
- $\tilde{E}(t, x)_0 = (1 + (\lambda\bar{h}(t)\delta(t) - 1)\phi_\varepsilon(x))E_0$
- $\tilde{E}(t, x)_i = E_i + \sum_j \alpha_{ij}x_j$

Então existe $k > 0$ tal que

$$\|d_{(\sigma,\lambda)}F\zeta\| \geq k\|\zeta\| \quad \forall \zeta = (a, b, c; d; e) \in S(n)^3 \times S^*(n) \times \mathbb{R}$$

Observação: Vamos somente utilizar o resultado para $d_0F\zeta$ ($\sigma = 0$) mas demonstraremos $d_\sigma F\zeta$.

Demonstração. Considere o caminho em $\mathcal{X}_g(M) \cap \mathcal{X}^r(M)$,

$$\gamma : s \rightarrow (\sigma, \lambda) + s\zeta,$$

e a equação de Jacobi para $\gamma(s)$ ao longo de η :

$$\dot{T}_s = \mathbb{A}_s T_s,$$

onde

$$\mathbb{A}_s = \begin{bmatrix} 0 & I \\ K_s + B_s & C_s \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} K_s &= K \\ B_s &= B + sP(t) \\ C_s &= (1 + s\lambda)C \end{aligned}$$

Diferenciando esta equação com respeito a s , temos a equação diferencial para $Z_t = \left. \frac{dT_s(t)}{ds} \right|_{s=0}$

$$\dot{Z} = \mathbb{A}Z + \mathbb{B}X$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ K + B & C \end{bmatrix}, \\ \mathbb{B} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ P(t) & \lambda C \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sabemos que $Z_1 = d_{(\sigma,\lambda)}S.\zeta$. Isto segue da definição de Z :

$$Z(1) = \left. \frac{d}{dr} T^r(1) \right|_{r=0} = \left. \frac{d}{dr} T^{(\sigma,\lambda)+r\zeta}(1) \right|_{r=0} = \left. \frac{d}{dr} (F((\sigma, \lambda) + r\zeta)) \right|_{r=0}$$

Escreva $Z_t = T_t Y_t$ então $T\dot{Y} = \mathbb{B}T$ (motivação: $T_X CS(\mathbb{R}^n) = T(T_I CS(\mathbb{R}^n))$).

Além disso, $T_\lambda(0) \equiv I$ então $Z(0) = 0$ e $Y(0) = 0$. Portanto,

$$Y(t) = \int_0^t (T^s)^{-1} \mathbb{B}^s T^s ds$$

$$\mathbb{B}(X) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ P(t) & \lambda C \end{bmatrix} = \bar{h}(t) \{ \delta(t) \tilde{A} + \delta'(t) \tilde{B} + \delta''(t) \tilde{C} + \delta'''(t) \tilde{D} + \delta(t) \tilde{F} \}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}, \tilde{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}, \tilde{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{F} = \lambda \sigma \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Integrando por partes $Y(1)$, temos:

$$\begin{aligned} \int_0^1 T_s^{-1} \delta'(s) \tilde{B} T_s ds &= \int_0^1 \delta(s) T_s^{-1} [\mathbb{A} \tilde{B} - \tilde{B} \mathbb{A}] T_s ds \\ &= \int_0^1 \delta(s) T_s^{-1} \begin{bmatrix} b & 0 \\ \sigma b & -b \end{bmatrix} T_s ds. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 T_s^{-1} \delta''(s) \tilde{C} T_s ds &= \int_0^1 \delta'(s) T_s^{-1} \begin{bmatrix} c & 0 \\ \sigma c & -c \end{bmatrix} T_s ds \\ &= \int_0^1 \delta(s) T_s^{-1} \left(\mathbb{A} \begin{bmatrix} c & 0 \\ \sigma c & -c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ \sigma c & -c \end{bmatrix} \mathbb{A} \right) T_s ds \\ &= \int_0^1 \delta(s) T_s^{-1} \left(\begin{bmatrix} 0 & -2c \\ Kc + cK & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ Bc + cB & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma c & 0 \\ \sigma^2 c & -\sigma c \end{bmatrix} \right) T_s ds. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 T_s^{-1} \delta'''(s) \tilde{D} T_s ds &= \int_0^1 \delta'(s) T_s^{-1} \left(\begin{bmatrix} 0 & -2d \\ Kd + dK & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ Bd + dB & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma d & 0 \\ \sigma^2 d & -\sigma d \end{bmatrix} \right) T_s ds \\ &= \int_0^1 \delta(s) T_s^{-1} \left(\begin{bmatrix} Kd + 3dK & 0 \\ 0 & -3Kd - dK \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Bd + 3dB & 0 \\ 2\lambda \{ (K+B)d + d(K+B) \} & -3Bd - dB \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma^2 d & 0 \\ \sigma^3 d & -\sigma^2 d \end{bmatrix} \right) T_s ds. \end{aligned}$$

As matrizes em $T_I^\nu \text{CS}(\mathbb{R}^n)$ são da forma:

$$\begin{pmatrix} \beta & \gamma \\ \alpha & vI - \beta^* \end{pmatrix}$$

onde α e γ são simétricas e β é qualquer.

$$\begin{aligned} \alpha &= a + \sigma b + (K+B)c + c(K+B) + \sigma^2 c + 2\sigma \{ (K+B)d + d(K+B) \} + \sigma^3 d \\ \beta &= b + \sigma c + (K+B)d + 3d(K+B) + \sigma^2 d \\ \gamma &= -2c \\ v &= \lambda \sigma \end{aligned}$$

A matriz β se decompõe em $\beta = \beta_{sim} + \beta_{asim}$ onde β_{sim} é uma matriz simétrica e $\beta_{asim} = d(K+B) - (K+B)d$ é antissimétrica. Com o lema abaixo, temos que β_{asim} é determinada por d . Além disso, β_{sim} é determinada por b , α é determinada por a e, finalmente, γ por c .

Lema 6.2. *Seja W uma matriz simétrica e considere $L_W : S^*(n) \rightarrow AS(n)$ dada por $L_W(d) = Wd - dW$. Suponha que os autovalores λ_i de W são todos distintos. Então para toda $f \in AS(n)$ existe $d \in S^*(n)$ tal que $L_W(d) = f$ e*

$$\|f\| \leq \frac{\|d\|}{\min_{i \neq j} |\lambda_i - \lambda_j|}$$

Demonstração. Ver [7] □

Para finalizar a demonstração, precisamos mostrar que $\|Z_1\| \geq k\|\zeta\|$. Já sabemos que $\|Z_1\| = \|X_1 Y_1\|$ e $\|X_1\| \geq k_1^{-1}$. Para cotar $\|Y_1\|$, precisamos de

- $\min_{i \neq j} \{\lambda_i - \lambda_j\} > k_3$
- $\|K + B\| < k_0$
- $k_4 = \max\{1, k_3^{-1}, 1 + (4k_0 + \sigma^2)k_3^{-1}, \sigma, 1 + (4k_0 + \sigma^2)\sigma k_3^{-1}, \sigma^2, 2k_0 + \sigma^2, (4\sigma k_0 + \sigma^3)k_3^{-1}\}$

donde concluímos que

$$\begin{aligned} \|d\| &< k_3^{-1} \|\beta\| \\ &< k_4 \|\beta\| \end{aligned}$$

$$\|c\| < \|\gamma\|$$

$$\begin{aligned} \|b\| &< \|\beta\| + \sigma \|\gamma\| + 4k_0 k_3^{-1} \|\beta\| + \sigma^2 k_3^{-1} \|\beta\| \\ &= (1 + (4k_0 + \sigma^2)k_3^{-1}) \|\beta\| + \sigma \|\gamma\| \\ &< k_4 \max\{\|\beta\|, \|\gamma\|\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|a\| &< \|\alpha\| + \sigma \|b\| + 2k_0 \|c\| + \sigma^2 \|c\| + 4\sigma k_0 \|d\| + \sigma^3 \|d\| \\ &< \|\alpha\| + \sigma \|b\| + (2k_0 + \sigma^2) \|\gamma\| + (4\sigma k_0 + \sigma^3) k_3^{-1} \|\beta\| \\ &< k_4 \max\{\|\alpha\|, \|\beta\|, \|\gamma\|\} \end{aligned}$$

Se definirmos $T(\zeta) = \mathbb{D} = \begin{pmatrix} \beta & \gamma \\ \alpha & vI - \beta^* \end{pmatrix}$, então:

$$\|\zeta\| = \max\{\|a\|, \|b\|, \|c\|, \|d\|\} \leq k_4 \max\{\|\alpha\|, \|\beta\|, \|\gamma\|\} \leq k_4 \max\{\|\alpha\|, \|\beta\|, \|\gamma\|, \|vI - \beta\|\} = k_4 \|T(\zeta)\|.$$

Faça $Q(s) = X_s^{-1} \mathbb{D} X_s$, com essa nomenclatura $Y_1 = \int_0^1 \bar{h}(s) Q(s) ds$. Definimos também:

$$W_1 = \int_0^1 Q(s) ds$$

Pela desigualdade triangular:

$$\|Y_1\| \geq \|Q(\tau)\| - \|W_1 - Q(\tau)\| - \|Y_1 - W_1\|$$

Além disso (para detalhes, [7]),

- $\|Q(\tau)\| \geq \frac{1}{k_1^2} \|\mathbb{D}\|$
- $\|W_1 - Q(\tau)\| \leq \rho k_1^2 \|\delta\|_0 \|\mathbb{D}\|$

- $\|Y_1 - W_1\| \leq 2k_1k_2\|\mathbb{D}\|$
- $\|\mathbb{D}\| \geq k_4\|\zeta\|$

Finalmente, se $k_5 = k$:

$$\|Y_1\| \geq \left(\frac{k_1^{-2} - 2k_1k_2 - \rho k_1^2 \|\delta\|_0}{k_1k_4} \right) \|\zeta\| = k_5\|\zeta\| = k\|\zeta\|$$

□

Lema 6.3. *Seja \mathcal{N} uma variedade Riemanniana conexa de dimensão m e seja $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{N}$ uma aplicação suave tal que*

$$|d_x F(v)| \geq a > 0 \quad \forall (x, v) \in T\mathbb{R}^m \quad \text{com} \quad |v| = 1 \quad \text{e} \quad |x| \leq r$$

Então para todo $0 < b < ar$,

$$\{\omega \in \mathcal{N} \mid d(\omega, F(0)) < b\} \subseteq F(\{x \in \mathbb{R}^m \mid |x| < \frac{b}{a}\})$$

Demonstração. Ver [7].

□

Vamos mostrar que a imagem de \mathcal{U}_0 por S contém uma bola em $CS(n)$ com centro em $S(g)$ e raio $r = r(g, \mathcal{U})$. Considere a aplicação $G : \mathbb{R}^{2n(n+1)} \rightarrow \mathcal{X}^r(M)$ em que $G(\sigma, \lambda) = (\tilde{E})$. O diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{array}{ccc} B(0, k_5^{-1}r) \subset \mathbb{R}^{2n(n+1)} & \xrightarrow{G} & \mathcal{X}^r(M) \\ & \searrow F & \downarrow S \\ & & CS(n) \end{array}$$

A proposição [6.1] e o lema [6.3], mostram que $B(S(E), r) \subset F(B(0, k_5^{-1}r))$. Mas o que queremos é $B(S(E), r) \subset S(\mathcal{U}_0)$. Para isto, é suficiente mostrar que $G(B(0, k_5^{-1}r)) \subset \mathcal{U}_0$. De fato, $\|\tilde{E} - E\|_{C^1} < \varepsilon$ portanto $\tilde{E} \in \mathcal{V}_0 \subset \mathcal{U}_0$ e temos o resultado.

Antes de enunciar o teorema central deste capítulo, precisamos de duas definições.

Definição 7.1. *Seja ϕ um fluxo e η uma órbita periódica do tipo sela. Definimos a classe homoclínica $H(\eta, \phi)$ pelo fecho do conjunto das interseções transversais entre as variedades instáveis e estáveis de η*

$$H(\eta, \phi) = \overline{W_\phi^u(\eta) \cap W_\phi^s(\eta)}$$

Definição 7.2. *Dizemos que um conjunto invariante Λ tem decomposição dominada (na aplicação linear de Poincaré) se $\hat{T}_\theta M = N_\theta^{cs} \oplus N_\theta^{cu}$ é uma decomposição T^t invariante definida para todo $\theta \in \Lambda$ e existem constante $\lambda, C > 0$ tais que para $t > 0$*

$$\|T^t|_{N_\theta^{cs}}\| \leq Ce^{-\lambda t} m(T^t|_{N_\theta^{cu}})$$

em que $m(L) = \min\{\|Lv\| : \|v\| = 1\}$.

O objetivo deste capítulo é provar o resultado:

Teorema E. *Seja $E \in \mathcal{X}_g(M)$ e η uma órbita periódica do tipo sela hiperbólica do termostato gaussiano (M, g, E) cujo fluxo é ϕ .*

Para V uma vizinhança de η , vale uma das alternativas:

- (i) *a classe homoclínica $H(\eta, \phi) \subset V$ admite decomposição dominada*
- (ii) *dados uma vizinhança $U \subset H(\eta, \phi) \subset V$, $k \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$, existe $\tilde{E} \in \mathcal{X}_g(M)$ com $d(\tilde{E}, E)_{C^1} < \varepsilon$ tal que o termostato gaussiano (M, g, \tilde{E}) possui k órbitas periódicas atratoras ou repulsoras arbitrariamente próximos de η cuja órbita está contida em V .*

A demonstração de do teorema E é uma adaptação para o contexto dos termostatos gaussianos do artigo [5]. Na demonstração, utilizamos o teorema perturbativo do capítulo 6 e é necessário que as perturbações realizadas ocorram dentro do contexto conformalmente simplético.

Toda a demonstração do teorema pode ser feita no espaço das aplicações simpléticas e, pelo trabalho de Contreras em [7], vale uma versão para fluxos geodésicos do resultado:

Teorema E (simplético). *Seja (M, g) um fluxo geodésico cujo fluxo é ϕ e η uma órbita periódica do tipo sela hiperbólica. Para V uma vizinhança de η , vale uma das alternativas:*

(i) a classe homoclínica $H(\eta, \phi) \subset V$ é hiperbólica

(ii) dados uma vizinhança $U \subset H(\eta, \phi) \subset V$ e $k \in \mathbb{N}$, existe fluxo geodésico (M, \tilde{g}) arbitrariamente próximo de (M, g) com k ilhas arbitrariamente próximos de η cuja órbita está contida em U .

A seguir a idéia da demonstração do teorema. Seja Σ uma seção transversal em $\theta \in \eta$ e $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$ aplicação de Poincaré. Considere $\pi : T_\theta SM \rightarrow \hat{T}_\theta SM$ a projeção de $T_\theta SM$ sobre $\hat{T}_\theta SM$. Suponha que $\pi \circ df_\theta$ tenha $2n$ subespaços invariantes E_1, \dots, E_{2n} sobre a classe homoclínica $H(\theta, f)$. Suponha ainda que $H(\theta, f)$ admite $2n - 1$ pontos $\theta_1, \dots, \theta_{2n-1}$ tal que θ_i tem autovalor complexo que mistura os subespaços E_i e E_{i+1} . Então por uma perturbação \tilde{f} de f podemos fazer com que $\pi \circ d\tilde{f}_{\theta_i}^{per(\theta_i)}(E_i) = \pi \circ d\tilde{f}_{\theta_{i+1}}^{per(\theta_i)}(E_{i+1})$ e $\pi \circ d\tilde{f}_{\theta_{i+1}}^{per(\theta_{i+1})}(E_{i+1}) = \pi \circ d\tilde{f}_{\theta_i}^{per(\theta_{i+1})}(E_i)$ em que $per(\theta_i)$ é o período de θ_i . Uma propriedade de uma classe homoclínica é que ela admite transições e, utilizando esta propriedade, criamos um ponto θ cuja órbita passa próxima de cada θ_i e assim a diferencial de f herda as propriedades da diferencial de θ_i e portanto mistura todos os autoespaços E_k criando assim o poço ou fonte desejado. Porém, se o ângulo entre os subespaços E_i é grande o suficiente, não podemos criar autovalores complexos como no parágrafo anterior e temos decomposição dominada. O teorema perturbativo do capítulo 6 nos permite mostrar que uma classe homoclínica admite transições e traduzir o problema dinâmico em um problema de sistemas lineares.

Como aplicação deste teorema, considere $E \in \mathcal{X}_g(M)$ e o termostato gaussiano (M, g, E) em uma variedade M de dimensão 2. Por exemplo, a variedade M pode ser considerada a esfera \mathbb{S}^2 . Considere também $\phi_t : SM \rightarrow SM$ o fluxo associado, $\eta : \mathbb{R} \rightarrow SM$ uma órbita periódica de ϕ com período τ , um ponto θ contido na trajetória de η e $T^t : \hat{S}_{\eta(0)=\theta}M \rightarrow \hat{S}_{\eta(t)}M$ o cociclo derivada transversal entre os pontos $\eta(0) = \theta$ e $\eta(t)$.

Fixando coordenadas de Fermi ao longo de η , temos $\{e_0(t) = v(t), e_1(t)\}$ uma base ortonormal tal que $T^\tau : \hat{T}_\theta SM \rightarrow \hat{T}_\theta SM$ nessas coordenadas é dada por $T^\tau = e^{\int_0^\tau \mathbb{A}(t)dt}$ em que a matriz $\mathbb{A}_{2 \times 2}$ é da forma

$$\mathbb{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (-K_{11} + \frac{\partial E_1}{\partial x_1})(\eta(t)) & -\frac{E_0}{c}(\eta(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (\hat{K} + \hat{B})(\eta(t)) & -\frac{E_0}{c}(\eta(t)) \end{bmatrix}.$$

O teorema C nos diz que se η não tem decomposição dominada então existe um termostato gaussiano com uma órbita atratora ou repulsora na vizinhança de ϕ . A matriz $e^{\int_0^\tau \mathbb{A}(t)dt}$ tem decomposição dominada se e somente se os autovalores de $\int_0^\tau \mathbb{A}(t)dt$ são reais e distintos, ou seja,

$$d = \left(\frac{1}{2c} \int_0^\tau E_0 dt\right)^2 + \int_0^\tau (\hat{K} + \hat{B}) dt > 0$$

Para um termostato gaussiano as consequências são as seguintes. Seja η uma órbita fechada do termostato gaussiano $(M, g, E) \in TG^{sim}(M, g)$ tal que $d < 0$. Considere $\tilde{E}_0 = E_0$ e $\tilde{E}_1 = E_1 + \alpha(t)x_1$ em que α tem suporte contido na vizinhança coordenada, $\int_0^\tau \alpha(s)ds > -d$ e $|\alpha| < \varepsilon$. Se for possível encontrar uma função α com essas características, temos que \tilde{E} é uma ε -perturbação de E , o termostato gaussiano (M, g, \tilde{E}) possui η como órbita e η tem decomposição dominada.

De forma análoga, é possível construir uma ε -perturbação E' de E tal que $d' \leq 0$ quando existir uma função α com suporte contido na vizinhança coordenada tal que $\int_0^\tau \alpha(s)ds \leq -d$ e $|\alpha| < \varepsilon$. Quando existe α com essas características temos um termostato gaussiano (M, g, \tilde{E}) na vizinhança de (M, g, E') com um atrator ou um repulsor.

Já para o fluxo geodésico temos as seguintes consequências. No fluxo geodésico temos o campo E identicamente nulo, $E \equiv 0$, e a condição para termos decomposição dominada se escreve

$$d = \int_0^\tau -K dt > 0.$$

Se supormos que a curvatura é sempre maior ou igual a zero, $K \geq 0$, então esta desigualdade nunca é satisfeita. Concluimos que as órbitas fechadas do fluxo geodésico na esfera \mathbb{S}^2 neste caso não tem

decomposição dominada. O caso simplético do teorema C e o teorema de Franks para fluxos geodésicos, em [7], nos permitem concluir que existe uma perturbação \tilde{g} da métrica g de forma que o fluxo geodésico $(\mathbb{S}^2, \tilde{g})$ apresenta uma ilha.

7.1 Sistemas lineares conformalmente simpléticos e transições

Esta seção faz a tradução de problemas no espaço dos difeomorfismos para o contexto de sistemas lineares.

Definição 7.3. *Seja Σ um espaço topológico, f um homeomorfismo definido em Σ , $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \Sigma$ um fibrado vetorial localmente trivial (ou de dimensão finita) sobre Σ tal que a dimensão da fibra \mathcal{E}_x , $x \in \Sigma$, seja constante sobre Σ , ω uma 2-forma conformalmente simplética em Σ , $\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ uma função positiva e $A : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ uma aplicação tal que $A_x = A(x, \cdot) : \mathcal{E}_x \rightarrow \mathcal{E}_{f(x)}$ é um isomorfismo linear conformalmente simplético tal que $A^*\omega = \mu\omega$ e $\|A_x\| < \infty$ para todo $x \in \Sigma$. Chamamos a 6-upla $(\Sigma, f, \mathcal{E}, A, \omega, \mu)$ de sistema linear conformalmente simplético ou cociclo linear conformalmente simplético sobre f .*

Definimos a norma da aplicação A , $\|A\| = \text{máximo}\{\sup_{x \in \Sigma} \|A_x\|, \sup_{x \in \Sigma} \|A_x^{-1}\|\}$. Quando não houver ambiguidade, chamaremos o sistema linear $(\Sigma, f, \mathcal{E}, A, \mu)$ simplesmente de A .

Lema 7.1. *Sejam $(\Sigma, f, \mathcal{E}, A, \mu)$ e $(\Sigma, f, \mathcal{E}, B, \mu)$ sistemas conformalmente simpléticos. Então o sistema $(\Sigma, f, \mathcal{E}, A \circ B, \mu)$ satisfaz $\|A \circ B\| \leq \|A\| \|B\|$.*

Denotamos $CS^\infty(\Sigma, f, \mathcal{E})$ o conjunto dos sistemas lineares conformalmente simpléticos $(\Sigma, f, \mathcal{E}, A, \mu)$ para toda μ e munimos $CS(\Sigma, f, \mathcal{E})$ da distância $d(A, B) = \text{máximo}\{\|A - B\|, \|A^{-1} - B^{-1}\|\}$ para $A, B \in CS^\infty(\Sigma, f, \mathcal{E})$.

Lema 7.2. *Seja $K > 0$, $\varepsilon_1 > 0$ e um sistema linear conformalmente simplético $(\Sigma, f, \mathcal{E}, A, \mu)$ tal que $\|A\| < K$ então para toda ε_1 -perturbação simplética da identidade $(\Sigma, Id_\Sigma, \mathcal{E}, E, 1)$ as composições $E \circ A$ e $A \circ E$ são ε -perturbações de A com $\varepsilon = \varepsilon_1 K$. Além disso, para toda ε -perturbação \tilde{A} de A existe ε_1 -perturbação simplética da identidade $(\Sigma, Id_\Sigma, \mathcal{E}, E, 1)$ tal que $\tilde{A} = E \circ A$.*

Demonstração. A aplicação $E \circ A$ satisfaz $\|E \circ A - A\| = \|(E - Id_\Sigma) \circ A\| \leq \|E - Id_\Sigma\| \|A\| < \varepsilon_1$ e $(E \circ A)^*\omega = A^*E^*\omega = \mu\omega$. De forma análoga, $A \circ E$ satisfaz, $\|A \circ E - A\| = \|A \circ (E - Id_\Sigma)\| \leq \|A\| \|E - Id_\Sigma\| < \varepsilon$ e $(A \circ E)^*\omega = \mu\omega$.

Defina $E = \tilde{A} \circ A^{-1}$, então $E \circ A = \tilde{A}$ e $\|E - Id_\Sigma\| < \|\tilde{A} - A\| \|A^{-1}\| < \varepsilon_1$ e $E^*\omega = (\tilde{A} \circ A^{-1})^*\omega = (A^{-1})^* \circ \tilde{A}^*\omega = (A^{-1})^*(\mu\omega) = \mu\omega$. \square

Definição 7.4. *O sistema linear conformalmente simplético $(\Sigma, f, \mathcal{E}, A, \mu)$ é chamado sistema linear conformalmente simplético periódico se todo $x \in \Sigma$ é ponto periódico da aplicação f . Denotamos $p(x)$ o seu período.*

Definição 7.5. *O sistema linear conformalmente simplético $(\Sigma, f, \mathcal{E}, A, \mu)$ é chamado sistema linear conformalmente simplético contínuo se a estrutura euclideana definida nas fibras varia continuamente e a aplicação $A : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ é contínua.*

Definição 7.6. *O sistema linear conformalmente simplético $(\Sigma, f, \mathcal{E}, A, \mu)$ é chamado sistema de matrizes conformalmente simpléticas se $\mathcal{E} = \Sigma \times \mathbb{R}^n$, \mathbb{R}^n é munido da métrica euclideana canônica e existe $\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ positiva tal que $A^t J A = \mu J$. Denotamos o sistemas de matrizes conformalmente simpléticas por (Σ, f, A, μ)*

Dado um conjunto \mathcal{A} , uma palavra com letras em \mathcal{A} é uma sequência finita de elementos de \mathcal{A} . O tamanho dessa palavra é o número de letras que a compõe. O conjunto das palavras admite uma

estrutura de semigrupo natural: o produto da palavra $[a] = (a_1, \dots, a_n)$ por $[b] = (b_1, \dots, b_n)$ é $[a][b] = (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n)$. Dizemos que uma palavra $[a]$ não é uma potência se $[a] \neq [b]^k$ para toda palavra $[b]$ com $k > 1$.

Se $(\Sigma, f, \mathcal{A}, \mu)$ é um sistema de matrizes conformalmente simplético então para $x \in \Sigma$ denotamos a palavra $(A(f^{p(x)-1}(x)), \dots, A(x))$ por $[M]_A(x)$. A matriz $M_A(x) = A(f^{p(x)-1}) \circ \dots \circ A(x)$ é o produto das letras de $[M]_A(x)$.

Definição 7.7. *Dado $\varepsilon > 0$, um sistema linear periódico conformalmente simplético $(\Sigma, f, \mathcal{E}, A, \mu)$ admite ε -transições se:*

- (i) *Para toda família finita de pontos $x_1, \dots, x_n = x_1 \in \Sigma$ existe um sistema de coordenadas sobre \mathcal{E} tal que podemos considerar este sistema linear como um sistema de matrizes conformalmente simpléticas $(\Sigma, f, A, \omega, \mu)$ e*
- (ii) *Para todo $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ existe uma palavra finita $[t^{i,j}]$ de matrizes em $CS(n, \mathbb{R})$ tal que a palavra*

$$[W(\iota, a)] = [t^{i_1, i_m}][M_A(x_{i_m})]^{a_m}[t^{i_m, i_{m-1}}][M_A(x_{i_{m-1}})]^{a_{m-1}} \dots [t^{i_2, i_1}][M_A(x_{i_1})]^{a_1}$$

com $\iota = (i_1, \dots, i_m) \in \{1, \dots, n\}^m$, $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{N}^n$ e a palavra $((x_{i_1}, a_{i_1}), \dots, (x_{i_m}, a_{i_m}))$ com letras em $\Sigma \times \mathbb{N}$ não é uma potência.

Então existe $x = x(\iota, a) \in \Sigma$ tal que

- (ii.1) *tam($[W(\iota, a)]$) = período(x)*
- (ii.2) *A palavra $[M]_A(x)$ está ε -próxima de $[W(\iota, a)]$ e existe ε -perturbação \tilde{A} de A tal que $[M]_{\tilde{A}(x)} = [W(\iota, a)]$*
- (ii.3) *Podemos escolher x tal que a distância entre a órbita de x e x_i , $i \in \{1, \dots, n-1\}$, é limitada por uma função α_i que tende a zero quando a_i tende ao infinito.*

Dados ι e a como acima, denotamos $[t^{i,j}]$ uma ε -transição de x_1 para x_j e ao produto $T_{i,j}$ das letras compondo $[t^{i,j}]$ chamamos ε -matriz de transição.

Definição 7.8. *Dizemos que um sistema linear conformalmente simplético periódico admite transições se para todo $\varepsilon > 0$ este sistema admite ε -transições.*

A seguir o dicionário entre sistemas lineares conformalmente simpléticos e classes homoclinicas para termostatos gaussianos:

Lema 7.3. *Seja p uma sela hiperbólica de índice k (dimensão da variedade estável). A diferencial df da aplicação de Poincaré f induz um sistema linear contínuo com transições no conjunto Σ das selas hiperbólicas em $H(p, f)$ de índice k e homoclinicamente relacionadas com p .*

Demonstração. Fixe $\varepsilon > 0$ e uma família finita $x_1, \dots, x_n \in \Sigma$. Os pontos x_i são homoclinicamente relacionados com p , então existe um subconjunto hiperbólico compacto e transitivo $K \subset H(p, f)$ contendo todos os pontos x_i . Cubra K por uma partição de Markov formada de retângulos R_k . Para cada $x \in K$ defina coordenadas conformalmente simpléticas $\phi_x : U_x \rightarrow M$. Refine a partição de Markov de forma que R_k esteja contido em algum aberto U_x e para x e y no mesmo retângulo $\|A(x) - A(y)\| < \varepsilon$ e $\|A(x)^{-1} - A(y)^{-1}\| < \varepsilon$. Para cada retângulo R_k , escreva df nas coordenadas conformalmente simpléticas e considere o sistema de matrizes associado (K, f, A, μ) . As transições de x_i para x_j são obtidas pela propriedade da partição de Markov e o teorema perturbativo conformalmente simplético. \square

Uma propriedade válida em um ponto de um sistema conformalmente simplético que admite transições se espalha sobre um conjunto denso, de acordo com o lema abaixo (válido somente para o caso estritamente conforme, ou seja, μ não é identicamente 1 pois com $\mu \equiv 1$ não temos contrações nem dilatações):

Lema 7.4 (Propriedade de Espalhamento). *Seja $(\Sigma, f, \mathcal{E}, A, \mu)$ um sistema linear conformalmente simplético periódico com transições. Fixe $\varepsilon > \varepsilon_0 > 0$ e assumamos que existe ε_0 -perturbação B de A e $x \in \Sigma$ tal que $[M]_B$ é uma dilatação (contração) então existe um conjunto denso f -invariante $\Sigma_C \subset \Sigma$ e uma ε -perturbação C de A tal que para todo $y \in \tilde{\Sigma}$, $[M]_C(y)$ é uma dilatação (contração).*

Demonstração. Considere $\Sigma_B \subset \Sigma$ um subconjunto denso e tome $\varepsilon_1 = \varepsilon - \varepsilon_0$.

Fixe $\delta > 0$ e considere $z \in \Sigma$, a família de pontos $x_1 = z \in \Sigma_B$, $x_2 = x$ e $x_3 = z$ e a palavra

$$[W] = [t^{1,2}][M]_A^n(x)[t^{2,1}][M]_A^{n(z,\delta)}(z)$$

O sistema linear $(\Sigma, f, \mathcal{E}, A, \mu)$ admite transições logo existe $z_n \in \Sigma$ tal que $d(z_n, z) < \delta$ e uma ε_1 -perturbação \tilde{A} de A tal que $[M]_{\tilde{A}}(z_n) = [W]$.

Considere a ε_0 -perturbação C de \tilde{A} definida ao longo da órbita de z_n por

$$[M]_C(z_n) = [t^{1,2}][M]_B^n(x)[t^{2,1}][M]_A^{n(z,\delta)}(z).$$

Fazendo n grande o suficiente, temos que $[M]_C(z_n)$ é uma dilatação (contração) e Σ_C é definido como a união de z_n . \square

Definição 7.9. *Seja um sistema linear conformalmente simplético $(\Sigma, f, \mathcal{E}, A, \mu)$. Uma ε -perturbação \tilde{A} de A é um sistema linear conformalmente simplético $(\Sigma, f, \mathcal{E}, \tilde{A}, \mu)$ tal que $d(\tilde{A}, A) < \varepsilon$ e que preserva a mesma estrutura conforme μ , ou seja, $\tilde{A}^*\omega = \mu\omega$.*

Lema 7.5. *Fixe $\varepsilon > 0$. Toda ε -perturbação de uma matriz $A \in CS(n, \mathbb{R})$ pode ser escrita como composição de A com uma matriz simplética ε_1 -próxima da identidade E , com $\varepsilon = \varepsilon_1 \|A\|$. As composições de A com E matriz simplética ε_1 -próxima da identidade, $A \circ E$ e $E \circ A$, são ε -perturbações de A .*

Demonstração. Seja \tilde{A} ε -perturbação de A , defina a matriz simplética $E = \tilde{A} \circ A^{-1}$. Então $E \circ A = \tilde{A}$ e $\|E \circ A - A\| < \varepsilon$.

Seja $E \in S(n, \mathbb{R})$ matriz simplética ε_1 -próxima da identidade. Então $E \circ A$ e $A \circ E$ são ε -perturbações de A . \square

Definição 7.10. *Um sistema linear conformalmente simplético periódico $(\Sigma, f, \mathcal{E}, B, \mu)$ de dimensão $2n$ é diagonalizável se para todo $x \in \Sigma$ a matriz $M_B(x)$ tem autovalores reais positivos com multiplicidade 1. Denotamos $\lambda_1(x) \leq \dots \leq \lambda_n(x) \leq \lambda_{\bar{n}}(x) \leq \dots \leq \lambda_{\bar{1}}(x)$ os autovalores de $M_B(x)$ tais que $\lambda_i(x)\lambda_{\bar{i}}(x) = \mu(x)$ para $i = 1, \dots, n$. Também denotamos $E_i(x)$ o autoespaço correspondente a $\lambda_i(x)$ e $E_{\bar{i}}(x)$ o autoespaço correspondente a $\lambda_{\bar{i}}(x)$. Então $\mathcal{E} = (\oplus_1^n E_i) \oplus (\oplus_1^n E_{\bar{i}})$ é uma decomposição invariante de B .*

Lema 7.6. *Seja $(\Sigma, f, \mathcal{E}, A, \mu)$ um sistema linear periódico conformalmente simplético com transições. Então para $\varepsilon > 0$ existe ε -perturbação diagonalizável B de A definida num conjunto denso $\tilde{\Sigma} \subset \Sigma$.*

Demonstração. Dada uma matriz $A \in CS(n, \mathbb{R})$, existe perturbação arbitrariamente pequena $B \in CS(n, \mathbb{R})$ de A tal que B tem todos autovalores reais positivos com multiplicidade 1.

Isto segue de [11] que constrói uma mudança de coordenadas simpéticas T tal que

$$T^{-1}AT = \left[\begin{array}{ccc|ccc} A_{11} & 0 & 0 & A_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & A_{n1} & 0 & 0 & A_{n2} \\ \hline A_{13} & 0 & 0 & A_{14} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & A_{n3} & 0 & 0 & A_{n4} \end{array} \right]$$

em que as submatrizes $\begin{bmatrix} A_{i1} & A_{i2} \\ A_{i3} & A_{i4} \end{bmatrix}$ são blocos canônicos análogos aos blocos de Jordan. \square

7.2 Restrições e decomposições

Um subfibrado invariante F é uma coleção de subespaços $F_x \subset \mathcal{E}_x$ tal que $\dim(F(x)) = c \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \Sigma$ e $A(F(x)) = F(f(x))$. Uma A -decomposição $E = F \oplus G$ é dada por subfibrados invariantes tais que $\mathcal{E}_x = E(x) \oplus G(x)$, $\forall x \in \Sigma$.

Definição 7.11. *Seja $(\Sigma, f, \mathcal{E}, A, \mu)$ um sistema linear conformalmente simplético e $\mathcal{E} = F \oplus G$ uma A -decomposição. Dizemos que esta decomposição é uma decomposição dominada e denotamos, $F \prec G$, se existe $l \in \mathbb{N}$ tal que para todo $x \in \Sigma$:*

$$\|A^l(x)|_F\| \|A^{-l}(f^l(x))|_G\| < \frac{1}{2}$$

Definição 7.12. *Seja $(\Sigma, f, \mathcal{E}, A, \mu)$ um sistema linear conformalmente simplético e $\mathcal{E} = \oplus E_i$ uma A -decomposição em k subespaços invariantes E_1, \dots, E_k . Dizemos que dois subespaços E_m e E_n , $m, n \in \{1, \dots, k\}$, tem decomposição dominada associada aos subespaços E_m e E_n e denotamos $E_m \prec E_n$ se existe $l \in \mathbb{N}$ tal que para todo $x \in \Sigma$ as restrições de A em cada um desses subespaços satisfaz:*

$$\|A^l(x)|_{E_m}\| \|A^{-l}(f^l(x))|_{E_n}\| < \frac{1}{2}$$

Se quisermos enfatizar o papel de l , dizemos que $F \oplus G$ é uma l -decomposição dominada e escrevemos $F \prec_l G$.

Diferentemente do caso geral, tratado em [5], precisamos preservar a estrutura conforme e portanto não podemos mais separar as matrizes em restrição e quociente de forma que uma perturbação na restrição não influencia no quociente e vice-versa. Vamos substituir o conceito de restrição e quociente pelo conceito apenas de *restrição*: sejam k subespaços invariantes F_1, \dots, F_k tais que $\mathcal{E} = \oplus F_i$, podemos escrever A na forma:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & A_k \end{pmatrix}$$

com $A_i(F_i) \subset F_i$.

Lema 7.7. *Seja $K > 0$ e $l \in \mathbb{N}$ existe L tal que dado um sistema linear $(\Sigma, f, \mathcal{E}, A, \mu)$ limitado por K com decomposição invariante $E \oplus F \oplus G$ temos*

(i) *Se $E \prec_l F$ e $E \prec_l G$ então $E \prec_L (F \oplus G)$.*

(ii) Se $F \prec_l G$ e $E \prec_l G$ então $(E \oplus F) \prec_L G$.

Demonstração. Usando a base conformalmente simplética podemos escrever as matrizes do sistema conformalmente simplético A da seguinte forma:

$$A = \begin{pmatrix} A_E & 0 & 0 \\ 0 & A_F & 0 \\ 0 & 0 & A_G \end{pmatrix}$$

E a demonstração do lema segue como no artigo original considerando $B(x) = 0$. \square

Definição 7.13. Considere um conjunto $\Sigma' \subset \Sigma$ f -invariante e a restrição do fibrado \mathcal{E} a Σ' . O sistema linear conformalmente simplético induzido por A , $(\Sigma', f|_{\Sigma'}, \mathcal{E}_{\Sigma'})$, é chamado subsistema induzido por A em Σ' .

Lema 7.8. Seja $(\Sigma, f, \mathcal{E}, A, \mu)$ um sistema linear conformalmente simplético contínuo tal que existe um subconjunto denso invariante $\Sigma_1 \subset \Sigma$ cujo subsistema admite l -decomposição dominada então $(\Sigma, f, \mathcal{E}, A, \mu)$ admite l -decomposição dominada. Mais geralmente, suponha que exista uma sequência de sistemas $(\Sigma, f, \mathcal{E}, A_k, \mu)$ convergindo para $(\Sigma, f, \mathcal{E}, A, \mu)$ tal que para todo k existe um subconjunto denso invariante $\Sigma_k \subset \Sigma$ onde A_k admite l -decomposição dominada. Então A admite l -decomposição dominada em todo Σ . Finalmente, uma decomposição dominada de um sistema linear conformalmente simplético contínuo é contínua.

Demonstração. Dado $x \in \Sigma$ considere $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência $x_k \in \Sigma$ convergindo para x . Tomando uma subsequência, podemos assumir que $E_k(x_k)$ converge a $E(x)$ e $F_k(x_k)$ converge a $F(x)$.

$\mathcal{E}(x) = E(x) \oplus F(x)$ Primeiramente note que $E(x) + F(x) = \mathcal{E}(x)$. Das convergências de A_k para A_x , x_k para x , $E_k(x_k)$ para $E(x)$ e $F_k(x_k)$ para $F(x)$, temos $2 \frac{\|A^l u\|}{\|u\|} < \frac{\|A^l v\|}{\|v\|}$ e $2 \frac{\|A^{-l} v\|}{\|v\|} < \frac{\|A^{-l} u\|}{\|u\|}$.

A seguir, observe que as duas desigualdades acima caracterizam unicamente os subespaços $E(x)$ e $F(x)$ (uma vez que a dimensão está fixada). Os vetores $u \in E(x)$ são tais que suas iteradas por A crescem mais lentamente do que os vetores $w \notin E(x)$. Os vetores $v \in F(x)$ são tais que suas iteradas por A^{-1} crescem mais lentamente do que os vetores $w \notin F(x)$.

E e F estão unicamente determinados Suponha que exista sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $E(x_k)$ converge a $G(x)$ e $F(x_k)$ converge a $H(x)$ tal que $G \prec H$.

Suponha que $\dim E \leq \dim G$. Vamos mostrar que $E \subset G$. Suponha, por contradição que existe $v \in E \setminus G$. Então existe $w \in G \setminus E$ tal que $v \in H(x) \cup E(x)$ e $w \in G(x) \cup F(x)$. Assim $\frac{\|Av\|}{\|v\|} < \frac{1}{2} \frac{\|Aw\|}{\|w\|}$, $\frac{\|Aw\|}{\|w\|} < \frac{1}{2} \frac{\|Av\|}{\|v\|}$ e assim temos uma contradição. Portanto $E \subset G$.

Analogamente, concluímos que $\dim F \geq \dim H$ e $H \subset F$. Portanto $\dim E = \dim F$ e $\dim G = \dim H$.

E e F são subespaços invariantes Basta observar que $A(E(x))$ é o limite de $E_k(f(x_k))$ e $A(F(x))$ é o limite de $F_k(f(x_k))$.

Continuidade A continuidade segue da continuidade de A e da unicidade da decomposição dominada. \square

Lema 7.9. Seja $(\Sigma, f, \mathcal{E}, A, \mu)$ um sistema linear conformalmente simplético periódico com ε -transições com dimensão n e decomposição dominada $E_1 \prec \dots \prec E_n$. Fixe $\varepsilon_0 > \varepsilon$. Então dados dois pontos x_i e $x_j \in \Sigma$, $k \in \{1, \dots, m\}$ e $[t^{j_i}]$ ε -transição entre p_i e p_j . Então existe ε_0 -transição $[\tilde{t}^{j_i}]$ tal que \tilde{T}_{j_i} leva $E_k(x_i)$ em $E_k(x_j)$.

Demonstração. A aplicação T_{ji} satisfaz $\text{angulo}(\tilde{T}_{ij}(E_k(x_i)), E_k(x_j)) < \varepsilon$. Considere perturbação de \tilde{T}_{ji} tal que $\tilde{T}_{ji}(E_k(x_i))$ não tenha componente em $E_m(x_i)$, $m > k$. Devido a decomposição dominada, a imagem de $E_k(x_i)$ por $M_A^n(x_j)\tilde{T}_{ji}$ fica arbitrariamente próxima de $E_k(x_j)$ quando n é suficientemente grande. Perturbando M_A com uma rotação, temos que $M_A^n(x_j)\tilde{T}_{ji}(E_k(x_i)) = E_k(x_j)$. \square

O próximo lema necessita da definição de posto de um autovalor complexo.

Definição 7.14. *Seja $M \in GL(n, \mathbb{R})$ tal que M tem autovalor complexo λ . Dizemos que λ tem posto $(i, i+1)$ se existe decomposição M -invariante de \mathbb{R}^n , $F \oplus G \oplus H$, tal que:*

- (i) *Os autovalores σ de F satisfazem $|\sigma| < |\lambda|$*
- (ii) *Os autovalores σ de H satisfazem $|\sigma| > |\lambda|$*
- (iii) *$\dim(F) = i - 1$ e $\dim(F) + \dim(G) + \dim(H) = n$*
- (iv) *O plano G é o autoespaço de λ*

Lema 7.10. *Fixe $\varepsilon > 0$. Seja $(\Sigma, f, \mathcal{E}, A, \mu)$ um sistema linear conformalmente simplético e $p \in \Sigma$ um ponto periódico com autovalor complexo de posto $(i, i+1)$ associado ao subespaço $E_i \oplus E_{i+1}$. Então existe ε -perturbação \tilde{A} de A e $m \in \mathbb{N}$ tal que $[M]_{\tilde{A}}^m(p)(E_{i+1}) = E_i$.*

Demonstração. Realizamos uma $\frac{\varepsilon}{2}$ -perturbação \tilde{A} de A tal que o autovalor complexo de posto $(i, i+1)$ de \tilde{A} tem entradas irracionais. Então existe m tal que o ângulo entre $[M]_{\tilde{A}}^m(p)(E_{i+1})$ e E_i é igual a $\alpha < \frac{\varepsilon}{2}$. Composto \tilde{A} com uma rotação pelo ângulo α (simplética!), temos o resultado. \square

Lema 7.11. *Dado um vetor v e duas matrizes conformalmente simpléticas T e M tal que o vetor w está associado ao maior autovalor em módulo de M , então existe n uma ε -perturbação \tilde{B} de $B = M^n \circ T$ tal que $\tilde{B}(v) = w$.*

Demonstração. Se v é invariante, realizamos uma perturbação simplética de forma a torná-lo não-invariante. A seguir, iteramos M de forma que o ângulo entre $Bv = M^n \circ T(v)$ e w seja igual a $\alpha < \varepsilon$. Compomos B com uma rotação pelo ângulo α e temos o lema. \square

7.3 Caso bidimensional

Proposição 7.1. *Dado $K > 0$, $\varepsilon > 0$ existe $l \in \mathbb{N}$ um sistema linear conformalmente simplético $(\Sigma, f, \mathcal{E}, A, \mu)$ de dimensão 2, com norma limitada por K e tal que as matrizes $M_A(x)$ preservam orientação satisfaz uma das possibilidades:*

- (i) *A admite l -decomposição dominada*
- (ii) *Existe ε -perturbação \tilde{A} de A e $x \in \Sigma$ tal que $M_{\tilde{A}}(x)$ tem autovalor complexo*

Demonstração. A demonstração no caso conformalmente simplético não difere da demonstração original, uma vez que a original é feita com perturbações simpléticas sobre a matriz 2×2 . \square

A idéia central do caso bidimensional surge com um argumento de R. Mañé em [?]. Se denotarmos $R^\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a rotação pelo ângulo θ :

Lema 7.12. *Para todo $\alpha > 0$ e toda matriz $M \in GL_+(2, \mathbb{R})$ com dois autoespaços E_1 e E_2 cujo ângulo é menor que α , existe $s \in [-1, 1]$ tal que $R^{s\alpha} \circ M$ tem autovalor complexo.*

Demonstração. Seja $M \in GL_+(2, \mathbb{R})$ uma matriz com os autoespaços com ângulo entre eles igual a $\theta < \alpha$. Na base canônica a A se escreve

$$M = \begin{bmatrix} \lambda_1 & (\lambda_2 - \lambda_1) \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico de $R^{s\alpha} \circ M$

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda \left((\lambda_2 + \lambda_1) \cos(s\alpha) + (\lambda_2 - \lambda_1) \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \sin(s\alpha) \right) + 2\lambda_2\lambda_1 = 0$$

tem raízes complexas se

$$\left((\lambda_2 + \lambda_1) \cos(s\alpha) + (\lambda_2 - \lambda_1) \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \sin(s\alpha) \right)^2 - 8\lambda_2\lambda_1 < 0$$

Se $\lambda_2 - \lambda_1 \leq 0$, fazendo $s\alpha = \theta$, temos $\lambda_2 \cos^2\theta - 2\lambda_1 < 0$ pois $\lambda_2 \cos^2\theta \leq \lambda_2 \leq \lambda_1 < 2\lambda_1$. Porém se $\lambda_2 - \lambda_1 > 0$, fazendo $s\alpha = -\theta$, temos $\lambda_1 \cos^2\theta - 2\lambda_2 < 0$ pois $\lambda_1 \cos^2\theta \leq \lambda_1 < \lambda_2 < 2\lambda_2$. Isto mostra que em ambos os casos temos um autovalor complexo e assim temos o lema demonstrado. \square

Em particular, temos o mesmo resultado para o conjunto das matrizes conformalmente simpléticas de dimensão dois, $CS_+(2, \mathbb{R})$:

Lema 7.13. *Para todo $\alpha > 0$ e toda matriz $M \in CS_+(2, \mathbb{R})$ com dois autoespaços E_1 e E_2 cujo ângulo é menor que α , existe $s \in [-1, 1]$ tal que $R^{s\alpha} \circ M$ tem autovalor complexo.*

Demonstração. A demonstração é igual a demonstração do caso geral. \square

7.4 Dicotomia genérica

Para demonstrarmos o teorema C, é suficiente mostrar o resultado para sistemas lineares, uma vez que já fizemos a redução do problema para este caso.

Proposição 7.2. *Para $K > 0$, $n > 0$ e $\varepsilon > 0$ existe $l > 0$ tal que um sistema linear conformalmente simplético periódico $(\Sigma, f, \mathcal{E}, A, \mu)$ limitado por K com transições satisfaz uma das possibilidades:*

- (i) *A admite l -decomposição dominada*
- (ii) *Existe ε -perturbação \tilde{A} de A e um ponto $x \in \Sigma$ tal que $M_A(x)$ é uma homotetia.*

Enunciado simplético:

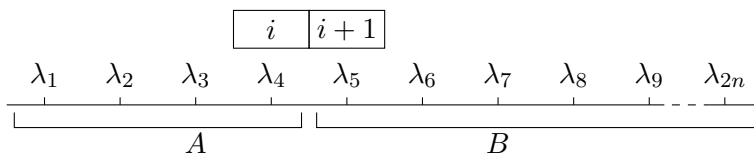
Proposição 7.3. *Para $K > 0$, $n > 0$ e $\varepsilon > 0$ existe $l > 0$ tal que um sistema linear conformalmente simplético periódico $(\Sigma, f, \mathcal{E}, A, 1)$ limitado por K com transições satisfaz uma das possibilidades:*

- (i) *A admite l -decomposição dominada*
- (ii) *Existe ε -perturbação \tilde{A} de A e um ponto $x \in \Sigma$ tal que $M_A(x)$ só tem autovalores complexos.*

A demonstração de [7.2] é dividida em dois passos: O primeiro nos diz que se não podemos criar autovalores complexos de posto $(i, i + 1)$ para $i \in \{1, \dots, 2n - 1\}$ então temos decomposição dominada e o segundo nos diz que se podemos criar tais autovalores então podemos perturbar o sistema linear original com transições e obter homotetias.

- $\lambda_j^t = \lambda_{i+1} \leq \lambda_{k+1}^t$
- $\lambda_j^t \leq \lambda_i = \lambda_{k+1}^t$
- $\lambda_i < \lambda_j^t = \lambda_{k+1}^t < \lambda_{i+1}$
- $\lambda_{k+1}^t = \lambda_{i+1} \leq \lambda_j^t$
- $\lambda_{k+1}^t \leq \lambda_i = \lambda_j^t$
- $\lambda_i < \lambda_{k+1}^t = \lambda_j^t < \lambda_{i+1}$

As três últimas possibilidades se referem aos casos $j \leq n$, $k+1 > n$ e $j+n \neq k+1$. Em cada um destes casos uma pequena perturbação produz um autovalor complexo de posto $(i, i+1)$. A diferença entre o caso geral é que no espaço dos conformalmente simpléticos, além do autovalor complexo de posto $(i, i+1)$ associado aos subespaços E_j e E_{k+1} , podemos gerar também autovalores complexos associados aos subespaços $E_{\bar{j}}$ e $E_{\overline{k+1}}$



□

Lema 7.15. *Seja $(\Sigma, f, \mathcal{E}, B, \omega, \mu)$ um sistema linear conformalmente simplético diagonalizável de dimensão $2n$ e limitado por $K > 0$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $l_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $1 \leq i \leq 2n - 1$ vale um dos dois itens abaixo:*

- (i) B admite ε -perturbação com autovalor complexo de posto $(i, i+1)$
- (ii) Para todo $j \leq i$, $E_j \prec \oplus_{i+1}^{2n} E_k$

Demonstração. A demonstração é uma aplicação indutiva dos lemas [7.7] e [7.14]. □

Lema 7.16. *Seja $(\Sigma, f, \mathcal{E}, B, \omega, \mu)$ um sistema linear conformalmente simplético diagonalizável de dimensão $2n$ e limitado por $K > 0$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $L \in \mathbb{N}$ tal que para $1 \leq i \leq 2n - 1$ vale um dos dois itens abaixo:*

- (i) B admite ε -perturbação com autovalor complexo de posto $(i, i+1)$
- (ii) $\oplus_1^i E_k \prec_L \oplus_{i+1}^{2n} E_k$

Demonstração. A demonstração é uma aplicação indutiva dos lemas [7.7] e [7.15]. □

7.6 Condição suficiente para criação de homotetias em um sistema linear

Nesta seção vamos demonstrar a proposição 7.5. A idéia da prova é utilizar transições para multiplicar matrizes com autovalores complexos de diferentes postos para obter homotetias. Para a demonstração precisamos de aplicações S_j definidas por $S_j(E_k) = E_{(k+j)(\text{mod } 2n)+1}$ que o lema abaixo garante a existência.

Lema 7.17. *Seja $(\Sigma, f, \mathcal{E}, A, \omega, \mu)$ um sistema linear conformalmente simplético contínuo de dimensão $2n$ com transições. Fixe $\varepsilon_0 > 0$ e assumamos que para $i = 1, \dots, 2n - 1$ existe ε_0 -perturbação de A com autovalor de posto $(i, i + 1)$. Então para todo $\varepsilon_1 > 0$ existe um ponto θ tal que para todo $1 \leq i < 2n$ existe ε_1 -transição $[t^i]$ de θ em θ com as propriedades:*

- (i) *Existe ε_1 -perturbação $[M]_{\tilde{A}}(\theta)$ de $[M]_A(\theta)$ tal que $[M]_{\tilde{A}}(\theta)$ tem todos os autovalores com multiplicidade 1. Denotamos $\lambda_1 < \dots < \lambda_{2n}$ estes autovalores e E_j os autoespaços correspondentes.*
- (ii) *Existe $(\varepsilon_0 + \varepsilon_1)$ -perturbação $[\tilde{t}^i]$ de $[t^i]$ tal que a matriz \tilde{T}^i deixa invariante E_j , $j \notin \{i, i + 1\}$ e troca os subespaços E_i e E_{i+1} .*

Demonstração. A demonstração é uma série de perturbações de A :

1. Chamaremos $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1}{5}$ ($\varepsilon_2 < \varepsilon_1$).
2. Seja $\theta \in \Sigma$. Por [7.6], existe ε_2 -perturbação \tilde{A}_1 de A tal que $[M]_{\tilde{A}_1}(\theta)$ tem todos os autovalores positivos e com multiplicidade 1. Isto mostra o primeiro item do lema.
3. Por hipótese, existem pontos θ_i tais que uma ε_0 -perturbação de A produz autovalor de posto $(i, i + 1)$ para $i = 1, \dots, 2n - 1$. Considere ε_0 -perturbação \tilde{A}_2 de A tal que $[M]_{\tilde{A}_2}(\theta_i)$ tem autovalor complexo de posto $(i, i + 1)$ e todos os outros autovalores λ_j , $j \notin \{i, i + 1\}$, tem multiplicidade 1. Considere a decomposição invariante por \tilde{A}_2 de $\mathcal{E}(\theta_i) = E(\theta_i) \oplus F(\theta_i) \oplus G(\theta_i)$ onde $F(\theta_i)$ é o subespaço associado ao valor complexo em questão e $E(\theta_i) \prec F(\theta_i) \prec G(\theta_i)$.
4. Por [7.9], existe ε_2 -perturbação \tilde{A}_3 de \tilde{A}_2 tal que $E(\theta) \prec F(\theta) \prec G(\theta)$ é levado em $E(\theta_i) \prec F(\theta_i) \prec G(\theta_i)$ e $E(\theta_i) \prec F(\theta_i) \prec G(\theta_i)$ é levado em $E(\theta) \prec F(\theta) \prec G(\theta)$.
5. Escreva $E_i(\theta_i) = \tilde{T}(E_i(\theta))$ e $E_{i+1} = \tilde{T}(E_{i+1}(\theta))$.
6. Por [7.10], existe ε_2 -perturbação \tilde{A}_4 de \tilde{A}_3 e $m \in \mathbb{N}$ tal que $M_{\tilde{A}_4}(\theta_i)$ preserva a decomposição e $M_{\tilde{A}_4}^m(E_{i+1}(\theta_i)) = E_i(\theta_i)$.
7. Considere $[t^{i0}]$ transição de θ para θ_i e $[t^{0i}]$ transição de θ_i para θ cujas matrizes são T_{0i} e T_{i0} , respectivamente. Por construção, a composição $B = T_{0i} \circ M_{\tilde{A}_4}^m(\theta_i) \circ T_{i0} : \mathcal{E}_\theta \rightarrow \mathcal{E}_\theta$ satisfaz:
 - B preserva a decomposição $E(\theta) \oplus F(\theta) \oplus G(\theta)$
 - $B(E_{i+1}(\theta)) = E_i(\theta)$
 - $B(E_i(\theta))$ é um subespaço unidimensional diferente (e transversal) de $E_i(\theta)$
8. Por [7.11], existe ε_2 -perturbação \tilde{A}_5 de \tilde{A}_4 tal que $\tilde{B} = \tilde{M}_{\tilde{A}_5}(\theta) \circ M_{\tilde{A}_5}(\theta)^k \circ B$
 - \tilde{B} preserva a decomposição $E(\theta) \oplus F(\theta) \oplus G(\theta)$
 - $\tilde{B}(E_i(\theta)) = E_{i+1}(\theta)$ e $\tilde{B}(E_{i+1}(\theta)) = E_i(\theta)$
9. Novamente por [7.9], uma ε_2 -perturbação \tilde{A}_6 de \tilde{A}_5 satisfaz $B(E_j) = E_j$ para todo $j \notin \{i, i + 1\}$ e temos o segundo item do lema por uma $(\varepsilon_0 + \varepsilon_1)$ -perturbação de A sobre uma transição $[t^i]$.

□

As aplicações S_j são composições das transições do lema anterior. Em particular, S_j são ε_1 -transições de θ em θ . Por transições, dado $m \in \mathbb{N}$ existe um ponto $\theta_m \in \Sigma$ e uma ε_1 -perturbação de $[M]_A(\theta_m)$ que corresponde a palavra

$$W_m = W_{2n-1,m} \circ \dots \circ W_{1,m} \circ W_{0,m}$$

com $W_{i,m} = S_{2n-i} \circ M_A(\theta)^m \circ S_i \circ S_{2n-i} \circ S_i$. A matriz W_m é diagonal e o autovalor $\lambda_{j,m}$ associado a direção E_j é

$$\lambda_{j,m} = \prod_{i=1}^{2n} \sigma_{i,j}^2 \prod_{i=1}^{2n} \lambda_j^m$$

em que $\circ S_{2n-i} \circ S_i(E_k) = \sigma_{i,k} E_k$ e $M_A(\theta)(E_j) = \lambda_j E_j$.

Fazemos $c_j = \prod_{i=1}^{2n} \sigma_{i,j}^2 > 0$ e $\lambda = \prod_{i=1}^{2n} \lambda_i$, temos que $\lambda_{j,m} = c_j \lambda^m$. Seja B tal que $B(E_j) = c_j E_j$, $c_{n,j} = c_j^{-\frac{1}{n}}$ e B_n a matriz tal que $B_n(E_j) = c_{n,j} E_j$. Denote $[M]_{\tilde{A}}(\theta)$ a palavra obtida de $[M]_A(\theta)$ trocando a primeira palavra $A(\theta)$ por $A(\theta) \circ B_n$. Para n grande o suficiente, $[M]_{\tilde{A}}(\theta)$ é uma ε_1 -perturbação de $[M]_A(\theta)$. Como B_n comuta com $[M]_{\tilde{A}}(\theta)$ temos que $(M_A B_n)^n = M_A \circ B^{-1}$ e temos uma homotetia.

Portanto existe uma $(\varepsilon_0 + 2\varepsilon_1)$ -perturbação $[M]_{\tilde{A}}(\theta_m)$ de $[M]_A(\theta_m)$ tal que $[M]_{\tilde{A}}(\theta_m) = W_m$ e, por construção, W_m é uma homotetia.

Estudo sobre órbitas periódicas em \mathbb{S}^2

Neste capítulo, consideramos como variedade a esfera \mathbb{S}^2 . Vamos impor restrições sobre o campo E de forma a garantir a existência de seção transversal global para o termostato gaussiano. O interesse nessa seção transversal, que se encaixa nos trabalhos futuros, é buscar a existência de órbitas elíticas.

Vamos aplicar o teorema de Gauss-Bonnet para os termostatos gaussianos e encontrar condições em que existe uma seção transversal global na esfera \mathbb{S}^2 .

Definição 8.1. *Seja S uma superfície orientada e N seu campo normal. Seja C uma curva orientada e α a parametrização por comprimento de arco de C em um ponto $p \in S$. A curvatura geodésica k_g de α' em p é definida por:*

$$k_g = \left\langle \frac{D\alpha'}{ds}, N \wedge \alpha' \right\rangle$$

Teorema 8.1 (Gauss-Bonnet). *Seja R uma região regular de uma superfície orientada cuja fronteira ∂R é formada por curvas C_1, \dots, C_n , onde C_i , $i = 1, \dots, n$, é regular por partes, fechada, simples e está orientada positivamente. Seja $\theta_1, \dots, \theta_n$ o conjuntos dos ângulos externos de R , temos que:*

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g(s) ds + \int_R K d\sigma + \sum_{i=1}^n \theta_i = 2\pi\chi(R)$$

onde s denota o comprimento de arco de C_i .

Lembramos que a característica de Euler da esfera \mathbb{S}^2 é $\chi(\mathbb{S}^2) = 2$, do disco D é $\chi(D) = 1$ e do anel C é $\chi(C) = 0$.

Suponha que o termostato gaussiano (\mathbb{S}^2, g, E) possua uma órbita fechada simples γ_0 em \mathbb{S}^2 . Em [4] foi demonstrada a existência de uma órbita γ' fechada e simples para o fluxo geodésico sobre \mathbb{S}^2 . Fazendo com que o campo E seja idênticamente nulo sobre γ' então $\gamma_0 = \gamma'$ continua sendo uma órbita do termostato gaussiano.

Seja $\pi : \mathbb{S}\mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ a projeção canônica e considere o anel $\mathbb{D} = \pi^{-1}(\gamma_0) \setminus \{\gamma_0 \cup \gamma_0^{-1}\}$ ($\partial\mathbb{D} = \gamma_0 \cup \gamma_0^{-1}$). Vamos construir uma aplicação de retorno $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$.

Para isto é suficiente que exista $T > 0$ tal que toda órbita do termostato gaussiano intercepte γ_0 em um segmento de tamanho menor que T . Suponha que isto não acontece. Temos então duas possibilidades:

- Existe órbita γ_1 que nunca intercepta γ_0

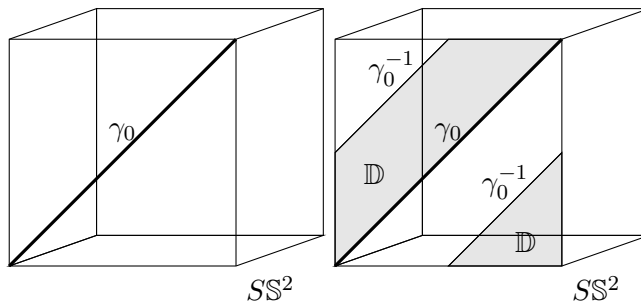


Figura 8.1: Seção transversal em SS^2 .

- Existe uma sequência de segmentos de órbita η_n de comprimento maior que n tal que η_n não intercepta γ_0 . Neste caso, tomamos a sequência $q_n = \eta_n(t_n)$ dos pontos médios de η_n e existe uma subsequência tal que $q_n \rightarrow q$ e $v_n = \eta'_n(t_n) \rightarrow v$ e a órbita γ_1 com condição inicial (q, v) não intercepta γ_0 (pela dependência contínua da condição inicial).

A órbita γ_1 divide o hemisfério que a contém em duas regiões S_0 e S_1 (que contém a órbita γ_1). Seja r o bordo da região S_1 . O bordo S_0 é composto por γ_0 e por r , conjunto formado por γ_1 (de uma parte ou de toda γ_1) e pelos pontos limites de γ_1 .

Seja $\{V_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ uma cobertura de r por vizinhanças normais.

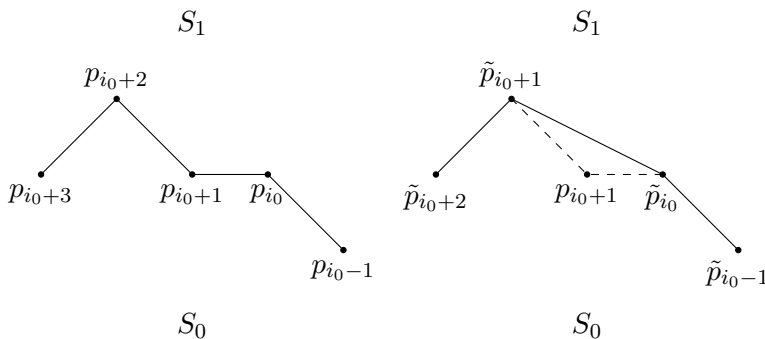
Considere a sequência de pontos $\{p_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ construída da seguinte forma:

- $p_i \in r$
- Três pontos consecutivos da sequência, p_i, p_{i+1} e p_{i+2} , pertencem a mesma vizinhança normal
- Os pontos p_i estão ordenados de forma que r tenha orientação positiva.

Para cada par p_i e p_{i+1} seja η_i o segmento de órbita do termostato gaussiano que conecta p_i a p_{i+1} . Observe que η_i não está contido no interior de S_1 pois se isso acontecesse η_i interceptaria γ_1 em dois pontos, o que não pode acontecer pois estes dois segmentos estão contidos em uma vizinhança normal. Portanto os segmentos de órbita η_i ou estão contidos em S_0 ou coincidem com r .

Podemos construir essa sequência de pontos p_i de forma que o polígono formado pelos segmentos de órbita η_i tenha todos os ângulos internos ϕ_i menores ou iguais a π . De fato, seja i_0 tal que o ângulo interno formado por η_{i_0} e η_{i_0+1} é maior que π . Definimos uma nova sequência \tilde{p} retirando o ponto p_{i_0+1} :

$$\tilde{p} : \begin{cases} \tilde{p}_i = p_i & \text{se } i \leq i_0 \\ \tilde{p}_i = p_{i+1} & \text{se } i > i_0 \end{cases}$$



A sequência \tilde{p} também cobre r com orientação positiva e o segmento $\tilde{\eta}_{i_0}$ ou está contido em S_0 ou coincide com γ_1 . Dessa forma, o ponto p_{i_0+1} que foi retirado da sequência está contido em S_0 . Contradição. Portanto os ângulos internos ϕ_i são menores ou iguais a π .

Chamamos de R a região definida pelo polígono que está contida em S_0 . O teorema de Gauss-Bonnet nos diz que

$$\int_R K d\sigma + \sum_{i=1}^n \int_{\eta_i} \langle E_{v^\perp}, N \wedge v \rangle + \sum_{i=1}^n \theta_i = 0$$

em que $K > 0$ é a curvatura da esfera e $\theta_i = \pi - \phi_i > 0$ são os ângulos externos de R . A órbita γ_1 só poderia existir se

$$\sum_{i=1}^n \int_{\eta_i} \langle E_{v^\perp}, N \wedge v \rangle = -\left(\int_R K d\sigma + \sum_{i=1}^n \theta_i \right) < 0$$

Portanto temos a aplicação de retorno definida se

$$\sum_{i=1}^n \int_{\eta_i} \langle E_{v^\perp}, N \wedge v \rangle \geq 0$$

Se esta desigualdade é satisfeita, existe uma aplicação $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ definida no anel aberto \mathbb{D} . Uma vez que o fluxo é C^∞ , \mathbb{D} é uma variedade de codimensão 1 e o fluxo é transversal a \mathbb{D} , pelo teorema da função implícita, temos que f é de classe C^∞ . Além disso, a aplicação f preserva a estrutura conformalmente simplética Ω . Portanto $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ é conformalmente simplética, ou seja, $f^*\Omega = \sigma\Omega$ onde $\sigma(x) = e^{\int_0^{t_0} \beta(\phi(s,x)) ds}$, $\forall x \in \mathbb{D}$ e t_0 é o tempo de retorno a seção \mathbb{D} .

Portanto se para toda região R orientada positivamente com bordo formado por γ_0 e por um polígono p com faces $\eta_{i \in \mathcal{I}}$ vale

$$\int_{\eta_i} \langle E_{v^\perp}, N \wedge v \rangle \geq 0 \quad i \in \mathcal{I}$$

então a aplicação de retorno f está bem definida. Isto significa que o campo externo E deve "empurrar" as órbitas para o interior de R .

Fenômenos conformalmente simpléticos

Nesta seção, mostramos a riqueza dinâmica do espaço de sistemas conformalmente simpléticos a partir de exemplos que possuem propriedades robustas. Construímos exemplos de sistemas

- (i) Anosov
- (ii) Axioma A e
- (iii) Sistema com decomposição dominada e não parcialmente hiperbólico.

Para isto, precisamos de algumas definições.

Definição A.1 (Conjunto hiperbólico). *Seja M uma variedade compacta, $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo e $Df : TM \rightarrow TM$ a diferencial de f . Um conjunto f -invariante Λ é hiperbólico se o fibrado tangente restrito a Λ admite decomposição em dois subfibrados Df -invariantes E^u e E^s denotados subfibrado instável e estável, respectivamente,*

$$T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$$

e existem $0 < \lambda < 1$ e $c > 0$ tais que

$$\|Df^n v\| \leq c\lambda^n \|v\| \text{ para todo } v \in E^s \text{ e } n > 0$$

$$\|Df^{-n} v\| \leq c\lambda^n \|v\| \text{ para todo } v \in E^u \text{ e } n > 0.$$

Definição A.2 (Difeomorfismo de Anosov). *Um difeomorfismo de classe C^1 $f : M \rightarrow M$ de uma variedade compacta M é um difeomorfismo de Anosov se M é um conjunto hiperbólico para f .*

Definição A.3 (Conjunto não-errante). *Seja $f : X \rightarrow X$ uma aplicação sobre um espaço topológico X . O ponto $x \in X$ é ponto não-errante se para toda vizinhança U de x existe um inteiro positivo N tal que*

$$f^N(U) \cap U \neq \emptyset.$$

O conjunto dos pontos não-errantes é chamado conjunto não-errante.

Definição A.4 (Difeomorfismo axioma A). *Seja M uma variedade e $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo sobre M . O difeomorfismo f é Axioma A se satisfaz:*

1. O conjunto não errante de f , $\Omega(f)$, é hiperbólico e compacto.
2. O conjunto dos pontos hiperbólicos de f são densos em $\Omega(f)$.

Definição A.5 (Difeomorfismo com decomposição dominada). *Seja M uma variedade e $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo sobre M . Um conjunto Λ f -invariante tem decomposição dominada se o fibrado tangente restrito a Λ admite decomposição em subfibrados*

$$T_\Lambda = E_1 \oplus \cdots \oplus E_k$$

e existe $l \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i < j$, $x \in \Lambda$ e todo par de vetores unitários $u \in E_i(x)$ e $v \in E_j(x)$ temos

$$\frac{\|Df^l(x)u\|}{\|Df^l(x)v\|} < \frac{1}{2}.$$

Além disso, a dimensão de $E_i(x)$ é independentes de $x \in \Lambda$ para todo $i = 1, \dots, k$.

Definição A.6 (Difeomorfismo parcialmente hiperbólico). *Seja M uma variedade e $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo sobre M . O difeomorfismo f é (uniformemente) parcialmente hiperbólico se para todo $x \in M$ o fibrado tangente pode ser decomposto $T_x M = E^s(x) \oplus E^c(x) \oplus E^u(x)$ e existem constantes $C > 0$ e*

$$0 < \lambda_1 \leq \mu_1 < \lambda_2 \leq \mu_2 < \lambda_3 \leq \mu_3$$

com $\mu_1 < 1 < \lambda_3$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\lambda_1^n \|v\|/C \leq \|Df^n(v)\| \leq C\mu_1^n \|v\| \text{ para } v \in E^s(x),$$

$$\lambda_2^n \|v\|/C \leq \|Df^n(v)\| \leq C\mu_2^n \|v\| \text{ para } v \in E^c(x),$$

$$\lambda_3^n \|v\|/C \leq \|Df^n(v)\| \leq C\mu_3^n \|v\| \text{ para } v \in E^u(x).$$

As definições para fluxos são inteiramente análogas.

Construímos um exemplo de sistema Axioma A e outro com decomposição dominada e não parcialmente hiperbólico. O interessante desses dois exemplos é que eles não podem ser construídos no contexto simplético uma vez que, no conjunto das aplicações simpléticas não existem atratores ou repulsores. Além disso, neste mesmo conjunto, decomposição dominada implica hiperbolicidade parcial.

Os exemplos a seguir são de difeomorfismos conformalmente simpléticos e fluxos conformalmente simpléticos. Nestes dois contextos, cada um dos exemplos segue o mesmo roteiro de construção e portanto apresentamos esse roteiro agora.

(i) Sistema Anosov

Este primeiro exemplo serve como base ou ponto de partida para a construção dos outros dois exemplos

(ii) Axioma A

Considere um sistema Anosov ϕ conformalmente simplético. Seja η órbita periódica de ϕ e $U \subset M$ vizinhança de η . No interior de U , realizamos uma mudança de índice de forma que a órbita η seja repulsora porém mantemos todos os outros pontos periódicos hiperbólicos do sistema original. Este exemplo não pode ser construído no universo simplético e uma forma simples de se verificar isto é observar que difeomorfismos simpléticos são genericamente transitivos.

(iii) Sistema com decomposição dominada e não parcialmente hiperbólico.

Este é um exemplo de sistema dinâmico, introduzido em [6], com decomposição dominada mas sem subfibrado hiperbólico. O sistema é transitivo e seu fibrado tangente se decompõe em dois subfibrados indecomponíveis: um centro-estável e outro centro-instável. Faremos aqui a construção e todas as justificativas são idênticas ao caso original e podem ser encontradas em [6].

Para a construção do exemplo são necessárias 3 cirurgias em um Anosov Linear g de índice (dimensão do espaço estável) 2. Duas cirurgias tem como função tornar um subespaço instável em centro-instável e um subespaço estável em centro-estável. O objetivo da última cirurgia é tornar os subespaços centro-instável e instável indecomponíveis e o mesmo para os subespaços centro-estável e estável. A única forma de fazer isto é produzindo autovalores complexos.

Considere $\phi : M \rightarrow M$ um sistema conformalmente simplético Anosov com índice de estabilidade igual a $2n$ tal que $\phi^*\omega = \beta\omega$. Sejam η_1, η_2 e η_3 órbitas periódicas distintas de ϕ , $p_1 \in \eta_1$, $p_2 \in \eta_2$ e $p_3 \in \eta_3$. Sejam U_1, U_2 e $U_3 \subset M$ vizinhanças de η_1, η_2 e η_3 , respectivamente, tais que $U_i \cap U_j = \emptyset$ para $i \neq j$ e $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Inicialmente para ϕ , todos $x \in M$ tem decomposição do espaço tangente

$$T_x M = E^{uu} \oplus E^u \oplus E^s \oplus E^{ss}.$$

Dentro de cada vizinhança, realizaremos as cirurgias:

1. Mudança de Índice: O índice de p_1 que é 2 se torna 3. A decomposição do espaço tangente neste ponto é $T_{p_1} M = E^{uu} \oplus E^s \oplus E^s \oplus E^{ss}$.
2. Mudança de Índice: Mudamos o índice de p_2 para 1. A decomposição do espaço tangente neste ponto é $T_{p_2} M = E^{uu} \oplus E^u \oplus E^u \oplus E^{ss}$.
3. Autovalor complexo: Os os autovalores correspondentes as direções instáveis e estáveis de p_3 serão complexos. A decomposição do espaço tangente neste ponto é $T_{p_3} M = E^u \oplus E^s$.

Dessa forma, o sistema obtido tem decomposição dominada mas não é parcialmente hiperbólico pois o fibrado tangente se decompõe $TM = E^{cs} \oplus E^{cu}$ e cada um dos subfibrados é indecomponível devido aos autovalores complexos. Este exemplo também não é simplético pois pontos como p_1 e p_2 não podem existir em aplicações simpléticas.

No caso de sistemas conformalmente simpléticos, podemos pensar em bifurcações e perturbações de duas formas distintas. Uma delas é mantendo ou modificando a estrutura conforme, ou seja mantendo ou modificando a função β tal que $\phi^*\omega = \beta\omega$, respectivamente.

Exemplos de difeomorfismos conformalmente simpléticos

(i) Anosov

O primeiro exemplo é um difeomorfismo simplético Anosov é o Anosov linear em \mathbb{T}^2 e consiste na aplicação $T : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ induzida pela transformação linear $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

com a 2-forma ω_0 igual a forma de volume em \mathbb{T}^2 .

(ii) Axioma A - modificando a estrutura conformalmente simplética

Este exemplo não existe no contexto simplético pois tem um repulsor. Dependendo da estrutura inicial, não é possível construir este exemplo sem modificar β . O exemplo de Axioma A dado é o difeomorfismo derivado de Anosov que é construído com uma cirurgia sobre um difeomorfismo Anosov em \mathbb{T}^2 e a justificativa de que, de fato, temos um derivado de Anosov pode ser encontrada em [14].

Em dimensão dois, um difeomorfismo conformalmente simplético deve satisfazer

$$\begin{aligned} f^*\omega_{f(x)} &= \beta(x)\omega_x \\ \det(Df(x))\omega_x &= \beta(x)\omega_x \end{aligned}$$

e a única restrição sobre o difeomorfismo é que $\det(Df(x)) = \beta(x) > 0$.

Consideramos $g : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ o Anosov Linear, $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ projeção natural e $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ aplicação linear que induz g . Realizamos a cirurgia numa vizinhança U de um ponto fixo p de g . Seja $\phi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ carta local tal que $\phi^{-1}(x_1, x_2) = \pi(x_1v_1 + x_2v_2)$ onde v_1 e v_2 são os autovetores unitários de L . Então $\phi \circ g \circ \phi^{-1}(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \mu x_2)$ com $\lambda < 1$, $\mu > 1$ e $\lambda\mu = 1$.

Tome $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, uma função do tipo salto C^∞ com suporte contido em $\pi_1(U)$ e tal que $\psi(t) = \psi(-t)$ em que π_1 é a projeção na primeira coordenada. Definimos o difeomorfismo f tal que, fora da vizinhança U , f coincide com g e, em U , f é igual a $\phi^{-1} \circ F \circ \phi$ em que

$$F(x_1, x_2) = ((\lambda + (2 - \lambda)\psi(k_1x_1))\psi(x_2))x_1, \mu x_2).$$

O ponto p é ponto fixo de f e, dentro da vizinhança U , a derivada de f . se escreve

$$Df(x) = \begin{pmatrix} \alpha(x) & \xi(x) \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

em que

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \frac{dF_1}{dx_1}(x_1, x_2) \\ \xi(x) &= \frac{dF_1}{dx_2}(x_1, x_2) \end{aligned}$$

e k_1 é escolhido de forma que $|\xi(x)| < (\mu - 1)\sqrt{\mu^2 - 1}$

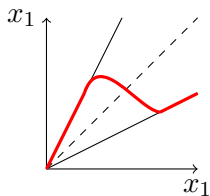


Figura A.1: A curva representa a coordenada x_1 da aplicação F .

Observe que $\det(Df(x)) = \alpha(x)\mu$. Definimos $\beta(x) = \alpha(x)\mu$ e já sabemos que $\alpha(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{T}^2$, então f satisfaz $f^*\omega = \beta\omega$.

(iii) Decomposição dominada e não-parcialmente hiperbólico - modificando a estrutura conformalmente simplética

Começamos a construção pelo Anosov linear $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ que consiste no produto cartesiano de dois Anosov induzidos por

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = 2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e é uma aplicação simplética que preserva a forma canônica $\omega = dx_1 \wedge dx_3 + dx_2 \wedge dx_4$.

Sejam p_1, p_2 e $p_3 \in \mathbb{T}^4$ pontos periódicos de g e U_1, U_2 e $U_3 \subset \mathbb{T}^4$ vizinhanças de p_i correspondente.

Inicialmente para g , todos $x \in \mathbb{T}^4$ tem decomposição do espaço tangente $T_x \mathbb{T}^4 = E^u \oplus E^u \oplus E^s \oplus E^s$. Dentro de cada vizinhança, realizaremos as cirurgias:

1. O índice de p_1 que é 2 se torna 3. Este item é idêntico ao 2, bastando considerar g^{-1} .
2. Mudamos o índice de p_2 para 1.

Inicialmente em p_2 os autovalores satisfazem a relação

$$\lambda_1 < \lambda_2 < 1 < \lambda_2^{-1} < \lambda_1^{-1}.$$

Localmente, podemos escrever g como (com 0 correspondendo a p_2)

$$g(x) = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \lambda_2^{-1} x_3, \lambda_1^{-1} x_4)$$

Seja $b : \mathbb{T}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função do tipo salto, com suporte em U_2 . Escrevemos localmente f :

$$\begin{aligned} f(x) &= db(x)g(x) \\ &= (db(x)\lambda_1 x_1, db(x)\lambda_2 x_2, db(x)\lambda_2^{-1} x_3, db(x)\lambda_1^{-1} x_4) \end{aligned}$$

O difeomorfismo operado f é conformalmente simplético:

$$\begin{aligned} f^* w &= f^*(dx_1 \wedge dx_3 + dx_2 \wedge dx_4) \\ &= (db(x))^2 (dx_1 \wedge dx_3 + dx_2 \wedge dx_4) \\ &= \beta(x) (dx_1 \wedge dx_3 + dx_2 \wedge dx_4) \end{aligned}$$

Basta escolher a constante $c = d^2$ apropriada para a mudança de índice. Tomando $\lambda_2^{-1} < d < \lambda_1^{-1}$, temos:

$$d\lambda_1 < 1 < d\lambda_2 < d\lambda_2^{-1} < d\lambda_1^{-1}$$

3. Os autovalores correspondentes as direções instáveis e estáveis de p_3 serão complexos.

Podemos fazer essa cirurgia no espaço das aplicações simpléticas. Considere o ponto fixo p_3 e uma vizinhança coordenada U_3 . Suponha que U_3 seja suficientemente pequena tal que, dentro dela, podemos escrever g :

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \lambda_3 x_3, \lambda_4 x_4)$$

onde 0 corresponde a p_3 , $\lambda_1\lambda_3 = \lambda_2\lambda_4 = 1$ e P^s é o plano gerado por x_1 e x_2 e corresponde ao espaço estável de g e P^u é o plano gerado por x_3 e x_4 e corresponde ao espaço instável. Vamos produzir em P^u e P^s autovalores complexos para torná-los indecomponíveis.

Seja $D^2 \times D^2$ um retângulo de dimensão 4 contido em U_3 e $b : D^2 \rightarrow \mathbb{R}$ com $b(0) = 1$ e $\text{supp}(b) \subset D^2$. Considere a família de rotações $R_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$R_t(x) = \begin{pmatrix} \cos b(x)t & -\sin b(x)t \\ \sin b(x)t & \cos b(x)t \end{pmatrix}$$

e a família de difeomorfismos $\phi_t : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dada por

$$\phi_t(x, y) = (R_t(x), R_t(y)).$$

Para t suficientemente grande, a composição $f_t = \phi_t \circ g$ tem autovalores complexos associados as direções P^u e P^s . Além disso, f_t preserva a forma canônica e portanto é simplética.

Exemplos de fluxos conformalmente simpléticos

(i) Anosov

Seja (M, g) variedade Riemanniana de curvatura negativa e $\phi : TM \rightarrow TM$ o fluxo geodésico associado. Considere o conjunto $T^cM = \{(x, v) \in TM \mid \langle v, v \rangle = c\}$ que é a restrição de ϕ ao nível de energia c . O conjunto T^cM é uma variedade conformalmente simplética, de fato, a forma canônica $\omega_0 = d\kappa$ (em que κ é a 1-forma tautológica em TM obtida através da métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em M) restrita a $\hat{T}(T^cM)$ é simplética. O fluxo geodésico satisfaz $\phi(T^cM) \subset T^cM$. Logo, o fluxo geodésico restrito ao nível de energia c é um fluxo conformalmente simplético.

(ii) Axioma A - preservando a estrutura conformalmente simplética

Considere (M, ϕ, ω, β) um fluxo conformalmente simplético Anosov tal que $\phi^*\omega = \beta\omega$. Seja η órbita periódica de ϕ , p um ponto de η e A^t o cociclo derivada transversal ao longo de η .

Existe $\delta > 0$ tal que para o sistema de coordenadas conformalmente simplético adaptado a η , $h : V \subset \mathbb{R}^{2n} \rightarrow U \subset M$ em que U é uma vizinhança de p é tal que $B(\delta, 0) \subset V$. Por abuso de linguagem, denotamos a representação em coordenadas pelos mesmos símbolos. Nosso objetivo é fazer p um ponto repulsor e, se desejarmos manter a estrutura conforme fixa, é preciso existir $c > 0$ tal que os autovalores do cociclo linear em p satisfazem

$$\min\{\lambda_{k+n}\}_{k=1, \dots, n} > c > \max\{\frac{1}{\lambda_k}\}_{k=1, \dots, n}$$

Se existir tal c então aplicaremos a seguinte proposição n vezes para $k = 1, \dots, n$.

Proposição A.1 (Mudança de índice-versão 1). *Considere um fluxo conformalmente simplético $\phi^t : M \rightarrow M$, $t \in \mathbb{R}$, tal que $\phi^*\omega = \beta\omega$, uma órbita fechada η de ϕ e a aplicação linear de Poincaré $P = A^{\text{perodo}(\eta)}$ sobre $p \in \eta$. Suponha que em um sistema de coordenadas conformalmente simplético adaptado a η , tal que os autovalores λ_k e λ_{k+n} de P associados as direções e_k e e_{k+n} , respectivamente, são tais que $\lambda_k\lambda_{k+n} = \beta$ e $\lambda_{k+n} > 1 > \lambda_k$.*

Então é possível realizar uma cirurgia em ϕ e obter um fluxo conformalmente simplético $\tilde{\phi}$ tal que

(i) $\tilde{\phi}$ preserva a estrutura conforme $\tilde{\beta} = \beta$

(ii) η é órbita de $\tilde{\phi}$

(iii) Se $c \in \mathbb{R}$ é uma constante tal que

$$1 < \lambda_k < c < \frac{1}{\lambda_{k+n}}$$

então os autovalores da aplicação de Poincaré \tilde{P} de $\tilde{\phi}$ em $p \in \eta$ são $c\lambda_k > 1$ e $\frac{1}{c}\lambda_{k+n} > 1$.

Demonstração. Por abuso de linguagem, continuaremos a denotar a representação em coordenadas de ϕ e T da mesma forma. Vamos definir uma família de difeomorfismos $\tilde{\phi}^t : M \rightarrow M$ que produzirá a cirurgia desejada em ϕ . Seja $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função do tipo salto C^∞ tal que $h(0) = 1$ e $h(\delta) = 0$.

Defina $\Lambda : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ e $\tilde{\phi}_r$ por

$$\Lambda(r, t, x)_{i,j} = \Lambda_r^t(x)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \neq k \text{ ou } k + n \\ 1 + rt(c-1)b(|x|) & \text{se } i = j = k \\ \frac{1}{1+rt(c-1)b(|x|)} & \text{se } i = j = n + k \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$$\tilde{\phi}_r = \Lambda_r \circ \phi$$

Note que, para $x \in B(\tau, 0)$,

$$(\tilde{\phi}_r^t)^* \omega_{\phi_r^t(x)} = \beta^t(x) \omega_x.$$

Fazendo $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}_1$ então temos o desejado. □

(ii) Axioma A - modificando a estrutura conformalmente simplética

Seja $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ autovalores da aplicação de Poincaré T de ϕ em p tais que $\lambda_j < 1$, $j = 1, \dots, k$. Seja c tal que $c > \frac{1}{\min\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}}$ e aplique a proposição abaixo.

Proposição A.2 (Mudança de índice-versão 2). *Considere (M, ω) uma variedade conformalmente simplética de dimensão $2n + 1$, $\phi^t : M \rightarrow M$, $t \in \mathbb{R}$, um fluxo conformalmente simplético tal que $\phi^* \omega = \beta \omega$ e seja η uma órbita de ϕ . Consideramos a aplicação de Poincaré P entre os pontos $\eta(0)$ e $\eta(1)$, respectivamente.*

Suponha que em um sistema de coordenadas conformalmente simplético adaptado a η , $h : V \subset \mathbb{R}^{2n} \rightarrow U \subset M$ em que U é uma vizinhança de p é tal que $B(\delta, 0) \subset V$.

Seja $c \in \mathbb{R}$ uma constante. Então é possível realizar uma cirurgia em ϕ para obter um fluxo conformalmente simplético, $\tilde{\phi}$, tal que

(i) η é uma trajetória de $\tilde{\phi}$

(ii) os autovalores da aplicação de Poincaré \tilde{P} entre os pontos $\eta(0)$ e $\eta(1)$ são os autovalores de ϕ multiplicados por c

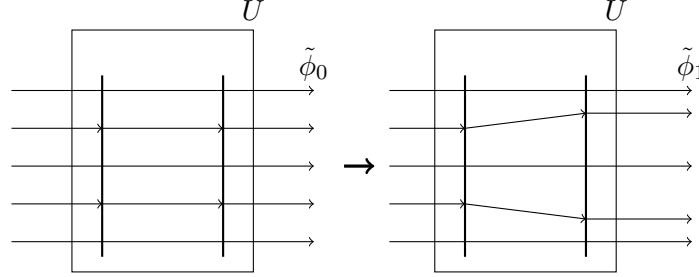
(iii) \tilde{P} preserva a estrutura conforme $\tilde{\beta} = c^n \beta$

Demonstração. Por abuso de linguagem, continuaremos a denotar a representação em coordenadas de ϕ e T da mesma forma. Vamos definir uma família de difeomorfismos $\tilde{\phi}^t : M \rightarrow M$ que produzirá a cirurgia desejada em ϕ . Seja $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função do tipo salto C^∞ tal que $h(0) = 1$ e $h(\delta) = 0$. Defina $\Lambda : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ e $\tilde{\phi}_r$ por

$$\Lambda(r, t, x)_{i,j} = \Lambda_r^t(x)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j = 1 \\ 1 + rt(c-1)b(|x|) & \text{se } i = j \neq 1 \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$$\tilde{\phi}_r = \Lambda_r \circ \phi$$

Note que, para $x \in B(\delta, 0)$, $(\tilde{\phi}_r^t)^* \omega_{\phi_r^t(x)} = (1 + rt(c - 1))^{nb(|x|)} \beta^t(x) \omega_x$. Fazendo $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}_1$ então temos o desejado.



□

(iii) Decomposição dominada e não-parcialmente hiperbólico - preservando a estrutura conforme

Considere $\phi : M \rightarrow M$ um fluxo conformalmente simplético Anosov com índice de estabilidade igual a 2 em uma variedade conformalmente simplética M de dimensão 5 tal que $\phi^* \omega = \beta \omega$. Sejam η_1, η_2 e η_3 órbitas periódicas distintas de ϕ , $p_1 \in \eta_1, p_2 \in \eta_2$ e $p_3 \in \eta_3$. Sejam U_1, U_2 e $U_3 \subset M$ vizinhanças de η_1, η_2 e η_3 , respectivamente, tais que $U_i \cap U_j = \emptyset$ para $i \neq j$ e $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Para todo $x \in M$, a decomposição do espaço tangente é $T_x M = E^{uu} \oplus E^u \oplus E^s \oplus E^{ss}$. Dentro de cada vizinhança, realizaremos as cirurgias:

1. Mudança de Índice: O índice de p_1 que é 2 se torna 3.

Em p_1 , os autovalores satisfazem $\lambda_3 > \lambda_4 > 1 > \lambda_2 > \lambda_1$ tais que $\lambda_1 \lambda_3 = \beta = \lambda_2 \lambda_4$.

Escolha c tal que $1 < \lambda_4 < c < \frac{1}{\lambda_2}$ e aplique a proposição [A.1].

2. Mudança de Índice: Mudamos o índice de p_2 para 1.

Em p_2 , os autovalores satisfazem $\lambda_3 > \lambda_4 > 1 > \lambda_2 > \lambda_1$ tais que $\lambda_1 \lambda_3 = \beta = \lambda_2 \lambda_4$.

Escolha c tal que $\lambda_4 > c > \frac{1}{\lambda_2}$ e aplique a proposição [A.1].

3. Autovalor complexo: Os autovalores correspondentes as direções instável e estável de p_3 serão complexos.

Existe $\delta > 0$ tal que para o sistema de coordenadas conformalmente simplético adaptado a η , $h : V \subset \mathbb{R}^{2n} \rightarrow U \subset M$ em que U é uma vizinhança de p_3 é tal que $B(\delta, 0) \subset V$. Por abuso de linguagem, denotamos a representação em coordenadas pelos mesmos símbolos.

Em p_3 , os autovalores da aplicação de Poincaré satisfazem $\lambda_3 > \lambda_4 > 1 > \lambda_2 > \lambda_1 > 0$ tais que $\lambda_1 \lambda_3 = \beta = \lambda_2 \lambda_4$.

Queremos que os autovetores associados aos autovalores λ_3 e λ_4 estejam associados a um autovalor complexo λ_u e também que os autovetores associados aos autovalores λ_2 e λ_1 estejam associados a um autovalor complexo λ_s . Para isto, precisamos escolher θ tal que

$$(\lambda_3 + \lambda_4)^2 \cos^2 \theta - 4\lambda_3 \lambda_4 < 0$$

e

$$(\lambda_2 + \lambda_1)^2 \cos^2 \theta - 4\lambda_2 \lambda_1 < 0.$$

Seja $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função do tipo salto C^∞ tal que $b(0) = 1$ e $b(\tau) = 0$. Defina $R : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ por

$$R(\theta, x)_{1,2} = R^t(x)_{1,2} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j = 1 \\ (R_{12}^t \circ R_{34}^t)_{ij}(x) & \text{se } i, j > 1 \end{cases}$$

em que $R_{ij}^t : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$:

$$R_{ij}^\theta(x) = \begin{matrix} & & & i & & & & j & & & \\ \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \cos(b(|x|)t\theta) & 0 & \dots & 0 & -\sin(b(|x|)t\theta) & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \sin(b(|x|)t\theta) & 0 & \dots & 0 & \cos(b(|x|)t\theta) & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\tilde{\phi}^t = R^t \circ \phi$$

A família de difeomorfismos $\tilde{\phi}^t : M \rightarrow M$ em $t = 1$ o fluxo $\tilde{\phi}$ é tal que, η é uma trajetória de $\tilde{\phi}$, $\tilde{\phi}$ preserva a estrutura conforme β e o autovalor associado a e_k e e_l é complexo.

(iii) Decomposição dominada e não-parcialmente hiperbólico - modificando a estrutura conforme

Considere $\phi : M \rightarrow M$ um fluxo conformalmente simplético Anosov com índice de estabilidade igual a 2 em uma variedade conformalmente simplética M de dimensão 5 tal que $\phi^*\omega = \beta\omega$. Sejam η_1, η_2 e η_3 órbitas periódicas distintas de ϕ , $p_1 \in \eta_1, p_2 \in \eta_2$ e $p_3 \in \eta_3$. Sejam U_1, U_2 e $U_3 \subset M$ vizinhanças de η_1, η_2 e η_3 , respectivamente, tais que $U_i \cap U_j = \emptyset$ para $i \neq j$ e $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Dentro de cada vizinhança, realizamos as cirurgias:

1. Mudança de Índice: O índice de p_1 que é 2 se torna 3.

Em p_1 , os autovalores satisfazem $\lambda_3 > \lambda_4 > 1 > \lambda_2 > \lambda_1$ tais que $\lambda_1\lambda_3 = \beta = \lambda_2\lambda_4$.

Escolha c tal que $\lambda_3 > \frac{1}{c} > \lambda_4$ e aplique a proposição [A.2] para este c .

2. Mudança de Índice: Mudamos o índice de p_2 para 1.

Em p_2 , os autovalores satisfazem $\lambda_3 > \lambda_4 > 1 > \lambda_2 > \lambda_1$ tais que $\lambda_1\lambda_3 = \beta = \lambda_2\lambda_4$.

Escolha c tal que $\lambda_2 > \frac{1}{c} > \lambda_1$ e aplique a proposição [A.2] para este c .

3. Autovalor complexo: Os os autovalores correspondentes as direções instável e estável de p_3 serão complexos.

Idêntica ao caso anterior em que a estrutura simplética é preservada.

Estrutura Hamiltoniana para o fluxo geodésico da conexão de Weyl

Uma geodésica da conexão de Weyl satisfaz $\widehat{\nabla}_w w = 0$ que em termos da conexão Riemanniana esta equação se escreve

$$\nabla_w w + 2\gamma(w)w - \|w\|^2 E$$

Tomando a 2-forma $\widehat{\Omega} = \omega_0 - (\gamma) \wedge \kappa$, temos

Vamos escrever o fluxo conformalmente Hamiltoniano em T^*M . Escolhemos coordenadas (q, U) de M então:

1. $H(q, p) = \frac{1}{2}g_{ij}^*(q)p_i p_j$,
2. $\kappa^* = p_i dq_i$,
3. $w^* = dq_i \wedge dp_i$,
4. $\gamma^* = E_i dq_i$.

$$\begin{aligned} dH &= \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \\ \frac{\partial H}{\partial q_i} &= \frac{1}{2} \partial_i g_{kl}^* p_k p_l \\ \frac{\partial H}{\partial p_i} &= g_{il}^* p_l \end{aligned}$$

$$i_F \Omega = \det \begin{pmatrix} dq_i(F) & dp_i(F) \\ dq_i & dp_i \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} \gamma(v) & \kappa(v) \\ E_i dq_i & p_i dq_i \end{pmatrix}$$

Fazendo $dH = i_F \Omega$ encontramos as equações

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= g_{ij}^* p_j \\ \dot{p}_i &= -\frac{1}{2} \partial_i g_{kl}^* p_k p_l - (\gamma^*(v) p_i - \kappa^*(v) E_i) \end{aligned}$$

Considerando $v_i = \dot{q}_i$, temos

$$\begin{aligned}
 \dot{v}_i &= \partial_k g_{ij}^* v_k p_j + g_{ij}^* \dot{p}_j \\
 &= \partial_k g_{ij}^* v_k p_j + g_{ij}^* \left(-\frac{1}{2} \partial_j g_{kl}^* p_k p_l - (\gamma^*(v) p_j - \kappa^*(v) E_j) \right) \\
 &= \left(\partial_k g_{ij}^* v_k p_j - g_{ij}^* \frac{1}{2} \partial_j g_{kl}^* p_k p_l \right) - g_{ij}^* (\gamma^*(v) p_j - \kappa^*(v) E_j) \\
 &= \Gamma_{kl}^i v_k v_l - g_{ij}^* (\gamma^*(v) p_j + \|v\|^2 E_j) \\
 &= \Gamma_{kl}^i v_k v_l - \gamma^*(v) v_i + \|v\|^2 g_{ij}^* E_j
 \end{aligned}$$

Geometria do espaço tangente de variedades com estrutura Weyl

Uma vez que definimos a noção de conexão compatível com a estrutura de Weyl para a variedade de Weyl (M, F) no capítulo 3, faz sentido estudar a geometria do espaço tangente TM com respeito a estrutura de Weyl e é isto que faremos neste apêndice.

Seja $\pi : TM \rightarrow M$ a projeção canônica, ou seja, se $\theta = (x, v) \in TM$ então $\pi(x, v) = x$.

Definição C.1. *Existe um subfibrado de TTM chamado subfibrado vertical cuja fibra $V(\theta)$ é*

$$V(\theta) = \ker(d_\theta\pi).$$

Definição C.2. *Seja $\xi \in T_\theta TM$ e $z : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow TM$ uma curva adaptada a ξ . Tal curva pode ser escrita como $z(t) = (\alpha(t), Z(t))$, em que $\alpha = \pi \circ z$ e Z é um campo vetorial ao longo de α . Definimos a aplicação de conexão $K : TTM \rightarrow TM$ da seguinte forma*

$$\widehat{K}_\theta(\xi) = (\widehat{\nabla}_{\dot{\alpha}} Z)(0).$$

Definição C.3. *O subfibrado horizontal é o subfibrado de TTM cuja fibra em θ é dada por*

$$\widehat{H}(\theta) = \ker(\widehat{K}_\theta).$$

As aplicações $d_\theta\pi|_{\widehat{H}(\theta)} : \widehat{H}(\theta) \rightarrow T_x M$ e $\widehat{K}_\theta|_{V(\theta)} : V(\theta) \rightarrow T_x M$ são isomorfismos lineares e considerando o isomorfismo $j_\theta : T_\theta TM \rightarrow T_x M \times T_x M$ dada por

$$j_\theta(\xi) = (d_\theta\pi\xi, \widehat{K}_\theta(\xi))$$

podemos escrever o espaço tangente $T_\theta TM$ de TM em θ como a soma direta

$$T_\theta TM = \widehat{H}(\theta) \oplus V(\theta) \simeq \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n.$$

Assim, dado um vetor $\xi \in TTM$ podemos identificá-lo com $j_\theta(\xi) = (\xi_h, \xi_v)$, em que $\xi_h = d_\theta\pi(\xi)$ e $\xi_v = \widehat{K}_\theta(\xi)$ são a componente horizontal e vertical de ξ , respectivamente.

Seja $z : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow TM$ e $\dot{z}(0) = \xi$, considere a família de geodésicas do fluxo de Weyl $f(s, u) = \pi \circ \phi^t(z(u))$ parametrizadas pelo parâmetro u e o campo de Jacobi J associado a essa família.

Proposição C.1. *Dado $\theta \in TM$ e $\xi \in T_\theta TM$ e $t \in \mathbb{R}$ então*

$$d_\theta\phi_t(\xi) = (J_\xi(t), \dot{J}_\xi(t))$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
J_\xi(t) &= \left. \frac{\partial}{\partial u} (\pi \circ \phi_t(z(u))) \right|_{u=0} = d_\theta(\pi \circ \phi_t)(\xi) = d_{\phi_t(\theta)}\pi \circ d\phi_\theta(\xi) \\
\dot{J}_\xi(t) &= \left. \frac{D}{\partial t} \frac{\partial}{\partial u} \pi \circ \phi_t(z(u)) \right|_{u=0} \\
&= \left. \frac{D}{\partial u} \frac{\partial}{\partial t} \pi \circ \phi_t(z(u)) \right|_{u=0} \\
&= \left. \frac{D}{\partial u} \phi_t(z(u)) \right|_{u=0} = \widehat{K}_{\phi_t(\theta)}(d\phi_t(\xi))
\end{aligned}$$

□

Definição C.4. Utilizando a decomposição $T_\theta TM = \widehat{H}(\theta) \oplus V(\theta)$, definimos a métrica de Sasaki por

$$\langle\langle \xi, \chi \rangle\rangle_\theta = \langle d_\theta \pi \xi, d_\theta \pi \chi \rangle_{\pi(\theta)} + \langle \widehat{K}_\theta(\xi), \widehat{K}_\theta(\chi) \rangle_{\pi(\theta)}$$

O fluxo geodésico da conexão de Weyl $\widehat{G} : TM \rightarrow TTM$ é dado por

$$\widehat{G}(\theta) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \phi^t(\theta) \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial}{\partial t} (\eta_\theta(t), \dot{\eta}_\theta(t)) \right|_{t=0}$$

utilizando a identificação j_θ

$$\widehat{G}(\theta) = (v, 0).$$

Chamamos de *fibrado unitário* de M , SM , o subconjunto de TM formado por pontos da forma $\theta = (x, v) \in TM$ com $\|v\| = 1$.

Proposição C.2. Um vetor $\xi \in T_\theta TM$ pertence a $T_\theta SM$ se e somente se $\langle K_\theta(\xi), v \rangle = 0$ em que $\theta = (x, v)$.

Enumeramos agora um conjunto de propriedades úteis da conexão de Weyl.
não usa simetria

As próximas duas propriedades valem para conexões simétricas. A primeira é o lema de simetria e a segunda é a equação de Jacobi.

1. Simetria:

Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ uma superfície parametrizada e sejam (s, t) as coordenadas de \mathbb{R}^2 . Seja $V = V(s, t)$ um campo vetorial ao longo de f . Então

$$\frac{\widehat{D}}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\widehat{D}}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s}$$

2. Equação de Jacobi:

Um campo de Jacobi J ao longo de uma geodésica η satisfaz

$$\ddot{J} + \widehat{R}(\eta, J)\eta = 0$$

em que $\widehat{R}(X, Y)Z = \widehat{\nabla}_Y \widehat{\nabla}_X Z - \widehat{\nabla}_X \widehat{\nabla}_Y Z + \widehat{\nabla}_{[X, Y]} Z$ é a curvatura de Weyl.

3. Derivada do Fluxo Weyl

Da simetria da conexão (lema de simetria) e do fato que o fluxo se escreve como $\phi(t) = (\eta(t), \dot{\eta}(t))$ temos que a derivada do fluxo de Weyl satisfaz:

$$d_{\theta}\phi^t(\xi) = (J_{\xi}(t), \dot{J}_{\xi})$$

em que J é campo de Jacobi ao longo da trajetória $\eta(t) = \pi\phi^t(\theta)$ com condições iniciais $J(0)$ e $\dot{J}(0)$ iguais a componente horizontal e vertical de ξ , respectivamente.

As últimas propriedades desta lista derivam-se do fato de que a conexão de Weyl não é compatível com a métrica e sim com a estrutura de Weyl (Definição [3.3]).

4. Não compatibilidade com a métrica :

Se g é o tensor métrico, então a sua derivada tensorial satisfaz

$$\begin{aligned} Xg(Y, Z) &= (\widehat{\nabla}_X g)(Y, Z) + g(\widehat{\nabla}_X Y, Z) + g(Y, \widehat{\nabla}_X Z) \\ Xg(Y, Z) &= -\gamma(X)g(Y, Z) + g(\widehat{\nabla}_X Y, Z) + g(Y, \widehat{\nabla}_X Z) \end{aligned}$$

5. Símbolos de Christoffel:

Seja p um ponto de M e $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base de $T_p M$, os Símbolos de Christoffel da conexão de Weyl são dados por $\widehat{\nabla}_{e_i} e_j = \sum_l \widehat{\Gamma}_{ij}^l e_l$ e iguais a

$$\widehat{\Gamma}_{ij}^m = \Gamma_{ij}^m + \sum_k \left\{ \gamma(e_i)g_{kj} + \gamma(e_j)g_{ki} - \gamma(e_k)g_{ij} \right\} g^{km}$$

em que (g^{km}) é a inversa de (g_{km}) .

Demonstraremos uma propriedade de determinantes que é utilizada no capítulo 5.

Proposição D.1. *Considere a matriz*

$$M = \begin{bmatrix} 0 & A \\ B & C \end{bmatrix}$$

em que A, B e C são matrizes $n \times n$ e 0 é uma matriz nula. Então

$$\det(M) = (-1)^n \det(A) \det(B).$$

Demonstração. Provaremos o resultado por indução.

- (i) Passo base: Para $n = 1$ o resultado é verdadeiro.
- (ii) Passo indutivo: Cálculo do determinante de uma matriz M com dimensão $2n \times 2n$.

$$\begin{aligned} \det(M) &= \sum_{k=1}^{2n} m_{1,k} \tilde{m}_{1,k} \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{1+k} a_{1,k} \det(M_1^{n+k}) \end{aligned}$$

em que o índice superior de M_1^{n+k} indica o número da coluna retirada da matriz original e o índice inferior indica o número da linha retirada. As matrizes M_1^{n+k} são da forma

$$M_1^{n+k} = \begin{bmatrix} 0_1 & A_1^k \\ B & C^k \end{bmatrix}$$

Para clarear a notação, chamaremos $N^k = M_1^{n+k}$.

$$\begin{aligned} \det(N^k) &= \sum_{l=1}^{2n-1} n_{l,n}^k \tilde{n}_{l,n}^k \\ &= \sum_{l=1}^n (-1)^{l-1} b_{l,n} \det((N^k)_{l+n-1}^n) \end{aligned}$$

As matrizes $(N^k)_{l+n-1}^n$ tem dimensão $2(n-1) \times 2(n-1)$ e são da forma

$$(N^k)_{l+n-1}^n = \begin{bmatrix} 0 & A_1^k \\ B_l^n & C_l^k \end{bmatrix}$$

Pela hipótese de indução

$$\det((N^k)_{l+n-1}^n) = (-1)^{n-1} \det(A_1^k) \det(B_l^n)$$

Assim

$$\begin{aligned} \det(N^k) &= \sum_{l=1}^{2n-1} n_{l,n}^k \tilde{n}_{l,n}^k \\ &= \sum_{l=1}^n (-1)^{l-1} b_{l,n} (-1)^{n-1} \det(A_1^k) \det(B_l^n) \\ &= \sum_{l=1}^n (-1)^l b_{l,n} \det(A_1^k) \det(B_l^n) \end{aligned}$$

e finalmente

$$\begin{aligned} \det(M) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{1+k} a_{1,k} \sum_{l=1}^n (-1)^l b_{l,n} \det(A_1^k) \det(B_l^n) \\ &= (-1)^{-n} \sum_{k=1}^n (-1)^{1+k} a_{1,k} \det(A_1^k) \sum_{l=1}^n (-1)^{l+n} b_{l,n} \det(B_l^n) \\ &= (-1)^n \sum_{k=1}^n (-1)^{1+k} a_{1,k} \det(A_1^k) \sum_{l=1}^n (-1)^{l+n} b_{l,n} \det(B_l^n) \\ &= (-1)^n \det(A) \det(B) \end{aligned}$$

□

Resultado para difeomorfismos conformalmente simpléticos

Vamos mostrar um lema do tipo Franks para o caso de difeomorfismos conformalmente simpléticos. Note que este caso engloba o caso simplético também.

Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo conformalmente simplético. Iniciamos com um lema trivial:

Lema E.1. *Seja $A \in CS(2n, \mathbb{R})$ tal que $A^T J A = \mu J$. Então A^{-1} pertence a $CS(2n, \mathbb{R})$ e $(A^{-1}) J A^{-1} = \frac{1}{\mu} J$.*

Definição E.1. *Seja $A \in CS(2n, \mathbb{R})$ matriz conformalmente simplética. Uma ε -perturbação de A é uma matriz $\tilde{A} \in CS(2n, \mathbb{R})$ tal que $\|\tilde{A} - A\| < \varepsilon$*

Finalmente o lema que é o objetivo desde apêndice, ou seja, a versão do lema de Franks para difeomorfismos conformalmente simpléticos:

Lema E.2. *Seja (M, ω) variedade conformalmente simplética de dimensão $2n$ e $x \in M$ órbita periódica de f de período $p(x)$. Seja $f'_{x_i} : T_{x_i} M \rightarrow T_{x_{i+1}} M$ a diferencial de f nos pontos x_i , $i = 1, \dots, p(x) - 1$.*

Seja B_i uma ε perturbação de df'_{x_i} . Então existe $\varepsilon_1 > 0$ e difeomorfismo g ε_2 -próximo na topologia C^1 de f tal que $g^i(x) = x_i$ e tal que $g'_{x_i} = B_i$. Além disso $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon_2 = 0$.

Demonstração. Para $i = 1, \dots, p(x) - 1$, considere $\phi_i : V_i \subset M \rightarrow U_i \subset \mathbb{R}^{2n}$, $i = 0, \dots, p(x) - 1$, cartas locais conformalmente simpléticas que mapeiam uma vizinhança V_i de $x_i = f^i(x)$ numa vizinhança U_i do zero. Seja $\tilde{f}_i : U_i \rightarrow U_{i+1}$, a representação de f em coordenadas.

Seja $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$ uma função do tipo salto com suporte em V_i e imagem em $[0, 1]$ tal que $\phi'_i(0) = 1$ e $\|\phi'_i(y)\| < K$ para algum $K_i \in \mathbb{R}$.

Seja E_i a matriz simplética ε_1 -próxima da identidade tal que $B_i = A_i \circ df'_{x_i}$ dada pelo lema 7.5.

Considere a composição conformalmente simplética $\tilde{g} = (\phi_i(E_i - I) + I) \circ \tilde{f}_i$.

Note que $g(x_i) = x_{i+1}$ e $g'(x_i) = E_i \circ \tilde{f}'_i(0) = B_i$ e, além disso, $\|g - f\| < K\varepsilon = \varepsilon_2$ em que $K = \max\{K_1, \dots, K_{p(x)-1}\}$. \square

Existência de seção transversal para o fluxo geodésico

Este apêndice contém o argumento original de Birkhoff [4] que mostra a existência de seção transversal para \mathbb{S}^2 com métrica com curvatura positiva para o fluxo geodésico.

Seja γ_1 a órbita fechada e simples, cuja existência foi mostrada em [4], que divide a esfera em dois hemisférios. Considere o quociente do espaço $T_{\gamma_1}M$ pelo vetor $\gamma'_1, \frac{T_{\gamma_1}M}{\langle \gamma'_1 \rangle}$. Vamos construir uma aplicação de retorno

$$T : \frac{T_{\gamma_1}M}{\langle \gamma'_1 \rangle} \longrightarrow \frac{T_{\gamma_1}M}{\langle \gamma'_1 \rangle}.$$

Para isto precisamos que exista $T > 0$ tal que toda órbita do fluxo geodésico que intercepte γ_0 em um segmento de tamanho menor que T .

Suponha que isto não acontece. Temos então duas possibilidades:

- Existe órbita γ_1 que nunca intercepta γ_0
- Existe uma sequência de segmentos de órbita η_n de comprimento maior que n tal que η_n não intercepta γ_1 . Neste caso, tomamos a sequência $q_n = \eta_n(t_n)$ dos pontos médios de η_n e existe uma subsequência tal que $q_n \rightarrow q$ e $v_n = \eta'_n(t_n) \rightarrow v$ e a órbita com condição inicial (q, v) não intercepta γ_1 (pela dependência contínua da condição inicial).

A órbita γ_1 divide o hemisfério que a contém em duas regiões S_0 e S_1 (que contém a órbita γ_1). Seja r o bordo da região S_0 . O bordo S_0 é composto por γ_0 e por r , conjunto formado por γ_1 (de uma parte ou de toda γ_1) e pelos pontos limites de γ_1 .

Seja $\{V_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ uma cobertura de r por vizinhanças normais.

Considere a sequência de pontos $\{p_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ construída da seguinte forma:

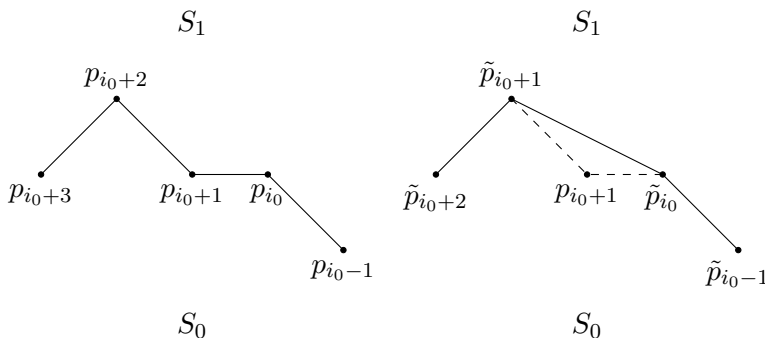
- $p_i \in r$
- Três pontos consecutivos da sequência, p_i, p_{i+1} e p_{i+2} , pertencem a mesma vizinhança normal
- Os pontos p_i estão ordenados de forma que r tenha orientação positiva.

Para cada par p_i e p_{i+1} seja η_i o segmento de órbita do fluxo geodésico que conecta p_i a p_{i+1} . Observe que η_i não está contido no interior de S_1 pois se isso acontecesse η_i interceptaria γ_1 em dois

pontos, o que não pode acontecer pois estes dois segmentos estão contidos em uma vizinhança normal. Portanto os segmentos de órbita η_i ou estão contidos em S_0 ou coincidem com γ_1 .

Podemos construir essa sequência de pontos p_i de forma que o polígono formado pelos segmentos de órbita η_i tenha todos os ângulos internos ϕ_i menores ou iguais a π . De fato, seja i_0 tal que o ângulo interno formado por η_{i_0} e η_{i_0+1} é maior que π . Definimos uma nova sequência \tilde{p} retirando o ponto p_{i_0+1} :

$$\tilde{p} : \begin{cases} \tilde{p}_i = p_i & \text{se } i \leq i_0 \\ \tilde{p}_i = p_{i+1} & \text{se } i > i_0 \end{cases}$$



A sequência \tilde{p} também cobre r com orientação positiva e o segmento $\tilde{\eta}_{i_0}$ ou está contido em S_0 ou coincide com γ_1 . Dessa forma, o ponto p_{i_0+1} que foi retirado da sequência está contido em S_0 . Contradição. Portanto os ângulos internos ϕ_i são menores ou iguais a π .

Chamamos de R a região definida pelo polígono que está contida em S_0 . O Teorema de Gauss-Bonnet nos diz que

$$\int_R K d\sigma + \sum_{i=1}^n \theta_i = 0$$

em que K é a curvatura da esfera e θ_i são os ângulos externos de R .

Sabemos que $\theta_i > 0$ ($\theta_i = \pi - \phi_i$) e pela hipótese de curvatura positiva, chegamos numa contradição. Portanto, a órbita γ_1 não pode existir.

- [1] ABRAHAM, R; Robbin, J. Transversal Mappings and Flows. W.A. Bejamin, New York, 1967.
- [2] ANOSOV, D. On generic properties of closed geodesics. Math USSR Izvestiya, vol 21, 1983.
- [3] ARROYO, A; RODRIGUEZ HERTZ. Homoclinic bifurcations and uniform hiperbolicity for three-dimensional flows. Annales Institut Henri Poincaré, 805-841, 2003.
- [4] BIRKHOFF, G. Dynamical Systems. American Mathematical Society. 1966.
- [5] BONATTI, C; DÍAZ, L.J; PUJALS, E. R. A C^1 -generic dichotomy for diffeomorfims: Weak forms of hyperbolicity or infinitely many sinks or sources. Annals of Mathematics, 355-418 ,2003.
- [6] BONATTI, C; VIANA, M. SRB measures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly contracting. Israel J. of Math, Volume 115, 157-193, 2000.
- [7] CONTRERAS, G. Geodesic Flows with positive topological entropy, twist maps and hyperbolicity. Annals of Mathematics, Volume 172, 761-808, 2010.
- [8] CONTRERAS, G; Oliveira. F. C^2 Densely the 2-sphere has an elliptic closed geodesic. Ergodic Theory and Dynamical Systems, 24, 1395-1423, 2004
- [9] FOLLAND, G. Weyl Manifolds. J. Differential Geometry, Volume 4, 145-153, 1970.
- [10] FRANKS, J. Necessary conditions for stability of diffeomorphisms. Trans. Am. Math. Soc, 158, 301 - 308, 1971.
- [11] LAUB, A; MEYER, K. Canonical Forms for Symplectic and Hamiltonian Matrices. Celestial Mechanics. 213-238, 1974.
- [12] LIVERANI, C; WOJTOWSKI, M. Conformally Symplectic Dynamics and symmetry of the Lyapunov Spectrum. Communications in Mathematical Physics, Volume 194, Number 1, 47-60, May 1998.
- [13] MAÑÉ, R. On a theorem of Klingenberg. Dynamical Systems and Bifurcation theory, 319-345, 1985.
- [14] PALIS, J; DE MELO, W. Geometry Theory of Dynamical Systems: An Introduction. New York: Springer-Verlag, 1981.

-
- [15] PUJALS, E; SAMBARINO, M. On the dynamics of dominated splitting. *Annals of Mathematics*, 657-740, 2009.
- [16] ROBINSON, C. Generic properties of Conservative Systems. *American Journal of Mathematics*, Vol 92, N 3, 562-603, 1970.
- [17] RUELLE, D. Smooth Dynamics and new Theoretical Ideas in Nonequilibrium Statistical Mechanics. *Journal of Statistical Physics*, Vol 95, N 1/2, 1999.
- [18] WOJTOWSKI, M. Magnetic Flows and Gaussian Thermostats.
- [19] WOJTOWSKI, M. Rigidity of some Weyl manifolds with nonpositive sectional curvature.
- [20] WOJTOWSKI, M. Weyl manifolds and Gaussian Thermostats.
- [21] WOJTOWSKI, M. W-flows on Weyl manifolds and gaussian thermostats. *Journal des Mathématiques Pures et Appliqués*, Volume 79, Issue 10, Pages 953-974, December 2000.
- [22] WOJTOWSKI, M; PRZYTYCKI, P. Gaussian Thermostats as Geodesic Flows of nonsymmetric linear connections. *Communications in Mathematical Physics*, Volume 277, Number 3, 759-769, 2008.