

Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

**Grades Reduzidas na Resolução Espectral  
das Equações de Águas Rasas**

por

**José de Arimatéia Fernandes**

sob orientação do

**Prof. Dan Marchesin**

Rio de Janeiro - RJ

06 de Julho de 2004

**Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada  
Curso de Doutorado em Matemática**

**Grades Reduzidas na Resolução Espectral  
das Equações de Águas Rasas**

por

**José de Arimatéia Fernandes**

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Doutorado em Matemática  
- IMPA, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Área de Concentração: Dinâmica dos Fluidos

Aprovada por:

---

**Dr. André Nachbin ( IMPA )**

---

**Dr. Bruno Costa ( UFRJ )**

---

**Dra. Monique Moura Carmona ( IMPA )**

---

**Dr. Pedro Leite da Silva Dias ( INPE / USP )**

---

**Dr. Dan Marchesin ( IMPA )  
Orientador**

**06 de Julho de 2004**

## Agradecimentos

Primeiramente, agradeço ao Prof. Dan Marchesin pela orientação e ensinamentos, presteza, incentivo e apoio, os quais nunca me faltaram durante todo o meu doutorado.

Também gostaria de agradecer:

À Monique Moura Carmona e ao Prof. Bruno Costa, pelos comentários e sugestões na tese.

À CAPES pelo apoio financeiro por meio do programa PICDT.

À minha família pela força, carinho e solidariedade sempre presentes. Em especial à minha mãe D. Beatriz.

À minha noiva, Joelma Dias, que soube suportar minha impaciência e ausência em muitas horas.

Ao Departamento de Matemática e Estatística da UFCG pelo apoio e companheirismo dos colegas professores e funcionários. Em especial ao chefe do Departamento, Prof. Antonio José da Silva. Também ao Prof. Aparecido Jesuíno de Souza, que me enveredou pelo caminho da Dinâmica dos Fluidos. Aos Profs. Antonio Luiz de Melo e Claudianor Oliveira pela amizade.

Ao grupo de Dinâmica dos Fluidos do IMPA pela interação no Laboratório e nos Seminários. Em especial ao Prof. André Nachbin e aos colegas Paul Krause e Milton Braitt.

Aos colegas do IMPA, em especial ao Luis Bladismir, Sérgio Muñoz, Bernardo Nunes e Mahendra Panthee.

Ao IMPA, pela Instituição de excelência que representa. Aos seus professores e funcionários.

Ao meus colegas cariocas e ao Rio de Janeiro, por ainda ser uma cidade maravilhosa.

## Dedicatória

A Deus, por tudo.

## Resumo

O objetivo deste trabalho é analisar o erro na parte espectral de modelos de circulação geral devido ao uso de grade reduzida em vez de grade plena convencional.

O cálculo dos coeficientes de Fourier-Legendre em uma expansão em harmônicos esféricos pode ser numericamente exato quando uma grade Gaussiana normal é utilizada, mas há introdução de erro devido ao uso de grade reduzida.

Neste trabalho, deduzimos uma fórmula para o cálculo do erro introduzido pelo uso de grades reduzidas na avaliação de harmônicos esféricos. Aplicamos esta fórmula para obter uma estimativa quadrática do erro associado à grade reduzida. Aplicamo-la também na avaliação do erro em harmônicos de Hough.

Consideramos o sistema de equações de águas rasas linearizadas no plano, para utilizarmos o método espectral, usando série de Fourier no quadrado periódico, e analisarmos o efeito do uso de grades reduzidas na evolução das ondas planares que são solução do referido sistema. Estamos interessados em estudar apenas a parte linear do método, que é a parte espectral. Este estudo foi feito com a intenção de avaliar quaisquer erros, inclusive *aliasing*, mais facilmente que na esfera. Há um erro não linear associado ao transporte lagrangeano, o qual não é tratado, porque está fora do escopo desta tese. Mostramos que os únicos erros lineares espaciais introduzidos pela redução da grade, além do erro de truncamento, são os erros de *aliasing*.

Com esses resultados obtidos, fazemos um estudo detalhado do erro de truncamento espectral em conjunto com o erro de *aliasing* em transformadas de Fourier-Legendre. Concluimos que existe margem para conseguir grades reduzidas melhores que as de Courtier-Naughton (CN) e Hortal-Simmons (HS), do ponto de vista do balanço entre erro e custo. Isto é, a grade de (HS) tem erro exagerado, conforme Courtier-Naughton perceberam e corroboramos neste trabalho, mas a grade de (CN) é cara demais, pois reduz exageradamente o erro.

O objetivo deste estudo é que ele possa guiar a especificação ótima da redução da grade em modelos operacionais de circulação global espectrais semilagrangeanos.

## Abstract

The objective of this work is to analyze the error in the spectral part of general circulation models when reduced grids are used, instead of the conventional Gaussian grid.

The numerical calculation of the Fourier-Legendre coefficients in the spherical harmonic expansion when a normal Gaussian grid is used can be done with good accuracy, but there is introduction of errors by the use of reduced grids.

In this work we obtain a formula for the calculation of the error generated by the use of reduced grids in the evaluation of spherical harmonics. We apply this formula to get a quadratic estimate of the error associated with the reduced grid and also to evaluate the error in Hough harmonics.

We apply the spectral method, using Fourier series in the periodic square, for the analysis of the errors introduced by the use of reduced grids in the evolution of plane waves that are solutions of a linearized system of shallow water equations in the plane. We interested in studying only the linear part of the method, that is the spectral part. This study was made with the intention to evaluate any errors, including aliasing, more easily than in the sphere. There is a nonlinear error associated with the lagrangean transport, wich is not treated, because it is not part of the target of this thesis. We show that the errors of aliasing are the only spatial errors in the linearized equations, besides the spectral truncation error.

Once these results were obtained, we made a detailed study of the spectral truncation error together with the aliasing in Fourier-Legendre transforms. We show that there is a gap between Courtier-Naughton and Hortal-Simmons reduced grids, in sense of balance between error and cost. The objective of this analysis is to serve as a guide to optimal balance specification of reduced grids in operational semilagranean spectral global circulation models.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Ondas em Meios Homogêneos e Heterogêneos</b>	<b>3</b>
2.1	Propagação em Meio Homogêneo Anisotrópico . . . . .	3
2.2	Reflexão e Transmissão de Ondas . . . . .	6
2.2.1	Interação das Ondas de Gravidade com a Interface . . . . .	7
2.2.2	Interação da Onda de Rossby com a Interface . . . . .	9
2.3	Método de Diferenças Finitas . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Análise da Parte Espectral do Método Semilagrangeano</b>	<b>11</b>
3.1	Águas Rasas Discretizadas em Grade Uniforme . . . . .	11
3.2	O Método Numérico Espectral em Grades Reduzidas . . . . .	14
3.3	O Erro de Aliasing . . . . .	16
<b>4</b>	<b>A DFT Unidimensional</b>	<b>22</b>
4.1	Propriedades da DFT . . . . .	22
4.2	A Fórmula de Poisson . . . . .	23
4.3	Decaimento dos Coeficientes de Fourier . . . . .	24
4.4	Erro nos Coeficientes de Fourier . . . . .	25
<b>5</b>	<b>A DFT Bidimensional em Grade Uniforme</b>	<b>26</b>
5.1	Propriedades . . . . .	26
5.2	A Fórmula de Poisson . . . . .	27
5.3	Decaimento dos Coeficientes de Fourier . . . . .	28
5.4	Erro nos Coeficientes de Fourier . . . . .	30
<b>6</b>	<b>A DFT Bidimensional em Grade Reduzida</b>	<b>31</b>
6.1	Propriedades . . . . .	31
6.2	A Fórmula de Poisson . . . . .	32
6.3	Erro nos Coeficientes de Fourier . . . . .	34
6.4	Erro na DFT <sup>2</sup> GR Inversa . . . . .	34
<b>7</b>	<b>Harmônicos Esféricos</b>	<b>36</b>
7.1	Decaimento dos Coeficientes de Fourier-Legendre . . . . .	38
7.2	Erro na Transformada de Fourier-Legendre . . . . .	39
7.2.1	Fórmula de Poisson para Grade Uniforme . . . . .	39
7.2.2	Fórmula de Poisson para Grade Reduzida . . . . .	41
7.3	Erro na Transformada Inversa de Fourier-Legendre . . . . .	43
<b>8</b>	<b>Erro na Avaliação de Expansões em Harmônicos Esféricos</b>	<b>45</b>
8.1	Erro na Avaliação de um Coeficiente Harmônico . . . . .	45
8.2	Erro em Combinação de Harmônicos Esféricos . . . . .	46
8.2.1	Erro na Norma do Máximo . . . . .	47
8.2.2	Erro na Norma Quadrática . . . . .	47
8.3	Erro na Avaliação de um Harmônico de Hough . . . . .	52
8.4	As Grades Reduzidas . . . . .	52

8.5	<b>Resultados Numéricos</b> .....	54
8.5.1	<b>Erro de <i>Aliasing</i> e Truncamento em Harmônicos Esféricos</b> .....	54
8.5.2	<b>Erro de <i>Aliasing</i> e Truncamento em Harmônicos de Hough</b> .....	54
8.6	<b>Cálculo da Energia Cinética com Aliasing</b> .....	55
8.7	<b>Conclusões</b> .....	57
	<b>Referências</b> .....	<b>58</b>
A	<b>As Equações de Águas Rasas na Terra</b> .....	<b>60</b>
B	<b>Identities para Funções Ondulatórias</b> .....	<b>63</b>
C	<b>Relação de Dispersão em Diferenças Finitas</b> .....	<b>65</b>
D	<b>Transformada de Legendre</b> .....	<b>67</b>
D.1	<b>Funções de Legendre</b> .....	67
D.2	<b>Transformada de Legendre Discreta</b> .....	69
E	<b>Harmônicos Esféricos</b> .....	<b>70</b>
F	<b>Harmônicos de Hough</b> .....	<b>71</b>
F.1	<b>Energia Cinética de um Estado típico da Atmosfera</b> ..	74
F.2	<b>Programas utilizados</b> .....	77

# 1 Introdução

O método espectral, especialmente combinado ao tratamento semilagrangiano dos termos de transporte, é muito eficiente computacionalmente quando usado em Modelos de Circulação Geral. A principal fonte de ineficiência é o excesso de pontos nas vizinhanças dos polos na grade Gaussiana utilizada em métodos espectrais convencionais, pois com o aumento da resolução dos modelos, os pontos polares se tornam mais próximos. A integração de modelos espectrais usando-se uma grade reduzida tem sido considerada por alguns autores, a ponto de ser usada regularmente. Como a grade reduzida tem poucos pontos ao longo dos círculos de latitude longe do equador, a vantagem no seu uso ocorre no sentido em que o erro não é exagerado, mas a redução de custo é substancial, uma vez que ela gera uma economia no excesso de cálculo. Hortal e Simmons [9] fizeram integrações de modelos espectrais nos quais a grade Gaussiana de pontos em que os termos não lineares são avaliados é reduzida. Então um problema no polo pode surgir do uso de uma grade gaussiana reduzida no método da transformada espectral, uma vez que altos números de ondas podem não ter uma boa representação nas regiões próximas aos polos, devido ao erro de *aliasing* que surge com a redução da grade. De fato, no trabalho de [9] foram notados problemas de ruídos nas vizinhanças dos polos na integração de modelos espectrais.

Neste trabalho, mostramos que no método espectral, a propagação de ondas de água rasa não sofre alterações por uso de grades reduzidas, como é o caso de diferenças finitas, mostrado por Elvius e Sündstrom [7] entre outros. Os únicos erros são devidos ao truncamento espectral (cuja teoria é bem conhecida) e ao *aliasing*. Por isso o nosso objetivo é deduzir uma fórmula para estimar o erro de *aliasing* combinado com o truncamento espectral, no cálculo dos coeficientes de Fourier-Legendre devido à redução da grade. Essa fórmula avalia o erro do método espectral pelo uso de uma grade reduzida no cálculo dos coeficientes espectrais. Analisamos esse erro, na norma do máximo, no caso de um harmônico de Hough e também obtemos uma estimativa geral para o erro na norma quadrática de uma combinação linear de harmônicos esféricos.

No capítulo 2, descrevemos as equações de águas rasas linearizadas, que analisamos no estudo de propagação de onda num meio heterogêneo, usando série de Fourier no quadrado periódico. Este estudo foi feito com a intenção de avaliar quaisquer erros, inclusive *aliasing*, mais facilmente que na esfera. Também obtemos soluções analíticas num domínio periódico. Com isto concluímos que no método espectral a propagação de ondas de água rasa lineares num meio heterogêneo não é alterada com a mudança de meio. No capítulo 3, tratamos destas equações discretizadas temporalmente e concluímos que o método espectral não sofre com variações de malha do tipo grade reduzida. Este comportamento difere dos métodos de diferenças finitas, em que a velocidade de propagação numérica das ondas depende da grade e, com isto, são geradas reflexões espúrias e transmissões alteradas.

A única limitação dos métodos espectrais, introduzida pelo uso de grade reduzida, é o erro de *aliasing* combinado com o truncamento espectral, que são os objetos de estudo dos capítulos restantes. No capítulo 4, fazemos uma revisão dos resultados clássicos de transformada de Fourier discreta unidimensional. Nos capítulos 5 e 6, deduzimos fórmulas para o erro de *aliasing* combinado ao truncamento espectral em

grade bidimensional uniforme e reduzida, respectivamente, usando transformadas de Fourier nas direções  $x$  e  $y$ . Já no capítulo 7, estas fórmulas de erro são deduzidas para o caso de transformadas de Fourier-Legendre, usando-se os harmônicos esféricos. Este é o capítulo central da tese.

No trabalho de Courtier e Naughton [5] foi sugerida uma grade reduzida com mais pontos nas latitudes mais próximas aos polos, que a grade reduzida introduzida por Hortal e Simmons. Isto faz com que o erro de *aliasing* diminua sensivelmente nas regiões polares. No capítulo 8, constatamos que o erro de *aliasing* combinado ao erro de truncamento espectral é pequeno, quando usamos a grade reduzida sugerida por [5] na avaliação de harmônicos de Hough. Mostramos que existe margem para conseguir grades reduzidas melhores que as de (CN) e (HS), no sentido de balanço entre erro e custo. Ou seja, a de (HS) tem erro exagerado, como Courtier-Naughton perceberam e corroboramos neste trabalho, mas a grade de (CN) é cara demais, pois reduz exageradamente o erro. Analisamos também o efeito do uso da grade reduzida no erro de *aliasing* combinado ao truncamento espectral na energia cinética dos harmônicos de Hough.

Obtemos uma estimativa do erro de *aliasing* juntamente com o truncamento espectral na norma quadrática, que permitirá determinar grades reduzidas otimizadas, no sentido de que o erro na representação em harmônicos esféricos seja menor que uma tolerância especificada.

## 2 Ondas em Meios Homogêneos e Heterogêneos

Neste capítulo usamos o modelo de águas rasas no plano, para analisar o efeito do uso de grade reduzida na evolução de ondas planares, onde adotamos uma grade reduzida planar como modelo de grade reduzida na esfera.

Com a motivação de estudar o efeito em métodos numéricos de grades não uniformes ou não isotrópicas, utilizamos inicialmente como modelo destes métodos numéricos, EDP's de evolução com ondas gravitacionais possuindo velocidades distintas nas direções  $x$  e  $y$ .

### 2.1 Propagação em Meio Homogêneo Anisotrópico

Consideramos o sistema de equações de água-rasa planar linearizado em torno do estado estacionário  $(U, V, \Phi)$  constante, com o vetor de onda  $\mathbf{c} = (c_x, c_y)$ , conforme o sistema (A.3) do apêndice A, possuindo componentes distintas nas direções  $x$  e  $y$ . Assim, obtemos o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + V \frac{\partial u}{\partial y} + c_x^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} & = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} + V \frac{\partial v}{\partial y} + c_y^2 \frac{\partial \phi}{\partial y} & = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + U \frac{\partial \phi}{\partial x} + V \frac{\partial \phi}{\partial y} + \Phi \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) & = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

num domínio plano  $0 \leq x \leq L_x$  e  $0 \leq y \leq L_y$ . As condições de contorno são periódicas tanto na direção  $x$  como na direção  $y$ .

Procuramos solução de (2.1) da forma

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ \phi \end{pmatrix} (x, y, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \alpha(k, l) e^{-i(w_x k x + w_y l y - w t)} \begin{pmatrix} u_{k,l}^0 \\ v_{k,l}^0 \\ \phi_{k,l}^0 \end{pmatrix},$$

onde denotamos

$$w_x = \frac{2\pi}{L_x} \text{ e } w_y = \frac{2\pi}{L_y}.$$

Substituindo esta solução em (2.1) e abandonando os índices  $k, l$  obtemos

$$\begin{pmatrix} w - U w_x k - V w_y l & 0 & -c_x^2 w_x k \\ 0 & w - U w_x k - V w_y l & -c_y^2 w_y l \\ -\Phi w_x k & -\Phi w_y l & w - U w_x k - V w_y l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^0 \\ v^0 \\ \phi^0 \end{pmatrix} = 0. \quad (2.2)$$

Introduzimos a notação

$$G_{k,l} = \sqrt{\Phi \left[ c_x^2 (w_x k)^2 + c_y^2 (w_y l)^2 \right]}. \quad (2.3)$$

Anulando o determinante da matriz (2.2) resulta a equação cúbica

$$(w - Uw_xk - Vw_y l) [(w - Uw_xk - Vw_y l)^2 - G_{k,l}^2] = 0. \quad (2.4)$$

Uma das raízes da equação (2.4) é

$$w_0 = Uw_xk + Vw_y l. \quad (2.5)$$

Para  $w \neq Uw_xk + Vw_y l$  obtemos ao extrair o valor de  $w$  na equação (2.4)

$$w_+ = Uw_xk + Vw_y l + G_{k,l} \quad (2.6)$$

ou

$$w_- = Uw_xk + Vw_y l - G_{k,l}. \quad (2.7)$$

O autovetor para o autovalor  $w_0$  dado em (2.5) é solução de

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -c_x^2 w_x k \\ 0 & 0 & -c_y^2 w_y l \\ -w_x k \Phi & -w_y l \Phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^0 \\ v^0 \\ \phi^0 \end{pmatrix} = 0. \quad (2.8)$$

Se  $k \neq 0$  ou  $l \neq 0$  então, sem perda de generalidade, supomos  $k \neq 0$ , pois o caso em que  $l \neq 0$  é análogo, logo

$$\begin{cases} \phi^0 = 0 \\ w_x k u^0 + w_y l v^0 = 0 \Rightarrow u^0 = -\frac{w_y l}{w_x k} v^0, \quad k \neq 0. \end{cases}$$

Assim, obtemos o autovetor

$$\mathbf{R}_0(k, l) = (-w_y l, w_x k, 0)^T. \quad (2.9)$$

Agora, o autovetor para o autovalor  $w_+$  dado em (2.6) é solução de

$$\begin{pmatrix} G_{k,l} & 0 & -c_x^2 w_x k \\ 0 & G_{k,l} & -c_y^2 w_y l \\ -w_x k \Phi & -w_y l \Phi & G_{k,l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^0 \\ v^0 \\ \phi^0 \end{pmatrix} = 0, \quad (2.10)$$

logo

$$\begin{cases} G_{k,l} u^0 - c_x^2 w_x k \phi^0 = 0 \\ G_{k,l} v^0 - c_y^2 w_y l \phi^0 = 0 \\ -w_x k \Phi u^0 - w_y l \Phi v^0 + G_{k,l} \phi^0 = 0 \end{cases}$$

e as duas primeiras equações acima nos dão

$$\begin{cases} u^0 = \frac{c_x^2 w_x k}{G_{k,l}} \phi^0 \\ v^0 = \frac{c_y^2 w_y l}{G_{k,l}} \phi^0 \end{cases}$$

que nos dá o autovetor

$$\mathbf{R}_+(k, l) = \left( c_x^2 w_x k, c_y^2 w_y l, G_{k,l} \right)^T. \quad (2.11)$$

De modo análogo, para o autovalor  $w_-$  dado em (2.7) obtemos o autovetor

$$\mathbf{R}_-(k, l) = \left( c_x^2 w_x k, c_y^2 w_y l, -G_{k,l} \right)^T. \quad (2.12)$$

Agora se  $kl = 0$ , por exemplo, supondo  $k = 0$  e  $l \neq 0$ , pois o caso  $k \neq 0$  e  $l = 0$  é análogo, então por (2.8), obtemos que  $\mathbf{R}_0 = (1, 0, 0)^T$  e por (2.10), segue que  $\mathbf{R}_+ = (0, c_y^2 w_y l, G_{0,l})^T$  e analogamente  $\mathbf{R}_- = (0, c_y^2 w_y l, -G_{0,l})^T$ .

Notemos que se  $k = l = 0$  em (2.8) e (2.10), então os autovetores  $\mathbf{R}_0$ ,  $\mathbf{R}_+$  e analogamente  $\mathbf{R}_-$  são constantes, que não tem interesse.

Portanto, demonstramos o seguinte

**Teorema 2.1** *A solução geral não estacionária do sistema (2.1) pode ser escrita na forma*

$$\mathbf{S}(x, y, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{l=-\infty \\ (k,l) \neq (0,0)}}^{\infty} \left[ \alpha_+(k, l) e^{-i(w_x k x + w_y l y - w_+ t)} \mathbf{R}_+ + \alpha_-(k, l) e^{-i(w_x k x + w_y l y - w_- t)} \mathbf{R}_- + \alpha_0(k, l) e^{-i(w_x k x + w_y l y - w_0 t)} \mathbf{R}_0 \right]$$

onde  $w_+$ ,  $w_-$  e  $w_0$  são os autovalores e  $\mathbf{R}_+(k, l)$ ,  $\mathbf{R}_-(k, l)$  e  $\mathbf{R}_0(k, l)$  são os respectivos autovetores do sistema matricial (2.2) e  $\mathbf{S} = (u, v, \phi)^T$ .

A solução do sistema (2.1) correspondente aos índices  $k = 0$ ,  $l = 0$  é constante, sendo assim estacionária, logo não sofre interferência do meio e não tem interesse físico, portanto não será analisada, também porque agora estamos interessados na solução da perturbação em torno do estado básico constante  $(U, V, \Phi)$ .

Os autovetores  $\mathbf{R}_+$  e  $\mathbf{R}_-$  correspondem às ondas de gravidade (ondas rápidas) e  $\mathbf{R}_0$  corresponde à onda de Rossby (onda lenta), conforme [13].

Os coeficientes  $\alpha_+$ ,  $\alpha_-$  e  $\alpha_0$  são determinados a partir de alguma condição inicial dada, conforme a observação seguinte.

**Observação 2.1** *A solução do sistema (2.1) fica completamente determinada, quando é dada uma condição inicial  $(u(x, y, 0), v(x, y, 0), \phi(x, y, 0))^T$ . De fato, para  $t = 0$ , mas  $(k, l) \neq (0, 0)$  na solução geral dada no Teorema 2.1, obtemos o sistema*

$$\begin{cases} [\alpha_+(k, l) + \alpha_-(k, l)] c_x^2 w_x k - \alpha_0(k, l) w_y l & = \hat{u}_0 \\ [\alpha_+(k, l) + \alpha_-(k, l)] c_y^2 w_y l + \alpha_0(k, l) w_x k & = \hat{v}_0 \\ [\alpha_+(k, l) - \alpha_-(k, l)] G_{k,l} & = \hat{\phi}_0, \end{cases}$$

onde os segundos membros acima são os coeficientes de Fourier dos dados iniciais. Logo, a solução deste sistema nos fornece os coeficientes de Fourier  $\alpha_+$ ,  $\alpha_-$  e  $\alpha_0$ .

## 2.2 Reflexão e Transmissão de Ondas

Consideremos uma onda incidente (índice  $i$ ) sobre a fronteira  $y = 0$ , deslocando-se no semiplano  $y > 0$ , onde possui vetor de onda  $\mathbf{c}_1 = (c_{x,1}, c_{y,1})^T$ . Admitindo que esta onda possui no semiplano  $y < 0$  vetor de onda  $\mathbf{c}_2 = (c_{x,2}, c_{y,2})^T$ , então na passagem pela interface  $y = 0$ , esta onda irá produzir uma onda refletida (índice  $r$ ) e uma transmitida (índice  $t$ ), conforme a figura 1.

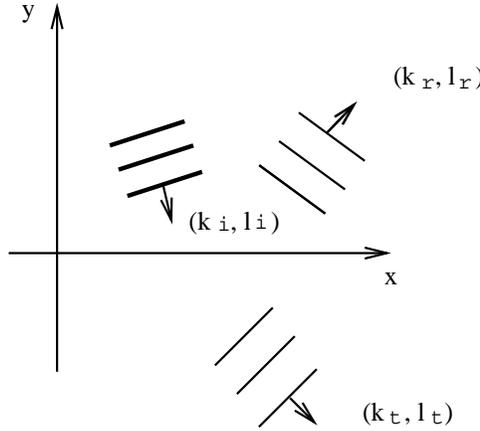


Figura 1: Reflexão de ondas planares.

Na descrição acima, estamos supondo o domínio infinito. Mas, no que se segue, consideraremos comprimentos de onda finitos, submúltiplos do período, para que o tratamento seja consistente com o da seção anterior, em que consideramos o domínio periódico.

Devemos estabelecer uma condição de continuidade, no eixo dos  $x$ , para a componente normal da velocidade e para o geopotencial da soma das ondas incidente, refletida e transmitida. Representamos cada uma dessas ondas, respectivamente, na direção dos vetores com 3 componentes  $\mathbf{R}_i$ ,  $\mathbf{R}_r$  e  $\mathbf{R}_t$  e impomos a seguinte condição de continuidade em  $y = 0$ ,  $\forall x$  e  $\forall t$

$$\left[ \alpha_i e^{-i(w_x k_i x + w_i t)} \mathbf{R}_i + \alpha_r e^{-i(w_x k_r x + w_r t)} \mathbf{R}_r \right] \cdot \mathbf{e} = \left[ \alpha_t e^{-i(w_x k_t x + w_t t)} \mathbf{R}_t \right] \cdot \mathbf{e}. \quad (2.13)$$

onde  $\mathbf{e} = (0, 1, 0)^T$  para a componente normal da velocidade ou  $\mathbf{e} = (0, 0, 1)^T$  para o geopotencial. Sem perda de generalidade, podemos supor  $\alpha_i = 1$ .

Agora, admitimos que há dois meios homogêneos unidos em  $y = 0$ , conforme a figura 2, em que  $c_{x,1} = c_{y,1} = c$ ,  $c_{x,2} = c + \delta$  ( $\delta \approx 0$ ) e  $c_{y,2} = c$ . Desse modo, temos um meio isotrópico no semiplano  $y > 0$  e outro meio isotrópico no semiplano  $y < 0$ .

Nas duas próximas subseções 2.2.1 e 2.2.2, impomos a condição de continuidade (2.13) para cada uma das ondas de gravidade  $\mathbf{R}_+$  e  $\mathbf{R}_-$  e também para a onda de Rossby  $\mathbf{R}_0$ . Desse modo analisamos o efeito do meio na propagação de cada uma dessas ondas.

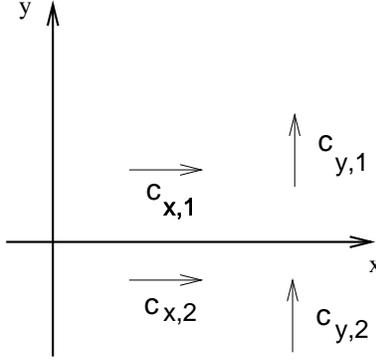


Figura 2: Vetores de Onda.

### 2.2.1 Interação das Ondas de Gravidade com a Interface

Sem perda de generalidade, supomos que  $\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_-$ , isto é, a onda incidente na interface  $y = 0$  é a onda de gravidade do autovetor  $\mathbf{R}_-$ . Neste caso, a onda refletida tem a direção do autovetor  $\mathbf{R}_+$  (assim,  $\mathbf{R}_r = \mathbf{R}_+$ ) e, sem perda de generalidade, supondo que  $k_i > 0$ ,  $k_r > 0$  e  $k_t > 0$ , segue que a condição de continuidade (2.13) para este caso fica

$$\left[ e^{-i(w_x k_i x + w_- t)} \mathbf{R}_- + \alpha_r e^{-i(w_x k_r x + w_+ t)} \mathbf{R}_+ \right] \cdot \mathbf{e} = \left[ \alpha_t e^{-i(w_x k_t x + w_* t)} \mathbf{R}_-^* \right] \cdot \mathbf{e}, \quad (2.14)$$

onde  $\mathbf{R}_-^* = \mathbf{R}_t$  é o vetor na direção da onda transmitida através da interface  $y = 0$ , resultado do desvio da onda incidente  $\mathbf{R}_-$ .

Para  $\mathbf{e} = (0, 1, 0)$  em (2.14), a continuidade da componente normal da velocidade em (2.14), juntamente com as fórmulas (2.11) e (2.12) nos dão

$$c_{y,1}^2 l_i e^{-i(w_x k_i x + w_- t)} + \alpha_r c_{y,1}^2 l_r e^{-i(w_x k_r x + w_+ t)} = \alpha_t c_{y,2}^2 l_* e^{-i(w_x k_t x + w_* t)}. \quad (2.15)$$

Denotemos, daqui em diante

$$G_{k,l}^{(i)} = \sqrt{\Phi \left[ c_{x,i}^2 (w_x k)^2 + c_{y,i}^2 (w_y l)^2 \right]}, \quad i = 1, 2. \quad (2.16)$$

Para  $\mathbf{e} = (0, 0, 1)$  em (2.14), a continuidade na componente do geopotencial em (2.14) nos dá

$$-G_{k_i, l_i}^{(1)} e^{-i(w_x k_i x + w_- t)} + \alpha_r G_{k_r, l_r}^{(1)} e^{-i(w_x k_r x + w_+ t)} = -\alpha_t G_{k_t, l_t}^{(2)} e^{-i(w_x k_t x + w_* t)}. \quad (2.17)$$

Em (2.15) os coeficientes das exponenciais complexas não são nulos, logo pelo lema B.1 do apêndice B, para a condição de continuidade (2.15) ser válida para todo  $t$ , devemos ter  $w_- = w_* = w_+$ . Do mesmo modo, a única maneira de (2.15) ser válida para todo  $x$  é que  $k_i = k_r = k_t = k$ . Agora

$$w_- = U w_x k + V w_y l_i - G_{k, l_i}^{(1)},$$

$$w_+ = U w_x k + V w_y l_r + G_{k,l_r}^{(1)},$$

$$w_-^* = U w_x k + V w_y l_* - G_{k,l_*}^{(2)},$$

onde supomos que as componentes do vetor velocidade  $(U, V)^T$  são suficientemente pequenas para que o sinal das frequências acima sejam determinadas pelo termo da raiz quadrada, ou seja,  $U$  e  $V$  são tais que

$$G_{k,l} > U w_x k + V w_y l.$$

Então usando o fato que  $w_- = w_+$ , resulta que

$$U w_x k + V w_y l_i - G_{k,l_i}^{(1)} = U w_x k + V w_y l_r + G_{k,l_r}^{(1)},$$

donde obtemos  $l_r$  em termos de  $l_i$ . Denotemos por simplicidade  $l_i = l$ . Por argumentos geométricos semelhantes ao que são feitos em [14], obtemos que os ângulos de incidência e reflexão devem ser iguais.

Agora como  $w_- = w_-^*$ , cancelando o termo comum  $U w_x k$ , temos que

$$V w_y l - G_{k,l}^{(1)} = V w_y l_* - G_{k,l_*}^{(2)},$$

donde ao usarmos  $c_{x,1} = c_{y,1} = c_{y,2} = c$  e  $c_{x,2} = c + \delta$ , também usando a notação consistente com (2.3)

$$G_{k,l}(\delta) = \sqrt{\Phi [(c + \delta)^2 (w_x k)^2 + c^2 (w_y l)^2]}, \quad (2.18)$$

obtemos

$$V w_y l - G_{k,l}(0) - V w_y l_* + G_{k,l_*}(\delta) = 0. \quad (2.19)$$

Para cada  $l$  fixado, denotemos o primeiro membro da equação (2.19) por  $H_l(l_*, \delta)$ . Logo  $H_l(l_*, \delta) = 0$ , a qual é satisfeita por  $l_* = l$  e  $\delta = 0$ . Mas

$$\frac{\partial H_l}{\partial l_*}(l, 0) = -V w_y + \frac{\Phi c^2 w_y^2 l_*}{G_{k,l_*}(0)}.$$

Supomos que a componente  $V$  seja tal que  $\frac{\partial H_l}{\partial l_*}(l, 0) \neq 0$ . Logo, pelo Teorema da Função Implícita, para cada  $\delta \approx 0$ , existe um único  $l_* \neq l$ , mas próximo de  $l$ , o qual depende de  $l$  e  $\delta$ , tal que  $H_l(l_*, \delta) = 0$ .

Agora voltemos à condição de continuidade (2.14). Temos que

$$\mathbf{R}_- = \left( c_{x,1}^2 w_x k, c_{y,1}^2 w_y l, -G_{k,l}^{(1)} \right)^T,$$

$$\mathbf{R}_+ = \left( c_{x,1}^2 w_x k, c_{y,1}^2 w_y l_r, G_{k,l_r}^{(1)} \right)^T,$$

$$\mathbf{R}_-^* = \left( c_{x,2}^2 w_x k, c_{y,2}^2 w_y l_*, -G_{k,l_*}^{(2)} \right)^T.$$

Por outro lado, cancelando-se os termos da exponencial complexa em (2.15) e o termo  $c_{y,1} = c_{y,2} = c$ , obtemos

$$l + \alpha_r l_r = \alpha_t l_*. \quad (2.20)$$

Em (2.17), ao usarmos  $c_{x,1} = c_{y,1} = c_{y,2} = c$  e  $c_{x,2} = c + \delta$ , obtemos

$$-G_{k,l}(0) + \alpha_r G_{k,l_r}(0) = -\alpha_t G_{k,l_*}(\delta). \quad (2.21)$$

Das equações (2.20) e (2.21), obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} -\frac{l_r}{l} \alpha_r + \frac{l_*}{l} \alpha_t & = 1 \\ \frac{G_{k,l_r}(0)}{G_{k,l}(0)} \alpha_r + \frac{G_{k,l_*}(\delta)}{G_{k,l}(0)} \alpha_t & = 1. \end{cases} \quad (2.22)$$

Para  $\delta \approx 0$ , mostramos que existe único  $l_*$  dado em termos de  $l$ , com  $l_* \neq l$ , pelo teorema da função implícita. Sendo  $l_* \neq l$ , pelo sistema (2.22),  $\alpha_t \neq 1$  e  $\alpha_r \neq 0$ , temos desvio, mudança de amplitude e reflexão da onda incidente na interface  $y = 0$ .

### 2.2.2 Interação da Onda de Rossby com a Interface

Agora supomos que a onda incidente  $\mathbf{R}_i$  na interface  $y = 0$  seja a onda de Rossby do vetor  $\mathbf{R}_0$ , dado na equação (2.9). Uma vez que não há outro tipo de onda de Rossby, a única onda de Rossby  $\mathbf{R}_0$  ao passar na interface não produzirá ondas refletidas (então  $\mathbf{R}_r = \mathbf{0}$ ), mas poderá ter sua transmissão alterada, ou seja, um possível desvio ou mudança de amplitude. Analisemos agora este caso, considerando uma condição de continuidade análoga à (2.14), a qual para este caso fica

$$\left[ e^{i(w_x k_0 x + w_0 t)} \mathbf{R}_0 \right] \cdot \mathbf{e} = \left[ \alpha_t e^{i(w_x k_0^* x + w_0^* t)} \mathbf{R}_0^* \right] \cdot \mathbf{e}, \quad (2.23)$$

onde  $\mathbf{R}_t = \mathbf{R}_0^*(k, l_*) = (-w_y l_*, w_x k, 0)^T$  é o vetor na direção da onda de Rossby transmitida através da interface  $y = 0$ . Temos também  $w_0 = U k_0 + V l$  e  $w_0^* = U k_0^* + V l_*$ .

Para  $\mathbf{e} = (0, 1, 0)$  em (2.23), a continuidade da componente normal da velocidade nos dá

$$w_x k_0 e^{-i(w_x k_0 x + w_0 t)} = \alpha_t w_x k_0^* e^{-i(w_x k_0^* x + w_0^* t)}. \quad (2.24)$$

Em (2.24), os coeficientes das exponenciais complexas não são nulos, logo pelo lema B.1 do apêndice B, para a condição de continuidade (2.24) ser válida para todo  $t$ , devemos ter  $w_0 = w_0^*$ . Do mesmo modo, a única maneira de (2.24) ser válida para todo  $x$  é que  $k_0^* = k_0 = k$ . Assim  $Uk + Vl = Uk + Vl_*$ , logo  $l = l_*$ , se  $V \neq 0$ . Agora se  $V = 0$ , então  $l$  e  $l_*$  não aparecem nas equações, logo não importam os seus valores.

Em qualquer caso, de (2.24), cancelando os termos da exponencial complexa, obtemos

$$w_x k = \alpha_t w_x k$$

donde  $\alpha_t = 1$ , se  $k \neq 0$ . O caso  $k = 0$  não nos interessa porque o vetor  $\mathbf{R}_0 = (-w_y l, 0, 0)^T$  é paralelo ao eixo- $x$ , não havendo assim interação com a interface.

Portanto, para a onda de Rossby temos uma propagação adequada, uma vez que a onda incidente na interface  $y = 0$  é totalmente transmitida sem desvio.

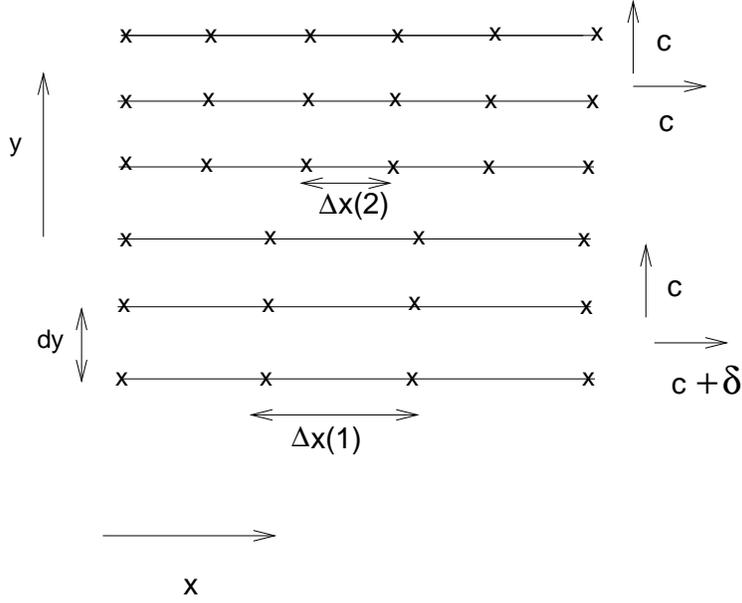


Figura 3: Grade planar representando um meio heterogêneo.

### 2.3 Método de Diferenças Finitas

Consideremos uma malha com distribuição uniforme de pontos em cada linha horizontal, conforme a figura 3. Esta malha é um modelo simplificado de grade planar reduzida, em que temos um meio heterogêneo constituído por dois meios homogêneos separados por uma interface, onde o meio superior é isotrópico:  $\mathbf{c} = (c_{x,1}, c_{y,1}) = (c, c)$ , e o meio inferior é anisotrópico:  $\mathbf{c} = (c_{x,2}, c_{y,2}) = (c + \delta, c)$ ,  $\delta \approx 0$ .

Mostramos no lema C.1 do apêndice C que o método de diferenças finitas aplicado ao sistema de equações de água-rasa resulta numa relação de dispersão em que a velocidade de propagação da onda depende do meio, ou seja, de  $\Delta x$ . Portanto para método de diferenças finitas, grades diferentes funcionam como meios com ligeira diferença de velocidade. Assim, a mudança na velocidade de propagação de uma onda numa simulação numérica, quando passa de um meio homogêneo para o outro é devida à redução no número de pontos, ou seja, à variação de  $\Delta x$ .

Essa observação juntamente com os resultados mostrados nas subseções 2.2.1 e 2.2.2 demonstram o seguinte

**Teorema 2.2** *Suponhamos válida a condição de continuidade (2.13). Então no método de diferenças finitas, a transmissão de onda de gravidade através da interface  $y = 0$  é realizada com mudança de amplitude, desvio e reflexão ( $\alpha_t \neq 1$ ,  $\alpha_r \neq 0$  e  $\mathbf{R}_- \neq \mathbf{R}_-^*$ ). Para a onda de Rossby, a propagação é adequada, no sentido de que a onda incidente  $\mathbf{R}_-$  é totalmente transmitida sem desvio, reflexão e mudança de amplitude ( $\alpha_t = 1$ ,  $\alpha_r = 0$  e  $\mathbf{R}_- = \mathbf{R}_-^*$ ).*

### 3 Análise da Parte Espectral do Método Semilagrangeano

Neste capítulo analisamos o efeito do uso de grade reduzida na evolução de ondas de água-rasa planares linearizadas no contexto do método espectral que é utilizado no procedimento semilagrangeano. Nosso objetivo é mostrar que a propagação dessas ondas não sofre interferência, por uso de grades reduzidas, diferentemente do método de diferenças finitas, conforme mostramos no capítulo 2. Mostraremos que o único erro na parte espectral é devido ao *aliasing* combinado com o truncamento espectral.

#### 3.1 Águas Rasas Discretizadas em Grade Uniforme

Consideramos o sistema (2.1) no caso  $U = V = 0$ , porque os termos de advecção de onde eles se originam não são tratados espectralmente, mas sim pela parte lagrangeana. Então discretizemos o sistema (2.1) usando diferença finita

$$\frac{\partial()}{\partial t} = \frac{()^+ - ()^-}{\Delta t}, \quad (3.1)$$

onde  $\Delta t$  é o passo de tempo.

Nas derivadas espaciais  $u_x$ ,  $v_y$ ,  $\phi_x$  e  $\phi_y$ , fazemos um tratamento implícito dos termos lineares que produzem as ondas de gravidade (ondas rápidas), usando o operador de média temporal, que resulta na seguinte discretização do sistema (2.1)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u^+ - u^-}{\Delta t} + c_x^2 \frac{\phi_x^+ + \phi_x^-}{2} = 0 \\ \frac{v^+ - v^-}{\Delta t} + c_y^2 \frac{\phi_y^+ + \phi_y^-}{2} = 0 \\ \frac{\phi^+ - \phi^-}{\Delta t} + \Phi \left( \frac{u_x^+ + u_x^-}{2} + \frac{v_y^+ + v_y^-}{2} \right) = 0. \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Procuramos solução numérica do esquema (3.2) da forma

$$\begin{pmatrix} u^- \\ v^- \\ \phi^- \end{pmatrix} (x, y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \alpha(k, l) e^{-i(w_x kx + w_y ly - wt)} \begin{pmatrix} u_{k,l}^0 \\ v_{k,l}^0 \\ \phi_{k,l}^0 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

e

$$\begin{pmatrix} u^+ \\ v^+ \\ \phi^+ \end{pmatrix} (x, y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \alpha(k, l) e^{-i(w_x kx + w_y ly - w(t+\Delta t))} \begin{pmatrix} u_{k,l}^0 \\ v_{k,l}^0 \\ \phi_{k,l}^0 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Substituindo (3.3) e (3.4) em (3.2), cancelando o termo  $e^{-i(w_x kx + w_y ly - wt)}$  e aban-

donando os índices  $k, l$ , obtemos

$$\begin{cases} \frac{e^{iw\Delta t} - 1}{\Delta t} u^0 - \frac{e^{iw\Delta t} + 1}{2} i c_x^2 k \phi^0 & = 0, \\ \frac{e^{iw\Delta t} - 1}{\Delta t} v^0 - \frac{e^{iw\Delta t} + 1}{2} i c_y^2 l \phi^0 & = 0, \\ \frac{e^{iw\Delta t} - 1}{\Delta t} \phi^0 - \Phi \frac{e^{iw\Delta t} + 1}{2} (iku^0 + ilv^0) & = 0. \end{cases}$$

Multiplicando cada equação acima por  $e^{-\frac{i}{2}w\Delta t}$  obtemos

$$\begin{cases} \frac{-2iS}{\Delta t} u^0 - C c_x^2 i k \phi^0 & = 0 \\ \frac{-2iS}{\Delta t} v^0 - C c_y^2 i l \phi^0 & = 0 \\ \frac{-2iS}{\Delta t} \phi^0 - \Phi C i k u^0 - \Phi C i l v^0 & = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

onde

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \text{sen} \left( -w \frac{\Delta t}{2} \right)$$

e

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \text{cos} \left( -w \frac{\Delta t}{2} \right),$$

ou na forma matricial, denotando  $T = S/C$ , obtemos

$$\begin{pmatrix} -\frac{2T}{\Delta t} & 0 & -c_x^2 w_x k \\ 0 & -\frac{2T}{\Delta t} & -c_y^2 w_y l \\ -\Phi w_x k & -\Phi w_y l & -\frac{2T}{\Delta t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^0 \\ v^0 \\ \phi^0 \end{pmatrix} = 0, \quad (3.6)$$

onde o caso  $k = 0, l = 0$  é especial e nos dá  $(u^0, v^0, \phi^0)^T = (0, 0, 0)$ , que não tem interesse.

Ao zerar o determinante do sistema (3.6), obtemos a seguinte relação de dispersão

$$\frac{-2T}{\Delta t} \left( \frac{4T^2}{\Delta t^2} - \Phi (w_y l)^2 c_y^2 \right) + \Phi (w_x k)^2 c_x^2 \frac{2T}{\Delta t} = 0.$$

Seja  $z = -\frac{2T}{\Delta t}$ , então usando a notação (2.3), a relação de dispersão fica

$$z^3 - G_{k,l}^2 z = 0. \quad (3.7)$$

Donde obtemos

$$z_0 = 0 \quad (3.8)$$

ou

$$z_+ = G_{k,l} \quad (3.9)$$

ou

$$z_- = -G_{k,l}. \quad (3.10)$$

Quando  $\Delta t \rightarrow 0$ , a matriz (3.6) converge para a matriz (2.2), com  $U = V = 0$ . Isto mostra que o esquema (3.2) é consistente. Também as matrizes (3.6) e (2.2) têm os mesmos autovetores. Assim, os autovetores do sistema discretizado (3.2) são iguais aos autovetores  $\mathbf{R}_+$ ,  $\mathbf{R}_-$  e  $\mathbf{R}_0$  do sistema analítico (2.1), escolhendo  $U = V = 0$ .

Denotemos  $\mathbf{S}^+ = (u^+, v^+, \phi^+)^T$ . Então demonstramos o seguinte resultado

**Teorema 3.1** *O esquema numérico (3.2) é consistente. Além disso, a sua solução geral não estacionária é dada por*

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^+(x, y, t) = & \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{l=-\infty \\ (k,l) \neq (0,0)}}^{\infty} \left[ \alpha_+(k, l) e^{-i(w_x kx + w_y ly - z_+ t)} \mathbf{R}_+ + \right. \\ & + \alpha_-(k, l) e^{-i(w_x kx + w_y ly - z_- t)} \mathbf{R}_- + \\ & \left. + \alpha_0(k, l) e^{-i(w_x kx + w_y ly - z_0 t)} \mathbf{R}_0 \right], \end{aligned}$$

onde  $z_+$ ,  $z_-$  e  $z_0$  são os autovalores dados em (3.8), (3.9) e (3.10) e  $\mathbf{R}_+(k, l)$ ,  $\mathbf{R}_-(k, l)$  e  $\mathbf{R}_0(k, l)$  são os respectivos autovetores do sistema matricial (3.6), dados por (2.9), (2.11) e (2.12). Os coeficientes  $\alpha_+(k, l)$ ,  $\alpha_-(k, l)$  e  $\alpha_0(k, l)$  podem ser determinados a partir da condição inicial dada.

Temos que

$$z = -\frac{2T}{\Delta t} = -2 \frac{\text{tg}\left(-w \frac{\Delta t}{2}\right)}{\Delta t} \rightarrow w,$$

quando  $\Delta t \rightarrow 0$ . Portanto, os autovalores dados em (3.8), (3.9) e (3.10) convergem para os autovalores dados em (2.5), (2.6) e (2.7), respectivamente, quando  $\Delta t \rightarrow 0$ . Notemos que os autovalores (3.8), (3.9) e (3.10) não dependem de  $\Delta x$ ; eles dependem apenas de  $\Delta t$ .

Consideremos uma grade de pontos com duplo valor de  $\Delta x$  conforme a figura 5. Nesta grade, mostramos que o método espectral aplicado ao sistema de equações de água-rasa resulta numa relação de dispersão em que a frequência da onda não depende do meio, ou seja, de  $\Delta x$ . Logo a velocidade de propagação também não depende do meio. Os modos  $\mathbf{R}_+$ ,  $\mathbf{R}_-$  e  $\mathbf{R}_0$  também não dependem de  $\Delta x$ . Assim para método espectral, grades diferentes não interferem na velocidade de propagação da onda.

O erro de *aliasing* ocorre quando altos números de onda interferem em números de onda mais baixos, provocando uma má representação da onda na grade dada. Isto pode ocorrer mesmo para as grades uniformes de pontos. Examinaremos o erro de *aliasing* com mais detalhes na seção 3.3. Supomos, agora, que estejamos numa situação em que este erro não interfira na parte espectral do modelo de água-rasa dado pelo sistema (2.1). Essas observações juntamente com os resultados mostrados nas subseções 2.2.1 e 2.2.2 demonstram o seguinte

**Teorema 3.2** *Suponhamos válida a condição de continuidade (2.13). No método espectral, para ondas que se propagam sem erro de aliasing em nenhuma das duas grades onde  $\Delta x$  está fixado, a transmissão de onda através da interface  $y = 0$  é realizada sem desvio, mudança de amplitude ( $\alpha_t = 1$ ) ou reflexão ( $\alpha_r = 0$ ).*

Mostramos em simulações numéricas (veja seção 3.2) que o método numérico espectral é exato (ou quase, só há um erro temporal) para os comprimentos de onda resolvidos pela grade física. Utilizamos esse método numérico para observar a evolução de ondas planas através da grade dupla. Os experimentos numéricos verificam que o método espectral não sofre interferências por uso de grade dupla, ao contrário do caso de diferenças finitas. Este fato é explicado pelo teorema 3.2. A vantagem dos métodos espectrais em grades heterogêneas do tipo grade dupla sobre os métodos de diferença finita é que não são introduzidos desvios e transmissões espúrias.

Na seção 3.2 abaixo, descrevemos o método numérico que empregamos nos experimentos para generalizar o resultado do teorema 3.2 para qualquer grade reduzida.

### 3.2 O Método Numérico Espectral em Grades Reduzidas

Para analisar em detalhe o efeito da grade reduzida (ver figura 4) sobre a propagação de uma onda de água rasa, que é solução do sistema (2.1), fazemos análise do tratamento numérico utilizado no método espectral, onde as derivadas  $\partial/\partial x$  e  $\partial/\partial y$  são tratadas espectralmente.

Segue das duas primeiras equações de (3.2) que

$$\begin{cases} u_x^+ &= u_x^- - \frac{c_x^2 \Delta t}{2} (\phi_{xx}^+ + \phi_{xx}^-) \\ v_y^+ &= v_y^- - \frac{c_y^2 \Delta t}{2} (\phi_{yy}^+ + \phi_{yy}^-), \end{cases}$$

assim obtemos o seguinte sistema com  $\psi = \Delta t (c_x^2 \phi_{xx} + c_y^2 \phi_{yy})$

$$\begin{cases} u^+ + c_x^2 \frac{\Delta t}{2} \phi_x^+ &= u^- - c_x^2 \frac{\Delta t}{2} \phi_x^- \\ v^+ + c_y^2 \frac{\Delta t}{2} \phi_y^+ &= v^- - c_y^2 \frac{\Delta t}{2} \phi_y^- \\ \phi^+ - \Phi \frac{\Delta t}{4} \psi^+ &= \phi^- - \Delta t \Phi (u_x^- + v_y^-) + \Phi \frac{\Delta t}{4} \psi^-. \end{cases} \quad (3.11)$$

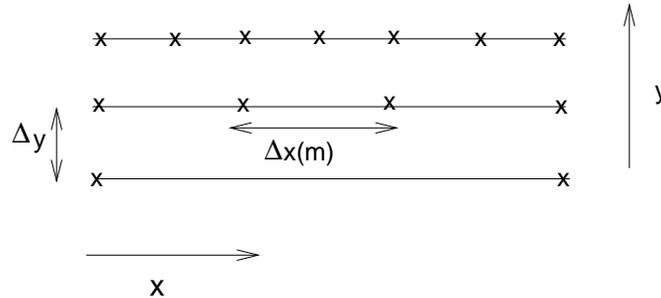


Figura 4: Grade planar reduzida.  $\Delta y$  é fixo,  $\Delta x$  é fixo apenas em cada linha horizontal.

Supomos que  $(x, y) \in [0, L_x] \times [0, L_y]$ . Então definimos a grade reduzida

$$\begin{aligned} x_n(m) &= n\Delta x(m) \quad , \quad n = 1, \dots, N(m), \\ y_m &= m\Delta y \quad , \quad m = 1, \dots, M, \end{aligned}$$

onde  $\Delta x(m) = \frac{L_x}{N(m)}$  e  $\Delta y = \frac{L_y}{M}$ .

O número de pontos  $N(m)$  na direção  $x$  é variável, enquanto que o número de pontos  $M$  na direção  $y$  é fixo, veja-se a figura 4.

No capítulo 6, estudaremos com mais detalhes as propriedades da transformada discreta de Fourier (DFT) em grade reduzida. Por enquanto, definimos as seguintes expansões discretas de Fourier

$$\begin{aligned} u^+(x_n(m), y_m) &= \sum_{l=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} \sum_{k=-\frac{N(m)}{2}}^{\frac{N(m)}{2}-1} \hat{u}^+(k, l) e^{-i(w_x k x_n(m) + w_y l y_m)} \\ v^+(x_n(m), y_m) &= \sum_{l=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} \sum_{k=-\frac{N(m)}{2}}^{\frac{N(m)}{2}-1} \hat{v}^+(k, l) e^{-i(w_x k x_n(m) + w_y l y_m)} \\ \phi^+(x_n(m), y_m) &= \sum_{l=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} \sum_{k=-\frac{N(m)}{2}}^{\frac{N(m)}{2}-1} \hat{\phi}^+(k, l) e^{-i(w_x k x_n(m) + w_y l y_m)}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

as mesmas equações (3.12) podem ser escritas trocando  $+$  por  $-$ . Então, substituindo as expansões de Fourier (3.12) em (3.11), resulta que

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{u}^+ - c_x^2 \frac{\Delta t}{2} w_x i k \hat{\phi}^+ &= \hat{u}^- + c_x^2 \frac{\Delta t}{2} w_x i k \hat{\phi}^- \\ \hat{v}^+ - c_y^2 \frac{\Delta t}{2} w_y i l \hat{\phi}^+ &= \hat{v}^- + c_y^2 \frac{\Delta t}{2} w_y i l \hat{\phi}^- \\ \left(1 + \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 G_{k,l}^2\right) \hat{\phi}^+ &= \left(1 - \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 G_{k,l}^2\right) \hat{\phi}^- + 2\Phi \frac{\Delta t}{2} (w_x i k \hat{u}^- + w_y i l \hat{v}^-) \end{aligned} \right.$$

ou na forma matricial, denotando  $W_x = \Phi \Delta t w_x i k$  e  $W_y = \Phi \Delta t w_y i l$ , obtemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -c_x^2 \frac{\Delta t}{2} w_x i k \\ 0 & 1 & -c_y^2 \frac{\Delta t}{2} w_y i l \\ 0 & 0 & 1 + \left(\frac{\Delta t G_{k,l}}{2}\right)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}^+ \\ \hat{v}^+ \\ \hat{\phi}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c_x^2 \frac{\Delta t}{2} w_x i k \\ 0 & 1 & c_y^2 \frac{\Delta t}{2} w_y i l \\ W_x & W_y & 1 - \left(\frac{\Delta t G_{k,l}}{2}\right)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}^- \\ \hat{v}^- \\ \hat{\phi}^- \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Desta forma atualizamos os coeficientes espectrais  $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$  e  $\hat{\phi}$ . Mas como é usado a DFT nas direções  $x$  e  $y$ , o número de pontos de malha no espaço físico deve ser suficiente

para se usar uma transformada rápida de Fourier (FFT) nos coeficientes espectrais (espaço espectral). A redução de pontos na grade física é feita ao longo de cada linha horizontal, assim no espaço espectral devemos completar com zeros aqueles números de onda mais altos para efetuar a FFT, uma vez que a FFT exige uma distribuição uniforme dos números de onda (veja capítulo 6 para mais detalhes). Então para obter os valores atualizados de  $u$ ,  $v$  e  $\phi$  no domínio físico, basta usar as expansões (3.12).

Com o mesmo raciocínio usado na seção 3.1, podemos mostrar para uma grade reduzida qualquer, o resultado seguinte.

**Teorema 3.3** *No método espectral, para ondas que se propagam sem erro de aliasing em nenhuma das grades onde  $\Delta x(m)$  está fixado, a transmissão de onda através da grade reduzida é realizada sem desvio, mudança de amplitude ou reflexão.*

Utilizamos o método numérico (3.13) para observar a evolução de ondas planas usando uma grade reduzida qualquer. Os experimentos numéricos verificam que o método espectral não sofre interferências por uso de grade reduzida, ao contrário do caso de diferenças finitas. Este fato é explicado pelo teorema 3.3. A vantagem dos métodos espectrais em grades heterogêneas do tipo grade reduzida sobre os métodos de diferença finita é que não são introduzidas alterações na propagação das ondas.

### 3.3 O Erro de Aliasing

O erro de *aliasing* combinado com o truncamento espectral em grades reduzidas utilizadas em modelos de circulação geral, será estudado com mais detalhes a partir do capítulo 6. Nesta seção fazemos um estudo simples, por meio de exemplos, do erro de *aliasing* que ocorre com a redução da grade, numa situação que ilustra o fenômeno de aliasing. Necessitaremos dos resultados da transformada discreta de Fourier bidimensional em grade reduzida que estão descritos no capítulo 6.

As definições seguintes são usadas em toda a tese.

Definimos o *delta modular de Kronecker*  $\tilde{\delta}_N(k)$  por

$$\tilde{\delta}_N(k) = \begin{cases} 1, & \text{se } k = 0 \text{ ou múltiplo de } N \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.14)$$

Seja  $N = \max_m N(m)$ , então para  $-N/2 \leq k \leq (N/2) - 1$  definimos a seguinte função característica da grade reduzida  $N(m)$ , que depende de  $m$

$$I_k(m) = \begin{cases} 1, & -\frac{N(m)}{2} \leq k \leq \frac{N(m)}{2} - 1 \\ 0, & -\frac{N}{2} \leq k < -\frac{N(m)}{2} \text{ ou } \frac{N(m)}{2} \leq k < \frac{N}{2}. \end{cases} \quad (3.15)$$

Consideremos um modelo simplificado de grade reduzida (ver figura 5) no retângulo  $-A/2 \leq x \leq A/2$ ,  $-B/2 \leq y \leq B/2$ , com número de pontos em cada linha horizontal dado por

$$N(m) = \begin{cases} N_1, & \text{se } -M/2 \leq m \leq -1 \\ N_2, & \text{se } 0 \leq m \leq (M/2) - 1, \end{cases}$$

onde supomos  $M$  par e, sem perda de generalidade,  $N_1 \geq N_2$ .

Definimos a grade dupla (veja a figura 5)

$$x_n(m) = \begin{cases} n\Delta x_1, & \text{se } -M/2 \leq m \leq -1 \\ n\Delta x_2, & \text{se } 0 \leq m \leq (M/2) - 1, \end{cases}$$

e  $y_m = m\Delta y$ , onde

$$\Delta x_1 = \frac{A}{N_1}, \quad \Delta x_2 = \frac{A}{N_2}, \quad \Delta y = \frac{B}{M}.$$

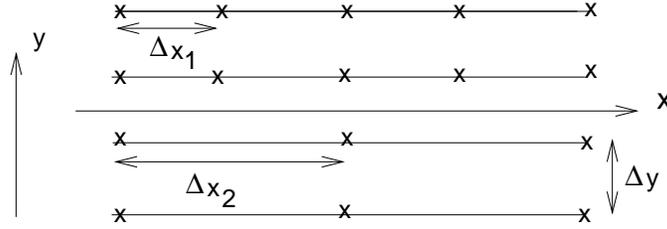


Figura 5: Grade planar reduzida.  $\Delta y$  é fixo,  $\Delta x$  é fixo apenas em cada linha horizontal.

Esta grade é a mesma representada na figura 3 da seção 2.3. Utilizaremos o exemplo seguinte para ilustrar o erro de *aliasing* na grade dupla da figura 5.

**Lema 3.1** *Os coeficientes de Fourier na expansão discreta em soma dupla da função  $f(x, y) = e^{i2\pi(k_0 \frac{x}{A} + l_0 \frac{y}{B})}$ , para  $-M/2 \leq l \leq (M/2) - 1$  são dados pelas seguintes fórmulas, para  $l \neq l_0$*

$$F_{k,l} = \begin{cases} \left[ \frac{\tilde{\delta}_{N_1}(k_0 - k)}{M} (-1)^{l_0 - l} + \frac{\tilde{\delta}_{N_2}(k_0 - k)}{M} \right] \frac{e^{i\pi(l_0 - l)} - 1}{e^{i\frac{2\pi}{M}(l_0 - l)} - 1}, & -\frac{N_2}{2} \leq k \leq \frac{N_2}{2} - 1 \\ \frac{\tilde{\delta}_{N_1}(k_0 - k)}{M} (-1)^{l_0 - l} \frac{e^{-i\pi(l_0 - l)} - 1}{e^{i\frac{2\pi}{M}(l_0 - l)} - 1}, & -\frac{N_1}{2} \leq k < -\frac{N_2}{2} \text{ ou } \frac{N_2}{2} \leq k < \frac{N_1}{2}, \end{cases} \quad (3.16)$$

e para  $l = l_0$

$$F_{k,l} = \begin{cases} \tilde{\delta}_{N_1}(k_0 - k) \frac{1}{2} + \tilde{\delta}_{N_2}(k_0 - k) \frac{1}{2}, & -\frac{N_2}{2} \leq k \leq \frac{N_2}{2} - 1 \\ \tilde{\delta}_{N_1}(k_0 - k) \frac{1}{2}, & -\frac{N_1}{2} \leq k < -\frac{N_2}{2} \text{ ou } \frac{N_2}{2} \leq k < \frac{N_1}{2}. \end{cases} \quad (3.17)$$

**Demonstração:** Os coeficientes de Fourier na expansão discreta em soma dupla da função  $f(x, y) = e^{i2\pi(k_0 \frac{x}{A} + l_0 \frac{y}{B})}$  são dados pelas fórmulas (6.1) e (6.2). Mas por (6.1),

temos para  $-\frac{N}{2} \leq k \leq \frac{N}{2} - 1$  que

$$\psi_{k,m} = \begin{cases} \frac{1}{N(m)} \sum_{n=-\frac{N(m)}{2}}^{\frac{N(m)}{2}-1} f(x_n(m), y(m)) e^{-i2\pi nk/N(m)}, & -\frac{N(m)}{2} \leq k \leq \frac{N(m)}{2} - 1 \\ 0, & -\frac{N}{2} \leq k < -\frac{N(m)}{2} \text{ ou } \frac{N(m)}{2} \leq k < \frac{N}{2} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{N(m)} \sum_{n=-\frac{N(m)}{2}}^{\frac{N(m)}{2}-1} e^{i2\pi(k_0 \frac{n}{N(m)} + l_0 \frac{m}{M})} e^{-i2\pi nk/N(m)}, & -\frac{N(m)}{2} \leq k \leq \frac{N(m)}{2} - 1 \\ 0, & -\frac{N}{2} \leq k < -\frac{N(m)}{2} \text{ ou } \frac{N(m)}{2} \leq k < \frac{N}{2}, \end{cases}$$

donde

$$\psi_{k,m} = \begin{cases} e^{i2\pi l_0 \frac{m}{M}} \frac{1}{N(m)} \sum_{n=-\frac{N(m)}{2}}^{\frac{N(m)}{2}-1} e^{i2\pi n \frac{(k_0 - k)}{N(m)}}, & -\frac{N(m)}{2} \leq k \leq \frac{N(m)}{2} - 1 \\ 0, & -\frac{N}{2} \leq k < -\frac{N(m)}{2} \text{ ou } \frac{N(m)}{2} \leq k < \frac{N}{2}. \end{cases}$$

Desse modo, usando a propriedade de ortogonalidade discreta das exponenciais complexas, dada no lema 4.1 do capítulo 4, podemos escrever

$$\psi_{k,m} = \begin{cases} e^{i2\pi l_0 \frac{m}{M}} \tilde{\delta}_{N(m)}(k_0 - k), & -\frac{N(m)}{2} \leq k \leq \frac{N(m)}{2} - 1 \\ 0, & -\frac{N}{2} \leq k < -\frac{N(m)}{2} \text{ ou } \frac{N(m)}{2} \leq k < \frac{N}{2}. \end{cases}$$

Agora por (6.2), usando a função (3.15), podemos escrever para  $-\frac{N}{2} \leq k \leq \frac{N}{2} - 1$  e  $-\frac{M}{2} \leq l \leq \frac{M}{2} - 1$

$$F_{k,l} = \frac{1}{M} \sum_{m=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} \psi_{k,m} e^{-i2\pi ml/M} = \frac{1}{M} \sum_{m=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} I_k(m) e^{i2\pi l_0 \frac{m}{M}} \tilde{\delta}_{N(m)}(k_0 - k) e^{-i2\pi ml/M},$$

donde para  $-N/2 \leq k \leq (N/2) - 1$  e  $-M/2 \leq l \leq (M/2) - 1$

$$F_{k,l} = \frac{1}{M} \sum_{m=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} I_k(m) \tilde{\delta}_{N(m)}(k_0 - k) e^{i2\pi m (\frac{l_0 - l}{M})}. \quad (3.18)$$

Na grade dupla da figura 5, temos que  $N = N_1$  e a função (3.15) fica para  $-M/2 \leq m \leq -1$ ,  $I_k(m) = 1$ ,  $-N_1/2 \leq k \leq (N_1/2) - 1$  e para  $0 \leq m \leq (M/2) - 1$

$$I_k(m) = \begin{cases} 1, & -\frac{N_2}{2} \leq k \leq \frac{N_2}{2} - 1 \\ 0, & -\frac{N_1}{2} \leq k < -\frac{N_2}{2} \text{ ou } \frac{N_2}{2} \leq k < \frac{N_1}{2}. \end{cases}$$

Desse modo para  $-N_2/2 \leq k \leq (N_2/2) - 1$  e  $-M/2 \leq l \leq (M/2) - 1$

$$F_{k,l} = \frac{1}{M} \sum_{m=-M/2}^{-1} e^{i(l_0-l)\frac{2\pi}{M}m} [\tilde{\delta}_{N_1}(k_0 - k)] + \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{(M/2)-1} e^{i(l_0-l)\frac{2\pi}{M}m} [\tilde{\delta}_{N_2}(k_0 - k)]$$

ou seja

$$F_{k,l} = \tilde{\delta}_{N_1}(k_0 - k) \frac{1}{M} \sum_{m=-M/2}^{-1} e^{i(l_0-l)\frac{2\pi}{M}m} + \tilde{\delta}_{N_2}(k_0 - k) \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{(M/2)-1} e^{i(l_0-l)\frac{2\pi}{M}m}. \quad (3.19)$$

Por outro lado, para  $-N_1/2 \leq k < -N_2/2$  ou  $N_2/2 \leq k < N_1/2$  e também para  $-M/2 \leq l \leq (M/2) - 1$ , então o segundo somatório em (3.19) se anula (pois se  $m = 0, \dots, (M/2) - 1$ , então  $I_k(m) = 0$ ), logo

$$F_{k,l} = \tilde{\delta}_{N_1}(k_0 - k) \frac{1}{M} \sum_{m=-M/2}^{-1} e^{i(l_0-l)\frac{2\pi}{M}m}. \quad (3.20)$$

Notemos que se  $m' = m + (M/2)$ , então

$$\sum_{m=-M/2}^{-1} e^{i(l_0-l)\frac{2\pi}{M}m} = \sum_{m'=0}^{(M/2)-1} e^{i(l_0-l)\frac{2\pi}{M}(m'-\frac{M}{2})} = e^{-i(l_0-l)\pi} \sum_{m'=0}^{(M/2)-1} e^{i(l_0-l)\frac{2\pi}{M}m'}.$$

Então usando a fórmula

$$\frac{z^n - 1}{z - 1} = 1 + z + \dots + z^{n-1}, \quad \forall z \neq 1,$$

com  $z = e^{i\frac{2\pi}{M}(l_0-l)}$ , podemos escrever (3.19) na seguinte forma, para  $l \neq l_0$

$$F_{k,l} = \frac{\tilde{\delta}_{N_1}(k_0 - k)}{M} e^{-i(l_0-l)\pi} \frac{\left(e^{i\frac{2\pi}{M}(l_0-l)}\right)^{M/2} - 1}{e^{i\frac{2\pi}{M}(l_0-l)} - 1} + \frac{\tilde{\delta}_{N_2}(k_0 - k)}{M} \frac{\left(e^{i\frac{2\pi}{M}(l_0-l)}\right)^{M/2} - 1}{e^{i\frac{2\pi}{M}(l_0-l)} - 1}, \quad (3.21)$$

ou melhor

$$F_{k,l} = \left[ \frac{\tilde{\delta}_{N_1}(k_0 - k)}{M} (-1)^{l_0-l} + \frac{\tilde{\delta}_{N_2}(k_0 - k)}{M} \right] \frac{e^{i\pi(l_0-l)} - 1}{e^{i\frac{2\pi}{M}(l_0-l)} - 1}, \quad \text{para } l \neq l_0, \quad (3.22)$$

e para  $l = l_0$ , de (3.19), obtemos

$$F_{k,l} = \tilde{\delta}_{N_1}(k_0 - k) \frac{1}{M} \sum_{m=-M/2}^{-1} 1 + \tilde{\delta}_{N_2}(k_0 - k) \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{(M/2)-1} 1,$$

ou melhor

$$F_{k,l} = \tilde{\delta}_{N_1}(k_0 - k) \frac{1}{2} + \tilde{\delta}_{N_2}(k_0 - k) \frac{1}{2}. \quad (3.23)$$

Usando o mesmo raciocínio acima na equação (3.20), obtemos as equações (3.16) e (3.17). Isto completa a demonstração do lema 3.1.

**Exemplo 3.1** *Suponha  $N_1 = N_2 = 14$ ,  $k_0 = -6$  e  $l_0 = 0$ .*

Neste exemplo temos que  $-7 \leq k \leq 6$  e  $-M/2 \leq l \leq (M/2) - 1$ . Se  $k_0 = -6$  e  $l = l_0 = 0$ , então por (3.17)

$$F_{k,0} = \tilde{\delta}_{14}(-6 - k)\frac{1}{2} + \tilde{\delta}_{14}(-6 - k)\frac{1}{2}.$$

Donde segue que se  $k = -6$ , temos  $F_{-6,0} = 1$ ,  $F_{k,0} = 0$ ,  $\forall k \neq -6$  e por (3.16), podemos verificar que  $F_{k,l} = 0$ ,  $\forall k, l \neq 0$ . Assim não ocorreu erro de *aliasing*, pois a onda  $k_0 = -6$  é bem representada nesta malha uniforme.

**Exemplo 3.2** *Agora escolhemos a grade reduzida de pontos com  $N_1 = 14$  e  $N_2 = 8$ , além disso tomamos  $l_0 = 0$  e  $k_0 = -6$ .*

Então novamente  $-7 \leq k \leq 6$  e  $-M/2 \leq l \leq (M/2) - 1$ . Usando (3.17) temos que

$$F_{k,0} = \tilde{\delta}_{14}(-6 - k)\frac{1}{2} + \tilde{\delta}_8(-6 - k)\frac{1}{2}.$$

Se  $k = -6$ , então

$$F_{-6,0} = \tilde{\delta}_{14}(0)\frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

mas se  $k = 2$ , obtemos

$$F_{2,0} = \tilde{\delta}_8(-8)\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Portanto, ocorreu um erro de *aliasing* devido a redução de pontos na malha, uma vez que esta onda é bem representada na grade com  $N_1 = 14$  pontos, mas não é na grade com  $N_2 = 8$  pontos.

Na figura 6 temos duas ondas senos numa grade com  $N_2 = 8$  pontos, denotados pelas letras **X**. Uma onda seno tem número de onda  $k_0 = -6$  e a outra  $k_0 = 2$ . Como o número de pontos  $N_2$  não é suficiente para representar a onda com número de onda  $k_0 = -6$ , então esta onda fica mal representada e se confunde com aquela com número de onda  $k_0 = 2$ . Isto é o erro de *aliasing*. Esse erro de *aliasing* foi devido à redução de pontos na malha.

O erro de *aliasing* também pode ocorrer no caso da grade uniforme de pontos. Observamos que no exemplo 3.1, mesmo se  $N_1 = N_2 = 8$ , ainda teríamos a ocorrência de *aliasing*, porque a frequência  $k_0 = -6$  seria maior que a frequência de Nyquist.

**Exemplo 3.3** *Sejam  $k_0 = -6$ ,  $l_0 = 0$ ,  $N_1 = 14$  e  $N_2 = 12$ .*

Então pela fórmula (3.17) temos

$$F_{k,0} = \tilde{\delta}_{14}(-6 - k)\frac{1}{2} + \tilde{\delta}_{12}(-6 - k)\frac{1}{2}, \quad -7 \leq k \leq 6,$$

logo se  $k = -6$ , então  $F_{-6,0} = 1$  e se  $k \neq -6$ , então  $F_{k,0} = 0$ . Por (3.16), podemos verificar que  $F_{k,l} = 0$ ,  $\forall k, l \neq 0$

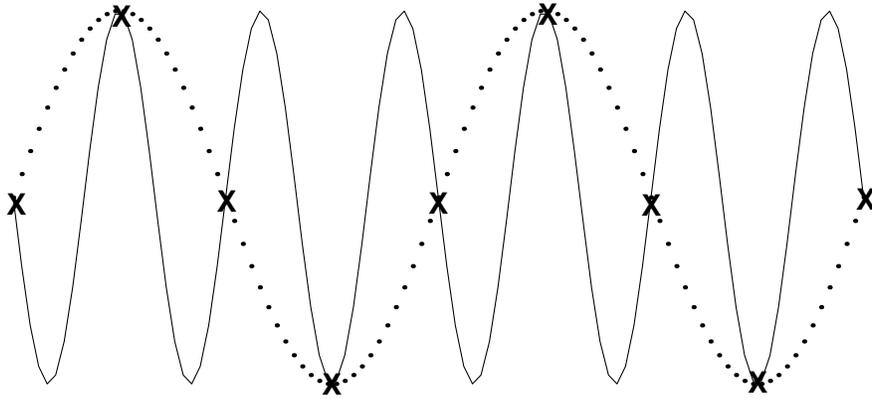


Figura 6: O erro de *aliasing*.

Agora o erro de *aliasing* foi evitado com o aumento de  $N_2$ , porque a onda  $k_0 = -6$  é bem resolvida nas duas malhas  $N_1 = 14$  e  $N_2 = 12$ .

Do exemplo 3.3 concluímos que uma receita *antialiasing* é fazer uma redução do número de pontos da malha que seja mais gradativa.

Portanto, o erro de *aliasing* tem papel importante na propagação espectral, no sentido de que pode ser gerada uma onda espúria.

A conclusão deste capítulo é que o único erro na parte espectral dos modelos de água-rasa é devido ao *aliasing* combinado com o truncamento espectral. No restante da tese, analisaremos este erro, em especial, a sua relação com as grades reduzidas.

## 4 A DFT Unidimensional

Neste capítulo, recordaremos algumas propriedades da transformada discreta de Fourier (DFT), necessárias nos capítulos seguintes. Todos os resultados deste capítulo são clássicos e podem ser encontrados em [2], [17] e [10].

A DFT é uma versão discreta da série de Fourier. Ela fornece aproximações para os coeficientes de Fourier de uma função dada. Nosso objetivo é estimar o tamanho do erro nessas aproximações, para isto obteremos a fórmula de Poisson para o cálculo do erro entre o coeficiente de Fourier exato dado pela transformada de Fourier e o coeficiente aproximado dado pela DFT. Também deduziremos uma estimativa do decaimento deste erro. Estamos interessados em erros pontuais. Por exemplo, se a componente DFT é usada para aproximar o coeficiente de Fourier, qual o erro desta aproximação?

Seja  $f$  uma função  $A$ -periódica suave de uma variável real  $x$  definida num intervalo  $D = [-A/2, A/2]$ , que tem uma representação em série de Fourier da forma

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi kx/A}. \quad (4.1)$$

Temos a seguinte propriedade de ortogonalidade para a exponencial complexa

$$\int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} e^{i2\pi jx/A} e^{-i2\pi kx/A} dx = A\delta_j(k), \quad (4.2)$$

onde  $\delta_j(k)$  é o *delta de Kronecker* usual definido por

$$\delta_j(k) = \begin{cases} 1, & \text{se } k = j \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.3)$$

Formalmente, os coeficientes de Fourier  $c_k$  em (4.1) são dados pelas integrais

$$c_k = \frac{1}{A} \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} f(x) e^{-i2\pi kx/A} dx, \quad (4.4)$$

para  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Consideremos os pontos de malha

$$x_n = n\Delta x = n\frac{A}{N}, \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1,$$

denotemos  $f_n = f(x_n)$ , logo por (4.1)

$$f_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi kx_n/A} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi nk/N}. \quad (4.5)$$

### 4.1 Propriedades da DFT

A transformada discreta de Fourier (DFT) de  $f$  é definida abaixo, para  $n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$

$$F_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} f_n e^{-i2\pi nk/N}, \quad (4.6)$$

para  $k = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$  e a transformada discreta de Fourier inversa (IDFT) de  $f$  é definida por

$$f_n = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} F_k e^{i2\pi nk/N}. \quad (4.7)$$

No caso discreto, temos o resultado seguinte

**Lema 4.1** (*Propriedade de Ortogonalidade*) *Sejam  $j$  e  $k$  inteiros e  $N$  um inteiro positivo. Então*

$$\sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} e^{i2\pi nj/N} e^{-i2\pi nk/N} = N\tilde{\delta}_N(j - k),$$

onde  $\tilde{\delta}$  é o delta modular de Kronecker dado em (3.14).

**Observação 4.1** *Notemos que como a sequência  $e^{i2\pi n/N}$  é  $N$ -periódica, a propriedade de ortogonalidade acontece quando o somatório no lema 4.1 é calculada sobre quaisquer  $N$  valores consecutivos de  $n$ , ou seja*

$$\sum_{n=P}^{P+N-1} e^{i2\pi nj/N} e^{-i2\pi nk/N} = N\tilde{\delta}_N(j - k),$$

para qualquer inteiro  $P$ .

## 4.2 A Fórmula de Poisson

Substituindo (4.5) em (4.6) e usando o lema 4.1, obtemos para  $k = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$

$$\begin{aligned} F_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \left( \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{i2\pi nj/N} \right) e^{-i2\pi nk/N} \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j \frac{1}{N} \left( \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} e^{i2\pi nj/N} e^{-i2\pi nk/N} \right) \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j \tilde{\delta}_N(j - k) = \sum_{j'=-\infty}^{\infty} c_{k+j'N} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_{k+jN}, \end{aligned}$$

onde usamos que  $\tilde{\delta}_N(j - k) = 1$ , para  $j - k = j'N$ ,  $j' \in \mathbf{Z}$ .

Donde segue a fórmula da Soma de Poisson discreta para  $k = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$ :

$$F_k = c_k + \sum_{j=1}^{\infty} (c_{k+jN} + c_{k-jN}). \quad (4.8)$$

O erro de *aliasing* é precisamente a diferença  $F_k - c_k$ , entre o coeficiente  $F_k$  fornecido pela DFT e o coeficiente de Fourier exato  $c_k$ .

### 4.3 Decaimento dos Coeficientes de Fourier

A fórmula de Poisson é uma relação entre os coeficientes da DFT de uma função e seus coeficientes de Fourier. Queremos estimar a magnitude  $|F_k - c_k|$ , ou seja, o erro nos coeficientes de Fourier quando avaliados por meio da DFT. Mas antes precisamos do resultado seguinte.

**Teorema 4.1** (*Taxa de Decaimento dos Coeficientes de Fourier*). *Consideremos  $f$  e suas  $r + 1$  primeiras derivadas  $A$ -periódicas e contínuas no domínio  $D$ , para  $r \geq 1$ . Então os coeficientes de Fourier de  $f$  satisfazem*

$$|c_k| \leq \frac{C}{|k|^{r+1}}, \quad \forall k \neq 0,$$

onde  $C$  é uma constante independente de  $k$ .

Primeiramente notamos que se  $k = 0$ , então por (4.4)  $|c_0|$  é limitado, pois  $f$  é limitada em  $D$ .

Para demonstrar este teorema, começamos usando a definição (4.4) do  $k$ -ésimo coeficiente de Fourier,  $k \neq 0$ , e integramos por partes

$$Ac_k = \int_{-A/2}^{A/2} f(x) e^{-i2\pi kx/A} dx$$

para obter

$$Ac_k = f(x) e^{-i2\pi kx/A} \frac{A}{-i2\pi k} \Big|_{-A/2}^{A/2} + \frac{A}{i2\pi k} \int_{-A/2}^{A/2} f'(x) e^{-i2\pi kx/A} dx.$$

O termo integrado (primeiro termo) do lado direito da igualdade acima se anula por causa da periodicidade de  $f$  e da exponencial complexa; o termo restante é integrado por partes de novo. Se este passo é executado um total de  $r + 1$  vezes e a periodicidade das derivadas é usada a cada vez, encontramos

$$Ac_k = (-1)^{r+2} \left( \frac{A}{i2\pi k} \right)^{r+1} \int_{-A/2}^{A/2} f^{(r+1)}(x) e^{-i2\pi kx/A} dx$$

logo, usando a hipótese do enunciado do teorema, a integral acima fica limitada por uma constante, o que resulta em

$$A|c_k| \leq C' \left( \frac{A}{2\pi|k|} \right)^{r+1},$$

onde

$$C' = A \max_{x \in D} |f^{(r+1)}(x)|,$$

logo

$$|c_k| \leq \frac{C}{|k|^{r+1}},$$

como queríamos demonstrar.

## 4.4 Erro nos Coeficientes de Fourier

Este resultado do Teorema 4.1 pode agora ser usado para obter uma limitação para o erro no uso da DFT como uma aproximação dos coeficientes de Fourier de uma função periódica. Temos o seguinte

**Teorema 4.2** (*Erro na DFT*). *Consideremos  $f$  e suas  $r + 1$  primeiras derivadas  $A$ -periódicas na direção- $x$  e contínuas em  $D$ , para  $r \geq 1$ . Então o erro na DFT como uma aproximação para os coeficientes de Fourier de  $f$  satisfaz*

$$|F_k - c_k| \leq \frac{C}{N^{r+1}},$$

para  $k = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$ , onde  $C$  é uma constante independente de  $k$  e  $N$ .

Pela fórmula (4.8) segue que

$$F_k - c_k = \sum_{j=1}^{\infty} (c_{k+jN} + c_{k-jN}), \quad k = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1.$$

Para  $k = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$ , temos que  $k \pm jN \neq 0$ , logo pelo teorema 4.1, os coeficientes de Fourier satisfazem

$$|c_{k \pm jN}| \leq \frac{C}{|k \pm jN|^{r+1}},$$

para alguma constante  $C$ , independente de  $k$ . Portanto, para  $k = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$

$$\begin{aligned} |F_k - c_k| &\leq \sum_{j=1}^{\infty} C \left( \frac{1}{|k + jN|^{r+1}} + \frac{1}{|k - jN|^{r+1}} \right) \\ &= \frac{C}{N^{r+1}} \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\left|j + \frac{k}{N}\right|^{r+1}} + \frac{1}{\left|j - \frac{k}{N}\right|^{r+1}} \right). \end{aligned}$$

Pelo teste da integral, as séries acima convergem para  $r \geq 1$ . Portanto, como queríamos mostrar, para outra constante  $C$  vale

$$|F_k - c_k| \leq \frac{C}{N^{r+1}}.$$

## 5 A DFT Bidimensional em Grade Uniforme

Neste capítulo, estenderemos os resultados clássicos do capítulo anterior para o caso bidimensional em grade uniforme. Deduzimos uma fórmula de Poisson para o erro nos coeficientes de Fourier quando usamos DFT em vez da transformada contínua, também obtemos uma estimativa deste erro usando decaimento. Esta estimativa é útil para métodos espectrais no toro e serve como preliminar da estimativa que faremos no capítulo 6, usando grade reduzida e no capítulo 7 para métodos espectrais na esfera.

### 5.1 Propriedades

Os resultados esta subseção são clássicos e podem ser encontrados em [2] e [10]. Agora, consideremos uma função  $f$  a duas variáveis definida na região retangular  $D = \left[ -\frac{A}{2}, \frac{A}{2} \right] \times \left[ -\frac{B}{2}, \frac{B}{2} \right]$ . Supomos que  $f$  é uma função suave no domínio  $D$ , que tem uma representação como uma série dupla de Fourier da forma

$$f(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{k,l} e^{i2\pi k \frac{x}{A}} e^{i2\pi l \frac{y}{B}}, \quad (5.1)$$

onde os coeficientes complexos  $c_{k,l}$  são dados pelas integrais

$$c_{k,l} = \frac{1}{AB} \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} f(x, y) e^{-i2\pi k \frac{x}{A}} e^{-i2\pi l \frac{y}{B}} dx dy, \quad k, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.2)$$

A série (5.1) converge (pontualmente) para a função  $f$  no domínio  $D$  e para a sua *extensão periódica* fora desse domínio. Esta série descreve como a função  $f$  pode ser obtida como uma combinação linear infinita de modos (senos e cossenos) que têm um número inteiro de períodos no domínio  $D$ . O coeficiente  $c_{k,l}$  é simplesmente o total pelo qual o  $k, l$ -ésimo modo “pesa” nesta representação de  $f$ .

Supomos que a função  $f$  é amostrada no domínio  $D$  em pontos espaçados uniformemente numa grade uniforme (GU) :

$$\begin{aligned} x_n &= n\Delta x = n\frac{A}{N}, & n &= -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1 \\ y_m &= m\Delta y = m\frac{B}{M}, & m &= -\frac{M}{2}, \dots, \frac{M}{2} - 1. \end{aligned}$$

Denotando os valores amostrados  $f_{n,m} = f(x_n, y_m)$ , definimos a transformada discreta de Fourier dupla (DFT2GU) de  $f$  por

$$F_{k,l} = \frac{1}{M} \sum_{m=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} f_{n,m} e^{-i2\pi nk/N} e^{-i2\pi ml/M}, \quad (5.3)$$

para  $k = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$  e  $l = -\frac{M}{2}, \dots, \frac{M}{2} - 1$  e a inversa (IDFT2GU) por

$$f_{n,m} = \sum_{l=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} F_{k,l} e^{i2\pi nk/N} e^{i2\pi ml/M}, \quad (5.4)$$

para  $n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$  e  $m = -\frac{M}{2}, \dots, \frac{M}{2} - 1$ .

## 5.2 A Fórmula de Poisson

Com os valores amostrados  $f_{n,m} = f(x_n, y_m)$ , podemos usar a série de Fourier (5.1) de  $f$  para escrever, com  $n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$  e  $m = -\frac{M}{2}, \dots, \frac{M}{2} - 1$  :

$$\begin{aligned} f_{n,m} = f(x_n, y_m) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_{j,p} e^{i2\pi j \frac{x_n}{A}} e^{i2\pi p \frac{y_m}{B}} \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_{j,p} e^{i2\pi n j/N} e^{i2\pi m p/M}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Logo ao substituir (5.5) em (5.3), obtemos para  $k = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$  e  $l = -\frac{M}{2}, \dots, \frac{M}{2} - 1$

$$F_{k,l} = \frac{1}{M} \sum_{m=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \left( \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_{j,p} e^{i2\pi n j/N} e^{i2\pi m p/M} \right) e^{-i2\pi n k/N} e^{-i2\pi m l/M}.$$

Segue que

$$F_{k,l} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_{j,p} \frac{1}{M} \sum_{m=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} e^{i2\pi n(j-k)/N} e^{i2\pi m(p-l)/M}$$

donde pelo lema 4.1, para  $l = -\frac{M}{2}, \dots, \frac{M}{2} - 1$ ,  $k = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$

$$F_{k,l} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_{j,p} \tilde{\delta}_N(j-k) \tilde{\delta}_M(p-l) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_{k+jN, l+pM}. \quad (5.6)$$

Portanto, obtemos a fórmula da Soma de Poisson discreta para  $l = -\frac{M}{2}, \dots, \frac{M}{2} - 1$ ,  $k = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$  :

$$F_{k,l} = c_{k,l} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{p=-\infty \\ (j,p) \neq (0,0)}}^{\infty} c_{k+jN, l+pM}. \quad (5.7)$$

Esta fórmula é uma relação entre a DFT2 de uma função e os seus coeficientes de Fourier. Neste caso, o coeficiente  $F_{k,l}$  é igual a  $c_{k,l}$  mais coeficientes de Fourier adicionais correspondentes a outros números de onda. Concluimos assim, que o  $k, l$ -ésimo modo está ligado aos outros modos cujos índices diferem de  $k$  por múltiplos de  $N$  e de  $l$  por múltiplos de  $M$ . Isto é precisamente o erro de *aliasing* dado por

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{p=-\infty \\ (j,p) \neq (0,0)}}^{\infty} c_{k+jN, l+pM}.$$

Neste caso, o coeficiente  $F_{k,l}$  é igual a  $c_{k,l}$  mais combinações de coeficientes de Fourier adicionais correspondentes aos números de onda mais altos. Vemos que o  $k, l$ -ésimo modo está ligado aos outros modos cujos índices diferem de  $k$  por múltiplos de  $N$  e de  $l$  por múltiplos de  $M$ . Vejamos porque estes modos estão associados aos outros.

O valor de  $k, l$ -ésimo modo, com número de onda  $w_k = \frac{k}{A}$ ,  $w_l = \frac{l}{B}$ , no ponto de grade  $x_n = \frac{nA}{N}$  e  $y_m = \frac{mB}{M}$  é dado por

$$e^{i2\pi w_k x_n} e^{i2\pi w_l y_m} = e^{i2\pi(\frac{k}{A})(\frac{nA}{N})} e^{i2\pi(\frac{l}{B})(\frac{mB}{M})} = e^{i2\pi nk/N} e^{i2\pi ml/M}.$$

O valor do modo  $k + jN$ ,  $l + pM$ , com número de onda  $w_{k+jN} = \frac{k+jN}{A}$  e  $w_{l+pM} = \frac{l+pM}{B}$ , no ponto de grade  $(x_n, y_m)$  é

$$\begin{aligned} e^{i2\pi w_{k+jN} x_n} e^{i2\pi w_{l+pM} y_m} &= e^{i2\pi(\frac{k+jN}{A})\frac{nA}{N}} e^{i2\pi(\frac{l+pM}{B})\frac{mB}{M}} \\ &= e^{i2\pi nk/N} e^{i2\pi ml/M} e^{i2\pi jn} e^{i2\pi pm} \\ &= e^{i2\pi nk/N} e^{i2\pi ml/M}. \end{aligned}$$

Então, os modos  $(k, l)$  e  $(k + jN, l + pM)$  coincidem nos pontos da grade; por isto, eles são confundidos. Isto é precisamente o efeito *aliasing*, no qual os modos com números de onda mais altos mascaram os modos com números de onda mais baixos.

### 5.3 Decaimento dos Coeficientes de Fourier

A fórmula da soma de Poisson discreta indica como são introduzidos erros na DFT2. O nosso objetivo é estimar a magnitude de  $|F_{k,l} - c_{k,l}|$ , neste sentido deduzimos o seguinte

**Teorema 5.1** (*Taxa de Decaimento dos Coeficientes de Fourier*). *Consideremos  $f$  e todas as suas derivadas parciais mistas até a ordem  $(q + 1) + (r + 1)$ ,  $A$ -periódicas na direção- $x$  e  $B$ -periódicas na direção- $y$  e contínuas no domínio  $D$ , para  $r, q \geq 1$ . Então os coeficientes de Fourier de  $f$  satisfazem*

$$|c_{k,l}| \leq \frac{C}{|k|^{r+1}|l|^{q+1}}, \quad \forall l \neq 0, \quad \forall k \neq 0,$$

onde  $C$  é uma constante independente de  $k$  e  $l$ .

Primeiramente notamos que se  $k = l = 0$ , então por (5.2)  $|c_{k,l}|$  é limitado, pois  $f$  é limitada em  $D$ .

Para demonstrar este teorema, começamos usando a definição (5.2) do  $k, l$ -ésimo coeficiente de Fourier,  $kl \neq 0$ , e integramos por partes

$$ABc_{k,l} = \int_{-A/2}^{A/2} \int_{-B/2}^{B/2} f(x, y) e^{-i2\pi kx/A} e^{-i2\pi ly/B} dx dy$$

para obter

$$ABc_{k,l} = \frac{A}{-i2\pi k} \int_{-B/2}^{B/2} \left( f(x, y) e^{-i2\pi kx/A} \Big|_{-A/2}^{A/2} - \int_{-A/2}^{A/2} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) e^{-i2\pi kx/A} dx \right) e^{-i2\pi ly/B} dy.$$

O termo integrado (primeiro termo) do lado direito acima anula-se por causa da periodicidade de  $f$  e da exponencial complexa; o termo restante é integrado por partes

de novo. Se este passo é executado um total de  $r + 1$  vezes e a periodicidade das derivadas é usada a cada vez, temos que

$$ABc_{k,l} = (-1)^{r+2} \left( \frac{A}{i2\pi k} \right)^{r+1} \int_{-B/2}^{B/2} \left( \int_{-A/2}^{A/2} \frac{\partial^{r+1} f}{\partial x^{r+1}}(x, y) e^{-i2\pi kx/A} dx \right) e^{-i2\pi ly/B} dy, \quad (5.8)$$

e invertendo a ordem de integração, obtemos

$$ABc_{k,l} = (-1)^{r+2} \left( \frac{A}{i2\pi k} \right)^{r+1} \int_{-A/2}^{A/2} \left( \int_{-B/2}^{B/2} \frac{\partial^{r+1} f}{\partial x^{r+1}}(x, y) e^{-i2\pi ky/B} dy \right) e^{-i2\pi lx/A} dx, \quad (5.9)$$

agora, usando um raciocínio análogo ao anterior, aplicado à função  $\frac{\partial^{r+1} f}{\partial x^{r+1}}(x, y)$ , segue que

$$ABc_{k,l} = (-1)^{r+q} \left( \frac{A}{i2\pi k} \right)^{r+1} \left( \frac{B}{i2\pi l} \right)^{q+1} \int_{-A/2}^{A/2} \int_{-B/2}^{B/2} \frac{\partial^{r+q+2} f}{\partial x^{r+q+2}}(x, y) e^{-i2\pi ky/B} dy e^{-i2\pi lx/A} dx.$$

Usando a hipótese, resulta que

$$|ABc_{k,l}| = \left| \frac{A}{i2\pi k} \right|^{r+1} \left| \frac{B}{i2\pi l} \right|^{q+1} C'. \quad (5.10)$$

Então de (5.10), obtemos

$$|c_{k,l}| \leq \frac{C}{|k|^{r+1}|l|^{q+1}}.$$

Agora, para demonstrar o caso  $k = 0$  ou  $l = 0$ , supomos sem perda de generalidade que  $l = 0$ , então usando a definição (5.2) e integrando por partes abaixo

$$ABc_{k,0} = \int_{-A/2}^{A/2} \int_{-B/2}^{B/2} f(x, y) e^{-i2\pi kx/A} dx dy$$

obtemos

$$ABc_{k,0} = \frac{A}{-i2\pi k} \int_{-B/2}^{B/2} \left( f(x, y) e^{-i2\pi kx/A} \Big|_{-A/2}^{A/2} - \int_{-A/2}^{A/2} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) e^{-i2\pi kx/A} dx \right) dy.$$

Assim, seguindo o mesmo raciocínio que empregamos para obter (5.9), temos que

$$ABc_{k,0} = (-1)^{r+2} \left( \frac{A}{i2\pi k} \right)^{r+1} \int_{-A/2}^{A/2} \left( \int_{-B/2}^{B/2} \frac{\partial^{r+1} f}{\partial x^{r+1}}(x, y) e^{-i2\pi ky/B} dy \right) dx,$$

donde

$$|ABc_{k,0}| = \left| \frac{A}{i2\pi k} \right|^{r+1} C'.$$

Logo

$$|c_{k,0}| \leq \frac{C}{|k|^{r+1}},$$

como queríamos demonstrar.

## 5.4 Erro nos Coeficientes de Fourier

Agora estimaremos o erro pontual na aproximação dos coeficientes de Fourier de  $f$  via a DFT2GU, usando o seguinte

**Teorema 5.2** (*Erro na DFT2GU*). *Consideremos  $f$  e todas as suas derivadas parciais mistas até a ordem  $q + r + 2$ ,  $A$ -periódicas na direção- $x$  e  $B$ -periódicas na direção- $y$  e contínuas em  $D$ , para  $r, q \geq 1$ . Então o erro na DFT2GU como uma aproximação para os coeficientes de Fourier de  $f$  satisfaz*

$$|F_{k,l} - c_{k,l}| \leq \frac{C}{N^{r+1}} + \frac{D}{M^{q+1}},$$

para  $l = -\frac{M}{2}, \dots, \frac{M}{2} - 1, l \neq 0$  e  $k = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1, k \neq 0$  onde  $C$  e  $D$  são constantes independentes de  $k, l, M$  e  $N$ .

De fato, da fórmula (5.7) segue que

$$F_{k,l} - c_{k,l} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{p=-\infty \\ (j,p) \neq (0,0)}}^{\infty} c_{k+jN, l+pM},$$

para  $l = -\frac{M}{2}, \dots, \frac{M}{2} - 1$  e  $k = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$ .

Para  $l = -\frac{M}{2}, \dots, \frac{M}{2} - 1$  e  $k = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1, kl \neq 0$ , temos que  $l$  não pode ser múltiplo de  $M$  e  $k$  não pode ser múltiplo de  $N$ , ou seja,  $l + pM \neq 0, \forall p \in \mathbf{Z}$  e  $k + jN \neq 0, \forall j \in \mathbf{Z}$ , logo pelo teorema 5.1, obtemos

$$\begin{aligned} |F_{k,l} - c_{k,l}| &\leq \sum_{\substack{j=-\infty \\ j \neq 0}}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{C'}{|k + jN|^{r+1} |l + pM|^{q+1}} + \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{C''}{|k|^{r+1} |l + pM|^{q+1}} \\ &\leq \frac{C'}{N^{r+1} M^{q+1}} \sum_{\substack{j=-\infty \\ j \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{|j + \frac{k}{N}|^{r+1}} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|p + \frac{l}{M}|^{q+1}} + \\ &+ \frac{C''}{M^{q+1}} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|k|^{r+1} |p + \frac{l}{M}|^{q+1}} \\ &= \frac{C}{M^{q+1} N^{r+1}} + \frac{D}{M^{q+1} |k|^{r+1}} \leq \frac{C}{N^{r+1}} + \frac{D}{M^{q+1}}. \end{aligned}$$

As séries acima convergem pois  $r, q \geq 1$ .

**Observação 5.1** *Se  $k = l = 0$ , então  $F_{0,0} - c_{0,0} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{p=-\infty \\ (j,p) \neq (0,0)}}^{\infty} c_{jN, pM}$ , e se  $kl = 0$ ,*

*por exemplo,  $k = 0$  e  $l \neq 0$ , então  $F_{0,l} - c_{0,l} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{p=-\infty \\ (j,p) \neq (0,0)}}^{\infty} c_{jN, l+pM}$ , onde em qualquer*

*caso no somatório temos que  $j$  e  $p$  não se anulam simultaneamente. Como demonstramos no teorema 5.1 que o coeficiente de Fourier  $c_{j,p}$  sempre terá um decaimento na coordenada não nula, temos em qualquer situação um decaimento para  $F_{k,l} - c_{k,l}$ , que pode ser demonstrada de modo análoga ao caso  $kl \neq 0$ .*

## 6 A DFT Bidimensional em Grade Reduzida

Agora vamos investigar o seguinte: quão bem a DFT2 aproxima os coeficientes de Fourier de  $f$  quando usamos uma grade reduzida de pontos? Para isto deduziremos uma versão da fórmula de Poisson para grade reduzida, o que serve como preliminar do capítulo 7. Também é importante explicar a inversa IDFT e analisar a complementaridade que existe entre as duas transformadas e suas aproximações. A vantagem no uso de grade reduzida ocorre no sentido em que o erro não é exagerado, mas a redução de custo é substancial.

### 6.1 Propriedades

Supomos que a função dada  $f$  tem período  $A$  na direção  $x$  e  $B$  na direção  $y$ ; isto inclui a situação na qual  $f$  pode ser definida apenas no domínio  $D$  e é então estendida periodicamente. Supomos que a função periódica  $f$  é amostrada no domínio  $D$  em pontos espaçados numa grade reduzida (GR), conforme a figura 4

$$y_m = m\Delta y = \frac{mB}{M}, \quad m = -\frac{M}{2}, \dots, \frac{M}{2} - 1;$$

$$x_n(m) = n\Delta x(m) = \frac{nA}{N(m)}, \quad n = -\frac{N(m)}{2}, \dots, \frac{N(m)}{2} - 1.$$

Denotando os valores amostrados  $f_{n,m} = f(x_n(m), y_m)$ , definimos a transformada discreta de Fourier (DFT2GR),  $F_{k,l}$ , para  $-M/2 \leq l \leq (M/2) - 1$  da seguinte maneira. Primeiramente, se  $N = \max_m N(m)$ , definimos

$$\psi_{k,m} = \begin{cases} \frac{1}{N(m)} \sum_{n=-\frac{N(m)}{2}}^{\frac{N(m)}{2}-1} f_{n,m} e^{-i2\pi nk/N(m)}, & -\frac{N(m)}{2} \leq k \leq \frac{N(m)}{2} - 1 \\ 0, & -\frac{N}{2} \leq k < -\frac{N(m)}{2} \text{ ou } \frac{N(m)}{2} \leq k < \frac{N}{2}, \end{cases} \quad (6.1)$$

então a (DFT2GR), para  $-\frac{N}{2} \leq k \leq \frac{N}{2} - 1$  é

$$F_{k,l} = \frac{1}{M} \sum_{m=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} \psi_{k,m} e^{-i2\pi ml/M}. \quad (6.2)$$

Definimos a transformada discreta de Fourier inversa (IDFT2GR), para  $n = -\frac{N(m)}{2}, \dots, \frac{N(m)}{2} - 1$  e  $m = -\frac{M}{2}, \dots, \frac{M}{2} - 1$ , por

$$f_{n,m} = \sum_{l=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} F_{k,l} e^{i2\pi nk/N(m)} e^{i2\pi ml/M}. \quad (6.3)$$

**Observação 6.1** Em contrapartida, pela fórmula (5.1) para séries de Fourier, segue que

$$\begin{aligned} f_{n,m} = f(x_n(m), y_m) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_{j,p} e^{i2\pi j \frac{x_n(m)}{A}} e^{i2\pi p \frac{y_m}{B}} \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_{j,p} e^{i2\pi nj/N(m)} e^{i2\pi mp/M}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

## 6.2 A Fórmula de Poisson

Ao substituir (6.4) em (6.1), obtemos de (6.2) utilizando a função (3.15) que

$$F_{k,l} = \frac{1}{M} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_{j,p} \sum_{m=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} I_k(m) \left( \frac{1}{N(m)} \sum_{n=-\frac{N(m)}{2}}^{\frac{N(m)}{2}-1} e^{i2\pi n(j-k)/N(m)} \right) e^{i2\pi m(p-l)/M},$$

portanto, pelo lema 4.1, obtemos a fórmula da soma de Poisson discreta para  $l = -\frac{M}{2}, \dots, \frac{M}{2} - 1$ ,  $k = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$

$$F_{k,l} = \frac{1}{M} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} I_k(m) c_{j,p} \tilde{\delta}_{N(m)}(j-k) e^{i2\pi m(p-l)/M}. \quad (6.5)$$

ou na forma

$$F_{k,l} = \frac{1}{M} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} I_k(m) c_{k+jN(m),p} e^{i2\pi m(p-l)/M}. \quad (6.6)$$

Notemos que se  $N(m) = N$ , para  $m = -\frac{M}{2}, \dots, \frac{M}{2} - 1$ , então a fórmula (6.6) reduz-se à fórmula (5.7) para grade uniforme.

A fórmula (6.6) indica como e quando o *aliasing* introduz erros na DFT2GR. Mas quão sério é este erro? Para responder a esta questão, vamos deduzir uma expressão para calcular a diferença  $F_{k,l} - c_{k,l}$ , ou seja, o erro nos coeficientes produzidos pela DFT2GR.

Usando a função (3.15) e definindo a função  $J_k(m) = 1 - I_k(m)$ , podemos rees-

crever a fórmula (6.5) da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
F_{k,l} &= \frac{1}{M} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} [1 - J_k(m)] c_{j,p} \tilde{\delta}_{N(m)}(j-k) e^{i2\pi m(p-l)/M} \\
&= \frac{1}{M} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} c_{j,p} \tilde{\delta}_{N(m)}(j-k) e^{i2\pi m(p-l)/M} + \\
&+ \frac{1}{M} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} [-J_k(m)] c_{j,p} \tilde{\delta}_{N(m)}(j-k) e^{i2\pi m(p-l)/M} \\
&= c_{k,l} + \frac{1}{M} \sum_{\substack{j=-\infty \\ (j,p) \neq (k,l)}}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} c_{j,p} \tilde{\delta}_{N(m)}(j-k) e^{i2\pi m(p-l)/M} + \\
&+ \frac{1}{M} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} [-J_k(m)] c_{j,p} \tilde{\delta}_{N(m)}(j-k) e^{i2\pi m(p-l)/M},
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
F_{k,l} - c_{k,l} &= \frac{1}{M} \sum_{\substack{j=-\infty \\ (j,p) \neq (k,l)}}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} c_{j,p} \tilde{\delta}_{N(m)}(j-k) e^{i2\pi m(p-l)/M} + \\
&+ \frac{1}{M} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} [-J_k(m)] c_{j,p} \tilde{\delta}_{N(m)}(j-k) e^{i2\pi m(p-l)/M}.
\end{aligned}$$

Agora definimos a seguinte função

$$\delta_{k,l}(j,p) = \begin{cases} 1, & \text{se } (j,p) = (k,l) \\ 0, & \text{se } (j,p) \neq (k,l), \end{cases} \quad (6.7)$$

então

$$\begin{aligned}
F_{k,l} - c_{k,l} &= \frac{1}{M} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} [1 - \delta_{k,l}(j,p)] c_{j,p} \tilde{\delta}_{N(m)}(j-k) e^{i2\pi m(p-l)/M} + \\
&+ \frac{1}{M} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} [-J_k(m)] c_{j,p} \tilde{\delta}_{N(m)}(j-k) e^{i2\pi m(p-l)/M}.
\end{aligned}$$

Portanto, obtemos a seguinte versão da fórmula de Poisson

$$F_{k,l} - c_{k,l} = \frac{1}{M} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} [I_k(m) - \delta_{k,l}(j,p)] c_{j,p} \tilde{\delta}_{N(m)}(j-k) e^{i2\pi m(p-l)/M}. \quad (6.8)$$

### 6.3 Erro nos Coeficientes de Fourier

O erro no cálculo numérico dos coeficientes espectrais tem duas partes. Uma parte deste erro é devido ao truncamento, a qual existiria mesmo para grade uniforme. Outra parte é devida apenas ao uso de grade não uniforme.

O decaimento no erro de truncamento é bem conhecido e pode ser encontrado, por exemplo, em [3]. Acreditamos que vale um resultado análogo ao Teorema 5.2 para a estimativa do decaimento do erro pontual devido ao uso da grade reduzida na aproximação dos coeficientes de Fourier de  $f$ .

### 6.4 Erro na DFT2GR Inversa

Agora partimos do domínio de frequências com uma sequência  $c_{k,l}$  de coeficientes de Fourier de uma função  $f$  no domínio  $D$ . Queremos reconstruir a função  $f$  que tem os coeficientes de Fourier  $c_{k,l}$ , ou seja, determinar as amostras  $f(x_n(m), y_m)$ .

Pela definição de IDFT2GR,

$$f_{n,m} = \sum_{l=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} F_{k,l} e^{i2\pi k \frac{x_n(m)}{A}} e^{i2\pi l \frac{y_m}{B}}, \quad (6.9)$$

onde  $n = -\frac{N(m)}{2}, \dots, \frac{N(m)}{2} - 1$  e  $m = -\frac{M}{2}, \dots, \frac{M}{2} - 1$ .

A série de Fourier para  $f(x_n(m), y_m)$  é

$$f(x_n(m), y_m) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{k,l} e^{i2\pi k \frac{x_n(m)}{A}} e^{i2\pi l \frac{y_m}{B}}, \quad (6.10)$$

onde  $n = -\frac{N(m)}{2}, \dots, \frac{N(m)}{2} - 1$  e  $m = -\frac{M}{2}, \dots, \frac{M}{2} - 1$ .

Suponhamos que não haja erro de *aliasing* e analisemos o erro que resulta quando subtraímos (6.9) de (6.10). Neste caso,  $F_{k,l} = c_{k,l}$ , para  $k = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$  e  $l = -\frac{M}{2}, \dots, \frac{M}{2} - 1$ , então obtemos

$$f(x_n(m), y_m) - \tilde{f}_{n,m} = \left( \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\frac{N(m)}{2}-1} + \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=\frac{N(m)}{2}}^{\infty} + \sum_{l=-\frac{M}{2}-1}^{-\frac{M}{2}} \sum_{k=-\frac{N(m)}{2}}^{\frac{N(m)}{2}-1} + \sum_{l=\frac{M}{2}}^{\infty} \sum_{k=-\frac{N(m)}{2}}^{\frac{N(m)}{2}-1} \right) c_{k,l} e^{i2\pi k \frac{x_n(m)}{A}} e^{i2\pi l \frac{y_m}{B}}, \quad (6.11)$$

que é o erro de truncamento.

Logo o erro no uso da IDFT2GR para aproximar as séries de Fourier é, a grosso modo, o erro no truncamento da série de Fourier mais o erro de *aliasing*.

**Observação 6.2** *Uma função  $f$  com a propriedade de que os coeficientes de Fourier  $c_{k,l}$  são zero para  $|k| > \frac{N}{2}$ ,  $|l| > \frac{M}{2}$ , é dita ser de banda-limitada.*

Notemos que em (6.11), se os coeficientes  $c_{k,l}$  são nulos, exceto para os valores de  $k = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$  e  $l = -\frac{M}{2}, \dots, \frac{M}{2} - 1$ , então a IDFT2GR reproduz exatamente os

valores de  $f(x_n(m), y_m)$ , a menos de erro de *aliasing*. Este é o caso de uma função periódica de banda limitada. Isto simplesmente diz que se  $f$  tem um número finito de componentes de frequência e a IDFT2GR tem termos suficientes para incluir todos eles, então  $f$  pode ser reconstruída exatamente nos pontos de grade.

## 7 Harmônicos Esféricos

Este é o capítulo central da tese. Neste capítulo, deduzimos uma versão da fórmula de Poisson que permite a avaliação de erros ao usar grade reduzida em expansões em harmônicos esféricos (ver apêndice E).

Os harmônicos esféricos são as autofunções do operador laplaciano na esfera (ver equação (E.2)). Estes harmônicos são usados em modelos de circulação geral e servem como base para expandir os harmônicos de Hough (ver apêndice F).

Seja  $\lambda \in [0, 2\pi]$  a longitude e  $\mu = \sin\theta$ , onde  $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  é a latitude. Se  $f$  é uma função suave na esfera, ela pode ser representada por uma expansão convergente de harmônicos esféricos da forma

$$f(\lambda, \mu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=|k|}^{\infty} a_{k,l} Y_{k,l}(\lambda, \mu), \quad (7.1)$$

onde cada harmônico esférico  $Y_{k,l}(\lambda, \mu) = P_{k,l}(\mu)e^{ik\lambda}$  é o produto de um modo de Fourier em  $\lambda$  e uma função de Legendre em  $\mu$ . Os modos de Fourier obedecem à relação de ortogonalidade (4.2), enquanto que os de Legendre satisfazem à relação de ortogonalidade (D.4).

O truncamento mais usado nas expansões em harmônicos esféricos é o truncamento triangular de tamanho  $T$  (ver (E.3) no apêndice E). O erro de truncamento tem um decaimento com  $T$  conforme veremos na subseção 8.1. Logo da série infinita (7.1), obtemos a aproximação

$$f(\lambda, \mu) = \sum_{k=-T}^T \sum_{l=|k|}^T a_{k,l} Y_{k,l}(\lambda, \mu). \quad (7.2)$$

A transformada do espaço físico para as coordenadas espectrais é obtida como segue. A relação de ortogonalidade (E.4) para os harmônicos esféricos implica que

$$a_{k,l} = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} f(\lambda, \mu) \bar{Y}_{k,l}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu, \quad (7.3)$$

ou equivalentemente

$$a_{k,l} = \int_{-1}^1 \hat{a}_k(\mu) P_{k,l}(\mu) d\mu, \quad (7.4)$$

onde

$$\hat{a}_k(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\lambda, \mu) e^{-ik\lambda} d\lambda. \quad (7.5)$$

A última destas integrais é a transformada de Fourier que pode ser avaliada a partir dos dados sobre uma malha discreta em  $\lambda$  usando DFT. Depois de computar a transformada de Fourier de  $f$ , a integral (7.4), que é a transformada de Legendre, pode ser avaliada usando quadratura gaussiana. Desde que consigamos evitar erro de *aliasing*, é possível avaliar numericamente ambos (7.4) e (7.5) sem introduzir erros além daqueles associados com o truncamento original da expansão de harmônicos esféricos em algum número de onda finito, mas isto só é possível para funções de banda limitada. Por isto, agora passemos a discutir o erro de *aliasing*.

Portanto, é importante que o procedimento de transformada não gere erros excessivos em qualquer um dos modos retidos na expansão truncada original. Assim quando usamos o método da transformada devemos reter números de pontos  $N(m)$  na direção zonal suficientes nas transformadas discretas de Fourier e número de pontos de grade meridional  $M$  suficientes na quadratura gaussiana que define a transformada de Legendre discreta. Por isto, devemos relacionar o número de pontos na malha a ser usada com o truncamento  $T$ . Usamos uma malha  $(\lambda_n, \mu_m)$ , com  $m = 1, \dots, M$ ,  $n = 1, \dots, N(m)$  pontos.

Avaliamos as integrais (7.4) e (7.5) numericamente como segue:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\lambda, \mu_m) e^{-ik\lambda} d\lambda \cong \frac{1}{N(m)} \sum_{n=1}^{N(m)} f(\lambda_n(m), \mu_m) e^{-ik\lambda_n(m)}, \quad (7.6)$$

com os pontos  $\lambda_n(m)$  uniformemente espaçados para uma dada latitude  $\mu_m$

$$\lambda_n(m) = (n-1)\Delta\lambda(m) = \frac{2\pi(n-1)}{N(m)};$$

$$\int_{-1}^1 \hat{a}_k(\mu) P_{k,l}(\mu) d\mu \cong \sum_{m=1}^M w_m \hat{a}_k(\mu_m) P_{k,l}(\mu_m). \quad (7.7)$$

Definimos as transformadas discretas como segue. Seja  $N = \max_{1 \leq m \leq M} N(m)$ , então a transformada discreta de Fourier na direção zonal  $\lambda$  é dada por

$$\varphi_{k,m} = \begin{cases} \frac{1}{N(m)} \sum_{n=1}^{N(m)} f(\lambda_n(m), \mu_m) e^{-ik\lambda_n(m)}, & -\frac{N(m)}{2} \leq k \leq \frac{N(m)}{2} - 1 \\ 0, & -\frac{N}{2} \leq k < -\frac{N(m)}{2} \text{ ou } \frac{N(m)}{2} \leq k < \frac{N}{2}. \end{cases} \quad (7.8)$$

Assim, para  $-\frac{N}{2} \leq k \leq \frac{N}{2} - 1$  e  $|k| \leq l \leq M$ , definimos a transformada de Legendre discreta na direção meridional  $\mu$  por

$$F_{k,l} = \sum_{m=1}^M w_m \varphi_{k,m} P_{k,l}(\mu_m). \quad (7.9)$$

A equação (7.7) é uma fórmula de quadratura gaussiana em que os “pesos”  $w_m$  são os coeficientes dados por [12]

$$w_m = \frac{(2M-1)(1-\mu_m^2)}{M^2 (P_{0,M-1}(\mu_m))^2} \quad (7.10)$$

e  $\mu_m$  são os zeros do polinômio de Legendre  $P_{0,M}(\mu)$ . Esta fórmula é exata para polinômios de grau  $\leq 2M-1$ . Logo a integral em (7.7) será exata se  $2T \leq 2M-1$ , ou seja, se um mínimo de  $(2T+1)/2$ , ou melhor,  $T+1$  pontos de grade meridionais for usado, assim  $M \geq T+1$ . A fórmula de quadratura (7.6) é exata para número de onda que não exceda  $N$ . Este critério para o número de onda exige que a malha

física inclua um mínimo  $N(m)$  igual a  $2T$  pontos de grade ao longo de cada círculo de latitude  $m$ , ou seja  $\min N(m) \geq 2T$ . Se  $N(m)$  e  $M$  satisfizerem a estas condições, então os termos  $a_{k,l}$  serão computados exatamente para  $|k| \leq T$  e  $|l| \leq T$ . Os termos restantes (para  $|k| > T$  e  $|l| > T$ ) serão desprezados na expansão de  $f$ , uma vez que só estamos interessados em determinar os coeficientes de  $Y_{k,l}(\lambda, \mu) = P_{k,l}(\mu)e^{-ik\lambda}$ , para  $|k| \leq T$  e  $|l| \leq T$ . Se as integrais forem calculadas com valores menores que  $N(m)$  e  $M$  adotados acima, teremos que as contribuições dos termos de mais alta ordem na expansão de  $f$  acabarão sendo transferidos para os números de onda mais baixos, incrementando-os. Este fenômeno é o *aliasing* e é uma fonte de instabilidade na simulação numérica da evolução do sistema físico, uma vez que acarreta transferência de energia dos números de ondas altos para números de ondas mais baixos, podendo levar a um grande crescimento destas últimas ondas. Respeitando-se a condição para  $N(m)$  e  $M$ , não teremos *aliasing*.

## 7.1 Decaimento dos Coeficientes de Fourier-Legendre

No apêndice D, introduzimos as funções de Legendre e mostramos no teorema D.1, um resultado sobre o decaimento dos coeficientes de Legendre. Este resultado é usado na demonstração do teorema a seguir.

**Teorema 7.1** (*Taxa de Decaimento dos Coeficientes de Fourier-Legendre*). *Considere  $f$  e todas as suas derivadas parciais mistas até a ordem  $2q+(r+1)$ ,  $2\pi$ -periódicas na direção zonal- $\lambda$ , limitadas e contínuas no domínio*

$$D = \{(\lambda, \mu) : \lambda \in [0, 2\pi], \mu \in [-1, 1]\},$$

para  $r, q \geq 1$ . Então os coeficientes de Fourier-Legendre de  $f$  satisfazem

$$|a_{k,l}| \leq \frac{C}{|k|^{r+1}|\Lambda_l|^q}, \quad \forall k \neq 0, l \neq 0,$$

onde  $\Lambda_l = -l(l+1)$  e  $C$  é uma constante independente de  $k$  e  $l$ .

De (7.3), segue para  $k \neq 0$  que

$$\begin{aligned} 2\pi a_{k,l} &= \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} f(\lambda, \mu) \bar{Y}_{k,l}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu \\ &= \int_{-1}^1 \left( \int_0^{2\pi} f(\lambda, \mu) e^{-ik\lambda} d\lambda \right) P_{k,l}(\mu) d\mu \\ &= \int_{-1}^1 \left( f(\lambda, \mu) \frac{e^{-ik\lambda}}{-ik} \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{ik} \int_0^{2\pi} \frac{\partial f(\lambda, \mu)}{\partial \lambda} e^{-ik\lambda} d\lambda \right) P_{k,l}(\mu) d\mu. \end{aligned}$$

O termo integrado (primeiro termo) do lado direito da igualdade acima se anula por causa da periodicidade de  $f$  e da exponencial complexa; o termo restante é integrado por partes de novo. Se este passo é executado um total de  $r+1$  vezes e a periodicidade das derivadas é usada a cada vez, encontramos

$$2\pi a_{k,l} = (-1)^{r+2} \left( \frac{1}{ik} \right)^{r+1} \int_{-1}^1 \left( \int_0^{2\pi} \frac{\partial^{r+1} f}{\partial \lambda^{r+1}}(\lambda, \mu) e^{-ik\lambda} d\lambda \right) P_{k,l}(\mu) d\mu.$$

Invertendo a ordem de integração , obtemos

$$2\pi a_{k,l} = (-1)^{r+2} \left(\frac{1}{ik}\right)^{r+1} \int_0^{2\pi} \left( \int_{-1}^1 \frac{\partial^{r+1} f}{\partial \lambda^{r+1}}(\lambda, \mu) P_{k,l}(\mu) d\mu \right) e^{-ik\lambda} d\lambda.$$

Notamos primeiramente que se  $l = 0$  na equação acima, então segue da hipótese do teorema que a integral é limitada, logo obtemos um decaimento apenas na componente de Fourier, ou seja, em  $k$ .

Agora, para  $l \neq 0$ , fixando  $\lambda$  e aplicando o Teorema D.1 à  $\frac{\partial^{r+1} f}{\partial \lambda^{r+1}}$  como função de  $\mu$ , obtemos

$$2\pi a_{k,l} = (-1)^{r+2} \left(\frac{1}{ik}\right)^{r+1} \frac{1}{\Lambda_l^q} \int_0^{2\pi} \left( \int_{-1}^1 \frac{\partial^{q+r+1} f}{\partial \mu^q \partial \lambda^{r+1}}(\lambda, \mu) P_{k,l}(\mu) d\mu \right) e^{-ik\lambda} d\lambda.$$

Agora usando a hipótese, obtemos

$$|a_{k,l}| \leq \frac{C}{|k|^{r+1} |\Lambda_l^q|}. \quad (7.11)$$

**Observação 7.1** *Vimos na demonstração do teorema 7.1 que os coeficientes de Legendre  $a_{k,l}$  tem um decaimento, para  $kl \neq 0$ , nas direções zonal ( $k$ ) e meridional ( $l$ ). Agora, para  $l = 0$  e  $k \neq 0$ , este decaimento ocorre apenas na direção zonal ( $k$ ), na componente de Fourier, conforme vimos no teorema 5.1. Enquanto que, se  $k = 0$  e  $l \neq 0$ , este decaimento ocorre apenas na direção meridional ( $l$ ), na componente de Legendre, como é dado no teorema D.1 do apêndice D.*

## 7.2 Erro na Transformada de Fourier-Legendre

Nas seções que se seguem, deduzimos a fórmula de Poisson e determinamos o erro no cálculo dos coeficientes de Fourier-Legendre quando usamos grade uniforme, ou seja, uma grade Gaussiana convencional (ver figura 7) e, também, quando usamos uma grade reduzida (ver figura 8).

### 7.2.1 Fórmula de Poisson para Grade Uniforme

Consideremos que a grade é uniforme, i.e.,  $N(m) = N, \forall m$ . De (7.1) temos que

$$f(\lambda_n, \mu_m) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=|k|}^{\infty} a_{j,p} P_{j,p}(\mu_m) e^{ij\lambda_n}. \quad (7.12)$$

De (7.9), obtemos

$$F_{k,l} = \sum_{m=1}^M w_m \left[ \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(\lambda_n, \mu_m) e^{-ik\lambda_n} \right] P_{k,l}(\mu_m). \quad (7.13)$$



Figura 7: Os pontos de grade vistos do polo numa grade Gaussiana convencional.



Figura 8: Os pontos de grade vistos do polo numa grade reduzida.

Agora, substituindo (7.12) em (7.13)

$$\begin{aligned}
F_{k,l} &= \sum_{m=1}^M w_m \left[ \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left( \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=|j|}^{\infty} a_{j,p} P_{j,p}(\mu_m) e^{ij\lambda_n} \right) e^{-ik\lambda_n} \right] P_{k,l}(\mu_m) \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=|j|}^{\infty} a_{j,p} \sum_{m=1}^M w_m \left[ \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{i2\pi n(j-k)/N} \right] P_{j,p}(\mu_m) P_{k,l}(\mu_m) \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=|j|}^{\infty} a_{j,p} \tilde{\delta}_N(j-k) \sum_{m=1}^M w_m P_{j,p}(\mu_m) P_{k,l}(\mu_m) \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=|k+jN|}^{\infty} a_{k+jN,p} \sum_{m=1}^M w_m P_{k+jN,p}(\mu_m) P_{k,l}(\mu_m).
\end{aligned}$$

Logo, pela observação D.1 do apêndice D, obtemos a fórmula da soma de Poisson discreta

$$F_{k,l} = a_{k,l} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{p=|k+jN| \\ (j,p) \neq (0,l)}}^{\infty} a_{k+jN,p} \sum_{m=1}^M w_m P_{k+jN,p}(\mu_m) P_{k,l}(\mu_m). \quad (7.14)$$

Notamos que o erro de *aliasing* acontece mesmo para grades uniformes e é dado por

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{p=|k+jN| \\ (j,p) \neq (0,l)}}^{\infty} a_{k+jN,p} \sum_{m=1}^M w_m P_{k+jN,p}(\mu_m) P_{k,l}(\mu_m).$$

No caso de grades uniformes, este erro pode ser muito pequeno de acordo com a escolha do número de pontos na malha  $M$  e  $N$  e do truncamento  $T$ .

## 7.2.2 Fórmula de Poisson para Grade Reduzida

Consideremos que a grade é reduzida, i.e.,  $N$  é uma função de  $m$ . Desta forma, a variação de  $m$  causará *aliasing*, introduzindo erros na DFT, o qual estimaremos a seguir. Veja a figura 9.

De (7.1) obtemos

$$f(\lambda_n(m), \mu_m) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=|j|}^{\infty} a_{j,p} P_{j,p}(\mu_m) e^{ij\lambda_n(m)}. \quad (7.15)$$

De (7.9), usando a função (3.15) obtemos que

$$F_{k,l} = \sum_{m=1}^M I_k(m) w_m \left[ \frac{1}{N(m)} \sum_{n=1}^{N(m)} f(\lambda_n(m), \mu_m) e^{-ik\lambda_n(m)} \right] P_{k,l}(\mu_m). \quad (7.16)$$

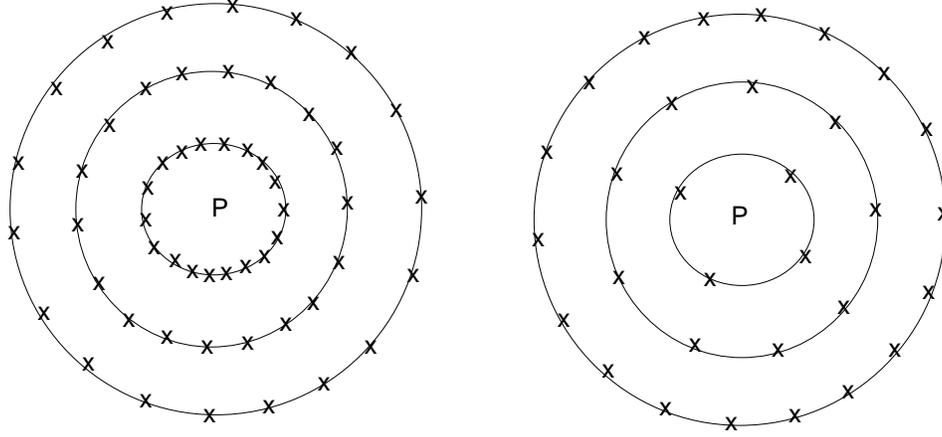


Figura 9: Pontos de longitude  $N$  como função de cada círculo de latitude  $m$  nas grades uniforme (esquerda) e reduzida (direita) na esfera vistas do polo  $P$ .

Agora substituindo (7.15) em (7.16), segue que

$$\begin{aligned}
 F_{k,l} &= \sum_{m=1}^M I_k(m) w_m \left( \frac{1}{N(m)} \sum_{n=1}^{N(m)} \left[ \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=|j|}^{\infty} a_{j,p} P_{j,p}(\mu_m) e^{ij\lambda_n(m)} \right] e^{-ik\lambda_n(m)} \right) P_{k,l}(\mu_m) \\
 &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=|j|}^{\infty} \sum_{m=1}^M I_k(m) w_m a_{j,p} \left( \frac{1}{N(m)} \sum_{n=1}^{N(m)} e^{i2\pi(n-1)(j-k)/N(m)} \right) P_{j,p}(\mu_m) P_{k,l}(\mu_m),
 \end{aligned}$$

logo usando a observação 4.1, obtemos

$$F_{k,l} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=|j|}^{\infty} \sum_{m=1}^M I_k(m) w_m a_{j,p} \tilde{\delta}_{N(m)}(j-k) P_{j,p}(\mu_m) P_{k,l}(\mu_m), \quad (7.17)$$

ou ainda, podemos escrever na forma

$$F_{k,l} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^M \sum_{p=|k+jN(m)|}^{\infty} I_k(m) a_{k+jN(m),p} w_m P_{k+jN(m),p}(\mu_m) P_{k,l}(\mu_m). \quad (7.18)$$

Usando a função  $J_k(m) = 1 - I_k(m)$  e a função  $\delta_{k,l}(j,p)$  dada em (6.7), podemos

reescrever a equação (7.17) na forma

$$\begin{aligned}
F_{k,l} &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=|j|}^{\infty} \sum_{m=1}^M [1 - J_k(m)] w_m a_{j,p} \tilde{\delta}_{N(m)}(j-k) P_{j,p}(\mu_m) P_{k,l}(\mu_m) \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=|j|}^{\infty} \sum_{m=1}^M w_m a_{j,p} \tilde{\delta}_{N(m)}(j-k) P_{j,p}(\mu_m) P_{k,l}(\mu_m) + \\
&+ \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=|j|}^{\infty} \sum_{m=1}^M [-J_k(m)] w_m a_{j,p} \tilde{\delta}_{N(m)}(j-k) P_{j,p}(\mu_m) P_{k,l}(\mu_m) \\
&= a_{k,l} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{p=|j| \\ (j,p) \neq (k,l)}}^{\infty} \sum_{m=1}^M w_m a_{j,p} \tilde{\delta}_{N(m)}(j-k) P_{j,p}(\mu_m) P_{k,l}(\mu_m) + \\
&+ \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=|j|}^{\infty} \sum_{m=1}^M [-J_k(m)] w_m a_{j,p} \tilde{\delta}_{N(m)}(j-k) P_{j,p}(\mu_m) P_{k,l}(\mu_m),
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
F_{k,l} - a_{k,l} &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=|j|}^{\infty} \sum_{m=1}^M [1 - \delta_{k,l}(j,p)] w_m a_{j,p} \tilde{\delta}_{N(m)}(j-k) P_{j,p}(\mu_m) P_{k,l}(\mu_m) + \\
&+ \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=|j|}^{\infty} \sum_{m=1}^M [-J_k(m)] w_m a_{j,p} \tilde{\delta}_{N(m)}(j-k) P_{j,p}(\mu_m) P_{k,l}(\mu_m),
\end{aligned}$$

logo

$$F_{k,l} - a_{k,l} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=|j|}^{\infty} \sum_{m=1}^M [-J_k(m) + 1 - \delta_{k,l}(j,p)] w_m a_{j,p} \tilde{\delta}_{N(m)}(j-k) P_{j,p}(\mu_m) P_{k,l}(\mu_m). \quad (7.19)$$

### 7.3 Erro na Transformada Inversa de Fourier-Legendre

Se  $f(\lambda, \mu)$  é aproximada pela série truncada de harmônicos esféricos da forma (E.3), a transformada do conjunto de coeficientes espectrais para os pontos sobre uma malha latitude-longitude pode ser computada usando a relação

$$f(\lambda_n(m), \mu(m)) = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \varphi_{k,m} e^{ik\lambda_n(m)}, \quad 1 \leq m \leq M, \quad 1 \leq n \leq N(m), \quad (7.20)$$

onde  $\varphi_{k,m}$  é dada em (7.8).

A soma (7.20) é uma transformada discreta de Fourier inversa com relação à coordenada longitudinal  $\lambda_n(m)$ ; esta transformada pode ser avaliada com um erro de *aliasing*, de modo análogo ao que fizemos para a transformada discreta de Fourier direta. Desta transformada obtemos  $N$  valores de pontos de grade ao longo de cada círculo de latitude com  $1 \leq m \leq M$ .

A transformada inversa de (7.9) é uma transformada discreta do espaço espectral para o espaço de Fourier dada por

$$\varphi_{k,m} = \sum_{l=|k|}^T F_{k,l} P_{k,l}(\mu_m).$$

A falta de uma transformada rápida para a coordenada de latitude, ou seja uma transformada rápida de Legendre, torna o modelo espectral de harmônico esférico menos eficiente que os modelos espectrais que usam as séries de Fourier bidimensionais.

## 8 Erro na Avaliação de Expansões em Harmônicos Esféricos

É usual expressar o estado da atmosfera em termos dos coeficientes de harmônicos esféricos, quando são usados métodos espectrais para previsão global de tempo. O uso da grade reduzida ocasiona um erro na parte espectral do método semilagrangiano, o qual queremos avaliar, mas para isto precisamos obter fórmulas de erro para expansões em harmônicos esféricos devido ao uso da grade reduzida. Também obtemos uma fórmula de erro, quando é usada uma grade Gaussiana plena.

### 8.1 Erro na Avaliação de um Coeficiente Harmônico

Temos por (7.17) que

$$F_{k,l} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=|j|}^{\infty} \sum_{m=1}^M I_k(m) a_{j,p} \tilde{\delta}_{N(m)}(j-k) w_m P_{j,p}(\mu_m) P_{k,l}(\mu_m). \quad (8.1)$$

Consideremos o truncamento triangular  $|j| \leq T$  e  $|j| \leq p \leq T$ , assim usando a propriedade que  $P_{j,p} = 0$ , se  $p < j$ , o erro de truncamento é dado por

$$G_{k,l} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p>\max\{|j|,T\}}^{\infty} \sum_{m=1}^M I_k(m) a_{j,p} \tilde{\delta}_{N(m)}(j-k) w_m P_{j,p}(\mu_m) P_{k,l}(\mu_m). \quad (8.2)$$

Como os pesos  $w_m$  são limitados (veja a equação (7.10)),  $|\tilde{\delta}_{N(m)}(j-k)| \leq 1$ ,  $|I_k(m)| \leq 1$  e pela propriedade (D.5)  $|P_{k,l}| \leq 1$ , temos que

$$\left| \sum_{m=1}^M I_k(m) \tilde{\delta}_{N(m)}(j-k) w_m P_{j,p}(\mu_m) P_{k,l}(\mu_m) \right| \leq CM,$$

onde  $C = \max_m |w_m|$ . Denotemos  $C' = CM$ .

Logo, para  $j \neq 0$  temos pelo teorema 7.1 que existe uma constante  $C''$  tal que

$$\begin{aligned} |G_{k,l}| &\leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p>\max\{|j|,T\}}^{\infty} C' |a_{j,p}| \leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p>\max\{|j|,T\}}^{\infty} C' \frac{C''}{|j|^{r+1} |\Lambda_p|^q} \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{C' C''}{|j|^{r+1}} \sum_{p>\max\{|j|,T\}}^{\infty} \frac{1}{|p(p+1)|^q} \\ &= \sum_{|j|>T} \frac{C' C''}{|j|^{r+1}} \sum_{p>|j|}^{\infty} \frac{1}{|p(p+1)|^q} + \sum_{|j|\leq T} \frac{C' C''}{|j|^{r+1}} \sum_{p>T}^{\infty} \frac{1}{|p(p+1)|^q} \\ &\leq \sum_{|j|>T} \frac{C' C''}{|j|^{r+1}} \sum_{p>T}^{\infty} \frac{1}{|p(p+1)|^q} + \sum_{|j|\leq T} \frac{C' C''}{|j|^{r+1}} \sum_{p>T}^{\infty} \frac{1}{|p(p+1)|^q}. \end{aligned}$$

No primeiro somatório ( $j > T$ ) do segundo membro acima fazemos  $j = j' + T$ ,  $j' = 1, 2, 3, \dots$  e no segundo somatório ( $p > T$ ) fazemos  $p = p' + T$ ,  $p' = 1, 2, 3, \dots$

Então denotando  $C'_1 = C' C''$  e  $C'_2 = \sum_{|j| \leq T} \frac{C' C''}{|j|^{r+1}}$ , obtemos

$$\begin{aligned} |G_{k,l}| &\leq C'_1 \sum_{j'=1}^{\infty} \frac{1}{|j'+T|^{r+1}} \sum_{p'=1}^{\infty} \frac{1}{|p'+T|^{2q}} + C'_2 \sum_{p'=1}^{\infty} \frac{1}{|p'+T|^{2q}} \\ &= \frac{1}{T^{r+1}} \sum_{j'=1}^{\infty} \frac{C'_1}{\left|\frac{j'}{T} + 1\right|^{r+1}} \sum_{p'=1}^{\infty} \frac{1}{|p'+T|^{2q}} + \frac{1}{T^{2q}} \sum_{p'=1}^{\infty} \frac{C'_2}{\left|\frac{p'}{T} + 1\right|^{2q}}. \end{aligned}$$

Como as séries em  $j'$  e  $p'$  são convergentes, denotando suas somas, respectivamente, por  $S_1$  e  $S_2$ , obtemos para  $C_1 = C'_1 S_1 S_2$  e  $C_2 = C'_2 S_2$

$$|G_{k,l}| \leq \frac{C_1}{T^{r+1}} + \frac{C_2}{T^{2q}}. \quad (8.3)$$

Para  $T$  suficientemente grande, segue que o erro de truncamento (8.2) é pequeno, então de (8.1) podemos aproximar  $F_{k,l}$  por

$$F_{k,l} = \sum_{j=-T}^T \sum_{p=|k+jN(m)|}^T \sum_{m=1}^M I_k(m) a_{k+jN(m),p} w_m P_{k+jN(m),p}(\mu_m) P_{k,l}(\mu_m). \quad (8.4)$$

Quando a grade é uniforme,  $N(m) = N$ , para todo  $m$ , então para evitar *aliasing*, tomamos  $N \geq 2T$ , conforme discutimos no capítulo 7. Agora, na grade reduzida  $N$  depende de  $m$ , sendo impossível evitar completamente o erro de *aliasing*, pois poderemos ter alguns termos em que  $j - k$  é múltiplo de  $N(m)$ , o que depende da escolha da grade.

## 8.2 Erro em Combinação de Harmônicos Esféricos

Dado um harmônico esférico  $P_{j_0,p_0}(\mu) e^{ij_0\lambda}$ , segue que  $a_{j_0,p_0} = 1$ . Se os demais coeficientes  $a_{j,p} = 0$ , para  $j \neq j_0$  ou  $p \neq p_0$ , logo por (8.1)

$$F_{k,l} = \sum_{m=1}^M a_{j_0,p_0} I_k(m) \tilde{\delta}_{N(m)}(j_0 - k) w_m P_{j_0,p_0}(\mu_m) P_{k,l}(\mu_m). \quad (8.5)$$

É conveniente descrever um estado típico da atmosfera como uma combinação linear de harmônicos esféricos. Neste caso, uma fórmula do erro introduzido pelo uso de grade reduzida ao avaliar os coeficientes dos harmônicos esféricos é útil.

A fórmula (7.18) pode ser usada para avaliar esse erro, pois uma vez conhecidos os coeficientes  $a_{k,l}$  dados na expansão (7.15) devidamente truncada, a qual já inclui o erro de truncamento, então podemos obter o coeficiente aproximado  $F_{k,l}$  por meio da fórmula (7.18).

Sejam  $A$  o vetor de componentes  $a_{k,l}$  e  $F$  o vetor de componentes  $F_{k,l}$ , estamos interessados no erro relativo, o qual definimos por

$$\epsilon = \frac{\|F - A\|}{\|A\|}, \quad (8.6)$$

onde  $\|\cdot\|$  é a norma do máximo ou a norma quadrática, como explicamos a seguir.

### 8.2.1 Erro na Norma do Máximo

Consideremos  $E$  o vetor de componentes  $E_{k,l} = F_{k,l} - a_{k,l}$ . Denotemos a norma do máximo por  $\|\cdot\|_\infty$ , e definimos por

$$\|E\|_\infty = \max_{-T \leq k \leq T, |k| \leq l \leq T} |E_{k,l}|.$$

A norma do máximo é mais sensível a possíveis desvios que outras normas.

### 8.2.2 Erro na Norma Quadrática

Definimos a norma quadrática, denotada por  $\|\cdot\|_2$ , pela expressão

$$\|E\|_2 = \frac{\sqrt{\sum_{k=-T}^T \sum_{l=|k|}^T (E_{k,l})^2}}{K(T)},$$

onde o número

$$K(T) = \sqrt{\sum_{k=-T}^T \sum_{l=|k|}^T 1} = \sqrt{(T+1)^2} = T+1$$

é tal que se todos os  $E_{k,l}$  forem 1, então  $\|E\|_2 = \|E\|_\infty = 1$ . A intenção desta normalização é facilitar a comparação entre as normas do máximo e quadrática.

Sejam  $A$  o vetor de componentes  $a_{j,p}$ ,  $\Pi^M$  o vetor de componentes

$$\Pi_{p,l}^M(j, k) = \sum_{m=1}^M w_m P_{j,p}(\mu_m) P_{k,l}(\mu_m), \quad (8.7)$$

também denotemos

$$\Pi_{p,l}(j, k, m) = w_m P_{j,p}(\mu_m) P_{k,l}(\mu_m), \quad (8.8)$$

e

$$\Pi_l^M(k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=|j|}^{\infty} \Pi_{p,l}^M(j, k). \quad (8.9)$$

Assim por (7.17), obtemos que

$$F_{k,l} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=|j|}^{\infty} \sum_{m=1}^M [1 - J_k(m)] [\tilde{\delta}_N(j-k) + \tilde{\delta}_{N(m)}(j-k) - \tilde{\delta}_N(j-k)] a_{j,p} \Pi_{p,l}(j, k, m).$$

Donde podemos escrever que

$$\begin{aligned}
F_{k,l} &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=|j|}^{\infty} \sum_{m=1}^M \tilde{\delta}_N(j-k) a_{j,p} \Pi_{p,l}(j, k, m) + \\
&+ \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=|j|}^{\infty} \sum_{m=1}^M \left[ -J_k(m) \tilde{\delta}_N(j-k) \right] a_{j,p} \Pi_{p,l}(j, k, m) + \\
&+ \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=|j|}^{\infty} \sum_{m=1}^M \left( \tilde{\delta}_{N(m)}(j-k) - \tilde{\delta}_N(j-k) \right) a_{j,p} \Pi_{p,l}(j, k, m) + \\
&+ \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=|j|}^{\infty} \sum_{m=1}^M \left[ -J_k(m) \left( \tilde{\delta}_{N(m)}(j-k) - \tilde{\delta}_N(j-k) \right) \right] a_{j,p} \Pi_{p,l}(j, k, m).
\end{aligned}$$

A soma

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=|j|}^{\infty} \sum_{m=1}^M \left[ -J_k(m) \tilde{\delta}_N(j-k) \right] a_{j,p} \Pi_{p,l}(j, k, m)$$

é o efeito conjunto dos erros de truncamento e de *aliasing* na grade uniforme, logo é desprezível, pois esperamos trabalhar em regimes em que cada um dos vários erros existentes são pequenos, digamos  $\mathcal{O}(\delta)$ . Assim, os termos que representam erros combinados devem ser  $\mathcal{O}(\delta^2)$ , que deverão ser desprezíveis.

A soma

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=|j|}^{\infty} \sum_{m=1}^M \left[ -J_k(m) \left( \tilde{\delta}_{N(m)}(j-k) - \tilde{\delta}_N(j-k) \right) \right] a_{j,p} \Pi_{p,l}(j, k, m)$$

é o efeito conjunto do erro de truncamento e da diferença dos erros de *aliasing* entre as grades reduzida e uniforme, o qual consideramos desprezível, pelo mesmo argumento anterior.

Portanto

$$\begin{aligned}
F_{k,l} &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=|j|}^{\infty} \sum_{m=1}^M \tilde{\delta}_N(j-k) a_{j,p} \Pi_{p,l}(j, k, m) + \\
&+ \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=|j|}^{\infty} \sum_{m=1}^M \left( \tilde{\delta}_{N(m)}(j-k) - \tilde{\delta}_N(j-k) \right) a_{j,p} \Pi_{p,l}(j, k, m) \\
&= a_{k,l} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{p=|j| \\ (j,p) \neq (k,l)}}^{\infty} \sum_{m=1}^M \tilde{\delta}_N(j-k) a_{j,p} \Pi_{p,l}(j, k, m) + \\
&+ \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=|j|}^{\infty} \sum_{m=1}^M \left( \tilde{\delta}_{N(m)}(j-k) - \tilde{\delta}_N(j-k) \right) a_{j,p} \Pi_{p,l}(j, k, m),
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
F_{k,l} - a_{k,l} &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{p=|j| \\ (j,p) \neq (k,l)}}^{\infty} \sum_{m=1}^M \tilde{\delta}_N(j-k) a_{j,p} \Pi_{p,l}(j,k,m) + \\
&+ \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=|j|}^{\infty} \sum_{m=1}^M \left( \tilde{\delta}_{N(m)}(j-k) - \tilde{\delta}_N(j-k) \right) a_{j,p} \Pi_{p,l}(j,k,m).
\end{aligned}$$

O primeiro termo no lado direito da desigualdade acima é o erro associado ao índice  $k, l$  devido primordialmente ao truncamento espectral, enquanto que o segundo termo é devido primordialmente ao *aliasing*. Provavelmente seria melhor fazer estimativas separadas dos erros de truncamento espectral e do *aliasing* na equação acima, que poderiam ser feitas com técnicas independentes, possivelmente obtendo estimativa global com menos folga. Por simplicidade elas não são separadas, e procedemos assim.

Usando o fato que  $|\tilde{\delta}_N(j-k)| \leq 1$  e  $|\tilde{\delta}_{N(m)}(j-k) - \tilde{\delta}_N(j-k)| \leq 1$ , podemos escrever pela desigualdade triangular que

$$|F_{k,l} - a_{k,l}| \leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{p=|j| \\ (j,p) \neq (k,l)}}^{\infty} \sum_{m=1}^M |a_{j,p}| |\Pi_{p,l}(j,k,m)| + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=|j|}^{\infty} \sum_{m=1}^M |a_{j,p}| |\Pi_{p,l}(j,k,m)|.$$

Como

$$|a_{j,p}| \leq \sqrt{\sum_{j'} \sum_{p'} a_{j',p'}^2},$$

temos ao denotar  $\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{j'} \sum_{p'} a_{j',p'}^2}$  que para todo  $k, l$

$$|F_{k,l} - a_{k,l}| \leq \|A\|_2 \left[ \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{p=|j| \\ (j,p) \neq (k,l)}}^{\infty} \sum_{m=1}^M |\Pi_{p,l}(j,k,m)| + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=|j|}^{\infty} \sum_{m=1}^M |\Pi_{p,l}(j,k,m)| \right],$$

logo temos para todo  $k, l$

$$|F_{k,l} - a_{k,l}|^2 \leq \|A\|_2^2 \left[ \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{p=|j| \\ (j,p) \neq (k,l)}}^{\infty} \sum_{m=1}^M |\Pi_{p,l}(j,k,m)| + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=|j|}^{\infty} \sum_{m=1}^M |\Pi_{p,l}(j,k,m)| \right]^2.$$

Se denotarmos

$$\tilde{\Pi}_l^M(k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{p=|j| \\ (j,p) \neq (k,l)}}^{\infty} |\Pi_{p,l}(j,k,m)| + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=|j|}^{\infty} \sum_{m=1}^M |\Pi_{p,l}(j,k,m)| \quad (8.10)$$

então da última desigualdade obtemos

$$\sum_k \sum_l |F_{k,l} - a_{k,l}|^2 \leq \|A\|_2^2 \sum_k \sum_l \left[ \tilde{\Pi}_l^M(k) \right]^2.$$

Agora denotando

$$\|\Pi^M\|_2 = \sqrt{\sum_k \sum_l [\tilde{\Pi}_l^M(k)]^2}, \quad (8.11)$$

extrando a raiz quadrada na última desigualdade e usando a notação (8.11), obtemos

$$\sqrt{\sum_k \sum_l |F_{k,l} - a_{k,l}|^2} \leq \|A\|_2 \|\Pi^M\|_2.$$

Logo uma estimativa para o erro relativo  $\epsilon$  dado em (8.6) na norma quadrática é

$$\epsilon \leq \|\Pi^M\|_2. \quad (8.12)$$

Na obtenção da estimativa (8.12), temos séries infinitas em  $j$  e em  $p$ , mas nas aplicações práticas, estas séries são finitas, pois a malha tem um número finito de pontos.

Assim, obtemos uma estimativa para o erro que não depende da combinação linear  $\{a_{j,p}\}$  usada, portanto ela é intrínseca à grade utilizada numa triangulação.

A estimativa (8.12) que obtivemos fornece uma maneira alternativa de gerar grades reduzidas, uma vez que definida uma tolerância para  $\|\Pi^M\|_2$ , podemos verificar se o erro relativo (8.6) é menor que a tolerância dada.

Comparando a nossa proposta de redução da grade com a proposta definida por [5], temos a vantagem de simplificar a avaliação da qualidade da grade reduzida. De fato, para avaliar a grade reduzida, conforme [5], para cada número de onda  $l$ , com uma notação compatível com (8.7), o qual também depende do truncamento em questão  $M$ , pois nos termos  $w_m$  e  $\mu_m$ , temos  $m \in \{1, \dots, M\}$ , definido o somatório

$$\Gamma_l^{m_o}(k', k) = \sum_{m=1}^{m_o} w_m P_{k',l}(\mu_m) P_{k,l}(\mu_m), \quad (8.13)$$

onde  $k$  e  $k'$  têm a mesma variação, mas podem ser diferentes. Notemos que  $\Gamma_l^M(k', k) = \Pi_{l,l}^M(k', k)$  (ver (8.7)). Então Courtier e Naughton calculam os números (ver (8.9))

$$\Gamma_l^{m_o} = \max_{-T \leq k, k' \leq T} |\Gamma_l^{m_o}(k', k)|, \quad (8.14)$$

onde  $m_o$  é o índice da primeira latitude  $m = 1, \dots, M$  contando-se do equador a partir da qual a grade é efetivamente reduzida. Assim Courtier e Naughton verificam se cada número (8.14) é menor ou igual a uma tolerância  $\epsilon_o$  especificada, a qual eles adotaram como sendo  $\epsilon_o = 10^{-12}$ . Na nossa proposta, em vez disso, calculamos apenas um número, ou seja, pedimos que  $\|\Pi^M\|_2$  seja pequeno, conseqüentemente as suas coordenadas  $\Pi_l^M(k)$  devem ser pequenas. A imposição de que estes erros sejam pequenos leva a uma desigualdade semelhante aquela imposta por Courtier-Naughton. Os dois conjuntos de desigualdades (o nosso e o de Courtier-Naughton) não são equivalentes, apesar de serem semelhantes. Preferimos o nosso por ter uma clara interpretação geométrica.

Notemos que se  $\|\Pi^M\|_2$  dado na equação (8.11) é pequeno, então as componentes  $\Pi_{j,p}^M(k + jN, k)$  (ver (8.7)) devem ser pequenas. Isto significa que permitimos que a grade reduzida afete apenas um pouco a ortogonalidade dos harmônicos esféricos, quando

seu produto interno é avaliado por meio da grade reduzida em vez da grade gaussiana normal. Este critério de quase ortogonalidade de todos os pares de harmônicos esféricos pode ser substituído por uma única desigualdade, que acarreta esta quase ortogonalidade, da seguinte maneira.

**Teorema 8.1** *Dada uma tolerância  $\epsilon_o$ , seja (GR) uma grade reduzida que satisfaz*

$$\|\Pi^M\|_2 \leq \epsilon_o.$$

*Então a grade (GR) também satisfaz ao critério de quase ortogonalidade de todos os pares de harmônicos esféricos distintos.*

**Demonstração:** As componentes  $\Pi_l^M(k)$  de  $\Pi^M$  satisfazem (ver eqs. (8.9) e (8.11))

$$|\Pi_l^M(k)| \leq \|\Pi^M\|_2, \forall k, l.$$

Logo, se  $\|\Pi^M\|_2 \leq \epsilon_o$ , então o resultado segue, uma vez que a desigualdade acima é válida para todos os números de onda zonal  $k$  e meridional  $l$ , desse modo todas as componentes  $\Pi_l^M(k)$  são menores ou iguais a  $\epsilon_o$ . Portanto, se a grade (GR) satisfaz à hipótese do teorema, então também satisfaz ao critério de quase ortogonalidade de todos os pares de harmônicos esféricos distintos.

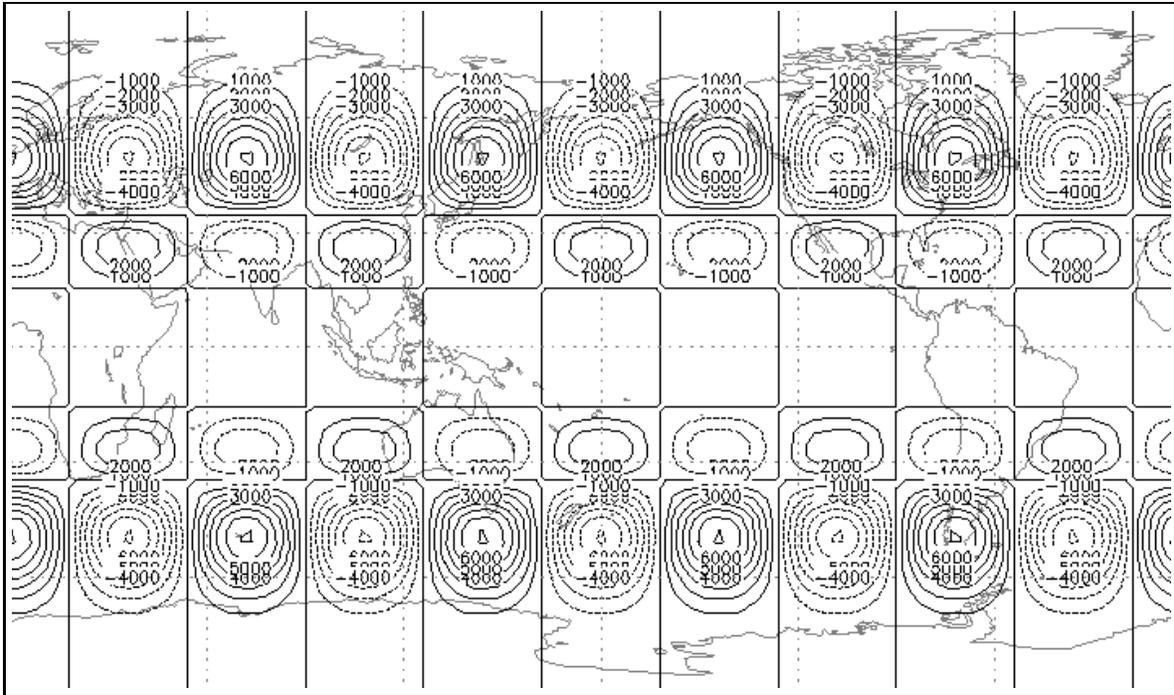


Figura 10: Harmônico de Hough:  $s=5$ ,  $t=5$ ,  $r=0$  (Rossby). Altura equivalente:  $h = 10km$ .

### 8.3 Erro na Avaliação de um Harmônico de Hough

Os harmônicos de Hough são as autofunções do sistema de águas rasas sobre a esfera de acordo com a equação (F.4) (ver apêndice F). Eles são os modos normais da parte horizontal das equações primitivas da atmosfera linearizadas em torno do repouso, e por isto são ondas importantes que se propagam na atmosfera. Logo, qualquer método numérico deve representá-las bem, para que possa servir como um método de previsão numérica de tempo.

A figura 10 foi feita usando o software GRADS. Ela representa a variação da altura da superfície livre  $h$  da onda de Rossby  $r = 0$  numa grade reduzida.

A componente geopotencial  $G_{s,q}$  de um harmônico de Hough é, como segue de (F.8)

$$G_{s,q}(\lambda, \mu) = \sum_{p=s}^{s+2T_0-1} C_p^q P_{s,p}(\mu) e^{is\lambda},$$

onde  $s$  é o número de onda zonal,  $q$  é o índice meridional e  $T_0$  é o truncamento da série que representa o harmônico de Hough, a qual consideramos exata. Não podemos confundir esse truncamento com o truncamento triangular  $T$  (dado em E.3).

Se a função for um harmônico de Hough com número de onda zonal  $s$ , então na equação (8.4),  $a_{j,p}$  só tem coeficientes diferentes de zero para  $j = s$  e valores do índice meridional  $p$  tais que, no caso simétrico,  $p = s, s + 2, \dots, s + 2(T_0 - 1)$  e, no caso antisimétrico,  $p = s + 1, s + 3, \dots, s + 2T_0 - 1$ . O coeficiente  $a_{k,l}$  ser zero não significa que  $F_{k,l}$  seja zero, simplesmente estaremos contabilizando  $F_{k,l} = 0$ . Então de (8.4), obtemos para  $p \leq T$  no caso simétrico que

$$F_{k,l} = \sum_{p=s}^{s+2(T_0-1)} \sum_{m=1}^M C_p^q I_k(m) \tilde{\delta}_{N(m)}(s-k) w_m P_{s,p}(\mu_m) P_{k,l}(\mu_m). \quad (8.15)$$

### 8.4 As Grades Reduzidas

Em uma malha Gaussiana convencional, o número de pontos ao longo de cada longitude é o mesmo. O espaçamento entre os pontos de grade na esfera, na direção meridional é aproximadamente uniforme, por serem as raízes de um polinômio de Legendre. Já o número de pontos ao longo de cada latitude é o mesmo e é distribuído uniformemente, resultando desse modo, numa distância entre pontos vizinhos pertencentes a uma mesma latitude muito menor nas regiões próximas aos polos. Desse modo, temos um grande acúmulo de pontos próximos aos polos. Nas latitudes equatoriais, isto não acontece porque os círculos de latitude são maiores (ver figura 7). Para tornar este espaçamento mais uniforme na esfera, o número de pontos por latitude deve ser reduzido gradativamente do equador até os polos. Consideraremos grades reduzidas que são constituídas de uma malha onde o espaçamento físico entre os pontos de grade na esfera é aproximadamente uniforme.

Em sua proposta original de grade reduzida, Hortal e Simmons [9] basearam sua escolha de número de pontos por latitude na geometria da esfera. Assim, cada linha de latitude  $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$  deve conter aproximadamente  $\cos\theta NLON$  pontos, onde  $NLON$  é o número de pontos por latitude no modelo com malha Gaussiana e,

portanto, é também o número de pontos de grade ao longo da linha do equador  $\theta = 0$  na grade reduzida. A escolha efetiva do número de pontos por latitude ainda deve satisfazer uma restrição de ordem prática. Este número deve ser adequado para a execução de uma transformada rápida de Fourier (FFT), ou seja, deve ser da forma  $2^{n_1} 3^{n_2} 5^{n_3} 7^{n_4} \dots$ . Assim, Hortal e Simmons escolheram como número de pontos na latitude  $\theta$  o primeiro número inteiro desta forma que seja maior ou igual a  $\cos\theta NLON$ . Mais tarde Courtier e Naughton [5] notaram em modelos globais, alguns problemas relacionados ao surgimento de ruídos na integração nas vizinhanças dos polos com o uso deste tipo de malha, os quais são eliminados com o emprego de mais pontos nas primeiras linhas próximas aos polos.

No trabalho de Courtier e Naughton, foi apresentada uma grade reduzida com mais pontos nas latitudes mais próximas aos polos que a grade reduzida introduzida por Hortal e Simmons. Isto fez com que o problema nos polos fosse eliminado. Courtier e Naughton adotaram uma abordagem em que a grade reduzida é definida não por um critério geométrico, mas sim em função da capacidade de representação dos números de onda zonais, dentro de uma dada precisão, do seguinte modo: definida uma tolerância  $\epsilon$ , então um número de onda  $l$  deixa de ser importante em uma dada latitude  $\theta$  se

$$\left| \int_{\mu_l}^1 P_{k,l}(\mu) P_{k',l}(\mu) d\mu \right| \leq \epsilon, \quad \forall k, k' \leq T.$$

Temos que  $\theta_l = \arcsen \mu_l$  é a primeira latitude em que se pode desprezar as contribuições do número de onda  $l$ , que também é desconsiderado nas latitudes seguintes mais próximas aos polos. A malha é simetricamente definida no outro hemisfério.

Com o objetivo de mostrar que existe espaço para grades intermediárias entre a de Courtier-Naughton (CN) e a de Hortal-Simmons (HS), cujo custo computacional seja mais baixo que (CN), mas com erro de aliasing ainda pequeno suficiente, construímos a grade (GC), onde o número de pontos por latitude  $N(m)$  das grades reduzidas de Courtier-Naughton, Hortal-Simmons e da grades construídas é dado conforme a seguinte tabela

Grades Reduzidas														
m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14 ...
CN	18	25	36	40	45	54	60	64	72	72	75	81	90	90 ...
GC	12	14	18	24	30	36	45	50	60	64	72	75	80	90 ...
HS	6	12	18	24	30	36	45	50	60	64	72	75	80	90 ...

As grades coincidem em outras latitudes e são simétricas em relação ao equador. A latitude correspondente a  $m = 1$  é a mais próxima ao polo. Os números de pontos por latitude podem ser vistos por completo no programa erroinit.m contido no apêndice F.2.

A grade uniforme denotada por (GU) é aquela com o mesmo número de pontos  $N(m)$  em cada latitude  $m = 1, \dots, M$ .

Apesar da grade reduzida ser bidimensionalmente não uniforme, sua implementação requer apenas sequências de transformadas unidimensionais de Fourier e de Legendre em grades uniformes. Esta é uma grande qualidade da grade reduzida, pois

transformadas para grades realmente não uniformes são invariavelmente mais caras ou menos precisas que as transformadas clássicas.

## 8.5 Resultados Numéricos

Na nossa análise numérica consideramos as ondas de Rossby ( $r = 0$ ), onde  $T_0 = 50$  e  $1 \leq s \leq 40$ . No caso simétrico, temos  $1 \leq q \leq 79$ , com  $q$  ímpar e no caso antisimétrico, temos  $2 \leq q \leq 80$ , com  $q$  par. Consideramos o truncamento  $T = 105$  e as grades reduzidas acima com  $M = 160$ . Esta escolha de  $M$  satisfaz a relação  $M \geq T + 1$  discutida no capítulo 7. A grade uniforme (GU) tem o número de pontos  $N(m) = 320$  em cada latitude  $m = 1, \dots, 160$ . Obtemos a estimativa máxima para o erro relativo  $\epsilon$  (ver (8.6)) na norma quadrática, conforme dada em (8.12). Também obtemos, usando a norma do máximo, o erro relativo (8.6) para alguns harmônicos de Hough dados.

### 8.5.1 Erro de *Aliasing* e Truncamento em Harmônicos Esféricos

Na tabela a seguir, temos o erro relativo  $\epsilon$  dado por (8.6), na norma do máximo, do erro de *aliasing* e truncamento espectral de alguns harmônicos esféricos dados pela equação (8.5) para alguns valores de  $j_0, p_0$  dados.

Erro $\epsilon$				
s,q	GU	CN	GC	HS
$j_0 = 3, p_0 = 5$	$3,16 \times 10^{-13}$	$3,16 \times 10^{-13}$	$3,16 \times 10^{-13}$	$9,69 \times 10^{-9}$
$j_0 = 3, p_0 = 16$	$3,02 \times 10^{-13}$	$3,02 \times 10^{-13}$	$3,02 \times 10^{-13}$	$5,05 \times 10^{-7}$
$j_0 = 3, p_0 = 78$	$4,78 \times 10^{-13}$	$4,78 \times 10^{-13}$	$4,78 \times 10^{-13}$	$1,11 \times 10^{-4}$
$j_0 = 20, p_0 = 30$	$2,32 \times 10^{-13}$	$2,32 \times 10^{-13}$	$2,32 \times 10^{-13}$	$2,32 \times 10^{-13}$
$j_0 = 20, p_0 = 65$	$3,94 \times 10^{-13}$	$3,94 \times 10^{-13}$	$1,49 \times 10^{-10}$	$1,49 \times 10^{-10}$
$j_0 = 11, p_0 = 79$	$2,24 \times 10^{-13}$	$2,24 \times 10^{-13}$	$1,41 \times 10^{-6}$	$1,41 \times 10^{-6}$
$j_0 = 20, p_0 = 79$	$3,47 \times 10^{-13}$	$3,47 \times 10^{-13}$	$6,40 \times 10^{-9}$	$6,40 \times 10^{-9}$
$j_0 = 40, p_0 = 79$	$3,54 \times 10^{-13}$	$3,54 \times 10^{-13}$	$3,54 \times 10^{-13}$	$3,54 \times 10^{-13}$
$j_0 = 40, p_0 = 105$	$4,47 \times 10^{-13}$	$4,47 \times 10^{-13}$	$1,54 \times 10^{-11}$	$1,54 \times 10^{-11}$
$j_0 = 63, p_0 = 105$	$2,45 \times 10^{-13}$	$2,45 \times 10^{-13}$	$2,45 \times 10^{-13}$	$2,45 \times 10^{-13}$

Notemos que o erro na grade reduzida (CN) é o mesmo que na grade uniforme (GU). Isto mostra que a redução na grade (CN) é muito restritiva, no sentido de que a mesma precisão especificada por eles poderia ser atingida por uma grade mais econômica. Se os tempos de computação fossem medidos para cada grade, seria possível determinar aquela de melhor custo/benefício.

### 8.5.2 Erro de *Aliasing* e Truncamento em Harmônicos de Hough

Calculamos o erro relativo  $\epsilon$  dado por (8.6), na norma do máximo causado por *aliasing* e truncamento espectral (veja a equação (8.15)), em alguns harmônicos de Hough para  $s, q$  dados, usando as grades reduzidas (CN), (GC), (HS) e também a grade uniforme (GU). A altura equivalente é denotada por  $h$ . Veja o código no apêndice F.2.

Analisamos o erro  $\epsilon$ , o qual constatamos ser pequeno.

Caso Simétrico ( $h = 10000m$ )				
s,q	GU	CN	GC	HS
$s = 3, q = 5$	$4,90 \times 10^{-13}$	$4,90 \times 10^{-13}$	$4,90 \times 10^{-13}$	$7,87 \times 10^{-8}$
$s = 3, q = 17$	$4,28 \times 10^{-13}$	$4,28 \times 10^{-13}$	$4,23 \times 10^{-13}$	$2,05 \times 10^{-6}$
$s = 3, q = 75$	$7,18 \times 10^{-13}$	$7,18 \times 10^{-13}$	$7,78 \times 10^{-13}$	$2,24 \times 10^{-4}$
$s = 20, q = 31$	$5,11 \times 10^{-13}$	$5,11 \times 10^{-13}$	$2,08 \times 10^{-12}$	$2,08 \times 10^{-12}$
$s = 20, q = 65$	$6,10 \times 10^{-13}$	$6,10 \times 10^{-13}$	$4,46 \times 10^{-8}$	$4,46 \times 10^{-8}$
$s = 11, q = 79$	$3,95 \times 10^{-13}$	$3,95 \times 10^{-13}$	$1,11 \times 10^{-5}$	$1,11 \times 10^{-5}$
$s = 20, q = 79$	$4,71 \times 10^{-13}$	$4,71 \times 10^{-13}$	$6,89 \times 10^{-7}$	$6,89 \times 10^{-7}$
$s = 40, q = 79$	$4,98 \times 10^{-13}$	$4,98 \times 10^{-13}$	$1,31 \times 10^{-11}$	$1,31 \times 10^{-11}$

Caso Simétrico ( $h = 3262m$ )				
s,q	GU	CN	GC	HS
$s = 3, q = 5$	$4,90 \times 10^{-13}$	$4,90 \times 10^{-13}$	$4,90 \times 10^{-13}$	$7,87 \times 10^{-13}$
$s = 3, q = 17$	$3,94 \times 10^{-13}$	$3,94 \times 10^{-13}$	$3,94 \times 10^{-13}$	$1,90 \times 10^{-6}$
$s = 3, q = 75$	$7,67 \times 10^{-13}$	$7,67 \times 10^{-13}$	$7,67 \times 10^{-13}$	$2,20 \times 10^{-4}$
$s = 20, q = 31$	$5,06 \times 10^{-13}$	$5,06 \times 10^{-13}$	$1,97 \times 10^{-12}$	$1,97 \times 10^{-12}$
$s = 20, q = 65$	$6,10 \times 10^{-13}$	$6,10 \times 10^{-13}$	$4,46 \times 10^{-8}$	$4,46 \times 10^{-8}$
$s = 11, q = 79$	$3,95 \times 10^{-13}$	$3,95 \times 10^{-13}$	$1,11 \times 10^{-5}$	$1,11 \times 10^{-5}$
$s = 20, q = 79$	$4,71 \times 10^{-13}$	$4,71 \times 10^{-13}$	$6,89 \times 10^{-7}$	$6,89 \times 10^{-7}$
$s = 40, q = 79$	$3,95 \times 10^{-13}$	$3,95 \times 10^{-13}$	$1,11 \times 10^{-5}$	$1,11 \times 10^{-5}$

Caso Simétrico ( $h = 105m$ )				
s,q	GU	CN	GC	HS
$s = 3, q = 5$	$2,64 \times 10^{-13}$	$2,64 \times 10^{-13}$	$2,64 \times 10^{-13}$	$2,02 \times 10^{-12}$
$s = 3, q = 17$	$7,31 \times 10^{-13}$	$7,31 \times 10^{-13}$	$7,31 \times 10^{-13}$	$2,33 \times 10^{-7}$
$s = 3, q = 75$	$5,54 \times 10^{-13}$	$5,54 \times 10^{-13}$	$5,54 \times 10^{-13}$	$1,82 \times 10^{-4}$
$s = 20, q = 31$	$4,90 \times 10^{-13}$	$4,90 \times 10^{-13}$	$4,89 \times 10^{-13}$	$4,89 \times 10^{-13}$
$s = 20, q = 65$	$4,83 \times 10^{-13}$	$4,83 \times 10^{-13}$	$2,30 \times 10^{-8}$	$2,30 \times 10^{-8}$
$s = 11, q = 79$	$4,36 \times 10^{-13}$	$4,36 \times 10^{-13}$	$7,31 \times 10^{-6}$	$7,31 \times 10^{-6}$
$s = 20, q = 79$	$4,88 \times 10^{-13}$	$4,88 \times 10^{-13}$	$4,18 \times 10^{-7}$	$4,18 \times 10^{-7}$
$s = 40, q = 79$	$5,04 \times 10^{-13}$	$5,04 \times 10^{-13}$	$1,34 \times 10^{-11}$	$1,34 \times 10^{-11}$

Os erros nos casos simétrico e antisimétrico são muito próximos, de modo que consideramos apenas o caso simétrico.

Apesar de termos mostrado que o erro de truncamento é pequeno, pois ele tem um decaimento com  $T$ , conforme mostramos em (8.3), ele tem influência nos resultados acima.

Os erros nas grades (CN) e (GU) são os mesmos, isto mostra que a grade de Courtier e Naughton tem, aparentemente, mais pontos que o necessário.

## 8.6 Cálculo da Energia Cinética com Aliasing

No trabalho de [11], os harmônicos de Hough são usados como base para expansão horizontal dos campos de vento e massa de um modelo de equação primitiva

global para um estado típico da atmosfera. A parte vertical é obtida da solução da equação da estrutura vertical com a altura equivalente como autovalor. Esta expansão dos dados globais permite a partição da energia em dois tipos distintos de movimentos - as ondas de gravidade e as ondas de Rossby.

A energia cinética total  $K$  de um estado típico da atmosfera é dada por

$$K = \sum_{s,q} k_{s,q},$$

onde os valores dos pesos  $k_{s,q}$  de cada modo de  $(s, q)$  na energia cinética total  $K$  são dados nas Tabelas 1, 2, 3, 4, 5 e 6 do apêndice F.

A energia cinética  $E_{s,q}$  do harmônico de Hough  $H_{s,q}$  é definida, de acordo com [13], por (F.9). Os coeficientes  $A_p^q$  e  $B_p^q$  em (F.9) são calculados com um erro de *aliasing*, conforme a fórmula (8.1) e o programa contido no apêndice F.2. Denotemos os valores calculados por  $\tilde{A}_p^q = A_p^q + \delta A_p^q$  e  $\tilde{B}_p^q = B_p^q + \delta B_p^q$ , onde  $\delta A_p^q$  e  $\delta B_p^q$  são os erros de *aliasing* de  $A_p^q$  e  $B_p^q$ , respectivamente.

Estamos interessados em calcular o erro na energia cinética  $E$  devido ao *aliasing* ocasionado pela redução da grade, levando em conta os pesos  $k_{s,q}$  de cada modo  $(s, q)$ . Então definimos a energia cinética com *aliasing* por

$$E = \frac{1}{K} \sum_{s,t} k_{s,q} \left\{ \frac{1}{E_{s,q}} \sum_{p=s}^{s+2T_0-1} p(p+1) \left[ \left( A_p^q + \delta A_p^q \right)^2 + \left( B_p^q + \delta B_p^q \right)^2 \right] \right\}. \quad (8.16)$$

Então de (8.16), obtemos o erro na energia cinética devida ao *aliasing*

$$\delta E = \frac{1}{K} \sum_{s,q} k_{s,q} \left\{ \frac{1}{E_{s,q}} \sum_{p=s}^{s+2T_0-1} 2p(p+1) \left[ A_p^q \delta A_p^q + B_p^q \delta B_p^q \right] \right\}. \quad (8.17)$$

Programamos a fórmula (8.17) (veja o código no apêndice F.2) e concluímos, por meio de experimentos numéricos, que a maior parte da energia cinética dos harmônicos de Hough dados concentra-se nos modos de frequência  $(s, q)$  mais altos. Sendo assim, para o truncamento triangular  $T = 105$  que consideramos, os valores de  $\delta E$  são muito pequenos, mostrando assim que o erro de truncamento é maior que o erro de *aliasing*.

Energia $\delta E$				
$h$	GU	CN	GC	HS
9570m	$1,99 \times 10^{-13}$	$2,00 \times 10^{-13}$	$1,99 \times 10^{-13}$	$1,41 \times 10^{-11}$
3262m	$2,46 \times 10^{-13}$	$2,44 \times 10^{-13}$	$2,46 \times 10^{-13}$	$8,41 \times 10^{-12}$
105m	$1,38 \times 10^{-13}$	$1,25 \times 10^{-13}$	$1,38 \times 10^{-13}$	$5,69 \times 10^{-12}$

Com isso esperamos que para malhas suficientemente grandes, de uso em novos modelos de circulação geral, que possam levar em conta todos os coeficientes dos harmônicos de Hough considerados, tenhamos um erro de truncamento menor, pois ele decai com  $T$ , como mostramos em (8.3) e assim o erro de *aliasing* passe a ter importância.

## 8.7 Conclusões

O estado da atmosfera pode ser representado por uma combinação linear de harmônicos esféricos ou de harmônicos de Hough e, em cada um dos casos, obtivemos uma fórmula para o cálculo do erro introduzido ao avaliar os coeficientes da expansão quando uma grade reduzida é usada em vez de uma grade plena.

Essas fórmulas são obtidas de (8.1) e podem ser usadas diretamente de duas maneiras. Uma é calcular o erro para um harmônico de Hough para uma grade dada. Outra é calcular o erro em uma combinação linear de harmônicos esféricos que seja representativa de estado típico da atmosfera.

Pela nossa análise numérica feita na seção 8.5, concluímos que a grade reduzida de Courtier e Naughton é, aparentemente, mais fina que o necessário, portanto utilizando o método descrito no teorema 8.1 é possível encontrar uma grade reduzida menos fina que (CN), mas com precisão bem próxima.

Há outra finalidade para este trabalho. Acreditamos que pode ser utilizado para achar a grade reduzida ótima levando em conta o custo computacional, para um truncamento especificado. Para isto, porém, é necessário saber os custos computacionais de cada parte de um modelo de circulação geral que utilize esta grade. Técnicas de otimização combinatória poderão ser úteis para esta utilização.

## Referências

- [1] G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 2001
- [2] W. L. Briggs, V. E. Henson, *The DFT, An Owner's Manual for the Discrete Fourier Transform*, Springer-Verlag, 1995
- [3] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, T. A. Zang, *Spectral Methods in Fluids Dynamics*, Springer-Verlag, 1987
- [4] A. J. Chorin, J. E. Marsden, *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, Springer-Verlag, 1992
- [5] P. Courtier, M. Naughton, A Pole Problem in the Reduced Gaussian Grid, *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 120, 1389-1407, 1994
- [6] D. R. Durran, *Numerical Methods for Wave Equations in Geophysical Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, 1999
- [7] T. Elvius, e A. Sundström, Computationally effective schemes and boundary conditions for a fine-mesh barotropic model based on shallow-water equations, *Tellus XXV* (1973), 2, pp. 132-155.
- [8] M. Hortal, Aspects of the Numerics of ECMWF Model, Proceedings of Seminar on "Recent Developments in Numerical Methods for Atmospheric Modeling ECMWF", Reading-UK, Set-1998, pp. 127-143
- [9] M. Hortal, A. J. Simmons, Use of Reduced Gaussian Grids in Spectral Models, *Monthly Weather Review*, vol. 119, 1057-1074, 1991
- [10] R. Iório, V. Iório, *Fourier Analysis and Partial Differential Equations*, Cambridge University Press, 2001
- [11] A. Kasahara, K. Puri, Spectral Representation of Three-Dimensional Global Data by Expansion in Normal Mode Functions, *Monthly Weather Review*, vol. 109, 37-51, 1981
- [12] T. N. Krishnamurti, *An Introduction to Global Spectral Modeling*, Oxford University Press, 1998
- [13] M. S. Longuet-Higgins, The Eigenfunctions of Laplace's Tidal equations over a Sphere, *Phil. Trans. Royal Society*, A262, 511-607, 1968
- [14] J. Pedlosky, *Geophysical Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, 1987
- [15] H. Ritchie, Application of the Semi-Lagrangian Method to a Spectral Model of the Shallow Water Equations, *Monthly Weather Review*, vol. 116, no. 8, 1587-1598, 1988

- [16] A. M. da Silva Junior, D. P. Dee, A Subroutine Package for Computing Hough Functions and Spectral Decomposition on the Sphere, Departamento de Matemática - PUC, *1985*
- [17] G. Szegő, Orthogonal Polynomials, Fourth ed., American Mathematical Society, Providence, RI, *1975*

## A As Equações de Águas Rasas na Terra

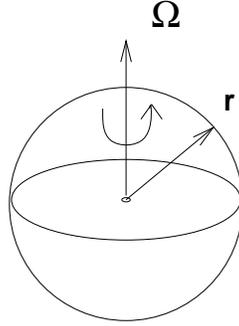


Figura 11: Sistema de Coordenadas.

Os resultados desta seção podem ser encontrados em [4], [12] e [14]. Sejam  $L$  o comprimento característico do movimento horizontal,  $U$  a velocidade característica e  $\Omega$  a velocidade de rotação da Terra. O *número de Rossby*  $\epsilon_R$  é definido por

$$\epsilon_R = \frac{U}{2\Omega L}.$$

Consideramos um movimento de larga escala caracterizado por  $\epsilon_R \ll 1$ , ou seja, aquele cuja duração é grande comparado ao período de rotação da Terra. Aqui consideramos que para qualquer movimento do fluido, a única força exercida sobre sua superfície é a pressão, dada por meio do gradiente do geopotencial  $\phi = \phi(\mathbf{r}, t)$ , onde  $\mathbf{r} = (x(t), y(t), z(t))$  é o vetor posição de uma partícula de fluido no tempo  $t$ . No modelo de águas rasas, consideramos um fluido incompressível homogêneo com uma fronteira horizontal inferior rígida e superior uma superfície livre. A velocidade horizontal é considerada invariante com a altura, assim  $\mathbf{v}_H = (u(x, y, t), v(x, y, t), 0)$ . No sistema de águas rasas, usamos as equações de conservação de momento e de massa (continuidade). A equação de continuidade para um fluido incompressível é

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

que ao ser integrada verticalmente com uma condição de fronteira inferior  $w = 0$  em  $z = 0$ , nos dá

$$w = -h \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right),$$

onde  $w$  é a velocidade vertical e  $h = h(x, y, t)$  é a altura da superfície livre. Também

$$w = \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + \mathbf{v}_H \cdot \nabla h,$$

donde

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\mathbf{v}_H \cdot \nabla h - h \nabla \cdot \mathbf{v}_H,$$

que multiplicada por  $g$  nos dá a equação de continuidade

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\mathbf{v}_H \cdot \nabla \phi - \phi \nabla \cdot \mathbf{v}_H,$$

onde

$$\phi = \int_0^{h(x,y,t)} g dz = gh$$

é o geopotencial na superfície livre. Pela segunda lei de Newton, o balanço do momento horizontal num referencial inercial fica

$$\frac{d\mathbf{v}_H}{dt} = -\nabla \phi.$$

Se considerarmos o vetor  $\boldsymbol{\Omega}$  como eixo de rotação da Terra, então neste sistema de coordenadas não inerciais em rotação, conforme a figura 11, obtemos

$$\frac{d\mathbf{v}_H}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_H = -\nabla \phi.$$

Portanto, a equação de conservação do momento horizontal para o modelo de águas rasas é

$$\frac{\partial \mathbf{v}_H}{\partial t} = -(\mathbf{v}_H \cdot \nabla) \mathbf{v}_H - f \mathbf{k} \times \mathbf{v}_H - \nabla \phi,$$

onde  $f = 2\Omega$  é o parâmetro de Coriolis, isto é, a componente vertical da vorticidade planetária, que consideramos constante, usando o plano- $\beta$  como aproximação. Assim obtemos o seguinte sistema de equações de águas rasas

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{v}_H}{dt} + \mathbf{k}f \times \mathbf{v}_H + \nabla \phi = 0 \\ \frac{d\phi}{dt} + \phi \nabla \cdot \mathbf{v}_H = 0, \end{array} \right. \quad (\text{A.1})$$

onde

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_H \cdot \nabla;$$

ou, em termos de coordenadas, para o caso  $f = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt} + c_x^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \\ \frac{dv}{dt} + c_y^2 \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \\ \frac{d\phi}{dt} + \phi \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, \end{array} \right. \quad (\text{A.2})$$

onde introduzimos o vetor de onda  $\mathbf{c} = (c_x, c_y)$ , para analisarmos o efeito da grade reduzida na propagação de ondas de água-rasa. Linearizamos o sistema (A.2) em torno do estado estacionário  $u = U$  e  $v = V$  constante e de um geopotencial constante  $\phi = \Phi$ . Para isto, escrevemos

$$u = U + u', \quad v = V + v', \quad \phi = \Phi + \phi',$$

onde  $u', v', \phi'$  é o desvio de ordem  $\mathcal{O}(\epsilon_R)$  dos seus valores médios  $U, V, \Phi$ , respectivamente. Então abandonando a linha nos termos de  $\mathcal{O}(\epsilon_R)$  do sistema (A.2), obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + V \frac{\partial u}{\partial y} + c_x^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} + V \frac{\partial v}{\partial y} + c_y^2 \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + U \frac{\partial \phi}{\partial x} + V \frac{\partial \phi}{\partial y} + \Phi \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0. \end{array} \right. \quad (\text{A.3})$$

## B Identidades para Funções Ondulatórias

**Lema B.1** *Se  $k_i$  têm sinais iguais e  $w_i$  têm sinais iguais e são tais que*

$$\alpha_1 e^{-i(k_1 x - w_1 t)} + \alpha_2 e^{-i(k_2 x - w_2 t)} + \alpha_3 e^{-i(k_3 x - w_3 t)} = 0, \forall x, \forall t, \quad (\text{B.1})$$

*com coeficientes não nulos  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Então*

$$k_1 = k_2 = k_3,$$

$$w_1 = w_2 = w_3.$$

De fato, consideremos a equação (B.1) juntamente com suas derivadas primeira e segunda com relação a  $x$ . Então para  $t = 0$  e  $x = 0$  obtemos

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & = 0 \\ k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3 & = 0 \\ k_1^2 \alpha_1 + k_2^2 \alpha_2 + k_3^2 \alpha_3 & = 0, \end{cases}$$

ou na forma matricial

$$A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = 0, \text{ onde } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \\ k_1^2 & k_2^2 & k_3^2 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  é uma matriz de Vandermonde e  $\det A = 0$ . Assim

$$(k_3 - k_1)(k_3 - k_2)(k_2 - k_1) = 0.$$

Suponhamos, sem perda de generalidade, que  $k_1 = k_2 = k$ . Portanto, para  $t = 0$ , a equação (B.1) fica

$$(\alpha_1 + \alpha_2)e^{-ikx} + \alpha_3 e^{-ik_3 x} = 0,$$

donde

$$\begin{cases} (\alpha_1 + \alpha_2)\cos(kx) + \alpha_3\cos(k_3 x) & = 0 \\ (\alpha_1 + \alpha_2)\text{sen}(kx) + \alpha_3\text{sen}(k_3 x) & = 0, \end{cases}$$

ou matricialmente

$$\begin{pmatrix} \cos(kx) & \cos(k_3 x) \\ \text{sen}(kx) & \text{sen}(k_3 x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Se

$$B = \begin{pmatrix} \cos(kx) & \cos(k_3 x) \\ \text{sen}(kx) & \text{sen}(k_3 x) \end{pmatrix}$$

então  $\det B = 0$ , ou seja

$$\text{sen}(k - k_3)x = 0,$$

logo  $k = k_3$ . Portanto

$$k_1 = k_2 = k_3 = k.$$

Agora para  $x = 0$ , a equação (B.1), juntamente com suas derivadas primeira e segunda com relação a  $t$ , em  $t = 0$  nos fornece

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & = 0 \\ \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3 & = 0 \\ \alpha_1 w_1^2 + \alpha_2 w_2^2 + \alpha_3 w_3^2 & = 0 \end{cases}$$

ou na forma matricial

$$C \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = 0, \text{ onde } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ w_1^2 & w_2^2 & w_3^2 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $C$  é uma matriz de Vandermonde e  $\det C = 0$ . Assim

$$(w_3 - w_2)(w_3 - w_1)(w_2 - w_1) = 0.$$

Suponhamos, sem perda de generalidade, que  $w_1 = w_2 = w$ . Portanto, para  $x = 0$ , a equação (B.1) fica

$$(\alpha_1 + \alpha_2)e^{iwt} + \alpha_3 e^{iw_3 t},$$

donde

$$\begin{cases} (\alpha_1 + \alpha_2)\cos(wt) + \alpha_3\cos(w_3 t) & = 0 \\ (\alpha_1 + \alpha_2)\text{sen}(wt) + \alpha_3\text{sen}(w_3 t) & = 0, \end{cases}$$

ou matricialmente

$$\begin{pmatrix} \cos(wt) & \cos(w_3 t) \\ \text{sen}(wt) & \text{sen}(w_3 t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = 0,$$

assim obtemos para a matriz

$$D = \begin{pmatrix} \cos(wt) & \cos(w_3 t) \\ \text{sen}(wt) & \text{sen}(w_3 t) \end{pmatrix}$$

Queremos que  $\det D = 0$ , ou seja

$$\text{sen}(w - w_3)x = 0$$

logo  $w = w_3$ . Portanto

$$w_1 = w_2 = w_3 = w.$$

## C Relação de Dispersão em Diferenças Finitas

O resultado a seguir pode ser encontrado em [7] e é usado para mostrar por meio de exemplo, que no método de diferenças finitas, a velocidade de propagação da onda depende da grade.

**Lema C.1** *Consideremos o sistema (2.1) discretizado pelo seguinte método de diferenças finitas semi-implícito*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_{m,n}^{j+1} - u_{m,n}^{j-1}}{2\Delta t} + Uu_x^j + Vv_y^j + c_x^2 \frac{\phi_x^{j+1} + \phi_x^{j-1}}{2} = 0 \\ \frac{v_{m,n}^{j+1} - v_{m,n}^{j-1}}{2\Delta t} + Uv_x^j + Vv_y^j + c_y^2 \frac{\phi_y^{j+1} + \phi_y^{j-1}}{2} = 0 \\ \frac{\phi_{m,n}^{j+1} - \phi_{m,n}^{j-1}}{2\Delta t} + U\phi_x^j + V\phi_y^j + \Phi \left( \frac{u_x^{j+1} + u_x^{j-1}}{2} + \frac{v_y^{j+1} + v_y^{j-1}}{2} \right) = 0, \end{array} \right. \quad (\text{C.1})$$

onde usamos as aproximações

$$F_x \approx \frac{F_{m+1,n} - F_{m-1,n}}{2\Delta x}, \quad F_y \approx \frac{F_{m,n+1} - F_{m,n-1}}{2\Delta y}, \quad F_{m,n}^j = F(m\Delta x, n\Delta y, j\Delta t).$$

Então obtemos uma relação de dispersão onde a velocidade de propagação da onda depende da malha, ou seja, de  $\Delta x$  e  $\Delta y$ , além de  $\Delta t$ .

De fato, procuremos soluções de (C.1) da forma

$$\begin{pmatrix} u_{m,n}^j \\ v_{m,n}^j \\ \phi_{m,n}^j \end{pmatrix} = e^{-i(w_x m \Delta x k + w_y n \Delta y l - j \Delta t w)} \begin{pmatrix} u^0 \\ v^0 \\ \phi^0 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.2})$$

onde foi usado o fato que  $x = m\Delta x$ ,  $y = n\Delta y$  e  $t = j\Delta t$ .

Denotando

$$S_t = \frac{e^{i\Delta t w} - e^{-i\Delta t w}}{2\Delta t} = \frac{2i \operatorname{sen}(\Delta t w)}{2\Delta t}, \quad (\text{C.3})$$

$$C_t = \frac{e^{i\Delta t w} + e^{-i\Delta t w}}{2\Delta t} = \frac{2i \operatorname{sen}(\Delta t w)}{2\Delta t}, \quad (\text{C.4})$$

$$S_x = \frac{e^{i\Delta x k} - e^{-i\Delta x k}}{2\Delta x} = \frac{2i \operatorname{sen}(\Delta x k)}{2\Delta x}, \quad (\text{C.5})$$

$$S_y = \frac{e^{i\Delta y l} - e^{-i\Delta y l}}{2\Delta y} = \frac{2i \operatorname{sen}(\Delta y l)}{2\Delta y}. \quad (\text{C.6})$$

e substituindo (C.2) em (C.1), obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} S_t u^0 + U S_x u^0 + V S_y v^0 + \frac{c_x^2}{2} (e^{i\Delta t w} S_x + e^{-i\Delta t w} S_x) \phi_0 = 0 \\ S_t v^0 + U S_x v^0 + V S_y v^0 + \frac{c_y^2}{2} (e^{i\Delta t w} S_y + e^{-i\Delta t w} S_y) \phi_0 = 0 \\ S_t \phi^0 + U S_x \phi^0 + V S_y \phi^0 + \frac{\Phi}{2} (e^{i\Delta t w} S_x u^0 + e^{-i\Delta t w} S_x u^0 + e^{i\Delta t w} S_y v^0 + e^{-i\Delta t w} S_y v^0) = 0, \end{array} \right.$$

donde

$$\begin{cases} (S_t + US_x + VS_y)u^0 + c_x^2 \Delta t C_t S_x \phi_0 & = 0 \\ (S_t + US_x + VS_y)v^0 + c_y^2 \Delta t C_t S_y \phi_0 & = 0 \\ (S_t + US_x + VS_y)\phi^0 + \Phi \Delta t (C_t S_x u^0 + C_t S_y v^0) & = 0, \end{cases}$$

ou na forma matricial, denotando-se  $\lambda = \lambda(\Delta x, \Delta y, \Delta t) = S_t + US_x + VS_y$ , obtemos

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & c_x^2 \Delta t S_x C_t \\ 0 & \lambda & c_y^2 \Delta t S_y C_t \\ \Phi \Delta t S_x & \Phi \Delta t S_y & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^0 \\ v^0 \\ \phi^0 \end{pmatrix} = 0,$$

donde ao zerar o determinante do sistema, obtemos a seguinte relação de dispersão

$$\lambda^3 - \lambda \Phi \Delta t (c_x^2 S_x^2 C_t^2 + c_y^2 S_y^2 C_t^2) = 0.$$

Então, obtemos  $\lambda = 0$  ou  $\lambda = \pm \sqrt{\Phi \Delta t (c_x^2 S_x^2 C_t^2 + c_y^2 S_y^2 C_t^2)}$ . Para  $\lambda \neq 0$ , temos que  $\lambda$  depende de  $\Delta t, \Delta x, \Delta y$ , pois  $C_t, S_x$  e  $S_y$  dependem de  $\Delta t, \Delta x, \Delta y$ , de acordo com as equações (C.4), (C.5) e (C.6). Agora, se  $\lambda = 0$ , então  $S_t + US_x + VS_y = 0$ , ou seja,  $S_t = -(US_x + VS_y)$ , logo pelas expressões (C.3), (C.5) e (C.6), segue que

$$\text{sen}(\Delta t w) = -\Delta t \left[ U \left( \frac{\text{sen}(\Delta x k)}{\Delta x} \right) + V \left( \frac{\text{sen}(\Delta y l)}{\Delta y} \right) \right],$$

donde

$$w = \frac{1}{\Delta t} \arcsen \left\{ -\Delta t \left[ U \left( \frac{\text{sen}(\Delta x k)}{\Delta x} \right) + V \left( \frac{\text{sen}(\Delta y l)}{\Delta y} \right) \right] \right\}.$$

Logo,  $w$  depende de  $\Delta t, \Delta x, \Delta y$ , ou seja, depende da grade. Portanto, a relação de dispersão de todas as ondas dependem de  $\Delta t, \Delta x, \Delta y$ .

## D Transformada de Legendre

Todos os resultados mencionados neste apêndice são clássicos e podem ser encontrados em [3], [6], [12] e [17]. Precisamos primeiramente definir as funções de Legendre e depois enunciar resultado sobre transformada de Legendre discreta, pois temos que avaliar o erro nos coeficientes da expansão de uma função em harmônicos esféricos.

### D.1 Funções de Legendre

As funções de Legendre  $P_{k,l}(\mu)$  de ordem  $k$  e grau  $l$  são as soluções da equação de Legendre

$$\frac{d}{d\mu} \left( (1 - \mu^2) \frac{dP}{d\mu} \right) + \left( l(l+1) - \frac{k^2}{1 - \mu^2} \right) P = 0, \quad (\text{D.1})$$

onde  $\mu \in [-1, 1]$ , com a condição de serem limitadas nos extremos do intervalo. Podemos obter  $P_{k,l}$  usando a fórmula de Rodrigues

$$P_{k,l}(\mu) = \frac{(1 - \mu^2)^{k/2}}{2^l l!} \frac{d^{l+k}}{d\mu^{l+k}} (\mu^2 - 1)^l. \quad (\text{D.2})$$

Segue que  $P_{k,l}$  tem  $l$  raízes, das quais  $k$  estão nos polos  $\mu = \pm 1$ , enquanto que  $l - k$  estão entre os polos. Quando  $k = 0$ ,  $P_{0,l}(\mu)$  é o polinômio de Legendre em  $\mu$  de grau  $l$ . A função de Legendre normalizada  $\tilde{P}_{k,l}$  é dada por

$$\tilde{P}_{k,l}(\mu) = \left( \frac{(l-k)!}{(l+k)!} \right)^{1/2} \left( \frac{2l+1}{2} \right)^{1/2} P_{k,l}(\mu), \quad (\text{D.3})$$

e a correspondente relação de ortogonalidade é

$$\int_{-1}^1 \tilde{P}_{k,l}(\mu) \tilde{P}_{r,s}(\mu) d\mu = \delta_{k,r} \delta_{l,s}. \quad (\text{D.4})$$

Denotemos a função de Legendre normalizada  $\tilde{P}_{k,l}$  por  $P_{k,l}$ , então temos a seguinte propriedade

$$|P_{k,l}| \leq 1, \quad \forall k, l. \quad (\text{D.5})$$

Quando  $k = 0$ ,  $P_{0,l}(\mu)$  é o polinômio de Legendre em  $\mu$  de grau  $l$ . Neste caso, obtemos os polinômios de Legendre normalizados, denotemos por  $P_l$ , a partir da fórmula de Rodrigues (D.2) e da equação (D.4), com  $k = 0$ , dados por

$$P_l(\mu) = \left( \frac{2l+1}{2} \right)^{1/2} \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d\mu^l} (\mu^2 - 1)^l, \quad l = 0, 1, \dots \quad (\text{D.6})$$

donde obtemos os polinômios de graus  $l = 0$  e  $l = 1$  ao tomarmos, respectivamente,  $l = 0$  e  $l = 1$  diretamente na fórmula acima. Os demais polinômios podem ser obtidos pela fórmula de recursão

$$\epsilon_{l+1} P_{l+1}(\mu) = \mu P_l(\mu) - \epsilon_l P_{l-1}(\mu), \quad l = 1, 2, \dots \quad (\text{D.7})$$

onde  $\epsilon_l = \left(\frac{l^2}{4l^2 - 1}\right)^{1/2}$ .

Definimos

$$\Lambda_l = -l(l+1), \quad q(\mu) = \frac{-k^2}{1-\mu^2}, \quad (\text{D.8})$$

e o operador diferencial elíptico  $L$  por

$$L(P) = \frac{d}{d\mu} \left( (1-\mu^2) \frac{dP}{d\mu} \right) + q(\mu)P, \quad (\text{D.9})$$

então (D.1) fica

$$L(P) = \Lambda_l P. \quad (\text{D.10})$$

Uma propriedade útil dos polinômios de Legendre é

$$P_{k,l}(\mu) = 0, \quad \text{se } l < k.$$

Se  $f \in L^2[-1, 1]$  é uma função suave tal que

$$f(\mu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=|k|}^{\infty} a_{k,l} P_{k,l}(\mu)$$

então os coeficientes de Legendre de  $f$  são definidos por

$$a_{k,l} = (f, P_{k,l})_{L^2(-1,1)} = \int_{-1}^1 f(\mu) P_{k,l}(\mu) d\mu. \quad (\text{D.11})$$

**Teorema D.1** (*Taxa de Decaimento dos Coeficientes de Legendre*). *Consideremos  $f$  e suas  $2q$  primeiras derivadas contínuas e limitadas no domínio  $\mu \in [-1, 1]$ , para  $q \geq 1$ . Suponha que  $f$  e suas  $q$  primeiras derivadas pertencem a  $L^2(-1, 1)$ . Então os coeficientes de Legendre de  $f$  satisfazem*

$$|a_{k,l}| \leq \frac{C}{|\Lambda_l|^q}, \quad \forall k, \forall l \neq 0,$$

onde  $C$  é uma constante independente de  $k$  e  $l$ .

Usando as equações (D.8), (D.9) e (D.10), obtemos ao fazer integração por partes que

$$\begin{aligned} \Lambda_l a_{k,l} &= \int_{-1}^1 f(\mu) \left[ \frac{d}{d\mu} \left( (1-\mu^2) \frac{dP_{k,l}}{d\mu} \right) + q(\mu) P_{k,l} \right] d\mu \\ &= f(\mu) (1-\mu^2) \frac{dP_{k,l}}{d\mu} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \left[ \frac{df}{d\mu} (1-\mu^2) \frac{dP_{k,l}}{d\mu} - f(\mu) q(\mu) P_{k,l} \right] d\mu \\ &= -P_{k,l}(\mu) \frac{df}{d\mu} (1-\mu^2) \Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \left[ \frac{d}{d\mu} \left( (1-\mu^2) \frac{df}{d\mu} \right) + q(\mu) f(\mu) \right] P_{k,l} d\mu \\ &= \int_{-1}^1 L(f) P_{k,l}(\mu) d\mu. \end{aligned}$$

Se  $l = 0$ , então vale a observação 7.1 para o decaimento de  $a_{k,0}$ . Para  $l \neq 0$ , definimos  $f_0 = f$ ,  $f_1 \equiv Lf \in L^2(-1, 1)$ , pois a derivada segunda de  $f$  é de quadrado integrável, logo

$$a_{k,l} = \frac{1}{\Lambda_l} (f_1, P_{k,l})_{L^2(-1,1)}.$$

Com o mesmo argumento acima, obtemos que

$$a_{k,l} = \frac{1}{\Lambda_l^2} (f_2, P_{k,l})_{L^2(-1,1)},$$

onde  $f_2 \equiv Lf_1 \in L^2(-1, 1)$ . A iteração deste argumento nos dá

$$a_{k,l} = \frac{1}{\Lambda_l^q} (f_q, P_{k,l})_{L^2(-1,1)}, \quad (\text{D.12})$$

para  $q \geq 1$ , pois  $f_q \equiv L(f_{q-1}) \in L^2(-1, 1)$ . Logo, usando a hipótese de  $f_q$  ser limitada e a propriedade (D.5), segue pela desigualdade de Cauchy-Schwarz em (D.12), que existe  $C > 0$  tal que

$$|a_{k,l}| \leq \frac{C}{|\Lambda_l|^q},$$

como queríamos mostrar.

## D.2 Transformada de Legendre Discreta

Para as funções de Legendre, temos a fórmula de quadratura gaussiana seguinte

$$\int_{-1}^1 f(\mu) P_{k,l}(\mu) d\mu \approx \sum_{m=1}^M f(\mu_m) P_{k,l}(\mu_m) w_m, \quad (\text{D.13})$$

que é a transformada de Legendre discreta, a qual é exata para polinômios de grau  $\leq 2M - 1$ . Na fórmula (D.13), os coeficientes  $w_m$  são os pesos dados por

$$w_m = \frac{(2M - 1)(1 - \mu_m^2)}{M^2 P_{0,M-1}^2(\mu_m)} \quad (\text{D.14})$$

e  $\mu_m$  são os zeros do polinômio de Legendre  $P_{0,M}(\mu)$ .

**Observação D.1** Quando  $f = P_{k,l}$ ,  $l \leq T$ , obtemos

$$\int_{-1}^1 P_{k,l}(\mu) P_{k,l}(\mu) d\mu = 1,$$

porque as funções de Legendre  $P_{k,l}$  estão normalizadas. Por outro lado, se  $2T \leq 2M - 1$ , ou seja,  $M \geq T + 1$ , da fórmula (D.13) obtemos

$$\sum_{m=1}^M P_{k,l}(\mu_m) P_{k,l}(\mu_m) w_m = 1.$$

## E Harmônicos Esféricos

Os resultados mencionados neste apêndice podem ser encontrados em [3], [6], [12] e [17]. A equação de Laplace para  $\lambda \in [0, 2\pi]$

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left( (1 - \mu^2) \frac{\partial^2 Y}{\partial \mu^2} \right) + \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2 Y}{\partial \lambda^2} + l(l + 1)Y = 0, \quad (\text{E.1})$$

pode ser escrita na forma

$$\nabla^2 Y = -l(l + 1)Y, \quad (\text{E.2})$$

onde  $\nabla$  é o laplaciano em coordenadas esféricas

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \mu} \left( (1 - \mu^2) \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \right) + \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}.$$

A equação (E.1) é resolvida pela separação de variáveis  $Y(\mu, \lambda) = P(\mu)L(\lambda)$ , que nos fornece a equação

$$\frac{d^2 L}{d\lambda^2} + k^2 L = 0,$$

cuja solução é  $L = e^{ik\lambda}$  e a equação na variável  $\mu$  é (D.1) cuja solução é  $P = P_{k,l}$ . Assim, a solução da equação de Laplace (E.1) é da forma  $Y_{k,l}(\lambda, \mu) = P_{k,l}(\mu)e^{ik\lambda}$ . As funções  $Y_{k,l}$  são chamados *harmônicos esféricos* de grau  $l$  e ordem  $k$ .

Nas aplicações práticas, a expansão de uma função  $f$  em série infinita de harmônicos esféricos deve ser truncada por uma aproximação numérica da forma

$$f(\lambda, \mu) \cong \sum_{k=-T}^T \sum_{l=|k|}^{N(k)} a_{k,l} Y_{k,l}(\lambda, \mu), \quad (\text{E.3})$$

onde o truncamento é escolhido dependendo de como  $N(k)$  é uma função de  $k$ . Adotamos o truncamento triangular no qual  $N(k) = T$ , por ser o mais usado hoje em dia, uma vez que fornece uma expansão uniforme na esfera, no sentido de que a expansão é invariante sob qualquer rotação do sistema de coordenadas na esfera.

A relação de ortogonalidade para os harmônicos esféricos é dada por

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} Y_{k,l}(\lambda, \mu) \bar{Y}_{r,s}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu = \delta_{k,r} \delta_{l,s}, \quad (\text{E.4})$$

onde  $\bar{Y}_{r,s}$  é o conjugado complexo de  $Y_{r,s}$ .

## F Harmônicos de Hough

Os resultados deste apêndice são conhecidos e podem ser encontrados em [?], [11],[13] e [16]. As equações de águas rasas (A.1) sobre a esfera, linearizadas em torno de um estado de repouso  $u = 0$ ,  $v = 0$  e de um geopotencial constante  $\phi = \phi_0 = gh_0$ , onde  $h_0$  é a altura equivalente, são dadas por

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{a} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} - fv = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\cos \theta}{a} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + fu = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi_0 \left( \frac{1}{a \cos^2 \theta} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos^2 \theta} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{F.1})$$

onde  $g$  é a gravidade,  $a$  é o raio da terra,  $\lambda \in [0, 2\pi]$  é a longitude e  $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  é a latitude. Consideremos

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{gh_0} \cos \theta \tilde{u} \\ v &= \sqrt{gh_0} \cos \theta \tilde{v} \\ \phi &= gh_0 \tilde{\phi} \\ t &= \frac{\tilde{t}}{2\Omega}. \end{aligned}$$

As componentes  $u$ ,  $v$  e  $\phi$  são, respectivamente, as componentes de velocidade zonal e meridional e o geopotencial na superfície livre. Então para as variáveis adimensionais  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$  e  $\tilde{\phi}$ , o sistema (F.1) fica (sem a notação  $\sim$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - \text{sen} \theta v + \frac{\gamma}{\cos \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \text{sen} \theta u + \gamma \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\gamma}{\cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\gamma}{\cos \theta} \frac{\partial (v \cos \theta)}{\partial \theta} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{F.2})$$

onde  $\gamma$  é o *parâmetro de Lamb* dado por

$$\gamma = \frac{\sqrt{gh_0}}{2a\Omega}.$$

O sistema (F.2) pode ser escrito como

$$\frac{\partial W}{\partial t} + LW = 0 \quad (\text{F.3})$$

onde

$$W = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \phi \end{pmatrix}$$

e

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -\text{sen}\theta & \frac{\gamma}{\cos\theta} \frac{\partial}{\partial\lambda} \\ \text{sen}\theta & 0 & \gamma \frac{\partial}{\partial\theta} \\ \frac{\gamma}{\cos\theta} \frac{\partial}{\partial\lambda} & \frac{\gamma}{\cos\theta} \frac{\partial(\cos\theta)}{\partial\theta} & 0 \end{pmatrix}.$$

Os *harmônicos de Hough* são a solução do problema de autovalores

$$LH = i\nu H, \quad (\text{F.4})$$

onde os autovalores  $\nu$  são todos reais. Logo o vetor

$$W(\lambda, \theta, t) = H(\lambda, \theta)e^{-i\nu t}$$

é uma solução de (F.3) e  $\nu$  está relacionado às frequências de oscilação do sistema. As soluções de (F.4) podem ser escritas por separação de variáveis como

$$H_q^s(\lambda, \theta) = \zeta_q^s(\theta)e^{is\lambda}$$

onde

$$\zeta_q^s = \begin{pmatrix} U_q^s \\ -iV_q^s \\ Z_q^s \end{pmatrix}$$

é chamada a *função de Hough* e

$$U_q^s, V_q^s, Z_q^s : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$$

são funções a serem determinadas. O índice  $s$  é o número de onda longitudinal e  $q$  é o índice meridional, que está relacionado ao número de zeros entre os polos no perfil meridional de  $U_q^s$ ,  $V_q^s$  e  $Z_q^s$ . Existem dois tipos de funções de Hough: simétricas e anti-simétricas. As primeiras são aquelas para as quais as componentes  $u$  e  $\phi$  são simétricas em relação ao equador  $\theta = 0$  e  $v$  é antisimétrica. As últimas são aquelas em que  $u$  e  $\phi$  são antisimétricas e  $v$  é simétrica. As funções de Hough simétricas e antisimétricas podem ser classificadas em três grupos: ondas de gravidade para leste e para oeste e ondas rotacionais (ou de Rossby), de acordo com o sinal e a magnitude da frequência  $\nu$ . Usaremos um índice adicional  $r$  para indicar o tipo de cada modo, com a convenção  $r = -1$  para onda de gravidade para oeste e  $r = 1$  para leste e  $r = 0$  para onda de Rossby. A ortonormalidade dos harmônicos de Hough pode ser enunciada como segue

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 (H_{qr}^s)^* H_{q'r'}^{s'} d\mu d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 (\zeta_{qr}^s)^* \zeta_{q'r'}^{s'} e^{i(s-s')\lambda} d\mu d\lambda = \delta_{r,r'} \delta_{s,s'} \delta_{q,q'}, \quad (\text{F.5})$$

onde  $\mu = \text{sen}\theta$ . A propriedade do conjunto de harmônicos de Hough  $\{H_{tr}^s\}$  ser completo segue diretamente da mesma propriedade válida para o correspondente conjunto de

funções de Hough  $\{\zeta_{qr}^s\}$ . Assim dada qualquer função vetorial diferenciável, periódica e contínua  $Q(\lambda, \theta)$  podemos escrever

$$Q(\lambda, \theta) = \sum_{s \in \mathbf{Z}} \sum_{q,r} q_{qr}^s H_{qr}^s,$$

onde os coeficientes da expansão  $q_{qr}^s$  são determinados unicamente utilizando-se a condição de ortogonalidade (F.5),

$$q_{qr}^s = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 (H_{qr}^s(\lambda, \theta))^* Q(\lambda, \theta) d\mu d\lambda = \int_{-1}^1 (\zeta_{qr}^s(\theta))^* \hat{Q}_s(\theta) d\mu$$

onde

$$\hat{Q}_s(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(\lambda, \theta) e^{-is\lambda} d\lambda.$$

As funções de Hough também satisfazem a relação

$$\zeta_{qr}^{-s} = (\zeta_{qr}^s)^*,$$

onde  $s$  é um inteiro positivo. Para obter as funções de Hough  $\zeta_{qr}^s$  transformamos  $U_{qr}^s$  e  $V_{qr}^s$  em função de corrente  $\Psi$  e potencial de velocidade  $\Phi$ , usando as relações de Helmholtz (omitindo-se os índices  $r, s$  e  $q$ )

$$\begin{cases} U = \frac{is\Phi - D\Psi}{\sqrt{\epsilon(1-\mu^2)}} \\ V = \frac{-s\Psi + iD\Phi}{\sqrt{\epsilon(1-\mu^2)}}, \end{cases} \quad (\text{F.6})$$

onde  $D = (1 - \mu^2) \frac{d}{d\mu}$  é o divergente. Agora se usamos (F.4) com as equações (F.6) e substituímos em (F.3), obtemos que  $\Phi, \Psi$  e  $Z$  satisfazem

$$\begin{cases} (\nu \nabla^2 - s)(i\Phi) + (\mu \nabla^2 + D)\Psi = \nabla^2 Z \\ (\nu \nabla^2 - s)\Psi + (\mu \nabla^2 + D)(i\Phi) = 0 \\ \nu Z = -\frac{1}{\epsilon} \nabla^2(i\Phi) \end{cases} \quad (\text{F.7})$$

onde  $\nabla^2 = \frac{d}{d\mu} \left[ (1 - \mu^2) \frac{d}{d\mu} \right] - \frac{s^2}{1 - \mu^2}$ . Como as funções de Legendre são as autofunções de operador Laplaciano  $\nabla^2$ , é conveniente representar a solução usando uma expansão em série em termos de funções de Legendre. Desse modo escreveremos, a partir de agora, o harmônico de Hough na forma

$$H_{s,q} = \begin{pmatrix} \Phi \\ \Psi \\ Z \end{pmatrix} = \sum_{p=s}^{\infty} \begin{pmatrix} iA_p^q \\ B_p^q \\ C_p^q \end{pmatrix} P_{s,p}(\mu), \quad (\text{F.8})$$

onde os índices  $q$  servem para lembrar que os coeficientes também dependem de  $q$ . Substituindo (F.8) em (F.7) e utilizando a ortogonalidade do conjunto  $P_{s,p}$ , encontramos os coeficientes  $A_p^q$ ,  $B_p^q$  e  $C_p^q$  com a série (F.8) truncada em  $p = s + 2T_0 - 1$ .

A energia cinética do harmônico de Hough  $H_{s,q}$  dado por (F.8) é definida por [13]

$$E_{s,q} = \sum_{p=s}^{s+2T_0-1} p(p+1) \left[ (A_p^q)^2 + (B_p^q)^2 \right]. \quad (\text{F.9})$$

## F.1 Energia Cinética de um Estado típico da Atmosfera

As Tabelas 1, 2, 3, 4, 5 e 6 mostram os valores dos pesos  $k_{s,q}$  de cada modo  $(s, q)$  na energia cinética total

$$K = \sum_{s,q} k_{s,q}$$

de um estado típico da atmosfera com altura equivalente, respectivamente,  $h = 10000m$ ,  $h = 3262m$ ,  $h = 817m$ ,  $h = 256m$ ,  $h = 105m$  e  $h = 40m$ . Todos os dados foram obtidos das Figs. 5a e 5b de [11].

Tabela 1: Distribuição da energia cinética para o modo vertical  $n = 1$

Energia Cinética $k_{s,q}$ ( $m^2/s^2$ )						
q	s = 1	s = 2	s = 3	s = 4	s = 5	s = 6
1	1,45	2,95	1,15	1,75	2,50	4,15
3	5,5	19	10	15	9,7	2,8
5	19	1,45	4,15	5,50	4,60	3,55
7	1,75	10	5,95	0,77	0,46	0,715
9	3,7	0,81	0,84	0,725	0,67	0,75
11	3,7	3,25	0,685	0,475	0,565	0,52
13	0,595	0,325	0,76	0,625	0,49	0,295
15	0,83	0,325	0,595	0,55	0,25	0,295
17	0,58	0,082	0,55	0,46	0,295	0,0865
19	0,31	0,145	0,115	0,25	0,0955	0,0985
21	0,076	0,28	0,34	0,091	0,0445	0,175
23	0,0565	0,0925	0,0615	0,0895	0,058	0,034

Tabela 2: Distribuição da energia cinética para o modo vertical  $n = 2$

Energia Cinética $k_{s,q}$ ( $m^2/s^2$ )						
q	s = 1	s = 2	s = 3	s = 4	s = 5	s = 6
1	0,97	4,3	0,88	0,91	0,67	1,0
3	41,5	19	6,95	1,9	5,35	3,1
5	5,95	5,5	0,925	2,65	4,75	2,2
7	0,91	4,15	1,45	0,94	0,85	0,52
9	2,2	0,535	1,3	0,475	0,94	0,79
11	2,2	3,7	0,595	0,565	0,37	0,88
13	0,34	0,79	0,865	0,19	0,40	0,58
15	0,415	0,265	0,73	0,52	0,235	0,40
17	0,22	0,235	0,415	0,37	0,52	0,19
19	0,22	0,19	0,115	0,0955	0,265	0,0895
21	0,25	0,07	0,0745	0,091	0,088	0,19
23	0,061	0,073	0,094	0,090	0,076	0,037

Tabela 3: Distribuição da energia cinética para o modo vertical  $n = 3$

Energia Cinética $k_{s,q}$ ( $m^2/s^2$ )						
q	s = 1	s = 2	s = 3	s = 4	s = 5	s = 6
1	0,13	0,745	0,82	0,61	0,565	0,535
3	3,85	1,6	0,82	0,40	0,035	0,31
5	6,7	4,6	0,775	0,475	0,73	0,28
7	0,52	0,58	0,28	0,16	0,205	0,115
9	0,46	0,43	0,355	0,0865	0,0895	0,082
11	0,082	0,34	0,1	0,079	0,091	0,094
13	0,67	0,43	0,355	0,0805	0,058	0,061
15	0,0685	0,0565	0,1	0,16	0,082	0,0385
17	0,073	0,0535	0,115	0,07	0,085	0,0565
19	0,07	0,0595	0,0745	0,067	0,0385	0,064
21	0,025	0,061	0,058	0,031	0,037	0,055
23	0,0265	0,028	0,04	0,0515	0,046	0,043

Tabela 4: Distribuição da energia cinética para o modo vertical  $n = 4$

Energia Cinética $k_{s,q}$ ( $m^2/s^2$ )						
q	s = 1	s = 2	s = 3	s = 4	s = 5	s = 6
1	3,1	4,3	2,8	3,7	0,91	0,31
3	1,75	2,65	3,55	0,91	1,45	0,97
5	13	16	4	2,2	5,65	0,88
7	7,45	9,25	3,4	1,15	2,35	0,79
9	4,9	3,25	2,05	0,85	0,15	0,61
11	2,35	0,67	0,82	0,88	0,7	0,265
13	0,76	0,34	0,28	0,46	0,097	0,067
15	0,325	0,31	0,355	0,061	0,235	0,0835
17	0,064	0,089	0,086	0,073	0,055	0,043
19	0,0895	0,061	0,046	0,028	0,07	0,0565
21	0,091	0,0745	0,064	0,067	0,0595	0,034
23	0,061	0,031	0,0655	0,046	0,019	0,028

Tabela 5: Distribuição da energia cinética para o modo vertical  $n = 5$

Energia Cinética $k_{s,q}$ ( $m^2/s^2$ )						
q	s = 1	s = 2	s = 3	s = 4	s = 5	s = 6
1	0,25	0,15	0,415	0,67	0,37	0,097
3	0,535	0,16	0,76	0,625	0,46	0,37
5	3,85	5,5	0,955	0,19	0,91	0,46
7	5,565	8,35	2,8	0,445	0,97	0,37
9	6,1	8,5	1,15	0,58	0,925	0,415
11	6,7	7,45	0,985	0,64	0,73	0,4
13	4,9	3,4	0,945	0,805	0,535	0,64
15	2,5	0,91	0,88	0,82	0,55	0,28
17	0,91	0,097	0,535	0,67	0,15	0,145
19	0,745	0,61	0,15	0,31	0,091	0,076
21	0,082	0,25	0,091	0,088	0,046	0,0565
23	0,145	0,082	0,064	0,07	0,0745	0,04

Tabela 6: Distribuição da energia cinética para o modo vertical  $n = 6$

Energia Cinética $k_{s,q}$ ( $m^2/s^2$ )						
q	s = 1	s = 2	s = 3	s = 4	s = 5	s = 6
1	0,52	0,1	0,175	0,076	0,061	0,019
3	0,55	0,088	0,073	0,0805	0,031	0,046
5	0,73	0,64	0,205	0,085	0,091	0,16
7	0,655	0,85	0,58	0,082	0,34	0,25
9	0,55	0,865	0,64	0,325	0,37	0,1
11	0,82	1,9	0,52	0,46	0,1	0,085
13	0,97	3,1	0,46	0,385	0,19	0,067
15	1	3,1	0,19	0,37	0,31	0,097
17	1,6	2,5	0,097	0,37	0,31	0,205
19	2,05	1,15	0,097	0,28	0,31	0,094
21	2,2	0,94	0,0805	0,16	0,25	0,076
23	2,2	0,79	0,076	0,22	0,13	0,055

## F.2 Programas utilizados

Segue o programa `erromax.m` em MatLab para o cálculo do erro dado na equação (7.19), na norma do máximo. O programa para o cálculo de (8.17) é `energiapesos.m` que utiliza o programa `energiainit.m`. Seguem também os arquivos de dados necessários. O arquivo de dados `coefCmat` contém os coeficientes dos harmônicos de Hough e é gerado por um código em Fortran denominado de `Houghpack` [16]. O arquivo de dados `zerosColatRad0160` contém as 160 raízes do polinômio de Legendre do mesmo grau que corresponde ao número de latitudes. Uma vez obtidos os polinômios de Legendre pelas fórmulas (D.6) e (D.7), então usamos o Método da Bisseção para extrair as suas raízes. As funções de Legendre são geradas no programa `FuncoesLegendre.m`. As grades de pontos estão definidas no programa `erroit.m`. O arquivo `gaussweights0160` contém os 160 pesos da fórmula de quadratura gaussiana (7.7) obtidos a partir da equação (7.10). O arquivo de dados `pesospurimat` contém os pesos  $k_{s,q}$  dados nas Tabelas 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Os programas abaixo são feitos para o caso em que um harmônico de Hough é dado. Agora, para o caso de ser dada uma combinação linear de harmônicos esféricos, o programa é praticamente o mesmo, mas deve ser modificado, pois o arquivo de entrada contendo os coeficientes dos harmônicos esféricos pode ser fornecido de modo diferente ao que é feito no programa abaixo. Utilizamos a regra dos 2/3 na definição das grades reduzidas, ao contrário do que foi feito no capítulo 7, onde todos os modos foram utilizados.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Programa FuncoesLegendre.m %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
% Gera as funcoes de Legendre associadas
```

```
T = 105; % truncamento espectral
```

```

T_0 = 50; % truncamento da expansao de Hough
smax = 40;
M = 160;

% define as latitudes
zerosColatRad0160
x = cos(x);
mu = x';

legmax = max(smax+2*(T_0-1), T) ;

PP = zeros(legmax+1, legmax+1, M);

for grau = 0: legmax,
    leg = legendre(grau,mu);
    for ordem=0:grau
        PP(grau+1,ordem+1,:) = sqrt((2*grau+1)/2) * leg(ordem+1,:) * ...
            sqrt(factorial(grau-ordem) /factorial(grau + ordem)); ,
    end
end

filename = strcat('Palegr',int2str(T))
save filename PP

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Fim do programa %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Programa erroinit.m %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

    %%%%%%%%%%% Inicializa programa para calcular o erro %%%%%%%%%%%
    %%%%%%%%%%% Casos Simetrico e Antisimetrico %%%%%%%%%%%

% Apenas uma das duas linhas ( caso simetrico ou caso antisimetrico ) deve
% ser usada

clear
close all

% Truncamento espectral
T = 105;

% Numero minimo de pontos necessarios para que a equacao (7.7) seja exata
% M >= T + 1;
M = 160; % adotamos este valor por jah termos prontos os arquivos de dados
% contendo as latitudes e os pesos correspondentes

```

```

% Define as latitudes
zerosColatRad0160 % Arquivo de dados contendo as latitudes
x = cos(x);
mu = x';

% Define os pesos da formula de quadratura gaussiana (eq. (7.9))
w = zeros(1,1,k2);
gaussweights0160 % Arquivo de dados contendo os pesos
w(1,1,:) = y;

% Truncamento da expansao dos harmonicos de Hough
% Dados de entrada para obter o arquivo coefCmat
T_0 = 50;
smax = 40;
lmax = 79; % Caso Simetrico
%lmax = 80; % Caso Antisimetrico

% PP contem as funcoes associadas de Legendre avaliadas nos pontos de
% de malha. Atencao estah preparado para smax=40, T=50, M = 106;

load ('Palegr', 'PP')

% Matrizes necessarias no calculo do erro

% Caso Simetrico
ErroHough = zeros(smax,lmax) ;

% Caso Antisimetrico
%ErroHough = zeros(smax,lmax+1) ;

% Definicao das grades

% Grade Uniforme

N = [320*ones(1,160)];

% Grade de Courtier & Naughton (CN)

% N = [18 25 36 40 45 54 60 64 72 72 75 81 90 90 96 100 108 120 120 125 ...
%      128 135 144 144 150 160 162 180*ones(1,3) 192*ones(1,3) 200 ...
%      216*ones(1,4) 225 225 240*ones(1,3) 243 250 250 256 270*ones(1,4) ...
%      288*ones(1,6) 300*ones(1,5) 320*ones(1,36) 300*ones(1,5) ...
%      288*ones(1,6) 270*ones(1,4) 256 250 250 243 240*ones(1,3) ...
%      225 225 216*ones(1,4) 200 192*ones(1,3) 180*ones(1,3) 162 ...
%      160 150 144 144 135 128 125 120 120 108 100 96 90 90 81 75 ...

```

```

%           72 72 64 60 54 45 40 36 25 18];

% Grade Construida (GC)

%N = [12 14 18 24 30 36 45 50 60 64 72 75 80 90 96 100 108 120 120 125 ...
%      128 135 144 144 150 160 162 180*ones(1,3) 192*ones(1,3) 200 ...
%      216*ones(1,4) 225 225 240*ones(1,3) 243 250 250 256 270*ones(1,4) ...
%      288*ones(1,6) 300*ones(1,5) 320*ones(1,36) 300*ones(1,5) ...
%      288*ones(1,6) 270*ones(1,4) 256 250 250 243 240*ones(1,3) ...
%      225 225 216*ones(1,4) 200 192*ones(1,3) 180*ones(1,3) 162 ...
%      160 150 144 144 135 128 125 120 120 108 100 96 90 80 75 72 ...
%      64 60 50 45 36 30 24 18 14 12];

% Grade Hortal & Simmons (HS)

%N = [6 12 18 24 30 36 45 50 60 64 72 75 80 90 96 100 108 120 120 125 128 ...
%      135 144 144 150 160 162 180 180 180 192 192 192 200 216*ones(1,4) ...
%      225 225 240*ones(1,3) 243 250 250 256 270*ones(1,4) 288*ones(1,6) ...
%      300*ones(1,5) 320*ones(1,36) 300*ones(1,5) 288*ones(1,6) 270*ones(1,4) ...
%      256 250 250 243 240*ones(1,3) 225 225 216*ones(1,4) 200 192 192 192 ...
%      180 180 180 162 160 150 144 144 135 128 125 120 120 108 100 96 90 80 ...
%      75 72 64 60 50 45 36 30 24 18 12 6];

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Fim do programa %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Programa erromax.m %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Programa para calcular o erro na norma do max %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Casos Simetrico e Antisimetrico %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% inicializa o programa (dados de entrada)
erroinit;

% Calcula o Erro dado na equacao (8.4)

r = 0 % Onda de rossby

%for s = 1:smax
%for q = 1:2:lmax % Caso Simetrico
%for q = 2:2:lmax % Caso Antisimetrico
s = input (' s ')
q = input (' q ')
save modosough s r q -ascii

% Calcula os coeficientes dos harmonicos de Hough (v. proxima secao)

!onehough.x % Roda o executavel e guarda em coefCmat

```

```

coefCmat % Arquivo de dados contendo os coeficientes

% calcule MAX (F_{k,l} - a_{k,l})/ MAX(a_{k,l})

ErroMax = 0.0;

limite = min(T,s+2*(T0-1));
if ( mod (limite-s,2) ~= 0 ), limite = limite-1 ; , end
posicoes = floor((limite-s)/2 + 1) ;

for k = -T:T      % pelo erro do maximo nao eh preciso calcular k negativo
signK = 1;
if ( k < 0 ), signK = (-1)^k; , end
Delta = zeros(1,1,M);
I = zeros(1,1,M);

    for m = 1:M
        if (mod(s-k,N(m) == 0), Delta(1,1,m) = 1; , end
if (k >= -N(m)/2 & k <= N(m)/2-1), I(1,1,m) = 1; , end
    end % loop m

    for l = abs(k):T
        vecaux = zeros(T0,1);

        for p = s:2:limite % Caso Simetrico
            vecaux(int8((p-s)/2+1)) = signK * sum(PP(p+1,s+1,:) .* ...
            PP(l+1,abs(k)+1,:) .* w(1,1,:) .* Delta(1,1,:).*I(1,1,:));
        end %loop p

        FKL = (sum(vecaux(1:posicoes,1) .* coefC(1:posicoes)) );
        % Caso Simetrico

        if ( k == s & mod(l-s,2) == 0 & l <= limite)
            Erro = abs(FKL - coefC(int8((l-s)/2+1)));
        else
            Erro = abs(FKL) ;
        end

        if ( ErroMax < Erro ), ErroMax = Erro; , end

    end % loop l
end % loop k

```

```

    ErroHough(s,q) = ErroMax/max(abs(coefC(1:posicoes))) ; % Caso Simetrico

ErroHough(s,q)

% end      % loop q
%end      % loop s

    save('ErroAliasHough', 'ErroHough')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Fim do programa %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Programa energiapesos.m %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Programa para calcular o erro %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Casos Simetrico e Antisimetrico %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Apenas uma das duas linhas ( caso simetrico ou caso antisimetrico ) deve
% ser usada

% inicializa o programa (dados de entrada)
energiainit;
pesospurimat;

% Calcula o Erro dado na equacao (8.4)

r = 0 % Onda de rossby

Soma1 = 0;
Soma2 = 0;

for s = 1:6
    for q = 1:2:23 % Caso Simetrico
        %for t = 2:2:lmax % Caso Antisimetrico
% s = input ( ' s = ' )
% q = input ( ' q = ' )
        save modosough s r q -ascii

% Calcula os coeficientes dos harmonicos de Hough (v. proxima secao)

!onehough.x % Roda o executavel e guarda em coefCmat

coefAmat % Arquivo de dados contendo os coeficientes A
coefBmat % Arquivo de dados contendo os coeficientes B

limite = min(T,s+2*(T0-1));

```

```

if ( mod (limite-s,2) ~= 0 ), limite = limite-1 ; , end
posicoes = floor((limite-s)/2 + 1) ;

% primeiro obtem o erro de alias de A e de B:

for k = -T:T      % pelo erro do maximo nao eh preciso calcular k negativo
    signK = 1;
    if (k < 0) , signK = (-1)^k ; , end
    Delta = zeros(1,1,M);
    I      = zeros(1,1,M);
    for m = 1:M
        if (mod(s-k,N(m)) == 0), Delta(m) = 1; , end
    if (k >= -N(m)/2 & k <= N(m)/2-1), I(1,1,m) = 1; , end
    end % loop m

    for l = abs(k):M
        vecaux = zeros(T0,1);

        for p = s:2:limite % Caso Simetrico
            vecaux(int8((p-s)/2+1)) = signK * ...
sum(PP(p+1,s+1,:) .* PP(l+1,abs(k)+1,:) .* w(1,1,:) .* Delta(1,1,:).*I(1,1,:));
            end %loop p

            AKL(k+T+1,l+1) = sum(vecaux(1:posicoes) .* coefA(1:posicoes));
            BKL(k+T+1,l+1) = sum(vecaux(1:posicoes) .* coefB(1:posicoes));
            if ( k == s & mod(l-s,2) == 0 & l <= limite)
                ErroAliasA(k+T+1,l+1) = AKL(k+T+1,l+1) - coefA(int8((l-s)/2+1));
                ErroAliasB(k+T+1,l+1) = BKL(k+T+1,l+1) - coefB(int8((l-s)/2+1));
            end
        end % loop l
    end % loop k

    ErroEnergiaComAlias = 0;
    for k = -T:T
        for l = abs(k):T
            ErroEnergiaComAlias = ErroEnergiaComAlias + ...
                (l)*(l+1)*(ErroAliasA(k+T+1,l+1)^2 + ErroAliasB(k+T+1,l+1)^2 );
        end
    end

    ErroEnergiaComAlias ;

    for l = s:2:limite
        pos = int8((l-s)/2 +1);

```

```

        ErroEnergiaComAlias = ErroEnergiaComAlias + ...
            2*(l)*(l+1)*(coefA(pos)*ErroAliasA(s+T+1,l+1) +...
            coefB(pos)*ErroAliasB(s+T+1,l+1)) ;
    end

ErroEnergiaComAlias;

EnergiaSemAlias= 0;
for l = s:2:s + 2 *(T0-1) %
    pos = int8((l-s)/2+1);
    EnergiaSemAlias = EnergiaSemAlias + ...
        l*(l+1)*(coefA(pos)^2 + coefB(pos)^2);
end

EnergiaSemAlias2 = 0;

for l = s:2:limite
    pos = int8((l-s)/2+1);
    EnergiaSemAlias2 = EnergiaSemAlias2 + ...
        l*(l+1)*(coefA(pos)^2 + coefB(pos)^2);
end

EnergiaHough(s,q) = ErroEnergiaComAlias/EnergiaSemAlias2;

Soma1 = Soma1 + EnergiaHough(s,q)*pesospuri(s,q);
Soma2 = Soma2 + pesospuri(s,q);

ErroEnergiaComAlias;
EnergiaSemAlias;
EnergiaSemAlias2;

end    % loop q
end    % loop s

Energia = Soma1/Soma2

save('EnergiaH', 'EnergiaHough')

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Fim do programa %%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Programa energiainit.m %%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Inicializa programa para calcular o erro %%%%%%%%%%%%%%%

```

```

%%%%%%%% Casos Simetrico e Antisimetrico %%%%

% Apenas uma das duas linhas ( caso simetrico ou caso antisimetrico ) deve
% ser usada

clear
close all

% Truncamento espectral
T = 105;

% Numero minimo de pontos necessarios para que a equacao 7.7 seja exata
% M >= T+1;
M = 160;

% Define as latitudes
zerosColatRad0160 % Arquivo de dados contendo as latitudes (v. proxima secao)
x = cos(x);
mu = x';

% Define os pesos da formula de quadratura gaussiana
w = zeros(1,1,M);
gaussweights0160 % Arquivo de dados contendo os pesos (v. proxima secao)
w(1,1,:) = y;

% Truncamento da expansao dos harmonicos de Hough (v. [1])
% Dados de entrada para obter o arquivo coefCmat (v. proxima secao)
T0 = 50;
smax = 40;
lmax = 79; % Caso Simetrico
%lmax = 80; % Caso Antisimetrico

% PP contem as funcoes associadas de Legendre avaliadas nos pontos de
% de malha. atencao estah preparado para smax=40, T0=50, T = 105;

load ('Palegr', 'PP')

% Matrizes necessarias no calculo do erro

% Caso Simetrico
EnergiaHough = zeros(smax,lmax) ;
ErroAliasA = zeros(2*M+1,M+1);
ErroAliasB = zeros(2*M+1,M+1);

% Caso Antisimetrico

```

```

%ErroHough = zeros(smax,lmax+1) ;

vecaux = zeros(T0,1);

% Grade Uniforme

N = [320*ones(1,160)];

% Grade de Courtier & Naughton (v. [7])

% N = [18 25 36 40 45 54 60 64 72 72 75 81 90 90 96 100 108 120 120 125 ...
%      128 135 144 144 150 160 162 180*ones(1,3) 192*ones(1,3) 200 ...
%      216*ones(1,4) 225 225 240*ones(1,3) 243 250 250 256 270*ones(1,4) ...
%      288*ones(1,6) 300*ones(1,5) 320*ones(1,36) 300*ones(1,5) ...
%      288*ones(1,6) 270*ones(1,4) 256 250 250 243 240*ones(1,3) ...
%      225 225 216*ones(1,4) 200 192*ones(1,3) 180*ones(1,3) 162 ...
%      160 150 144 144 135 128 125 120 120 108 100 96 90 90 81 75 ...
%      72 72 64 60 54 45 40 36 25 18];

% Grade Construida

% N = [12 14 18 24 30 36 45 50 60 64 72 75 80 90 96 100 108 120 120 125 ...
%      128 135 144 144 150 160 162 180*ones(1,3) 192*ones(1,3) 200 ...
%      216*ones(1,4) 225 225 240*ones(1,3) 243 250 250 256 270*ones(1,4) ...
%      288*ones(1,6) 300*ones(1,5) 320*ones(1,36) 300*ones(1,5) ...
%      288*ones(1,6) 270*ones(1,4) 256 250 250 243 240*ones(1,3) ...
%      225 225 216*ones(1,4) 200 192*ones(1,3) 180*ones(1,3) 162 ...
%      160 150 144 144 135 128 125 120 120 108 100 96 90 80 75 72 ...
%      64 60 50 45 36 30 24 18 14 12];

% Grade Hortal & Simmons

%N = [6 12 18 24 30 36 45 50 60 64 72 75 80 90 96 100 108 120 120 125...
%     128 135 144 144 150 160 162 180 180 180 192 192 192 200 ...
%     216*ones(1,4) 225 225 240*ones(1,3) 243 250 250 256 270*ones(1,4)...
%     288*ones(1,6) 300*ones(1,5) 320*ones(1,36) 300*ones(1,5) ...
%     288*ones(1,6) 270*ones(1,4) 256 250 250 243 240*ones(1,3) 225 ...
%     225 216*ones(1,4) 200 192 192 192 180 180 180 162 160 150 144 144 ...
%     135 128 125 120 120 108 100 96 90 80 75 72 64 60 50 45 36 30 24 18 12 6];

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Fim do programa %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```