Singularidades Dicríticas
e
Vizinhanças Folheadas de Superfícies de Riemann

Gabriel Calsamiglia Mendlewicz

14 de Junho de 2005

Resumo

Para os germes de folheações holomorfas com uma singularidade isolada em $(\mathbb{C}^2, 0)$ que são regulares após uma única explosão mostramos que existem um invariante analítico funcional (a estrutura transversal) e um número finito de parâmetros numéricos (cujo número depende linearmente da multiplicidade algébrica da folheação) que permitem decidir se dois elementos são analiticamente equivalentes. Como corolário mostramos um teorema de rigidez formal-analítica nessa classe de folheações. No caso não trivial mais simples (de multiplicidade algébrica dois) mostramos que a estrutura transversal é o único invariante analítico e apresentamos exemplos que mostram que é o único caso em que isso acontece.
Posteriormente generalizamos o problema para folheações holomorfas regulares em vizinhanças de superfícies de Riemann mergulhadas em superfícies complexas, construindo exemplos não triviais e mostrando que os resultados generalizam para a esfera de Riemann mergulhada com autointerseção negativa.

Palavras Chave: Folheações Holomorfas Singulares, Singularidades dicríticas, Folheações em Superfícies Complexas.

2000 Mathematics Subject Classification: Primary 32S65, Secondary 37F75

Abstract

Consider the germs of holomorphic foliations with an isolated singularity in $(\mathbb{C}^2, 0)$ that are regular after a single bolwing up. We proof that there exists an analytic invariant of functional type (the transverse structure) and a finite number of numeric parameters that allow us to decide weather two such elements are analytically equivalent. As a corollary we prove a formal-analytic rigidity theorem in this class of singularities. In the first non-trivial case (of algebraic multiplicity two) we show that the transverse structure determines the analytic class of the singularity and we provide examples showing that this is the only case in which this happens.
We generalize the problem to the classification of germs of holomorphic regular foliations defined in neighbourhoods of embedded Riemann surfaces in complex surfaces. We construct examples and show that the results extend to the case of genus zero with negative self-intersection.

Key words and Phrases: Holomorphic Singular Foliations, Dicritical Singularities, Holomorphic Foliations in Complex Surfaces.

2000 Mathematics Subject Classification: Primary 32S65, Secondary 37F75

Agradecimentos

Quero agradecer, em primeiro lugar, ao Paulo Sad por ter me orientado e acompanhado no caminho de entender matemática a pesquisar matemática. Esse é um dos caminhos mais belos (e difíceis) que já conheci.

Em segundo lugar quero agradecer aos membros da banca por participarem e pela atenção que dedicaram ao trabalho.

Em terceiro lugar agradeço as colaborações de todos os matemáticos que de alguma forma participaram deste trabalho; em especial a M. Nicolau, J.F. Mattei, D. Marin, R. Rosas, J. Ribon e T. Amaral.

Agradeço a todos os amigos, companheiros, professores, visitantes e funcionários do IMPA pelas múltiplas conversas e experiências compartilhadas nos últimos quatro anos.

Agradeço também a todos os professores que me animaram a continuar na matemática; em especial a M. Nicolau e a M. Castellet da Universitat Autònoma de Barcelona, e a G. Luke da University of Oxford.

Agradeço ao CNPq a oportunidade (financeira) de me dedicar integralmente às pesquisas, e ao IMPA pelas boas condições de trabalho para desenvolvê-las.

A mi família por el apoyo y amor incondicionales; à Rosangela por me mostrar outros belos caminhos; to Tristan for (both of us) being in Rio; ao Marcos por ter continuado no Rio; a Julian por todos los *sirculitos* compartidos (y que nunca perdamos la conciencia de la felicidad!); a Rudy por las múltiples afinidades; aos amigos de Santa Teresa, minha musical família carioca; e aos amigos de Barcelona também; a tots, moltes gràcies!

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Seja $A \longrightarrow U$ um mergulho de uma superfície de Riemann compacta numa superfície complexa com $A^2 < 0$. Consideramos o conjunto $\mathcal{F}(U, A)$ de germes de folheações holomorfas regulares numa vizinhança de A em U. O objetivo deste trabalho é estudar as classes analíticas de $\mathcal{F}(U, A)$, colocando uma ênfase especial no caso historicamente mais interessante: quando A é o divisor excepcional de uma explosão em $(\mathbb{C}^2, 0)$. Este caso corresponde ao estudo de uma classe de singularidades dicríticas em $(\mathbb{C}^2, 0)$.

Dada $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(U, A)$ o teorema do índice de Camacho-Sad ([CS]) impede que A seja invariante por $\mathcal{F}$. Definimos em cada ponto $p \in A$ o seguinte grupo:

$$H(\mathcal{F}, p) = \{h \in \mathrm{Diff}(A, p) | f \circ h = f\}$$

para uma integral primeira primitiva holomorfa local $f : (U, p) \longrightarrow \mathbb{C}$ de $\mathcal{F}$. Trata-se de um grupo conjugado *localmente* ao grupo de rotações de $(\mathbb{C}, 0)$ de ordem igual à ordem de contato entre a folha de $\mathcal{F}$ por p e a curva A, que denotaremos por $r_p + 1$. Seja Σ_F o conjunto (finito) de pontos de A onde $\mathcal{F}$ e A não são transversais (i. e. $r_p \neq 0$). Definimos a **estrutura transversal de** $\mathcal{F}$ como o conjunto

$$H(\mathcal{F}) = \bigcup_{p \in \Sigma_{\mathcal{F}}} H(\mathcal{F}, p)$$

Se $\phi : (U, A) \longrightarrow (U, A)$ é um biholomorfismo, e supomos $\mathcal{F}' = \phi^*(\mathcal{F})$, então $\phi_A := \phi|_A$ conjuga os conjuntos $H(\mathcal{F})$ e $H(\mathcal{F}')$, isto é $\phi(\Sigma_{\mathcal{F}'}) = \Sigma_{\mathcal{F}}$ e para cada $h \in H(\mathcal{F}', p)$, $\phi_A \circ h \circ \phi_A^{-1} \in H(\mathcal{F}, \phi(p))$. Denotamos por $H[\mathcal{F}]$ a classe de conjugação de $H(\mathcal{F})$ por automorfismos de A. Ela contem a informação sobre a estrutura complexa transversal de $\mathcal{F}$. Uma pergunta natural é decidir se esse invariante analítico determina a classe analítica de $\mathcal{F}$, e caso contrário, estudar quais são os outros invariantes analíticos. Os resultados deste trabalho apontam nessa direção afirmando que, fixada a estrutura transversal o conjunto de classes de equivalência analítica com essa estrutura transversal pode ser parametrizado por um subconjunto de um espaço vetorial de dimensão finita. O método prepara o caminho para conseguirmos identificar os invariantes e dar-lhes uma interpretação geométrica.

Dedicaremos o Capítulo 2 ao caso mais simples e mais importante: o caso em que $A = E_0 \cong \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ é o divisor excepcional da explosão $E : (\tilde{\mathbb{C}}^2, E_0) \longrightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$. Os elementos de $\mathcal{F}(\tilde{\mathbb{C}}^2, E_0)$ se correspondem bijetivamente, através de E, com um conjunto $\mathcal{D}_0$ de singularidades dicríticas, isto é, folheações holomorfas com uma singularidade isolada na origem e infinitas separatrizes pela origem. Classificar analiticamente $\mathcal{D}_0$ é equivalente a classificar analiticamente $\mathcal{F}(\tilde{\mathbb{C}}^2, E_0)$. O problema enquadra-se então no problema da classificação de singularidades de folheações holomorfas em $(\mathbb{C}^2, 0)$ na filosofia iniciada por Henri Poincaré: em vez de tentar achar soluções explícitas a uma equação diferencial ordinária (problema dificílimo em geral) devemos tratar de transformá-la numa equação mais simples. Os tipos de transformações permitidas (topológica, formal, analítica) dão lugar a classificações diferentes. Resolver a classificação consiste em achar os invariantes de cada categoria de equivalência e construir representantes canônicos (as chamadas formas normais) de cada classe de equivalência de folheações. Os teoremas de Poincaré e de Dulac (ver [CS2]) resolvem a classificação analítica na maioria dos casos. Ao longo do século XX o estudo dos casos abertos tem avançado em várias direções: no caso de parte linear não nula cabe ressaltar os casos ressonante (ver [I1], [CS3]), e nilpotente (ver [CeMo], [Mez], [BMS],[Ca]); no caso sem parte linear os trabalhos em torno de Voronin ([ORV1], [VMY1], [VMY2]); no estudo dos módulos topológico-analíticos e topológico-formais *locais* o trabalho de Mattei (ver[M], [MS]); etc.
Dulac em 1906 (ver [D]) foi o primeiro a tratar o caso dicrítico separadamente, discutindo o comportamento das curvas integrais em certos casos. Martine Klughertz em [K] estudou as classes topológicas de singularidades com uma infinidade de separatrizes analíticas e iniciou a classificação analítica em $\mathcal{D}_0$. Recentemente Rosales-Ortiz-Voronin em [ORV] demonstraram um teorema de rigidez formal-analítica válido num subconjunto genérico de $\mathcal{D}_0$, e apresentaram uma lista completa de invariantes formais, e formas normais formais (desconhecemos se convergem ou não) para outro subconjunto genérico contido no anterior. Resumindo, para singularidades genéricas têm-se identificado os invariantes e construído formas normais (isto é, representantes das classes analíticas especialmente simples e contendo a informação dos invariantes), mas para as singularidades dicríticas essas questões estão abertas em geral. O exemplo de Suzuki (ver exemplo 2.5) mostra que existem folheações $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ em $\mathcal{D}_0$ com um único ponto em $\Sigma_{\mathcal{F}}$ de ordem mínima tais que $H[\mathcal{F}] \neq H[\mathcal{F}']$, e que portanto não são analiticamente equivalentes. Provaremos também (ver exemplo 2.8) que as folheações de $(\mathbb{C}^2, 0)$ definidas por

$$\mathcal{F} = \{\frac{2Y^3 - 3Y^2X + X^4}{X^3} = cte\} \quad \mathcal{F}' = \{\frac{2Y^3 - 3Y^2X + X^4 + Y^4}{X^3} = cte\} \tag{1.1}$$

pertencem a $\mathcal{D}_0$, satisfazem $H(\mathcal{F}) = H(\mathcal{F})$ mas $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ não são analiticamente equivalentes. Calculando as formas ω e ω' que definem $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ observamos que os jatos $j_0^3(\omega) = j_0^3(\omega')$ mas $j_0^4(\omega) \neq j_0^4(\omega')$. Se impomos igualdade de jatos até uma certa ordem conseguimos construir uma equivalência analítica:

Teorema 1 *Dadas duas 1-formas holomorfas ω e ω' em $(\mathbb{C}^2,0)$ definindo folheações $\mathcal{F}_\omega$ e $\mathcal{F}_{\omega'}$ com uma singularidade isolada definimos $\tilde{\mathcal{F}}_\omega = E^*(\mathcal{F}_\omega)$ e $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega'} = E^*(\mathcal{F}_{\omega'})$. Se*

(i) $\tilde{\mathcal{F}}_\omega, \tilde{\mathcal{F}}_{\omega'} \in \mathcal{F}(\tilde{\mathbb{C}}^2, E_0)$

(ii) $H(\tilde{\mathcal{F}}_\omega) = H(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega'})$ *e denotamos* $N := \sum_{p \in E_0} r_p$

(iii) Temos a seguinte igualdade de jatos:

$$j_0^\kappa(\omega) = j_0^\kappa(\omega') \quad \textit{para} \quad \kappa := (N+1) + \max\{r_p\}(3N-2)$$

então existe um biholomorfismo $\Psi : (\mathbb{C}^2,0) \longrightarrow (\mathbb{C}^2,0)$ tal que $\mathcal{F}_\omega = \Psi^*(\mathcal{F}_{\omega'})$ e $d\Psi(0,0) = Id$.

No caso particular em que temos uma única tangência simples daremos uma nova prova do teorema:

Teorema 2 (Cerveau) *Sejam ω e ω' duas 1-formas holomorfas em $(\mathbb{C}^2,0)$ definindo folheações $\mathcal{F}_\omega$ e $\mathcal{F}_{\omega'}$ tais que $\tilde{\mathcal{F}}_\omega, \tilde{\mathcal{F}}_{\omega'} \in \mathcal{F}(\tilde{\mathbb{C}}^2, E_0)$ e $\#H(\tilde{\mathcal{F}}_\omega) = \#H(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega'}) = 2$. Então $\mathcal{F}_\omega$ e $\mathcal{F}_{\omega'}$ são analiticamente equivalentes se e somente se $H[\tilde{\mathcal{F}}_\omega] = H[\tilde{\mathcal{F}}_{\omega'}]$.*

Observações:

- A melhoria do Teorema 2 em relação ao Teorema 1 deve-se ao fato que nas provas usaremos folheações auxiliares diferentes. No primeiro caso obtemos um biholomorfismo tangente à identidade. No segundo ele é tangente a λId para algum $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Em geral o Teorema 2 não pode ser estendido nos casos com $\#H(\mathcal{F}_\omega) > 2$ porque o conjunto de separatrizes pelos pontos de $\Sigma_{\mathcal{F}}$ (mesmo no caso em que só seja um ponto), consideradas como curvas possuem módulo topológico-analítico não trivial (Ver [Zar]).

- Os valores de r_p dependem só da classe topológica de $\mathcal{F}$ devido a que a cardinalidade de $H(\mathcal{F},p)$ é a ordem de tangencia entre a folha de $\mathcal{F}$ por p e A. A multiplicidade algébrica de um elemento de $\mathcal{D}_0$ é $m = 1 + \sum_{p \in E_0} r_p$ e portanto podemos escrever $\kappa = m + \max\{r_p\}(3m-5)$. Visto assim, o Teorema 1 afirma que fixada a estrutura transversal e o jato de ordem $m + [\max\{r_p\}(3m-5)]$, existe uma única classe de equivalência analítica de folheações de $\mathcal{D}_0$.

- Fixamos uma 1-forma ω tal que $\mathcal{F}_\omega \in \mathcal{D}_0$. Consideramos o conjunto

$$\mathcal{D}_0[\mathcal{F}_\omega] := \{\omega' | \mathcal{F}_{\omega'} \in \mathcal{D}_0 \quad e \quad H(\mathcal{F}_\omega) = H(\mathcal{F}_{\omega'})\} \tag{1.2}$$

Uma reinterpretação do Teorema 1 é que cada fibra do mapa

$$j_0^\kappa : \mathcal{D}_0[\mathcal{F}_\omega] \longrightarrow \mathbb{C}^M \quad \text{onde} \quad M := \binom{\kappa+1}{2} - \binom{N+1}{2}$$

define uma única classe de equivalência analítica em $\mathcal{D}_0$. Fibras diferentes podem pertencer à mesma classe de equivalência ou não (o teorema não dá informação sobre esse caso). Porém, temos no máximo $\mathbb{C}^M$ classes de equivalência analítica diferentes com a mesma estrutura transversal (fixada por $H(\mathcal{F}_\omega)$). Isto não deixa de ser surpreendente se pensamos no problema da seguinte forma:

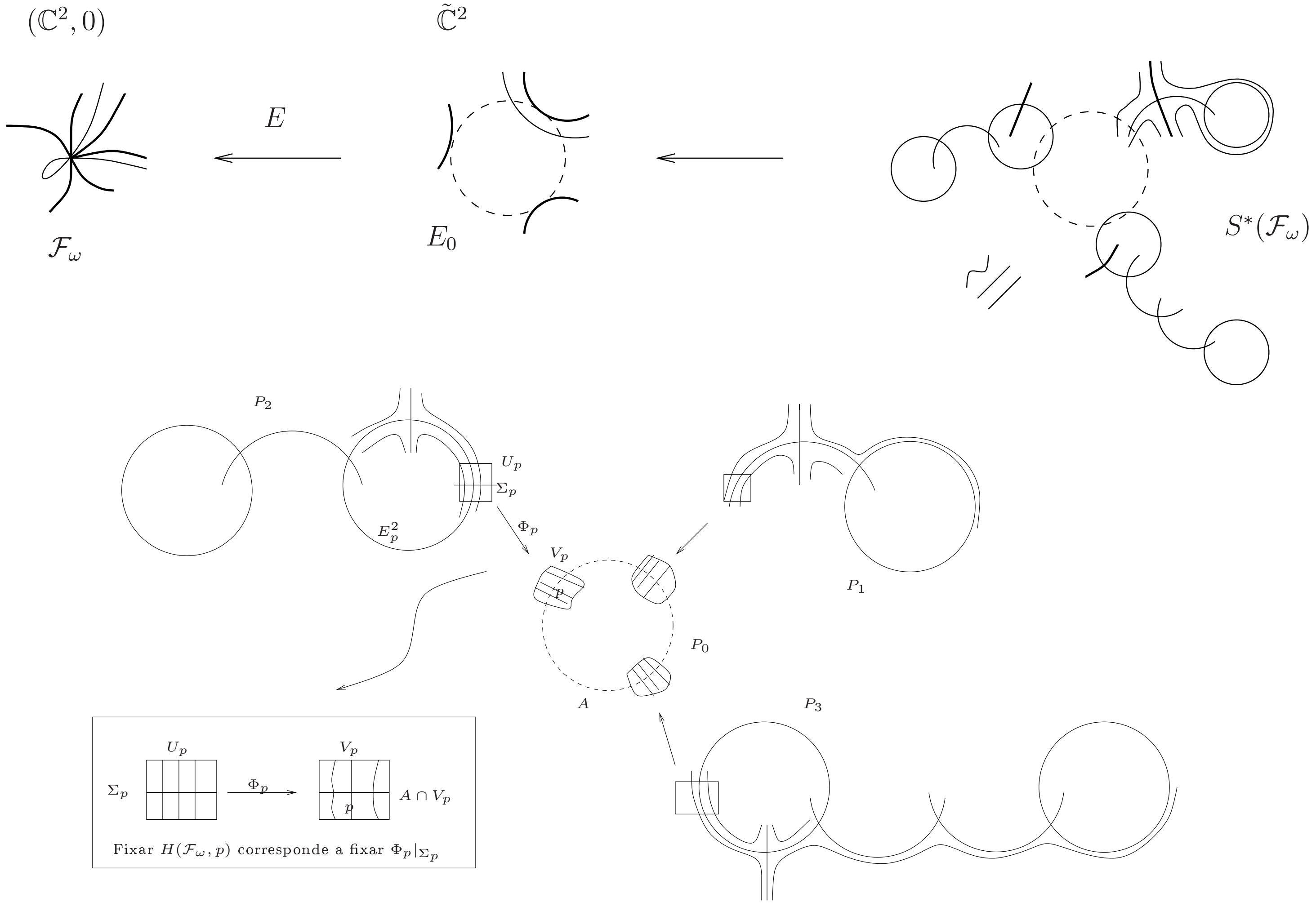
Dado um elemento $\mathcal{F}_\omega \in \mathcal{D}_0$ podemos considerar a seqüência de explosões mínima $S = S_{\mathcal{F}_\omega}$ tal que todas as separatrizes de $S^*(\mathcal{F}_\omega)$ são transversais ao divisor e por cada ponto do divisor passam no máximo duas separatrizes. Na figura 1.1 temos um exemplo desse tipo de resolução. Os pedaços P_i da figura 1.1 são analiticamente equivalentes aos seguintes modelos:

  * P_0 é uma componente de Hopf de autointerseção adequada (à resolução $S_{\mathcal{F}}$).
  * Aplicar $r+1 \in \mathbb{N}$ explosões na origem à folheação definida por $\{x - y^{r+1} = cte\}$ em $(\mathbb{C}^2, 0)$.(na figura P_i corresponde a $r = i$)

Portanto podemos pensar qualquer elemento de $\mathcal{D}_0$ como uma família finita de colagens (biholomorfismos que preservam folhas) $\Phi_p : U_p \longrightarrow V_p$ onde V_p é uma vizinhança de um ponto $p \in A$, o divisior da componente de Hopf, e U_p é uma vizinhança como na figura 1.1. Fixar a estrutura transversal $H(\mathcal{F}_\omega)$ consiste em prefixar uma seção transversal Σ_p à folheação definida em U_p e o comportamento de Φ_p nessa transversal:

$$\Phi_p|_{\Sigma_p} : \Sigma_p \longrightarrow V_p \cap A$$

Fixada essa estrutura, quantos graus de liberdade temos na escolha de Φ_p? Podemos escolher a estrutura complexa ao longo das folhas ("longitudinal"). Dito em outras palavras, para cada $q \in \Sigma_p \cong \mathbb{D}$ devemos definir um elemento que mande a folha por q (um disco pequeno), na folha por $\Phi_p(q)$ (outro disco pequeno) biholomorficamente. Por exemplo podemos escolher um elemento $\varsigma \in \mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ e construir Φ_p fazendo que ς atúe em cada uma das folhas. Como $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0) = \infty$ podemos escolher Φ_p num espaço de dimensão infinita. A priori pensaríamos que existe (também) um espaço de dimensão infinita de classes de equivalência de folheações com a estrutura transversal fixada. Pois bem, o teorema afirma que, de fato, só existe um espaço de dimensão finita.



Observação: Os círculos e semicírculos contínuos representam divisores invariantes pela folheação; os pontilhados não são .

Figura 1.1: Resolução de $\mathcal{F}_\omega \in \mathcal{D}_0$ com três pontos de tangência de ordens $r = 1, 2$ e 3

O exemplo (1.1) anterior e os teoremas de Mattei em [M] garantem que ele não é de dimensão nula, já que fixada a estrutura transversal o espaço de classes de equivalência contém um espaço de dimensão $\frac{N(N-1)}{2}$. Corresponde à dimensão do espaço de deformações versais de $\mathcal{F}_\omega$ fixado $H(\tilde{\mathcal{F}}_\omega)$.

- Em geral um jato finito de ω não determina a estrutura transversal $H(\tilde{\mathcal{F}}_\omega)$. Isto pode ser provado usando a interpretação da figura 1.1. Nela percebemos que os elementos de $H(\tilde{\mathcal{F}}_\omega, p)$ podem ser realizados como elementos da holonomia projetiva de $S^*(\tilde{\mathcal{F}}_\omega)$ ao longo de E_p^r na seção $A \cap V_p$. Sabemos que em geral a holonomia de uma singularidade não depende de um jato finito da 1-forma que a define. Portanto as condições (ii) e (iii) do Teorema 1 são independentes. Desconhecemos se em geral a hipótese (iii) é optimal ou até necessária sob a hipótese (ii).

- Teoremas do mesmo tipo foram provados por Klughertz em [K].
  Em relação ao Teorema 1 o nosso trabalho melhora a ordem do jato do qual exigimos igualdade. Além disso a prova que vamos providenciar é geométrica em vez de cohomológica. Mais concretamente: na prova cohomológica mostra-se a existência de equivalências locais; depois mostra-se que essas equivalências permitem definir um cociclo num certo grupo de cohomologia, cuja nulidade (provada via a teoria de desdobramentos) permite achar novas equivalências locais que colam para formar uma equivalência global. Na prova geométrica construiremos, com a ajuda de folheações auxiliares, equivalências locais que irão colar (e geometricamente a colagem tem uma interpretação) a uma equivalência global.

  Na prova cohomológica o jato do qual exigimos igualdade depende quadráticamente de N. Na prova geométrica obtemos uma dependência linear. Essa melhora é causada principalmente pelo fato que na prova cohomológica o biholomorfismo obtido é tangente à identidade até uma certa ordem. No nosso caso só podemos dizer que o biholomorfismo é tangente à identidade. Cabe comentar também que a prova cohomológica pode ser estendida para um tipo mais geral de singularidades: aquelas que tem todas as folhas analíticas. Dadas $\mathcal{F}_\omega$ e $\mathcal{F}_{\omega'}$, duas tais singularidades topologicamente equivalentes e com a mesma estrutura transversal (adequando a definição ao caso em que existem várias componentes dicríticas no divisor da resolução correpondente) existe um inteiro k (que depende só da classe topológica de ω e ω') tal que, se $j^k(\omega) = j^k(\omega')$ então $\mathcal{F}_\omega \sim_{an} \mathcal{F}_{\omega'}$. Não vamos incluir neste trabalho a prova desse resultado não publicado de J.F. Mattei, porque precisariamos introduzir toda a tecnologia dos desdobramentos (ver [M]), mas sirva este comentário para enfatizar o fato que o enunciado do Teorema 1 generaliza a uma classe maior de singularidades.
  Em relação ao Teorema 2 a diferença é que usamos uma folheação auxiliar

diferente (no caso de Klughertz a folheação auxiliar é a fibração de Hopf).

- No trabalho de Ortiz-Bobadilla, Rosales-Gonzalez e Voronin [ORV] o objeto de estudo é o subconjunto genérico $\mathcal{V}$ de $\mathcal{D}_0$ definido por aqueles $\mathcal{F}_\omega \in \mathcal{D}_0$ tais que $r_p = 1$ para todo $p \in \Sigma_{\tilde{\mathcal{F}}_\omega}$. Nele prova-se um teorema de rigidez formal-analítica (dois elementos de $\mathcal{V}$ formalmente equivalentes são analiticamente equivalentes) usando o método de construção de uma folheação auxiliar. No caso a folheação auxiliar é regular em $(\mathbb{C}^2, 0)$. Depois procede-se à classificação formal, obtendo formas normais formais. Este segundo passo só pode ser feito num subconjunto genérico $\mathcal{A}$ de $\mathcal{V}$. Podemos resumir o resultado dizendo que para $\mathcal{F}_\omega \in \mathcal{A}$ constrói-se um mapa que, apesar de não ser o jato de ordem $2N + 1$ depende algébricamente dos coeficientes dele,

$$c : \mathcal{D}_0[\mathcal{F}_\omega] \cap \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}^{\frac{N(N-1)}{2}+1}$$

que é um invariante genuíno. Isto é, cada fibra define uma única classe de equivalência *diferente*. Além disso prova-se que dado um grupo $H = \prod_{p\in\Sigma} < f_p >$ onde $f_p \in \mathrm{Diff}(E_0, p)$ com $f_p^2 = id$ e $\#\Sigma < \infty$, e um valor $c_0 \in \mathbb{C}^{\frac{N(N-1)}{2}+1}$ existe um germe de 1-forma holomorfa ω com $H(\tilde{\mathcal{F}}_\omega) = H$ e $c(\omega) = c_0$. Assim temos um conjunto completo de invariantes para os elementos de $\mathcal{A}$. O problema é que não temos interpretação geométrica para c. Constrói-se formalmente. Este trabalho pode ajudar a dar uma interpretação geométrica de dito invariante.
Desde o ponto de vista do estudo do espaço de módulos formal-analítico podemos enunciar um corolário do Teorema 1 que provaremos no Capítulo 2:

Corolário 3 *(Rigidez formal analítica em $\mathcal{D}_0$) Dois elementos de $\mathcal{D}_0$ são formalmente equivalentes se e somente se eles são analiticamente equivalentes.*

- Um segundo corolário do mesmo teorema se relaciona com o trabalho de Cerveau e Mattei em [CM] sobre a determinação finita de funções holomorfas, meromorfas, germes de curvas, etc. Os resultados afirmam que existe uma cota sobre os jatos que determina se os objetos tratados são biholomorficamente equivalentes.

  No caso de curvas que são separatrizes de elementos de $\mathcal{D}_0$ conseguimos dar cotas explícitas, que só dependem da classe topológica do germe de curva:

Corolário 4 *(Determinação finita de cúspides multiplas) Seja $C = C_1 \cup \cdots \cup C_n$ onde C_i é uma cúspide de tipo $(r_i, r_i + 1)$ onde $r_i \in \{2, 3, \ldots\}$ e $f = 0$ uma equação genérica de C. Para $\kappa := \kappa(2n - 1; r_1, \ldots, r_n, 1 \ldots, 1)$,* *se $f' : (\mathbb{C}^2, 0) \to \mathbb{C}$ holomorfa satisfaz $j_0^\kappa(f') = j_0^\kappa(f)$ então existe um biholomorfismo $\Psi : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ tangente à identidade com $\Psi(C) = \{f' = 0\}$.*

No capítulo 3 mostraremos que para mergulhos $A \longrightarrow U$ de uma superfície de Riemann compacta numa superfície complexa aberta com autointerseção controlada sempre podemos construir elementos $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(U, A)$ com conjunto $\Sigma_{\mathcal{F}}$ suficientemente grande prefixado. Daremos também uma generalização do Teorema 2:

Teorema 5 *Seja L um fibrado em linhas sobre uma superfície de Riemann compacta A de gênero $g \leq 1$ tal que $c_1(L) < -g$. Sejam $\mathcal{F}, \mathcal{F}' \in \mathcal{F}(L, A)$ tais que $H(\mathcal{F}) = H(\mathcal{F}')$ e $\#H(\mathcal{F}) = 2$. Então $\mathcal{F}$ é analiticamente equivalente a $\mathcal{F}'$.*

No caso em que $A \cong \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ a seguinte observação permite-nos generalizar o Teorema 1:
Seja $A \longrightarrow U_k$ o mergulho de A na seção nula de U_k, o fibrado de Hopf sobre A com classe de Chern $-k < 0$. Nesse caso podemos implodir A e obtemos uma superfície singular e um biholomorfismo

$$\sigma : U_k \setminus A \longrightarrow \frac{(\mathbb{C}^2, 0) \setminus 0}{I}$$

onde $I \in \mathrm{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$ tem ordem k (ver [BPV]).

Teorema 6 *Dadas duas 1-formas holomorfas ω e ω' em $(\mathbb{C}^2, 0)$ definindo folheações $\mathcal{F}_\omega$ e $\mathcal{F}_{\omega'}$ com uma singularidade isolada e tais que $I^*\omega \wedge \omega = 0$ e $I^*\omega' \wedge \omega' = 0$ definimos $\tilde{\mathcal{F}}_\omega = \sigma^*(\mathcal{F}_\omega / I)$ e $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega'} = \sigma^*(\mathcal{F}_{\omega'} / I)$. Se*

(i) $\tilde{\mathcal{F}}_\omega, \tilde{\mathcal{F}}_{\omega'} \in \mathcal{F}(U_k, A)$

(ii) $H(\tilde{\mathcal{F}}_\omega) = H(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega'})$ *e denotamos* $N := \sum_{p \in \Sigma_{\tilde{\mathcal{F}}_\omega}} r_p$

(iii) Temos a seguinte igualdade de jatos:

$$j_0^\kappa(\omega) = j_0^\kappa(\omega') \quad \textit{para} \quad \kappa := (N+1) + k \max\{r_p\}(3N - 2)$$

então $\mathcal{F}_\omega$ e $\mathcal{F}_{\omega'}$ são analiticamente equivalentes.

Assim, para a esfera de Riemann A, fixada a estrutura transversal, as classes analíticas de $\mathcal{F}(U_k, A)$ podem ser parametrizadas por um espaço de dimensão finita. Para superfícies de Riemann de gênero arbitrário conjecturamos que isso acontece também. O problema a estender a prova nesse caso é que não temos o modelo em $(\mathbb{C}^2, 0)$ para poder usar o Lema de Cartan descrito no Apêndice.

A estratégia que usaremos para provar os teoremas consiste em achar condições suficientes para a construção *geométrica* de um biholomorfismo da seguinte forma:

Fixemos o mergulho $A \longrightarrow U$ e dois elementos $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}(U, A)$ e suponhamos que $H(\mathcal{F}) = H(\mathcal{F}')$. Queremos construir um germe de biholomorfismo $\Psi : (U, A) \longrightarrow (U, A)$ com $\Psi(p) = p$ para todo ponto $p \in A$, e de forma que $\Psi(L_p) = L'_p$ onde L_p (resp. L'_p) é a folha de F (resp. $\mathcal{F}'$) por p.

Suponhamos que existe um conjunto finito $R \subset A \setminus \Sigma_{\mathcal{F}}$, inteiros $\{n_p \in \mathbb{Z}^*\}_{p \in R}$ e funções meromorfas $g, g' : U \longrightarrow \mathbb{C}$ satisfazendo:

$$\begin{aligned} \mathrm{div} g &= A + \sum_{p \in R} n_p L_p - \sum_{p \in \Sigma_{\mathcal{F}}} L_p \\ \mathrm{div} g' &= A + \sum_{p \in R} n_p L'_p - \sum_{p \in \Sigma_{\mathcal{F}}} L'_p \qquad (*) \end{aligned}$$

Nesse caso, dado $p \in A \setminus \{\Sigma_{\mathcal{F}}, R\}$, $g|L_p : (L_p, p) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ e $g'|L_p : (L'_p, p) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ definem germes de biholomorfismo. Reduzindo as vizinhanças se for preciso podemos definir $\phi|_p : (L_p, p) \longrightarrow (L'_p, p)$ por $\phi_p(q) = g|_{L_p}^{'-1} \circ g|_{L_p}(q)$. Desta forma, obtemos $\phi_{gg'} : U' \longrightarrow U''$ um biholomorfismo entre duas vizinhanças U' e U'' de $A \setminus \{\Sigma_{\mathcal{F}}, R\}$ em U. O objetivo é achar condições para que $\phi_{gg'}$ estenda biholomorficamente a uma vizinhança de A. Se definimos as folheações $\mathcal{G} = \{g = cte\}$ e $\mathcal{G}' = \{g' = cte\}$, observamos que a construção de $\phi_{gg'}$ manda $\mathcal{F}|_{U'}$ em $\mathcal{F}'|_{U''}$ e $\mathcal{G}|_{U'}$ em $\mathcal{G}'|_{U''}$. Não é difícil provar que para g e g' genéricos,

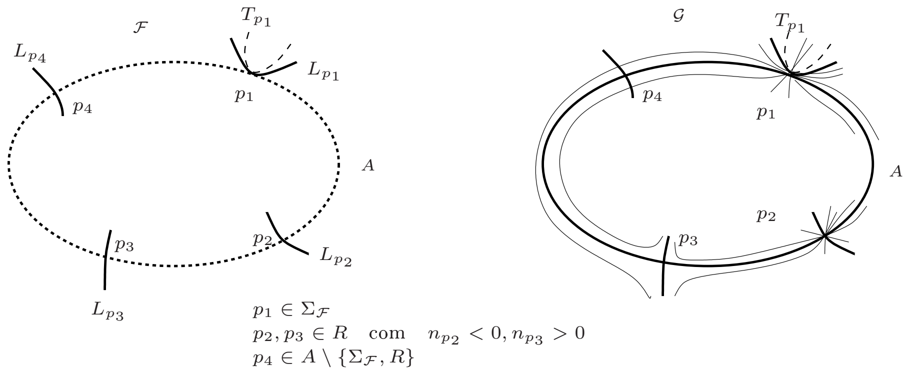


Figura 1.2: Diagramas de $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$

$$\begin{aligned} D := \mathrm{tang}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \sum_{p \in R} |n_p| L_p + \sum_{p \in \Sigma_{\mathcal{F}}} (L_p + T_p) \\ D' := \mathrm{tang}(\mathcal{F}', \mathcal{G}') = \sum_{p \in R} |n_p| L'_p + \sum_{p \in \Sigma_{\mathcal{F}}} (L'_p + T'_p) \end{aligned}$$

onde $T_p \setminus p$ é uma curva transversal a $\mathcal{F}$ e a $\mathcal{G}$ passando por p, e $T'_p \setminus p$ é uma curva transversal a $\mathcal{F}'$ e a $\mathcal{G}'$ passando por p. Genericamente T_p e T'_p tangenciam com a curva A.

Suponhamos que existe uma extensão biholomorfa Ψ de $\phi_{gg'}$ a U. Então $\Psi(D) = D'$. Por construção, para $p \in \Sigma_{\mathcal{F}} \cup R$, $\Psi(L_p) = L'_p$ e $\Psi(T_p) = T'_p$. Além disso temos que se f_p e f'_p são integrais primeiras locais de $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ respectivamente ao redor de p, temos satisfeitas a condições seguintes:

$$\begin{array}{rcl} f'_p(\Psi(q)) & = & f_p(q) \\ g'(\Psi(q)) & = & g(q) \quad \text{para todo ponto} \quad q \in T_p \qquad (**) \end{array}$$

Dito em outras palavras, a igualdade $H(\mathcal{F}) = H(\mathcal{F}')$ implica que temos uma equivalência canônica entre os espaços locais de folhas $\alpha : \frac{T_p}{\mathcal{F}} \longrightarrow \frac{T'_p}{\mathcal{F}'}$. Da construçao temos uma equivalência entre os espaços de folhas $\beta : \frac{T_p}{\mathcal{G}} \longrightarrow \frac{T'_p}{\mathcal{G}'}$. A existência de extensão Ψ implica que $\Psi|_{T_p} : T_p \longrightarrow T'_p$ induz α e β nos quocientes respectivos. No Lema 2.28 provaremos que esta condição é suficiente para a existência de extensão:

Lema 7 *Dadas $\mathcal{F}, \mathcal{F}' \in \mathcal{F}(U, A)$ com $H(\mathcal{F}) = H(\mathcal{F}')$ e $g, g' : U \longrightarrow \mathbb{C}$ funções meromorfas definidas como acima. Existe uma extensão biholomorfa Ψ de $\phi_{gg'}$ a U se e somente se a condições de $(**)$ são satisfeitas.*

Assim, as provas que faremos baseiam-se em conseguir provar a existência de g e g' satisfazendo as condições $(*)$ e $(**)$. Quando não apareçam componentes de tangência do tipo T_p a condição $(**)$ é vazia, e a condição $(*)$ garante que existe a extensão.

Capítulo 2

Singularidades Dicríticas

Seja $\omega(X,Y) = a(X,Y)dX + b(X,Y)dY$ um germe de 1-forma holomorfa em $(\mathbb{C}^2, 0)$ com uma singularidade isolada em 0 e com primeiro jato não nulo $\omega_\nu \neq 0$. Ela define uma folheação singular que denotaremos por $\mathcal{F}_\omega$. Diremos que ω é dicrítica se $\omega_\nu(R) = 0$ onde $R = X\frac{\partial}{\partial X} + Y\frac{\partial}{\partial Y}$ é o campo radial.

Seja $E : \tilde{\mathbb{C}}^2 \longrightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$, a explosão em 0. Em cartas: $E(t,x) = (x, tx) = (X,Y)$ e $E(y,u) = (yu, y) = (X,Y)$. Se ω é dicrítica, a 1-forma definida na carta (t,x) por $\tilde{\omega}(t,x) = \frac{E^*\omega(t,x)}{x^{\nu+1}}$, define uma folheação saturada numa vizinhança de $E_0 = E^{-1}(0) \simeq \mathbb{C}\mathrm{P}^1$. A denotamos por $\tilde{\mathcal{F}}_\omega$.

Definição 2.1 *Definimos $\mathcal{D}_0$ como o conjunto de folheações dicríticas $\mathcal{F}_\omega$ em $(\mathbb{C}^2, 0)$ tais que $\tilde{\mathcal{F}}_\omega$ é regular. Isto é,*

1. $\mathrm{Sing}\tilde{\mathcal{F}}_\omega \cap E_0 = \emptyset$
2. *As folhas de $\tilde{\mathcal{F}}_\omega$ são lisas e um número finito delas possúem contato de ordem $r(p_i) + 1 \geq 2$ com a curva E_0 nos pontos do conjunto $\{p_1, \ldots, p_n\} =: \Sigma_\omega = \Sigma_{\mathcal{F}_\omega} \subset E_0$.*

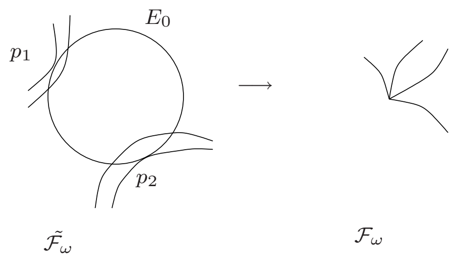


Figura 2.1: Explosão de um elemento de $\mathcal{D}_0$

Definição 2.2 *Uma equivalência formal em* $(\mathbb{C}^2, 0)$ *é* $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ *em que* ϕ_1 *e* ϕ_2 *são séries formais nas variáveis* (X, Y) *de* $(\mathbb{C}^2, 0)$ *com* $\phi(0) = 0$ *e* $d\phi(0)$ *invertível. Um biholomorfismo em* $(\mathbb{C}^2, 0)$ *é uma equivalência formal convergente.*

Definição 2.3 *Dois germes* $\mathcal{F}_\omega$ *e* $\mathcal{F}_{\omega'}$ *de folheação em* $(\mathbb{C}^2, 0)$ *são:*

- ***topologicamente equivalentes*** *(escrevemos* $\mathcal{F}_\omega \sim_{top} \mathcal{F}_{\omega'}$*) se existe um germe de homeomorfismo* ϕ *de* $(\mathbb{C}^2, 0)$ *que manda folhas de* $\mathcal{F}_\omega|_{(\mathbb{C}^2,0)\setminus 0}$ *em folhas de* $\mathcal{F}_{\omega'}|_{(\mathbb{C}^2,0)\setminus 0}$*.*

- ***formalmente equivalentes*** *(escrevemos* $\mathcal{F}_\omega \sim_{for} \mathcal{F}_{\omega'}$*) se existe uma equivalência formal* ϕ *de* $(\mathbb{C}^2, 0)$ *tal que* $\phi^*(\omega') \wedge \omega \equiv 0$*.*

- ***analiticamente equivalentes*** *(escrevemos* $\mathcal{F}_\omega \sim_{an} \mathcal{F}_{\omega'}$*) se existe um germe de biholomorfismo* ϕ *de* $(\mathbb{C}^2, 0)$ *tal que* $\phi^*(\omega') \wedge \omega \equiv 0$*.*

Klughertz em [K] mostra o seguinte teorema:

Teorema 2.4 *Sejam* $\mathcal{F}_\omega$ *e* $\mathcal{F}_{\omega'}$ *duas folheações de* $\mathcal{D}_0$*. Então* $\mathcal{F}_\omega \sim_{top} \mathcal{F}_{\omega'}$ *se e somente se existe uma bijeção* $\psi : \Sigma_\omega \longrightarrow \Sigma_{\omega'}$ *tal que* $r(\psi(p)) = r(p)$*.*

Portanto a lista de classes de conjugação topológica de $\mathcal{D}_0$ é: $\mathcal{D}_0(n, r_1, \ldots, r_n)$ onde $n, r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{N}$. Todas as classes topológicas têm um representante com integral primeira meromorfa. De fato, dado um conjunto $\Sigma = \{p_1, \ldots, p_n\} \in E_0$ e $r \in \mathbb{N}^n$, suponhamos que $(t_i, 0) = p_i$ nas coordenadas (t, x) com $t_i \in \mathbb{C}$. Consideramos um polinômio $f(t) = \int \prod_{i=1}^{n} (t - t_i)^{r_i} dt$. A forma $\omega(t, x) = dx - f'(t)dt$ define, após implosão, uma folheação de $\mathcal{D}_0(n; r_1, \ldots, r_n)$ com $\Sigma_\omega = \{p_1, \ldots, p_n\}$ e com as ordens desejadas. Mais ainda, na carta (X, Y) de $(\mathbb{C}^2, 0)$ ela tem integral primeira meromorfa:

$$X - f(\frac{Y}{X})$$

Queremos estudar as classes analíticas de $\mathcal{D}_0$, isto é os espaços $\frac{\mathcal{D}_0(n; r_1, \ldots, r_n)}{\sim_{an}}$. No caso $n = 0$, a multiplicidade algébrica é 1, com quociente de autovalores da parte linear das formas -1 e podemos aplicar o teorema de linearização de Poincaré: todos os elementos são analiticamente equivalentes a $\mathcal{F}_{XdY - YdX}$. A seguir definiremos um primeiro invariante analítico de tipo funcional quando $n \geq 1$:

Seja $\mathcal{F} \in \mathcal{D}_0(n; r_1, \ldots, r_n)$ com $\Sigma_{\mathcal{F}} = \{p_1, \ldots, p_n\}$ e V_i uma vizinhança de p_i em $\tilde{\mathbb{C}}^2$. Suponhamos $r(p_i) = r_i$. A idéia é que cada folha próxima da que passa por p_i corta a curva E_0 em $r_i + 1$ pontos diferentes (ver Figura 2.2). Essa estrutura de interseções possui uma estrutura complexa devido ao fato que $\mathcal{F}$ é holomorfa. Mais rigorosamente: consideramos $f : (V_i, p) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ uma integral primeira primitiva de $\mathcal{F}|_{V_i}$ e $f_i = f|_{E_0 \cap V_i}$. O **grupo de invariância de** $\mathcal{F}$ **em** p_i é o grupo de germes de biholomorfismos

$$H(\mathcal{F}, p_i) := \{h \in \mathrm{Diff}(E_0, p_i) | f_i \circ h \equiv f_i\}$$

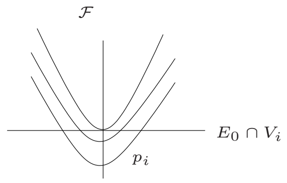


Figura 2.2: Estrutura local num ponto de tangência

Ele independe da integral primeira escolhida. Sabemos que existe um biholomorfismo $\phi_i : (A, p_i) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ tal que $\phi_i \circ f_i \circ \phi_i^{-1}(t) = t^{r_i+1}$ e portanto $H(\mathcal{F}, p)$ é conjugado ao subgrupo de rotações de ordem $r + 1$ de Diff$(\mathbb{C}, 0)$ (ver [MM]). Em particular é cíclico e denotamos por h_i o elemento gerador. É importante observar que ϕ_i depende de f_i e pode não admitir uma extensão holomorfa a um automorfismo holomorfo de E_0.

Dada $\mathcal{F}_\omega \in \mathcal{D}_0(n, r_1, \ldots, r_n)$ com $\Sigma_\omega = (p_1, \ldots, p_n)$ podemos definir a **estrutura transversal de** $\mathcal{F}_\omega$ como o conjunto de germes de biholomorfismos locais:

$$H(\omega) = H(\mathcal{F}_\omega) = H(\tilde{\mathcal{F}}_\omega) := H(\tilde{\mathcal{F}}_\omega, p_1) \cup \ldots \cup H(\tilde{\mathcal{F}}_\omega, p_n)$$

Suponhamos que $\mathcal{F} \in \mathcal{D}_0$ e $\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ é um biholomorfismo com $\mathcal{F}' = \phi^*(\mathcal{F})$. Então temos $\mathcal{F}' \in \mathcal{D}_0$, $\phi_0(\Sigma_{\mathcal{F}'}) = \Sigma_{\mathcal{F}}$ e $h \mapsto \phi_0^{-1} \circ h \circ \phi_0$ define uma bijeção entre $H(\mathcal{F})$ e $H(\mathcal{F}')$, onde $\phi_0 \in Aut(E_0)$ é a restrição do levantamento de ϕ ao divisor excepcional E_0. Definimos $H[\mathcal{F}]$ a **classe projetiva da estrutura transversal** como a classe de $H(\mathcal{F})$ módulo conjugação por automorfismos de E_0. Pelo argumento prévio $H[\mathcal{F}]$ só depende da classe analítica $[\mathcal{F}]$ de $\mathcal{F}$, e portanto é um invariante analítico de $\mathcal{F}$.
Dados dois elementos $\mathcal{F}_\omega, \mathcal{F}_{\omega'} \in \mathcal{D}_0(n; r_1, \ldots, r_n)$, para cada $p_i \in \Sigma_\omega$ existe um *germe* de biholomorfismo $\psi_{p_i} : (E_0, p_i) \longrightarrow (E_0, p_i')$ tal que $\psi_{p_i} H(\mathcal{F}, p_i) \psi_{p_i}^{-1} = H(\mathcal{F}', p_i')$ com $p_i' \in \Sigma_{\omega'}$, mas geralmente não existe um automorfismo $\psi : E_0 \longrightarrow E_0$ tal que $\psi|_{(E_0, p_i)} = \psi_{p_i}$, mesmo no caso em que $n = 1$. Vejamos um exemplo:

Exemplo 2.5 (Exemplo de Suzuki [Suz])

Considere as formas

$$\omega = (Y^3 + Y^2 - XY)dX - (2XY^2 + XY - X^2)dY$$
$$\omega' = (2Y^2 + X^3)dX - 2XY\,dY$$

Elas têm integrais primeiras

$$f(X, Y) = \frac{Y^2 - X^3}{X^2} \quad f'(X, Y) = \frac{X}{Y} e^{\frac{Y(Y+1)}{X}}$$

respectivamente [1], e induzem folheações $\mathcal{F}_\omega, \mathcal{F}_{\omega'} \in \mathcal{D}_0(1)$. Logo são topológicamente equivalentes. Afirmamos que $\mathcal{F}_\omega$ e $\mathcal{F}_{\omega'}$ não são analiticamente equivalentes. Apresentaremos uma demonstração nova desse fato:

Consideramos a coordenada t de E_0 obtida após uma explosão $(t,x) \mapsto (x,tx) = (X,Y)$. Temos $\Sigma_\omega = \{t=0\}$ e $\Sigma_{\omega'} = \{t=1\}$. Sejam $H(\omega,0) =< h >$ e $H(\omega',1) =< h' >$. Construimos as seguintes aplicações

$$\begin{aligned} H : (\mathbb{C},0) &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ t &\mapsto (t,h(t)) \\ H' : (\mathbb{C},1) &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ t &\mapsto (t,h'(t)) \end{aligned}$$

Sejam $C = \mathrm{Im}H$ e $C' = \mathrm{Im}H'$. Se $\mathcal{F}_\omega$ e $\mathcal{F}_{\omega'}$ fossem analiticamente equivalentes, existiria um automorfismo holomorfo do divisor excepcional $\phi_0 : E_0 \longrightarrow E_0$ tal que $\Phi = (\phi_0,\phi_0) : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ satisfaz $H'(t+1) = \Phi \circ H(t)$. Ou seja, Φ manda C em C'. Observamos que ϕ_0 é racional em t, e C é um conjunto algébrico. Portanto C' deveria ser algébrico. Porém, isso é uma contradição com:

Proposição 2.6 *C' não é algébrico.*

Prova: Os pontos da forma $(t,h'(t))$ satisfazem

$$\frac{1}{t}e^t = \frac{1}{h'(t)}e^{h'(t)} \tag{2.1}$$

Usando a parametrização H', $x=t$ e $y=h'(t)$ e derivando (2.1) em relação a t temos que C' é uma curva invariante da folheação definida em $\mathbb{C}^2$ pela 1-forma:

$$\eta(x,y) = y(x-1)dx - x(y-1)dy \tag{2.2}$$

Identificando a carta (x,y) com os pontos $[x:y:1]$ de $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$, (x,z) com $[x:1:z]$ e (y,z) como $[1:y:z]$. η pode ser estendida a uma folheação $\mathcal{F}$ em $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ cuja expressão nas outras cartas é:

$$\begin{gathered} z(x-z)dx + x(1-x)dz \\ -(-y+y^2)dz - z(y-z)dy \end{gathered}$$

Definimos $P_0 = [0:0:1], P_1 = [1:0:0], P_2 = [0:1:0], P_3 = [1:1:0], P_4 = [1:1:1]$. $\mathcal{F}$ satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\mathrm{Sing}\mathcal{F} = \{P_0,P_1,P_2,P_3,P_4\}$

(ii) P_0 e P_3 são singularidades radiais.

[1] em geral neste trabalho não usaremos ' para denotar derivada

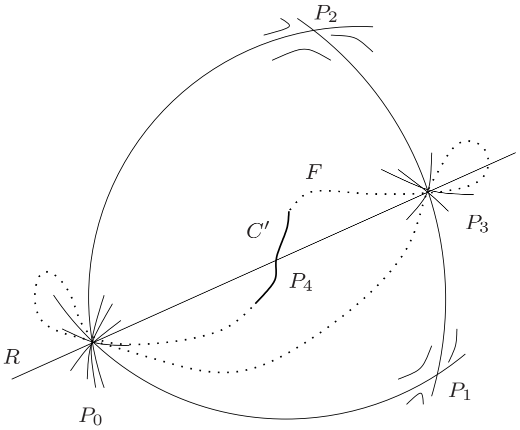


Figura 2.3: $\mathcal{F}$ em $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$

(iii) P_1, P_2 e P_4 possuem exatamente duas separatrizes.

(iv) C' é uma separatriz de $\mathcal{F}$ por P_4, e $ind_{P_4}(\mathcal{F}, C') = -1$.

(v) A reta R definida na carta (x, y) por $x = y$ é invariante por $\mathcal{F}$.

Suponha C' algébrico. Então $C' \subset F$ onde F é uma curva algébrica plana (compacta) de grau $d > 0$ invariante por $\mathcal{F}$. Suponhamos que F passa n vezes por P_0 e m vezes por P_3. Ela não passa por P_1 nem por P_2. Fazendo interseção de R com F e aplicando o teorema do índice de Camacho-Sad para F obtemos

$$\begin{aligned} d &= m + n + 1 \\ d^2 &= m^2 + n^2 + 1 \end{aligned}$$

que não tem solução $d, m, n \in \mathbb{N}$. Portanto C' não é algébrico. ∎

Observemos que o fato de C' não ser algébrico implica que ω' não possui integral primeira meromorfa. Desta forma temos um exemplo de uma classe de equivalência analítica sem representante com integral primeira meromorfa. Uma pergunta interessante que resta aberta, e que não abordaremos neste trabalho, é determinar se todas as classes de equivalência analítica em $\mathcal{D}_0$ possuem um representante com integral primeira Liouvilliana, ou, caso a resposta seja negativa, dar uma caracterização das classes que admitem um representante com uma tal integral primeira.

Lembramos que os automorfismos de E_0 têm a estrutura do grupo $PSL(2, \mathbb{C})$ e que cada elemento $\phi_0 \in Aut(E_0)$ pode ser estendido como biholomorfismo a uma vizinhança em $\tilde{\mathbb{C}}^2$ de forma que, após implosão, produz uma mudança linear de coordenadas em $(\mathbb{C}^2, 0)$. Isto prova o seguinte lema:

Lema 2.7 *Dadas $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ em $\mathcal{D}_0(n; r_1, \ldots, r_n)$ tais que $H[\mathcal{F}] = H[\mathcal{F}']$, existe uma mudança de coordenadas linear $\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ tal que $H(\mathcal{F}) = H(\phi^*(\mathcal{F}'))$.*

Uma pergunta natural é decidir se para os elementos $\mathcal{F}_\omega \in \mathcal{D}_0(n, r)$ $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}^n$, $H[\mathcal{F}_\omega]$ determina completamente a classe analítica $[\mathcal{F}_\omega]$ da folheação. Para $n = 1$ e $r = 1$ a resposta é afirmativa e faremos a prova na seção 2.3. Para $n \geq 2$ os seguintes exemplos mostram que a resposta é negativa; existem classes analíticas diferentes com representantes que possuem integrais primeiras meromorfas, e com estrutura transversal idêntica:

Exemplo 2.8 (Exemplos do Curvelo)

Fixamos $n \geq 2$. Na carta (t, x) de $\tilde{\mathbb{C}}^2$ consideramos para cada $i = 1, \ldots, n$ um ponto $p_i = (t_i, 0)$, e $r_i \in \mathbb{N}$. Definimos $p(t) = \prod_{i=1}^{n-1} (t - t_i)^{r_i}$ e $P(t) = \int (t - t_n)^{r_n} p(t) dt$ com $P(0) = 0$. Na mesma carta consideramos as folheações

$$\tilde{\mathcal{F}} = \{P(t) + x = cte\} \quad \tilde{\mathcal{F}'} = \{P(t) + x(1 + p(t)) = cte\} \tag{2.3}$$

Elas estendem a folheações holomorfas regulares em $\tilde{\mathbb{C}}^2$, e denominamos $\mathcal{F} = E^{-1*}(\tilde{\mathcal{F}})$ e $\mathcal{F}' = E^{-1*}(\tilde{\mathcal{F}'})$ as folheações singulares que elas definem em $(\mathbb{C}^2, 0)$. Elas admitem integrais primeiras meromorfas $f(X, Y)$ e $f'(X, Y)$ com denominador $X^{r_1 + \ldots + r_n + 1}$. Derivando as expressões de (2.3) é facil perceber que $\mathcal{F}, \mathcal{F}' \in \mathcal{D}_0(n; r_1, \ldots, r_n)$ e $\Sigma_{\mathcal{F}} = \Sigma_{\mathcal{F}'}$. Pela definição da estrutura transversal (podemos usar a restrição ao divisor da integral primeira global), $H(\mathcal{F}) = H(\mathcal{F}')$. Afirmamos que para valores genéricos de t_i, $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ não são analiticamente equivalentes. Para a prova precisaremos de analisar a ação dos biholomorfismos de $(\mathbb{C}^2, 0)$ nas resoluções adequadas de $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$. A obstrução aparece pelo fato (que conhecí através de J. F. Mattei) de que existem seqüências de explosões e biholomorfismos dos divisores delas que não estendem como biholomorfismo a nenhuma vizinhança do divisor.

Dado um biholomorfismo $\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ definimos $\tilde{\phi} : \tilde{\mathbb{C}}^2 \longrightarrow \tilde{\mathbb{C}}^2$ o biholomorfismo que resulta de estender a $\tilde{\mathbb{C}}^2$ o levantamento $\tilde{\phi}(p) = E^{-1} \circ \phi \circ E(p)$ para $p \in \tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus E_0$. A restrição de $\tilde{\phi}$ a E_0 é um automorfismo de E_0 (e pode ser interpretado como automorfismo de $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$).

Lema 2.9 *(i) $\tilde{\phi}|_{E_0} = Id \Leftrightarrow d\phi(0) = \lambda \cdot Id$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}^*$.*

(ii) Se $d\phi(0) = \lambda Id$ e consideramos $p \in E_0$ e $r \in \mathbb{N}$. A seqüência de explosões $S_{(p,r)}$ definida indutivamente da seguinte forma: $S_{(p,1)}$ consiste em explodir uma vez o ponto p, e $S_{(p,i)} = S_{(p,i-1)} \circ S_{(\hat{p}_i,1)}$ onde $\hat{p}_i = S^{-1}_{(p,i-1)}(p) \cap \overline{S^{-1}_{(p,i-1)}(E_0 \setminus p)}$

O automorfismo do divisor excepcional $D = E_0 + D_1 + \ldots + D_r$ associado a $E \circ S_{p,r}$ definido em cada componente irredutível D_i por:

$$\hat{\phi}_i = (E \circ S_{(p,i)})^{-1} \circ \phi \circ (E \circ S_{(p,i)})|_{D_i} : D_i \to D_i \quad i = 1, \ldots, r$$

Então a ação de $\hat{\phi}_i$ expressada nas coordenadas em que $\hat{p}_i$ é a origem e a outra esquina é o infinito é multiplicar por λ para $i \geq 2$. $j_0^2(\phi)$ determina $\hat{\phi}_1$. Em particular ϕ é tangente à identidade se e somente se $\hat{\phi}_i$ é a identidade para $i \geq 2$.

Prova: Escrevemos $\phi = (\phi_1, \phi_2) = (\sum P_i, \sum Q_i)$ onde P_i, Q_i são polinômios homogêneos de grau i nas variáveis (X, Y) de $\mathbb{C}^2$. Definimos $p_i(t) = P_i(1, t)$ e $q_i(t) = Q_i(1, t)$. Escrevemos $\tilde{\phi}$ na carta (t, x):

$$\tilde{\phi} = (\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2) = \left(\frac{\sum\limits_{i \geq 1} x^{i-1} q_i(t)}{\sum\limits_{i \geq 1} x^{i-1} p_i(t)}, \sum_{i \geq 1} x^i p_i(t) \right)$$

Para a prova de (i):

$$\tilde{\phi}|_{\{x=0\}} = Id \Leftrightarrow t = \tilde{\phi}_1(t, 0) = \frac{q_1(t)}{p_1(t)} \quad \deg p_1, \deg q_1 \leq 1 \Leftrightarrow$$
$$p_1(t) = \lambda \in \mathbb{C}^* \quad q_1(t) = \lambda t \Leftrightarrow d\phi(0,0) = \lambda \mathrm{Id}$$

Para a prova de (ii) usaremos a ' para denotar derivada em relação ao parâmetro adequado. Desta forma, é fácil provar que

$$\begin{aligned} d\phi(0,0) &= \begin{bmatrix} p_1 & p_1' \\ q_1 & q_1' \end{bmatrix} (0) \\ d\tilde{\phi}(t_0, 0) &= \begin{bmatrix} \frac{q_1' p_1 - q_1 p_1'}{p_1^2} & \frac{q_2 p_1 - q_1 p_2}{p_1^2} \\ 0 & p_1 \end{bmatrix} (t_0) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Das derivadas segundas de $\tilde{\phi}$ só precisamos explicitar:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{\phi}_1}{\partial t^2}(t_0, 0) &= \frac{-2p_1'(q_1' p_1 - q_1 p_1')}{p_1^3}(t_0) \\ \frac{\partial^2 \tilde{\phi}_2}{\partial t^2}(t_0, 0) &= 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Quando $(t_0, 0)$ é um ponto fixo por $\tilde{\phi}$ podemos repetir o processo de explosão nesse ponto.

Suponhamos agora $d\phi(0,0) = \lambda \mathrm{Id}$. Então para todo $t_0 \in \mathbb{C}$, $\tilde{\phi}(t_0, 0) = (t_0, 0)$. Explodiremos repetidamente a origem $t_0 = 0$. Consideramos os desenvolvimentos em série numa vizinhança de $(0,0)$: $(\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2) = (\sum \tilde{P}_i, \sum \tilde{Q}_i)$ onde $\tilde{P}_i, \tilde{Q}_i$ são polinômios homogêneos de grau i nas variáveis (t,x) de $\mathbb{C}^2$. Definimos $\tilde{p}_i(s) = \tilde{P}_i(1,s)$ e $\tilde{q}_i(s) = \tilde{Q}_i(1,s)$. Usando as equações de (2.4) temos

$$d\tilde{\phi}(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{q_2(0)}{\lambda} \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{p}_1 & \tilde{p}_1' \\ \tilde{q}_1 & \tilde{q}_1' \end{bmatrix}(0) \tag{2.6}$$

Assim, quando explodimos a origem da carta (t,x) segundo as coordenadas $(s,t) \longrightarrow (t,st) = (t,x)$ a ação sobre o divisor dessa explosão na coordenada s é

$$s \mapsto \frac{\lambda s}{1 + \frac{q_2(0)}{\lambda} s} \tag{2.7}$$

e portanto fixa a origem de novo. Observemos que isto já prova que $j^2(\phi)$ determina $\hat{\phi}_1$. Podemos iterar o processo. A açao do levantamento de ϕ ao divisor que aparece no seguinte iterado depende da matriz jacobiana em $\hat{p}_i$ que de (2.7) é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

nas coordenadas do enunciado. Depois do levantamento a ação no divisor corresponde a multiplicar por λ. Basta observar a relação entre (2.6) e (2.7). Ao iterarmos o processo esse comportamento se repete. Isso foi feito para $t_0 = 0$.

Para $t_0 \neq 0$ conjugamos ϕ com uma mudança linear M_{t_0} de $(\mathbb{C}^2, 0)$ cuja ação em E_0 seja fixar o infinito da carta (t,x) e trocar t_0 com 0. Definimos $\phi_{t_0} = M_{t_0}^{-1} \circ \phi \circ M_{t_0}$. Obviamente $d\phi_{t_0}(0) = \lambda \mathrm{Id}$. Aplicamos agora o argumento anterior a ϕ_{t_0} provando que λ determina a ação nos divisores aparecidos após duas explosões. $j^2(\phi_{t_0})$ depende de $j^2(\phi)$, e portanto este último determina a ação no segundo divisor. Observamos que $\lambda = 1$ implica que a ação nos divisores aparecidos após a segunda explosão é a identidade. Para a recíproca basta que seja a identidade em algum dos D_i com $i \geq 2$, pois a ação nele é $s \mapsto \lambda s$. ∎

Definição 2.10 *Dada $\mathcal{F} \in \mathcal{D}_0(n; r_1, \ldots, r_n)$ denominamos resolução estendida de $\mathcal{F}$ à composição de explosões $S_{\mathcal{F}} = E \circ S_{(p_1, r_1+1)} \circ \ldots \circ S_{(p_n, r_n+1)}$ onde $\Sigma_{\mathcal{F}} = \{p_1, \ldots, p_n\}$ e $S_{(p_i, r_i+1)}$ foi definida no Lema 2.9.*

Observemos que se $H(\mathcal{F}) = H(\mathcal{F}')$ então $S_{\mathcal{F}} = S_{\mathcal{F}'}$, e também que a resolução estendida da folheação $\mathcal{F}$ é de fato a resolução da curva redutível formada pelas separatrizes de $\tilde{\mathcal{F}}$ pelos pontos $p_1, \ldots, p_n$. Provemos agora que as folheações $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ de (2.3) não são equivalentes. Primeiro observamos que para $n \geq 3$ e valores genéricos dos t_i o grupo $H(\mathcal{F})$ não tem simetrias, isto é, o único automorfismo φ de E_0 tal que $\varphi H(\mathcal{F}) \varphi^{-1} = H(\mathcal{F})$ é a identidade. No caso $n = 2$ e $r_1, r_2 = 1$ sempre existe uma segunda simetria de ordem 2, correspondente a fixar o infinito e trocar t_1 e t_2. Suponha que $\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ é um biholomorfismo entre $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$. Então $\tilde{\phi}|_{E_0}$ conjuga $H(\mathcal{F})$ consigo próprio e deve ser a indentidade em E_0.

Pelo Lema 2.9 $d\phi(0) = \lambda \cdot Id$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Consideramos as folheações $\hat{\mathcal{F}} = S^*_{\mathcal{F}}(\mathcal{F})$ e $\hat{\mathcal{F}}' = S^*_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}')$. É fácil verificar que $\mathrm{Sing}(\hat{\mathcal{F}}) = \{q_1, \ldots, q_n\} \cup \{esquinas\}$, $\mathrm{Sing}(\hat{\mathcal{F}}') = \{q'_1, \ldots, q'_n\} \cup \{esquinas\}$ onde q_i (resp. q'_i) não é esquina e coincide com a interseção do transformado estrito da folha de $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{F}'$) que passa por p_i e o divisor de $S_{\mathcal{F}}$. Obviamente $\hat{\phi}(q_i) = q'_i$, já que $\hat{\phi}$ fixa as esquinas e $\hat{\phi}(\mathrm{Sing}(\hat{\mathcal{F}})) = \mathrm{Sing}(\hat{\mathcal{F}}')$. Calculamos o transformado estrito da folha de $\tilde{\mathcal{F}}$ (resp. de $\tilde{\mathcal{F}}'$) que passa por p_i aplicando $S_{(p_i, r_i+1)}$. Em coordenadas: $(s,t) \mapsto (s(t-t_i)^{r_i+1}, t)$

$$
\begin{aligned}
0 &= P(t) - P(t_i) + (t-t_i)^{r_i+1} s = (t-t_i)^{r_i+1}\left(\frac{P(t)-P(t_i)}{(t-t_i)^{r_i+1}} + s\right)\\
0 &= P(t) - P(t_i) + (t-t_i)^{r_i+1} s(1+p(t)) = (t-t_i)^{r_i+1}\left(\frac{P(t)-P(t_i)}{(t-t_i)^{r_i+1}} + s(1+p(t))\right)
\end{aligned}
$$

Escrevemos $R_i(t) = \frac{P(t)-P(t_i)}{(t-t_i)^{r_i+1}}$. Pela construção R_i é holomorfa com $R_i(t_i) \neq 0$, $q_i = (-R_i(t_i), 0)$ e $q'_i = (-\frac{R_i(t_i)}{1+p(t_i)}, 0)$ na carta (s,t). Portanto para $i = 1, \ldots, n-1$, $q_i = q'_i$. Isto implica que $\lambda = 1$. Porem se $p(t_n) \neq -1$, $q_n \neq q'_n$, e genericamente $\frac{1}{1+p(t_n)} \neq 1$. Portanto $\hat{\phi}(q_n) \neq q'_n$. Em conseqüência não existe um primeiro jato de ϕ possível. Por um argumento similar comprova-se que no caso $n = 2$ genericamente não existe um biholomorfismo tangente à outra simetria de $H(\mathcal{F})$. No exemplo da Introdução (1.1) a simetria se expressa nas coordenadas (X, Y) como $\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}^*$ e comprova-se que dito λ determina a ação nos divisores. A obstrução é de fato formal: não existem jatos formais de ϕ para conjugar $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$.

Observemos que o argumento acima mostra também que as curvas redutíveis C e C' formadas pelas separatrizes de $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ cujos transformados estritos passam pelos pontos de $\Sigma_{\mathcal{F}}$ (as chamadas separatrizes isoladas) não são biholomorficamente equivalentes, se assumimos que não existem automorfismos de E_0 não triviais que preservem $\Sigma_{\mathcal{F}}$ (o que genericamente acontece). Assim, uma pergunta interessante é saber se fixando as separatrizes isoladas C e a estrutura transversal $H(\mathcal{F})$ determinamos completamente a classe analítica da folheação. Uma versão um pouco mais geral deste problema seria decidir se a classe de equivalência analítica das separatrizes isoladas módulo biholomorfismos tangentes a simetrias de $H(\mathcal{F})$ e a classe de conjugação $H[\mathcal{F}]$ determinam completamente a classe analítica de $\mathcal{F}$. Dentre os invariantes analíticos de C há alguns associados à posição dos pontos q_i. Por exemplo supondo $\mathcal{F} \in \mathcal{D}_0(n; 1, \ldots, 1)$ tal que $H(\mathcal{F})$ não tem simetrias, a aplicação (ver a definição do domínio em 1.2)

$$
\begin{aligned}
q : \mathcal{D}_0[\mathcal{F}] &\longrightarrow \mathbb{C}P^{n-1}\\
q(\omega) &= [q_1 : \ldots : q_n]
\end{aligned}
$$

onde q_i é a coordenada da singularidade respectiva de $S^*_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}_\omega)$, fica bem definida e fatoriza por $\frac{\mathcal{D}_0(\mathcal{F})}{\sim_{an}}$; isto é, q é um invariante analítico.

Em geral desconhecemos a lista completa de invariantes das curvas redutíveis (do tipo das separatrizes isoladas de elementos de $\mathcal{D}_0$) descrito no parágrafo anterior. Na verdade trata-se de um problema (inclusive quando a curva é irredutível) que chama a atenção pela falta de regularidade na estrutura do espaço módulos topológico-analíticos quando variamos a ordem de C na origem (ver [Zar], [T]). Em vez de preocuparmos com esses invariantes, apresentaremos um resultado de determinação finita para folheações com estrutura transversal fixada. Precisaremos da seguinte definição:

Definição 2.11 *Dado um germe de função holomorfa $f : (\mathbb{C}^N, p) \longrightarrow \mathbb{C}$ definimos **o jato k-èsimo de** f em p como a soma parcial do seu desenvolvimento em série de potências ao redor de p, isto é, $j_p^k(f) = \sum_{0 \le |Q| \le k} a_Q (Z-p)^Q$ onde Q denota um multi-índice e $a_Q \in \mathbb{C}$ é o coeficiente associado a Q de f em p nas variáveis $Z = (z_1, \ldots, z_n)$. Para um germe de 1-forma holomorfa em p, $\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i dz_i$, definimos o k-jato de ω como $j_p^k(\omega) = \sum_{i=1}^{n} j_p^k(f_i) dz_i$, e analogamente para um campo de vetores.*

Note-se que a definição do jato depende das coordenadas escolhidas. Observamos que nos exemplos de 2.8, podemos calcular as formas ω e ω' que definem $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ derivando f e f'. Escrevendo $N = \sum r_i$ comprova-se que $j_0^{N+1}(\omega) = j_0^{N+1}(\omega')$ mas $j_0^{N+2}(\omega) \neq j_0^{N+2}(\omega')$. Mais ainda , é uma conta elementar provar que $j^{N+2}(\omega)$ determina a posição das singularidades de $S_{\mathcal{F}}^*(\mathcal{F}_\omega)$ no divisor para qualquer $\mathcal{F} \in \mathcal{D}_0$ e $\omega \in \mathcal{D}_0[\mathcal{F}]$.

Na linguagem introduzida neste capítulo, o Teorema 1 lê-se:

Teorema 2.12 *Sejam $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\omega$ e $\mathcal{F}' = \mathcal{F}_{\omega'}$ folheações de $\mathcal{D}_0(n; r_1, \ldots, r_n)$ $N := \sum_{i=1}^{n} r_i$ e $\kappa := (N+1) + \max\{r_i\}(3N-2)$. Suponha*

(i) $H(\omega) = H(\omega')$

(ii) $j_0^\kappa(\omega) = j_0^\kappa(\omega')$

Então existe um biholomorfismo $\Psi : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ tal que $\mathcal{F}_\omega = \Psi^*(\mathcal{F}_{\omega'})$ e $d\Psi(0,0) = Id$.

A multiplicidade algébrica m de qualquer 1-forma ω tal que $\mathcal{F}_\omega \in \mathcal{D}_0(n; r_1, \ldots, r_n)$ é $m = N+1$. Com efeito, pela fórmula de Brunella [Br], temos $\text{tang}(\tilde{\mathcal{F}}_\omega, E_0) = T^*_{\tilde{\mathcal{F}}_\omega} \cdot E_0 + E_0 \cdot E_0$ ou, substituindo pelos valores adequados, $N = m-1$. Portanto $\kappa = m + max\{r_i\}(3m-5)$ Dada uma forma qualquer ω' e $\mathcal{F}_\omega \in \mathcal{D}_0(n; r_1, \ldots, r_n)$ tal que a condição (ii) é satisfeita, é fácil comprovar que $\mathcal{F}_{\omega'} \in \mathcal{D}_0(n; r_1, \ldots, r_n)$.

Com o objetivo de não sobrecarregar a notação e facilitar a compreensão do argumento nos centraremos no caso $\mathcal{D}_0(n; 1, \ldots, 1)$ que a partir de agora denotaremos por $\mathcal{D}_0(n)$ (seção 2.1). Posteriormente (na seção 2.2) indicaremos as modificações necessárias para estender o método a qualquer classe de equivalência topológica $\mathcal{D}_0(n; r_1, \ldots, r_n)$. O enunciado para $\mathcal{D}_0(n)$ é:

Teorema 2.13 *Sejam $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\omega$ e $\mathcal{F}' = \mathcal{F}_{\omega'}$ folheações de $\mathcal{D}_0(n)$ tais que $H(\omega) = H(\omega')$. Se $j^{4n-1}(\omega) = j^{4n-1}(\omega')$ então existe um biholomorfismo $\Psi : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ tal que $\mathcal{F}_\omega = \Psi^*(\mathcal{F}_{\omega'})$ e $d\Psi(0,0) = Id$.*

2.1 Prova em $\mathcal{D}_0(n)$

2.1.1 Folheações companheiras: caso de tangência simples

Seja $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\omega$ um elemento de $\mathcal{D}_0(n)$. Suponhamos que numa carta $t \in \mathbb{C} = E_0 \setminus \infty$ temos todos os pontos de Σ_ω. Diremos que uma folheação $\mathcal{G}$ definida em $(\mathbb{C}^2, 0)$ é companheira de $\mathcal{F}$ num ponto $p \in E_0$ se $\tilde{\mathcal{F}}$ e $\tilde{\mathcal{G}}$ satisfazem as seguintes relações numa vizinhança de p:

1. $p \in E_0 \setminus \{\Sigma_\omega, \infty\}$

   Após uma mudança local de coordenadas podemos supor $p = (0,0)$ numa carta (u, v) e $\tilde{\mathcal{F}} = \{du = 0\}$. p é ponto regular de $\tilde{\mathcal{G}}$ e a separatriz por p é a curva $v = 0$. Portanto $\tilde{\mathcal{F}}$ e $\tilde{\mathcal{G}}$ são transversais numa vizinhança de p.

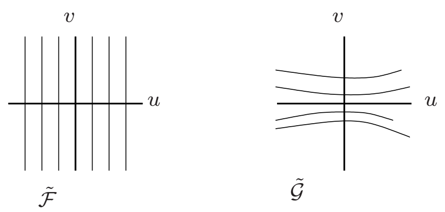


Figura 2.4: Estrutura em pontos de $E_0 \setminus \{\Sigma_\omega, \infty\}$

2. $p = \infty$

   Após uma mudança local de coordenadas podemos supor $p = (0,0)$ na carta (u, v) e $\tilde{\mathcal{F}} = \{du = 0\}$. O ponto p é uma singularidade de $\tilde{\mathcal{G}}$ com exatamente duas separatrizes : $u = 0$ e $v = 0$ e com integral primeira. O seu índice é $\frac{-1}{2n+1}$. $\tilde{\mathcal{F}}$ e $\tilde{\mathcal{G}}$ são transversais fora da separatriz comum $u = 0$

3. $p \in \Sigma_\omega$

   Suponhamos (U, p) uma vizinhança de p e $H(\tilde{\mathcal{F}}, p) =< h >$. Escolhemos uma mudança de coordenadas *local* $\psi = (\psi_1, \psi_2) : (U, p) \longrightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ de forma que $\psi_2|_{E_0 \cap U} = 0$ e $\psi_1 \circ h \circ \psi_1^{-1}(t, 0) = (-t, 0)$, Na nova carta (t, x),

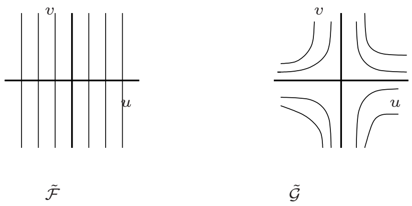


Figura 2.5: Estrutura no ponto ∞

suponhamos que $\tilde{\mathcal{F}}$ vem definida por $\{f(t,x) = t^2 - x = cte\}$ e $\tilde{\mathcal{G}}$ por $\{g(t,x) = \frac{x}{x-t^2}\phi(t,x) = cte\}$ com $\phi \in \mathcal{O}^*_{(\mathbb{C}^2,0)}$.
Consideraremos a seguinte seqüência $S = S_2 \circ S_1$ de explosões:
$S_1 : \tilde{\mathbb{C}}^2 \longrightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ definida nas cartas (t,w) e (v,x)por $(vx,x) = (t,x) = (t,tw)$. Denotaremos por $E_1 = S_1^{-1}(0,0)$ o divisor excepcional associado. S_2 a explosão no $(0,0)$ da carta (t,w) e definida pelas cartas (t,s) e (z,w) de forma que $(t,ts) = (t,w) = (wz,w)$ e $E_2 = S_2^{-1}(0,0)$. O transformado estrito de E_1 por σ_2 será denotado de novo por E_1. Temos $E_1 \cdot E_1 = -2$ e $E_2 \cdot E_2 = -1$. Sejam $\hat{\mathcal{F}} = S^*(\tilde{\mathcal{F}})$ e $\hat{\mathcal{G}} = S^*(\tilde{\mathcal{G}})$ os germes de folheações numa vizinhança de $E_1 \cup E_2$ definidos pelo pull-back por S de $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ respectivamente. Sejam $C_\infty = \overline{S^{-1}(\{x = t^2\} \setminus (0,0))}$, e $C_0 = \overline{S^{-1}(\{x = 0\} \setminus (0,0))}$

Lema 2.14 *(i) E_1 e E_2 são invariantes por $\hat{\mathcal{F}}$*

(ii) $p_1 = C_\infty \cap E_2$ e $p_2 = E_1 \cap E_2$ são as únicas singularidades de $\hat{\mathcal{F}}$.

(iii) $i_{p_2}(\hat{\mathcal{F}}, E_2) = i_{p_1}(\hat{\mathcal{F}}, E_2) = -\frac{1}{2}$

(iv) p_1 e p_2 são singularidades reduzidas e as aplicações locais de holonomia de $\hat{\mathcal{F}}$ ao longo de E_2 têm ordem 2. A aplicação de holonomia de $\hat{\mathcal{F}}$ ao longo de E_1 é a identidade.

(v) C_∞ é a segunda separatriz de $\hat{\mathcal{F}}$ por p_1.

Prova: As formas que definem $\hat{\mathcal{F}}$ em vizinhanças (v,x) de $E_1 \setminus p_2 = \{x = 0\}$ e (t,s) de $E_2 \setminus p_2 = \{t = 0\}$ são:

$$S_1^*(df)(v,x) = x^2 v dv + (xv^2 - \frac{1}{2})dx$$

$$\frac{1}{t} S^*(df)(t,s) = (2 - 2s)dt - tds$$

(i) e (ii) decorrem trivialmente da expressão das formas. De fato p_1 tem coordenadas $(0,1)$ na carta (t,s) de E_2. (iii) e (iv) decorrem do teorema do

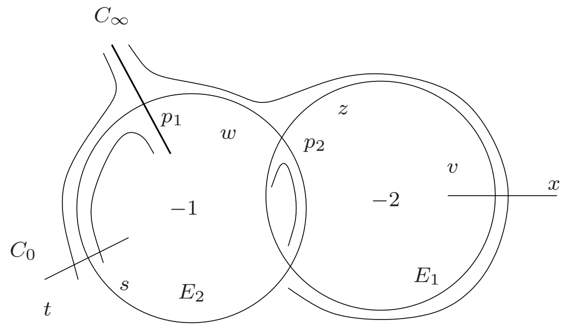


Figura 2.6: Estrutura de $\hat{\mathcal{F}}$

índice de Camacho-Sad [CS] e do fato que $\hat{\mathcal{F}}$ possui uma integral primeira holomorfa. (v) O conjunto C_0 está contido no nível 0 de f. ■

Observamos que nesta resolução, desfazendo a mudança de coordenadas ψ (que foi escolhida para conjugar h com a involução $t \mapsto -t$) o elemento de $H(\omega)$ correspondente à tangência em p é interpretado como aplicação de holonomia de $\hat{\mathcal{F}}$ associada à seção transversal $C_0 = \{s = 0\}$ e a um laço em E_2 que gera $\pi_1(E_2 \setminus \{p_1, p_2\}) = \mathbb{Z}$. Em geral um jato finito do germe de forma que define a singularidade p_1 não determina as holonomias dela. Em outras palavras, a transformação Ψ não pode ser construída com a informação de um jato finito do germe de 1-forma que define $\tilde{\mathcal{F}}|_U$

O seguinte lema descreve as propriedades para $\hat{\mathcal{G}}$' s genéricos (dependendo da função ϕ) :

Lema 2.15 *Se* $\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}(0,0)\right)^2 + 4\phi(0,0)\frac{\partial \phi}{\partial x}(0,0) \neq 0$

(i) $\hat{\mathcal{G}}$ *é regular e transversal a* E_2 *em todos os seus pontos.* E_1 *é invariante por* $\hat{\mathcal{G}}$*.*

(ii) Sing($\hat{\mathcal{G}}$*) consiste exatamente de dois pontos* $q_1, q_2 \in E_1 \setminus p_2$*.*

(iii) q_1 *e* q_2 *são selas e* $i_{q_2}(\hat{\mathcal{G}}, E_1) = i_{q_1}(\hat{\mathcal{F}}, E_2) = -1$

(iv) As aplicações de holonomia de $\hat{\mathcal{G}}$ *em* q_1 *e* q_2 *ao longo de* E_1 *são a identidade.*

(v) C_∞ *e* C_0 *são as separatrizes de* $\hat{\mathcal{G}}$ *passando pelos pontos regulares* p_1 *e* $(0,0) \in (t,s)$ *respectivamente.*

Prova: As expressões das integrais primeiras em vizinhanças de E_1 e E_2 são:

$$S^*(g)(t,s) = \frac{s}{s-1}\phi(t, t^2 s)$$

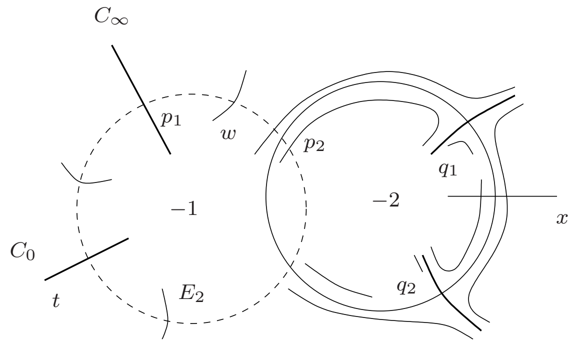


Figura 2.7: Estrutura de $\hat{\mathcal{G}}$

$$S^*(g)(z,w) = \frac{1}{1-z}\phi(w^2z, zw)$$
$$S^*(g)(v,x) = \frac{1}{1-xv^2}\phi(xv, x)$$

As formas associadas a elas são:

$$\begin{aligned}\eta(t,s) = {} & [-\phi(t,t^2s) + (s-1)st^2\frac{\partial\phi}{\partial x}(t,t^2s)]ds \\ & +[(s-1)s\big(2ts\tfrac{\partial\phi}{\partial x}(t,t^2s) + \tfrac{\partial\phi}{\partial t}(t,t^2s)\big)]dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta(v,x) = {} & x[-2v\phi(xv,x) + (1-xv^2)\frac{\partial\phi}{\partial t}(xv,x)]dv \\ & +[-v^2\phi(xv,x) + (1-xv^2)\big(\tfrac{\partial\phi}{\partial x}(xv,x) + v\tfrac{\partial\phi}{\partial t}(xv,x)\big)]dx\end{aligned}$$

$$\eta(0,s) = -\phi(0,0)ds + \big((s-1)s\frac{\partial\phi}{\partial t}(0,0)\big)dt$$

Isto significa que $\hat{\mathcal{G}}$ é regular e transversal ao divisor $E_2 = \{t=0\}$.

$$\eta(v,0) = \big(-v^2\phi(0,0) + v\frac{\partial\phi}{\partial t}(0,0) + \frac{\partial\phi}{\partial x}(0,0)\big)dx$$

e portanto E_1 é invariante por $\hat{\mathcal{G}}$.

As singularidades de $\hat{\mathcal{G}}$ em E_1 são os pontos $(v,0)$ solução da equação

$$v^2\phi(0,0) - v\frac{\partial\phi}{\partial t}(0,0) - \frac{\partial\phi}{\partial x}(0,0) = 0$$

Se $\big(\frac{\partial\phi}{\partial t}(0,0)\big)^2 + 4\phi(0,0)\frac{\partial\phi}{\partial x}(0,0) \neq 0$, a equação tem duas soluções distintas

$q_1 = (v_1, 0)$, e $q_2 = (v_2, 0)$ que são singularidades simples de $\hat{\mathcal{G}}$. Com efeito, suponhamos, fazendo uma mudança de variáveis se for necessário, que $v_1 = 0$. É fácil comprovar que a parte linear do campo dual associado a η nesse ponto tem matriz:

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial\phi}{\partial t}(0,0) \\ -\frac{\partial\phi}{\partial t}(0,0) & \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(0,0) \end{bmatrix}$$

O número característico da singularidade é -1, e a singularidade é reduzida, com índice de Camacho-Sad -1 e a identidade como aplicação de holonomia ao longo de E_1. Isto prova (i), (ii), (iii) e (iv). Para provar (v) basta observar que os conjuntos C_∞ e C_0 são subconjuntos dos níveis 0 e ∞ respectivamente da função $S^*(g)$. ■

O seguinte lema descreve as propriedades de $\hat{\mathcal{G}}$ no caso não genérico:

Lema 2.16 *Se* $\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}(0,0)\right)^2 + 4\phi(0,0)\frac{\partial\phi}{\partial x}(0,0) = 0$

(i) $\hat{\mathcal{G}}$ *é regular e transversal a* E_2 *em todos os seus pontos.* E_1 *é invariante por* $\hat{\mathcal{G}}$.

(ii) Sing($\hat{\mathcal{G}}$) *consiste exatamente de um ponto* $q_1 \in E_1 \setminus p_2$.

(iii) q_1 *é uma sela e* $i_{q_1}(\hat{\mathcal{G}}, E_1) = -2$

(iv) A aplicação de holonomia de $\hat{\mathcal{G}}$ *em* q_1 *ao longo de* E_1 *é a identidade.*

(v) C_∞ e C_0 *são as separatrizes de* $\hat{\mathcal{G}}$ *passando pelos pontos regulares* p_1 *e* $(0,0) \in (t,s)$ *respectivamente.*

Prova: Aplicando as contas da prova do lema anterior, a hipótese do lema implica exatamente (ii). Do Teorema do índice de Camacho-Sad e do fato que $\hat{\mathcal{G}}$ tem integral primeira holomorfa obtemos (iii) e (iv). O restante de ítens foram provados no lema anterior. (na figura 2.11 da seção 2.3 temos uma figura descrevendo as propriedades). ■

Para distinguir melhor entre as duas situações possíveis fazemos a seguinte definição:

Definição 2.17 *Se* $\tilde{\mathcal{G}}$ *satisfaz a condição do Lema 2.15 no ponto* $p \in \Sigma_{\mathcal{F}}$ *diremos que* $\tilde{\mathcal{F}}$ *e* $\tilde{\mathcal{G}}$ *são* ***companheiras com curva de tangências em*** p*. Caso contrário (ou seja* $\tilde{\mathcal{G}}$ *satisfaz as condições do Lema 2.16) diremos que* $\tilde{\mathcal{F}}$ *e* $\tilde{\mathcal{G}}$ *são* ***companheiras sem curva de tangências em*** p.

É importante observar que as propriedades descritas nos Lemas 2.14, 2.15 e 2.16 são invariantes por mudanças de coordenadas biholomorfas. A nomenclatura vem motivada pelas relações entre as folheações $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ descritas a seguir:

Lema 2.18 • *Se $\tilde{\mathcal{G}}$ é companheira com curva de tangências de $\tilde{\mathcal{F}}$ num ponto $p \in \Sigma_\omega$, o divisor $D := tang(\hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathcal{G}}) = C_\infty + E_1 + T$ onde T é uma curva regular irredutível transversal a E_1 num ponto regular $p_0 \in E_1$ de $\hat{\mathcal{G}}$.*

- *Se $\tilde{\mathcal{G}}$ é companheira sem curva de tangências de $\tilde{\mathcal{F}}$ num ponto $p \in \Sigma_\omega$, o divisor $D := tang(\hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathcal{G}}) = C_\infty + E_1$ e neste caso definimos T como a única separatriz de $\hat{\mathcal{G}}$ transversal a E_1.*

Em qualquer destas situações, existe uma vizinhança V de E_1 tal que

(i) Para $V_0 = E_2 \cap V$, $S^*(g)|_{V_0} : V_0 \longrightarrow g(V_0)$ é um biholomorfismo.

(ii) Para cada folha L de $\hat{\mathcal{F}}|_V$ seja $L \cap T = t_L$. A aplicação

$$g|_{L \setminus t_L} : L \setminus t_L \longrightarrow \mathbb{C}$$

é um recobrimento holomorfo regular 2 a 1 sobre a imagem.

Prova: O divisor D de tangências entre $\tilde{\mathcal{F}}$ e $\tilde{\mathcal{G}}$ satisfaz $D = \{df \wedge ((x-t^2)^2 dg) = 0\}$

$$(x-t^2)^2 df \wedge dg(t,x) = -\big[2t[(\phi + x\partial_x\phi)(t^2-x) + x\phi] + [x(\partial_t\phi)(t^2-x) - 2x\phi]\big] dt \wedge dx$$

$$= (x-t^2)R(t,x) dt \wedge dx$$

onde

$$R(t,x) = 2t(x\partial_x\phi + \phi) + x\partial_t\phi$$

Temos $S^*(R)(v,x) = x[2v(x\partial_x\phi + \phi) + \partial_t\phi] = xH(v,x)$.

Obviamente apareceram as componentes E_1 e C_∞ de D. $H(v,0) = 0$ possui uma única solução $p_0 = (\frac{-\partial_t\phi(0,0)}{\phi(0,0)}, 0)$, Se $\tilde{\mathcal{G}}$ é companheira sem curva de tangência de $\tilde{\mathcal{F}}$, p_0 coincide com a singularidade de $\hat{\mathcal{G}}$ em E_1, e pela estrutura das folheações na vizinhança, D não possui mais componentes: $D = C_\infty + E_1$. Caso $\tilde{\mathcal{G}}$ seja companheira com curva de tangências de $\tilde{\mathcal{F}}$, temos que $\frac{\partial H}{\partial v}(p_0) \neq 0$ implica que $T = \{H = 0\}$ é um divisor transversal a E_1 passando pelo ponto p_0. Portanto $D = C_\infty + E_1 + T$

Para a prova de (i) e (ii) não precisaremos distinguir os casos de companheira com e sem tangências.

Sejam $V_1 \subset E_1$ e $V_2 \subset E_2$ vizinhanças de $p_2 = E_1 \cap E_2$. A aplicação $S^*(g)|_{V_2}$ satisfaz (i), pelo fato que a derivada dela em relação a variável z é não nula. Seja $V_{\hat{\mathcal{F}}}$ (resp. $V_{\hat{\mathcal{G}}}$) o aberto saturado de V_1 (resp V_2) por $\hat{\mathcal{F}}$ (resp. $\hat{\mathcal{G}}$). Consideramos $V = V_{\hat{\mathcal{F}}} \cap V_{\hat{\mathcal{G}}}$ e $V_0 = V \cap E_2$. Olhando para a expressão de $S^*(g)$, é claro que $S^*(g)|V$ é holomorfa. Seja L uma folha de $\hat{\mathcal{F}}|_V$. Podemos pensá-la como um disco numa folha de $\hat{\mathcal{F}}$. Devido ao fato que a aplicação de holonomia de $\hat{\mathcal{F}}$ ao longo de E_2 tem grau 2, as fibras de $S^*(g)|_V$ próximas de ∂V_0 (folhas de $\hat{\mathcal{G}}$) cortam L

em exatamente dois pontos distintos para folhas L próximas de E_2. Logo $g|_L$: $L \longrightarrow S^*(g)|_L(L) \subset \mathbb{C}$ é uma função holomorfa de grau 2. $T \cap L$ é um único ponto t_L devido à transversalidade de T com E_1 e ao fato que E_1 é invariante por $\tilde{\mathcal{F}}$. Claramente t_L é um ponto crítico de $g|_L$. Podemos estender $g|_L$ a uma aplicação $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \longrightarrow \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ de grau 2 colando adequadamente duas cópias de $g|_L$. Aplicando fórmula de Hurwitz temos:

$$2 = 2 \cdot 2 - 2(\sum_{q \in L}(v(q)) - 1))$$

Portanto $\sum\limits_{q \in L}(v(q) - 1) = 1$ e, dado que $v(t_L) > 1$, a única possibilidade é que $v(t_L) = 2$ e $v(q) = 1$ $\forall q \in L \setminus t_L$. Isto mostra que $g|_{L \setminus t_L} : L \setminus t_L \longrightarrow \mathbb{C}$ é um recobrimento de duas folhas sobre a sua imagem. ∎

Corolário 2.19 *A projeção de $L \setminus t_L$ sobre V_0 ao longo de $\tilde{\mathcal{G}}$ é um recobrimento holomorfo de duas folhas.(Ver Figura 2.8)*

Prova: Juntando os ítens (i) e (ii) do lema anterior, só resta provar que os valores que $g|_L$ assume estão contidos numa vizinhança de $g(p_2) \in g(V_0)$. Isto é verdade devido ao fato que as separatrizes de $\tilde{\mathcal{G}}$ pelas singularidades estão contidas no mesmo nível de g que contém p_2 e E_1. Além disso, estas separatrizes são transversais a E_1 e portanto também a L. ∎

2.1.2 Conjugação de pares de companheiras com tangências $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ e $(\mathcal{F}', \mathcal{G}')$

Sejam $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ dois germes de folheação regular em $(\mathbb{C}^2, 0)$ tais que, numa vizinhança U da origem na carta (t, x) as folhas passando por $0 = (0, 0)$ possuem uma tangência **simples** (i.e. r=1) com a reta $E_0 = \{x = 0\}$. Suponha que $H(\mathcal{F}, 0) = H(\mathcal{F}', 0) =< h >$ onde $h : (E_0, 0) \longrightarrow (E_0, 0)$ é uma involução: $h^2 = id$. Seja $f : (U, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ uma integral primeira local de $\mathcal{F}$ e $f_0 := f|_{E_0}$. Pela definição da estrutura transversal, $f_0 \circ h = f_0$. Portanto podemos estender f_0 ao longo das folhas $\mathcal{F}'$ para obter uma integral primeira holomorfa $f' : (U, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ de $\mathcal{F}'$. Sejam $C = \{f = 0\}$ e $C' = \{f' = 0\}$. Denotamos por $p : U \longrightarrow \frac{U}{f}$ e $p' : U \longrightarrow \frac{U}{f'}$ as projeções sobre os espaços de folhas.

Lema 2.20 *Dadas $\Gamma = \{(t, x) \in U | t = P(x)\}$ e $\Gamma' = \{(t, x) \in U | t = P'(x)\}$, duas transversais a $E_0 = \{x = 0\}$ holomorfas.*

(i) Existe um biholomorfismo $\varphi_{\Gamma\Gamma'} : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$ tal que $p' \circ \varphi_{\Gamma\Gamma'}(q) = p(q)$, $\forall q \in \Gamma$.

(ii) Se

$$f'(t, x) = f(t, x) + x^k q_1(t, x) \tag{2.9}$$

e

$$P'(x) = P(x) + x^k q_2(x) \tag{2.10}$$

com $k \geq 1$ *e* $q_1, q_2 \in \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^2,0)}$, *nas parametrizações* $x \longrightarrow (P(x), x)$ *e* $x \longrightarrow (P'(x), x)$*de* Γ *e* Γ', $\varphi_{\Gamma\Gamma'}$ *tem a expressão* $x \longrightarrow (P'(b(x)), b(x))$ *onde* $b(x) = x + ax^k + \ldots$.

Prova:

(i)Por construção temos $U/f \simeq U \cap E_0/f \simeq U'/f'$. Observemos que $(U \setminus 0)/f$,$(U \setminus 0)/f' \simeq \mathbb{D}^*$ e as restrições de p a $\Gamma \setminus 0$ e de p' a $\Gamma' \setminus 0$ são recobrimentos holomorfos 2 a 1 sobre $U \cap E_0 \setminus 0$.

$$\begin{tikzcd}
\Gamma \setminus 0 \arrow[r, "\exists\varphi?"] \arrow[d, "p|_{\Gamma\setminus 0}"'] & \Gamma' \setminus 0 \arrow[d, "p'|_{\Gamma'\setminus 0}"] \\
(U \setminus C)/f \arrow[r, "\simeq"] & (U' \setminus C')/f'
\end{tikzcd}$$

Uma condição necessária e suficiente para a existência do levantamento $\varphi : \Gamma \setminus 0 \longrightarrow \Gamma' \setminus 0$ contínuo, com $p' \circ \varphi = p$ é que $p_*(\pi_1(\Gamma \setminus 0)) \subset p'_*(\pi_1(\Gamma' \setminus 0))$ onde π_1 denota o grupo fundamental e p_*, p'_* as aplicações induzidas nos grupos fundamentais por p e p' respectivamente. Temos $\pi_1(\Gamma \setminus \mathit{0}) = \mathbb{Z} =< [\gamma] >$, e $\pi_1(U \cap E_{\mathit{0}} \setminus \mathit{0}) = \mathbb{Z} =< [\sigma] >$. Como os recobrimentos são duplos, temos que $p_*[\gamma] = 2[\sigma] = p'_*[\gamma]$, e portanto existe o levantamento contínuo de grau 1. Ele é holomorfo porque localmente o é. Ele estende holomorficamente a *0* pelo fato que φ é limitada . Denotamos por $\varphi_{\Gamma\Gamma'}$ a extensão de φ. Ela continua sendo injetiva pois $\varphi_{\Gamma\Gamma'}(\mathit{0}) = \mathit{0}$. Isto prova (i).

(ii) Suponhamos que $\varphi_{\Gamma\Gamma'}(P(x), x) = (P'(\Sigma b_i x^i), \Sigma b_i x^i)$ onde $b_i \in \mathbb{C}$ são os coeficientes do desenvolvimento em série de $\varphi_{\Gamma\Gamma'}$ nessas coordenadas. Da construção de $\varphi_{\Gamma\Gamma'}$ e da equação (2.9)

$$f(P(x), x) = f'(\varphi_{\Gamma\Gamma'}(P(x), x)) = f(P'(\Sigma b_i x^i), \Sigma b_i x^i) + x^k q(P'(\Sigma b_i x^i), \Sigma b_i x^i) \tag{2.11}$$

$\varphi_{\Gamma\Gamma'}(\mathit{0}) = \mathit{0}$ implica $b_0 = 0$, e $\varphi_{\Gamma\Gamma'}$ injetiva implica $b_1 \neq 0$. Do fato que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \neq 0$, temos que $b_1 = 1$. Das condições sobre f, f', P e P', $j^k(f(P(x), x)) = j^k(f(P'(x), x)) = \sum_{i=1}^{k-1} a_i x^i$ e substituindo na equação (2.11) obtemos indutivamente $b_2 = \ldots = b_{k-1} = 0$, o que termina a prova do lema. ∎

Suponhamos que $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ (resp. $(\mathcal{F}', \mathcal{G}')$) são um par de folheações companheiras com curva de tangências T (resp. T') em $(0,0)$, e seja S a seqüência de explosões definida na seção 2.1.1. $\varphi_{TT'}$ expressa uma correspondência entre folhas de $\hat{\mathcal{F}} = S^*(\mathcal{F})$ e folhas de $\hat{\mathcal{F}}' = S^*(\mathcal{F}')$. A seguir faremos a construção de uma correspondência análoga para as folheações companheiras $\tilde{\mathcal{G}}$ e $\tilde{\mathcal{G}}'$:

Suponhamos que $\mathcal{G}$ e $\mathcal{G}'$ têm integrais primeiras $g = \frac{x}{f(t,x)}$ e $g' = \frac{x}{f'(t,x)}$ respectivamente onde $\{f = 0\}$ (resp. $\{f' = 0\}$) é uma equação da folha de $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{F}'$) passando por *0*. Seja $p_0 = \{s = 0\} \cap E_2$, $p_2 = E_1 \cap E_2$ e p_1 (respectivamente p_1') a singularidade de $\hat{\mathcal{F}}$ (resp. $\hat{\mathcal{F}'}$) em $E_2 \setminus p_2$. Na carta (z, w) da vizinhança do ponto p_2 onde $E_1 = \{z = 0\}$ e $E_2 = \{w = 0\}$ são os divisores excepcionais temos $(t, x) = (zw, zw^2)$. Numa vizinhança da origem dessa carta, $S^*(g)$ e $S^*(g')$ são funções holomorfas. Devido ao Lema 2.18 $S^*(g)|_{V_0}$ e $S^*(g')|_{V_0}$ são biholomorfismos numa vizinhança $V_0 \subset E_2$. Dado um biholomorfismo $\beta : E_2 \longrightarrow E_2$ que fixa p_2, definimos

$$\Upsilon_\beta : S^*(g)(V_0) \longrightarrow S^*(g')(V_0)$$

por $\Upsilon_\beta(w) = S^*(g')|_{V_0} \circ \beta \circ S^*(g)|_{V_0}^{-1}(w)$. Ela expressa a correspondência entre níveis de g e níveis de g' (falamos indistintamente em folhas de uma folheação e níveis, ou fibras, da função meromorfa que a define, se existe)

Lema 2.21 $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ *e* $(\mathcal{F}', \mathcal{G}')$*definidas como acima. Seja* $\beta : E_2 \longrightarrow E_2$ *o biholomorfismo (único) definido por* $p_0 \mapsto p_0$*,* $p_1 \mapsto p_1'$ *e* $p_2 \mapsto p_2$*. Suponha que tang*$(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = T + \{f = 0\}$ *e tang*$(\mathcal{F}', \mathcal{G}') = T' + \{f' = 0\}$*. Nesse caso podemos definir* $\varphi_{TT'}$ *e* Υ_β*. Então*

$$g'(\varphi_{TT'}(p)) = \Upsilon_\beta(g(p)) \quad \forall p \in T \tag{2.12}$$

se e somente se existe um biholomorfismo $\Psi : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ *tal que*

$$\begin{aligned} f'(\Psi(p)) &= f(p) \quad e \\ g'(\Psi(p)) &= \Upsilon_\beta(g(p)) \quad \forall p \in (\mathbb{C}^2, 0) \end{aligned} \tag{2.13}$$

(em particular $\Psi^*(\mathcal{F}') = \mathcal{F}$ *e* $\Psi^*(\mathcal{G}') = \mathcal{G}$*)*

*Prova:*A necessidade da condição (2.12) é trivial. Para provar a suficiência faremos a construção de um biholomorfismo $\Psi : U_1 \cup U_2 \longrightarrow V_1 \cup V_2$ onde U_1 e V_1 são vizinhanças de E_1 e U_2 e V_2 são vizinhanças de E_2.
Seja $q \in E_2 \setminus \{p_1, p_2\}$. Denotaremos por G_q e G_q' as folhas de $\hat{\mathcal{G}}$ e $\hat{\mathcal{G}'}$ respectivamente passando por q. Elas são transversais a $\hat{\mathcal{F}}$ e $\hat{\mathcal{F}'}$ respectivamente. Seja $\gamma : [0, 1] \longrightarrow E_2$ um caminho diferenciável unindo $\gamma(0) = p_0$ e $\gamma(1) = q$. Observamos que $G_0 = G_0'$. Consideramos os difeomorfismos de holonomia $h_\gamma : G_0 \longrightarrow G_q$, $h'_{\Upsilon\circ\gamma} : G_0 \longrightarrow G_q'$ de $\hat{\mathcal{F}}$ e $\hat{\mathcal{F}'}$ respectivamente ao longo de γ e $\Upsilon \circ \gamma$ respectivamente. Para $p \in G_q$ definimos

$$\Psi(p) = h'_{\Upsilon\circ\gamma} \circ h_\gamma^{-1}(p) \in G_q'$$

$\Psi(p)$ independe do caminho γ escolhido. Com efeito, se γ_1 é o gerador de $\pi_1(E_2 \setminus p_1, p_0) \cong \mathbb{Z}$, $\Upsilon \circ \gamma_1$ gera $\pi_1(E_2 \setminus p_1', p_0)$. Por hipótese os difeomorfismos de holonomia de $\hat{\mathcal{F}}$ ao longo de γ_1 e de $\hat{\mathcal{F}'}$ ao longo de $\Upsilon \circ \gamma_1$ são iguais: $h_{\gamma_1} = h_{\Upsilon\circ\gamma_1}$.

Qualquer outro caminho entre p_0 e q é homotopo a $\gamma \circ \gamma_1^n$ para algum $n \in \mathbb{Z}$ e os difeomorfismos de holonomia dependem só da classe de homotopia do caminho escolhido. Portanto, $h_{\gamma\circ\gamma_1^n} \circ h^{-1}_{\Upsilon\circ\gamma\circ\gamma_1^n} = h_\gamma \circ h^n_{\gamma_1} \circ h^{-n}_{\Upsilon\gamma_1} \circ h^{-1}_{\Upsilon\circ\gamma} = h_\gamma \circ h^{-1}_{\Upsilon\circ\gamma}$ Isto define um biholomorfismo $\Psi : U_2 \setminus \{G_{p_1}, G_{p_2}\} \longrightarrow V_2 \setminus \{G'_{p_1}, G'_{p_2}\}$.

O teorema de Mattei-Moussu descrito no artigo [MM], permite-nos estender o biholomorfismo a (G_{p_1}, p_1), devido ao fato (descrito nos Lemas 2.14 e 2.15) que p_1 (respectivamente p'_1) é uma singularidade simples para $\hat{\mathcal{F}}$ (resp. $\hat{\mathcal{F}}'$) e $\Upsilon(p_1) = p'_1$ e $i_{p_1}(\hat{\mathcal{F}}, E_2) = i_{p'_1}(\hat{\mathcal{F}}', E_2) = -\frac{1}{2}$, e a separatriz de $\hat{\mathcal{F}}$ (resp. $\hat{\mathcal{F}}'$) por p_1 transversal a E_2 é folha de $\tilde{\mathcal{G}}$ (resp. $\tilde{\mathcal{G}}'$). Um argumento análogo estende a equivalência a (G_{p_2}, p_2)

Para estender Ψ a uma vizinhança de E_1 precisaremos das hipóteses do lema. Consideramos uma vizinhança U_1 (resp. V_1) de E_1 satisfazendo o enunciado do Lema 2.18 para $\hat{\mathcal{F}}$ (resp $\hat{\mathcal{F}}'$). Seja L uma folha de $\hat{\mathcal{F}}|_{U_1}$, e L' a folha de $\hat{\mathcal{F}}'|_{V_1}$ que é compatível com a construção de $\varphi_{TT'}$. Seja $t_L = T \cap L$, e $t'_L = T' \cap L'$. A condição (2.12) sobre os valores de g e g' implica que existe um ponto $p \in V_0$ tal que $g'(t_{L'}) = g'(p) = \Upsilon_\beta(g(p)) = \Upsilon_\beta(g(t_L))$. (Ver Figura 2.8).

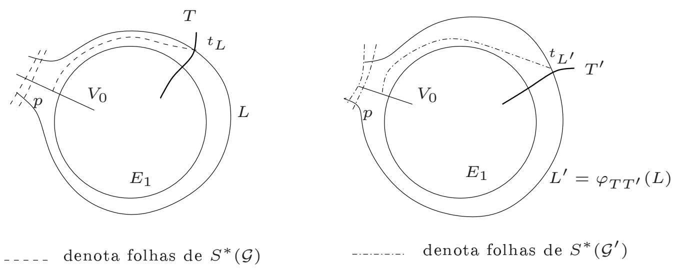


Figura 2.8: $L \setminus t_L$ e $L' \setminus t_{L'}$ recobrem $V_0 \setminus p$

Do corolário 2.19 as colunas do seguinte diagrama são recobrimentos duplos:

$$\begin{tikzcd} L \setminus t_L \arrow[r, "\exists \Psi_L ?"] \arrow[d, "g|_{L\setminus t_L}"'] & L' \setminus t_{L'} \arrow[d, "g'|_{L'\setminus t_{L'}}"] \\ V_0 \setminus p \arrow[r, "="] & V_0 \setminus p \end{tikzcd}$$

A existência de uma aplicação contínua $\Psi_L : L \setminus t_L \longrightarrow L' \setminus t_{L'}$ depende da condição $(g|_{L\setminus t_L})_*(\pi_1(L \setminus t_L)) \subset (g'|_{L'\setminus t_{L'}})_*(\pi_1(L' \setminus t_{L'}))$. Esta condição é satisfeita porque ambos recobrimentos são duplos. Mais ainda, devido ao fato que os recobrimentos são holomorfos Ψ_L é holomorfa. Ela estende holomorficamente a t_L porque é limitada (L' pode ser pensado com um disco na folha de $\hat{\mathcal{F}}'$). Pela construção é obvio que nos pontos $q \in L \cap U_2$, $\Psi(q) = \Psi_L(q)$. Desta forma temos $\Psi : U_1 \cup (U_2 \setminus E_2) \longrightarrow V_1 \cup (V_2 \setminus E_2)$. Ψ é holomorfa quando a restringimos às folhas de $\hat{\mathcal{F}}$ e $\hat{\mathcal{G}}$. Por construção, $f' \circ \Psi = f$, e $g' \circ \Psi = \Upsilon_\beta \circ g$ e portanto é um biholomorfismo. Considerando Ψ definido na implosão de E_1 e E_2, obtemos um biholomorfismo numa vizinhança perfurada da origem, que estende à origem pelo Teorema de Hartogs. ∎

Terminamos a seção definindo folheação companheira para os elementos de $D_0(n)$:

Definição 2.22 *Diremos que um germe de folheação $\mathcal{G}$ holomorfa em $(\mathbb{C}^2, 0)$ é uma* ***folheação companheira com (resp. sem) curvas de tangências de*** *$\mathcal{F} = \mathcal{F}_\omega \in \mathcal{D}_0(n)$ se $\tilde{\mathcal{F}}$ e $\tilde{\mathcal{G}}$ são companheiras nos pontos $p \in E_0$ e em* ***todos*** *os pontos de $\Sigma_{\mathcal{F}}$, $\tilde{\mathcal{F}}$ e $\tilde{\mathcal{G}}$ são companheiras* ***com (resp. sem)*** *curva de tangências.*

2.1.3 Construção global do biholomorfismo

Lembremos que dada $\omega = \sum_{j \geq N+1} (P_j dX + Q_j dY) \in \mathcal{D}_0(n; r_1, \ldots, r_n)$ onde $P_j(X, Y)$, $Q_j(X, Y)$ são polinômios homogêneos de grau j e $N = \sum_{i=1}^{n} r_i$, a 1-forma holomorfa que define $\tilde{\mathcal{F}}_\omega$ é:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}(t, x) &:= \frac{E^*\omega(t, x)}{x^{N+2}} \\ &= \sum_{j \geq 0} x^j [Q_{j+N+1}(1, t)dt + \big(P_{(j+1)+N+1}(1, t) + tQ_{(j+1)+N+1}(1, t)\big)dx] \end{aligned} \tag{2.14}$$

definida na carta (t, x) de $\tilde{\mathbb{C}}^2$.

Lema 2.23 *Se $\omega, \omega' \in \mathcal{D}_0(n; r_1, \ldots, r_n)$ satisfazem*

(i) $j_0^s(\omega) = j_0^s(\omega')$, *então*

$$\tilde{\omega'}(t, x) = \tilde{\omega}(t, x) + x^{s-(N+1)}\omega_2(t, x)$$

para alguma 1-forma holomorfa ω_2. Definimos $K(s) := s - (N + 1) \in \mathbb{N}$

(ii) Se além disso, $H(\tilde{\mathcal{F}}_\omega, p) = H(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega'}, p)$ para $p \in E_0$, dada uma integral primeira local f de $\tilde{\mathcal{F}}_\omega$ existe uma integral primeira local f' de $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega'}$ numa vizinhança de p de forma que

$$f'(t, x) = f(t, x) + x^{K(s)+1}h(t, x) \tag{2.15}$$

para alguma função holomorfa h definida numa vizinhança de p.

Prova: Para provar (i), observe-se que na equação (2.14), os termos do somando j-ésimo dependem do jato $(j+1)+N+1$ de ω.

Para a prova de (ii), devido à hipòtese, existem f e f' com $f(t,0)=f'(t,0)$ numa vizinhança de $p=(t_i,0)$. Podemos supor $\frac{\partial f}{\partial x}(p)\neq 0$. Escrevemos $h(t,x)=f(t,x)-f'(t,x)=\sum\limits_{i\geq 0} h_i(t)x^i$ com h_i holomorfas em t. Decorre do item (i) que

$$x^{K(s)}(\omega_2\wedge df')+\tilde{\omega}\wedge dh=\tilde{\omega'}\wedge df'\equiv 0$$

Do fato que $\tilde{\omega}=Adt+Bdx$ é regular em p, e $dh=\sum\limits_{i\geq 1}\frac{\partial h_i}{\partial t}x^i dt+ix^{i-1}h_i(t)dx$ obtemos, igualando os jatos:

$$0\equiv\sum_{i=0}^{K(s)} x^{i-1}iAh_i-\sum_{i=0}^{K(s)-1} Bx^i\frac{\partial h_i}{\partial t}$$

Por hipótese $h_0\equiv 0$, e portanto indutivamente $h_1(t)\equiv\ldots\equiv h_{K(s)}(t)\equiv 0$. Isto prova a afirmação (ii). ■

Procedamos à prova do Teorema 2.13. Definimos $\tilde{\mathcal{F}}:=\mathcal{F}_{\tilde{\omega}}$ e $\tilde{\mathcal{F}'}:=\mathcal{F}_{\tilde{\omega'}}$. Da condição (i) (e da (ii) também), temos $\Sigma_\omega=\Sigma_{\omega'}=\{p_1,\ldots,p_n\}$ e $r_p=r'_p=1$ $\forall p\in\Sigma_\omega$. No caso tratado, $N:=n$. A prova do teorema é feita nos seguintes passos:

Passo 1 : Construir folheações $\mathcal{G}$ e $\mathcal{G}'$ em $(\mathbb{C}^2,0)$ tais que $(\mathcal{F},\mathcal{G})$ e $(\mathcal{F}',\mathcal{G}')$ formam pares de folheações companheiras com curvas de tangências satisfazendo as condições do Lema 2.21 nos pontos de Σ_ω.

Passo 2 : Construir conjugações locais através do Lema 2.21 em vizinhanças dos pontos de Σ_ω

Passo 3 : Estender as conjugações locais a uma conjugação global.

Prova do Passo 1: Ao longo da prova suporemos s tal que $j_0^s(\omega)=j_0^s(\omega')$ desconhecido, e após o argumento ficará claro que as construções que faremos fazem sentido se $s\geq\kappa$. Lembremos que $K(s):=s-(N+1)$

Seja C_i o conjunto analítico de $(\mathbb{C}^2,0)$ tal que o transformado estrito $\tilde{C}_i$ de C_i por E é a folha de $\tilde{\mathcal{F}}$ por p_i para $i=1,\ldots,n,\infty$. Podemos supor, para $i=1,\ldots,n$, $p_i=(t_i,0)$ na carta (t,x), onde $t_\infty=\infty$ e C_∞ transversal a E_0. Equivalentemente, seja C'_i o conjunto analítico em $(\mathbb{C}^2,0)$ tal que o transformado estrito $\tilde{C}'_i$ de C_i por E é a folha de $\tilde{\mathcal{F}}'$ pelo ponto p_i. Sejam $f_i,f'_i:(\mathbb{C}^2,0)\longrightarrow\mathbb{C}$ os polinômios de Weierstrass de C_i e C'_i respectivamente. Provaremos a seguir que para $i=1,\ldots,n$, $j_0^{K(s)+2}(f_i)=j_0^{K(s)+2}(f'_i)$. Com efeito, usando o Lema 2.23 construímos integrais primeiras locais ao redor de p_i, h_i,h'_i satisfazendo

$$h'_i(t,x)=h_i(t,x)+x^{K(s)+1}u_i(t,x)\tag{2.16}$$

para alguma função holomorfa u_i numa vizinhança de p_i. Nessa vizinhança, $\tilde{C}_i = \{(t, Q_i(t))\}$ e $\tilde{C}'_i = \{(t, Q'_i(t))\}$ para funções holomorfas Q_i, Q'_i. Em particular podemos supor

$$\begin{aligned} 0 &= h'_i(t, Q'_i(t)) = h_i(t, Q'_i(t)) + Q'_i(t)^{K(s)+1} u_i(t, Q'_i(t)) \\ 0 &= h_i(t, Q_i(t)) \end{aligned}$$

Como conhecemos a ordem do primeiro jato não nulo de Q_i e de Q'_i, temos $j^{K(s)}(Q_i) = j^{K(s)}(Q'_i)$. Consideramos o polinômio de Weierstrass f_i: $f_i(X, Y) = Y^2 + XY\alpha_1(X) + X^2\alpha_0(X)$, com $\frac{\partial \alpha_0}{\partial x}(0) \neq 0$. Para o transformado estrito $\tilde{C}_i$ temos a equação $t^2 + \alpha_1(x)t + \alpha_0(x) = 0$. Portanto $j^{K(s)}(Q_i)$ determina o jato $K(s)$-ésimo de α_0 e α_1 e estes determinam $j^{K(s)+2}(f_i)$. Procedendo analogamente com f'_i obtemos

$$j^{K(s)+2}(f_i) = j^{K(s)+2}(f'_i) \tag{2.17}$$

Para C_∞ um argumento similar mostra que

$$j^{K(s)+1}(f_\infty) = j^{K(s)+1}(f'_\infty) \tag{2.18}$$

Definimos as funções meromorfas em $(\mathbb{C}^2, 0)$:

$$g = \frac{f_\infty^{2n+1}}{\prod_{i=1}^{n} f_i}, \qquad \breve{g} = \frac{f_\infty'^{(2n+1)}}{\prod_{i=1}^{n} f'_i}$$

Desta forma, escrevendo $\tilde{g} = g \circ E$ e $\tilde{\breve{g}} = \breve{g} \circ E$, temos

$$\operatorname{div}\tilde{g} = (2n+1)\tilde{C}_\infty + E_0 - \sum_{i=1}^{n} \tilde{C}_i$$

$$\operatorname{div}\tilde{\breve{g}} = (2n+1)\tilde{C}'_\infty + E_0 - \sum_{i=1}^{n} \tilde{C}'_i$$

Em $(\mathbb{C}^2, 0)$ definimos as folheações $\mathcal{G} = \{g = cte\}$ e $\breve{\mathcal{G}} = \{\breve{g} = cte\}$. Multiplicando g e $\breve{g}$ por uma mesma função holomorfa não nula podemos supor que $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ e $(\mathcal{F}', \breve{\mathcal{G}})$ formam dois pares de folheações companheiras com curvas de tangências. Com efeito, em cada ponto $p \in E_0$ existe uma vizinhança U_p e uma mudança de coordenadas $H_p : (U_p, p) \longrightarrow (V_p, 0) \subset \mathbb{C}^2$ local tal que $H(t, 0) = (t - t_0, 0)$ onde $p = (t_0, 0)$ nas coordenadas (t, x) e:

- $H^{-1*}(\tilde{\mathcal{F}}|_{U_p})$ tem integral primeira $\tilde{x} - \tilde{t}^2$ se $p \in \Sigma_\omega$
- $H^{-1*}(\tilde{\mathcal{F}}|_{U_p})$ tem integral primeira $\tilde{t}$ se $p \notin \Sigma_\omega$

Temos $H^{-1*}(\tilde{g})$ expressado nas coordenadas $(\tilde{t}, \tilde{x})$ numa vizinhança de 0 tem a expressão:

- $\frac{\tilde{x}}{\tilde{x}-\tilde{t}^2}\phi_p$ se $p \in \Sigma_\omega$
- $\tilde{x}\phi_p$ se $p \notin \Sigma_\omega$

para uma função $\phi_p \in \mathcal{O}^*_{(\mathbb{C}^2,0)}$ que depende do ponto p e da mudança escolhida H_p. Multiplicando g por um germe de função holomorfa não nula $(X,Y) \longrightarrow a + bX + cY$ com valores $a, b, c \in \mathbb{C}$ genéricos, podemos supor que a folheação $\tilde{\mathcal{G}} := \{\tilde{g} = cte\}$ é tal que $(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{G}})$ formam um par de folheações companheiras com curvas de tangências. Procedemos analogamente para $\check{g}$, e a genericidade na escolha dos a, b e c permite-nos escolher valores que servem para g e para $\check{g}$.

Desta forma temos:

$$D := \operatorname{tang}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = (2n+1)C_\infty + \sum_{i=1}^{n}(C_i + T_i)$$
$$D' := \operatorname{tang}(\mathcal{F}', \check{\mathcal{G}}) = (2n+1)C'_\infty + \sum_{i=1}^{n}(C'_i + T'_i)$$

onde T_i é uma curva regular em 0 com cone tangente $Y - t_iX$, e transversal a $\mathcal{F}$ e a $\mathcal{G}$ em $T_i \setminus 0$. Analogamente, T'_i é uma curva regular em 0 com cone tangente $Y - t_iX$, e transversal a $\mathcal{F}'$ e a $\check{\mathcal{G}}$ em $T'_i \setminus 0$. Escrevemos

$$\begin{aligned} T_i &= \{(X,Y) | Y = P_i(X)\} \\ T'_i &= \{(X,Y) | Y = P'_i(X)\} \end{aligned} \tag{2.19}$$

para P_i, P'_i holomorfas. Provaremos que $j^s(\omega) = j^s(\omega')$ implica que $j^{K(s)+N}(P_i) = j^{K(s)+N}(P'_i)$:

Primeiro observamos que dados dois germes de função holomorfa $u = \sum_{k \geq m} u_k$ e $v = \sum_{k \geq n} v_k$ onde u_k e v_k são funções homogêneas de grau k, os jatos $j^s(u)$ e $j^s(v)$ determinam o jato $j^{s+min\{n,m\}}(uv)$. Reciprocamente, conhecidos os jatos $j^{s-n}(u)$ e $j^s(uv)$ e os valores m e n, determinamos unívocamente $j^{s-m}(v)$. Aplicaremos estes fatos repetidamente no argumento a seguir:

Sabemos que $C_i = \{f_i = 0\}$ é invariante por ω. Portanto temos

$$df_i \wedge \omega = f_i \cdot H_i dX \wedge dY \tag{2.20}$$

Assim, se f_i tem multiplicidade $r_i + 1$, H_i tem multiplicidade N. Já provamos que $j^s(\omega)$ determina $j^{K(s)+(r_i+1)}(f_i)$. Este por sua vez determina $j^{K(s)+r_i}(df)$. Observamos que df_i tem multiplicidade r_i. Portanto esses determinam $j^{K(s)+r_i+(N+1)}(f_iH_i)$. Como conhecemos $j^{(K(s)+(r_i+1)+N)-N}(f_i)$, esses determinam $j^{(K(s)+(r_i+1)+N)-(r_i+1)}(H_i) = j^{(K(s)+N)}(H_i)$. Escrevemos $F := \prod_{i=1}^{n} f_i$ e $F' := \prod_{i=1}^{n} f'_i$.

Por construção temos

$$F^2 dg = f_\infty^{2n} F(df_\infty - f_\infty \sum_{i=1}^{n} \frac{df_i}{f_i})$$

Portanto das definições,

$$\begin{aligned} F^2 dg \wedge \omega &= f_\infty^{2n+1} F(H_\infty - \sum_{i=1}^{n} H_i) dX \wedge dY = f_\infty^{2n+1} F H dX \wedge dY \\ H : &= H_\infty - \sum_{i=1}^{n} H_i \end{aligned} \tag{2.21}$$

Reproduzindo o argumento com as f_i' e ω', obtemos funções H_i' e H' de forma que :

$$\begin{aligned} F'^{2d} \breve{g} \wedge \omega &= f_\infty'^{2n+1} F'(H_\infty' - \sum_{i=1}^{n} H_i') dX \wedge dY = f_\infty'^{2n+1} F' H' dX \wedge dY \\ H' : &= H_\infty' - \sum_{i=1}^{n} H_i' \end{aligned} \tag{2.22}$$

Por construção $j^{K(s)+N}(H) = j^{K(s)+N}(H')$. Em qualquer caso, as funções P_i e P_i' definidas nas equações (2.19) satisfazem $H(X, P_i(X)) = 0$ e $H'(X, P_i'(X)) = 0$, e $j^1(P_i) = j^1(P_i') = t_i X$. Portanto $j^{K(s)+N}(P_i) = j^{K(s)+N}(P_i')$.

A condição (2.16) e o Lema 2.20 implicam que $\varphi_i := \varphi_{T_i T_i'}$, a correspondência entre folhas de $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ ao redor de T_i, se expressa nas parametrizações $X \longrightarrow (X, P(X))$ de T_i e $X \longrightarrow (X, P'(X))$ de T_i' como uma aplicação tangente à identidade até ordem $K(s)$.

$$X \longrightarrow X + aX^{K(s)} + \dots \tag{2.23}$$

Já conhecemos a correspondências entre folhas de $\mathcal{F}$ e de $\mathcal{F}'$ próximas dos conjuntos T_i e T_i'. Para poder aplicar o Lema 2.21 precisamos que g e $\breve{g}$ respeitem essa correspondência. Observamos que, se consideramos uma função holomorfa não nula genérica ϕ, e definimos $g' := \breve{g} \cdot \phi$ e $\mathcal{G}' = \{g' = cte\}$, $(\mathcal{F}', \mathcal{G}')$ continúam formando um par de folheações companheiras com curvas de tangências. O lema a seguir afirma que existe um par de funções g, g' que respeita as correspondências de valores φ_i:

Lema 2.24 (Lema Principal) *As hipótese do Teorema 2.13 implicam que existem funções $\phi \in \mathcal{O}^*_{(\mathbb{C}^2,0)}$ e $\psi \in \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^2,0)}$, de forma que a função meromorfa em $(\mathbb{C}^2, 0)$,*

$$g' = \breve{g}(\phi + H'\psi)$$

e a folheação $\mathcal{G}' = \{g' = cte\}$ satisfazem as seguintes condições:

(*) $g'(q) = (g)(\varphi_i^{-1}(q))$, $\forall q \in T_i'$ *e para* $i = 1, \ldots, n$.

(**) $tang(\mathcal{F}', \mathcal{G}') = tang(\mathcal{F}', \check{\mathcal{G}}) = (2n+1)C'_\infty + \sum_{i=1}^{n}(C_i' + T_i')$

Prova do Lema 2.24: A idéia da prova é que as condições (*) e (**) definem os valores de ϕ e ψ nos conjuntos T_i'. Usaremos um lema de interpolação holomorfa (ver Lema A.1) para estender essas funções a funções holomorfas numa vizinhança de 0 em $\mathbb{C}^2$:

Denotando por $\phi_i := \phi|_{T_i'}$, a condição $(*)$ se expressa como

$$\phi_i = \left(\frac{f_\infty \circ \varphi_i^{-1}}{f'_\infty}\right)^{2n+1} \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{f_i'}{f_i \circ \varphi_i^{-1}}$$

nos pontos da forma $(X, P_i'(X)) \in T_i'$. Agora, usando as equações (2.17), (2.18), e (2.23) temos que ϕ_i é holomorfa e

$$j^{K(s)}(\phi_i(X, P_i'(X))) = 1 \tag{2.24}$$

Se $K(s) \geq N - 1 = n - 1$ o Lema A.1 garante que a função

$$\phi(X,Y) = \sum_{i=1}^{N}\left(\prod_{j=1, j\neq i}^{N} \frac{Y - P_i'(X)}{P_i'(X) - P_j'(X)}\right)\phi_i(X, P_i'(X)) \tag{2.25}$$

é holomorfa e satisfaz $\phi|_{T_i'} = \phi_i$. Além disso, $d\phi(X, P'(X))$ tem multiplicidade $K(s) - N$. Para tratar a condição $(**)$ denotamos por $\psi_i := \psi|_{T_i'}$ e calculamos os seus valores para que a condição seja satisfeita:

$$0 \equiv dg' \wedge \omega'|_{T_i'} = \phi(d\check{g} \wedge \omega')|_{T_i'} + \check{g}(d(\phi + H'\psi) \wedge \omega' \tag{2.26}$$

e esta, pela definição de T_i', é equivalente à equação

$$d\phi \wedge \omega'(q) + \psi_i(q)(dH' \wedge \omega'(q)) = 0 \tag{2.27}$$

para todo ponto $q \in T_i'$.

A equação (2.27) define os valores de ψ_i. Para interpolar holomorficamente precisamos controlar a sua ordem de anulação. Estudemos as ordens de anulação dos elementos que aparecem na equação (2.27):

- $dH'(X, P_i'(X))$ se anula até ordem $N - 1$.
- ω' tem multiplicidade $N + 1$
- $d\phi(X, P_i'(X))$ se anula até ordem $K(s) - N$, graças ao Lema A.1.

Portanto se

$$(K(s) - N) - (N - 1) \geq N - 1 \tag{2.28}$$

então as funções $\psi_i(X, P_i'(X)) = X^{N-1} v_i(X)$ para funções holomorfas v_i. O Lema A.1 garante que

$$\psi(X,Y) = \sum_{i=1}^{N} \left(\prod_{j=1, j \neq i}^{N} \frac{Y - P_i'(X)}{P_i'(X) - P_j'(X)} \right) \psi_i(X, P_i'(X)) \tag{2.29}$$

é holomorfa e satisfaz $\psi|_{T_i'} = \psi_i$. A condição (2.28) é equivalente a pedir que $s \geq 4N - 1 = \kappa$, que é a hipótese do lema. Portanto podemos construir as funções ϕ e ψ desejadas. ■

Prova do Passo 2: Aplicar o Lema 2.21 em vizinhanças dos pontos $p_1, \ldots, p_n$.

Prova do Passo 3: temos os pares de folheações companheiras $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ e $(\mathcal{F}', \mathcal{G}')$. Em vizinhanças U_p e U_p' dos pontos $p \in \Sigma_\omega$ construímos os biholomorfismos $\Psi_p : U_p \longrightarrow U_p'$ definidos no Lema 2.21, lembrando que da construção de g' se deduz diretamente que a correspondência Υ_p é a identidade. Falta definir os biholomorfismos em vizinhanças do restante de pontos de E_0:

Para cada ponto $p \in E_0 \setminus \{\Sigma_\omega, \infty\}$ consideramos uma vizinhança $V_p \subset A$ de p. Sejam U_p, e U_p' vizinhanças saturadas de V_0 por $\tilde{\mathcal{F}}$ e $\tilde{\mathcal{F}'}$ respectivamente. Sejam $\pi : U_p \longrightarrow V_p$ e $\pi' : U_p' \longrightarrow V_p$ as projeções sobre E_0 ao longo de $\tilde{\mathcal{F}}$ e $\tilde{\mathcal{F}'}$ respectivamente. Em U_p, $\tilde{\mathcal{F}}$ e $\tilde{\mathcal{G}}$ são transversais em todos os pontos. Definimos $\Psi_p : U_p \longrightarrow U_p'$:

$$\Psi_p(q) := \tilde{g'}^{-1}(\tilde{g}(q)) \cap {\pi'}^{-1}(\pi(q))$$

para pontos $q \in U_p$. Ela está bem definida e é bijetiva na imagem, porque em U_p (resp. U_p'), folhas de $\tilde{\mathcal{F}}$ (resp. $\tilde{\mathcal{F}'}$) e folhas de $\tilde{\mathcal{G}}$ (resp. $\tilde{\mathcal{G}'}$) se intersetam em apenas um ponto. Ela é biholomorfa porque as folheações são holomorfas.
Nas interseções $U_p \cap U_{p'} \neq \emptyset$ com $p, p' \in E_0 \setminus \infty$, os biholomorfismos Ψ_p e $\Psi_{p'}$ coincidem. Quando por exemplo $p \in \Sigma_\omega$ isto decorre do fato que a correspondência entre valores de $\tilde{g}$ e $\tilde{g'}$ é a identidade. Portanto podemos definir Ψ em $\cup_{p \in E_0 \setminus \infty} U_p$ pela fórmula

$$\Psi(q) = \Psi_p(q) \qquad se \qquad q \in U_p$$

Uma idéia intuitiva e geométrica de Ψ é a seguinte: dado um par $(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{G}})$ de folheações companheiras numa vizinhança de $A \subset U_k$, podemos definir uma projeção sobre E_0 ao longo de $\tilde{\mathcal{F}}$ e uma projeção sobre cada um dos pontos de Σ_ω ao longo de $\tilde{\mathcal{G}}$. As condições sobre $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ garantem que essas projeções são compatíveis para a definição de um biholomorfismo.
Para o ponto $p = \infty$, observamos que $\tilde{\mathcal{G}}$ e $\tilde{\mathcal{G}'}$ são singulares em p (singularidade reduzida com quociente de autovalores $\frac{-1}{2n+1}$) e não podemos usar a mesma definição que nos pontos regulares. O teorema de Mattei-Moussu (ver [MM]) salva a situação, estendendo a definição de Ψ ao aberto U. Com efeito, a folha de $\mathcal{F}$

e (respectivamente $\mathcal{F}'$) por p é separatriz de $\tilde{\mathcal{G}}$ (respectivamente $\tilde{\mathcal{G}}'$) por ∞, e as holonomias de $\mathcal{G}$ e $\tilde{\mathcal{G}}'$ em p ao longo de E_0 e os quocientes de autovalores em p coincidem, permitindo aplicar o teorema.

Fazendo a implosão de E_0, Ψ define um germe de biholomorfismo $(\mathbb{C}^2,0)\setminus 0 \longrightarrow (\mathbb{C}^2,0)\setminus 0$ que estende biholomorficamente a $(\mathbb{C}^2.0)$ usando o teorema de Hartogs. Ele realiza a equivalência analítica entre $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$. Por último observamos que a resolução estendida de $\mathcal{F}$ (e de $\mathcal{F}'$) consiste em explodir duas vezes cada ponto de Σ_ω. Por construção Ψ é a identidade sobre E_0 e sobre o divisor aparecido após a segunda explosão dos pontos de Σ_ω. Segundo os resultados do Lema 2.9 isto implica que Ψ é tangente à identidade. Isto finaliza a prova do Teorema 2.13. ∎

2.2 Prova em $D_0(n; r_1, \ldots, r_n)$

A seguir indicaremos as modificações necessárias na prova do caso $\mathcal{D}_0(n)$ para provar o Teorema 2.12.

2.2.1 Folheações companheiras: caso de tangência de ordem $r \geq 2$

Dedicaremos esta seção a estender a definição de folheação companheira para pontos de tangência de ordem maior, e a construir conjugações entre pares de companheiras neste caso. Seja $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\omega \in \mathcal{D}_0(n; r_1, \ldots, r_n)$ e $N = r_1 + \ldots + r_n$. Diremos que uma folheação $\mathcal{G}$ definida em $(\mathbb{C}^2, 0)$ é companheira de $\mathcal{F}$ num ponto $p \in E_0$ se $\tilde{\mathcal{F}}$ e $\tilde{\mathcal{G}}$ satisfazem as seguintes relações numa vizinhança de p:

1. $p \in E_0 \setminus \{\Sigma_\omega, \infty\}$

   Após uma mudança local de coordenadas podemos supor $p = (0,0)$ numa carta (u, v) e $\tilde{\mathcal{F}} = \{du = 0\}$. p é ponto regular de $\tilde{\mathcal{G}}$ e a separatriz por p é a curva $v = 0$. Portanto $\tilde{\mathcal{F}}$ e $\tilde{\mathcal{G}}$ são transversais numa vizinhança de p.

2. $p = \infty$

   Após uma mudança local de coordenadas podemos supor $p = (0,0)$ na carta (u, v) e $\tilde{\mathcal{F}} = \{du = 0\}$. p é uma singularidade de $\tilde{\mathcal{G}}$ com exatamente duas separatrizes : $u = 0$ e $v = 0$ e com integral primeira holomorfa. O seu índice é $\frac{-1}{n+N+1}$. $\tilde{\mathcal{F}}$ e $\tilde{\mathcal{G}}$ são transversais fora da separatriz comum $u = 0$

3. $p \in \Sigma_\omega$ Suponhamos que tem ordem $r \geq 2$. Após uma mudança de coordenadas, podemos supor que numa vizinhança de $(0,0)$, $\tilde{\mathcal{F}}$ está definida por $\{f(t,x) = x - t^{r+1} = cte\}$. Seja $C = \{f = 0\}$. Temos que C tangencia com $\{x = 0\}$ com ordem $r+1$. $\tilde{\mathcal{G}}$ tem integral primeira $\{g(t,x) = \frac{x}{x-t^{r+1}}\phi = cte\}$, onde $\phi \in \mathcal{O}^*_{(\mathbb{C}^2,0)}$. Para analisar as relações entre $\tilde{\mathcal{F}}$ e $\tilde{\mathcal{G}}$ precisaremos fazer $r+1$ explosões (a resolução estendida de $\mathcal{F}$): $S = S_{r+1} \circ \cdots S_1$

onde cada S_i explode o ponto p uma vez. Aparecem $r+1$ divisores excepcionais com autointerseções $E_1^2 = \cdots = E_r^2 = -2$ e $E_{r+1}^2 = -1$. Sejam $C_\infty = \overline{S^{-1}(C \setminus (0,0))}$, e $C_0 = \overline{S^{-1}(\{x=0\} \setminus (0,0))}$. As propriedades relevantes de $\hat{\mathcal{F}} = S^*(\tilde{\mathcal{F}})$ são:

Lema 2.25 *(i)* $E_1, \ldots, E_{r+1}, C_\infty$ *são invariantes por* $\hat{\mathcal{F}}$

(ii) *Sing* $(\hat{\mathcal{F}}) = \{p_1, esquinas\}$ *onde e* $p_1 \in E_{r+1}$ *não é uma esquina. Todas as singularidades são selas reduzidas.*

(iii) *As aplicações de holonomia de* $\hat{\mathcal{F}}$ *ao longo de* E_i *das singularidades de* E_i *tem grau* i, *para* $i = 1, \ldots, r+1$.

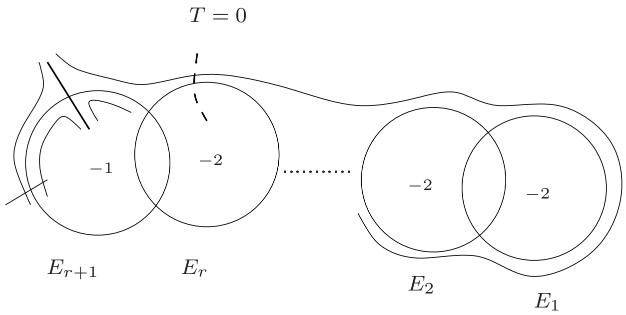


Figura 2.9: Estrutura de $\hat{\mathcal{F}}$

As propriedades relevantes de $\hat{\mathcal{G}} = S^*(\tilde{\mathcal{G}})$ estão contidas no próximo lema (ver figura 2.10):

Lema 2.26 *Para valores genéricos de* $\frac{\partial\phi}{\partial t}(0,0)$*e* $\frac{\partial\phi}{\partial x}(0,0)$

(i) $\hat{\mathcal{G}}$ *é regular e transversal a* E_{r+1} *em todos os seus pontos.* $E_1, \ldots, E_r, C_\infty, C_0$ *são invariantes por* $\hat{\mathcal{G}}$.

(ii) *Sing* $(\hat{\mathcal{G}}) = \{q_1, q_2, E_i \cap E_{i+1} \quad para \quad i = 1, \ldots, r-1\}$ *onde* $q_1 \in E_1$, $q_2 \in E_r$ *não são esquinas. Todas as singularidades são selas reduzidas.*

Definição 2.27 $\mathcal{F}$ *e* $\mathcal{G}$ *são companheiras com curva de tangência em* p *se satisfazem a condição de genericidade do Lema 2.26*

A nomenclatura se justifica pelo seguinte fato: Se $\tilde{\mathcal{F}}$ e $\tilde{\mathcal{G}}$ são companheiras com curva de tangência em p então

$$\text{tang}(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{G}}) = C + T \tag{2.30}$$

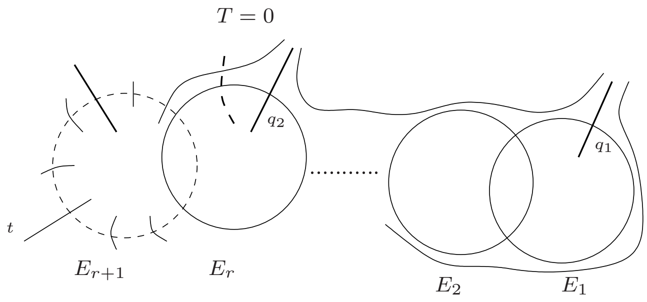


Figura 2.10: Estrutura de $\hat{\mathcal{G}}$

onde T é um conjunto analítico regular irredutível tangente a C_0 com ordem de tangência r. Cabe observar aqui que, quando as condições de genericidade do Lema 2.26 não são satisfeitas, T pode não ser irredutível, mas ele, a diferença do que ocorria no caso $r = 1$, é sempre não vazio.

Sejam $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ dois germes de folheação regular em $(\mathbb{C}^2, 0)$ tais que, numa vizinhança U da origem na carta (t, x) as folhas passando por $\mathit{0} = (0,0)$ possuem uma tangência de ordem r+1 com a reta $E_0 = \{x = 0\}$. Suponha que $H(\mathcal{F}, \mathit{0}) = H(\mathcal{F}', \mathit{0}) =< h >$ onde $h : (E_0, \mathit{0}) \longrightarrow (E_0, \mathit{0})$ é conjugado a uma rotação: $h^{r+1} = id$. Podemos repetir o argumento do Lema 2.21 para construir uma equivalência entre $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ numa vizinhança de $\mathit{0}$:

A equação da folha de $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{F}'$) passando pelo ponto $\mathit{0}$ é $C = \{f = 0\}$ (resp $C' = \{f' = 0\}$). Consideramos as funções $g = \frac{x}{f(t,x)}$ e $g' = \frac{x}{f'(t,x)}$, meromorfas em U. Suponhamos que elas definem folheações $\mathcal{G} = \{g = cte\}$ e $\mathcal{G}' = \{g' = cte\}$ companheiras respectivas de $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ com curvas de tangências: $\mathrm{tang}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = C + T$ e $\mathrm{tang}(\mathcal{F}', \mathcal{G}') = C' + T'$ respectivamente. Uma diferença importante com o caso $r = 1$ é que os conjuntos T e T' são tangentes a E_0 com ordem de tangência r. Mesmo assim faz sentido o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
T \setminus 0 \arrow[r, "\exists\varphi?"] \arrow[d] & T' \setminus 0 \arrow[d] \\
U \setminus C/f \arrow[r, "\simeq"] & U \setminus C'/f'
\end{tikzcd}$$

As colunas são recobrimentos r:1, e a hipótese sobre os grupos de invariância garante que fila inferior é uma igualdade entre discos perfurados. Se fixamos a imagem de um ponto (e esse é um grau de libertade que temos), a existência de φ contínua vem garantida pelo mesmo argumento que no Lema 2.18, e a holomorfia do fato que os recobrimentos são holomorfos. Por tratar-se de discos, φ estende a um biholomorfismo $\varphi_{TT'} : T \longrightarrow T'$.

Lema 2.28 *$(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ e $(\mathcal{F}', \mathcal{G}')$definidas como acima. Seja $\beta : E_2 \longrightarrow E_2$ o biholomorfismo (único) definido por $p_0 \mapsto p_0$, $p_1 \mapsto p_1'$ e $p_2 \mapsto p_2$. Suponha que tang$(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = T + \{f = 0\}$ e tang$(\mathcal{F}', \mathcal{G}') = T' + \{f' = 0\}$. Nesse caso podemos definir $\varphi_{TT'}$ e Υ_β (como no Lema (2.21)). Então*

$$g'(\varphi_{TT'}(p)) = \Upsilon_\beta(g(p)) \quad \forall p \in T \tag{2.31}$$

se e somente se existe um biholomorfismo $\Psi : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ tal que

$$\begin{aligned} f'(\Psi(p)) &= f(p) \quad e \\ g'(\Psi(p)) &= \Upsilon_\beta(g(p)) \quad \forall p \in (\mathbb{C}^2, 0) \end{aligned} \tag{2.32}$$

(em particular $\Psi^*(\mathcal{F}') = \mathcal{F}$ e $\Psi^*(\mathcal{G}') = \mathcal{G}$)

Prova: A necessidade da condição (2.31) é trivial. Para a suficiência, a construção da equivalência via elevação de caminhos pode ser feita sem problemas, e a extensão aos pontos de T pode ser feita devida ao fato que as ordens dos recobrimentos que aparecem (seguindo o esquema da prova do Lema 2.21) são iguais. Isto é, as folhas de $\hat{\mathcal{F}}$ e de $\hat{\mathcal{G}}$ tangenciam numa curva $\hat{T}$ (o transformado estrito de T), que corta transversalmente o divisor E_r. Esta curva corta cada folha L de $\hat{\mathcal{F}}$ próxima de E_r em r pontos diferentes $Q_1, \ldots, Q_r$, devido à informação que temos sobre a holonomia de $\hat{\mathcal{F}}$. $Q_1, \ldots, Q_r$ são pontos críticos da restrição de $S^*(g)$ a L. Para folhas suficientemente próximas de E_r todos têm o mesmo $v(Q_i) = q > 1$. A fórmula de Hurwitz nesse caso se escreve

$$2 = 2 \cdot (r + 1) - 2(\sum_{q \in L} (v(q)) - 1))$$

Portanto obtemos $v(Q_i) = 2$ para $1 \leq i \leq r$ e $v(q) = 1$ $\forall q \in L \setminus \{Q_1, \ldots, Q_r\}$. Isto mostra que $g|_{L \setminus \{Q_1, \ldots, Q_r\}} : L \setminus \{Q_1, \ldots, Q_r\} \longrightarrow \mathbb{C}$ é um recobrimento de $r+1$ folhas sobre a sua imagem. O mesmo argumento vale para g' e a prova do lema continua de forma análoga. ∎

Terminaremos a seção definindo folheação companheira de um elemento de $\mathcal{D}_0(n, r_1, \ldots, r_n)$:

Definição 2.29 *Diremos que um germe de folheação $\mathcal{G}$ holomorfa em $(\mathbb{C}^2, 0)$ é uma **folheação companheira com curvas de tangências de** $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\omega \in \mathcal{D}_0(n, r_1, \ldots, r_n)$ se $\tilde{\mathcal{F}}$ e $\tilde{\mathcal{G}}$ são companheiras nos pontos $p \in E_0$ e em **todos** os pontos de $\Sigma_{\mathcal{F}}$, $\tilde{\mathcal{F}}$ e $\tilde{\mathcal{G}}$ são companheiras **com** curva de tangências.*

2.2.2 Construção global do biholomorfismo

A prova decorre nos mesmos passos 1, 2 e 3 descritos na prova para $D_0(n)$. A grande diferença com o caso em que as tangências são de ordem $r = 1$ é que dado um par de folheações companheiras com curvas de tangência $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, o conjunto de tangência entre elas é singular. Mais rigorosamente, se $\mathcal{F} \in D_0(n; r_1, \ldots, r_n)$, e denotamos $N = r_1 + \ldots + r_n$, temos

$$\operatorname{tang}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = (n + N + 1)C_\infty + \sum_{i=1}^{n}(C_i + T_i)$$

onde C_i são separatrizes e T_i é um conjunto analítico em $(\mathbb{C}^2, 0)$. O cone tangente de T_i é $(Y - t_iX)^{r_i}$ se C_i tem cone tangente $(Y - t_iX)^{r_i+1}$. Assim, quando $r_i > 1$, T_i é singular!

O argumento da prova no caso de $D_0(n)$ pode ser adaptado da forma seguinte para provar o Teorema 2.12:

Consideramos $\mathcal{F} := \mathcal{F}_\omega$ e $\mathcal{F}' := \mathcal{F}_{\omega'}$. Da condição (i) (e da (ii) também) temos $\Sigma_\omega = \Sigma_{\omega'} = \{p_1, \ldots, p_n\}$ e $r_i = r_i'$ para $i = 1, \ldots, n$. Definimos $N := \sum\limits_{i=1}^{n} r_i$. Seja C_i o conjunto analítico de $(\mathbb{C}^2, 0)$ cujo transformado estrito $\tilde{C}_i$ por E é a folha de $\tilde{\mathcal{F}}$ por p_i para $i = 1, \ldots, n, \infty$. Podemos supor, para $i = 1, \ldots, n$, $p_i = (t_i, 0)$ na carta (t, x), onde $t_\infty = \infty$ e C_∞ transversal a E_0. Sem perda de generalidade podemos supor que $|t_i| \neq |t_j|$ se $i \neq j$. Se houver um par que satisfaz a igualdade mudamos as coordenadas iniciais por uma transformação linear adequada, que claramente preserva as hipóteses sobre as formas. Equivalentemente, seja C_i' o conjunto analítico em $(\mathbb{C}^2, 0)$ cujo transformado estrito $\tilde{C}_i'$ por E é a folha de $\tilde{\mathcal{F}}'$ pelo ponto p_i. Sejam $f_i, f_i' : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow \mathbb{C}$ os polinômios de Weierstrass em Y de C_i e C_i' respectivamente.

<u>Prova do Passo 1:</u> Definimos as funções meromorfas em $(\mathbb{C}^2, 0)$:

$$g = \frac{f_\infty^{(N+n+1)}}{\prod\limits_{i=1}^{n} f_i}, \qquad \check{g} = \frac{f_\infty'^{(N+n+1)}}{\prod\limits_{i=1}^{n} f_i'}$$

Desta forma, escrevendo $\tilde{g} = g \circ E$ e $\tilde{\check{g}} = \check{g} \circ E$, temos

$$\operatorname{div}\tilde{g} = (N + n + 1)\tilde{C}_\infty + E_0 - \sum_{i=1}^{n} \tilde{C}_i$$

$$\operatorname{div}\tilde{\check{g}} = (N + n + 1)\tilde{C'}_\infty + E_0 - \sum_{i=1}^{n} \tilde{C'}_i$$

Em$(\mathbb{C}^2, 0)$ definimos as folheações $\mathcal{G} = \{g = cte\}$ e $\check{\mathcal{G}} = \{\check{g} = cte\}$. Podemos supor que formam dois pares de folheações companheiras com curvas de tangências (se não forem podemos multiplicar g e $\breve{g}$ por uma função adequada). Desta forma temos:

$$D := \text{tang}(\mathcal{F},\mathcal{G}) = (N+n+1)C_\infty + \sum_{i=1}^{n}(C_i + T_i)$$

$$D' := \text{tang}(\mathcal{F}',\breve{\mathcal{G}}) = (N+n+1)C'_\infty + \sum_{i=1}^{n}(C'_i + T'_i)$$

onde T_i é uma curva em $(\mathbb{C}^2,0)$ (em geral singular em 0) com cone tangente $(Y-t_iX)^{r_i}$, e transversal a $\mathcal{F}$ e a $\mathcal{G}$ em $T_i\setminus 0$. Analogamente, T'_i é uma curva em $(\mathbb{C}^2,0)$ (em geral singular em 0) com cone tangente $(Y-t_iX)^{r_i}$, e transversal a $\mathcal{F}'$ e a $\breve{\mathcal{G}}$ em $T'_i\setminus 0$. Seja $\varphi_i := \varphi_{T_iT'_i}$ a correspondência entre folhas de $\mathcal{F}$ e folhas de $\mathcal{F}'$ expressada em T_i e T'_i. Temos um grau de liberdade na escolha de φ_i, pois não temos fixado a correspondência entre os ramos de T_i e T'_i. No decorrer da prova do lema a seguir será efetuada a escolha. Seja $\{H'=0\}$ uma equação para o conjunto analítico $T' = \sum_{i=1}^{n} T'_i$. A dificuldade maior é provar o Lema Principal neste caso. Felizmente o lema de interpolação (Lema A.1) vale para conjuntos singulares e obtemos:

Lema 2.30 (Lema Principal) *A hipótese $j^\kappa(\omega) = j^\kappa(\omega')$ no Teorema 2.12 implica que existem funções $\phi \in \mathcal{O}^*_{(\mathbb{C}^2,0)}$ e $\psi \in \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^2,0)}$, de forma que a função meromorfa em $(\mathbb{C}^2,0)$,*

$$g' = \breve{g}(\phi + H'\psi)$$

e a folheação $\mathcal{G}' = \{g' = cte\}$ satisfazem as seguintes condições:

(∗) *$g'(q) = g(\varphi_i^{-1}(q))$, $\forall q \in T'_i$ e para $i = 1,\ldots,n$.*

(∗∗) *$tang(\mathcal{F}',\mathcal{G}') = tang(\mathcal{F}',\breve{\mathcal{G}}) = (N+n+1)C'_\infty + \sum_{i=1}^{n} C'_i + T'_i$*

Prova: Usando um argumento completamente análogo à prova das equações (2.17) e (2.18) provamos que para $i=1,\ldots,n$

$$\begin{aligned} j_0^{K(s)+(r_i+1)}(f_i) &= j_0^{K(s)+(r_i+1)}(f'_i) \\ j_0^{K(s)+1}(f_\infty) &= j_0^{K(s)+1}(f'_\infty) \end{aligned} \tag{2.33}$$

Escrevemos as parametrizações de Puiseux de T_i e T'_i:

$$\begin{aligned} w &\longrightarrow (w^{r_i}, P_i(w)) \in T_i \\ w &\longrightarrow (w^{r_i}, P'_i(w)) \in T'_i \end{aligned} \tag{2.34}$$

por um argumento análogo ao da equação (2.10) podemos supor $j^{K(s)+N}(P_i) = j^{K(s)+N}(P'_i)$. Sabemos que $P'_i(w) = t_iw^{r_i} + B_iw^{r_i+1} + \ldots$ holomorfa com $B_i \neq 0$.

Para estudar φ_i precisamos calcular os transformados estritos de T_i e T_i' na carta (t,x) onde $xt = Y$ e $X = x$:

$$\begin{aligned} E^{-1}(w^{r_i}, P_i(w)) &= (t_i + B_i w + \ldots, w^{r_i}) =: (\hat{P}_i(w), w^{r_i}) \\ E^{-1}(w^{r_i}, P_i'(w)) &= (t_i + B_i w + \ldots, w^{r_i}) =: (\hat{P}_i'(w), w^{r_i}) \end{aligned} \tag{2.35}$$

Por um argumento de recobrimentos já feito mostra-se que existe $w \longrightarrow b_i(w)$ onde $b_i(w) = \sum_{j\geq 0} b_j^i w^j$ é holomorfa tal que

$$\varphi_i(\hat{P}(w), w^{r_i}) = (\hat{P}'(b_i(w)), (b_i(w))^{r_i}) \tag{2.36}$$

Na equação 2.36 está embutida a escolha que tínhamos entre os ramos de T_i. Sem perda de generalidade podemos supor $t_i = 0$ e $b_1^i = 1$. Ao redor de $(t_i, 0)$ temos integrais primeiras holomorfas locais h_i, h_i' de $\tilde{\mathcal{F}}$ e $\tilde{\mathcal{F}}'$ respectivamente de forma que

$$h'(t,x) = h(t,x) + x^{K(s)+1}\tilde{h}(t,x) \tag{2.37}$$

onde podemos supor $h(t,x) = \sum_{j\geq 0} A_j(t)x^j$ com $A_0(t) = t^{r_i+1} + \ldots$ e $A_1(0) \neq 0$. Assim, $h(\hat{P}(w), w^{r_i}) = A_1(0)w^{r_i} + \ldots$. Da definição de φ_i temos

$$h(\hat{P}_i(w), w^{r_i}) = h'(\varphi_i(\hat{P}_i(w), w^{r_i})) = h'(\hat{P}'(b_i(w)), (b_i(w))^{r_i}) \tag{2.38}$$

substituindo $b(w)$ nas equações (2.37) e (2.38) temos $b_2 = b_3 = \ldots = b_{K(s)} = 0$. Isso junto com as equações de (2.33) implica que

$$\phi_i := \left(\frac{f_\infty \circ \varphi_i^{-1}}{f_\infty'}\right)^{n+N+1} \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{f_i'}{f_i \circ \varphi_i^{-1}}$$

é holomorfa e satisfaz

$$\phi_i(P_i'(w), w^{r_i}) = 1 + w^{K(s)}\tilde{\phi}_i(w)$$

para uma função holomorfa $\tilde{\phi}_i$. Dado que $|t_i| \neq |t_j|$ se $i \neq j$ o Lema A.1 garante que, se $\frac{K(s)}{maxr_i} \geq N - 1$ existe uma extensão holomorfa ϕ em $(\mathbb{C}^2, 0)$ das funções ϕ_i. Para tratar a condição $(**)$ denotamos por $\psi_i := \psi|_{T_i'}$ e calculamos os seus valores para que a condição seja satisfeita:

$$0 \equiv dg' \wedge \omega'|_{T_i'} = \phi(d\check{g} \wedge \omega')|_{T_i'} + \check{g}(d(\phi + H'\psi) \wedge \omega' \tag{2.39}$$

e esta, pela definição de T_i', é equivalente à equação

$$d\phi \wedge \omega'(q) + \psi_i(q)(dH' \wedge \omega'(q)) = 0 \tag{2.40}$$

para todo ponto $q \in T_i'$.

A equação (2.40) define os valores de ψ_i. Para interpolar holomorficamente precisamos controlar a sua ordem de anulação. Estudemos as ordens de anulação dos elementos que aparecem na equação (2.40):

- $dH'(w^{r_i}, P_i'(w))$ se anula até ordem r_iN-1, pois o cone tangente de H' é $\prod_{i=1}^{n}(Y-t_iX)^{r_i}$.
- $\omega(w^{r_i}, P_i'(w))$ se anula até ordem $r_i(N+2)$, pois $j^{N+1}(\omega') = \prod_{i=1}^{n}(Y-t_iX)^{r_i}(YdX-XdY)$.
- $d\phi(w^{r_i}, P_i'(w))$ se anula até ordem $r_i(\frac{K(s)}{\max r_i}-N)$, pelo Lema A.1.

Portanto se

$$\frac{r_i(\frac{K(s)}{\max r_i}-N)-(r_iN-1)}{r_i} \geq N-1 \qquad i=1,\ldots,n \tag{2.41}$$

então temos $\psi_i(w^{r_i}, P_i'(w)) = w^{r_i(N-1)}\tilde{\psi}_i(w)$ para funções holomorfas $\tilde{\psi}_i$. O Lema A.1 garante que existe uma extensão holomorfa ψ a $(\mathbb{C}^2,0)$ das funções ψ_i. A hipótese $s \geq (N+1)+\max\{r_i\}(3N-1)-1 = \kappa$ garante que as condições (2.41) e $\frac{K(s)}{max r_i} \geq N-1$ são satisfeitas. Isto termina a prova do Lema 2.30.
Prova do Passo 2: Aplicar o Lema 2.28 aos pares $(\mathcal{F},\mathcal{G})$ e $(\mathcal{F}',\mathcal{G}')$ para construir equivalências nas vizinhanças dos pontos $p_1,\ldots,p_n$.
Prova do Passo 3: Fazemos o mesmo raciocínio que no caso de $D_0(n)$. Só muda o índice da singularidade de $\tilde{\mathcal{G}}$ e $\tilde{\mathcal{G}}'$ no ponto ∞. O índice em geral é $\frac{-1}{n+N+1}$.

Por último observamos que, por construção, o biholomorfismo é a identidade sobre E_0 e também sobre os divisores da resolução estendida de $\mathcal{F}$ que cortam E_0. Portanto segundo o Lema 2.9 o biholomorfismo é tangente à identidade. ■

O biholomorfismo construído manda um par de folheções em um par de folheações com propriedades prescritas, e não controlamos se ele preserva algum jato de ordem grande. Nem todos os biholomorfismos de $(\mathbb{C}^2,0)$ mantêm ditas propriedades, e portanto não podemos esperar que a construção do teorema tenha uma recíproca.

2.3 Classificação analítica em $\mathcal{D}_0(1)$

No caso de uma única tangência simples ($n=1$, $r=1$) conseguimos construir uma folheação companheira sem curva de tangências para provar:

Teorema 2.31 *Dadas $\omega,\omega' \in \mathcal{D}_0(1)$, $\mathcal{F}_\omega \sim_{an} \mathcal{F}_{\omega'} \Leftrightarrow H[\omega] = H[\omega']$*

Prova: Denotemos por $\mathcal{F} := \tilde{\mathcal{F}}_\omega$ e $\mathcal{F}' := \tilde{\mathcal{F}}'_\omega$. A necessidade da condição sobre os grupos de invariância é óbvia, pois a restrição da conjugação entre $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ a E_0 conjuga os grupos de invariância.

Para a suficiência, podemos supor $H(\mathcal{F}) = H(\mathcal{F}')$, e (fazendo uma mudança linear em $(\mathbb{C}^2,0)$) que $\Sigma_{\mathcal{F}} = \Sigma_{\mathcal{F}'} = p$ é a origem da carta (t,x) de $\tilde{\mathbb{C}}^2$.

Seja C (resp. C') a folha de $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{F}'$) que passa por $(0,0)$, e C_∞ (resp. C'_∞) a folha de $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{F}'$) passando pelo infinito da carta t de $E_0 \cong \mathbb{C}\mathrm{P}^1$. Claramente existem funções meromorfas $g, g' : \tilde{\mathbb{C}}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ tais que

$$\begin{aligned} \mathrm{div} g &= 3C_\infty + E_0 - C \\ \mathrm{div} g' &= 3C'_\infty + E_0 - C' \end{aligned}$$

Para a construção da conjugação usaremos uma folheação companheira do tipo não genérico (descrito no Lema 2.15). Consideramos $\psi : \tilde{\mathbb{C}}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa com $\mathrm{div}\psi = C_\infty + E_0$. Sabemos que existem constantes $a, b \in \mathbb{C}$ tais que a função $g(a + b\psi)$ não satisfaz a condição de genericidade do Lema 2.15 no ponto $(0,0)$. Nesse caso, as folheações $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G} = \{g(a + b\psi) = cte\}$ formam um par de folheações companheiras sem curvas de tangência. Lembremos das propriedades:

Aplicando a seqüência de explosões S definida na seção 2.1.1 obtemos o diagrama da figura 2.11 para $S^*(\tilde{\mathcal{F}})$: Para $\mathcal{G}$ usando os resultados da seção 2.1.1, e

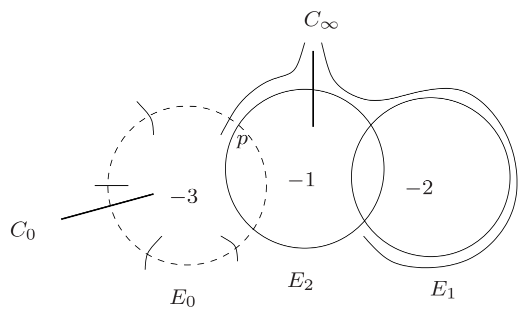


Figura 2.11: Estrutura de $S^*(\mathcal{F})$

que estamos nas hipóteses do Lema 2.15 obtemos:

- E_0 e E_1 são invariantes por $S^*(\mathcal{G})$.
- $S^*(\mathcal{G})$ possui uma única singularidade em E_0, no ponto do infinito da carta (t, x) que é uma sela de índice -3 cuja aplicação de holonomia ao longo de E_0 é a identidade.
- $S^*(\mathcal{G})$ é transversal a E_2 e regular em todos os pontos de E_2.
- $S^*(\tilde{\mathcal{G}})$ possui uma única singularidade em E_1 (que não é esquina). Ela é uma sela de índice -2 cuja aplicação de holonomia ao longo de E_1 é a identidade.
- $\mathrm{tang}(S^*(\mathcal{F}), S^*(\mathcal{G})) = \tilde{C} + \tilde{C_\infty} + E_1$ onde $\tilde{C}$ e $\tilde{C_\infty}$ são os transformados estritos por S de C e C_∞ respectivamente.

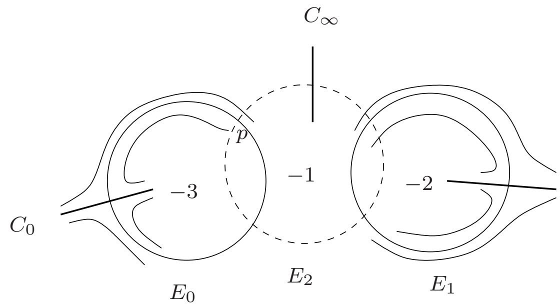


Figura 2.12: Estrutura da companheira $S^*(\mathcal{G})$ sem curvas de tangência

Para $\mathcal{F}'$ achamos constantes $a', b' \in \mathbb{C}$ tais que a folheação $\mathcal{G}' = \{g'(a'+b'\psi) = cte\}$ e o par $(\mathcal{F}', \mathcal{G}')$ sejam companheiras sem curvas de tangência.

Construímos a conjugação entre os pares $(\mathcal{F},\mathcal{G})$, e $(\mathcal{F}',\mathcal{G}')$ ao redor de $(0,0)$:

Após fazer a resolução $S^*(\mathcal{G})$ de $\mathcal{G}$ observamos que podemos usar o mesmo argumento que na prova do Lema 2.13: de um lado existe um único biholomorfismo $\beta : E_2 \longrightarrow E_2$ definido por $\beta(A \cap E_2) = A \cap E_2$, $\beta(E_1 \cap E_2) = E_1 \cap E_2$ e $\beta(\tilde{C} \cap E_2) = \tilde{C}' \cap E_2$. Consideramos a correspondência entre os níveis de $\mathcal{G}$ e os níveis de $\mathcal{G}'$, Υ_β definida no Lema 2.13. Por outro lado, a restrição de $S^*(g(a+b\psi))$ a cada folha de $S^*(\mathcal{F})$ tem sempre um único ponto crítico e corresponde ao ponto de interseção da folha de $S^*(\mathcal{F})$ com a (única!) separatriz de $S^*(\mathcal{G})$ transversal a E_1. Não temos o conjunto de tangências $\{T = 0\}$ do par $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ que produzia esses pontos críticos, mas temos os pontos críticos na separatriz. Os pontos dessa separatriz assumem por $S^*(g(a + b\psi))$ o mesmo valor que E_1, e portanto o mesmo valor do ponto $E_2 \cap E_1$, independentemente da folha. O mesmo argumento serve para $\mathcal{F}'$ e a função $S^*(g'(a'+b'\psi))$. Como os valores de $S^*(g(a+b\psi))$ e $S^*(g'(a'+b'\psi))$ se correspondem por Υ_β, podemos usar o argumento do Lema 2.28 para os pares $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ e $(\mathcal{F}', \mathcal{G})$ numa vizinhança de $(0, 0) \in A$ na carta (x, t), mas com a separatriz transversal a E_1 substituindo o conjunto $\{T = 0\}$. Usando o teorema de Mattei-Moussu estendemos biholomorficamente a conjugação ao conjunto C_∞ (que é mandado em C'_∞). Como a ação do biholomorfismo sobre E_0 é a identidade mas em geral não é a identidade sobre E_2 só podemos dizer que ele é tangente a λId para algum $\lambda \in \mathbb{C}^*$. ∎

Este teorema melhora os resultados obtidos no Teorema 2.12, evidenciando o fato que a condição sobre os jatos nesses teoremas não é optimal, pelo menos no caso particular de uma única tangência simples. Esta melhora deve-se ao fato de termos usado as folheacoes companheiras sem curvas de tangência. Não podemos estender a prova para elementos $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{D}_0(n)$ com $n > 1$ devido a que a escolha de modelos locais não genéricos para $\mathcal{G}$ nos pontos de tangência, pode resultar na incompatibilidade deles. Isto é, a escolha das constantes $a, b \in \mathbb{C}$ da prova do

Teorema 2.31 pode não ser possível. Em outras palavras, em geral não existem folheações companheiras sem curvas de tangência para os elementos de $\mathcal{D}_0(n)$. De fato os exemplos de 2.8 mostram que há mais invariantes fora a estrutura transversal. Para o caso $n = 1$ e $r > 1$, não temos folheações companheiras sem curvas de tangência, o que impede aplicar o mesmo raciocínio. Isso é coerente com o fato que nesse caso as separatrizes (consideradas como curva) pelo ponto de tangência podem ser de classes analíticas diferentes. Dito em outras palavras, o modulo topológico-analítico de *germes de curvas planas irredutíveis* com primeiro par de Puiseux $(m, m+1)$ (são os pares associados a separatrizes de elementos de $\mathcal{D}_0$ que tangenciam com E_0) com $m > 2$ é não trivial (ver [Zar]).

2.4 Corolários

O primeiro corolário que provaremos refere-se ao estudo do espaço de módulos formal-analíticos em $\mathcal{D}_0$, e estende o resultado de Voronin-Ortiz-Rosales ([ORV]):

Corolário 2.32 *(Rigidez formal-analítica em $\mathcal{D}_0$) Dois elementos de $\mathcal{D}_0$ são formalmente equivalentes se e somente se eles são analiticamente equivalentes.*

Prova: Só precisamos provar que dois elementos formalmente equivalentes são analiticamente equivalentes. Partimos de $\mathcal{F}_\omega$ e $\mathcal{F}_{\omega'}$ em $\mathcal{D}_0$, e supomos que existe uma equivalência formal $\hat{\phi} : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ tal que $\hat{\phi}^*\omega' \wedge \omega = 0$. Isto implica que existe uma série formal $\hat{h}$ tal que $\hat{\phi}^*\omega' = \hat{h}\omega$. Não provaremos que $\hat{\phi}$ converge, mas que existe uma equivalência que é analítica. Após uma mudança de coordenadas linear podemos supor $\Sigma_\omega = \Sigma_{\omega'}$, com as mesmas ordens de tangência e $\hat{\phi}$ tangente à identidade. Dado $l \in \mathbb{N}$ existem formas ω_l e ω'_l tais que $\mathcal{F}_{\omega_l} = \mathcal{F}_\omega$, $\mathcal{F}_{\omega'_l} \sim_{an} \mathcal{F}_{\omega'}$ e tais que $j^l(\omega_l) = j^l(\omega'_l)$. Com efeito, basta tomar $\omega_l = \hat{h}|\omega$ e $\omega'_l = \hat{\phi}|^*\omega'$ onde $\hat{h}|$ e $\hat{\phi}|$ denotam truncar as séries formais até uma ordem suficientemente grande que depende de l. Como $\hat{\phi}$ é tantgente à identidade, $\hat{\phi}|$ fixa todos os pontos de E_0 e temos $H(\omega) = H(\omega_l)$ e $H(\omega') = H(\omega'_l)$ para todo l. Escolhemos $l \geq \kappa$ para o κ correspondente a ω. Provemos que $H(\omega') = H(\omega)$. Seja $h_p \in H(\tilde{\mathcal{F}}_\omega, p)$ (respectivamente $h'_p \in H(\tilde{\mathcal{F}}_{\omega'}, p)$) um gerador, onde $p \in \Sigma_\omega$, e

$$h_p(t) = \sum_{i \geq 0} h_{pi}(t - t_p)^i \quad h_p(t) = \sum_{i \geq 0} h'_{pi}(t - t_p)^i$$

seus desenvolvimentos em série de potências numa vizinhança de p escritos na coordenada global t onde $p = t_p \in \mathbb{C}$. Dado $s \in \mathbb{N}$, existe $l(s) \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $j^{l(s)}(\omega_{l(s)})$ determina $j^s(h_p)$. O mesmo acontece para $\omega'_{l(s)}$ e h'_p. Do fato que $j^{l(s)}(\omega_{l(s)}) = j^{l(s)}(\omega'_{l(s)})$ temos $j^s(h_p) = j^s(h'_p)$. Isso para cada $s \in \mathbb{N}$. Portanto as séries formais de h_p e h'_p coincidem e $H(\omega') = H(\omega)$. Aplicando o Teorema 2.12 a ω_l e ω'_l com l grande obtemos $\mathcal{F}_\omega \sim_{an} \mathcal{F}_{\omega'}$. ∎

Uma conseqüência deste corolário é que as folheações do exemplo de Suzuki (ver exemplo 2.5) não são formalmente equivalentes. Isto não deixa de ser surpreendente se consideramos que Camacho e Movasati em [CM] provaram que após uma explosão existe uma equivalência formal entre elas. O problema é que a equivalência formal construída não pode ser implodida.

Um segundo corolário da construção do Teorema 2.13 é o seguinte:

Corolário 2.33 (Determinação finita de cúspides multiplas) *Seja $C = C_1 \cup \cdots \cup C_n$ onde C_i é uma cúspide de tipo $(r_i, r_i + 1)$, $r_i \in \{2, 3 \ldots\}$ e $f = 0$ uma equação genérica de C. Para $\kappa := \kappa(2n-1; r_1, \ldots, r_n, 1 \ldots, 1)$, se $f' : (\mathbb{C}^2, 0) \to \mathbb{C}$ holomorfa satisfaz $j_0^\kappa(f') = j_0^\kappa(f)$ então existe um biholomorfismo $\Psi : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ com $\Psi(C) = \{f' = 0\}$.*

Prova: Definimos $N = r_1 + \ldots + r_n$. Consideramos as folheações em $(\mathbb{C}^2, 0)$

$$\mathcal{F} = \{\frac{f}{X^{N+n}} = cte\} \quad f = \sum_{i \geq N+n} f_i(X, Y)$$

$$\mathcal{F}' = \{\frac{f'}{X^{N+n}} = cte\} \quad f' = \sum_{i \geq N+n} f'_i(X, Y) \tag{2.42}$$

onde os f_i, f'_i são homogêneos de grau i. Depois de uma explosão comprovamos que, $\tilde{\mathcal{F}}$ e $\tilde{\mathcal{F}}'$ possuem integrais primeiras holomorfas globais na carta (t, x):

$$\tilde{f}(t, x) = \sum_{i \geq 0} x^i f_{i+N+n}(1, t) \quad \tilde{f}'(t, x) = \sum_{i \geq 0} x^i f'_{i+N+n}(1, t)$$

Para uma equação $f = 0$ genérica, $\mathcal{F}$ (e portanto $\mathcal{F}'$) pertence a $\mathcal{D}_0$. Com efeito, se denotamos por $Y - t_i X$ a direção tangente de C_i, $\frac{df_{N+n}}{dt}(1, t) = 0$ tem as soluções t_i com multiplicidade r_i e o restante de soluções $t'_1, \ldots, t'_{n-1}$ têm multiplicidade 1. Portanto $f_{N+n}(1, t'_i) \neq 0$ e multiplicando f por uma função $1 + aX + bY$ com $a, b \in \mathbb{C}$ genéricos podemos garantir que $f_{N+n+1}(1, t'_i) \neq 0$, provando que $\mathcal{F} \in \mathcal{D}_0(2n - 1; r_1, \ldots, r_n, 1, \ldots, 1)$. Como a estrutura transversal de $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ depende só da restrição de $\tilde{f}$ e $\tilde{f}'$ a E_0 temos $H(\mathcal{F}) = H(\mathcal{F})$. O κ definido satisfaz a condição do Teorema 2.12 para as formas obtidas de derivar as expressões de (2.42), e portanto concluímos que existe o biholomorfismo Ψ do enunciado. A construção leva as separatrizes de $\mathcal{F}$ pelos pontos de $\Sigma_{\mathcal{F}}$ em separatrizes de $\mathcal{F}'$ pelos mesmos pontos. Portanto $\Psi(\{f = 0\}) = \{f' = 0\}$. ∎

A prova deste corolário tem o espírito da prova de Cerveau e Mattei que encontramos em [CM] sobre a existência de determinação finita para germes de curvas, no sentido que pensamos as curvas como separatrizes de folheações, e produzimos uma equivalência entre as folheações. Na prova eles usam as folheações (não dicríticas) determinadas por $\{f = cte\}$ e $\{f' = cte\}$, e o Lema de Nakayama, que garante a existência de uma cota, mas não é explicitada. No caso tratado apresentamos uma cota explícita para alguns casos.

Capítulo 3

Vizinhanças Folheadas de Superfícies de Riemann

Neste capítulo generalizaremos o método de construção de folheações companheiras para continuar com a classificação de folheações em vizinhanças de curvas analíticas mergulhadas em superfícies complexas iniciado por Movasati-Camacho-Sad em [CMS]:

Seja A uma superfície de Riemann compacta de gênero $g \geq 0$, e $A \longrightarrow U$ um mergulho de A numa superfície complexa aberta U. Consideramos a família de folheações holomorfas regulares em U: $\mathcal{F}(U, A)$. Dadas $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(U, A)$ e $\mathcal{F}' \in \mathcal{F}(U', A)$ diremos que $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ são holomorficamente equivalentes se existem vizinhanças $U_1 \subset U$, $U_1' \subset U'$ de A e um biholomorfismo $\phi : U_1 \longrightarrow U_1'$, que é a identidade sobre A, e de forma que $\phi^*(\mathcal{F}') = \mathcal{F}$. Estamos interessados em achar modelos de mergulhos $A \longrightarrow U$ e em descrever as classes analíticas de $\mathcal{F}(U, A)$. Nos casos em que a autointerseção de A em U é suficientemente negativa, o Teorema de Grauert resolve a primeira questão: todo mergulho $A \longrightarrow U$ define um fibrado em linhas sobre A chamado fibrado normal N. Por sua vez A é naturalmente mergulhado em N. A pergunta que o teorema de Grauert responde é decidir quando esses mergulhos, pensando nas superfícies complexas como germes de superfície, são holomorficamente equivalentes:

Teorema 3.1 (Grauert) *Seja $A \longrightarrow U$ um mergulho de uma superfície de Riemann compacta de gênero g numa superfície complexa U, com normal N. Se $A \cdot A < min\{0, 4 - 4g\}$. Então o $A \longrightarrow U$ é holomorficamente equivalente a $A \longrightarrow N$. Dizemos que o mergulho $A \longrightarrow U$ é linarizável.*

Prova: Ver [CM1]. ■

Precisaremos repetidamente do seguinte lema, que constitui uma das razões para considerar só mergulhos de autointerseção negativa:

Lema 3.2 *Seja A uma superfície de Riemann compacta de gênero m e $N \longrightarrow A$ um fibrado em linhas sobre A com $A \cdot A < min\{0, 2-2m\}$. Então a restrição $r : Pic(N) \longrightarrow Pic(A)$ é injetiva.*

Prova: Ver [CM1]. ■

Assim, nos restringimos ao caso $\mathcal{F}(N, A)$ onde N é um fibrado em linhas sobre A de classe de Chern bastante negativa. A autointerseção $A \cdot A$ vem determinada pela classe de Chern de N. Porém (salvo no caso em que A é de gênero 0) a classe de Chern não determina a classe analítica de N. No caso em que A tem gênero zero denominamos U_k uma vizinhança da seção nula do fibrado em linhas N_k sobre A com $c_1(N_k) = -k < 0$.

Uma folheação $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(N, A)$ define um divisor de tangências entre $\mathcal{F}$ e A. A saber, $D_{\mathcal{F}} = \sum_{p \in \Sigma_{\mathcal{F}}} n_p p$ onde $\Sigma_{\mathcal{F}} = \{p \in A | \text{a folha de } \mathcal{F} \text{ por } p \text{ e tangente a } A\}$, e $n_p \geq 0$ é a ordem de tangência entre a folha de $\mathcal{F}$ por p e A. Se $A^2 < 0$, A não pode ser invariante por $\mathcal{F}$. Mais ainda, pelas formulas de [Br], $\Sigma_{\mathcal{F}}$ é finito, e portanto $D_{\mathcal{F}}$ e um divisor efetivo.

Por um argumento análogo ao de [K], é possível provar que o conjunto de classes topológicas de $\mathcal{F}(N, A)$ é descrito pelos conjuntos $\mathcal{F}(N, A, n; r_1, \ldots, r_n)$ de folheações $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(N, A)$ com $n \in \mathbb{N}$ pontos distintos de tangência e ordens de tangência $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{N}$. Isto quer dizer que dois elementos de $\mathcal{F}(N, A)$ são topologicamente equivalentes se e somente se eles pertencem ao mesmo $\mathcal{F}(N, A, n; r_1, \ldots, r_n)$.

No caso $n = 0$, isto é, folheações transversais a A em todos os pontos, os fibrados em linhas providenciam exemplos e a classificação analítica foi resolvida em [CMS]:

Teorema 3.3 *Seja A uma superfície de Riemann compacta de gênero m e $N \longrightarrow A$ um fibrado em linhas com $A \cdot A < min\{0, 2-2m\}$. Toda folheação $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(N, A, 0)$ é biholomorficamente equivalente à folheação trivial de N. Portanto, a classe analítica do fibrado normal determina a classe analítica da folheação.*

Prova: Apresentaremos uma prova escrita na linguagem usada neste trabalho: O teorema de Riemann-Roch garante que existe $s \in \Gamma(A, N^*)$, uma seção holomorfa de N^* com $\mathrm{div} s = \sum_{i=1}^{M} n_i q_i$ onde $q_i \in A$ e $n_i \in \mathbb{N}$. Dado um ponto $p \in A$ denotaremos por N_p a fibra de N sobre p e L_p a folha de $\mathcal{F}$ passando por p. Os divisores em N

$$D = A + \sum_{i=1}^{M} n_i N_{q_i} \qquad D' = A + \sum_{i=1}^{M} n_i L_{q_i} \tag{3.1}$$

satisfazem que os fibrados $[D]|_A$ e $[D']|_A$ são triviais. Usando o Lema 3.2, $[D]$ e $[D']$ são fibrados triviais, e existem funções holomorfas definidas numa vizinhança U de A em N $g, g' : U \longrightarrow \mathbb{C}$ de forma que

$$\mathrm{div} g = D \qquad \mathrm{div} g' = D' \tag{3.2}$$

Dado $q \in A \setminus \{q_1, \ldots, q_M\}$ definimos os germes de biholomorfismo

$$\Psi_q : (N_q, q) \longrightarrow (L_q, q) \quad por \quad \Psi_q(p) := g|_{L_q}^{\prime -1} \circ g|_{N_q}(p) \tag{3.3}$$

Eles definem um biholomorfismo entre vizinhanças (pequenas) de $A \setminus \{q_1, \ldots, q_M\}$ em N. A existência de extensão as fibras sobre os pontos q_i vem garantida pelo teorema de Mattei-Moussu: as singularidades das folheações $\mathcal{G} = \{g = cte\}$ e $\mathcal{G}' = \{g' = cte\}$ nesse ponto têm índice $\frac{-1}{n_i}$ e holonomia trivial ao longo de A.
Cabe observar que podemos repetir o argumento com qualquer seção meromorfa $s \in \Gamma(A, \mathcal{M}(N^*))$. Nesse caso as folheações $\mathcal{G}$ e $\mathcal{G}'$ têm singularidades dicríticas nos pontos q_i onde $n_i < 0$. Isso não constitui uma obstrução a estender o biholomorfismo definido por (3.3) devido essencialmente ao fato que ambas folheações apresentam o mesmo tipo de singularidade, e o conjunto de tangências de cada par de folheações $(N, \mathcal{G})$ e $(\mathcal{F}, \mathcal{G}')$ está formado por separatrizes. Podemos expressar esta idéia localmente dizendo que dados $a, b \in \mathcal{O}^*_{(\mathbb{C}^2,0)}$ e $n \in \mathbb{N}$ o biholomorfismo de $(\mathbb{C}^2, 0)$ definido por

$$\phi_{ab}(x, y) = (xa, ya^n b)$$

manda os níveis de $f'(x, y) = xa(x, y)$ (respectivamente $g'(x, y) = \frac{y}{x^n} b(x, y)$) em níveis das funções $f(x, y) = x$ (respectivamente $g(x, y) = \frac{y}{x^n}$) e é a identidade sobre $\{y = 0\}$ se $a(0, 0) = 1$. Porém, a hipótese sobre a autointerseção não pode ser debilitada em geral, pois precisamos que $Pic(N) \longrightarrow Pic(A)$ seja injetiva e portanto não perdemos generalidade supondo que s é holomorfa. ∎
Naturalmente surge a pergunta sobre a existência de conjuntos $\mathcal{F}(N, A, n; r_1, \ldots, r_n)$ não vazios para $n > 0$. Fazendo colagens do tipo descrito na Introdução podemos construir exemplos prescrevendo a classe de Chern de N, os pontos de tangência e suas ordens, mas sem fixar a classe analítica de N. O seguinte teorema nos permite considerar exemplos prescrevendo a classe analítica do fibrado e suficientes pontos de tangência. Ele sugere um conjunto de modelos no espírito do teorema que acabamos de citar:

Teorema 3.4 *Seja A uma superfície de Riemann compacta de gênero $g \in \mathbb{N}$ e $L \longrightarrow A$ um fibrado em linhas sobre A e $D = n_1 p_1 + \ldots n_k p_k$ um divisor em A com $p_i \neq p_j$ para $i \neq j$ e $n_i > 0$. Suponha $k \geq g + 1$ e*

- $c_1(L) \leq 0$ *e* $\deg D \geq 2 - 2g$ *ou*
- $0 \leq c_1(L) \leq g - 2$

Então, existe uma folheação $\mathcal{F}$ holomorfa regular numa vizinhança de A, a seção nula de L, transversal a A em todos os pontos exceto nos pontos $p_1, \ldots, p_k$ onde temos tangências de ordens $n_1+1, \ldots, n_k+1$ respectivamente entre as folhas de $\mathcal{F}$ e A. Em outras palavras, existe $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(L, A; k; n_1, \ldots, n_k)$ com $D_{\mathcal{F}} = D + p_1 + \ldots + p_k$

Prova: Seja $\mathcal{K}$ o fibrado canônico de A. Da condição sobre a classe de Chern temos $c_1(L^* \otimes \mathcal{K}) = -c_1(L) + 2g - 2 \geq g$. O teorema de Riemann-Roch garante que existe uma seção meromorfa nao nula $s_1 \in \Gamma(A, \mathcal{M}(L \otimes \mathcal{K}^{-1}))$ com div$s_1 = -D_1$ onde $D_1 \geq 0$. Definimos o seguinte divisor em A: $D^{''} = D - (p_1 + \ldots + p_k)$. Claramente $D^{''} \leq D$, $\deg D^{''} = \deg D - k$ e $L(D^{''}) \subset L(D)$. Aplicando o teorema de Riemann-Roch a D e $D^{''}$ e restando temos $l(D) - l(D^{''}) = k + h^1(D) - h^1(D^{''})$. Em qualquer caso temos $h^1(D) - h^1(D^{''}) \geq -g$ e portanto se $k \geq g+1$, existe $f \in L(D) \setminus L(D^{''})$. Desta forma $s := \frac{s_1}{f} \in \Gamma(A, \mathcal{M}(L \otimes \mathcal{K}^{-1}))$ satisfaz div $\quad s = D - D^{'}$, onde $D, D^{'} \geq 0$.

Observamos que $\deg D' = -c_1(L) + 2g - 2 + \deg D$. Suponha primeiro $c_1(L) \leq 0$ e $\deg D \geq 2 - 2g$. A hipótese sobre a classe de Chern garante que $\deg D' \geq -c_1(L)$. Seja E um divisor tal que $0 \leq E \leq D'$ e $\deg E = -c_1(L)$. Pelo teorema de [GH, p.313] , existe um fibrado em linhas *plano* $L_0 \longrightarrow A$ tal que $L_0 \otimes L = [-E]$. Portanto podemos considerar $t \in \Gamma(A, \mathcal{M}(L_0 \otimes L))$ tal que div $\quad t = -E$. Em segundo lugar, se $0 < c_1(L) \leq g - 2$,temos $\deg D' \geq c_1(L)$. Seja E um divisor tal que $0 \leq E \leq D'$ e $\deg E = c_1(L)$. Um argumento similar ao anterior mostra que existe $t \in \Gamma(A, \mathcal{M}(L_0 \otimes L))$ tal que div $\quad t = E$

A seguir construiremos uma folheação $\mathcal{F}$ com as propriedades do enunciado, associada às seções s e t construidas acima:

Seja $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ um recobrimento por abertos de A de forma que *supp divs* $\cap (U_\alpha \cap U_\beta) = \emptyset$ para todo $\alpha, \beta \in I$. Em L_0 escolhemos coordenadas $(x_\alpha, y_\alpha) \in U_\alpha \times \mathbb{C}$ de forma que o cociclo que define L_0 seja $\{c_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}^*\} \in H^1(\{U_{\alpha\beta}\}, \mathcal{O}^*)$. Seja $\{g_{\alpha\beta}(x)\} \in H^1(\{U_{\alpha\beta}\}, \mathcal{O}^*)$ o cociclo que representa L, isto é, as funções de transição satisfazem $(x_\beta, y_\beta) = (\phi_{\alpha\beta}(x_\alpha), g_{\alpha\beta}(x_\alpha) y_\alpha) = \Phi(x_\alpha, y_\alpha)$. Decorre do fato que t possui um número finito de polos que $t_\alpha = t|_{U_\alpha} : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{C}$ é meromorfa com um número finito de polos e zeros. Portanto t'_α, a derivada fora dos polos de t_α, é meromorfa em U_α com polos contidos no suporte de E. Em todos os casos, a função meromorfa em U_α definida por:

$$\sigma_\alpha(x) = \frac{t'_\alpha(x)}{t_\alpha(x)}$$

possui no máximo polos simples no suporte de E. Além disso,

$$\sigma_\beta = \frac{c_{\alpha\beta}(g'_{\alpha\beta} t_\alpha + g_{\alpha\beta} t'_\alpha)}{c_{\alpha\beta}(g_{\alpha\beta} t_\alpha)} = \frac{g'_{\alpha\beta}}{g_{\alpha\beta}} + \sigma_\alpha$$

Consideramos a 1-forma meromorfa em $U_\alpha \times \mathbb{C}$:

$$\omega_\alpha(x_\alpha, y_\alpha) = dy_\alpha + (s_\alpha(x_\alpha) - y_\alpha \sigma_\alpha(x_\alpha)) dx_\alpha$$

onde $s_\alpha = s|_{U_\alpha}$. Para não sobrecarregar a notação escrevemos $x = x_\alpha$. Usaremos

$'$ para designar a derivada em relação a x. Temos

$$\begin{aligned}
&\Phi^*(\omega_\beta)(x,y_\alpha) = \omega_\beta(\phi_{\alpha\beta}(x), g_{\alpha\beta}(x)y_\alpha) = \\
&= [y_\alpha g'_{\alpha\beta}(x)dx + g_{\alpha\beta}(x)dy_\alpha] + [s_\beta(\phi_{\alpha\beta}(x)) - g_{\alpha\beta}(x)y_\alpha\sigma_\beta(\phi_{\alpha\beta}(x))d\phi_{\alpha\beta}(x)dx] = \\
&= g_{\alpha\beta}(x)[dy_\alpha + (\tfrac{s_\beta(\phi_{\alpha\beta}(x)\phi'_{\alpha\beta}(x)}{g_{\alpha\beta}(x)} + y_\alpha\big(\tfrac{g'_{\alpha\beta}(x)}{g_{\alpha\beta}(x)} - \sigma_\beta(\phi_{\alpha\beta}(x))\phi'_{\alpha\beta}(x)\big)dx] = \\
&= g_{\alpha\beta}(x)[dy_\alpha + (s_\alpha(x) - y_\alpha\big(\tfrac{g'_{\alpha\beta}(x)}{g_{\alpha\beta}(x)} - \tfrac{\frac{\partial t_\beta}{\partial x_\beta}(\phi_{\alpha\beta}(x))\phi'_{\alpha\beta}(x)}{t_\alpha(\phi_{\alpha\beta}(x))}\big)dx] = \\
&= g_{\alpha\beta}(x)[dy_\alpha + (s_\alpha(x) - y_\alpha\big(\tfrac{g'_{\alpha\beta}(x)}{g_{\alpha\beta}(x)} - \tfrac{c_{\alpha\beta}(g'_{\alpha\beta}t_\alpha + g_{\alpha\beta}t'_\alpha)}{c_{\alpha\beta}(g_{\alpha\beta}t_\alpha)})\big)dx] \\
&= g_{\alpha\beta}(x)[dy_\alpha + (s_\alpha(x) - y_\alpha\sigma_\alpha(x))dx] = \\
&= g_{\alpha\beta}(x)\omega_\alpha(x,y_\alpha)
\end{aligned}$$

Sejam $p_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{C}$ funções holomorfas que definem o divisor $D'|_{U_\alpha}$. Pelas escolhas feitas de s_α e σ_α a 1-forma $\eta_\alpha(x,y_\alpha) = p_\alpha(x)\omega_\alpha(x,y_\alpha)$ é holomorfa em $U_\alpha \times \mathbb{C}$. Em $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ temos $\Phi^*\eta_\beta(x_\alpha,y_\alpha) = \frac{p_\alpha(x_\alpha)}{p_\beta(x_\alpha)}g_{\alpha\beta}(x_\alpha)\eta_\alpha(x_\alpha,y_\alpha)$. Dado que os zeros de p_α e p_β estão contidos em D', e $suppD' \cap U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$, $\frac{p_\alpha(x)}{p_\beta(x)}g_{\alpha\beta}(x)$ não se anula e é holomorfa em $U_\alpha \cap U_\beta$. Por tratar-se de um espaço de dimensão dois, η_α é integrável e define uma folheação holomorfa singular $\mathcal{F}$ em L com as seguintes propriedades:

- $\mathcal{F}$ não possui singularidades em A devido ao fato que para cada $\alpha \in I$, $\eta_\alpha(x,0) = p_\alpha(x)dy_\alpha + (p_\alpha(x)s_\alpha(x))dx$ e os conjuntos de zeros e de polos de s são disjuntos. Portanto numa vizinhança U de A em L, a folheação $\mathcal{F}|_U$ é regular.

- Nos pontos $p_i \in suppD$, $\mathcal{F}|_U$ é tangente a A, pois $\eta_\alpha(p_i,0) = p_\alpha(p_i)dy_\alpha \neq 0$ para $i = 1,\ldots,k$. A ordem de tangência em p_i é $n_i + 1$ onde n_i é a ordem do zero de s em p_i.

- Nos pontos $p \in A - \{p_1,\ldots,p_k\}$ sabemos que $p_\alpha(p)s_\alpha(p) \neq 0$ e portanto $\mathcal{F}|_U$ é transversal a A em p. Cabe observar que nos pontos de *supp* E as folhas de $\mathcal{F}$ possuem tangências simples com às fibras de L.

Isto prova o teorema. ∎

Observemos a relação deste teorema com a construção dada por Lins-Neto em [LN2]. Nesse trabalho as folheações construídas deixam a curva A invariante, mas as idéias fundamentais são as mesmas. Seria interessante saber se a construção aqui apresentada pode ser generalizada para folheações de codimensão um em ambientes de dimensões superiores, como é o caso em [LN2].

Para o estudo das classes analíticas de $\mathcal{F}(N,A,n;r_1,\ldots,r_n)$ estendemos a definição da estrutura transversal (ver Capítulo 2) da seguinte forma:

Definição 3.5 *Seja $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(N, A, n; r_1, \ldots, r_n)$ com $\Sigma_{\mathcal{F}} = \{p_1, \ldots, p_n\}$ e V_i uma vizinhança de p_i em N. Consideramos $f : (V_i, p) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ uma integral primeira local de $\mathcal{F}$ e $f_i = f|_{A \cap V_i}$. O grupo de invariância de $\mathcal{F}$ em p_i é o grupo cíclico $H(\mathcal{F}, p_i) := \{h \in Diff(A, p_i) | f_i \circ h \equiv f_i\}$.*
A estrutura transversal de $\mathcal{F}$ é o conjunto $H(\mathcal{F}) := H(\mathcal{F}, p_1) \cup \ldots \cup H(\mathcal{F}, p_n)$.

Definição 3.6 *Dadas $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ em $\mathcal{F}(A, N, n; r_1, \ldots, r_n)$ diremos que as estruturas transversais $H(\mathcal{F})$ e $H(\mathcal{F}')$ são $Aut(A)$-**conjugadas** se existe um biholomorfismo $\phi : A \longrightarrow A$ tal que:*

- $\phi(\Sigma_{\mathcal{F}}) = \Sigma_{\mathcal{F}'}$
- *a aplicação definida por $h \mapsto \phi \circ h \circ \phi^{-1}$ define uma bijeção entre $H(\mathcal{F})$ e $H(\mathcal{F}')$*

Obviamente se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ são biholomorficamente equivalentes, $H(\mathcal{F})$ e $H(\mathcal{F}')$ são $Aut(A)$-conjugados. Lembremos que quando o o gênero de A e maior que 0, $Aut(A)$ é um grupo finito, e portanto existem poucos candidatos a conjugar os grupos. Infelizmente neste caso nem todos os automorfismos de A estendem a automorfismos fibrados de vizinhanças de A em N. Denotaremos por $H[\mathcal{F}]$ a classe de $H(\mathcal{F})$ módulo automorfismos de A *que admiten extensão a um automorfismo fibrado de N*. Claramente $H[\mathcal{F}]$ depende só da classe analítica $[\mathcal{F}]$ de $\mathcal{F}$. Temos um equivalente ao Lema 2.7, que mostra que se $H[\mathcal{F}] = H[\mathcal{F}']$ então existe $\mathcal{F}''$ com $\mathcal{F}'' \sim_{an} \mathcal{F}'$ tal que $H(\mathcal{F}) = H(\mathcal{F}'')$:

Para terminar observamos que nos exemplos descritos no Teorema 3.4 não temos controle sobre a estrutura transversal das folheações construídas, e portanto não podemos esperar que esses exemplos sejam um conjunto completo de modelos de representantes para cada classe analítica.

3.1 Classificação analítica em $\mathcal{F}(A, N; 1, 1)$

Nesta seção estenderemos o resultado do Teorema 2.31 da seguinte forma:

Teorema 3.7 *Seja N um fibrado em linhas sobre uma superfície de Riemann compacta A de gênero $g \leq 1$ tal que $c_1(N) < -g$. Sejam $\mathcal{F}, \mathcal{F}' \in \mathcal{F}(N, A)$ tais que $\#H(\mathcal{F}) = 2$. Então $\mathcal{F}$ é analiticamente equivalente a $\mathcal{F}'$ se somente se $H[\mathcal{F}] = H[\mathcal{F}']$.*

Prova: Ao longo da prova suporemos, abusando da linguagem, que N é uma vizinhança suficientemente pequena da seção nula A do fibrado $N \longrightarrow A$.

Após uma mudança de representante na classe analítica podemos supor $H(\mathcal{F}) = H(\mathcal{F}')$. Do teorema de Riemann-Roch e do fato que N não possui pontos base ($c_1(N) \leq -2g$ nos casos tratados) podemos considerar $s \in \Gamma(A, \mathcal{M}(N))$ com

$p \notin supp \quad s$ e div $\quad s = -(r_1p_1 + \ldots + r_np_n)$ onde $r_i \in \mathbb{N}$. O divisor $D = 2p$ em A satisfaz $1 = \deg(D - p) \geq 2g - 2$ pela condição sobre o gênero de A. Usando o teorema de Riemann-Roch de novo temos que existe $f \in \mathcal{L}(D) \setminus \mathcal{L}(D - p)$ e portanto a seção $\frac{s}{f} \in \Gamma(A, \mathcal{M}(N))$ satisfaz $\text{div}(\frac{s}{f}) = 2p - \sum_{i=1}^{m} s_iq_i$ para alguns pontos $q_i \in A \setminus p$ e $s_i \in \mathbb{N}$.

Seja C (resp. C') a folha de $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{F}'$) que passa por p, e L_{q_i} (resp. L'_{q_i}) a folha de $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{F}'$) passando por um ponto $q_i \in A \setminus p$. Sejam

$$E = \sum_{i=1}^{m} s_iL_{q_i} + A - C \qquad E' = \sum_{i=1}^{m} s_iL'_{q_i} + A - C'$$

divisores em N. Por construção a restrição a A dos fibrados que eles determinam sobre N é o fibrado trivial em ambos casos. Usando de novo o Lema 3.2, podemos afirmar que existem funções meromorfas $h, h' : U_k \longrightarrow \mathbb{C}$ tais que

$$\text{div}h = E \quad \text{div}h' = E'$$

Consideramos (de forma análoga ao argumento do último parágrafo) $\psi : N \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa com div $\quad \psi = \sum_{i=1}^{n} r_iL_{p_i} + A$. Sabemos que existem constantes $a, a' \in \mathbb{C}^*$, $b, b' \in \mathbb{C}$ tais que a função $h(a + b\psi)$ (resp. $h'(a' + b'\psi)$) define uma folheação $\mathcal{G} = \{h(a + b\psi) = cte\}$ (resp. $\mathcal{G}' = \{h'(a' + b'\psi) = cte\}$) que é companheira **sem** curvas de tangência de $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{F}'$) no ponto p. Seguindo o argumento do Teorema 2.31 construímos uma correspondência na vizinhança de p através dos valores de g e g'. Dado que $\mathcal{G}$ e $\mathcal{G}'$ são folheações numa vizinhança de A em N, essa equivalência estende a uma vizinhança de A em N usando:

- a correspondência entre valores de g e g' ja descrita para estender a equivalência às fibras de $\mathcal{F}$ sobre $A \setminus \{q_1, \ldots, q_m\}$

- o teorema de Mattei-Moussu para estendê-la aos conjuntos L_{q_i}, onde q_i é uma singularidade de índicie $\frac{-1}{s_i}$ de $\mathcal{G}$ e também de $\mathcal{G}'$ e as holonomias de ambas folheações ao longo de A e em q_i são triviais.

$\blacksquare$

O argumento não estende para gêneros maiores porque em geral não temos $h^1(p) = h^1(2p)$. Para os divisores da forma $D = 2p$ em superfícies de Riemann de gênero arbitrário que isso seja satisfeito, o argumento se aplica.

3.2 O caso $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$

No caso em que $A \cong \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ é mergulhada $A \longrightarrow U_k$ com autointerseção $-k < 0$ podemos estender os resultados obtidos no capítulo 2:

Lembremos que U_k é a superfície complexa definida por duas cartas (t, x) e (y, u) de forma que $t = \frac{1}{u}$, $x = yu^k$ para valores de $u \neq 0$. Consideraremos U_k como germe de superfície complexa numa vizinhança de $A = \{x = 0\}$. Sabemos que A pode ser implodida. Quando $k \neq 1$ obtemos uma superfície singular mas temos um modelo biholomorfo dela que nos permite trabalhar:

Lema 3.8 *Fixamos $k \in \mathbb{N}$ e ζ uma raíz k-ésima primitiva de 1 (ou $\zeta = 1$ se $k = 1$). Consideramos em $(\mathbb{C}^2, 0)$ a ação definida por $I(X, Y) = (\zeta X, \zeta Y)$. Existe um biholomorfismo $\sigma : U_k \setminus A \longrightarrow \frac{(\mathbb{C}^2,0)\setminus 0}{I}$ que faz o diagrama seguinte comutar:*

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{C}^2, 0) \arrow[r, dotted, "\rho"] \arrow[dr, "\pi"'] & U_k \arrow[d, dotted, "\sigma"] \\
 & \frac{(\mathbb{C}^2,0)}{I}
\end{tikzcd}$$

onde $(t, x) = \rho(X, Y) = (\frac{Y}{X}, X^k)$ define uma aplicação holomorfa $k : 1$ de $\mathbb{C}^2 \setminus \{X = 0\}$ sobre $U_k \setminus A$, e $\pi : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow \frac{(\mathbb{C}^2,0)}{I}$ é a projeção canônica.

Prova: ρ estende holomorficamente a $\mathbb{C}^2 \setminus 0$. Para provar isso, observamos que mudando de cartas em U_k a expressão de ρ é $(u, y) = \rho(X, Y) = (\frac{X}{Y}, Y^k)$. A imagem de ρ é $U_k \setminus A$. Temos também $\rho(I(X, Y)) = \rho(X, Y)$. Isto implica que existe uma função holomorfa σ definida no enunciado tal que $\sigma \circ \rho = \pi$. Ela é 1:1 porque tanto ρ como σ são $k : 1$. Portanto σ é um biholomorfismo de $U_k \setminus A$ na imagem . ∎

Isto nos permite interpretar funções, formas e folheações em U_k como funções, formas e folheações em $(\mathbb{C}^2, 0)$ que preservam I, e viceversa, transportar objetos em $(\mathbb{C}^2, 0)$ invariantes por I a objetos em U_k. Tratemos primeiro das funções:

Dada uma função holomorfa $f : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ de forma que $f \circ I = f$ sabemos que todos os coeficientes dos monômios $X^i Y^j$ do desenvolvimento em série são nulos exceto, talvez, os que satisfazem que $i + j \equiv 0$ módulo k. Assim, $f(X, Y) = \sum\limits_{j \geq m} f_j(X, Y)$, onde f_j são polinômios homogêneos de grau jk, e $f_m \neq 0$. A fórmula

$$\tilde{f}(t, x) = \frac{f(x^{\frac{1}{k}}, tx^{\frac{1}{k}})}{x^m}$$

define uma função holomorfa em U_k. Inversamente, dada uma função $\tilde{g} : U_k \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa com $deg(\tilde{g}(t, 0)) = n$, podemos definir uma função holomorfa em $(\mathbb{C}^2, 0)$

$$g(X, Y) = X^n \cdot (\tilde{g} \circ \rho(X, Y))$$

Claramente $f = X^m(\tilde{f} \circ \rho)$, e se $h = X^n \cdot (\tilde{g} \circ \rho)$, então $\tilde{h} = \tilde{g}$.

Para a definição de uma folheação $\mathcal{F}$ em U_k basta uma 1-forma ω em $(\mathbb{C}^2, 0)$ de forma que

$$I^*\omega \wedge \omega = 0. \tag{3.4}$$

Dita condição implica que $I^*\omega = f\omega$ para alguma função $f \in \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^2,0)}$. Do fato que $I^k = id$, iterando a condição (3.4) temos

$$f(X,Y) \cdot f(I(X,Y)) \cdot f(I^2(X,Y)) \cdots f(I^{k-1}(X,Y)) \equiv 1 \tag{3.5}$$

Aplicando esta igualdade na origem temos $f(0,0)^k = 1$ e portanto existe $l \in \{0, \dots, k-1\}$ tal que $f(0,0) = \zeta^l$. Escrevemos $g(X,Y) := \frac{f(X,Y)}{\zeta^l}$, e $g_i^j(X,Y) = (g(I^i(X,Y)))^j$. Da equação (3.5) temos $\prod_{i=0}^{k-1} g_i^1 = 1$. Numa vizinhança de $1 \in \mathbb{C}$ escolhemos um ramo da raíz k-esima denotado por $(\cdot)^{\frac{1}{k}}$ de forma que $1 = (1)^{\frac{1}{k}}$. A 1-forma $\eta := (\prod_{i=0}^{k-2} g_i^{k-1-i})^{\frac{1}{k}}\omega$ satisfaz $I^*\eta = \zeta^l\eta$. Com efeito,

$$\begin{aligned} I^*\eta &= (\prod_{i=0}^{k-2} g_{i+1}^{k-1-i})^{\frac{1}{k}} \zeta^l g\omega = \zeta^l (g^k \prod_{i=0}^{k-2} g_{i+1}^{k-1-i})^{\frac{1}{k}}\omega = \\ &= \zeta^l (g^{k-1} \prod_{i=0}^{k-2} g_{i+1}^{k-2-i})^{\frac{1}{k}}\omega = \zeta^l (\prod_{i=0}^{k-2} g_i^{k-1-i})^{\frac{1}{k}}\omega = \zeta^l\eta \end{aligned} \tag{3.6}$$

Desta forma qualquer folheação em U_k tem uma forma em $(\mathbb{C}^2, 0)$ que a representa e que se escreve como

$$\sum_{j \geq 0} \omega_{m+jk}$$

para algum $m \in \mathbb{N}$, onde ω_i é uma 1-forma homogênea de grau i.

Nos estamos interessados nas folheações regulares em U_k. Portanto nos restringimos aos representantes delas:

Definição 3.9 *Fixados $k, n, r_1, \dots, r_n \in \mathbb{N}^*$, definimos $N = \sum_{i=1}^{n} r_i$. Seja $\mathcal{D}_0^k(n; r_1, \dots, r_n)$ o conjunto de $1-formas$ ω dicríticas em $(\mathbb{C}^2, 0)$ tais que*

(i) $I^*(\omega) = \zeta^{N+2}\omega$

(ii) $\tilde{\mathcal{F}}_\omega := \sigma^*(\frac{\mathcal{F}_\omega}{I}) \in \mathcal{F}(U_k, A; n; r_1, \dots, r_n)$

Cabe observar aqui que $\mathcal{D}_0^1(n; r_1, \dots, r_n)$ é o conjunto de formas ω tais que $\mathcal{F}_\omega \in \mathcal{D}_0(n; r_1, \dots, r_n)$, segundo a notação do capítulo 2. O seguinte lema prova que todo elemento de $\mathcal{F}(U_k, A; n; r_1, \dots, r_n)$ possui um representante em $\mathcal{D}_0^k(n; r_1, \dots, r_n)$ e calcula a sua multiplicidade algébrica:

Lema 3.10 *Para cada $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(U_k, A; n; r_1, \ldots, r_n)$ existe $\omega \in \mathcal{D}_0^k(n; r_1, \ldots, r_n)$ tal que $\mathcal{F} = \tilde{\mathcal{F}}_\omega$. Além disso a multiplicidade algébrica dos elementos de $\mathcal{D}_0^k(n; r_1, \ldots, r_n)$ é $N+1$.*

Prova: Pela fórmula de Brunella (ver [Br]), o fibrado normal de $\mathcal{F}$, $N_\mathcal{F}$ satisfaz

$$N_\mathcal{F} \cdot A = -\chi(A) - tang(\mathcal{F}, A) = -2 - N$$

Portanto se $\tilde{\omega}(t,x) = \sum_{j\geq 0} x^j [A_j(t)dx + B_j(t)dt]$ é uma 1-forma holomorfa que descreve $\mathcal{F}$ na carta (t,x), a 1-forma $u^{N+2}\tilde{\omega}(\frac{1}{u}, yu^k)$ é holomorfa sem singularidades em $A = \{y = 0\}$. Assim,

$$\begin{aligned} u^{N+2}\omega(\frac{1}{u}, yu^k) = u^{N+2} \sum_{j\geq 0} y^j [u^{(j+1)k} A_j(\frac{1}{u})dy \\ +(ku^{(j+1)k-1} y A_j(\frac{1}{u}) - u^{jk-2} B_j(\frac{1}{u}))du] \end{aligned}$$

Portanto $A_j(t)$ e $B_j(t)$ são polinômios de graus n_j e m_j respectivamente, satisfazendo:

$$\begin{aligned} n_j &\leq N + 1 + (j+1)k \\ m_j &\leq N + jk \end{aligned}$$

Observemos que $m_0 = N$, pois as soluções de $B_0 = 0$ são os pontos de tangência entre $\mathcal{F}$ e A contadas com multiplicidade. Escrevemos $A_{-1}(t) \equiv 0$ e definimos para $j \geq 0$:

$$\begin{aligned} q_{jk+N+1}(t) &= \frac{B_j(t)}{k} \\ p_{jk+N+1}(t) &= A_{j-1}(t) - tq_{jk+N+1}(t) \end{aligned}$$

Observamos que os graus de $q_{jk+N+1}(t)$ e $p_{jk+N+1}(t)$ são menores que $N+1+jk$, e portanto denotando $l = jk + N + 1$

$$Q_l(X,Y) := X^l q_l(\frac{Y}{X}) \qquad P_l(X,Y) := X^l p_l(\frac{Y}{X}) \tag{3.7}$$

são polinômios homogêneos de grau $l = kj + N + 1$ nas variáveis (X,Y) quando eles não são exatamente nulos.

$$\tilde{\omega}(t,x) = \sum_{j\geq 0} x^j [kq_{jk+N+1}(t)dt + (p_{(j+1)k+N+1}(t) + tq_{(j+1)k+N+1}(t))dx] \tag{3.8}$$

Fazendo o pull-back de $\tilde{\omega}$ por ρ, observamos que

$$\begin{aligned}
\omega(X,Y) &:= \frac{X^{N+2}}{k}\rho^*\tilde{\omega} = \frac{X^{N+2}}{k}\tilde{\omega}(\frac{Y}{X}, X^k) = \\
&= \frac{1}{k}\sum_{j\geq 0} X^{kj+N+1}[kq_{jk+N+1}(\frac{Y}{X})(-\frac{Y}{X}dX + dY) + \\
&\quad +(Xp_{(j+1)k+N+1}(\frac{Y}{X}) + Yq_{(j+1)k+N+1}(\frac{Y}{X}))kX^{k-1}dX] \\
&= -Q_{N+1}(X,Y)\frac{Y}{X}dX + \\
&\quad +\sum_{j\geq 0} Q_{jk+N+1}(X,Y)dY + P_{(j+1)k+N+1}(X,Y)dX \\
&= \sum_{j\geq 0}(Q_{jk+N+1}(X,Y))dY + P_{jk+N+1}(X,Y)dX \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Do fato que $m_0 = N$, temos que a multiplicidade algébrica de ω é $N+1$. $I^*(\omega)(X,Y) = \zeta^{N+2}\omega(X,Y)$, já que os coeficientes são polinômios homogêneos de grau equivalente a $N+1$ módulo k, e $d(\zeta X) = \zeta dX$, e $d(\zeta Y) = \zeta dY$. Por construção, $\tilde{\mathcal{F}_\omega} = \mathcal{F}$. ■

Inspirados no argumento da prova do Lema 3.10 fazemos a seguinte definição:

Definição 3.11 *Dada* $\omega = \sum_{j\geq m}(P_j dX + Q_j dY) \in \mathcal{D}_0^k(n; r_1, \ldots, r_n)$ *onde* $P_j(X,Y)$, $Q_j(X,Y)$ *são polinômios homogêneos de grau* $j \equiv N+1$ *módulo* k*, definimos o éclaté divisé de* ω *como a 1-forma holomorfa:*

$$\tilde{\omega}(t,x) := \sum_{j\geq 0} x^j[Q_{jk+N+1}(1,t)dt + \frac{1}{k}\big(P_{(j+1)k+N+1}(1,t) + tQ_{(j+1)k+N+1}(1,t)\big)dx]$$

definida na carta (t,x) *de* U_k.

Aplicando o argumento do Lema 3.10 ao éclaté divisé obtemos:

$$\omega(X,Y) = \frac{X^{N+2}}{k}\rho^*\tilde{\omega}(X,Y)$$

e portanto $\tilde{\mathcal{F}_\omega} = \mathcal{F}_{\tilde{\omega}}$.

Lema 3.12 *Se,* $\omega, \omega' \in \mathcal{D}_0^k(n; r_1, \ldots, r_n)$ *satisfazem* $j_0^s(\omega) = j_0^s(\omega')$*, então*

$$\tilde{\omega'}(t,x) = \tilde{\omega}(t,x) + x^{\frac{s-(N+1)}{k}}\omega_2(t,x)$$

para alguma 1-forma holomorfa ω_2*. Definimos* $K(s) := \frac{s-(N+1)}{k} \in \mathbb{N}$

Prova: Observe-se que na equação (3.10), os termos do somando j-ésimo dependem do jato $(j+1)k+N+1$ de ω. ■

Definição 3.13 *Dada $\omega \in \mathcal{D}_0^k(n; r_1, \ldots, r_n)$ definimos a estrutura transversal de ω como $H(\omega) := H(\mathcal{F}_{\tilde{\omega}})$.*

Usando a interpretação dos elementos de $\mathcal{F}(U_k, A)$ como germes de folheações singulares na origem de $(\mathbb{C}^2, 0)$, podemos estender o argumento do Teorema 2.12 para provar o seguinte:

Teorema 3.14 *Sejam $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\omega$ e $\mathcal{F}' = \mathcal{F}_{\omega'}$ folheações tais que $\omega, \omega' \in \mathcal{D}_0^k(n; r_1, \ldots, r_n)$ e $\kappa = (N+1) + k\max\{r_i\}(3N-2)$. Suponha*

(i) $H(\omega) = H(\omega')$.

(ii) $j_0^\kappa(\omega) = j_0^\kappa(\omega')$

Então $\mathcal{F}_\omega \sim_{an} \mathcal{F}_{\omega'}$

Dito em outras palavras: Sejam $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(U_k, A; n; r_1, \ldots, r_n)$ e $I(\mathcal{F}) := \{\omega' \in \mathcal{D}_0^k(n; r_1, \ldots, r_n) | H(\mathcal{F}) = H(\tilde{\mathcal{F}_{\omega'}})\}$. Os elementos das fibras da aplicação

$$j_0^\kappa : I(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathbb{C}^M$$

onde $M = \frac{\kappa(\kappa+1) - N(N+1)}{2}$ são todos analiticamente equivalentes. Quando a curva A tem gênero g, conjecturamos o seguinte:

Dada $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(N, A; n; r_1, \ldots, r_n)$ onde $N \longrightarrow A$ é um fibrado em linhas que satisfaz $c_1(N) < min\{0, 2-2g\}$, seja $I(\mathcal{F}) := \{\mathcal{F}' \in \mathcal{F}(N, A; n; r_1, \ldots, r_n) | H(\mathcal{F}) = H(\mathcal{F}')\}$. Então existe uma aplicação

$$j : I(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathbb{C}^M$$

onde $M < \infty$ depende só de $k, n, r_1, \ldots, r_n$, cujas fibras estão constituídas por folheações analiticamente equivalentes. O problema quando a curva não é racional é que não temos o espaço de jatos das formas na origem para construir a aplicação.

Do ponto de vista de classificação de singularidades de folheações em $(\mathbb{C}^2, 0)$ os elementos de $\mathcal{D}_0^k(n; r_1, \ldots, r_n)$ definem singularidades dicríticas que são singulares após uma explosão (portanto não pertencem ao conjunto $\mathcal{D}_0$ definido no Capítulo 2). O Teorema 3.14 providencia uma classificação para ditas singularidades.

Para a prova usaremos repetidamente o resultado seguinte:

Teorema 3.15 *Dado D um divisor efetivo em U_k existe uma função holomorfa $f : U_k \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $div f = D$ se e somente se $D \cdot A = 0$*

Prova: Segundo o Lema 3.2 a aplicação de restrição $Pic(U_k) \longrightarrow Pic(A)$ é injetiva. Como A é racional, a classe de Chern de um fibrado determina sua classe analítica, e portanto o fibrado associado a D é trivial se e somente se $D \cdot A = 0$. ∎

Prova do Teorema 3.14: Consideraremos ζ uma raíz k-ésima primitiva de 1 (se $k = 1$ entao $\zeta = 1$). Sejam $I(X,Y) = (\zeta X, \zeta Y)$, σ e ρ construidas como no Lema 3.8. Definimos $\tilde{\mathcal{F}} := \mathcal{F}_{\tilde{\omega}}$ e $\tilde{\mathcal{F}}' := \mathcal{F}_{\tilde{\omega}'}$. Da condição (i), temos que $D_{\mathcal{F}} = D_{\mathcal{F}'} = \sum_{i=1}^{n}(r_i+1)p_i$, e $\Sigma_\omega = \Sigma_{\omega'} = \mathrm{supp} D_{\mathcal{F}}$

A Prova do teorema é feita nos passos 1, 2 e 3 descritos na seção 2.1.3.

Prova do Passo 1:

Sejam $\tilde{C}_1, \ldots, \tilde{C}_n$ as folhas de $\tilde{\mathcal{F}}$ em U_k que tangenciam com a curva A com ordens $r_1+1, \ldots, r_n+1$ nos pontos $p_1, \ldots, p_n \in A$ respectivamente. Podemos supor $p_i = (t_i, 0)$ na carta (t,x). Ao longo da prova suporemos s tal que $j_0^s(\omega) = j_0^s(\omega')$ desconhecido, e após o argumento ficará claro que as construções que faremos fazem sentido se $s \geq \kappa$.

Seja $\tilde{C}_\infty$ a folha de $\tilde{\mathcal{F}}$ pelo ponto $(0,0)$ da carta (u,y) e $E := \{u = 0\}$. Escolhendo $m_i, l_i \in \mathbb{N}$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ de forma que $m_i - l_i k + r_i + 1 = 0$, garantimos via o Teorema 3.15, que os divisores $D_i = m_i E + l_i A + \tilde{C}_i$ são principais. Isto é, existe uma função holomorfa $\tilde{f}_i : U_k \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{div}\tilde{f}_i = D_i$. Note-se que os coeficientes $m_i, l_i \in \mathbb{N}$ só dependem da classe de equivalência topológica da folheação, e que podemos supor que $0 \leq m_i < k$ para todo i. De forma similar, o divisor $(\sum m_i)E + (N+n+k)\tilde{C}_\infty + ((\sum l_i)+1)A = \mathrm{div}\tilde{f}_\infty$ para uma função holomorfa $\tilde{f}_\infty : U_k \longrightarrow \mathbb{C}$. Definimos $f_i(X,Y) = \tilde{f}_i \circ \rho(X,Y)$. De fato, podemos escolher $f_i(X,Y) = X^{m_i}(Y^{r_i+1} + \sum_{j=0}^{r_i} \alpha_j^i(X^{r_i+1}))X^{r_i+1-j}Y^j)$ com α_j^i holomorfas, que seria o equivalente do polinômio de Weierstrass de C_i, o pull-back de $\tilde{C}_i$ por ρ, adaptado para ser invariante por I. Desta forma podemos definir a função meromorfa em U_k:

$$\tilde{g} = \frac{\tilde{f}_\infty}{\prod_{i=1}^{n} \tilde{f}_i}$$

que satisfaz

$$\mathrm{div}\tilde{g} = (N+n+k)\tilde{C}_\infty + A - \sum_{i=1}^{n} \tilde{C}_i$$

O conceito de folheação companheira nos pontos de A (ver definição 2.29) continua fazendo sentido. Sem perder generalidade podemos supor que a folheação $\mathcal{G} = \{g = \tilde{g} \circ \rho = cte\}$ é uma folheação companheira para $\mathcal{F}$ com curvas de tangências. Se não forem multiplicamos por uma função holomorfa não nula adequada.

Sejam $\tilde{C}'_1, \ldots, \tilde{C}'_n$ as folhas de $\tilde{\mathcal{F}}'$ em U_k que tangenciam com a curva A com ordens $r_1+1, \ldots, r_n+1$ nos pontos $p_1, \ldots, p_n \in A$ respectivamente, e $\tilde{C}'_\infty$ a folha de $\tilde{\mathcal{F}}'$ pelo ponto $(\infty, 0)$. Por um argumento análogo ao da seção 2.1.3 podemos escolher $\tilde{f}'_i : U_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfas tais que $\mathrm{div}\tilde{f}'_i = m_i E + l_i A + \tilde{C}'_i$ para $i = 1, \ldots, n$, $\mathrm{div}\tilde{f}'_\infty = (\sum m_i)E + (N+n+k)\tilde{C}'_\infty + ((\sum l_i)+1)A$ de forma que, definindo as funções holomorfas em $(\mathbb{C}^2,0)$ $f_i'(X,Y) := \tilde{f'}_i \circ \rho(X,Y)$, temos

$$j_0^{(s-(N+1)+m_i+r_i+1)}(f_i) = j_0^{(s-(N+1)+m_i+r_i+1)}(f_i') \tag{3.10}$$

para $i = 1, \ldots, n$.

Definimos a função meromorfa em U_k:

$$\tilde{\breve{g}} = \frac{\tilde{f}'_\infty}{\prod_{i=1}^{n} \tilde{f}'_i}$$

Em U_k consideramos as folheações $\tilde{\mathcal{G}} = \{\tilde{g} = cte\}$ e $\tilde{\breve{\mathcal{G}}} = \{\tilde{\breve{g}} = cte\}$, e em $(\mathbb{C}^2,0)$ consideramos as folheações $\mathcal{G} = \{g := \tilde{g} \circ \rho(X,Y) = cte\}$, e $\breve{\mathcal{G}} = \{\breve{g} := \tilde{\breve{g}} \circ \rho(X,Y) = cte\}$. Pela construção, $(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{G}})$ e $(\tilde{\mathcal{F}}', \tilde{\breve{\mathcal{G}}})$ são pares de companheiras com curvas de tangência.

Desta forma temos:

$$D := tang(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = (N+n+k)C_\infty + \sum_{i=1}^{n}(C_i + T_i)$$
$$D' := tang(\mathcal{F}', \breve{\mathcal{G}}) = (N+n+k)C'_\infty + \sum_{i=1}^{n}(C'_i + T'_i)$$

onde T_i é uma curva em $(\mathbb{C}^2,0)$ (em geral singular em 0) com cone tangente $(Y - t_iX)^{r_i}$, e transversal a $\mathcal{F}$ e a $\mathcal{G}$ em $T_i \setminus 0$. Analogamente, T'_i é uma curva em $(\mathbb{C}^2,0)$ (em geral singular em 0) com cone tangente $(Y - t_iX)^{r_i}$, e transversal a $\mathcal{F}'$ e a $\breve{\mathcal{G}}$ em $T'_i \setminus 0$. Seja $\varphi_i := \varphi_{T_iT'_i}$ a correspondência entre folhas de $\mathcal{F}$ e folhas de $\mathcal{F}'$ expressada entre T_i e T'_i. Podemos repetir o argumento da prova do Lema 2.30, mas agora precisamos controlar que a função $(\phi + H'\psi)$ construída seja invariante por I. Com esse fim, provaremos que as parametrizações de Puiseux de T_i e T'_i são da forma seguinte:

$$\begin{aligned} w &\longrightarrow (w^{r_i}, w^{r_i}P_i(w^k)) \in T_i \\ w &\longrightarrow (w^{r_i}, w^{r_i}P'_i(w^k)) \in T'_i \end{aligned} \tag{3.11}$$

onde P_i e P'_i são funções holomorfas numa variável com $j^{K(s)+N}(P_i) = j^{K(s)+N}(P'_i)$, e $P_i(0) = t_i$. Para provar as equações (3.11) basta considerar a parametrização na carta (t,x) do transformado estrito de T_i: $w \mapsto (P(w), w^{r_i})$ com $P(w) = t_i + A_iw^{r_i} + \ldots$, e fazer as mudanças de variáveis adequadas. Para provar a relação entre os jatos basta controlar os jatos de um par de equações que definem T_i e T'_i, por exemplo as que surgem de $dg \wedge \omega \equiv 0$, e $d\breve{g} \wedge \omega' \equiv 0$ usando um argumento análogo ao de (2.34).

Portanto os quocientes que aparecem no Lema A.1 são invariantes por I. As funções

$$\phi_i := \left(\frac{f_\infty \circ \varphi_i^{-1}}{f'_\infty}\right) \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{f'_i}{f_i \circ \varphi_i^{-1}}$$

são obviamente invariantes por I devido ao fato que $\varphi_i \circ I = I \circ \varphi_i$. Para poder interpolá-las precisamos que $\frac{K(s)}{\max\{r_i\}} \geq N-1$. Nesse caso a função holomorfa ϕ que as interpola é invariante por I. Para poder interpolar as funções ψ_i definidas por

$$d\phi \wedge \omega'(q) + \psi_i(q)(dH' \wedge \omega'(q)) = 0$$

a uma função ψ precisamos controlar os jatos de anulação das ψ_i e que todas elas tenham a mesma ordem de simetria em relação a I. O segundo fato é satisfeito pela definição das ψ_i, e essa ordem de simetria satisfaz que $H'\psi$ é invariante por I. Para o controle dos jatos usamos as mesmas afirmações de (2.41), mas lembremos que neste caso $K(s) = \frac{s-(N+1)}{k}$. A cota para s é:

$$s \geq (N+1) + k\max\{r_i\}(3N-2) =: \kappa$$

Isto termina a prova do Passo 1.
<u>Prova do Passo 2:</u> Aplicar o Lema 2.28.
<u>Prova do Passo 3:</u> Em relação ao caso $k=1$ só muda o índice da singularidade de $\tilde{\mathcal{G}}$ e $\tilde{\mathcal{G}}'$ no ponto ∞. O índice em geral é $\frac{-1}{n+N+k}$.

Isto finaliza a prova do teorema 3.14. ∎

Capítulo 4

Conclusões e Perspectivas

Os Teoremas apresentados nesta tese provam que para as folheações de $\mathcal{D}_0$ e a generalização a $\mathcal{F}(U_k, \mathbb{C}\mathrm{P}^1)$ existe um invariante analítico de tipo funcional (a estrutura transversal) e uma quantidade finita de valores numéricos (associados ao jato) que nos permitem decidir se dois elementos são analiticamente conjugados. Apesar de não constituir uma prova, os resultados indicam na direção que o restante de invariantes são numéricos e em número finito. A vantagem principal em relação aos trabalhos existentes ([K],[M],[ORV]), radica no método usado para a prova dessas afirmações, que abre uma brecha na futura identificação e interpretação geométrica desses invariantes e eventualmente permitirá determinar as formas normais (para folheações de $\mathcal{D}_0$). No caso não trivial mais simples provamos que a estrutura transversal é o único invariante.

Ao longo do texto citamos algumas questões que continuam abertas, e que constituiriam uma continuação natural deste trabalho. A saber:

- Decidir se, fixada a estrutura transversal e a classe analítica da curva redutível formada pelas separatrizes tangentes ao divisor módulo biholomorfismos tangentes às simetrias da estrutura transversal, determinamos completamente a classe analítica da folheação. Caso contrário, identificar o restante de invariantes.

- Interpretar geométricamente e estender ao caso geral a definição do invariante c definido em [ORV] para elementos genéricos de $\mathcal{D}_0(n)$.

- Determinar um critério de existência de representantes com integral primeira Liouvilliana nas classes analíticas de $\mathcal{D}_0$ em termos, por exemplo, da estrutura transversal.

- Generalizar o resultado obtido para superfícies de Riemann de gênero qualquer mergulhadas em superfícies complexas: mostrar que para elementos de $\mathcal{F}(U, A)$ com estrutura transversal fixada existem um número finito de parâmetros numéricos que permitem decidir se dois elementos são analiticamente equivalentes.

- Generalizar a construção de exemplos em $\mathcal{F}(U, A)$ dada no Teorema 3.4 para folheações de codimensão um em ambientes de dimensão superior. Na mesma linha generalizar os teoremas de determinação finita nesse caso também.

- Estudar a influência dos resultados no caso de $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ mergulhado com autointerseção positiva. Por exemplo folheações regulares numa vizinhança de uma reta em $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ e relações dos resultados locais com a estrutura global da folheação singular obtida após extensão ao espaço todo. Nesse caso estudar as folheações cuja estrutura transversal tem estrutura de grupo, e não apenas de pseudogrupo.

Apêndice A

Lema de Interpolação

Apresentaremos aqui uma adaptação aos casos que nos interessa de um Teorema de Interpolação de Funções Holomorfas devido a Cartan (ver [Car]):

Lema A.1 *Para cada* $i \in \{1, \ldots, n\}$*, seja* $T_i = \{(X,Y) \in \mathbb{C}^2 | Y^{r_i} + \sum_{j=0}^{r_i-1} \alpha_j(X) Y^j = 0\}$ *um germe de conjunto analítico irredutível . Seja* $x \longrightarrow (x^{r_i}, \tilde{P}_i(x))$ *a parametrização de Puiseux de* T_i *e* $\nu_i : T_i \longrightarrow \mathbb{C}$ *uma função com* $\nu_i(0,0) = a \in \mathbb{C}$ *(independe de i). Suponhamos que* $\tilde{P}_i(x) = A_i x^{r_i} + \ldots$ *para* $A_i \in \mathbb{C}$ *com* $A_i^{r_k} \neq A_j^{r_k}$ *se* $i \neq j$ *e* $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$*, e que* $\nu_i(x^{r_i}, \tilde{P}_i(x)) = a + b_i x^{l_i} + \ldots$ *é holomorfa. Se* $l := min \frac{l_i}{r_i} \geq (\sum_{i=1}^{n} r_i) - 1 =: N - 1$*, então existe uma função holomorfa* $\nu \in \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^2,0)}$ *tal que*

- $\nu|_{T_i} = \nu_i$
- $d\nu(X,Y) = X^{l-N} \eta(X,Y)$ *para uma 1-forma holomorfa* η*.*

Em outras palavras, ν estende holomorficamente a uma vizinhança de $(0,0)$ em $\mathbb{C}^2$ as funções ν_i definidas nos subconjuntos analíticos T_i (de dimensão 1).

Prova do Lema A.1: Escolhemos para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ um ramo $(\cdot)^{\frac{1}{r_i}}$ da raíz r_i-ésima, definidos num disco. Seja ζ_i uma raíz r_i-ésima primitiva da unidade. Cada T_i possui r_i ramos. Indexamos com j o conjunto de todos os ramos da soma T de todos os T_i: Seja $r_0 := 0$ e para $j \in \{1, \ldots, N\}$ definimos $P_j(X) = \tilde{P}_i(\zeta_i^{[j]} X^{\frac{1}{r_i}})$ onde $[j] = j - (r_0 + \ldots + r_{i-1})$ se $j \in \{r_0 + \ldots + r_{i-1} + 1, \ldots, r_0 + \ldots + r_i\}$. Claramente $(X, P_j(X)) \in T$. A expressão

$$\nu(X,Y) := \sum_{i=1}^{N} (\prod_{j \neq i} \frac{(Y - P_j(X))}{(P_i(X) - P_j(X)}) \nu_i(X, P_i(X)) \tag{A.1}$$

define uma função univaluada e contínua em $(\mathbb{C}^2,0)$ com $\nu(p)=\nu_i(p)$ para $p\in T_i$. Com efeito, observemos que, se escrevemos $X=re^{it}$ para $t\in[0,2\pi)$ e $r\in(0,\varepsilon)$ temos que

$$\lim_{t\to 2\pi}\nu(re^{it},Y)=\nu(r,Y) \tag{A.2}$$

Isto é devido ao fato que existe uma permutação σ do conjunto $\{1,\dots,N\}$ que não fixa nenhum elemento e de forma que $\lim_{t\to 2\pi}P_j(re^{it})=P_{\sigma(j)}(r)$. Portanto, o limite (A.2) só permuta os somandos da expressão (A.1), sem alterar o valor da soma. Assim, até agora ν é uma função contínua e trivialmente holomorfa em $(\mathbb{C}^2,0)\setminus\{X=0\}$. Provaremos que as condições adicionais do lema garantem que ν é holomorfa em $(\mathbb{C}^2,0)$.

Definimos $K:=\mathcal{M}(X)$ o corpo de funções meromorfas na variável X, e $\bar{K}$ seu fecho algébrico. Por construção as funções $P_j(X)$ pertencem a $\bar{K}$, pois são raízes de polinômios de $K[Y]$. Sabemos que $P_i\neq P_j$ se $i\neq j$. Portanto o polinômio de $\bar{K}[Y]$ de grau $N-1$ definido por

$$\Big(\sum_{i=1}^{N}\Big(\prod_{j\neq i}\frac{(Y-P_j(X))}{(P_i(X)-P_j(X))}\Big)a\Big)-a \tag{A.3}$$

tem N raízes diferentes, e portanto é nulo. Dito em outras palavras, a interpolação da função constante $a\in\mathbb{C}$ definida nos T_i é a função constante a em $(\mathbb{C}^2,0)$. Da condição $A_i^{r_k}\neq A_j^{r_k}$ se $i\neq j$ obtemos que $|P_i(X)-P_j(X)|=|X||h_{ij}(X)|$ para uma função contínua h_{ij} tal que $h_{ij}(0)\neq 0$ e $|h_{ij}(X)|$ acotada inferiormente numa vizinhança de 0. Das condições sobre ν_i obtemos $|\nu_i(X,P_i(X))-a|\leq |X|^{N-1}h_i(|X|)$ para funções reais contínuas h_i definidas numa vizinhança de 0. Assim,

$$\begin{aligned}|\nu(X,Y)-a| &= \Big|\sum_{i=1}^{N}\Big(\prod_{j\neq i}\frac{(Y-P_j(X))}{(P_i(X)-P_j(X)}\Big)(\nu_i(X,P_i(X))-a)\Big|\\ &\leq \sum_{i=1}^{N}\Big(\prod_{j\neq i}\frac{|Y-P_j(X)|}{|P_i(X)-P_j(X)|}\Big)|\nu_i(X,P_i(X))-a|\\ &\leq \Big(\sum_{i=1}^{N}\Big(\prod_{j\neq i}\frac{|Y-P_j(X)|}{|h_{ij}(X)|}\Big)h_i(|X|)\Big)\frac{|X|^{N-1}}{|X|^{N-1}}\longrightarrow 0\end{aligned} \tag{A.4}$$

quando $(X,Y)\longrightarrow(0,0)$. De forma similar mostra-se que para Y_0 pequeno,

$$\lim_{(X,Y)\to(0,Y_0)}\nu(X,Y)=(a+Y_0^{N-1}\Big(\sum_{i=1}^{N}\Big(\prod_{j\neq i}\frac{1}{h_{ij}(0)}\Big)h_i(0)\Big)) \tag{A.5}$$

Portanto ν estende continuamente a $(\mathbb{C}^2,0)$ e ela é holomorfa em $(\mathbb{C}^2,0)\setminus\{X=0\}$. Conseqüentemente ela é holomorfa em $(\mathbb{C}^2,0)$.

Para a prova de (ii) escrevemos $\nu(X,Y) = \sum_{j=0}^{N-1} a_j(X)Y^j$ onde $a_0(X) - a$ e $a_j(X)$ são holomorfas em X. Pelo argumento da equação (A.4) elas se anulam até ordem $l-(N-1)$ para $j=1,\dots,N-1$. Desta forma,

$$\frac{\partial \nu}{\partial Y}(X,Y) = \sum_{j=1}^{n-1} j a_j(X) Y^{j-1}$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial X}(X,Y) = \sum_{j=1}^{n-1} a_j'(X) Y^{j} \tag{A.6}$$

Ambas derivadas se anulam até ordem $l-(N-1)-1 = l-N$ na variável X. Escrevemos $\eta := \frac{d\nu(X,Y)}{X^{l-N}}$. ■

Referências Bibliográficas

[BPV] Barth, Peters, Van Ven, *Compact complex surfaces*, Springer Verlag, 1984.

[BMS] Berthier, M.; Meziani, R.; Sad, P., *On the classification of nilpotent singularities*, Bull. Sci. Math. 123 (1999), no. 5, p. 351-370.

[Br1] Brunella, M., *Feuilletges Holomorphes sur les surfaces complexes compactes*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 4e. série, t. 30, 1997, p. 569 à 594.

[Br] Brunella, M., *Birational theroy of foliations*, IMPA, Rio de Janeiro, 2000.

[CM1] Camacho, C., e Movasati, H., *Neigbourhoods of Analytic Varieties*, Monografías del IMCA n. 35, Perú, 2003

[CMS] Camacho, C., Movasati, H., Sad, P. *Fibred neighbourhoods of curves in surfaces*, Journal of Geometric Analysis, Vol. 13 No. 1, p.55-66 (2003)

[CS] Camacho, C., Sad, P. *Invariant varieties through holomorphic vector fields*, Ann. Math. 115 (1982), p. 579-595

[CS2] Camacho,C., Sad, P., *Pontos Singulares de equações diferenciais analíticas*, 16^o Colóquio Brasileiro de Matemática, Publ. do IMPA, 1987

[CS3] Camacho,C., Sad, P., *Topological classification and bifurcations of holomorphic flows with resonances in* C^2, Invent. Math. 67 (1982), no. 3, p. 447-472

[Ca] Câmara, L. M. *Invariants of germs of analytic differential equations in the complex plane*, An. Acad. Brasil. Cinc. 77 (2005), no. 1,p. 1-11.

[Car] Cartan, H., *Sur les fonctions de deux variables complexes*, Bulletin des Sciences Mathematiques 54, 1930,p. 99-116.

[CM] Cerveau, D. et Mattei, J.F., *Formes integrables holomorphes singulières*, Asterisque 97, (1982).

[CeMo] Cerveau, D., Moussu, R., *Groupes d'automorphismes de* $(C, 0)$ *et* *ï¿$\frac{1}{2}$uations diffï¿$\frac{1}{2}$entielles* $ydy + \cdots = 0$ Bull. Soc. Math. France 116 (1988), no. 4, 459–488 (1989).

[D] Dulac, H., *Sur les points dicritiques*, J. Math. Pure et Appl, 6ème série, t. II, Vol 61, (1906), p. 381-403

[GH] P. Griffiths and J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley 1978

[Gu] Gunning, R.C, *Lectures on Riemann Surfaces*, Princeton Mathematical Notes, 1966

[I1] Ilyashenko, Y., *Nonlinear Stokes Phenomena*, AMS, Providence, 1993

[I2] Ilyashenko. Y., *Centennial History of Hilbert's 16th. Problem*, Bull. of the AMS, Vol 39, Nr. 3, 2002, p. 301-354

[K] Klughertz, M., *Feuilletages holomorphes à singularité isolée ayuant une infinité de courbes integrales*, Thèse Universite Paul Sabatier de Toulouse, 1988.

[LN1] Lins Neto, A., *Construction of singular holomorphic vector fields and foliations in dimension two*, Journal of Diff. Geom. 26 (1987) 1-31

[LN2] Lins Neto, A., *Complex codimension one foliations leaving a compact submanifold invariant*, Dynamical Systems and bifurcation theory, Rio de Janeiro (1985), p. 295-317

[MM] Mattei, J.F , Moussu, R. *Holonomie et intégrales premières*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup(4) 13 (1980), p. 469-523

[M] Mattei, J.F. *Modules de feuilletages holomorphes singuliers. I. Équisingularité*, Invent. Math. 103 (1991), no. 2, p. 297-325

[MS] Mattei J.F., Salem, E.,*Modules formels locaux de feuilletages holomorphes* Prepublication 274, Laboratoire E. Picard, Toulouse, France (2004).

[Mez] Meziani, R., *Classification analytique des équations différentielles* $ydy + \ldots = 0$ *et espace de modules*, Bol. Soc. Bras. Mat. Vol 27, No. 1, 23-53, 1996

[ORV] Ortiz-Bobadilla, Rosales-Gonzalez, Voronin, *Rigidity theorems for generic holomorphic germs of dicritic foliations and vector fields in* $(\mathbb{C}^2, 0)$, Publicaciones Preliminares, Instituto de Matemáticas, UNAM, Mexico, 2003

[ORV1] Ortiz-Bobadilla, L., Rosales-Gonzalez, E., Voronin, S.M. *Rigidity theorem for degenerated singular points of germs of holomorphic vector fields in the complex plane*, J. Dynam. Control Systems 7 (2001), no. 4, p.553-599.

[Suz] Suzuki, M., *Sur les intégrales premières de certains feuilletages analytiques complexes.* Fonctions de plusieurs variables complexes, III, pp. 53-79, 394, Lecture Notes in Mathematics, 670, Springer, Berlin, 1978

[T] Teissier, B., *Introduction to curve singularities*, Singularity theory (Trieste, 1991), 866–893, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1995.

[VMY1] Voronin, S. M.; Meshcheryakova, Yu. I.*Analytic classification of generic degenerate elementary singular points of germs of holomorphic vector fields on the complex plane* (Russian) Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. 2002, , no. 1, 13–16; translation in Russian Math. (Iz. VUZ) 46 (2002), no. 1, p. 11-14

[VMY2] Voronin, S. M.; Meshcheryakova, Yu. I. *Analytic classification of germs of holomorphic vector fields with a degenerate elementary singular point* (Russian) Vestnik Chelyab. Univ. Ser. 3 Mat. Mekh. Inform. 2003, no. 3(9), p. 16-41

[W] Whitney, H. *Complex Analytic Varieties*, Addison Wesley Publishing Company, 1972

[Zar] Zariski, O., *Le problème des modules pour les branches planes.*, Centre de Math. de l' École Polytechnique, 1975, Reédition Hermann, 1986