



Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada



PRH-32

Perda de Injetividade em Reservatórios Estratificados

Julia Schaetzle Wrobel

Orientador: André Nachbin

Co-orientador: Dan Marchesin

Rio de Janeiro, 8 de abril de 2005

Para Ricardo, meu grande amor

Agradecimentos

Ao professor André Nachbin pela orientação, incentivo e confiança desde a graduação, que com imensa paciência me ensinou a pesquisar.

Ao professor Dan Marchesin pelos valiosos ensinamentos.

Aos professores Frederico Furtado, Marcus Sarkis e Pavel Bedrikovetsky pelas discussões.

Ao professor Roberto Mezzomo pelas lições em Engenharia do Petróleo e pelos almoços divertidos que tivemos.

A Ricardo por estar sempre do meu lado.

Aos meus pais, Sonia e Mario e meus irmãos, Ana e Renato por acreditarem em mim.

Aos alunos do *Fluid* pela força que deram durante o caminho e pela colaboração na terapia do bolo, em especial ao Duilio Tadeu da Conceição Junior, por tudo o que me ensinou.

A Calvin pela companhia durante esses anos.

À ANP e ao CNPq, pelo apoio a este trabalho.

Resumo

Apresentamos um estudo motivado pela recuperação de óleo através da injeção de água em um meio poroso estratificado. A água injetada não é pura, ela contém partículas, gotículas de óleo, bactérias, e muitos elementos químicos dissolvidos, cada um deles com sua capacidade particular de reduzir a permeabilidade na região perto do poço. O principal objetivo deste trabalho é desenvolver uma ferramenta computacional que permita estudar, e futuramente validar, de forma detalhada, modelos propostos na literatura e seus respectivos mecanismos de retenção de partículas em suspensão. Dentro desse panorama, os experimentos computacionais apresentados visam avaliar a capacidade do modelo numérico em capturar padrões distintos de escoamento na presença ou não do mecanismo de retenção de partículas, ou seja, verificar se as partículas migram para outras camadas.

Para isso, aplica-se uma formulação mecânica do fluxo de água contendo partículas em suspensão, sem qualquer interação de natureza química ou termodinâmica entre o fluido e o reservatório.

O modelo matemático tridimensional é considerado em uma geometria cilíndrica axissimétrica. Estudamos a evolução da concentração de partículas em um meio poroso heterogêneo, composto por camadas verticais. Em particular testamos modelos empíricos de retenção, a forma como as partículas ficam retidas no meio poroso, e suas implicações. As ferramentas numéricas usadas nesse estudo são o método das características para o transporte e retenção de partículas acoplado ao método de elementos finitos mistos (Raviart-Thomas de grau mais baixo) para a velocidade e pressão.

Abstract

This study is motivated by the production of oil through the injection of water in stratified porous media. The injected water is not pure - it contains oil drops, bacteria and chemical elements, each one with its own capability to reduce the permeability in the neighborhood of the well. The main goal of this work is to develop a computational tool that allows the study and, in the future, the validation of models proposed in the literature and of their respective particle retention mechanisms. Within this context, we intend to provide computational evidence that the numerical model captures different trajectory patterns. These patterns depend on whether we have particle retention or not and, consequently, if particle migration occurs between layers.

To do so, we apply a mechanic formulation for the flux of water containing suspension particles. At the present time we do not consider any chemical or thermodynamical interaction between fluid and reservoir.

The three dimension mathematical model considers a cylindrical axisymmetric geometry. We study the evolution of the concentration of suspended and deposited particles in a heterogeneous, vertically stratified reservoir. In particular, we test empirical retention models, the way the particles are retained in the medium and its consequences. The numerical tools used in this study are the method of characteristics for the transport and deposition of particles, coupled with the finite element method (lowest order Raviart-Thomas) for the velocity and pressure.

Índice

1	Introdução	13
2	A Física dos Reservatórios	16
2.1	Propriedades Básicas dos Reservatórios	16
2.2	Tipos de Partículas	17
2.2.1	Mecanismos de Retenção de Partículas	17
2.3	Injeção de Água no Meio Poroso	18
3	Modelo Matemático	20
3.1	O Modelo Multidimensional	21
3.2	Modelo Unidimensional	23
3.2.1	Duas Simplificações Muito Grandes	25
4	Modelo Computacional de Evolução	28
4.1	Método das Características	28
4.2	Modelo Unidimensional: Solução Numérica	32
4.2.1	Estudo Numérico	34
4.3	Modelo Bidimensional Axissimétrico	39
4.3.1	Método Numérico	41
4.4	Modelo Tridimensional Axissimétrico	47
4.4.1	Método Numérico para um passo de tempo em c e σ	49
4.4.2	Problema Teste	53
5	Elementos Finitos	57
5.1	O Método	57
5.2	Injeção de Água Pura	66
6	O Algoritmo Completo	74
6.1	Problema Teste	75
7	Resultados Numéricos	79
7.1	Pressão Especificada	79
7.1.1	Razão entre Permeabilidades Absolutas Intercamadas	87
7.1.2	Número de Camadas	89
7.2	Vazão Especificada	89

7.2.1	Camadas Sem Intercomunicação	91
7.2.2	Experimentos	92
7.2.3	Vazão Recuperada	100
7.2.4	Razão entre Permeabilidades Absolutas Intercamadas . . .	101
7.2.5	Número de Camadas	103
7.3	Função de Filtração variando por camadas	108
8	Conclusão	112
A	Notação	113
B	Matrizes de Elementos Finitos	114
	Referências Bibliográficas	123

Capítulo 1

Introdução

Óleo e gás são encontrados em poros de várias rochas, quase sempre arenito e calcarenito. Rochas reservatórios podem ser rasas, como no Texas e Kuwait, onde elas são encontradas apenas a alguns metros da superfície da terra. Já em outros lugares como o Mar do Norte e o Brasil os reservatórios são encontrados a quilômetros abaixo do nível do mar. Em reservatórios rasos ou profundos o método de produção é o mesmo: penetrar a rocha reservatório com poços e neles fazer escoar o óleo. Um dos problemas mais comuns em engenharia de petróleo em campos maduros é a necessidade de técnicas eficientes para aumentar a produção de óleo.

Baseadas na idéia de que a baixa recuperação de petróleo era resultado das baixas pressões nos reservatórios, as primeiras experiências buscavam fornecer pressão ao reservatório por meio de injeção de um fluido cuja finalidade era deslocar o fluido residente no meio poroso e ocupar o espaço deixado por ele.

Nos processos convencionais de recuperação utilizam-se água ou gás natural como fluidos de injeção. A água de injeção pode ter quatro origens diferentes: água subterrânea, coletadas em lençóis aquíferos, água de superfície, coletada em rios e lagos, água do mar e água produzida, isto é, a água que vem associada à produção de petróleo. O fator de recuperação pela injeção de água é de cerca de 30 a 40%, podendo chegar a valores de até 75% do óleo originalmente existente [47]. O problema é que esse processo pode ter recuperação muito mais baixa se parte do reservatório não for varrido pela água. Quando água com partículas é injetada, esse processo é agravado pela formação de zonas de dano no meio poroso, onde a permeabilidade diminui. A figura (1.1), extraída de [16], mostra a retenção de partículas no meio poroso, diminuindo sua permeabilidade.

O resultado final do processo é a diminuição da produção de petróleo. Em casos extremos deve-se interromper a produção para fazer o tratamento adequado. Resolver problemas dessa natureza custa à indústria milhões de dólares por ano em perda de produção. Aqui como na medicina, é melhor prevenir do que remediar.

Modelos matemáticos para esse fenômeno constituem uma ferramenta ex-

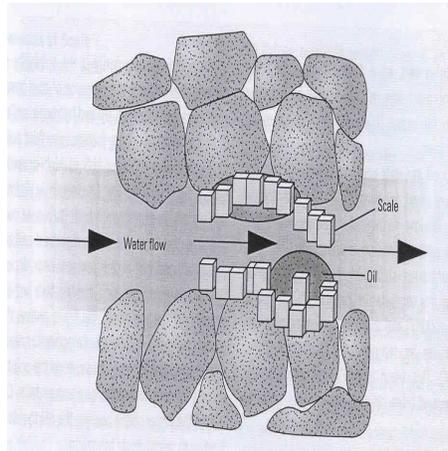


Figura 1.1: Problemas devidos à retenção de partículas em meios porosos. Retirada de [16].

tremamente útil para a prevenção e reparo desse tipo de problema. Saber as condições que levam ao entupimento do meio poroso e onde e quando ele ocorre ajuda desenvolver tratamentos preventivos e de intervenção para reestabelecer a produção. De fato, o primeiro passo para a criação de um programa de remediação realmente efetivo do ponto de vista econômico consiste em identificar a localização dos depósitos de minerais [16].

Nas últimas décadas, a importância da região perto do poço de injeção e o possível impacto negativo do dano de formação na produção têm sido amplamente estudado pela indústria do óleo. Muitos pesquisadores experimentais e teóricos têm dedicado seus trabalhos a esse tema, dando contribuições para o entendimento de todos os aspectos desse fenômeno [1], [3], [5], [12], [16], [19], [23], [25], [27], [35], [36], [43], [48], [49].

A reprodução em laboratório das mesmas condições encontradas num reservatório de petróleo é uma tarefa bastante complexa. Reconstruir a geometria das fronteiras impermeáveis que envolvem o meio poroso onde estão contidos os fluidos, composição e configuração tanto destes como da rocha, bem como as condições de pressão e temperatura, representaria elevado custo financeiro e consumiria tanto tempo que se tornaria uma atividade quase impraticável nos dias de hoje. O uso de simulação computacional para estudar os modelos matemáticos é uma solução bastante atraente. Através desses modelos, seria possível recriar todas as características de um problema físico e prever, em pouco tempo de simulação, um comportamento que poderia levar até mesmo alguns anos. A simulação é bastante utilizada hoje em dia para resolver problemas nos mais diversos campos da ciência. Na indústria do petróleo é possível verificar a viabilidade de uma bacia analisando, através de simulação, parâmetros como a vida

útil e produtividade por intervalo de tempo. É uma ferramenta útil também no gerenciamento de um processo de recuperação secundária, através da localização ótima para a perfuração de poços injetores e produtores, além das características do fluido de injeção para que se obtenha maior eficiência.

Nesse contexto, o principal objetivo deste trabalho é desenvolver uma ferramenta computacional que permita estudar, e futuramente validar, de forma detalhada modelos propostos na literatura e seus respectivos mecanismos de retenção de partículas em suspensão em um meio estratificado, na vizinhança de um poço.

O modelo matemático básico para a filtração profunda com retenção de partículas consiste em um sistema hiperbólico-elíptico [9]. A parte hiperbólica contém uma equação de balanço de massa das partículas e uma equação cinética para a retenção de partículas ([25], [36], [43]) e a parte elíptica apresenta equações para a velocidade e pressão no meio poroso [5], [17], [19]. Para prever o declínio de injetividade, o modelo matemático requer duas funções empíricas: coeficiente de filtração, que diz como as partículas depositam-se no meio poroso e função de formação de dano, que descreve o declínio de permeabilidade devido às partículas depositadas. O problema matemático da determinação destas funções via dados de laboratório recai em resolver dois problemas inversos [3], [10]. Não é nossa intenção determiná-las.

O capítulo 2 dessa tese apresenta a física envolvida no problema, seguida da sua formulação matemática no capítulo 3.

Esse modelo matemático é bastante complexo e propomos um método numérico para resolvê-lo. Vamos tratar separadamente as partes elíptica e hiperbólica do sistema. Primeiramente, atualizamos a parte elíptica usando um método de elementos finitos mistos (Raviart Thomas de mais baixo grau) [5], [17], [38] e depois avançamos no tempo a parte hiperbólica usando uma variante do método das características [19], [21].

Para desenvolvermos o método completo, partimos de um modelo mais simples, unidimensional, onde só é preciso resolver numericamente a parte hiperbólica do sistema. Para essas equações, o capítulo 4 descreve o método das características, sua formulação e experimentos numéricos para modelos unidimensionais linear e radial.

Quando consideramos um sistema de dimensão maior, trabalhamos numa geometria cilíndrica e incorporamos a parte elíptica do modelo, que também requer solução numérica. Para isso, o capítulo 5, apresenta o método de elementos finitos mistos utilizado e o algoritmo completo está mostrado no capítulo 6.

Para finalizar, o capítulo 7 mostra os resultados numéricos obtidos.

Capítulo 2

A Física dos Reservatórios

2.1 Propriedades Básicas dos Reservatórios

O petróleo é acumulado em uma rocha chamada de reservatório. Esta rocha pode ter muitas origens ou naturezas, mas para constituir reservatório deve apresentar espaços vazios em seu interior (poros) e esses vazios devem estar interconectados.

No estudo de um reservatório de petróleo é fundamental o conhecimento das propriedades básicas da rocha e dos fluidos nela contidos. São essas propriedades que determinam as quantidades dos fluidos existentes no meio poroso, a sua distribuição, a capacidade dos fluidos se moverem e mais importante de tudo, a quantidade de fluidos que pode ser extraída.

“A estrutura de um reservatório de petróleo é complexa devido à heterogeneidade e principalmente à estratificação em camadas, que é natural nas rochas reservatório” [7]. Uma rocha reservatório, de maneira geral, é composta de grãos ligados uns aos outros por um material que recebe o nome de cimento. Também existe entre os grãos outro material muito fino chamado de matriz. O volume total ocupado por uma rocha reservatório é a soma do volume de materiais sólidos (grãos, matriz e cimento) e do volume de espaços vazios entre eles. O volume de espaço vazio é chamado de volume poroso. Portanto, a porosidade de uma rocha é definida como a razão entre o volume poroso e o volume total da rocha. A porosidade depende da forma, da arrumação e da variação do tamanho dos grãos, além do grau de cimentação da rocha.

Mesmo que uma rocha contenha uma quantidade apreciável de poros e dentro desses poros existam hidrocarbonetos em uma quantidade razoável, não há garantias de que eles possam ser extraídos. Para que isso ocorra é necessário que a rocha permita o fluxo de fluidos através dos canais porosos existentes. Quanto mais cheios de estrangulamentos, mais estreitos e mais tortuosos forem esses canais, maior será o grau de dificuldade para os fluidos moverem-se no seu interior. Por outro lado, poros maiores e mais conectados oferecem menor resistência

ao fluxo de fluidos.

A medida da capacidade de uma rocha permitir o fluxo de fluidos é chamada permeabilidade. Quando existe um único fluido saturando a rocha esta propriedade recebe o nome de permeabilidade absoluta. Permeabilidade efetiva é a capacidade de deixar fluir preferencialmente um fluido particular através da rocha quando outro fluido está presente no reservatório. Permeabilidade relativa é a razão entre permeabilidade efetiva de um fluido em particular, com uma saturação particular, e a permeabilidade absoluta do fluido, com saturação total. Se apenas um fluido está presente na rocha, sua permeabilidade relativa é 1. O cálculo da permeabilidade relativa permite a comparação entre a habilidade de fluidos em escoar na presença um do outro, já que a presença de mais de um fluido em geral inibe o escoamento.

A diminuição da permeabilidade perto de poços de injeção de água é um problema chamado perda de injetividade. A perda de injetividade é claramente uma função da qualidade da água injetada e das propriedades da rocha.

Nem todos os fluidos são iguais. Alguns escoam mais facilmente, como a água, enquanto outros escoam lentamente, como o mel e o xarope. A resistência que as moléculas de um fluido fazem contra um deslocamento é a viscosidade desse fluido. Segundo [8], a viscosidade é uma medida da deformação que se opõe à fricção interna do fluido.

2.2 Tipos de Partículas

Um exame rápido em um copo de água pode nos dar a impressão de que a água é pura e que o copo não contém nada além da água. Mas um exame mais apurado normalmente revela que a água contém uma infinidade de partículas microscópicas, tipicamente na escala de $10 - 20\mu m$. Essas partículas podem ser orgânicas ou inorgânicas. As partículas orgânicas incluem bactérias e plankton. Elas têm tipicamente densidade como a da água e são macias e facilmente deformáveis. Partículas inorgânicas são frequentemente minerais argilosos mas outros minerais também são encontrados, como a sílica (areia) na água do mar.

Partículas finas são encontradas na superfície dos poros em formações petrolíferas. Essas partículas incluem minerais argilosos, sílica, quartzo, feldspato, mica, carbonatos e baritina.

Quando uma suspensão de líquido com partículas é injetado em um meio poroso, vários mecanismos fazem as partículas aderirem ao meio poroso. Esse processo é chamado retenção de partículas.

2.2.1 Mecanismos de Retenção de Partículas

Quando o fluido contendo partículas alcança o meio poroso, as fases líquida e sólida da suspensão podem ser separadas por deposição ou acúmulo nos poros.

O processo de retenção de partículas no meio poroso recebe o nome de filtração profunda (*deep bed filtration*).

Podemos ter basicamente dois tipos de filtração, a interna e a externa. Na primeira, as partículas são retidas no interior do meio poroso, causando um redução na permeabilidade desse meio, e na segunda as partículas depositam-se nas faces da rocha, criando assim um novo meio poroso com características (porosidade, permeabilidade, ...) diferentes da formação original [1]. Uma vez que conseguirmos modelos válidos para cada um desses problemas desacoplados, podemos então acoplá-los para descrever o sistema completo de dano de formação.

Nesse trabalho, vamos considerar apenas filtração interna, em particular o modelo de filtração profunda e perda de injetividade que ocorre devido à filtração profunda. Esse modelo será apresentado no próximo capítulo. Não trataremos outros casos como por exemplo o de sedimentação e ignoraremos o movimento browniano das partículas.

2.3 Injeção de Água no Meio Poroso

O dano de formação pode ter várias causas: operações de perfuração (o fluido de perfuração pode conter surfactantes e emulsificadores que alterem a molhabilidade da rocha, reduzindo a permeabilidade efetiva da fase óleo), completação, produção (obstrução de microporos por migração de materiais finos, produção de areia), estimulação, elevação [47]. Nesse trabalho estudamos apenas o dano de formação causado pela injeção de água no meio poroso.

A injeção de água do mar é há muito tempo o método mais econômico e eficiente para melhorar a recuperação *offshore* de óleo usada na indústria de petróleo. Além da injeção de água do mar, grandes quantidades de água produzida podem também ser reinjetadas, já que esse é um dos meios mais econômicos e ecológicos de utilizar (não descartar) essa água. Devemos lembrar que nas regiões produtoras de óleo e gás já maduras, a razão entre água produzida e hidrocarbonetos produzidos excede 25 para 1. Esse é o volume de água que deveria ser descartada. O descarte de água produzida só pode ser feito obedecendo a determinadas especificações, regulamentadas por órgãos de controle do meio ambiente, que limita a quantidade de poluentes (teor de óleo, graxa, H_2S , etc) nos efluentes aquosos. A disponibilidade, o custo e outras características apresentadas pela água fazem com que ela seja o fluido preferencial utilizado na recuperação adicional de óleo.

Em campos terrestres, a injeção de água produzida, desde que não cause problemas ao reservatório, é também a melhor opção em termos ambientais porque resolve a questão do destino final da água produzida junto com o óleo. Proporciona ainda uma economia de água doce de boa qualidade (de aquíferos), comumente utilizada para essa finalidade, que fica, assim, disponível para fins

mais nobres, como o consumo humano.

A água do mar e a água produzida podem ser misturadas antes de serem injetadas ou podem ser injetadas alternadamente nos poços. Então a água injetada contém necessariamente partículas minerais sólidas, gotículas de óleo, bactérias, e muitos elementos químicos dissolvidos, cada um deles com sua capacidade particular de reduzir a permeabilidade perto do poço.

Capítulo 3

Modelo Matemático

Para estudar a perda de injetividade devida ao dano à formação porosa causado pela retenção de partículas, considere o escoamento de água contendo partículas em suspensão. Essa água é injetada num meio poroso através de um poço de injeção que penetra no meio poroso, como mostra esquematicamente a figura (3.1). Essa figura é apenas ilustrativa, não reproduz nem as escalas reais do sistema nem sua geometria. O meio poroso não é homogêneo mas, nos casos mais simples, é estratificado por camadas, como mostra a figura (3.2), com o poço ao centro, representado pelo furo. De novo estudaremos o caso mais simples, em que o poço é perpendicular à estratificação.

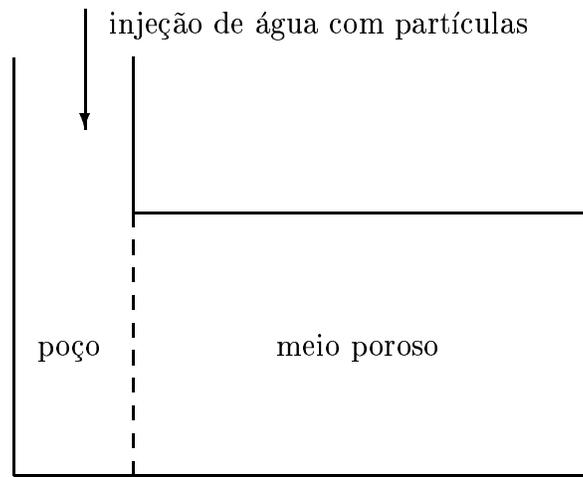


Figura 3.1: Injeção de água no meio poroso

Com o passar do tempo, as partículas em suspensão ficam retidas no meio poroso, reduzindo a sua permeabilidade. Vamos supor que a redução da permeabilidade é devida apenas à filtração interna, ou seja, que partículas grandes ficam retidas ao tentar passar por poros pequenos. Assim sendo, é uma boa

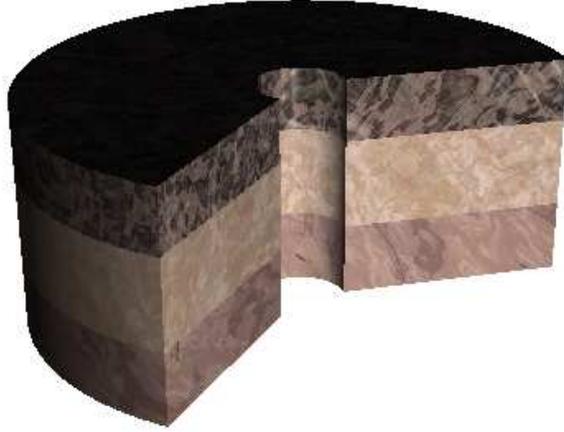


Figura 3.2: Representação do meio poroso estratificado na geometria 3D axisimétrica. O poço de injeção, no centro, é representado pelo furo, que é perpendicular à estratificação

aproximação considerar que a porosidade ϕ do meio permanece constante. Além disso, estamos considerando um comportamento apenas mecânico, sem qualquer interação de natureza química ou termodinâmica entre o fluido e a rocha. O objetivo desse estudo é desenvolver uma ferramenta numérica para o estudo detalhado desse modelo, mas devemos ressaltar que o esquema numérico que vamos apresentar nos próximos capítulos não está restrito à porosidade constante.

3.1 O Modelo Multidimensional

O princípio físico fundamental para o transporte de partículas no meio poroso é a equação para conservação de massa. Desse princípio pode-se deduzir a equação de advecção-difusão,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi c + \sigma) + \nabla \cdot (\mathbf{u}c - D\nabla c) = 0, \quad (3.1)$$

$0 \leq c \leq 1$ e $0 \leq \sigma \leq 1 - \phi$, onde $c(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ é a concentração de partículas em suspensão, $\sigma(\mathbf{x}, t)$ é a concentração de partículas retidas no meio poroso, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1(\mathbf{x}, t), u_2(\mathbf{x}, t), u_3(\mathbf{x}, t))$ é a velocidade do escoamento e D é o coeficiente de difusão efetivo. Como foi dito, a porosidade (ϕ) do meio poroso é constante. Por simplicidade, suporemos que as partículas suspensas e retidas têm a mesma densidade da água. Assim, a conservação de massa reduz-se à conservação de volume.

Dois excelentes aproximações são introduzidas. Primeiramente, o fluido é

considerado incompressível, o que implica em

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (3.2)$$

Além disso, de acordo com [25], a difusão é desprezível ($D \simeq 0$) para partículas maiores que $1\mu m$ e de importância limitada mesmo para partículas pequenas. Então o último termo da equação (3.1) pode ser omitido. Assim, a equação (3.1) pode ser escrita na forma simplificada

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi c + \sigma) + \mathbf{u} \cdot \nabla c = 0 \quad (3.3)$$

Estamos considerando um fluido unifásico, composto apenas de água com partículas suspensas. Para esses problemas, evidências experimentais unidimensionais mostram que a relação

$$u = -\frac{k}{\mu} \frac{dp}{dx}, \quad (3.4)$$

onde μ é a viscosidade do fluido, e k a permeabilidade absoluta do meio poroso, é válida para uma grande quantidade de parâmetros experimentais. Essa relação é conhecida como Lei de Darcy. Em um meio poroso real, o campo de velocidades e o gradiente de pressão são vetores com três componentes. Uma forma mais geral da Lei de Darcy relacionando a velocidade (\mathbf{u}) do escoamento com a pressão (p) é dada por

$$\mathbf{u} = -\frac{Kk(\sigma)}{\mu} \nabla p \quad (3.5)$$

onde $k(\sigma)$ é chamada função de dano de formação (ou tensor de permeabilidade relativa). Em geral, a viscosidade μ depende da concentração de partículas mas para pequenas concentrações, no entanto, vamos ignorar esse efeito.

Não existe uma dedução física da função de dano de formação. Essa função é empírica e deve ser determinada usando dados de laboratório [3], [10], [49]. Assim, o problema de prever essa função começa por escolher um modelo expressando $k(\sigma)$ em função de outras propriedades da rocha. O produto $Kk(\sigma)$ é dada por

$$Kk(\sigma) = \begin{pmatrix} K_1 k_1(\sigma) & 0 & 0 \\ 0 & K_2 k_2(\sigma) & 0 \\ 0 & 0 & K_3 k_3(\sigma) \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Ele é diferente nas várias direções devido ao modo como o meio poroso foi formado.

A taxa de deposição de partículas no meio poroso é considerada função da concentração de partículas retidas,

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} \propto f(\sigma). \quad (3.7)$$

A taxa de deposição de partículas no meio poroso usada neste trabalho é escrita na forma proposta em [25],

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \lambda(\sigma) |\mathbf{u}| c. \quad (3.8)$$

Essa fórmula diz que a probabilidade de retenção de uma partícula no meio poroso é proporcional à velocidade do fluido assim como à concentração de partículas em suspensão. O coeficiente de proporcionalidade λ , chamado função de filtração, é uma função da concentração de partículas retidas σ e vamos considerá-lo como uma função quadrática dessas partículas $\lambda(\sigma) = \lambda_0 + a\sigma + b\sigma^2$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. No entanto, os métodos numéricos desenvolvidos neste trabalho generalizam-se sem maiores dificuldades para taxas de deposição que são funções gerais de σ , \mathbf{u} e \mathbf{x} .

Assim, o sistema (3.2), (3.3), (3.5) e (3.8), com condições de iniciais e de contorno apropriadas, determina a evolução da velocidade (\mathbf{u}), da pressão (p) e das concentrações de partículas em suspensão (c) e retidas (σ). Segundo [1], um modelo clássico de deposição profunda obedece 4 suposições: A dispersão hidrodinâmica é desprezível ($D \simeq 0$), a variação na porosidade é considerada desprezível ($\phi = \text{constante}$), o escoamento é incompressível e a taxa de filtração é função da deposição ($\lambda(\sigma)$). Então temos o modelo clássico de deposição profunda [25]. Formas mais gerais que (3.6) e (3.8) podem ser facilmente colocadas no modelo numérico que desenvolveremos.

3.2 Modelo Unidimensional

O primeiro modelo considerado é a injeção de água em um reservatório unidimensional linear e homogêneo entre o poço injetor e o poço produtor. Este modelo simplificado, claramente não representa um reservatório de petróleo mas representa experimentos feitos em laboratórios. No entanto este modelo é bastante útil pois, como veremos, tem solução explícita para casos particulares, com os quais podemos testar e validar componentes do modelo computacional. Com o modelo computacional validado, podemos partir para o caso de interesse, o modelo tridimensional (3D) axissimétrico que será visto mais adiante.

Em uma dimensão, o sistema (3.2), (3.3), (3.5) e (3.8) toma a forma

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi c + \sigma) + u \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \lambda(\sigma) u c \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.11)$$

$$u = -\frac{Kk(\sigma)}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.12)$$

A equação (3.12) pode ser escrita na forma

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\mu u}{K} \frac{1}{k(\sigma)}. \quad (3.13)$$

Para adimensionalizar o sistema, definimos

$$\tilde{x} = \frac{1}{L}x \quad \frac{d\tilde{t}}{dt} = \frac{u(t)}{\phi L} \quad \tilde{\lambda}(\tilde{\sigma}) = L\lambda(\sigma) \quad (3.14a)$$

$$\tilde{k}(\tilde{\sigma}) = k(\sigma) \quad \tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \frac{K}{\mu Lu(t)}p(x, t) \quad (3.14b)$$

$$\tilde{c}(\tilde{x}, \tilde{t}) = c(x, t) \quad \tilde{\sigma}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \sigma(x, t) \quad \tilde{u}(\tilde{t}) = u(t), \quad (3.14c)$$

onde L é o comprimento típico de alcance das partículas. Então o modelo 1D adimensionalizado, abandonando o \sim , será

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial x} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \lambda(\sigma)c \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -k(\sigma). \quad (3.17)$$

Como condição inicial, considera-se a ausência de partículas no meio poroso antes da injeção,

$$\begin{aligned} c(x, t = 0) &= 0, \\ \sigma(x, t = 0) &= 0. \end{aligned}$$

Como condição de contorno, temos a injeção contínua de água com partículas em suspensão, o que é traduzido por

$$c(x = 0, t) = c_0(t).$$

Considera-se ainda que a pressão é conhecida em $x = 0$,

$$p(0, t) = p_0(t)$$

e vale zero em $p(L, t)$. Para este modelo,

$$c_0(t) = c_0 \quad \text{e} \quad p_0(t) = p_0 \quad (3.18)$$

são constantes. Para formas simples de λ , este sistema tem solução exata [10], como veremos a seguir.

3.2.1 Duas Simplificações Muito Grandes

Seja $\lambda(\sigma) = \lambda_0 \in \mathbb{R}$ constante. Essa simplificação tem pouco sentido físico uma vez que não prevê o entupimento no seio do meio poroso. Um modelo mais realista precisa de uma função de dano de formação que dependa da concentração de partículas retidas, $\lambda(\sigma)$. Para este caso geral, não conhecemos mais a solução exata. Resolveremos tal sistema usando o método das características no próximo capítulo. De qualquer forma, o modelo simplificado é útil para testar e validar o esquema numérico, uma vez que podemos comparar as soluções exata e numérica. Além disso, vamos seguir os trabalhos de [11], [12], [36], [50] e considerar a redução de permeabilidade com sendo

$$k(\sigma) = \frac{1}{1 + \beta\sigma}, \quad (3.19)$$

onde β é o *coeficiente de dano*, um parâmetro empírico constante, que descreve a mudança na tortuosidade do meio poroso conforme partículas vão ficando retidas nos poro.

Para $\lambda(\sigma) = \lambda_0$ e $k(\sigma) = 1/(1 + \beta\sigma)$, o modelo fica então

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \lambda_0 c + \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \lambda_0 c \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -(1 + \beta\sigma). \quad (3.22)$$

Dessa maneira, conseguimos um sistema mais simples, uma vez que a primeira equação (3.20) desacopla das outras e podemos resolvê-la analiticamente, como em [10].

Começando pela equação (3.20)

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \lambda_0 c + \frac{\partial c}{\partial x} = 0,$$

podemos multiplicá-la pelo fator integrante $e^{\lambda_0 t}$ para obter

$$\frac{\partial}{\partial t} (e^{\lambda_0 t} c) + \frac{\partial}{\partial x} (e^{\lambda_0 t} c) = 0.$$

Então $e^{\lambda_0 t} c$ é constante ao longo das retas características $dx/dt = 1$. Escolhamos a característica que passa por $(x = 0, t_1)$. Integrando sobre a característica, tem-se que $x = (t - t_1)$, ou seja, $t = t_1 + x$. Então

$$e^{\lambda_0(t_1+x)} c(x, t_1 + x)$$

é constante ao longo dessa reta. Em $x = 0$,

$$e^{\lambda_0 t_1} c(0, t_1) = e^{\lambda_0 t_1} c_0.$$

Daí,

$$e^{-\lambda_0(t_1+x)} c(x, t_1 + x) = e^{\lambda_0 t_1} c_0,$$

ou

$$c(x, t_1 + x) = e^{-\lambda_0 x} c_0,$$

Então a solução da equação (3.20) será

$$c(x, t) = \begin{cases} e^{-\lambda_0 x} c_0, & t \geq x \\ 0, & t < x, \end{cases} \quad (3.23)$$

com gráfico na figura (3.3), para $t = 0.5$, $x \in [0, 1]$.

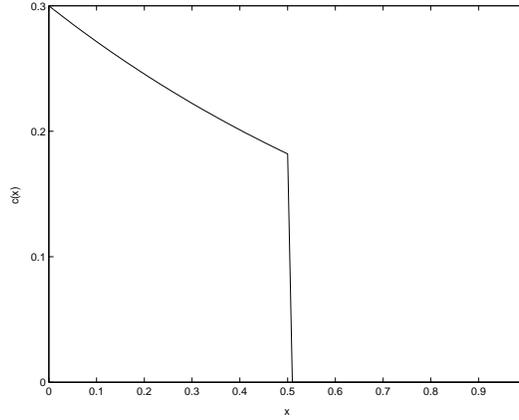


Figura 3.3: Solução exata da concentração de partículas suspensas para $\lambda = \lambda_0$ em $t = 0.5$.

Um vez conhecida a concentração de partículas suspensas, podemos encontrar a concentração de partículas depositadas. Substituindo (3.23) em (3.21), tem-se uma nova equação em σ , para $t \geq x$,

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \lambda_0 c_0 e^{-\lambda_0 x}.$$

Integrando no tempo,

$$\sigma = 0 + \int_x^t \lambda_0 c_0 e^{-\lambda_0 x} dt'.$$

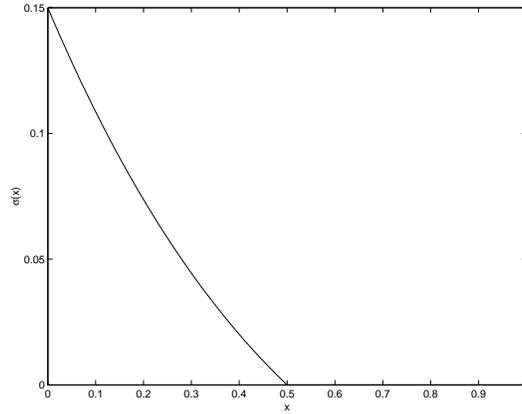


Figura 3.4: Solução exata de σ em $t = 0.5$

Então a solução para a equação (3.21) é

$$\sigma(x, t) = \begin{cases} c_0 \lambda_0 e^{-\lambda_0 x} (t - x), & t > x \\ 0, & t \leq x, \end{cases} \quad (3.24)$$

com gráfico na figura (3.4), para $t = 0.5$, $x \in [0, 1]$.

Determinada a concentração de partículas depositadas, a pressão p pode ser calculada explicitamente em função de σ , substituindo (3.24) em (3.22) e integrando no espaço:

$$p(x, t) = p(0, t) - x - \beta \int_0^x \sigma(s, t) ds.$$

Mas

$$\int_0^x \sigma(s, t) ds = -c_0 e^{-\lambda_0 x} \left(t - \frac{\lambda_0 x + 1}{\lambda_0} \right),$$

donde

$$p(x, t) = \begin{cases} p_0 - x - \beta c_0 e^{-\lambda_0 x} \left(t - \frac{\lambda_0 x + 1}{\lambda_0} \right) & t > x \\ p_0 - x, & t \leq x. \end{cases}$$

Para σ pequeno, o modelo é adequado, uma vez que ainda não houve uma grande retenção de partículas na vizinhança do poço, mas para σ grande não, uma vez que a concentração de partículas depositadas pode crescer infinitamente. Isso é fácil de ver fixando x e tomando o limite quando $t \rightarrow \infty$ na solução (3.24). Matematicamente, isso se deve à imposição $\lambda(\sigma)$ constante. O problema é que para λ qualquer, a solução exata não é mais conhecida. Então, para este caso, vamos apresentar no próximo capítulo um método numérico para resolver o sistema (3.15), (3.16), (3.17): o método das características. A solução exata que mostramos aqui será usada para validar o método numérico.

Capítulo 4

Modelo Computacional de Evolução

4.1 Método das Características

Para leis de conservação hiperbólicas existem vários métodos numéricos baseados em esquemas de integração do tempo com direção preferencial, tal como o *upwind*, TVD (Total Variation Diminishing) [24] ou o ENO (Essentially Non-Oscillatory) (para esses esquemas, consulte [28]). Estes métodos explícitos podem precisar de passos de tempo muito pequenos, causando assim um custo elevado da computação.

Existe também uma família de métodos não oscilatórios de ordem mais alta baseados no esquema de Lax-Friedrichs, desenvolvido por Tadmor (ver [33] por exemplo), cuja vantagem é utilizar regras de quadratura para substituir o custo alto dos programas para a solução de problemas de Riemann nos esquemas *upwind*. Se por um lado esses esquemas são robustos e estáveis, por outro sofrem de dissipação excessiva.

Existem ainda os métodos lagrangeanos. Esses métodos procuram acompanhar a trajetória física do material a partir do referencial deste. Assim, como o fluxo material se faz predominantemente ao longo de linhas características, técnicas lagrangeanas são mais naturais quando se trabalha com equações de transporte. Variantes de implementação são conhecidas na literatura de meteorologia como transporte semi-lagrangeano [37].

É difícil construir um esquema semi-lagrangeano que conserve massa. Compensando essa desvantagem, eles têm a propriedade de estabilidade computacional incondicional, resultando em esquemas que não têm a restrição tão comum no passo de tempo, normalmente chamada de condição de CFL. A estabilidade em passos longos de tempo é particularmente vantajosa, pois a cada passo de tempo é resolvido um sistema elíptico para pressão e velocidade. Esta resolução é a parte computacional mais cara no nosso método numérico. Assim, passos

longos de tempo permitem diminuir o custo computacional.

Esquemas semi-lagrangianos são consistentes e essa propriedade junto com a estabilidade implica na convergência via teorema de Lax (para equações diferenciais parciais lineares com coeficientes constantes). Temos então que tomar cuidado apenas com a precisão na escolha do tamanho do passo de tempo, sem considerações extra de estabilidade [37].

Existe uma coleção de métodos chamados genericamente de ELLAM (Eulerian-Lagrangian Localized Adjoint Methods), introduzidos em [15] que são baseados em métodos de elementos finitos onde as funções teste são constantes ao longo das características. Esse método trata a parte advectiva de maneira lagrangeana e a difusiva de maneira euleriana, de modo a permitir o uso de grandes passos de tempo sem perda de precisão. Mais ainda, o método é globalmente conservativo. Entretanto, “todos os ELLAMs desenvolvidos sofrem de oscilações não físicas” [34]. O estado da arte (progresso no desenvolvimento, análise e aplicações) desse método está apresentado em [41].

O método das características modificado (MMOC) foi formulado primeiramente para uma equação de advecção-difusão em 1982 [21]. No MMOC, a derivada temporal e o termo de advecção são combinados em uma derivada direcional ao longo das características. Conseqüentemente, o MMOC estabiliza as equações diferenciais parciais governantes, permite simulação com grandes passos de tempo sem perda de precisão e elimina a dispersão numérica excessiva.

Segundo [21], o principal ganho de se derivar na direção característica aparece no erro de truncamento do tempo. A aproximação de $\partial u / \partial t$ por diferenças finitas regressivas no tempo leva a erros da forma $C \|\partial^2 u / \partial t^2\| \Delta t$ em norma apropriada, enquanto que no método das características modificado este erro vale $k \|\partial^2 u / \partial \tau^2\| \Delta t$. Em problemas de transporte, a solução não muda na direção característica τ , ao contrário da direção t . Assim, esse esquema permite o uso de intervalos de tempo maiores, com correspondentes ganhos em eficiência e exatidão. Não existem limitações no tamanho do Δt para que haja estabilidade. Na prática, não se adotam valores grandes de Δt por razões de precisão. Nesse mesmo artigo estima-se o erro desse método. Para interpolações lineares por parte, a estimativa de erro é $O(\Delta t + \min(h, h/\Delta t^2))$, enquanto que para uma interpolação quadrática, com $\Delta t = O(h^2)$, o erro é dado por $O(h^2 + \Delta t)$.

O problema de se usar o MMOC para aproximar soluções é que ele não preserva automaticamente leis de conservação na forma integral, levando a um erro de balanço de massa em alguns tipos de problemas. Para o estudo numérico de um fluxo bifásico e imiscível num meio poroso, foi formulado em [19] um variante do MMOC chamada de método das características modificado com ajuste de massa (MMOCAA). A novidade aqui é introdução de um parâmetro *ad hoc* para ajustar a massa. Esse método preserva a lei de conservação desejada contando ainda com as vantagens computacionais e conceituais do MMOC. Em cada nível de tempo, o MMOCAA conserva o volume de água globalmente mas não necessariamente localmente. Para esquemas localmente conservativos, veja [30].

Para resolver o sistema completo em dimensão 2, objetivo desta tese, a maior parte do tempo computacional é gasto na atualização da parte elíptica; portanto, queremos um método para resolver as equações de transporte com precisão e que nos permita usar passos de tempo grandes para resolver a parte elíptica o menor número de vezes.

Usaremos o método das características para resolver numericamente o nosso modelo matemático, uma vez que o nosso grupo de pesquisa vem utilizando com sucesso esse método para problemas em meteorologia. Outros métodos descritos acima poderão ser utilizados no futuro.

Uma descrição da parte advectiva do método das características modificado (MMOC), será baseada em [21]. Considere a equação

$$c(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot \nabla u = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (4.1)$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.2)$$

sujeito a

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

As equações são definidas em um domínio limitado $\Omega \in \mathbb{R}^3$ para as variáveis espaciais e o intervalo de tempo é finito. Definindo

$$\psi(\mathbf{x}) = [c(\mathbf{x})^2 + |\mathbf{b}(\mathbf{x})|^2]^{1/2}, \quad (4.3)$$

a diferenciação na direção característica τ associada ao operador $cu_t + \mathbf{b} \cdot \nabla u$ é dada por

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{1}{\psi(\mathbf{x})} \left(c(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \right). \quad (4.4)$$

Então a equação (4.1) pode ser escrita na forma

$$\psi(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial \tau} = 0 \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0, \quad (4.5)$$

o que nos diz que a solução é constante ao longo das características.

Considerando um passo no tempo $\Delta t > 0$, a solução será aproximada em tempos $t^n = n\Delta t$. A derivada na direção característica será aproximada da seguinte maneira: seja \mathbf{x} um ponto do espaço em um tempo t^n . Siga a característica relacionada à derivada $\partial/\partial\tau$ passando por (\mathbf{x}, t^n) de volta até sua localização em $(\bar{\mathbf{x}}, t^{n-1})$. Denote esse ponto por $\bar{\mathbf{x}}$, como mostra a figura (4.1). Ou seja,

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{b}(\mathbf{x}) \frac{\Delta t}{c(\mathbf{x})}. \quad (4.6)$$

Considere a discretização

$$\psi \frac{\partial u}{\partial \tau} \approx \psi(\mathbf{x}) \frac{u(\mathbf{x}, t^n) - u(\bar{\mathbf{x}}, t^{n-1})}{\Delta \tau}.$$

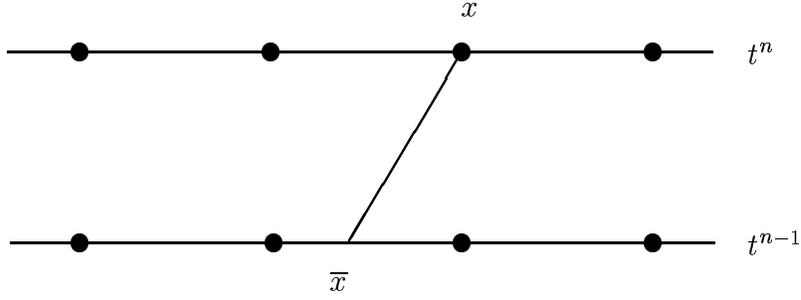


Figura 4.1: Esquema usado na diferenciação na direção característica

Mas

$$(\Delta\tau)^2 = (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^2 + (\Delta t)^2,$$

donde

$$\psi \frac{\partial u}{\partial \tau} \approx \psi(\mathbf{x}) \frac{u(\mathbf{x}, t^n) - u(\bar{\mathbf{x}}, t^{n-1})}{[(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^2 + (\Delta t)^2]^{1/2}}. \quad (4.7)$$

Usando a equação (4.6), temos que

$$\begin{aligned} [(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^2 + (\Delta t)^2]^{1/2} &= \left[\left(\mathbf{x} - \left(\mathbf{x} - \mathbf{b}(\mathbf{x}) \frac{\Delta t}{c(\mathbf{x})} \right) \right)^2 + (\Delta t)^2 \right]^{1/2} \\ &= [\mathbf{b}^2(\mathbf{x}) (\Delta t)^2 / c^2(\mathbf{x}) + (\Delta t)^2]^{1/2} \\ &= [\mathbf{b}^2(\mathbf{x}) / c^2(\mathbf{x}) + 1]^{1/2} \Delta t \\ &= [\mathbf{b}^2(\mathbf{x}) + c^2(\mathbf{x})]^{1/2} \Delta t / c(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Substituindo na equação (4.7) e usando (4.3), ficamos com

$$\psi \frac{\partial u}{\partial \tau} \approx c(\mathbf{x}) \frac{u(\mathbf{x}, t^n) - u(\bar{\mathbf{x}}, t^{n-1})}{\Delta t}.$$

Então o MMOC para a equação (4.1) é dado pela equação (4.5), agora escrita na forma

$$c(\mathbf{x}) \frac{u(\mathbf{x}, t^n) - u(\bar{\mathbf{x}}, t^{n-1})}{\Delta t} = 0.$$

Seja $u_h(\mathbf{x}, t^n)$ a solução aproximada. Essa fórmula nos diz que para calcular a solução $u_h(\mathbf{x}, t^n)$ precisamos conhecer apenas a solução no pé da característica $\bar{\mathbf{x}}$ em t^{n-1} . O problema é que na maioria das vezes esse ponto não é um ponto da malha. Para descobrirmos a solução $u_h(\bar{\mathbf{x}}, t^{n-1})$ precisamos então fazer uma interpolação de valores $u_h(\mathbf{x}_i, t^{n-1})$ da solução conhecida nos pontos da malha.

4.2 Modelo Unidimensional: Solução Numérica

Uma vez apresentado o método das características, vamos usá-lo para aproximar a solução das equações (3.15) e (3.16):

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial x} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \lambda(\sigma)c. \quad (4.9)$$

Como vimos, o método das características é um método para leis de conservação e não leis de balanço. Vamos então adaptá-lo utilizando uma média temporal do lado direito da equação, no termo forçante de deposição. Poderíamos usar o termo forçante apenas no tempo anterior, de modo a obter um esquema explícito, mas isso nos daria um método de ordem mais baixa.

Para a equação de concentração de partículas em suspensão (3.15), o método das características, usando uma média nos tempos t^n e t^{n-1} no lado direito da equação, nos diz que

$$\frac{c(x, t^n) - c(\bar{x}, t^{n-1})}{\Delta t} = -\frac{1}{2}[\lambda(\sigma(x, t^n))c(x, t^n) + \lambda(\sigma(\bar{x}, t^{n-1}))c(\bar{x}, t^{n-1})],$$

onde

$$\bar{x} = x - \Delta t. \quad (4.10)$$

Para a equação de concentração de partículas retidas (3.16), a derivada na direção característica é igual à derivada temporal, uma vez que a característica é vertical. Dessa forma, os pés das características serão também pontos de malha. Temos então, analogamente,

$$\frac{\sigma(x, t^n) - \sigma(x, t^{n-1})}{\Delta t} = \frac{1}{2}[\lambda(\sigma(x, t^n))c(x, t^n) + \lambda(\sigma(x, t^{n-1}))c(x, t^{n-1})].$$

Vamos fazer uma discretização uniforme no espaço. Considerando um espaçamento Δx , vamos aproximar soluções em $x_i = i\Delta x$. Para simplificar a notação, vamos considerar $c_i^n = c(x_i, t^n)$ e analogamente para σ . Daí, as equações tomam a forma

$$\frac{c_i^n - \bar{c}_i^{n-1}}{\Delta t} = -\frac{1}{2}[\lambda(\sigma_i^n)c_i^n + \lambda(\bar{\sigma}_i^{n-1})\bar{c}_i^{n-1}] \quad (4.11)$$

$$\frac{\sigma_i^n - \sigma_i^{n-1}}{\Delta t} = \frac{1}{2}[\lambda(\sigma_i^n)c_i^n + \lambda(\sigma_i^{n-1})c_i^{n-1}], \quad (4.12)$$

onde \bar{c}_i^{n-1} e $\bar{\sigma}_i^{n-1}$ são respectivamente os valores interpolados de c e σ em (\bar{x}_i, t^{n-1}) .

Se ao invés da média do lado direito escolhêssemos tomar c e σ no tempo t^{n-1} , depois que achássemos as interpolações no ponto \bar{x} , determinaríamos c_i^n e σ_i^n explicitamente. Mas ao usarmos c e σ também no lado esquerdo no tempo n , temos um esquema implícito.

Podemos reescrever a equação (4.11) na forma

$$c_i^n = \frac{1 - (\Delta t/2)\lambda(\bar{\sigma}_i^{n-1})}{1 + (\Delta t/2)\lambda(\sigma_i^n)} \bar{c}_i^{n-1} \quad (4.13)$$

e a equação (4.12) como

$$\sigma_i^n = \frac{\Delta t}{2} \{ \lambda(\sigma_i^n) c_i^n + \lambda(\sigma_i^{n-1}) c_i^{n-1} \} + \sigma_i^{n-1}. \quad (4.14)$$

Substituindo (4.13) em (4.14), chamando $\xi = \sigma_i^n$ e definindo

$$f(\xi) = -\sigma_i^n + \frac{\Delta t}{2} \left\{ \lambda(\xi) \frac{1 - (\Delta t/2)\lambda(\bar{\sigma}_i^{n-1})}{1 + (\Delta t/2)\lambda(\xi)} \bar{c}_i^{n-1} + \lambda(\sigma_i^{n-1}) c_i^{n-1} \right\} + \sigma_i^{n-1}, \quad (4.15)$$

vemos que precisamos achar a raiz de $f(\xi) = 0$. O método numérico funcionará então da seguinte forma. Conhecida a solução no tempo t^{n-1} nos pontos de malha, o primeiro passo é determinar \bar{x} . Conhecido os pés das características, podemos calcular $\bar{\sigma}_i^{n-1}$ e \bar{c}_i^{n-1} usando interpolação numérica. Uma vez feito isso, podemos usar a equação (4.15) para achar os valores de σ_i^n pelo método de Newton que é dado, em cada tempo, por

$$\xi^{(k)} = \xi^{(k-1)} - \frac{f(\xi^{(k-1)})}{f'(\xi^{(k-1)})},$$

onde k é o índice que controla o número de iterações do método de Newton. Uma vez encontrado σ_i^n , usamos a equação (4.13) para determinar c_i^n explicitamente. A pressão p pode ser determinada explicitamente, via integração numérica:

$$p(x, t) = \begin{cases} p_0 - \int_0^x k^{-1}(\sigma) dx & t > x \\ p_0 - x, & t \leq x. \end{cases} \quad (4.16)$$

O tratamento numérico da condição de fronteira é bastante simples. Uma vez que estamos considerando uma injeção contínua de partículas em suspensão no meio poroso com concentração c_0 , o primeiro elemento da malha tem o valor de c dado por c_0 e o valor de σ sai da equação (4.9), com $c = c_0$. Além disso, se a característica que sai de algum elemento cruzar a fronteira de injeção, esse elemento toma automaticamente o valor do primeiro elemento.

ALGORITMO:

1. Faça $c = 0$, $\sigma = 0$.
 2. Ache \bar{x}_i .
 3. Dados c_i^{n-1} e σ_i^{n-1} , ache \bar{c}_i^{n-1} e $\bar{\sigma}_i^{n-1}$ via interpolação numérica.
 4. Substitua em (4.15) e ache σ_i^n pelo método de Newton.
 5. Substitua σ_i^n em (4.13) e ache c_i^n .
 6. Substitua σ_i^n em (4.16) e ache p_i^n via integração numérica em x .
 7. Repita passos 3-6 para avançar no tempo.
-
-

4.2.1 Estudo Numérico

Primeiramente é necessário que se faça um estudo de interpolações numéricas a serem utilizadas no MMOC. Já vimos que para o caso particular $\lambda = \lambda_0$ constante conhecemos a solução exata (seção 3.2.1). Vamos então avaliar alguns métodos de interpolação numérica usando a função de dano $\lambda = 1$ e comparar a solução numérica com a solução exata mostrada em 3.2.1. Neste caso, não precisamos usar o método de Newton e assim vemos apenas o efeito da interpolação polinomial.

Para isso, consideramos uma malha com 100 pontos e um passo no tempo $\Delta t = 0.001$. Em todos os experimentos, a concentração inicial usada foi $c_0 = 0.3$. As figuras foram feitas após 500 passos no tempo.

A figura (4.2) mostra a solução exata de c (linha cheia) e as respectivas soluções numéricas para interpolação linear (linha pontilhada), cúbica de Lagrange (linha ponto e traço) e spline (linha tracejada). Podemos ver que a interpolação linear é extremamente difusiva e a interpolação com splines oscila demais. A interpolação cúbica de Hermite, figura (4.3), embora pouco difusiva e sem oscilações introduz um atraso de fase. Esse atraso pode ser visto também em (4.5), que é o gráfico das partículas retidas (σ), onde a linha cheia mostra a solução exata e a pontilhada a solução obtida por interpolação de Hermite. A figura (4.4) também mostra a solução para (σ) com interpolação linear (linha pontilhada), cúbica de Lagrange (linha ponto e traço) e spline (linha tracejada). Apenas a interpolação linear se destaca, pelo efeito difusivo que falamos acima.

Para melhorar o resultado da interpolação numérica, uma solução seria usar técnicas de *shape preserving*, substituindo os polinômios interpoladores por polinômios que preservem forma. Assim as oscilações não físicas que aparecem na solução podem ser reduzidas ou até eliminadas. Mas “embora esquemas com *shape preserving* não apresentem oscilações, em troca eles são caracterizados por fenômenos de amortecimento ou difusão sobre as soluções oscilatórias” [37], além de serem mais caros.

Sabemos que o método das características não conserva massa. Portanto, um estudo da quantidade de massa observada nos experimentos é bastante adequado. A tabela abaixo mostra a comparação de massas das partículas suspensas (c) para a solução exata e para cada uma das interpolações:

	t = 0.5		t = 0.85	
	massa	e_r	massa	e_r
exata	0.1190	-	0.1724	-
linear	0.1195	-0.0042	0.1729	-0.0029
Lagrange - cub	0.1181	0.0076	0.1718	0.0034
Hermite - cub	0.1061	0.0874	0.1587	0.0795
spline	0.1181	0.0076	0.1718	0.0034

Em termos de quantidade de massa, a interpolação cúbica de Lagrange e

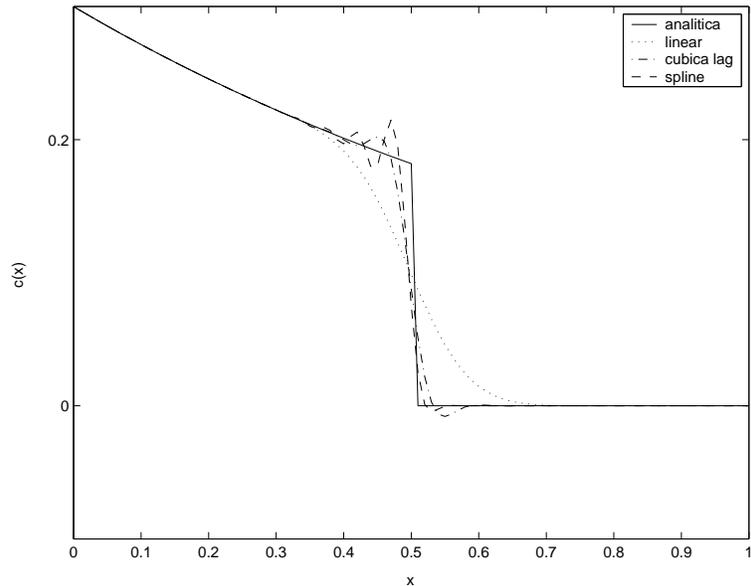


Figura 4.2: Efeito da interpolação na concentração de partículas suspensas. Comparação da solução exata com a solução numérica via interpolação linear, cúbica de Lagrange e spline

a interpolação por spline são as que melhor conservam massa, com um erro de menos de 1%. Mas como já vimos, a interpolação cúbica de Lagrange é a que tem menor oscilação entre as duas. Por isso, vamos usar daqui para frente a interpolação cúbica de Lagrange que apresentou o melhor resultado.

Para sabermos como é a solução geral do sistema, escolhemos a função de dano $\lambda = 1 - 2\sigma$, que é mais representativa fisicamente. Para uma malha com 100 pontos e um passo no tempo 0.001, temos nas figuras (4.6) e (4.7) a evolução temporal de c e σ respectivamente.

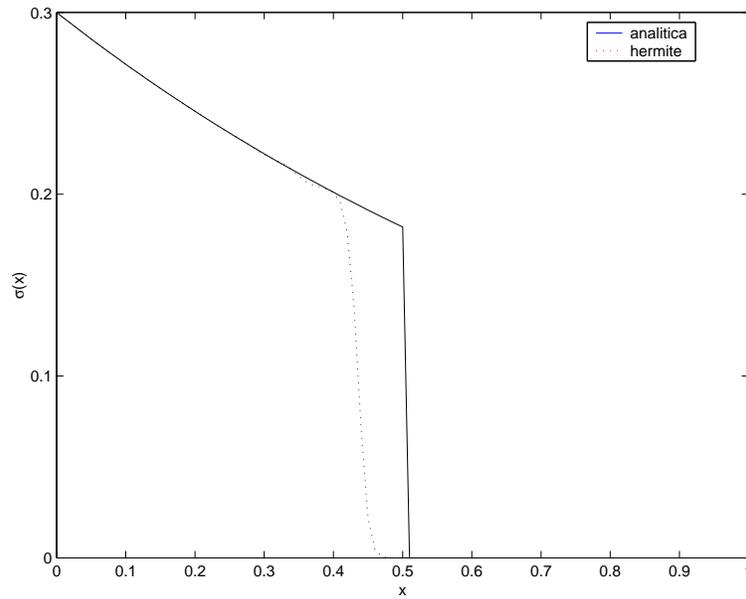


Figura 4.3: Efeito da interpolação cúbica de Hermite na concentração de partículas suspensas. Comparação da solução exata com a solução numérica

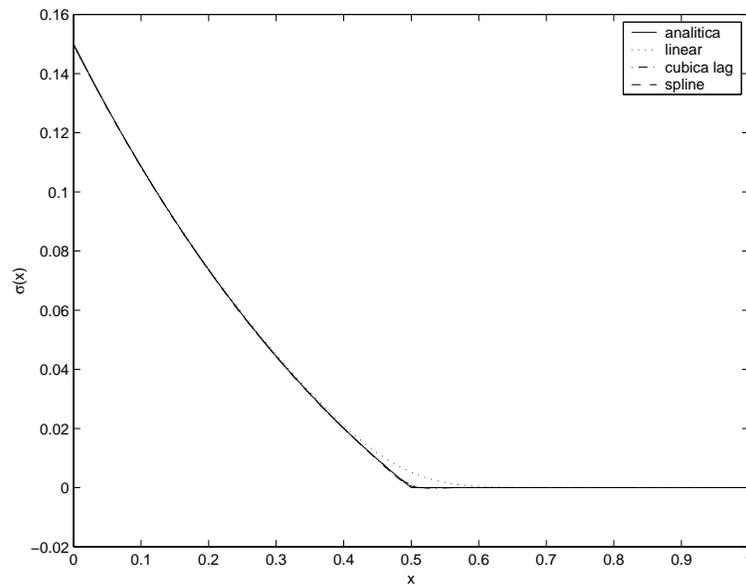


Figura 4.4: Efeito da interpolação numérica na concentração de partículas retidas. Comparação da solução exata com a solução numérica via interpolação linear, cúbica de Lagrange e spline

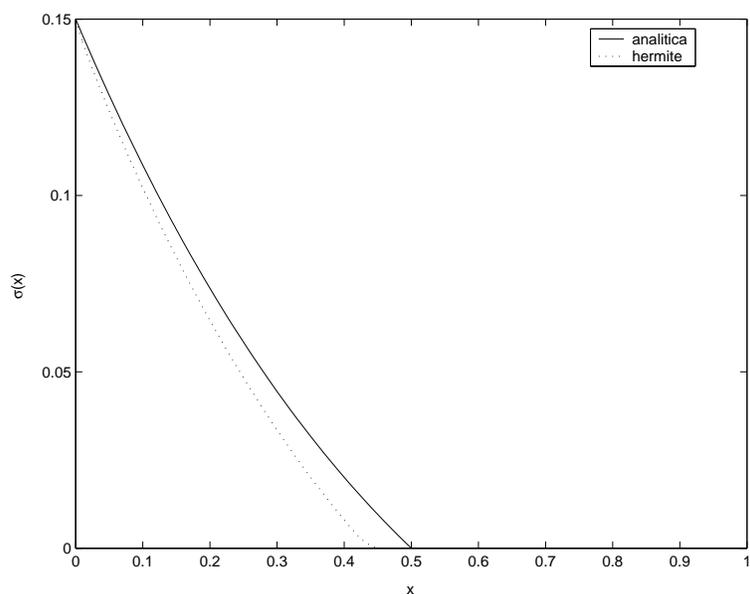


Figura 4.5: Efeito das interpolação cúbica de Hermite na concentração de partículas retidas. Comparação da solução exata com a solução numérica

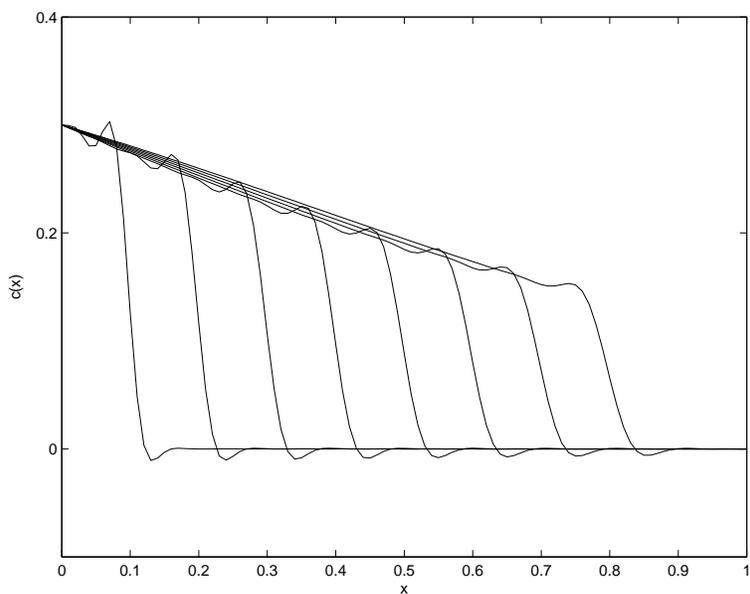


Figura 4.6: Evolução temporal da concentração de partículas suspensas, numa malha com 100 pontos e passo no tempo $\Delta t = 0,001$, para $\lambda = 1 - 2\sigma$

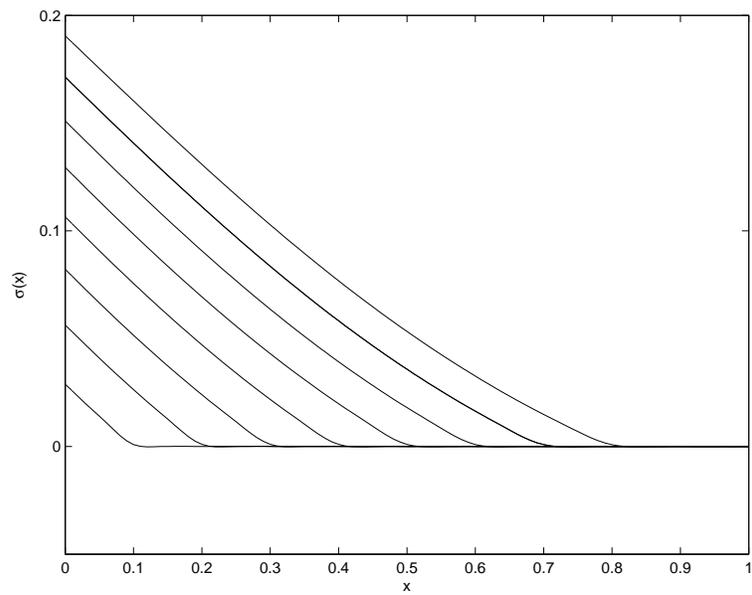


Figura 4.7: Evolução temporal da concentração de partículas retidas, σ , numa malha com 100 pontos e passo no tempo $\Delta t = 0.001$, para $\lambda = 1 - 2\sigma$

4.3 Modelo Bidimensional Axissimétrico

O modelo 2D axissimétrico ainda é unidimensional. Como veremos, a novidade introduzida aqui é a velocidade do escoamento que não é mais constante mas varia com $1/r$.

A partir de agora, vamos trabalhar em coordenadas cilíndricas (r, θ, z) . Isso quer dizer que o reservatório está sendo considerado como mostra a figura (4.8):

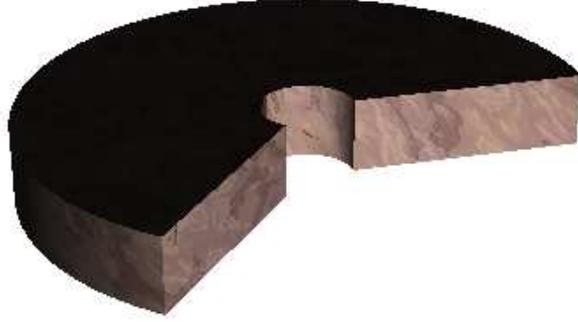


Figura 4.8: Representação do reservatório na geometria 2D axissimétrica

Para um escoamento 2D axissimétrico, nossas variáveis são

$$u = u(r, t) \quad (4.17a)$$

$$c = c(r, t) \quad (4.17b)$$

$$\sigma = \sigma(r, t) \quad (4.17c)$$

$$p = p(r, t) \quad (4.17d)$$

A equação de conservação de massa para um escoamento incompressível (3.3) é

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi c + \sigma) + u(r, t) \frac{\partial c}{\partial r} = 0.$$

Como estamos considerando a porosidade do meio constante, podemos reescrever essa equação na forma

$$\phi \frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial r} = - \frac{\partial \sigma}{\partial t}. \quad (4.18)$$

A taxa de deposição de partículas (3.8) diz que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \lambda(\sigma) u(r, t) c \quad (4.19)$$

enquanto a Lei de Darcy (3.5) fica

$$u(r, t) = - \frac{K k(\sigma)}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (4.20)$$

A equação da velocidade agora é dada por

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru) = 0. \quad (4.21)$$

Assim, (4.18), (4.19), (4.20) e (4.21) munidas de condições de contorno e dados iniciais adequados, determinam $c(r, t)$, $\sigma(r, t)$, $p(r, t)$ e $u(r, t)$.

Utilizaremos as variáveis reescaladas

$$\tilde{r} = \frac{1}{r_0} r \quad \tilde{z} = \frac{1}{r_0} z \quad (4.22a)$$

$$\tilde{t} = \frac{1}{T} t \quad \tilde{u} = \frac{T}{r_0} u \quad (4.22b)$$

$$\tilde{c} = c \quad \tilde{\sigma} = \sigma \quad (4.22c)$$

$$\tilde{\lambda} = r_0 \lambda \quad (4.22d)$$

$$\tilde{p} = \frac{K T}{\mu r_0^2} p. \quad (4.22e)$$

Substituindo essas escalas no sistema e abandonando o \sim , temos:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial r} = - \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \lambda(\sigma) u c \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -u \frac{1}{k(\sigma)} \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(ru) = 0. \quad (4.26)$$

A equação (4.26) pode ser integrada em r , o que nos dá

$$u = \frac{A}{r}, \quad (4.27)$$

$A \in \mathbb{R}$. Substituindo (4.27) em (4.23), (4.24) e (4.25):

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{A}{r} \frac{\partial c}{\partial r} = - \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{A}{r} \lambda(\sigma) c$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = - \frac{A}{r} \frac{1}{k(\sigma)}$$

onde A depende da condição de fronteira. Esse sistema é complementado pelas condições iniciais de ausência de partículas em $t = 0$

$$c(r, 0) = 0 \quad \text{e} \quad \sigma(r, 0) = 0,$$

e de fronteira

$$c(r_0, t) = c_0(t), \quad (4.28)$$

que corresponde à injeção de uma certa concentração de partículas sólidas em função do tempo em $r = r_0$ que é a borda do poço, onde de fato começa o domínio que estamos trabalhando. Com a condição de fronteira para c e a equação (4.30) podemos calcular σ em $r = r_0$. Um caso bem comum aparece quando a concentração inicial de partículas $c_0(t)$ e a vazão são constantes em t . Portanto, vamos estudar o caso onde

$$c_0(t) = c_0 \quad \text{e} \quad A = 1.$$

Com isso, o sistema final toma a forma:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial c}{\partial r} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{1}{r} \lambda(\sigma) c \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{1}{k(\sigma)} \quad (4.31)$$

$$u(r) = \frac{1}{r}. \quad (4.32)$$

Esse é o sistema radial que vamos resolver. A dificuldade do modelo 2D axisimétrico em relação ao modelo 1D aparece na velocidade das características na equação (4.29), a velocidade agora não é mais constante, pois varia como $1/r$. Isso requer cuidados computacionais extras, tanto na hora de definir a malha, que agora não pode mais começar em zero, como na hora de calcular o pé da característica.

Vamos usar o método das características para resolver essas duas equações, como veremos na próxima seção.

4.3.1 Método Numérico

Para um método numérico do sistema

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial c}{\partial r} = -\frac{1}{r} \lambda(\sigma) c \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{1}{r} \lambda(\sigma) c \quad (4.34)$$

vamos novamente usar o método das características, descrito na seção 4.1. Tomando como antes uma média temporal do lado direito, as equações (4.33) e (4.34) ficam discretizadas na forma

$$\frac{c(r_i, t^n) - c(\bar{r}_i, t^{n-1})}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{r_i} \lambda(\sigma(r_i, t^n)) c(r_i, t^n) + \frac{1}{\bar{r}_i} \lambda(\sigma(\bar{r}_i, t^{n-1})) c(\bar{r}_i, t^{n-1}) \right\} \quad (4.35)$$

$$\frac{\sigma(r_i, t^n) - \sigma(r_i, t^{n-1})}{\Delta t} = \frac{1}{2r_i} \{ \lambda(\sigma(r_i, t^n)) c(r_i, t^n) + \lambda(\sigma(r_i, t^{n-1})) c(r_i, t^{n-1}) \}, \quad (4.36)$$

com

$$\bar{r}_i = r_i - \frac{1}{r_i} \Delta t. \quad (4.37)$$

Apesar de r_i ser um nó da malha, o ponto \bar{r}_i (pé da característica) não é um nó em geral. Os valores de $c(\bar{r}_i, t^{n-1})$ e $\sigma(\bar{r}_i, t^{n-1})$ devem ser calculados interpolando os valores nos nós vizinhos. Usaremos a interpolação cúbica de Lagrange, que mostrou ser a mais apropriada no método numérico para o sistema 1D linear (seção 4.2.1).

Considerando $c(r_i, t^n) = c_i^n$, $c(\bar{r}_i, t^{n-1}) = \bar{c}_i^{n-1}$ e analogamente para as outras funções, a equação (4.35) pode ser reescrita na forma

$$c_i^n = \frac{1 - (\Delta t/2\bar{r}_i)\lambda(\bar{\sigma}_i^{n-1})}{1 + (\Delta t/2r_i)\lambda(\sigma_i^n)} \bar{c}_i^{n-1} \quad (4.38)$$

e a equação (4.36) como

$$\sigma_i^n = \frac{\Delta t}{2r_i} \{ \lambda(\sigma_i^n) c_i^n + \lambda(\sigma_i^{n-1}) c_i^{n-1} \} + \sigma_i^{n-1}. \quad (4.39)$$

Substituindo (4.38) em (4.39) temos

$$\sigma_i^n = \sigma_i^{n-1} + \frac{\Delta t}{2r_i} \left\{ \lambda(\sigma_i^n) \frac{1 - (\Delta t/2\bar{r}_i)\lambda(\bar{\sigma}_i^{n-1})}{1 + (\Delta t/2r_i)\lambda(\sigma_i^n)} \bar{c}_i^{n-1} + \lambda(\sigma_i^{n-1}) c_i^{n-1} \right\}. \quad (4.40)$$

Então o método numérico consiste nos seguintes passos: Conhecida a solução no tempo t^{n-1} nos pontos de malha, o primeiro passo é calcular \bar{r}_i e determinar $\bar{\sigma}_i^{n-1}$ e \bar{c}_i^{n-1} usando interpolação numérica. Uma vez feito isso, podemos usar a equação (4.40) para achar os valores de σ_i^n pelo método de Newton. Depois de calcular σ_i^n , usamos a equação (4.38) para determinar c_i^n explicitamente.

No caso de geometria radial a pressão também pode ser calculada explicitamente [10] para cada tempo t , integrando a equação (4.31).

Então o algoritmo fica assim:

ALGORITMO:

1. Faça $c = 0$ $\sigma = 0$.
 2. Calcule \bar{r}_i .
 3. Dados c_i^{n-1} e σ_i^{n-1} , ache \bar{c}_i^{n-1} e $\bar{\sigma}_i^{n-1}$ por interpolação cúbica de Lagrange.
 4. Substitua em (4.40) e ache σ_i^n pelo método de Newton.
 5. Substitua σ_i^n em (4.38) e ache c_i^n .
 6. Substitua σ_i^n em (4.31), integre numericamente em r e ache p_i^n .
 7. Repita passos 3-6 para avançar no tempo.
-
-

Como no modelo 1D, o modelo 2D axissimétrico também tem solução explícita para função de deposição constante, $\lambda = \lambda_0$. O cálculo da solução é análogo ao anterior, por isso vamos omiti-lo. A solução das equações (4.33) e (4.34) é

$$c(r, t) = \begin{cases} c_0 e^{-\lambda_0(r-r_0)}, & r_0 < r < r_m \\ 0, & r > r_m \end{cases} \quad (4.41)$$

$$\sigma(r, t) = \begin{cases} c_0 \lambda_0 e^{-\lambda_0(r-r_0)} (2t - r^2 + r_0^2) / 2r, & r_0 < r < r_m \\ 0, & r > r_m, \end{cases} \quad (4.42)$$

onde $r_m = 2t + r^2$ e r_0 é a borda do poço.

Os experimentos a seguir foram feitos numa malha com 100 pontos, com um passo no tempo $\Delta t = 0.001$ e função de deposição $\lambda = 1$. Consideramos também $r_0 = 0.1$. Usamos interpolação cúbica de Lagrange e comparamos os resultados exatos com os resultados numéricos. Os gráficos (4.9) e (4.10) apresentam essa comparação para partículas suspensas e depositadas, respectivamente, após 200 passos no tempo.

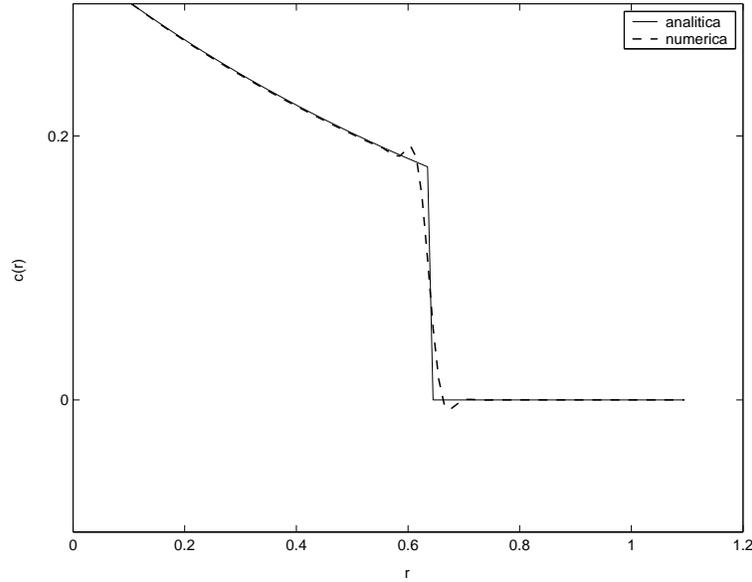


Figura 4.9: Comparação entre concentração de partículas suspensas exata (linha cheia) e numérica (linha pontilhada), após 200 passos no tempo

Também aqui podemos examinar o comportamento da quantidade de massa. A tabela abaixo mostra a massa total de partículas suspensas exata e numérica:

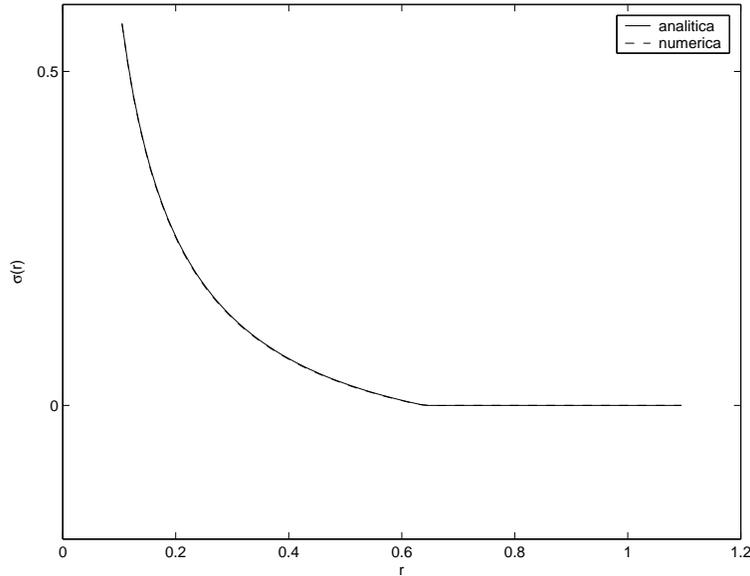


Figura 4.10: Comparação entre concentração de partículas retidas exata (linha cheia) e numérica (linha pontilhada), após 200 passos no tempo

	t = 0.1	t = 0.2	t = 0.3	t = 0.4
exata	0.0897	0.1243	0.1473	0.1645
numérica	0.0887	0.1237	0.1468	0.1638
erro relativo	0.0111	0.0048	0.0034	0.0043

Podemos ver que o erro de massa é bem pequeno, menor que 1.5%. A pergunta natural que surge aqui, assim como nos experimentos do modelo linear, é o que pode ser feito para melhorar a conservação de massa? Existe uma variante do método das características, o método das características com ajuste de massa (MMOCAA)[19]. O problema é que essa formulação usa parâmetros *ad hoc* que queremos evitar no momento. Uma outra maneira de melhorar esse problema é usarmos algoritmos como o *Front-Tracking* que usa interpolações que não atravessam a descontinuidade [31], mas transportar isso para dimensões mais altas é bastante complicado.

Para sabermos como é a solução das equações para funções de deposição mais gerais, com maior significado físico, repetimos o experimento numérico acima para $\lambda = 1 - 2\sigma$. Os gráficos estão mostrados nas figuras (4.11) e (4.12). A primeira mostra a evolução temporal para c e a segunda para σ .

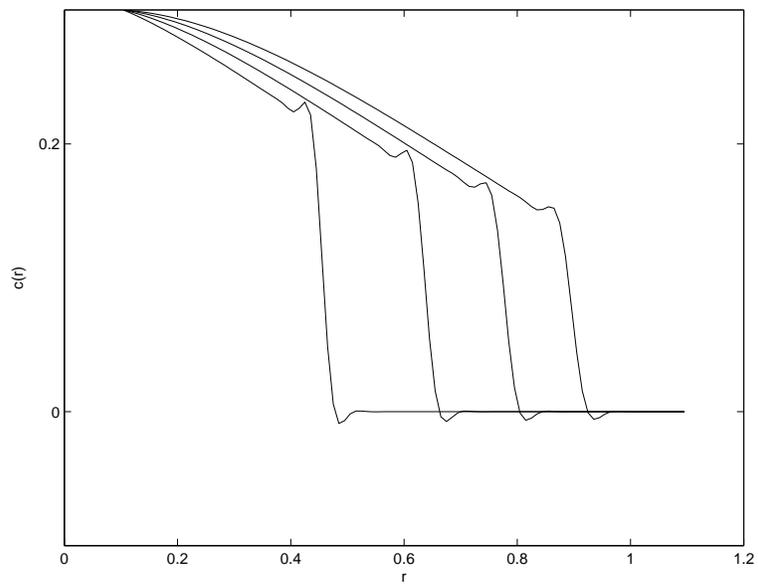


Figura 4.11: Concentração de partículas suspensas após 100, 200, 300 e 400 passos no tempo, numa malha com 100 elementos e passo no tempo $\Delta t = 0.001$

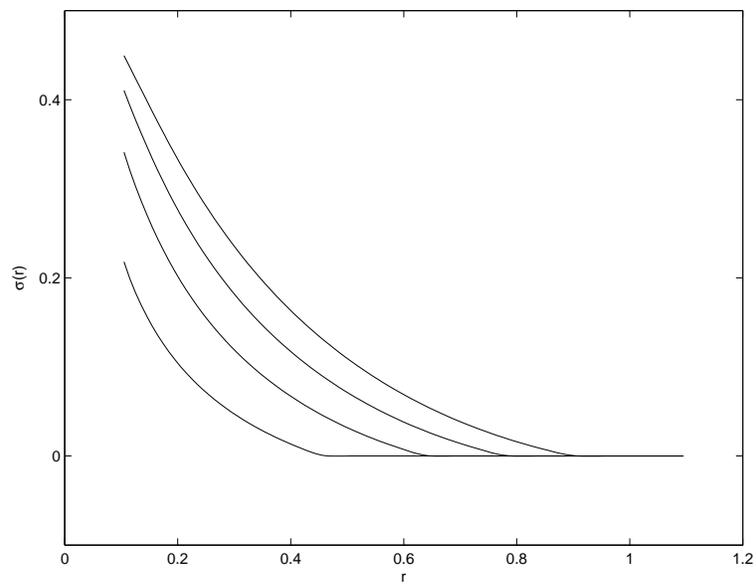


Figura 4.12: Concentração de partículas retidas após 100, 200, 300 e 400 passos no tempo, numa malha com 100 elementos e passo no tempo $\Delta t = 0.001$

4.4 Modelo Tridimensional Axissimétrico

Apesar da utilidade computacional, os modelos desenvolvidos até agora são unidimensionais, ou seja, permeabilidade e concentrações de partículas são funções apenas de uma variável espacial (x e r , respectivamente). Mas nenhum reservatório de petróleo é perfeitamente homogêneo. Portanto, a partir de agora, introduziremos uma componente vertical (z) no nosso sistema e vamos considerar o meio poroso com propriedades que dependem de r e z , como mostra a figura (3.2), reproduzida abaixo:

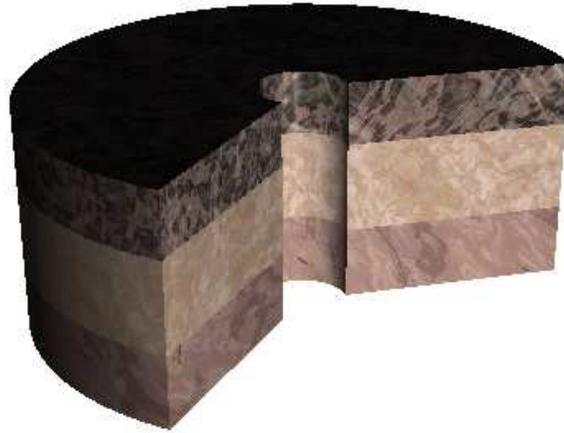


Figura 4.13: Reservatório na geometria 3D axissimétrica

Como já foi dito no capítulo 3, esse é o modelo realmente de interesse. Os casos 1D e 2D axissimétrico serviram para testar e validar componentes do modelo computacional. Para esse modelo 3D axissimétrico, temos as variáveis

$$\mathbf{u} = (u_1(r, z, t), u_3(r, z, t))$$

$$c = c(r, z, t)$$

$$\sigma = \sigma(r, z, t)$$

$$p = p(r, z, t).$$

Lembrando que estamos em coordenadas cilíndricas axissimétricas e que, portanto, para uma função escalar f e uma função vetorial $\mathbf{f} = (f_1, f_3)$ temos

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r f_1) + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right),$$

o sistema de equações fica:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi c + \sigma) + \mathbf{u} \cdot \nabla c = 0 \quad (4.43)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \lambda(\sigma) |\mathbf{u}| c \quad (4.44)$$

$$\mathbf{u} = -\frac{K}{\mu} k(\sigma) \nabla p \quad (4.45)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (4.46)$$

Usando novamente a hipótese simplificadora de que ϕ é constante e rearranjando, o sistema toma a forma final

$$\phi \frac{\partial c}{\partial t} + u_1 \frac{\partial c}{\partial r} + u_3 \frac{\partial c}{\partial z} = -\lambda(\sigma) |\mathbf{u}| c$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \lambda(\sigma) |\mathbf{u}| c$$

$$\mathbf{u} = -\frac{K}{\mu} k(\sigma) \nabla p$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Para adimensionalizar esse sistema, considere as variáveis adimensionais:

$$\tilde{r} = \frac{1}{r_0} r, \quad \tilde{z} = \frac{1}{r_0} z, \quad \tilde{t} = \frac{1}{T} t \quad (4.47a)$$

$$\tilde{u}_1 = \frac{T}{r_0} u_1, \quad \tilde{u}_3 = \frac{T}{r_0} u_3, \quad (4.47b)$$

$$\tilde{c} = c \quad \tilde{\sigma} = \sigma \quad (4.47c)$$

$$\tilde{\lambda} = r_0 \lambda \quad (4.47d)$$

$$\tilde{p} = \frac{\overline{K} T}{\mu r_0^2} p, \quad \overline{K} = \frac{1}{H((r_0 + L)^2 - r_0^2)/2} \int_0^H \int_{r_0}^{r_0+L} K(r, z) r \, dr \, dz. \quad (4.47e)$$

Substituindo essas escalas no sistema e abandonando o \sim , temos:

$$\phi \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla c = -\lambda(\sigma) c |\mathbf{u}| \quad (4.48)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \lambda(\sigma) c |\mathbf{u}| \quad (4.49)$$

$$\mathbf{u} = -\frac{K}{\overline{K}} k(\sigma) \nabla p \quad (4.50)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (4.51)$$

Para resolver esse sistema é necessário estabelecer condições iniciais e de contorno. Consideramos como condição inicial a ausência de partículas no meio

poroso antes da injeção:

$$c(r, 0) = 0 \text{ e } \sigma(r, 0) = 0 \text{ em } t = 0,$$

e como condição de contorno, a quantidade de partículas injetadas com o fluido:

$$c(r_0, z, t) = c_0(z, t), \quad t > 0.$$

Frequentemente, c_0 não depende de z e às vezes é constante, $c_0(z, t) = c_0$. Pode-se calcular σ em $r = r_0$ a partir da equação (4.49). São conhecidas ainda a pressão na injeção ($p(r_0)$) e em um raio especificado do meio poroso ($p(r_f)$):

$$p(r_0) = p_0, \quad p(r_f) = p_1.$$

Além disso, “para que um depósito de óleo mantenha-se em um terreno, o reservatório deve ser isolado por camadas de rochas impermeáveis, usualmente sal ou argila” [7].

Até agora, nosso modelo numérico (1D e 2D axissimétrico) consistia em calcular c e σ via método das características e calcular p por integração numérica. Acontece que não podemos mais calcular p explicitamente. Apresentaremos o modelo numérico 3D axissimétrico por partes, a cada passo de tempo. Primeiro, vamos supor que a velocidade é conhecida e calcular c e σ pelo método das características na próxima seção, como vínhamos fazendo; em seguida, resolveremos as equações de pressão (4.50) e velocidade (4.51) usando um método de elementos finitos mistos, descrito no próximo capítulo. Nesta etapa, consideraremos c e σ fixos. O modelo completo será apresentado no capítulo 6 e é composto então pelo método das características acoplado a um método de elementos finitos mistos, usados alternadamente a cada passo de tempo.

4.4.1 Método Numérico para um passo de tempo em c e σ

Consideraremos a velocidade \mathbf{u} conhecida no seu valor em t^{n-1} . Queremos resolver as equações (4.48) e (4.49), ou seja, calcular c e σ . Para isso será usado novamente o método das características (seção 4.1). Para a equação (4.49), como em 2D axissimétrico,

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} \approx \frac{\sigma_i^n - \sigma_i^{n-1}}{\Delta t}.$$

Tomando uma média no lado direito, a taxa de retenção cinética toma a forma discretizada:

$$\frac{\sigma_i^n - \sigma_i^{n-1}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \{ \lambda(\sigma_i^n) c_i^n |\mathbf{u}_i^n| + \lambda(\sigma_i^{n-1}) c_i^{n-1} |\mathbf{u}_i^{n-1}| \}.$$

Reescrevendo essa equação, temos:

$$\sigma_i^n = \sigma_i^{n-1} + \frac{\Delta t}{2} (\lambda(\sigma_i^n) c_i^n |\mathbf{u}_i^n| + \lambda(\sigma_i^{n-1}) c_i^{n-1} |\mathbf{u}_i^{n-1}|). \quad (4.52)$$

Para a equação (4.48), se

$$\psi = \sqrt{\phi^2 + |\mathbf{u}|^2},$$

a derivada na direção característica será

$$\psi \frac{\partial}{\partial \tau} = \phi \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z}.$$

Então o lado esquerdo da equação (4.48) fica

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla c = \psi \frac{\partial c}{\partial \tau}.$$

Já vimos no começo do capítulo que

$$\psi \frac{\partial c}{\partial \tau} \approx \frac{c(\mathbf{x}, t^n) - c(\bar{\mathbf{x}}, t^{n-1})}{\Delta t},$$

com

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \frac{\Delta t}{\phi} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t^n).$$

Finalmente, a discretização do lado esquerdo da equação (4.48) será dada por

$$\phi \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla c \approx \phi \frac{c_i^n - \bar{c}_i^{n-1}}{\Delta t}.$$

A equação (4.48) discretizada, novamente considerando uma média do lado direito e a notação dos capítulos anteriores, fica então

$$\phi \frac{c_i^n - \bar{c}_i^{n-1}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \{ \lambda(\sigma_i^n) c_i^n |\mathbf{u}_i^n| + \lambda(\bar{\sigma}_i^{n-1}) \bar{c}_i^{n-1} |\bar{\mathbf{u}}_i^{n-1}| \}$$

Reescrevendo essa equação de forma mais adequada, temos finalmente:

$$c_i^n = \frac{\phi - (\Delta t/2) \lambda(\bar{\sigma}_i^{n-1}) |\bar{\mathbf{u}}_i^{n-1}|}{\phi + (\Delta t/2) \lambda(\sigma_i^n) |\mathbf{u}_i^n|} \bar{c}_i^{n-1}. \quad (4.53)$$

Uma vez que conseguimos uma equação explícita para c , podemos substituir essa equação (4.53) em (4.52) para obtermos uma equação apenas em σ :

$$\sigma_i^n = \sigma_i^{n-1} + \frac{\Delta t}{2} \left(\lambda(\sigma_i^n) \frac{\phi - (\Delta t/2) \lambda(\bar{\sigma}_i^{n-1}) |\bar{\mathbf{u}}_i^{n-1}|}{\phi + (\Delta t/2) \lambda(\sigma_i^n) |\mathbf{u}_i^n|} \bar{c}_i^{n-1} |\mathbf{u}_i^n| + \lambda(\sigma_i^{n-1}) c_i^{n-1} |\mathbf{u}_i^{n-1}| \right). \quad (4.54)$$

Para calcular \bar{c}_i^{n-1} e $\bar{\sigma}_i^{n-1}$ é preciso fazer uma interpolação dos valores nos nós vizinhos. Já vimos em uma dimensão que a interpolação mais interessante para o nosso problema é a interpolação cúbica de Lagrange. Baseados nisso, faremos aqui uma interpolação cúbica de Lagrange da seguinte forma (figura (4.14)): se o ponto que queremos interpolar está na marcação X , vamos usar a coordenada r desse ponto e fazer uma interpolação cúbica de Lagrange em cada uma das quatro linhas horizontais, usando para isso o valor conhecido nos pontos marcados com uma bola branca. Dessa forma achamos valores interpolados nos pontos localizados nas bola preta. Agora usamos esses valores para fazer uma interpolação cúbica de Lagrange vertical, na coordenada z do ponto.

Se quisermos interpolar pontos perto das bordas da malha, temos duas opções: a primeira é fazer uma interpolação bilinear apenas nesses pontos e a segunda é deslocar os pontos que estamos usando na interpolação (figura (4.15)). Optamos pela segunda opção.

Esse tipo de interpolação é usado com sucesso em meteorologia e tem como vantagem computacional o fato de calcularmos os pesos para as interpolações **horizontais** apenas uma vez para cada ponto interpolado.

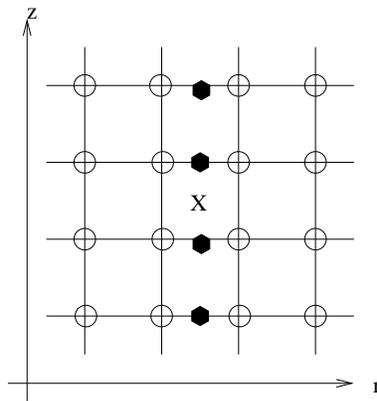


Figura 4.14: Esquema de interpolação para um ponto em um elemento no interior do domínio

O método numérico fica então: Dada a solução no tempo t^{n-1} nos pontos de malha, o primeiro passo é determinar \bar{x} para podermos calcular $\bar{\sigma}_i^{n-1}$ e \bar{c}_i^{n-1} usando interpolação numérica. Uma vez feito isso, podemos usar a equação (4.54) para achar os valores de σ_i^n pelo método de Newton. Com os valores de σ_i^n , usamos a equação (4.53) para determinar c_i^n explicitamente.

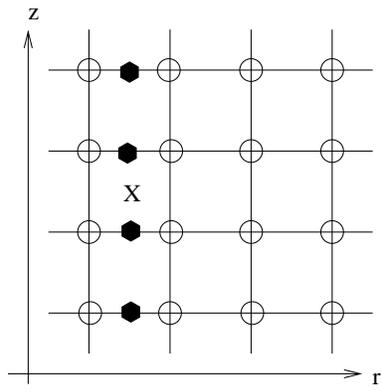


Figura 4.15: Esquema de interpolação para um ponto em um elemento da fronteira oeste

4.4.2 Problema Teste

Vamos considerar a velocidade apenas na direção r para tentarmos recuperar o problema bidimensional axissimétrico e verificar o comportamento das concentrações de partículas suspensas e retidas. Para isso, é imposta uma velocidade dada por

$$\begin{aligned}u_1 &= 1 \\u_3 &= 0,\end{aligned}$$

ou seja, não existe velocidade vertical, apenas horizontal. Nesses experimentos foi considerada uma malha de 50 por 50 e um passo no tempo $\Delta t = 0.0005$. Os experimentos estão apresentados nas figuras abaixo. A figura (4.16) mostra a solução em 3D para $\lambda = 1$, após 200 passos de tempo. Como vemos, ela é constante na direção z e podemos então olhar apenas para o perfil dessa solução. Nas figuras (4.17) e (4.18), comparamos o experimento 2D axissimétrico (linha pontilhada) com o perfil do experimento 3D axissimétrico (linha cheia) para partículas suspensas e depositadas, respectivamente. As figuras (4.19) e (4.20) repetem os experimentos (4.17) e (4.18), respectivamente com $\lambda = 1 + 2\sigma + \sigma^2$. Vemos que o resultado é exatamente o esperado, as linhas pontilha e cheia estão sobrepostas em todos os experimentos.

A situação atual é a seguinte: se a velocidade for conhecida, já sabemos calcular c e σ . Só que a velocidade, assim como a pressão, não é conhecida nem podem ser calculadas explicitamente. Vamos descrever, então, no próximo capítulo, um método de elementos finitos mistos para resolver as equações de pressão (4.50) e velocidade (4.51).

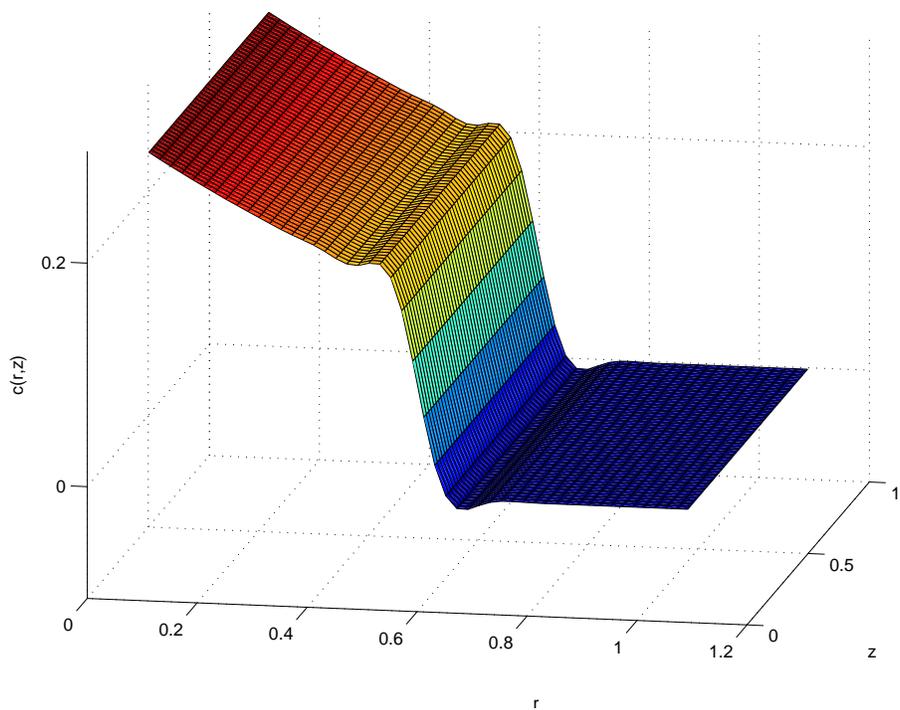


Figura 4.16: Solução em 3D com $u_3 = 0$

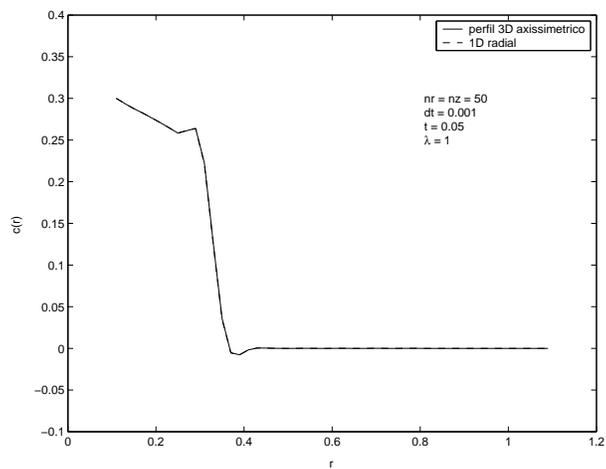


Figura 4.17: Comparação da solução numérica de c 2D axissimétrica (tracejada) e o perfil da solução numérica 3D axissimétrica com $u_3 = 0$ (linha cheia) de c para $\lambda = 1$

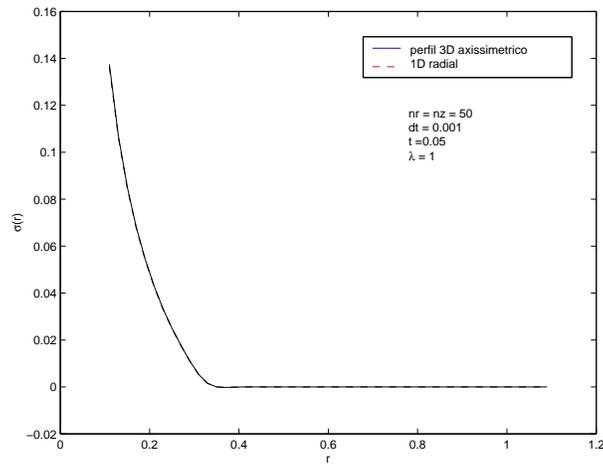


Figura 4.18: Comparação da solução numérica de σ 2D axissimétrica (tracejada) e o perfil da solução numérica 3D axissimétrica com $u_3 = 0$ (linha cheia) de σ para $\lambda = 1$

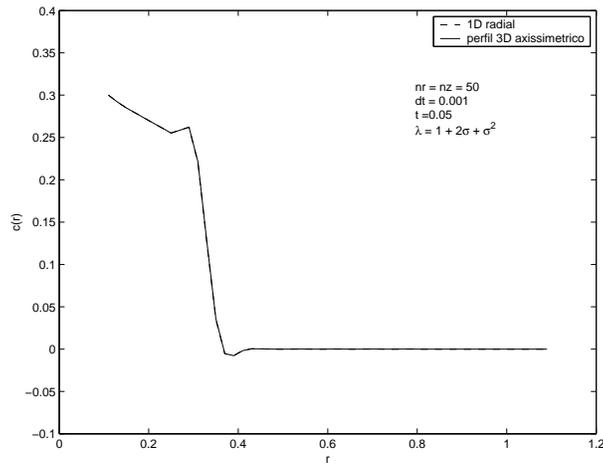


Figura 4.19: Comparação da solução numérica de c 2D axissimétrica (tracejada) e o perfil da solução numérica 3D axissimétrica com $u_3 = 0$ (linha cheia) de σ para $\lambda = 1 + 2\sigma + \sigma^2$

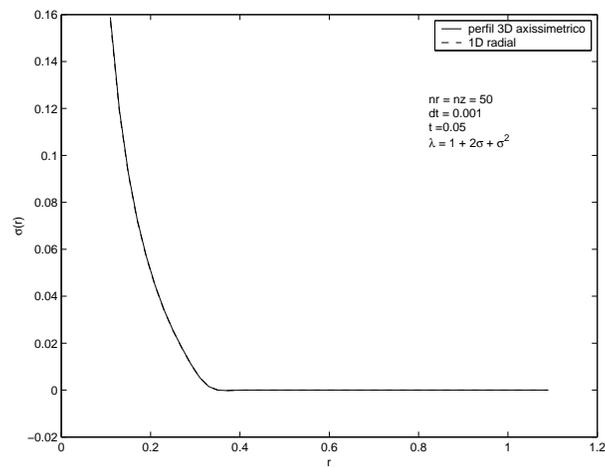


Figura 4.20: Comparação da solução numérica de σ 2D axisimétrica (tracejada) e o perfil da solução numérica 3D axisimétrica com $u_3 = 0$ (linha cheia) de σ para $\lambda = 1 + 2\sigma + \sigma^2$

Capítulo 5

Elementos Finitos

5.1 O Método

Estamos trabalhando com coordenadas cilíndricas axissimétricas portanto, como já foi dito, para uma função escalar f e uma função vetorial $\mathbf{f} = (f_1, f_3)$ temos

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$
$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r f_1) + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right).$$

Por conveniência, reescrevemos o sistema adimensional (4.48)-(4.51):

$$\phi \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla c = -\lambda(\sigma) c |\mathbf{u}| \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \lambda(\sigma) c |\mathbf{u}| \quad (5.2)$$

$$\mathbf{u} = -\frac{K}{K} k(\sigma) \nabla p \quad (5.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (5.4)$$

Já vimos no capítulo anterior como se resolvem as equações (5.1) e (5.2) se \mathbf{u} for conhecida. Vamos agora ver como serão discretizadas e resolvidas as equações de pressão e velocidade (5.3) e (5.4), supondo conhecido σ . Estamos portanto, nesse momento, interessados em resolver

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (5.5)$$

$$\mathbf{u} = -\alpha(\sigma) \nabla p, \quad (5.6)$$

com $\alpha(\sigma) = K k(\sigma) / \bar{K}$.

Uma questão importante na simulação de escoamentos em meios porosos é a maneira na qual a velocidade \mathbf{u} é calculada. Uma vez que desejamos obter com

boa precisão a concentração de partículas suspensas σ , precisamos de uma boa aproximação para \mathbf{u} .

Os métodos padronizados de diferenças finitas e de elementos finitos resolvem esse sistema para a pressão p que não necessariamente é suave devido ao impacto dos coeficientes (leia-se permeabilidade que varia abruptamente). A resultante p é então numericamente diferenciada e multiplicada por coeficientes que dependem da permeabilidade para obtermos \mathbf{u} . Assim, esses métodos geram velocidades pouco precisas, o que reduz a precisão das concentrações de partículas que queremos encontrar.

Por essa razão, métodos de elementos finitos mistos para resolver o sistema (5.5), (5.6) são particularmente atraentes já que aproximam \mathbf{u} e p com acurácia comparável. A chave para essas aproximações é o uso de espaços de polinômios apropriados, como o proposto por [38].

Para resolver o sistema, vamos nos basear em [2] e [17]. Multiplicando a equação (5.6) por α^{-1} ,

$$\alpha^{-1}\mathbf{u} + \nabla p = 0$$

e integrando com uma função teste \mathbf{v} obtemos

$$\int_{\Omega} \alpha^{-1}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in H(\text{div}). \quad (5.7)$$

Mas usando

$$\nabla \cdot (p\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \nabla p + p\nabla \cdot \mathbf{v},$$

a equação toma a forma

$$\int_{\Omega} \alpha^{-1}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot (p\mathbf{v}) \, d\Omega - \int_{\Omega} p\nabla \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = 0.$$

Pelo teorema da divergência,

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (p\mathbf{v}) \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} p\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds,$$

e então a equação (5.7) pode ser escrita como

$$\int_{\Omega} \alpha^{-1}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega - \int_{\Omega} p\nabla \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = - \int_{\partial\Omega} p\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (5.8)$$

$\forall \mathbf{v} \in H(\text{div})$. A equação (5.5) também pode ser integrada com uma função teste q para obtermos

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u}q \, d\Omega = 0, \quad \forall q \in L^2(\Omega).$$

Por definição, $H(\text{div}, \Omega) := \{\boldsymbol{\tau} \in L^2(\Omega) \mid \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \in L^2(\Omega)\}$ [13]. Então o problema variacional relacionado ao sistema (5.5), (5.6) em coordenadas cilíndricas

axissimétricas é encontrar o par $(\mathbf{u}, p) \in (H(\text{div}, \Omega), L^2(\Omega))$ tal que

$$\int_{\Omega} \alpha^{-1} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = - \int_{\partial\Omega} p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (5.9)$$

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} q \, d\Omega = 0, \quad (5.10)$$

$\forall \mathbf{v} \in H(\text{div}), \forall q \in L^2(\Omega)$.

Para resolver esse sistema, primeiramente escolhemos o número de elementos que serão usados. Consideremos uma malha com m elementos na direção r e n elementos na direção z . Temos ainda que escolher uma orientação e uma numeração para as faces da malha. Tomando como exemplo uma malha com 6 elementos, nossa escolha está representada na figura (5.1).

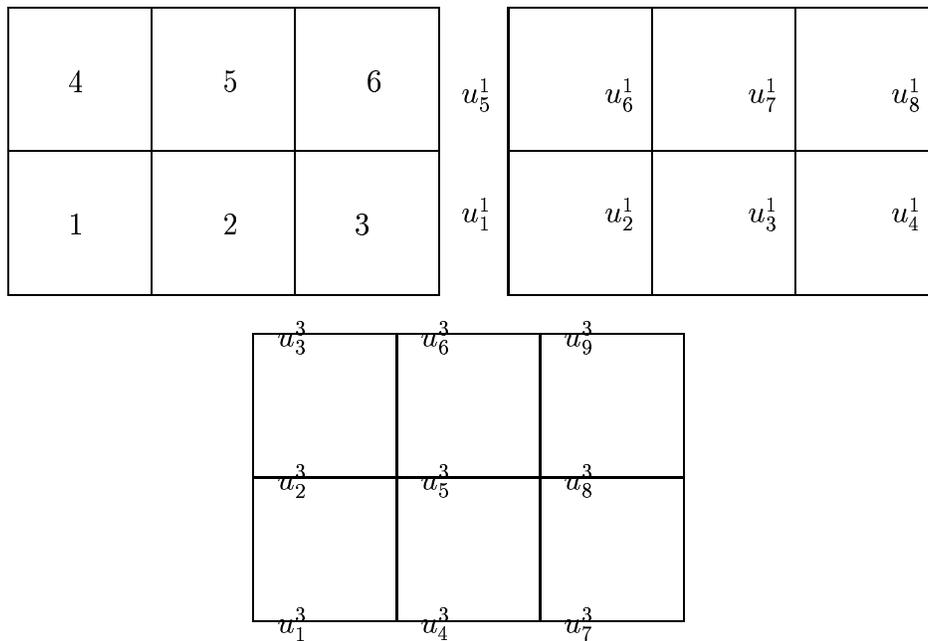


Figura 5.1: Exemplo de orientação de malha usando 3 elementos na direção r ($m = 3$) e 2 na direção z ($n = 2$).

Chamaremos esse exemplo com 6 elementos de exemplo 3x2. Os cálculos para esse exemplo 3x2 estão feitos em detalhes no Apêndice B. Associaremos a $(\Delta r, \Delta z)$ um subespaço de elementos finitos $V_h \times Q_h$ de $H(\text{div}, \Omega) \times L^2(\Omega)$, como veremos a seguir. O espaço de velocidades será então $V_h = V^r \times V^z$ onde V^r contém funções lineares por partes e contínuas na direção r e constante por partes na direção z e, analogamente, V^z contém funções lineares por partes e contínuas na direção z e constante por partes na direção r . O espaço de pressão Q_h consiste em funções que são constantes por partes em cada elemento.

Para que a notação não fique confusa, apenas nesse capítulo tomamos a liberdade de usar índices superiores r e z para denotar as coordenadas dos vetores que antes estavam sendo denotadas por índices inferiores 1 e 3. Aqui, os índices inferiores denotam numeração da malha.

Sendo $r_i = r_0 + i\Delta r$ e $z_i = z_0 + i\Delta z$, para cada elemento E temos os subespaços $V_h(E)$ e $Q_h(E)$ dados por suas respectivas bases:

$$V_h(E) = \begin{cases} \xi_1^r = \begin{pmatrix} 1 - (r - r_i)/\Delta r \\ 0 \end{pmatrix} & \xi_2^r = \begin{pmatrix} (r - r_i)/\Delta r \\ 0 \end{pmatrix} \\ \xi_3^z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - (z - z_i)/\Delta z \end{pmatrix} & \xi_4^z = \begin{pmatrix} 0 \\ (z - z_i)/\Delta z \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$Q_h(E) = \psi = \begin{cases} 1 \text{ em } E \\ 0 \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

O espaço de Raviart-Thomas de mais baixo grau é o espaço gerado por ξ_i , $i = 1, \dots, 4$. Essas funções estão mostradas nas figuras (5.2) e (5.3), para um determinado elemento.

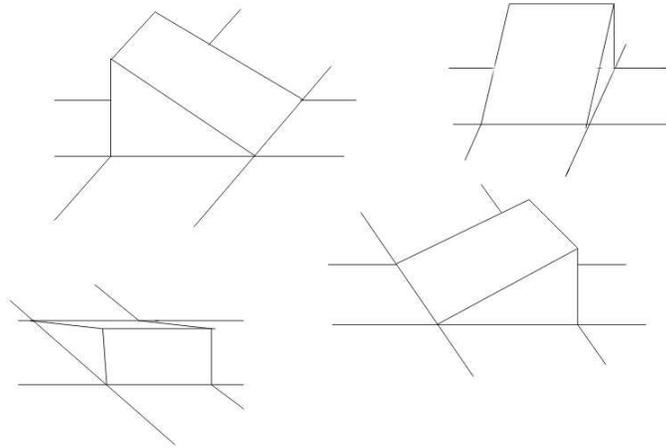


Figura 5.2: base para V_h

As funções \mathbf{u}_h e p_h que estamos procurando podem então ser escritas como

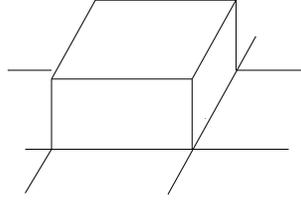


Figura 5.3: base para Q_h

uma combinação linear dessa base:

$$\mathbf{u}_h(r, z) = \left(\sum_{i=1}^{(m+1)n} u_i^r \xi_i^r(r, z), \sum_{i=1}^{m(n+1)} u_i^z \xi_i^z(r, z) \right) \quad (5.11)$$

$$p_h(r, z) = \sum_{i=1}^{mn} p_i^r \psi_i^r(r, z). \quad (5.12)$$

É importante notar que a componente normal de \mathbf{u} ser constante nas faces vai nos permitir construir um espaço vetorial de dimensão finita sobre Ω com componente normal contínua na interface de dois elementos pertencendo a um subespaço de $H(\text{div}, \Omega)$, onde está definida a velocidade.

Assim, temos bem definidos

$$V_h = \bigcup_{E=1}^{2mn+m+n} V_h(E) \text{ e } Q_h = \bigcup_{E=1}^{mn} Q_h(E).$$

Sejam $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{(m+1)n+(n+1)m}$ e $p \in \mathbb{R}^{mn}$ vetores com a seguinte ordenação (consistente com a malha):

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (u_1^r, \dots, u_{(m+1)n}^r, u_1^z, \dots, u_{(n+1)m}^z) \\ p &= (p_1, \dots, p_{mn}). \end{aligned}$$

O problema de elementos finitos misto é encontrar o par $(\mathbf{u}_h, p_h) \in V_h \times Q_h$ tal que

$$\int_{\Omega} \alpha^{-1} \mathbf{u}_h \mathbf{v}_h \, d\Omega - \int_{\Omega} p_h \nabla \cdot \mathbf{v}_h \, d\Omega = - \int_{\partial\Omega} p_h \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (5.13)$$

$$\int_{\Omega} q_h \nabla \cdot \mathbf{u}_h \, d\Omega = 0 \quad (5.14)$$

$$\forall \mathbf{v}_h \in V_h(\Omega), \forall q_h \in Q_h(\Omega).$$

Vamos examinar as equações lineares envolvidas na discretização de (5.13) e (5.14). Para isso, considerando as expansões (5.11) e (5.12) para \mathbf{u}_h e p_h , o nosso sistema discretizado (5.13), (5.14) toma a forma

$$\begin{bmatrix} A^r & 0 & B^r \\ 0 & A^z & B^z \\ B^r & B^z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^r \\ u^z \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^r \\ f^z \\ g \end{bmatrix}. \quad (5.15)$$

Como cada função ξ_i só é diferente de zero em uma pequena parte do domínio, é mais eficiente fazermos uma discretização local (por elemento) do método. Podemos pensar em uma matriz elementar $A(E)$ como sendo um bloco da matriz global A . Faremos então uma descrição detalhada de cada bloco da matriz. Para o exemplo 3x2, as matrizes estão mostradas em detalhes no Apêndice B.

A matriz $A^r \in \mathbb{R}^{(m+1)n \times (m+1)n}$ tem elementos na forma

$$A^r(E) = \int_E \alpha^{-1} \xi_i^r \xi_j^r d\Omega.$$

Como só existem dois ξ_i^r 's diferentes de zero em cada elemento, a matriz $A^r(E)$ será uma matriz 2×2 dada por:

$$A^r(E) = \begin{bmatrix} \int_E \alpha^{-1} \xi_1^r \xi_1^r r dr dz & \int_E \alpha^{-1} \xi_1^r \xi_2^r r dr dz \\ \int_E \alpha^{-1} \xi_2^r \xi_1^r r dr dz & \int_E \alpha^{-1} \xi_2^r \xi_2^r r dr dz \end{bmatrix}.$$

Se considerarmos que α^{-1} varia no espaço, devemos usar um método de quadratura de Gauss para calcular essas integrais. Mas nós vamos considerar α constante por elementos. Fisicamente, essa é uma boa aproximação, uma vez que o α está associado à permeabilidade e nossa principal aplicação é meio poroso em camadas. Isso facilita numericamente uma vez que as integrais podem ser calculadas explicitamente. Sendo assim, a matriz elementar $A^r(E)$ é

$$A^r(E) = \frac{\alpha^{-1} \Delta z \Delta r}{12} \begin{bmatrix} r_{i+1} + 3r_i & r_{i+1} + r_i \\ r_{i+1} + r_i & 3r_{i+1} + r_i \end{bmatrix},$$

onde r_i e r_{i+1} são os valores de r associados às faces do elemento E .

A matriz $A^z \in \mathbb{R}^{(m+1)n \times (m+1)n}$ tem elementos na forma

$$A^z(E) = \int_E \alpha^{-1} \xi_i^z \xi_j^z d\Omega.$$

Como novamente só existem dois ξ_i^z 's diferentes de zero em cada elemento, a matriz $A^z(E)$ será também uma matriz 2×2 :

$$A^z(E) = \begin{bmatrix} \int_E \alpha^{-1} \xi_3^z \xi_3^z r dr dz & \int_E \alpha^{-1} \xi_3^z \xi_4^z r dr dz \\ \int_E \alpha^{-1} \xi_4^z \xi_3^z r dr dz & \int_E \alpha^{-1} \xi_4^z \xi_4^z r dr dz \end{bmatrix}.$$

As integrais para A^z também podem ser calculadas explicitamente (Apêndice B) e a matriz elementar $A^z(E)$ é:

$$A^z(E) = \frac{\alpha^{-1}\Delta z\Delta r}{12} \begin{bmatrix} 2(r_{i+1} + r_i) & r_{i+1} + r_i \\ r_{i+1} + r_i & 2(r_{i+1} + r_i) \end{bmatrix}.$$

Para a matriz $B^r \in \mathbb{R}^{(m+1)n \times mn}$ temos as integrais

$$\begin{aligned} B^r(E) &= - \int_E \psi_i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \xi_j^r) \, d\Omega \\ &= - \int_E \psi_i \left(\xi_j^r + r \frac{\partial \xi_j^r}{\partial r} \right) \, dr dz \end{aligned}$$

e a matriz elementar $B^r(E)$ será

$$B^r(E) = \begin{bmatrix} r_i \Delta z \\ -r_{i+1} \Delta z \end{bmatrix}.$$

Por fim, $B^z \in \mathbb{R}^{(n+1)m \times mn}$ é dada por

$$B^z(E) = - \int_E \psi_i \frac{\partial \xi_j^z}{\partial z} \, d\Omega$$

e a matriz elementar $B^z(E)$ será

$$B^z(E) = \begin{bmatrix} (r_i + \Delta r/2) \Delta r \\ -(r_i + \Delta r/2) \Delta r \end{bmatrix}.$$

Do lado direito das equações temos as integrais de fronteira. Para $f^r \in \mathbb{R}^{(m+1)n \times 1}$, temos as integrais

$$- \int_{\partial\Omega} p_h \langle \xi_{kl}^r, \mathbf{n} \rangle \, ds$$

e para $f^z \in \mathbb{R}^{(n+1)m \times 1}$ os elementos são da forma

$$- \int_{\partial\Omega} p_h \langle \xi_{kl}^z, \mathbf{n} \rangle \, ds,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota produto interno. Para o sistema que estamos estudando, $g \in \mathbb{R}^{mn \times 1}$ se anula. Uma vez discretizadas as equações, temos o sistema (5.15), agora escrito na forma

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{B}^T \mathbf{p} &= \mathbf{f} \\ \mathbf{B}\mathbf{u} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Resolveremos esse sistema com acelerador Usawa [13], [17]. Primeiro, eliminamos \mathbf{u} e depois resolvemos o sistema em \mathbf{p} . Da primeira equação,

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{f} - \mathbf{B}^T \mathbf{p}).$$

Substituindo na segunda equação, ficamos com

$$BA^{-1}B^T p = BA^{-1}f,$$

ou, de forma simplificada,

$$Cp = d,$$

com $C = BA^{-1}B^T$ e $d = BA^{-1}f$. A matriz A é uma matriz tridiagonal facilmente invertível. Para resolver esse sistema, vamos usar o método do Gradiente Conjugado (GC). Esse método é extremamente eficiente para resolver sistemas com matrizes simétricas positivas definidas (*spd*) porque precisamos armazenar em cada iteração apenas um número limitado de vetores. Para uma matriz *spd* de tamanho $n \times n$ o GC converge em no máximo n iterações [13], [46]. Entretanto, para problemas com um grande número de incógnitas, essa propriedade é de pouca significância, pois uma boa aproximação pode ser encontrada com muito menos de n iterações.

É difícil prever precisamente a convergência de métodos iterativos, mas podemos obter boas estimativas para o GC. Para um sistema $Ax = b$ o erro pode ser limitado em termos do número de condicionamento espectral k_2 da matriz A .

Definição: Se λ_{max} e λ_{min} são respectivamente o maior e o menor autovalor de uma matriz A *spd* então o número de condicionamento espectral de A é $k_2(A) = \lambda_{max}(A)/\lambda_{min}(A)$.

Teorema: Se \hat{x} é solução exata de $Ax = b$ com A *spd* então, para qualquer vetor inicial x_0 , pode-se mostrar que o método do Gradiente Conjugado gera uma sequência $x^{(i)}$ satisfazendo

$$\|x^{(i)} - \hat{x}\|_A \leq 2\alpha^i \|x_0 - \hat{x}\|_A,$$

onde $\alpha = (\sqrt{k_2} - 1)/(\sqrt{k_2} + 1)$ e $\|u\|_A := (Au, u)^{1/2}$. A demonstração encontra-se em [13], [22].

Para usarmos o Gradiente Conjugado, queremos então que C seja simétrica positiva definida e apresente um número de condicionamento baixo.

Para mostrar que C é *spd*, precisamos de uma definição e um lema.

Definição: Chamaremos uma matriz A de estritamente diagonal dominante sempre que para os elementos a_{ij} da matriz A valer a propriedade

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad \forall i.$$

Lema: A matriz A é *spd*.

Demonstração:

i) A é simétrica por construção.

ii) Já vimos que para α constante por elementos e para as funções bases do nosso espaço de elementos finitos,

$$A^r = \frac{1}{12}\alpha^{-1}\Delta r\Delta z \begin{bmatrix} 3r_i + r_{i+1} & r_i + r_{i+1} \\ r_i + r_{i+1} & r_i + 3r_{i+1} \end{bmatrix}$$

$$A^z = \frac{1}{12}\alpha^{-1}\Delta r\Delta z \begin{bmatrix} 2(r_i + r_{i+1}) & r_i + r_{i+1} \\ r_i + r_{i+1} & 2(r_i + r_{i+1}) \end{bmatrix}.$$

Se considerarmos um meio homogêneo, com esses valores, temos uma matriz A que é claramente estritamente diagonal dominante, mas mesmo em meios estratificados, essa propriedade continua valendo. Então, pelo Teorema de Gershgorin [26] os autovalores λ_i de A estão em um círculo centrado em d_i com raio f_i . Como todas os elementos da nossa matriz são positivas, isso significa que $\forall i, \lambda_i > 0$, ou seja, A é positiva definida.

Por (i) e (ii), A é *spd*.

Teorema: A matriz C é *spd*.

Demonstração:

i) C é simétrica:

Se A é simétrica A^{-1} também é:

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}.$$

Usando esse fato, temos:

$$C^T = (BA^{-1}B^T)^T = B(A^{-1})^T B^T = BA^{-1}B^T = C.$$

ii) C é positiva definida:

Sabendo que se A é *spd* então A^{-1} também é [45] e temos:

$$(Cx, x) = (BA^{-1}B^T x, x) = (A^{-1}B^T x, B^T x) = (A^{-1}y, y) > 0 \quad \forall y \neq 0.$$

Por (i) e (ii), C é *spd*.

Apesar de termos uma matriz *spd*, o número de condicionamento dela não é muito baixo. Usamos então o gradiente conjugado pré-condicionado (PCG) por uma decomposição parcial de Choleski, na rotina do matlab *cholinc.m*. Esse pré-condicionamento acelerou significativamente a convergência do CG [13], [42]. Para um caso particular, a tabela (5.1) indica o número de iterações para que o PCG convirja considerando 3 tamanhos diferentes de malha.

método	100 elementos	1600 elementos	10000 elementos
CG	220	1935	5196
PCG	9	15	30

Tabela 5.1: Tabela comparativa para o gradiente conjugado com e sem pré-condicionador.

5.2 Injeção de Água Pura

O que acontece se injetarmos água sem partículas? Se não houver retenção ($\sigma = 0$) e considerarmos o meio poroso apenas com uma camada, o sistema adimensional (5.1), (5.2), (5.3), (5.4) a resolver passa a ser

$$\phi \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla c = 0 \quad (5.16)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (5.17)$$

$$\mathbf{u} = -\nabla p. \quad (5.18)$$

Uma vez que as equações de pressão e velocidade passam a ter solução exata conhecida, podemos então testar o método de elementos finitos mistos.

Para testar o método de elementos finitos mistos, vamos utilizar dois experimentos numéricos, em cada um deles vamos impor condições de contorno específicas. Para esses experimentos, vamos considerar o nosso domínio computacional $r = [0.1, 1.1]$ e $z = [0, 1]$ e vamos nomear o contorno como na figura (5.4).

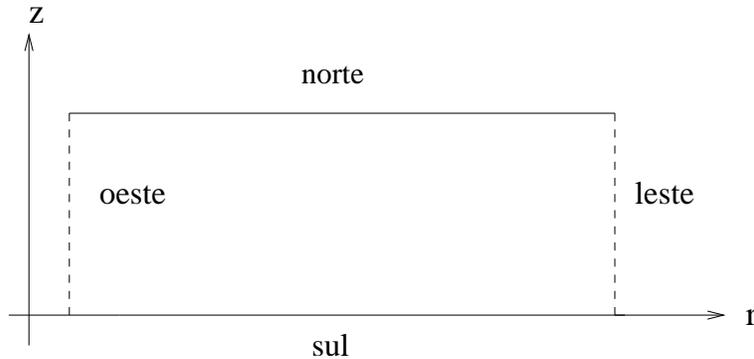


Figura 5.4: bordo do domínio

O primeiro problema teste é considerar $\beta = 0$, desacoplando o método de elementos finitos do resto do sistema em c e σ e comparar a solução numérica das equações para p e \mathbf{u} com a solução exata $p = 20r^2 - 40z^2$. Do ponto de vista das

equações de velocidade e pressão, isso é equivalente a considerar que não existe retenção de partículas.

Na fronteira, teremos

$$p = \begin{cases} 0.2 - 40z^2 & \text{no Oeste} \\ 20r^2 & \text{no Sul} \\ 24.2 - 40z^2 & \text{no Leste} \\ 20r^2 - 40 & \text{no Norte.} \end{cases} \quad (5.19)$$

Agora, teremos que calcular quatro integrais de fronteira. As contas estão feitas em detalhes no Apêndice B, e temos:

Para E no oeste:

$$\begin{aligned} f^r(E) &= 0 \\ f^z(E) &= -0.02\Delta z + 4/3(z_{i+1}^3 - z_i^3); \end{aligned}$$

Para E no sul:

$$\begin{aligned} f^r(E) &= -5\Delta r(r_{i+1} + r_i)(r_{i+1}^2 + r_i^2) \\ f^z(E) &= 0; \end{aligned}$$

Para E no leste:

$$\begin{aligned} f^r(E) &= 0 \\ f^z(E) &= 26.62\Delta z - 44/3(z_{i+1}^3 - z_i^3); \end{aligned}$$

Para E no norte:

$$\begin{aligned} f^r(E) &= 5\Delta r(r_{i+1} + r_i)(r_{i+1}^2 + r_i^2 - 4) \\ f^z(E) &= 0. \end{aligned}$$

O resultado numérico para uma malha 40×40 está mostrado nas figuras (5.5), (5.6) e (5.7), para a pressão, a velocidades horizontal e a velocidade vertical, respectivamente. Fizemos uma análise de resolução para as três variáveis, como mostra a tabela (5.2).

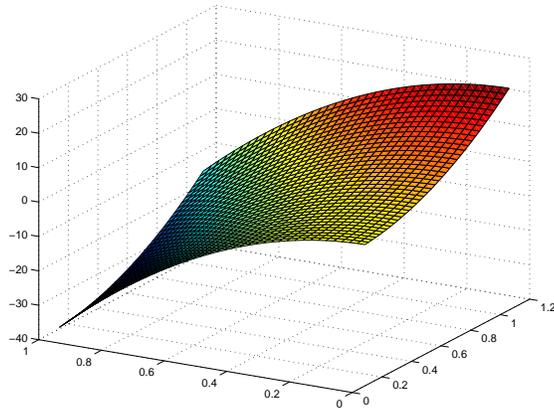


Figura 5.5: solução numérica para pressão (p), numa malha 40 X 40

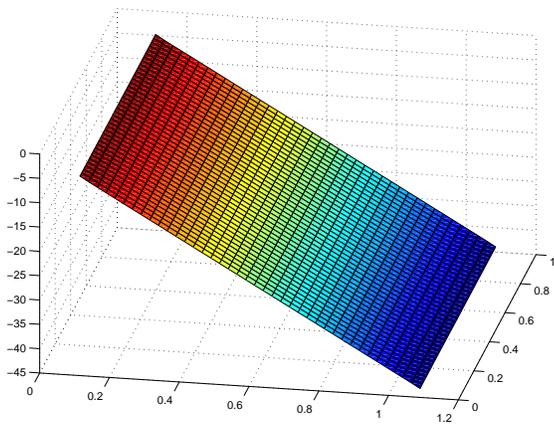


Figura 5.6: solução numérica para velocidade horizontal (u_1), numa malha 40 X 40

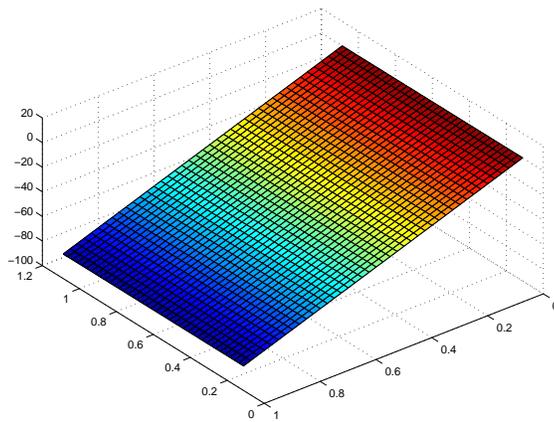


Figura 5.7: solução numérica para velocidade vertical (u_3), numa malha 40×40

elementos	$e_r(p_h)$	$e_r(u_{1h})$	$e_r(u_{3h})$
10X10 = 100	0.0022	0.0092	0.0013
20X20 = 400	$5.6752 * 10^{-4}$	0.0023	$3.8003 * 10^{-4}$
40X40 = 1600	$1.4270 * 10^{-4}$	$5.9244 * 10^{-4}$	$1.0488 * 10^{-4}$
80X80 = 6400	$3.5729 * 10^{-5}$	$1.4942 * 10^{-4}$	$2.8366 * 10^{-5}$
160X160 = 25600	$8.9358 * 10^{-6}$	$3.7653 * 10^{-5}$	$7.5791 * 10^{-5}$
200X200 = 40000	$5.7192 * 10^{-6}$	$2.4157 * 10^{-5}$	$4.9461 * 10^{-5}$
250X250 = 62500	$3.6604 * 10^{-6}$	$1.5498 * 10^{-5}$	$3.2253 * 10^{-6}$

Tabela 5.2: Erro relativo da pressão, velocidade horizontal e velocidade vertical

O segundo problema teste tem maior sentido físico. Vamos considerar como condição de contorno baseada na figura (5.4) $p = 1$ na fronteira oeste, $p = 0$ na fronteira leste e $u_3 = 0$ nas fronteiras norte e sul.

Tomando o divergente da equação (5.18), temos

$$\nabla \cdot \nabla p = 0 \quad (5.20)$$

Vamos nos concentrar na equação (5.20). Com base na figura (5.4), que mostra o bordo do domínio, a condição de contorno para a pressão é $u_3 = \partial p / \partial z = 0$ no norte e sul, ou seja, fronteiras impermeáveis e pressão $p = p_0$ no oeste e $p = p_1$ no leste.

Usando separação de variáveis, seja

$$p = A(r)B(z).$$

Substituindo na equação (5.20), duas equações diferenciais ordinárias têm que ser resolvidas:

$$\frac{A'}{A} + \frac{rA''}{A} = 0 \quad (5.21)$$

$$\frac{B''}{B} = 0. \quad (5.22)$$

Para a equação em B ,

$$B'' = 0 \Rightarrow B = az + b.$$

A equação a ser resolvida em A é

$$rA'' + A' = 0.$$

Chame $A' = R$. Daí:

$$rR' + R = 0,$$

que integrando nos dá

$$R = cr^{-1}.$$

Voltando à variável A ,

$$A = c \ln r + d.$$

Então as soluções das EDO's (5.21) e (5.22) são

$$A = c \ln r + d.$$

$$B = az + b$$

e a pressão nesse problema é dada por

$$p = AB = (c \ln r + d)(az + b).$$

Vamos impor as condições de contorno do nosso problema. Tomando a derivada da pressão na direção z ,

$$\frac{\partial p}{\partial z} = a(c \ln r + d).$$

Como $\partial p / \partial z = 0$ em norte e sul e queremos uma solução não trivial, temos que

$$a = 0.$$

Então

$$p = b(c \ln r + d).$$

As nossas duas outras condições de contorno nos dizem que $p(\text{oeste}) = p_0$ e $p(\text{leste}) = p_1$. Vamos chamar r em oeste de r_0 e r em leste de r_f . Assim, temos

$$bc \ln(r_0) + bd = p_0$$

$$bc \ln(r_f) + bd = p_1,$$

donde

$$bc = \frac{p_1 - p_0}{\ln(r_f/r_0)}$$

$$bd = p_0 - \frac{p_1 - p_0}{\ln(r_f/r_0)} \ln(r_0).$$

Então a pressão será dada por

$$p = p_0 + \frac{p_1 - p_0}{\ln(r_f/r_0)} \ln(r/r_0).$$

Tomando a derivada da pressão na direção r ,

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{p_1 - p_0}{\ln(r_f/r_0)} \frac{1}{r},$$

ou seja, a velocidade horizontal decai como $1/r$.

Tomando a derivada da pressão na direção z ,

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Vale ressaltar que esses cálculos permanecem válidos para o caso em que várias camadas são consideradas. A hipótese de uma camada é apenas para simplificarmos a notação.

Examinaremos agora a solução numérica do segundo problema teste. Com a condição de contorno proposta, a única integral de fronteira que temos que calcular é a integral no oeste:

$$\int_{z_{i+1}}^{z_i} 1 \cdot 0.1 \cdot (-1) (-dz) = 0.1\Delta z.$$

A figura (5.8) comprova que experimento é feito com sucesso: a velocidade na direção z é zero e a velocidade da direção r decai com r . Uma análise de resolução está mostrada na tabela (5.3).

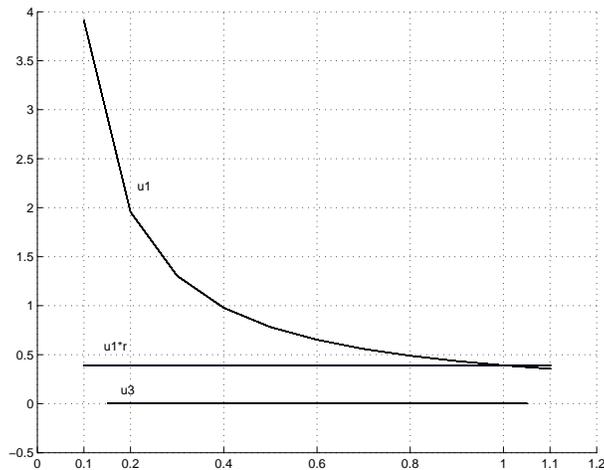


Figura 5.8: perfil de u_1 , $u_1 * r$ e u_3 . Como deveria ser, u_1 decai com r ($u_1 * r$ é constante) e $u_3=0$

malha	$e_r(p_h)$	$e_r(u_{1h})$
10x10	0.0199	0.0153
20x30	0.0051	0.0043
40x40	0.0013	0.0011
80x80	$3.2370 * 10^{-4}$	$2.8009 * 10^{-4}$
100x100	$2.0722 * 10^{-4}$	$1.7946 * 10^{-4}$
160x160	$8.0966 * 10^{-5}$	$7.0186 * 10^{-5}$

Tabela 5.3: Erro relativo com o refinamento da malha

Capítulo 6

O Algoritmo Completo

O método numérico final para resolver o sistema (5.1), (5.2), (5.3) e (5.4) conta com dois blocos de solução. No primeiro bloco, são resolvidas as equações de velocidade e pressão via elementos finitos mistos. Uma vez atualizada a velocidade, o segundo bloco, que utiliza o método das características para resolver as equações de concentração de partículas suspensas e depositadas, pode ser usado para evoluir c e σ de um passo de tempo Δt . O algoritmo está descrito abaixo:

ALGORITMO COMPLETO

1. Faça $c = 0$, $\sigma = 0$.

Bloco A: atualização de p e \mathbf{u} usando elementos finitos mistos

2. Calcule $k(\sigma)$
3. Calcule $\alpha^{-1}(\sigma)$
4. Calcule as matrizes A^r, A^z, B^r, B^z
5. Ajuste as condições de contorno f^r, f^z
6. Use PCG para resolver o sistema que atualiza \mathbf{u} e p

Bloco B: avanço no tempo de c e σ pelo método das características

7. Calcule $\bar{\mathbf{x}}$
8. Dados $c_i^{n-1}, \sigma_i^{n-1}$ e $\bar{\mathbf{x}}$, ache \bar{c}_i^{n-1} e $\bar{\sigma}_i^{n-1}$ via interpolação numérica
9. Ache σ_i^n pelo método de Newton
10. Conhecendo σ_i^n , calcule c_i^n

11. Volte ao bloco A.
-
-

Por etapas, já testamos o algoritmo da seguinte forma:

1. Com o bloco A desligado, testamos o bloco B, ou seja, obtivemos c e σ , supondo conhecido \mathbf{u} :

1.1: Avaliamos os métodos interpolação em 1D e decidimos usar a interpolação cúbica de Lagrange (seção 4.2.1).

1.2. Avaliamos o método das características para uma velocidade característica variável (2D axissimétrico) (seção 4.3.1).

1.3. Usando velocidades específicas, retomamos o problema 2D axissimétrico do problema 3D axissimétrico e assim testamos o nosso esquema numérico para as leis de balanço (4.48) e (4.49) (seção 4.4.2).

2. Para condições de contorno especiais, testamos o bloco A:

2.1 Dados $p = 0$ em leste e $p = 1$ em oeste, retomamos o problema 2D axissimétrico. Com isso, testamos o algoritmo completo reduzido a uma dimensão (seção 5.2).

2.2. Isolando o bloco B (com $\beta = 0$), comparamos a solução numérica para o bloco B com uma solução exata ($p = 20r^2 - 40z^2$). Esse foi o teste para o esquema numérico do bloco B em 3D axissimétrico (seção 5.2).

Uma vez que o método das características nos dá o resultado esperado, assim como o método de elementos finitos, os dois métodos podem ser acoplados para resolver o sistema completo.

6.1 Problema Teste

Ainda no espírito de retomar experimentos 2D axissimétricos, o problema teste para o algoritmo completo considera como condição de fronteira

$$\begin{aligned} u_3 &= 0 && \text{no norte} \\ p &= 0 && \text{no leste} \\ u_3 &= 0 && \text{no sul} \\ p &= 1 && \text{no oeste} \end{aligned}$$

e ainda $\beta = 0$. Teremos dessa forma fluxo apenas na direção r .

Nos experimentos que seguem, foi utilizada uma malha 50 X 50 e um passo no tempo $\Delta t = 0.001$. Consideramos $r_0 = 0.1$ e $L = 1$. Os gráficos são apresentados após 50 passos no tempo.

Nas figuras (6.1) e (6.2), considera-se $\lambda = 1$ e compara-se o experimento 2D axissimétrico (linha pontilhada) com o perfil do experimento 3D axissimétrico (linha cheia) para partículas suspensas e retidas, respectivamente. Não dá para ver diferença entre as duas soluções, mostrando que os programas são equivalentes. As figuras (6.3) e (6.4) repetem os experimentos (6.1) e (6.2), respectivamente, com $\lambda = 1 + 2\sigma + \sigma^2$. Vemos que o resultado novamente é o esperado.

Podemos partir agora para a solução do modelo 3D axissimétrico sem redução, que é o nosso principal objetivo.

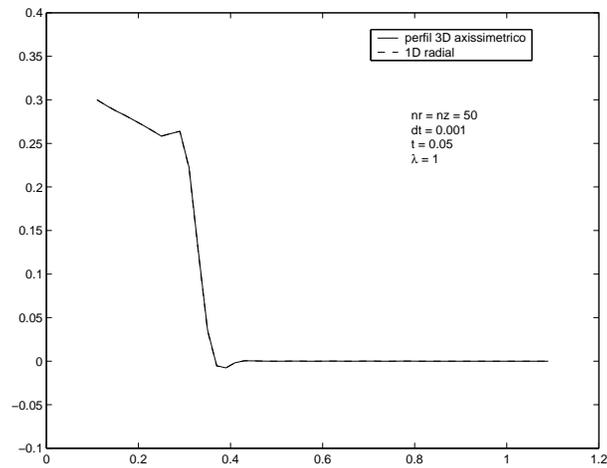


Figura 6.1: Comparação da solução numérica de c 2D axissimétrica (tracejada) e o perfil da solução numérica 3D axissimétrica (linha cheia) de c para $\lambda = 1$

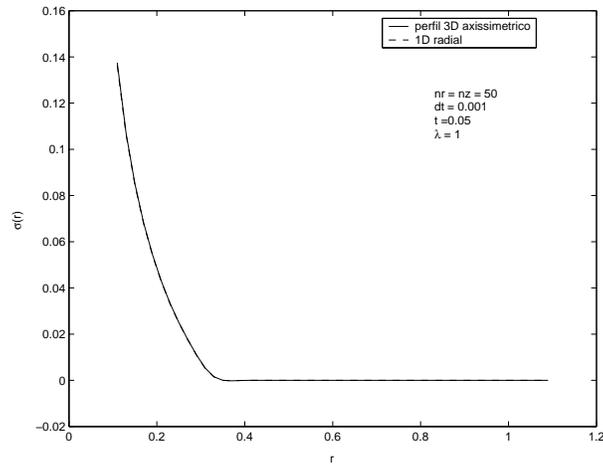


Figura 6.2: Comparação da solução numérica de c 2D axissimétrica (tracejada) e o perfil da solução numérica 3D axissimétrica (linha cheia) de σ para $\lambda = 1$

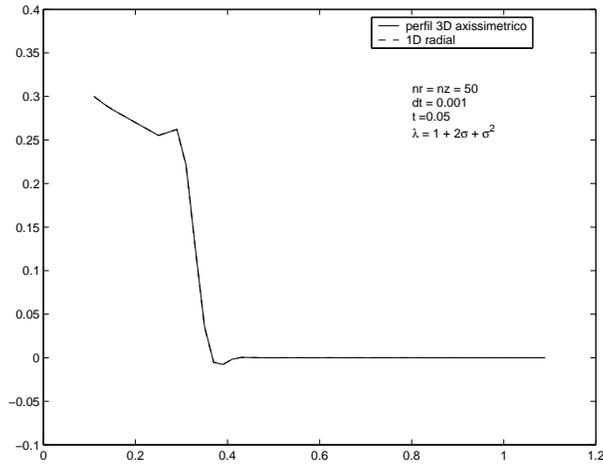


Figura 6.3: Comparação da solução numérica de c 2D axissimétrica (tracejada) e o perfil da solução numérica 3D axissimétrica (linha cheia) de c para $\lambda = 1 + 2\sigma + \sigma^2$

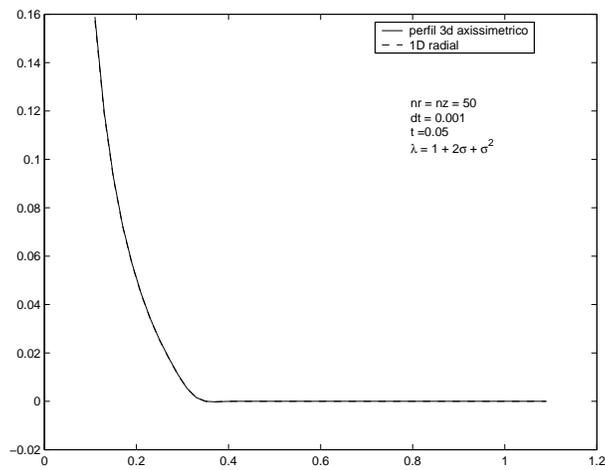


Figura 6.4: Comparação da solução numérica de c 2D axissimétrica (tracejada) e o perfil da solução numérica 3D axissimétrica (linha cheia) de σ para $\lambda = 1 + 2\sigma + \sigma^2$

Capítulo 7

Resultados Numéricos

Nesse capítulo mostraremos que nosso modelo numérico é capaz de capturar um padrão distinto de escoamento na presença do mecanismo de deposição de partículas. Já vimos em (5.2) que na ausência desse mecanismo, não existe velocidade na direção z , mas o mesmo não acontece quando ele é considerado, quando a velocidade vertical é não trivial. Primeiro mostraremos experimentos usando a pressão especificada como condição de contorno, uma vez que este é o caso de implementação mais fácil. Em seguida mostraremos experimentos com com vazão especificada, por ser este o caso real com o qual a nossa industria lida.

7.1 Pressão Especificada

Em todos os experimentos, consideramos $\phi = 0.2$, $\lambda = 1 - 2\sigma m^{-1}$ e as condições de contorno para a velocidade e pressão dadas como $u_3 = 0$ em norte e sul, pressão $p = p_1 Pa$ no leste e $p = (10^5 + p_1) Pa$ no oeste, para um p_1 arbitrário. A malha usada é de 100 por 100 elementos e o domínio computacional varia em r de $[0.1, 0.6] m$ e em z de $[0, 2.5] m$. O passo no tempo é $\Delta t = 1 dia$. A concentração de partículas injetadas é $c_0 = 10 ppm$ e $\beta = 250$.

Para entender a dinâmica da evolução da concentração de partículas retidas e da diminuição da permeabilidade, tomamos como exemplo um meio com 2 camadas, com permeabilidades absolutas $K_1 = 100 mD$ e $K_2 = 1600 mD$.

Os gráficos (7.1), (7.2) e (7.3) mostram a evolução temporal da concentração de partículas retidas aos 5, 100 e 200 dias, respectivamente. Como era de se esperar, a deposição na camada mais permeável é maior que na camada menos permeável. Em outras palavras, a permeabilidade da camada mais permeável diminui mais rapidamente que a permeabilidade da outra camada.

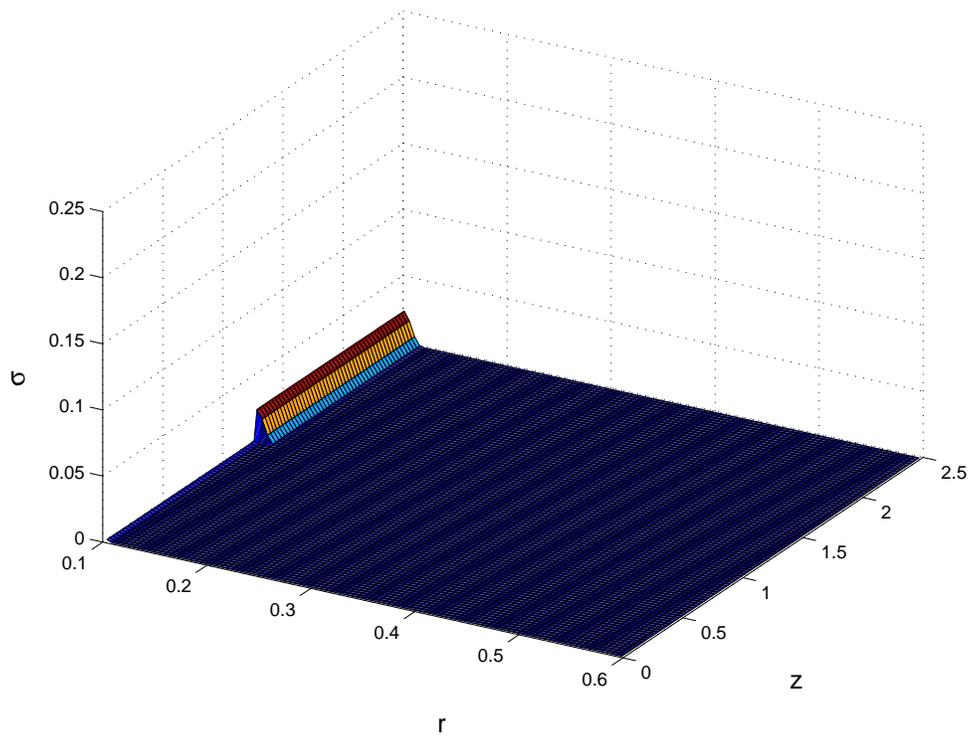


Figura 7.1: Concentração de partículas retidas aos 5 dias, para um meio com duas camadas com permeabilidades absolutas distintas $K_1 = 100mD$ para $0 \leq z \leq 1.25$ e $K_2 = 1600mD$ para $1.25 \leq z \leq 2.5$

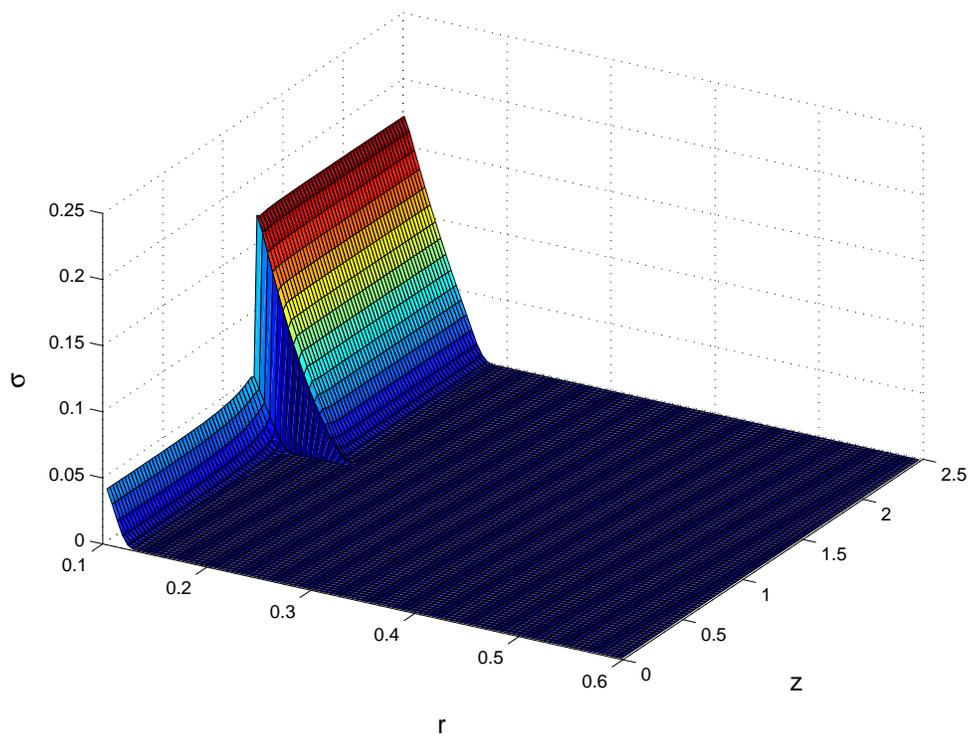


Figura 7.2: Concentração de partículas retidas aos 100 dias

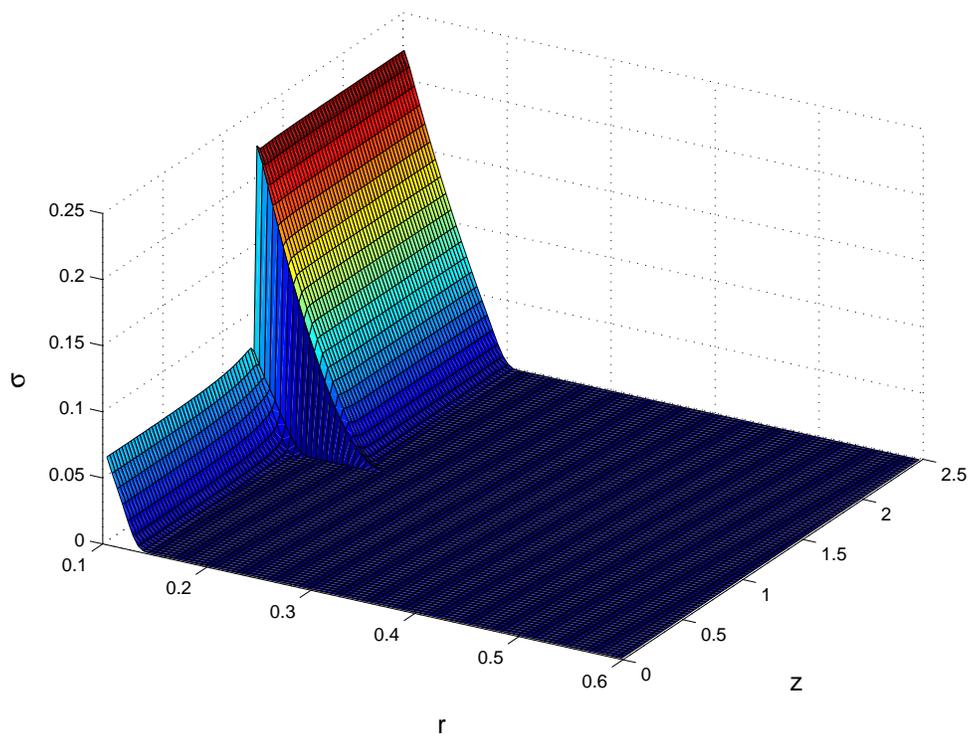


Figura 7.3: Concentração de partículas retidas aos 200 dias

E como as partículas movem-se no meio poroso? Uma vez que há interesse real de saber se há comunicação entre camadas, isto é, se partículas migram de uma camada para a outra, mostramos apenas o perfil de velocidade vertical nas próximas figuras. Como o fluxo vertical é bem menor que o horizontal pela natureza do problema, se mostrássemos o vetor velocidade completo a velocidade vertical ficaria mascarada. Além disso, não foram mostrados todos os vetores para não sobrecarregar a figura.

As figuras (7.4), (7.5), (7.6) e (7.7) mostram o fluxo vertical do experimento anterior aos 10, 100, 200 e 400 dias, respectivamente. Nota-se que existe um fluxo da camada menos permeável para a mais permeável e que, após um tempo, esse fluxo se inverte em parte da interface. Para esse experimento, a velocidade vertical máxima é 8% da velocidade horizontal máxima, como mostraremos na tabela (7.2), mais adiante. É importante ressaltar que na ausência de deposição não há fluxo entre camadas, como vimos na seção (5.2).

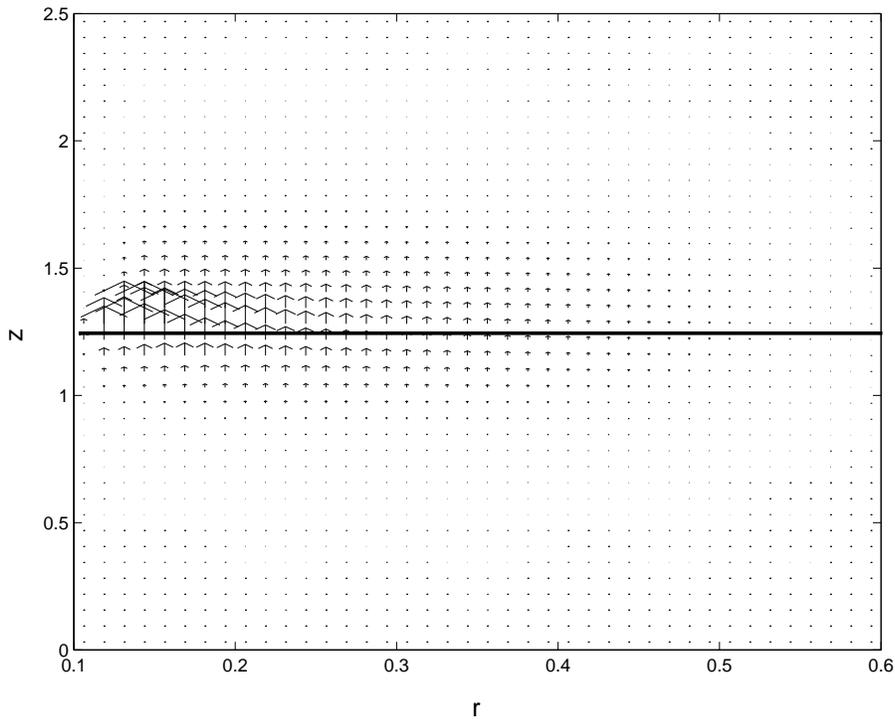


Figura 7.4: Fluxo entre duas camadas com permeabilidades distintas aos 10 dias. A linha cheia na figura mostra a interface entre as camadas mais permeável (de cima) e menos permeável (de baixo)

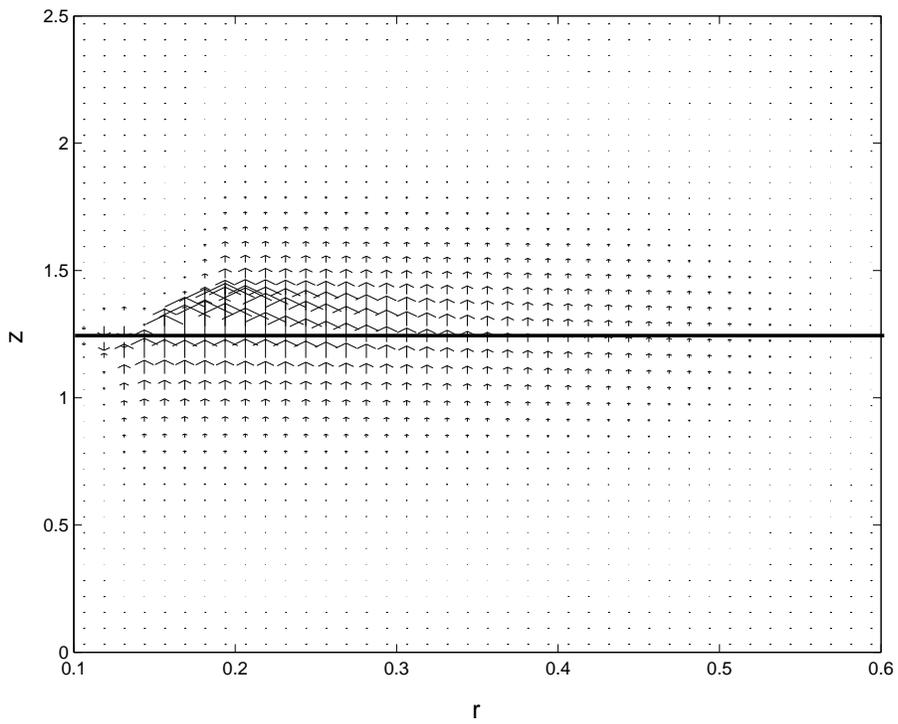


Figura 7.5: Fluxo entre duas camadas aos 100 dias

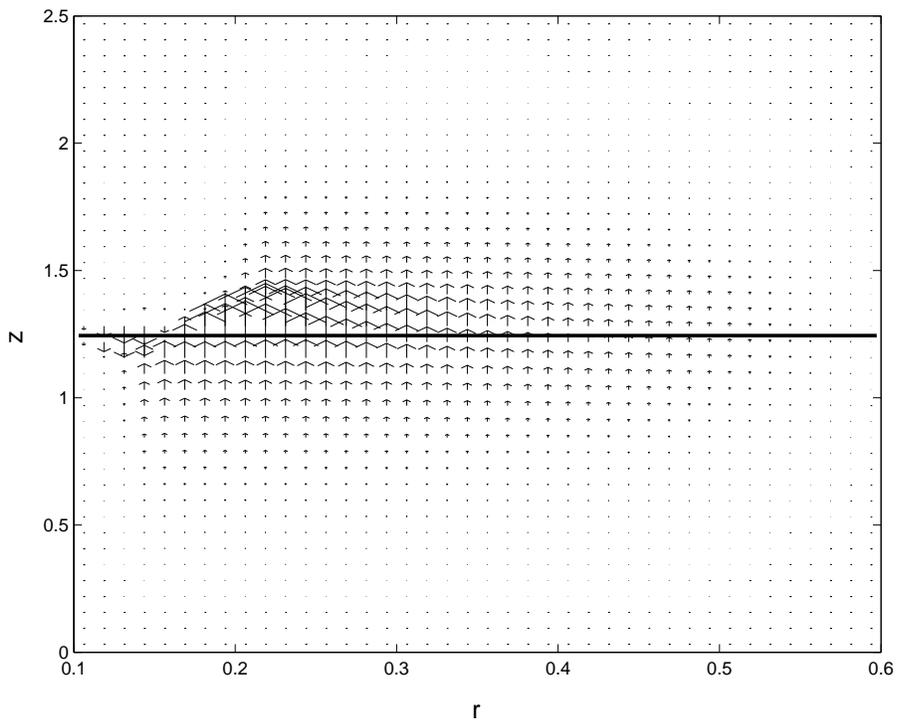


Figura 7.6: Fluxo entre duas camadas aos 200 dias

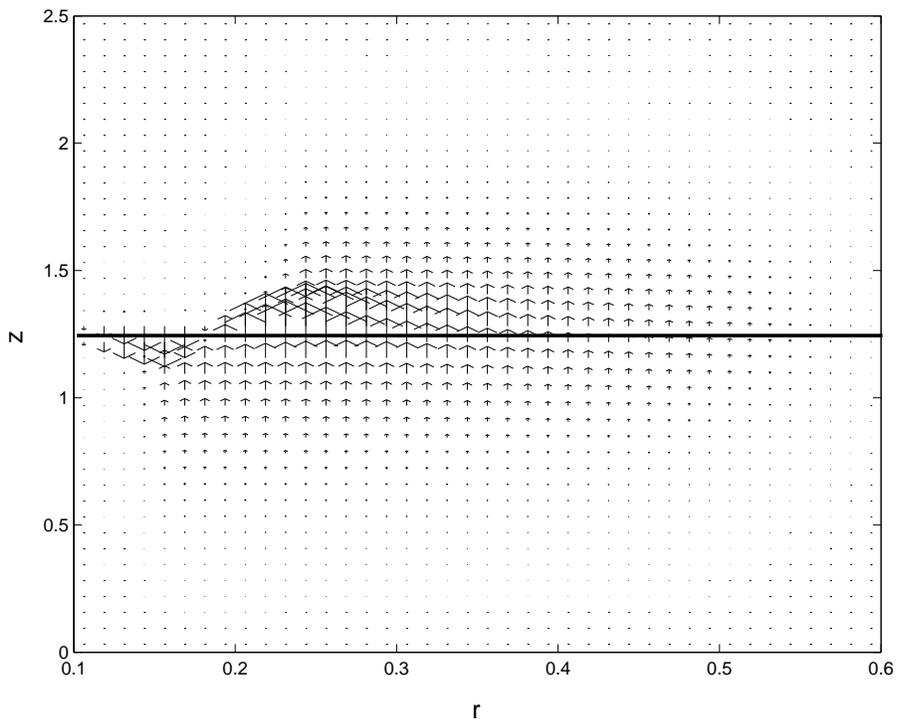


Figura 7.7: Fluxo entre duas camadas aos 400 dias

Uma vez familiarizados com a dinâmica de evolução de partículas retidas e da velocidade vertical, pode-se dar início ao estudo da dependência de parâmetros. Dois parâmetros foram analisados: razão entre permeabilidade absoluta das camadas K_1/K_2 e quantidade de camadas.

7.1.1 Razão entre Permeabilidades Absolutas Intercamadas

O primeiro parâmetro estudado é a razão entre permeabilidades absolutas K_1/K_2 . Para avaliar a influência desse parâmetro, foram mantidos fixos os parâmetros do experimento anterior. Na indústria de petróleo, costuma-se estudar a vazão, e não a velocidade. A razão para isso é que não existe um medidor de velocidade de fluxo que possa ser instalado na interface poço-reservatório e transmitir os dados para a superfície, enquanto que a vazão pode ser medida diretamente nas instalações de superfície dos campos de petróleo. Então, a partir de agora, mostraremos os gráficos da vazão total em função do tempo.

Avaliamos um meio com 20 camadas e permeabilidades absolutas alternadas, isto é, K_1, K_2, K_1, K_2 e assim por diante. A figura (7.8) mostra a vazão total para esse experimento, onde a variação das permeabilidades é (1) $K_1 = 100 \text{ mD}$, $K_2 = 200 \text{ mD}$ (linha cheia); (2) $K_1 = 100 \text{ mD}$, $K_2 = 400 \text{ mD}$ (linha tracejada); (3) $K_1 = 100 \text{ mD}$, $K_2 = 800 \text{ mD}$ (linha ponto-traço) e (4) $K_1 = 100 \text{ mD}$, $K_2 = 1600 \text{ mD}$ (linha pontilhada).

Podemos ver que quanto maior o contraste entre as permeabilidades absolutas maior será a vazão total. Isto é natural uma vez que K_2 , a maior das duas permeabilidades absolutas, está sendo gradativamente aumentada. É interessante observar que a velocidade vertical aumenta, indicando supostamente que partículas irão migrar cada vez mais de camadas menos permeáveis para outras mais permeáveis. Esses valores estão indicados na tabela (7.1). Essa tabela mostra o valor máximo atingido pelas velocidades horizontal e vertical (máximo em todos os tempos). Podemos ver que à medida que a maior permeabilidade absoluta aumenta, a velocidade vertical também aumenta.

K_1/K_2	u_1 máxima (m/dia)	u_3 máxima (m/dia)	% de u_1
1/2	9.5348	0.9891	0.1037
1/4	19.0695	2.3639	0.1240
1/8	39.1390	3.9953	0.1021
1/16	76.2781	5.6551	0.0741

Tabela 7.1: Valores máximos atingidos pelas velocidades horizontal e vertical

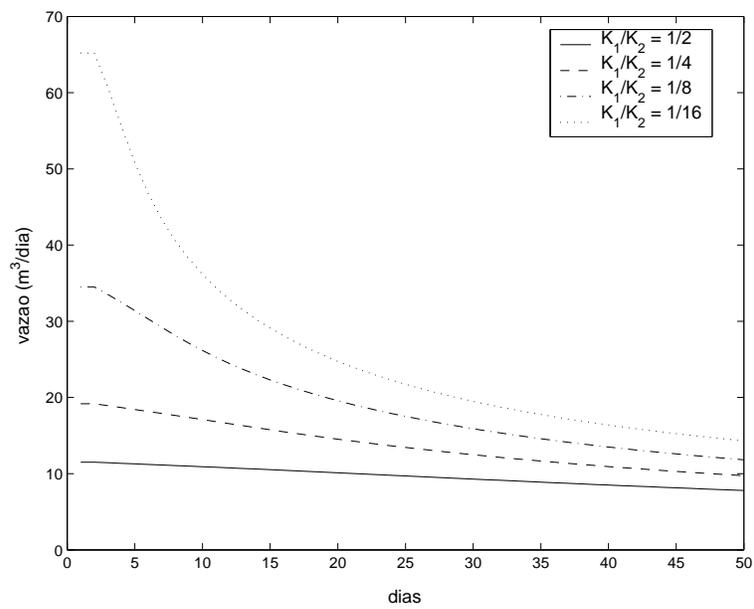


Figura 7.8: Comparação entre a razão de permeabilidade e a vazão total para um meio com 20 camadas durante 200 dias, com $K_1 = 100mD$ fixo

7.1.2 Número de Camadas

Para esses experimentos, foram mantidos fixos os dados dos experimentos anteriores e variamos apenas o número de camadas. Consideramos meios com 2, 10 e 20 camadas com permeabilidades absolutas K_1 e K_2 alternadas. A figura (7.9) mostra vazão total para esses três experimentos, durante 50 dias. Como era de se esperar, quanto maior o número de camadas, maior a vazão total, pois a intercomunicação entre camadas é melhor, propiciando assim mais facilidade para que o fluido encontre um caminho de menor resistência ao escoamento.

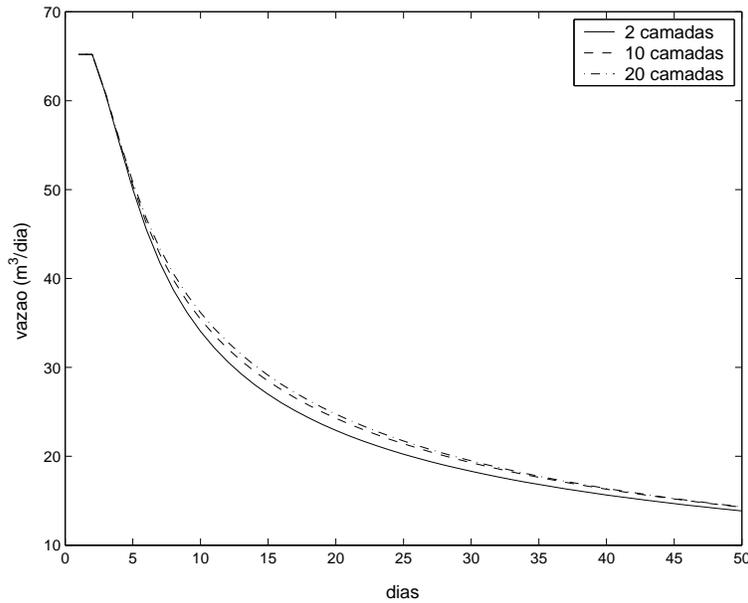


Figura 7.9: Comparação entre o número de camadas e a vazão total para camadas com permeabilidades $K_1 = 100 \text{ mD}$ e $K_2 = 1600 \text{ mD}$, durante 50 dias

Uma análise da velocidade vertical indica que o número de camadas tem influência na retenção de partículas, embora isso não faça muita diferença na vazão total, como vimos na figura (7.9). Vemos que quanto maior o número de camadas, menor a velocidade vertical entre camadas. Essa afirmação é comprovada com base no valor máximo atingido pela velocidade vertical em todos os tempos, como mostra a tabela (7.2).

7.2 Vazão Especificada

Até agora, consideramos como condição de fronteira para o nosso problema a pressão especificada nas fronteiras oeste e leste. No entanto, para retratar o problema real com o qual a indústria de petróleo lida, o parâmetro significativo

no. camadas	u_1 máxima (m/dia)	u_3 máxima (m/dia)	% de u_1
2 camadas	76.2781	6.3934	8.3934
10 camadas	76.2781	6.1570	8.0718
20 camadas	76.2781	5.6551	7.4138

Tabela 7.2: Valores máximos atingidos pelas velocidades horizontal e vertical

é a vazão, pois os engenheiros tendem a manter a vazão constante para assegurar a produção regular do campo.

O sistema adimensional que estamos resolvendo (4.48-4.51) é

$$\phi \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla c = -\lambda(\sigma)c|\mathbf{u}| \quad (7.1)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \lambda(\sigma)c|\mathbf{u}| \quad (7.2)$$

$$\mathbf{u} = -\frac{K}{K}k(\sigma)\nabla p \quad (7.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (7.4)$$

A condição inicial é a mesma de antes, ou seja, ausência de partículas no meio poroso antes da injeção:

$$c(r, 0) = 0 \text{ e } \sigma(r, 0) = 0 \text{ em } t = 0.$$

Como condição de contorno, a quantidade de partículas injetadas com o fluido é especificada,

$$c(r_0, z, t) = c_0(z, t), \quad t > 0.$$

A velocidade vertical (u_3) é nula nas fronteiras norte e sul, ou seja, o reservatório é impermeável nessa parte. Mas agora não conhecemos mais a pressão nas fronteiras pois a nossa condição de contorno é a vazão total $q(t)$ injetada no reservatório.

O método para resolvermos esse novo sistema é o mesmo. A dificuldade é que conhecer a vazão total não é suficiente para resolver o problema, porque não sabemos como a vazão se distribui nas camadas. Por isso, alguns ajustes terão que ser feitos para calcularmos a pressão em função da vazão especificada em cada passo de tempo. Em outras palavras, fixada uma vazão e iniciado o processo de deposição, temos que ajustar a pressão de injeção a cada instante para manter esta vazão.

Considere um meio poroso (ainda mais geral que o nosso) com propriedades que variam tanto na direção r quanto na direção z . Para esse meio, a componente horizontal da equação (7.3) fica

$$u_1(r, z) = -\frac{K_1(r, z)}{K}k_1(\sigma(r, z))\frac{\partial p(r, z)}{\partial r}.$$

Aqui, $u_1(r, z)$, $\sigma(r, z)$ e $p(r, z)$ significam, respectivamente, velocidade horizontal, concentração de partículas retidas e pressão no tempo t^{n-1} .

Rearranjando,

$$\frac{u_1(r, z)\bar{K}}{K_1(r, z)k_1(\sigma(r, z))} = -\frac{\partial p(r, z)}{\partial r}.$$

Integrando em r :

$$\begin{aligned} \bar{K} \int_{r_i}^{r_f} \frac{u_1(r, z)}{K_1(r, z)k_1(\sigma(r, z))} dr &= \int_{r_i}^{r_f} -\frac{\partial p(r, z)}{\partial r} dr \\ &= p(r_i, z) - p(r_f, z) \\ &= \Delta p \end{aligned}$$

Integrando em z e dividindo por H , ficamos com

$$\Delta p = \frac{\bar{K}}{H} \int_0^H \int_{r_i}^{r_f} \frac{u_1(r, z)}{K_1(r, z)k_1(\sigma(r, z))} dr dz. \quad (7.5)$$

Como estamos considerando o fluido incompressível, a vazão em todo o reservatório é constante e podemos considerá-la na entrada do reservatório. Para esse meio, a vazão na entrada do reservatório através de uma camada de espessura infinitesimal dz é dada por

$$dQ = u_1(r_0, z)2\pi r_0 dz.$$

Integrando em z , temos a vazão total na entrada do reservatório dada por

$$Q = 2\pi r_0 \int_0^H u_1(r_0, z) dz. \quad (7.6)$$

As equações (7.5) e (7.6) nos dão o ajuste na condição de fronteira da pressão em cada passo de tempo, num meio poroso com propriedades que variam nas duas direções. O cálculo da pressão em função da vazão prescrita para o caso geral não é imediato, mas a seguir veremos como ele se simplifica bastante para um meio com camadas sem intercomunicação e logo depois para camadas com intercomunicação.

7.2.1 Camadas Sem Intercomunicação

Vamos primeiro utilizar o cálculo acima para um meio poroso com camadas sem intercomunicação. Em cada camada j , a componente horizontal da equação (7.3) será

$$u_1^j(r) = -\frac{K^j}{K_1} k(\sigma^j) \frac{\partial p^j}{\partial r}. \quad (7.7)$$

Se a vazão em cada camada é dada por q^j , então

$$u_1^j(r) = \frac{q^j}{2\pi r h^j}, \quad (7.8)$$

onde h^j é a altura da camada j e a componente vertical u_3 será nula. Substituindo (7.8) em (7.7), temos

$$\frac{q^j}{2\pi r h^j} = -\frac{K^j}{\bar{K}_1} k(\sigma^j) \frac{\partial p^j}{\partial r}.$$

Integrando em r ,

$$\Delta p^j = \frac{q^j}{2\pi h^j} \frac{\bar{K}_1}{K^j} \int_{r_i}^{r_f} \frac{1}{r k(\sigma^j)} dr,$$

com $\Delta p^j = p^j(r_i) - p^j(r_f)$. Mas $\Delta p^j = \Delta p$. Então essa equação nos diz que a vazão em cada camada é dada por

$$q^j = 2\pi h^j \frac{K^j}{\bar{K}_1} \left(\int_{r_i}^{r_f} \frac{dr}{r k(\sigma^j)} \right)^{-1} \Delta p.$$

Como a vazão total é $Q = \sum_{j=1}^n q^j$, podemos somar a equação acima em todas as camadas para obter

$$Q = \frac{2\pi}{\bar{K}_1} \sum_{j=1}^n h^j K^j \left(\int_{r_i}^{r_f} \frac{dr}{r k(\sigma^j)} \right)^{-1} \Delta p.$$

Concluimos que para manter a vazão total constante, precisamos impor o gradiente da pressão na forma final

$$\Delta p = \frac{Q \bar{K}_1}{2\pi} \left[\sum_{j=1}^n h^j K^j \left(\int_{r_i}^{r_f} \frac{dr}{r k(\sigma^j)} \right)^{-1} \right]^{-1}. \quad (7.9)$$

Este é o ajuste na condição de fronteira da pressão em cada passo de tempo, num meio poroso com camadas sem intercomunicação.

Para um meio com n camadas intercomunicadas, o integrando da equação (7.5) continua sendo constante por partes na direção z , de modo que conseguimos novamente obter (7.9) para o ajuste na pressão.

7.2.2 Experimentos

Nos experimentos que seguem, consideramos os mesmos dados fixos da seção 7.1 e trocamos a condição de contorno na pressão para vazão total especificada. Assim, temos $\phi = 0.2$, a função de dano $\lambda = 1 - 2\sigma m^{-1}$ e a condição de contorno dada por $u_3 = 0$ em norte e sul e vazão constante $Q = 30 \text{ m}^3/\text{dia}$. A malha usada é de 100 por 100 elementos e o domínio computacional varia em r de $[0.1, 0.6] \text{ m}$ e

em z de $[0, 2.5] m$. O passo no tempo é $\Delta t = 1 dia$. A concentração de partículas injetadas é $c_0 = 10 ppm$ e $\beta = 250$.

Novamente, tomamos como exemplo um meio com 2 camadas, com permeabilidades absolutas $K_1 = 100 mD$ e $K_2 = 1600 mD$. Os gráficos (7.10), (7.11) e (7.12) mostram a evolução temporal da concentração de partículas retidas aos 5, 100 e 200 dias, respectivamente. Como vimos na seção 7.1, a deposição na camada mais permeável é maior que na camada menos permeável. Em outras palavras, a permeabilidade da camada mais permeável diminui mais rapidamente que a permeabilidade da outra camada.

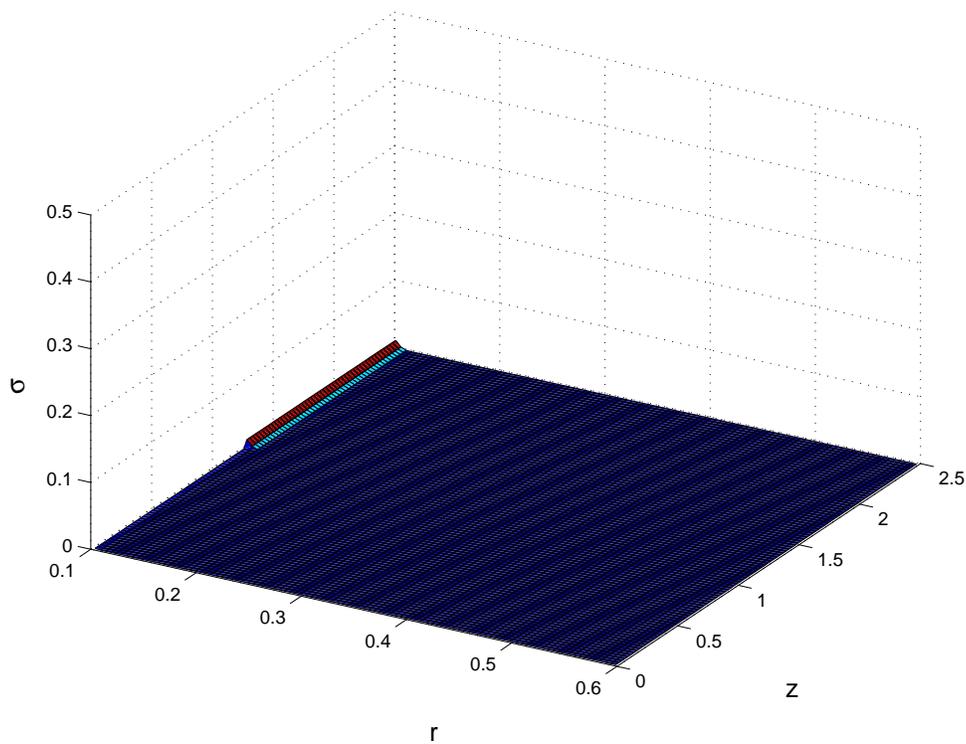


Figura 7.10: Concentração de partículas retidas aos 5 dias, para um meio com duas camadas com permeabilidades absolutas distintas $K_1 = 100mD$ para $0 \leq z \leq 1.25$ e $K_2 = 1600mD$ para $1.25 \leq z \leq 2.5$

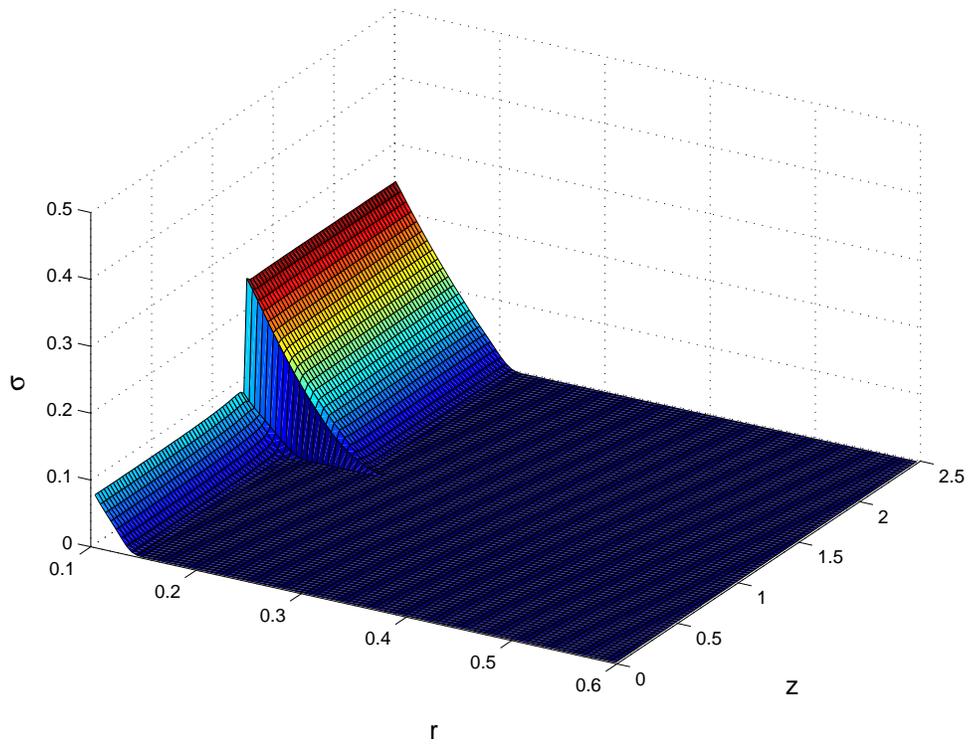


Figura 7.11: Concentração de partículas retidas aos 100 dias

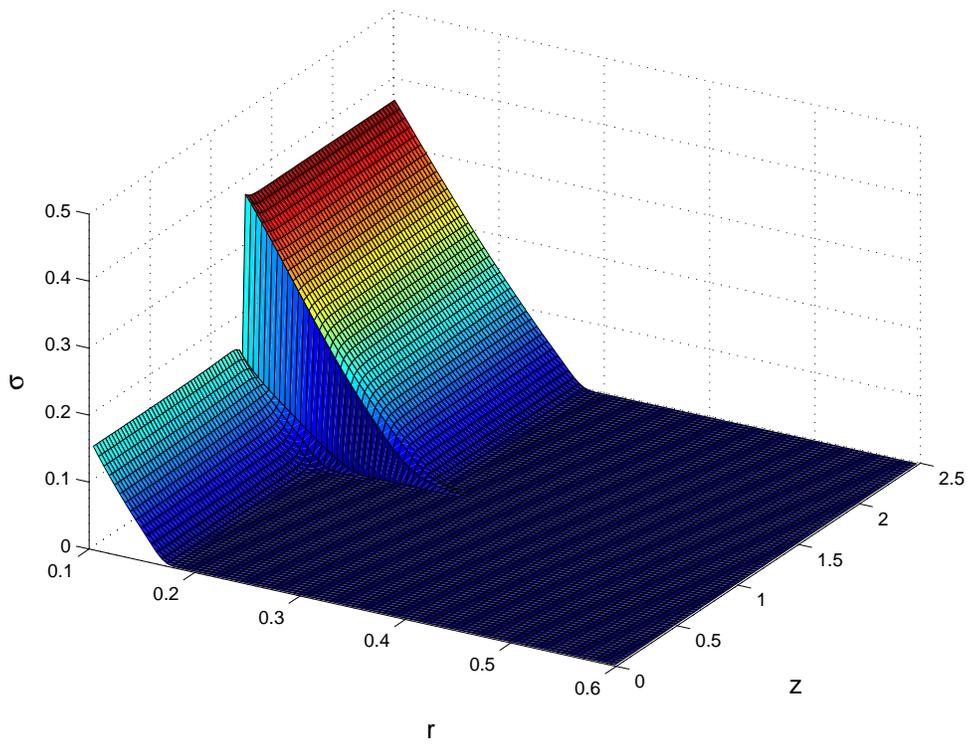


Figura 7.12: Concentração de partículas retidas aos 200 dias

Para sabermos como as partículas movem-se no meio poroso, as figuras (7.13), (7.14), (7.15) e (7.16) mostram o fluxo vertical aos 10, 100, 200 e 400 dias, respectivamente. Nota-se que, como no caso de pressão prescrita, existe um fluxo da camada menos permeável para a mais permeável e que, após um tempo, esse fluxo se inverte em parte da interface, como na seção (7.1). Para esse experimento, a velocidade vertical máxima é 21% da velocidade horizontal máxima, como mostraremos na tabela (7.4) mais adiante.

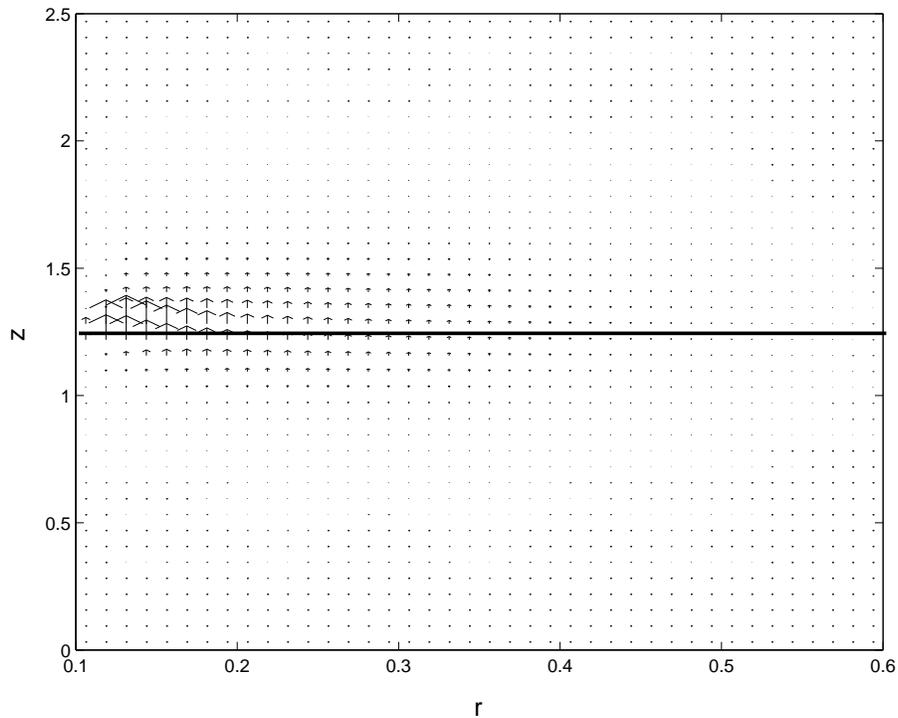


Figura 7.13: Fluxo entre duas camadas com permeabilidades distintas aos 10 dias. A linha cheia na figura mostra a interface entre as camadas mais permeável (de cima) e menos permeável (de baixo)

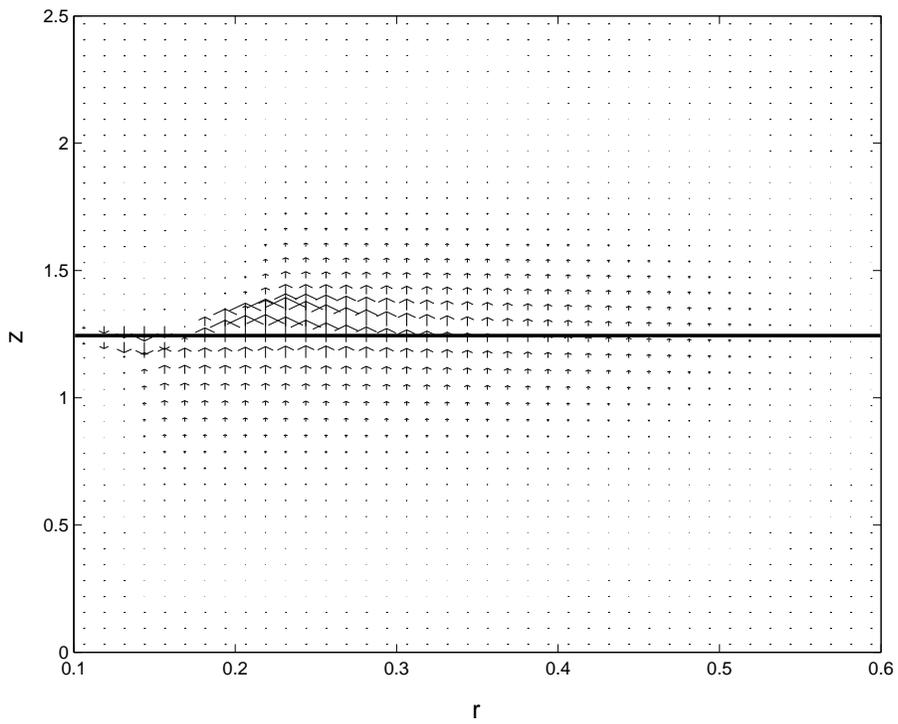


Figura 7.14: Fluxo entre duas camadas aos 100 dias

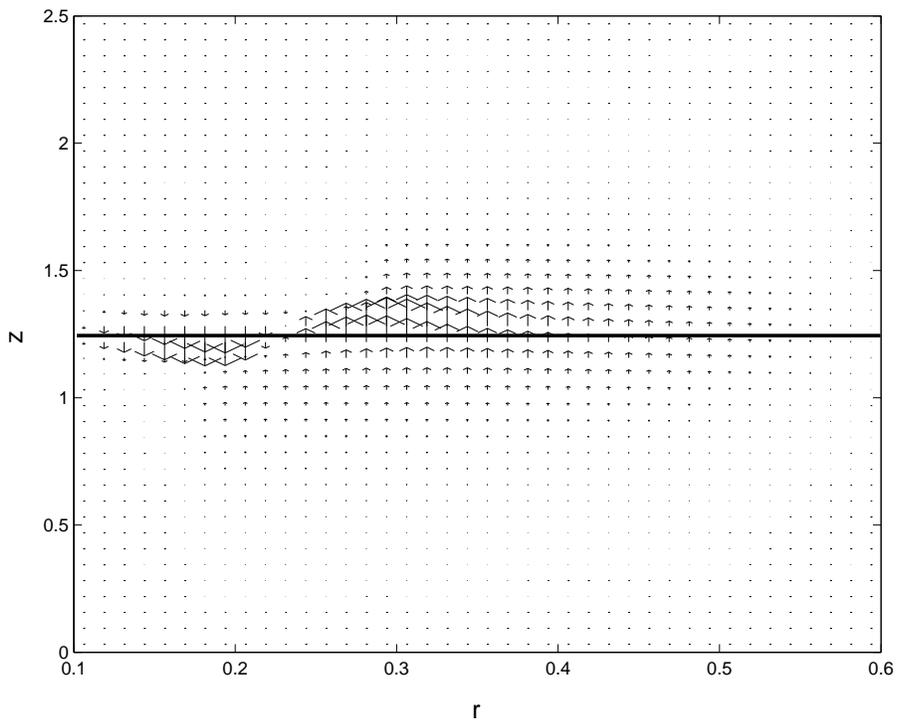


Figura 7.15: Fluxo entre duas camadas aos 200 dias

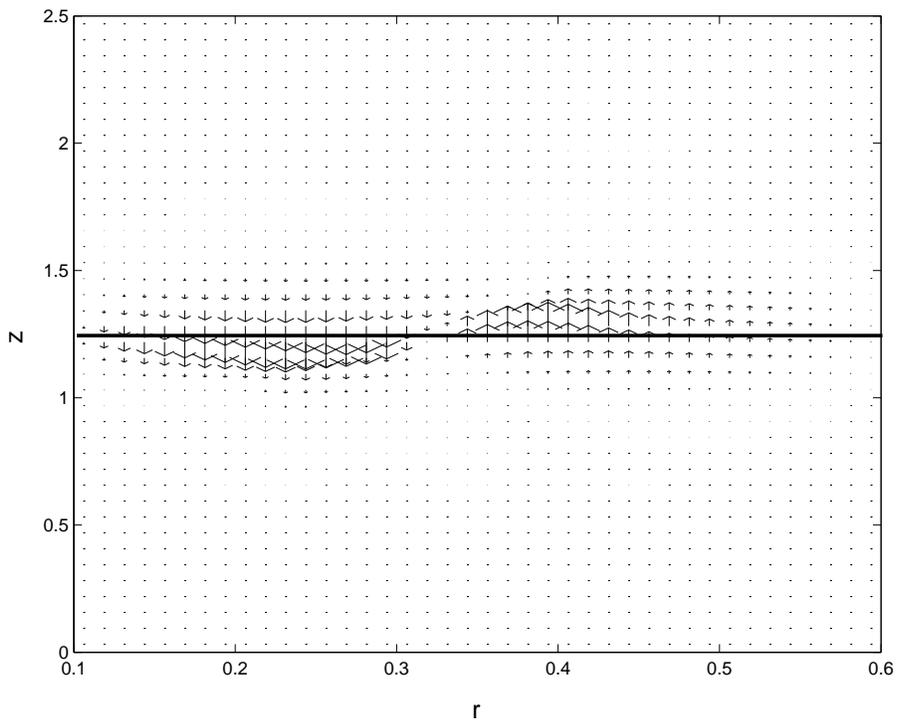


Figura 7.16: Fluxo entre duas camadas aos 400 dias

Para o estudo da dependência de parâmetros, analisamos os mesmos parâmetros da seção (7.1): razão entre permeabilidade absoluta das camadas K_1/K_2 e quantidade de camadas.

7.2.3 Vazão Recuperada

Estamos usando um mecanismo que atualiza a pressão a cada passo de tempo de modo a manter a vazão total constante. Então um gráfico natural a ser apresentado é a vazão recuperada pelos experimentos em função do tempo, para vermos se de fato ela se mantém constante e igual à vazão prescrita. A figura (7.17) mostra a vazão total numérica para um meio com 20 camadas e permeabilidades absolutas alternadas $K_1 = 100mD$ e $K_2 = 400mD$ em malhas com 100×100 elementos (linha cheia) e 160×160 elementos (linha pontilhada), onde a vazão imposta foi de $30m^3/dia$. Podemos ver que o mecanismo numérico que estamos utilizando apresenta uma pequena oscilação que desaparece depois de alguns dias, deixando a vazão como esperada.

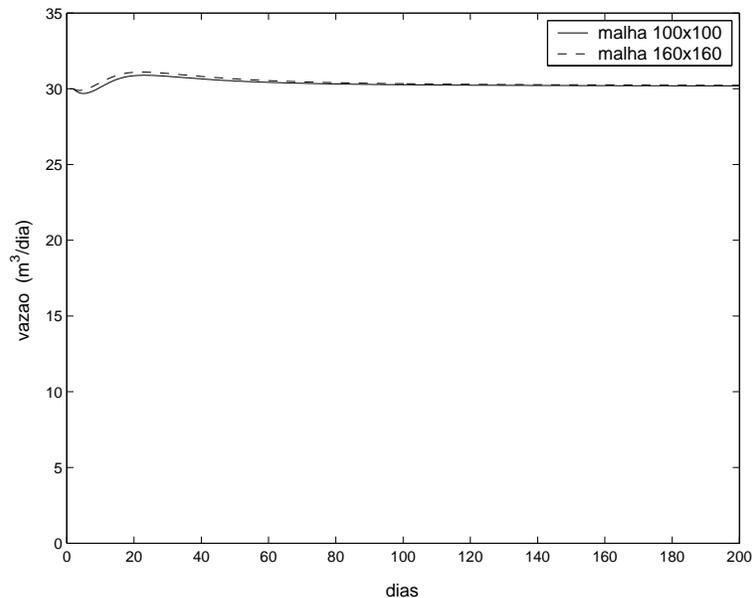


Figura 7.17: Vazão numérica para um meio com 20 camadas e permeabilidades absolutas alternadas $K_1 = 100mD$ e $K_2 = 400mD$ em malhas com 100×100 elementos e 160×160 elementos, onde a vazão imposta foi de $30m^3/dia$

7.2.4 Razão entre Permeabilidades Absolutas Intercamadas

Para avaliar a influência do parâmetro K_1/K_2 na permeabilidade, consideramos os mesmos dados dos experimentos anteriores e avaliamos um meio com 20 camadas e permeabilidades absolutas alternadas. Primeiro, mantivemos fixas as camadas com permeabilidades absolutas mais baixas e variamos as permeabilidades mais altas. A figura (7.18) mostra a pressão na entrada do reservatório para esse experimento, durante 200 dias, para as permeabilidades (1) $K_1 = 100 \text{ mD}$, $K_2 = 200 \text{ mD}$ (linha cheia); (2) $K_1 = 100 \text{ mD}$, $K_2 = 400 \text{ mD}$ (linha tracejada); (3) $K_1 = 100 \text{ mD}$, $K_2 = 800 \text{ mD}$ (linha ponto-traço) e (4) $K_1 = 100 \text{ mD}$, $K_2 = 1600 \text{ mD}$ (linha pontilhada). No segundo experimento, figura (7.19), mantivemos fixas as camadas com permeabilidades absolutas mais altas e variamos as permeabilidades mais baixas, (1) $K_1 = 800 \text{ mD}$, $K_2 = 1600 \text{ mD}$ (linha cheia); (2) $K_1 = 400 \text{ mD}$, $K_2 = 1600 \text{ mD}$ (linha tracejada); (3) $K_1 = 200 \text{ mD}$, $K_2 = 1600 \text{ mD}$ (linha ponto-traço) e (4) $K_1 = 100 \text{ mD}$, $K_2 = 1600 \text{ mD}$ (linha pontilhada). Nesses dois experimentos vemos que quanto mais altas forem as permeabilidades, menor a variação na pressão total no reservatório.

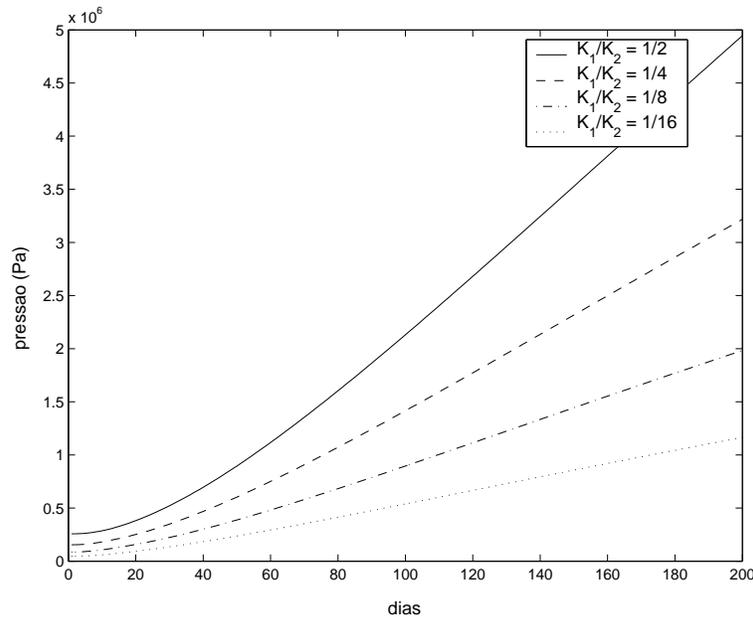


Figura 7.18: Comparação entre a razão de permeabilidade e a pressão para um meio com 20 camadas durante 200 dias, com $K_1 = 100 \text{ mD}$ fixo

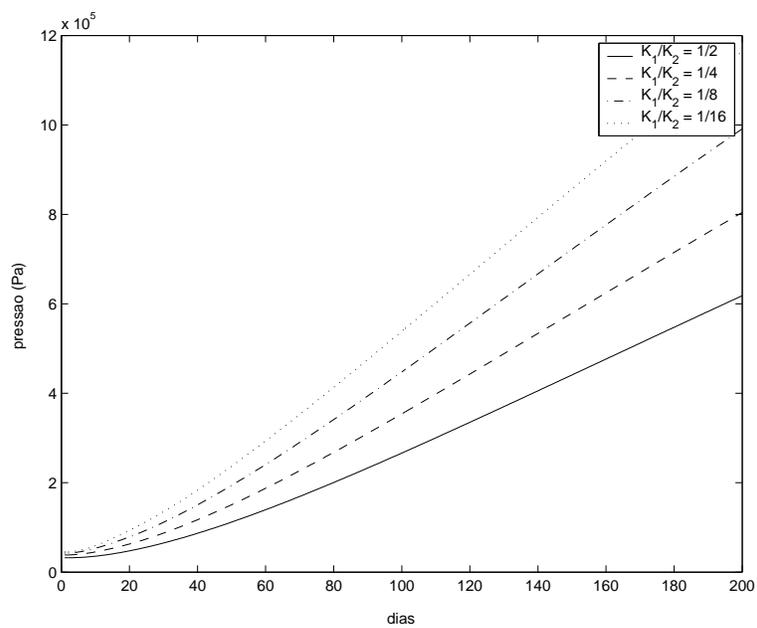


Figura 7.19: Comparação entre a razão de permeabilidade e a pressão para um meio com 20 camadas durante 200 dias, com $K_2 = 1600mD$ fixo

A tabela (7.3) mostra o valor máximo atingido pelas velocidades horizontal e vertical, em todos os tempos.

K_1/K_2	u_1 máxima (m/dia)	u_3 máxima (m/dia)	% de u_1
1/2	24.8529	3.7784	17.02
1/4	29.8234	6.1370	20.58
1/8	33.1379	6.6954	20.20
1/16	35.0864	5.9710	17.02

Tabela 7.3: Valores máximos atingidos pelas velocidades horizontal e vertical

7.2.5 Número de Camadas

Vamos novamente estudar a influência do número de camadas, mas agora no caso de vazão prescrita, com uma vazão imposta igual a $30m^3/dia$. A figura (7.20) mostra a concentração de partículas retidas aos 200 dias para um meio com 10 camadas e permeabilidades absolutas alternadas $K_1 = 100mD$, $K_2 = 1600mD$, onde usamos os mesmos dados dos experimentos anteriores.

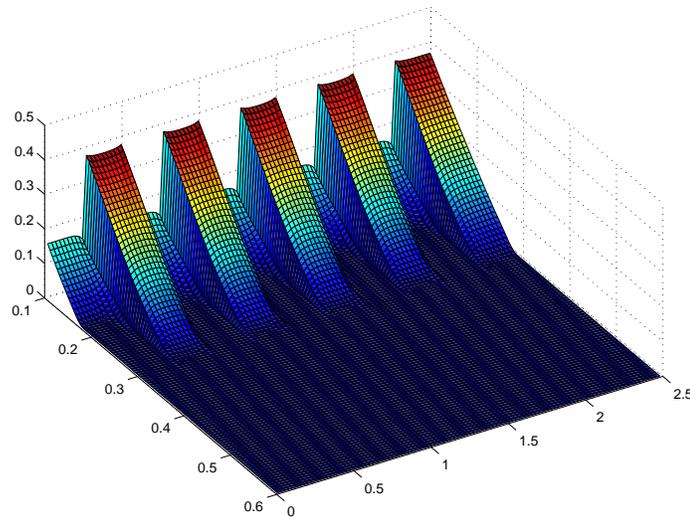


Figura 7.20: Concentração de partículas suspensas ap ós 200 dias, para um meio com 10 camadas intercomunicadas e permeabilidades absolutas alternadas $K_1 = 100mD$, $K_2 = 1600mD$, aos 200 dias

Para sabermos se de fato a comunicação entre camadas é um fenômeno relevante, foram mantidos fixos os dados dos experimentos anteriores e variamos

apenas o número de camadas. Consideramos meios com 2, 10 e 20 camadas com permeabilidades absolutas $K_1 = 100mD$ e $K_2 = 1600mD$ alternadas. A figura (7.21) mostra a pressão na entrada do reservatório para esses três experimentos, durante 200 dias. Esperávamos que quanto maior fosse o número de camadas maior seria a migração de partículas e, conseqüentemente, maior a pressão total, mas para nossa surpresa a variação na pressão foi muito pequena. Além disso, com o aumento do número de camadas, isto é, com o aumento da intercomunicação, as partículas retidas têm chance maior de bloquear a passagem de fluido, pois a queda de pressão cresce.

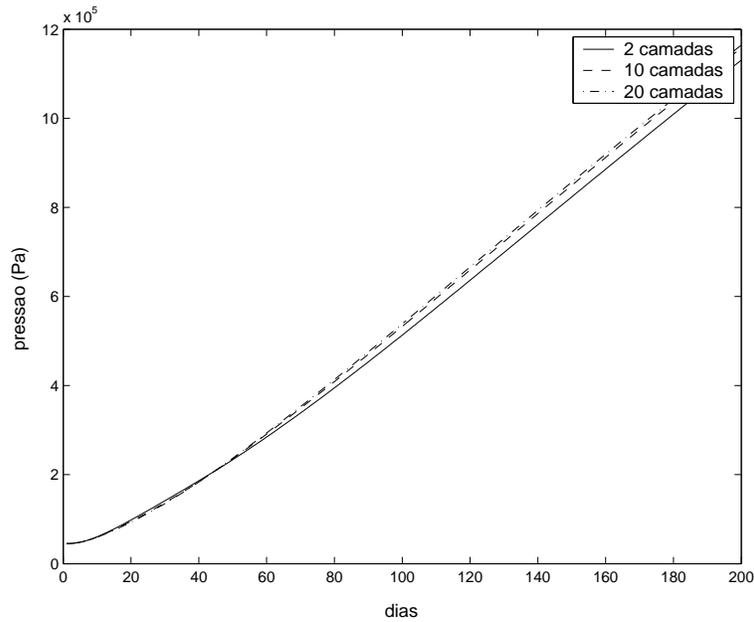


Figura 7.21: Comparação entre o número de camadas e a pressão na entrada do reservatório para um meio com permeabilidades $K_1 = 100 mD$ e $K_2 = 1600 mD$, durante 200 dias

O perfil de velocidade para as camadas 5, 6 e 7 desse meio com 10 camadas está mostrado nas figuras (7.22)e (7.23), aos 10 e 200 dias respectivamente. Não mostramos o perfil completo das 10 camadas por motivos didáticos, uma vez que ele se repete para as outras camadas. Observamos que ele segue o mesmo padrão que em duas camadas, com um fluxo na interface da camada menos permeável para a mais permeável, invertendo-se em parte do domínio depois de algum tempo.

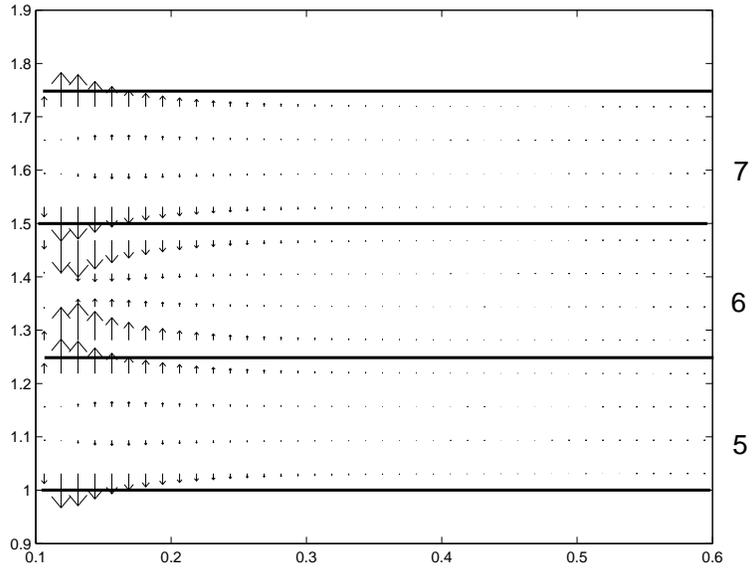


Figura 7.22: Velocidade vertical em um meio permeável com 10 camadas e permeabilidades absolutas alternadas $K_1 = 100mD$, $K_2 = 1600mD$. Zoom nas camadas 5 ($100mD$), 6 ($1600mD$) e 7 ($100mD$), aos 10 dias

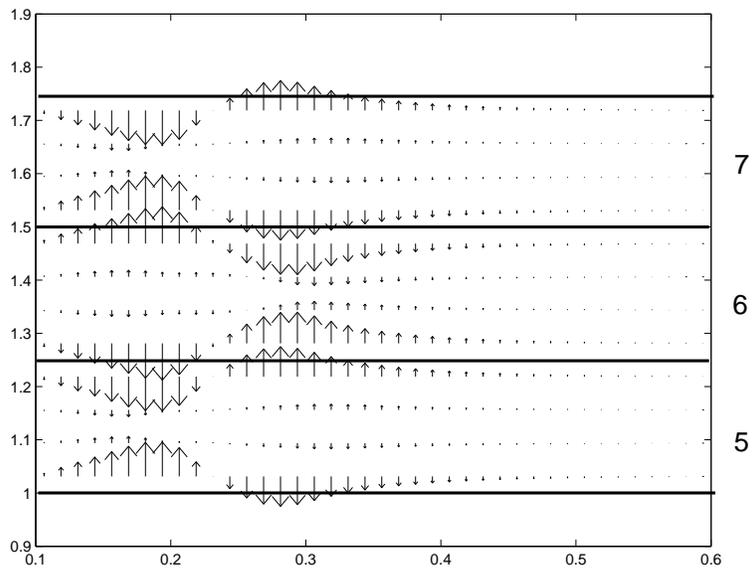


Figura 7.23: Velocidade vertical em um meio permeável com 10 camadas e permeabilidades absolutas alternadas $K_1 = 100mD$, $K_2 = 1600mD$. Zoom nas camadas 5 ($100mD$), 6 ($1600mD$) e 7 ($100mD$), aos 200 dias

Uma análise da velocidade vertical indica novamente que o número de camadas tem influência no fluxo de partículas. Quanto maior o número de camadas, menor a velocidade entre camadas. Essa afirmação é comprovada com base no valor máximo atingido pela velocidade vertical, em todos os tempos, como mostra a tabela (7.4). Observamos que neste caso de maior aplicação prática (vazão prescrita) a velocidade vertical (no caso de 2 camadas) chega a 21% da velocidade horizontal.

no. camadas	u_1 máxima (m/dia)	u_3 máxima (m/dia)	% de u_1
2 camadas	35.0864	7.4618	21.27
10 camadas	35.0864	6.9776	19.89
20 camadas	35.0864	5.9710	17.02

Tabela 7.4: Valores máximos atingidos pelas velocidades horizontal e vertical

Para sabermos a influência real da comunicação entre camadas, as figuras (7.24) e (7.25) comparam meios porosos com camadas intercomunicadas com meios porosos com camadas sem intercomunicação. Novamente para nossa surpresa, a variação na pressão para os dois meios foi muito pequena, menor que 3%.

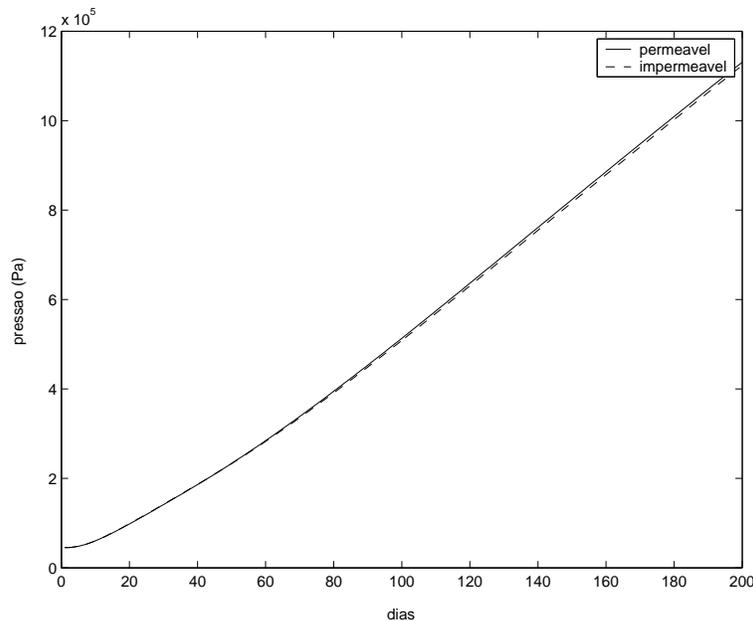


Figura 7.24: Comparação entre meios com 2 camadas intercomunicadas (linha cheia) e sem intercomunicação (linha pontilhada)

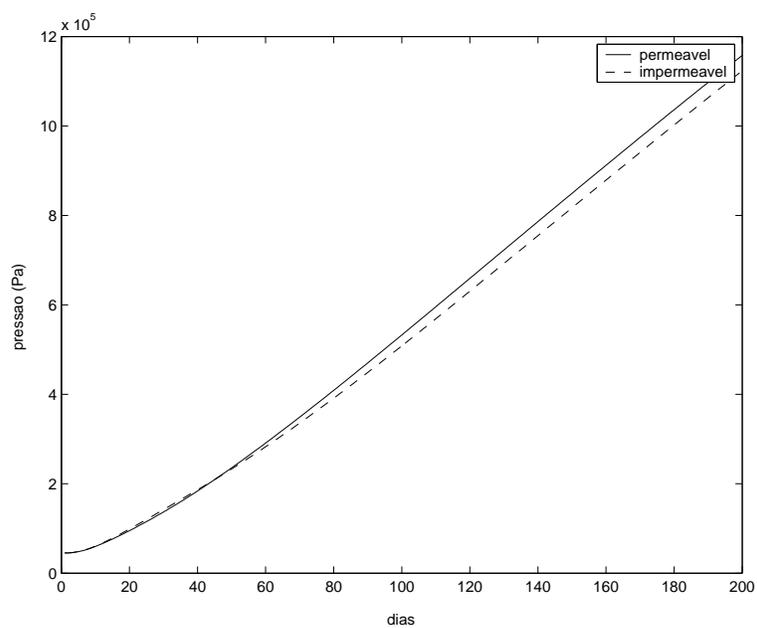


Figura 7.25: Comparação entre meios com 10 camadas intercomunicadas (linha cheia) e sem intercomunicação (linha pontilhada)

7.3 Função de Filtração variando por camadas

Vamos investigar um novo cenário. Consideramos os dados dos experimentos anteriores em um meio homogêneo com permeabilidade absoluta $K_1 = K_2 = 100mD$. Consideramos 10 camadas nesse meio e função de filtração ($\lambda(\sigma)$) variável de uma camada para a outra. Na figura (7.26), mostramos a pressão para um meio poroso com comunicação (linha tracejada) e sem comunicação (linha cheia) com funções de filtração alternadas $\lambda = 1 - 2\sigma m^{-1}$ e $\lambda = 10(1 - 2\sigma) m^{-1}$. A figura (7.27), mostra o mesmo experimento, mas com um contraste maior entre as funções de filtração, $\lambda = 1 - 2\sigma m^{-1}$ e $\lambda = 20(1 - 2\sigma) m^{-1}$.

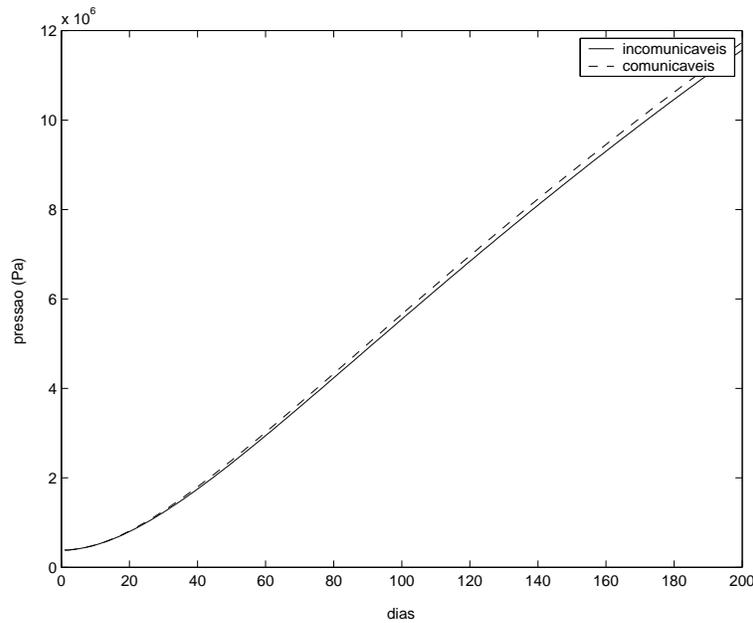


Figura 7.26: Pressão total para um meio com camadas sem intercomunicação (linha cheia) e intercomunicadas (linha pontilhada) com coeficiente de filtração alternados $\lambda = 1 - 2\sigma m^{-1}$ e $\lambda = 10(1 - 2\sigma) m^{-1}$

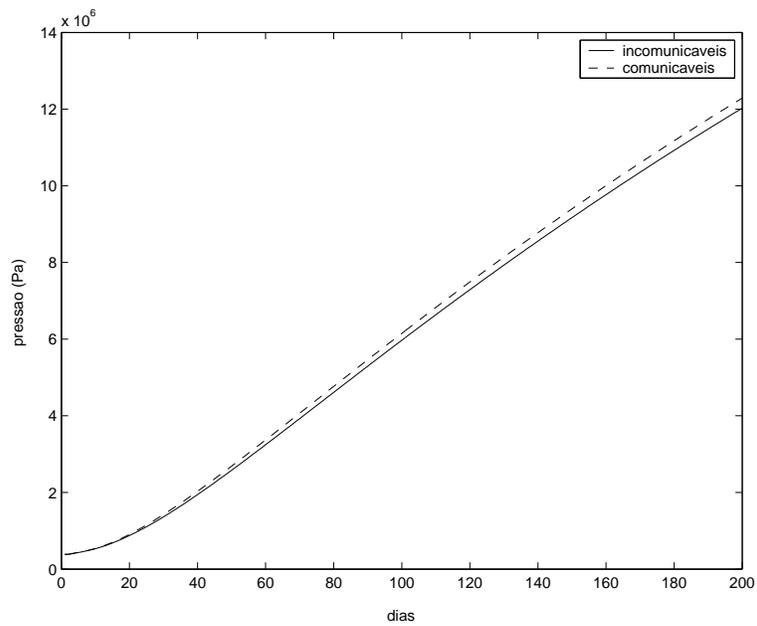


Figura 7.27: Pressão total para um meio com camadas sem intercomunicação (linha cheia) e intercomunicadas (linha pontilhada) com coeficiente de filtração alternados $\lambda = 1 - 2\sigma m^{-1}$ e $\lambda = 20(1 - 2\sigma) m^{-1}$

Para o primeiro experimento, a velocidade vertical máxima é 34% da velocidade horizontal máxima em todos os tempos e para o segundo ela vale 40% da velocidade horizontal máxima, números bastante altos em comparação aos que obtivemos nas seções anteriores (no máximo 21%). Tivemos uma surpresa ao constatar que apesar desses valores altos, a comunicação entre camadas não era significativa, como acabamos de ver nos gráficos (7.26) e (7.27).

Uma possível resposta para a irrelevância da comunicação entre camadas está na figura (7.28). Essa figura mostra a concentração de partículas retidas para o primeiro experimento, com pressão mostrada na figura (7.26). Vemos que de fato não há um espalhamento de partículas para outras camadas; elas se concentram na mesma camada, formando uma espécie de orelhas. Esquemáticamente, a figura (7.29) mostra o que a nossa intuição previa (linha pontilhada à esquerda) e o que está de fato acontecendo (linha pontilhada à direita). Este comportamento precisa ser investigado com mais cuidado.

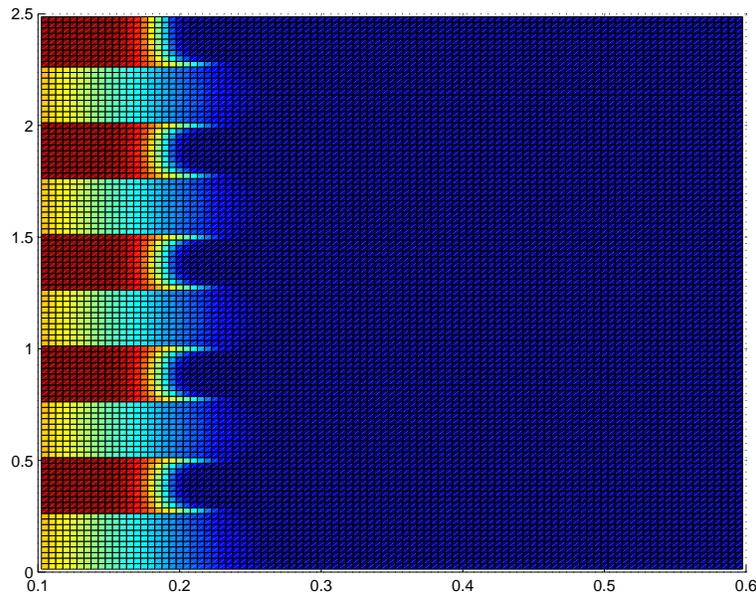


Figura 7.28: Deposição em um meio com 10 camadas intercomunicadas com funções de filtração diferentes, 20 vezes

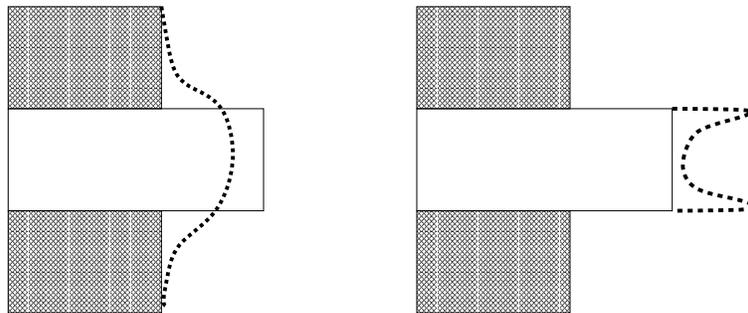


Figura 7.29: Esquema da retenção de partículas. À esquerda, a linha pontilhada indica o que esperávamos que acontecesse e à direita a linha pontilhada indica o que acontece na simulação

Capítulo 8

Conclusão

Consideramos um modelo matemático bidimensional para a evolução da concentração de partículas em um meio poroso heterogêneo, composto por camadas verticais. Desenvolvemos uma ferramenta computacional para estudar esse problema em uma geometria cilíndrica axissimétrica, utilizando o método das características para o transporte e retenção de partículas acoplado ao método de elementos finitos mistos (Raviart-Thomas de grau mais baixo) para a velocidade e pressão. Nosso modelo numérico foi capaz de capturar padrões distintos de escoamento de partículas na presença ou não do mecanismo de retenção de partículas. Vimos que na ausência desse mecanismo não existe velocidade vertical, mas quando ele é considerado a velocidade vertical é não trivial. Esperávamos que por causa disso as partículas mudariam a sua trajetória, migrando para camadas onde o escoamento fosse mais fácil, ou seja, deixariam a camada menos permeável e passariam a escoar na camada mais permeável. Para nossa surpresa, nossa intuição estava errada e, apesar de existir fluxo entre camadas, ele era insignificante. Uma possível explicação para isto está no fato de as partículas acumularem-se na própria camada, um pouco mais para frente, formando uma espécie de orelha, mas este comportamento ainda precisa de uma maior investigação.

No futuro, pretendemos inverter o fluxo no nosso modelo de modo a permitir o estudo de perda de injetividade na vizinhança de poços produtores em aquíferos. Nessa linha, podemos trabalhar em uma geometria um pouco diferente e comparar os dados numéricos obtidos com dados experimentais. É de interesse estudar a dependência da velocidade na lei de retenção cinética.

Em uma outra linha de desenvolvimento, podemos generalizar a geometria do reservatório e considerá-la tridimensional (não mais axissimétrica), com poços verticais e meio poroso inclinado, o que na prática acontece devido a movimentos tectônicos. Caso necessário, podemos implementar modelos numéricos mais precisos.

Apêndice A

Notação

Quantidade física	Símbolo	Unidade	
concentração de partículas suspensas	c		equação (3.1)
concentração de partículas retidas	σ		equação (3.1)
permeabilidades absolutas	K	(mD)	equação (3.5)
permeabilidades absolutas	K_1, K_2	(mD)	seção (7.1)
permeabilidade absoluta média	\bar{K}	(mD)	equação (4.47)
função de dano de formação	$k(\sigma)$		equação (3.5)
raio típico em volta do poço	L	(m)	equação (3.14)
pressão	p	(Pa)	equação (3.4)
vazão	$q(t)$	(m^3/s)	equação (7.8)
variáveis espaciais	r, z	(m)	equação (4.17)
raio do poço de injeção	r_0	(m)	equação (4.22)
tempo	t	(dia)	equação (3.1)
escala típica de tempo	T	(dia)	equação (3.14)
velocidade unidimensional	u	(m/s)	equação (3.4)
vetor velocidade	\mathbf{u}	(m/s)	equação (3.1)
variável espacial	x	(m)	equação (3.4)
coeficiente de dano	β		equação (3.19)
queda de pressão no domínio	Δp	(Pa)	equação (7.9)
função de filtração	$\lambda(\sigma)$	(m^{-1})	equação (3.8)
viscosidade da água	μ	(cp)	equação (3.4)
porosidade	ϕ		equação (3.1)

O leitor deve tomar cuidado com a notação pois são utilizadas as mesmas letras para variáveis adimensionalizadas. No entanto, isso não é motivo de pânico uma vez que o contexto deixa claro que tipo de variável (dimensional ou não) está sendo utilizada.

Apêndice B

Matrizes de Elementos Finitos

As entradas da matriz A^r vêm do cálculo das integrais:

$$\begin{aligned}\int_E \alpha^{-1} \xi_1^r \xi_1^r r \, dr dz &= \int_E \alpha^{-1} \left(1 - \frac{r - r_i}{\Delta r}\right)^2 r \, dr dz \\ \int_E \alpha^{-1} \xi_1^r \xi_2^r r \, dr dz &= \int_E \alpha^{-1} \left(1 - \frac{r - r_i}{\Delta r}\right) \left(\frac{r - r_i}{\Delta r}\right) r \, dr dz \\ \int_E \alpha^{-1} \xi_2^r \xi_2^r r \, dr dz &= \int_E \alpha^{-1} \left(\frac{r - r_i}{\Delta r}\right)^2 r \, dr dz.\end{aligned}$$

Vamos calcular cada uma delas:

$$\begin{aligned}1. \int_E \alpha^{-1} \left(1 - \frac{r - r_i}{\Delta r}\right)^2 r \, dr dz &= \\ &= \alpha^{-1} \Delta z \int_{r_i}^{r_{i+1}} \left[1 - 2\frac{r - r_i}{\Delta r} + \left(\frac{r - r_i}{\Delta r}\right)^2\right] r \, dr \\ &= \alpha^{-1} \Delta z \int_{r_i}^{r_{i+1}} r - \frac{2r^2}{\Delta r} + \frac{2r_i r}{\Delta r} + \frac{r^3}{\Delta r^2} - \frac{2r_i r^2}{\Delta r^2} + \frac{r_i^2 r}{\Delta r^2} \, dr \\ &= \alpha^{-1} \Delta z \int_{r_i}^{r_{i+1}} r \left(1 + \frac{2r_i}{\Delta r} + \frac{r_i^2}{\Delta r^2}\right) + r^2 \left(-\frac{2}{\Delta r} - \frac{2r_i}{\Delta r^2}\right) + r^3 \frac{1}{\Delta r^2} \, dr \\ &= \alpha^{-1} \Delta z \int_{r_i}^{r_{i+1}} r \left(1 + \frac{r_i}{\Delta r}\right)^2 + r^2 \left(-\frac{2}{\Delta r}\right) \left(1 + \frac{r_i}{\Delta r}\right) + r^3 \frac{1}{\Delta r^2} \, dr\end{aligned}$$

Mas

$$1 + \frac{r_i}{\Delta r} = \frac{1}{\Delta r} (\Delta r + r_i) = \frac{r_{i+1}}{\Delta r}. \quad (\text{B.1})$$

Daí:

$$\begin{aligned}
&= \alpha^{-1} \Delta z \int_{r_i}^{r_{i+1}} r \left(\frac{r_{i+1}^2}{\Delta r^2} \right) + r^2 \left(-\frac{2}{\Delta r} \right) \left(\frac{r_{i+1}}{\Delta r} \right) + r^3 \frac{1}{\Delta r^2} dr \\
&= \alpha^{-1} \frac{\Delta z}{\Delta r^2} \int_{r_i}^{r_{i+1}} r(r_{i+1}^2) + r^2(-2r_{i+1}) + r^3 dr \\
&= \alpha^{-1} \frac{\Delta z}{\Delta r^2} \left[r_{i+1}^2 \left(\frac{r_{i+1}^2 - r_i^2}{2} \right) - 2r_{i+1} \left(\frac{r_{i+1}^3 - r_i^3}{3} \right) + \left(\frac{r_{i+1}^4 - r_i^4}{4} \right) \right]
\end{aligned}$$

Usando as fatorações

$$r_{i+1}^2 - r_i^2 = (r_{i+1} - r_i)(r_{i+1} + r_i) = \Delta r(r_{i+1} + r_i) \quad (\text{B.2})$$

$$r_{i+1}^3 - r_i^3 = (r_{i+1} - r_i)(r_{i+1}^2 + r_{i+1}r_i + r_i^2) = \Delta r(r_{i+1}^2 + r_{i+1}r_i + r_i^2) \quad (\text{B.3})$$

$$r_{i+1}^4 - r_i^4 = (r_{i+1}^2 + r_i^2)(r_{i+1} - r_i)(r_{i+1} + r_i) = \Delta r(r_{i+1}^2 + r_i^2)(r_{i+1} + r_i) \quad (\text{B.4})$$

temos:

$$\begin{aligned}
&= \alpha^{-1} \frac{\Delta z}{\Delta r} \left[\frac{r_{i+1}^2}{2}(r_{i+1} + r_i) - \frac{2r_{i+1}}{3}(r_{i+1}^2 + r_{i+1}r_i + r_i^2) + \frac{1}{4}(r_{i+1}^2 + r_i^2)(r_{i+1} + r_i) \right] \\
&= \alpha^{-1} \frac{\Delta z}{\Delta r} \left\{ (r_{i+1} + r_i) \left[\frac{3r_{i+1}^2}{4} - \frac{2r_{i+1}r_i}{3} + \frac{r_i^2}{4} \right] - \frac{2r_{i+1}^3}{3} \right\} \\
&= \alpha^{-1} \frac{\Delta z}{\Delta r} \frac{1}{12} \{ (r_{i+1} + r_i) [9r_{i+1}^2 - 8r_{i+1}r_i + 3r_i^2] - 8r_{i+1}^3 \} \\
&= \alpha^{-1} \frac{\Delta z}{\Delta r} \frac{1}{12} \{ r_{i+1}^3 + r_i r_{i+1}^2 - 5r_i^2 r_{i+1} + 3r_i^3 \} \\
&= \alpha^{-1} \frac{\Delta z}{\Delta r} \frac{1}{12} \{ (r_{i+1} - r_i)^2 (r_{i+1} + 3r_i) \} \\
&= \frac{1}{12} \alpha^{-1} \Delta z \Delta r (r_{i+1} + 3r_i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2. \int_E \alpha^{-1} \left(1 - \frac{r - r_i}{\Delta r} \right) \left(\frac{r - r_i}{\Delta r} \right) r dr dz &= \\
&= \alpha^{-1} \Delta z \int_{r_i}^{r_{i+1}} \frac{r^2}{\Delta r} - \frac{r_i r}{\Delta r} - \frac{r^3}{\Delta r^2} + \frac{2r_i r^2}{\Delta r^2} - \frac{r_i^2 r}{\Delta r^2} dr \\
&= \alpha^{-1} \Delta z \int_{r_i}^{r_{i+1}} r \frac{r_i}{\Delta r} \left(-1 - \frac{r_i}{\Delta r} \right) + r^2 \frac{1}{\Delta r} \left(1 + 2\frac{r_i}{\Delta r} \right) - r^3 \frac{1}{\Delta r^2} dr
\end{aligned}$$

Usando (B.1) e

$$1 + \frac{2r_i}{\Delta r} = \frac{1}{\Delta r} (\Delta r + 2r_i) = \frac{1}{\Delta r} (r_i + r_{i+1}) \quad (\text{B.5})$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha^{-1} \frac{\Delta z}{\Delta r^2} \int_{r_i}^{r_{i+1}} r(-r_i r_{i+1}) + r^2(r_i + r_{i+1}) - r^3 \, dr \\
&= \alpha^{-1} \frac{\Delta z}{\Delta r^2} \int_{r_i}^{r_{i+1}} (-r_i r_{i+1}) \left(\frac{r_{i+1}^2 - r_i^2}{2} \right) + (r_i + r_{i+1}) \left(\frac{r_{i+1}^3 - r_i^3}{3} \right) - \left(\frac{r_{i+1}^4 - r_i^4}{4} \right) \, dr
\end{aligned}$$

Usando (B.2), (B.3) e (B.4),

$$\begin{aligned}
&= \alpha^{-1} \frac{\Delta z}{\Delta r} \left[-\frac{r_i r_{i+1}}{2} (r_{i+1} + r_i) + \frac{r_i + r_{i+1}}{3} (r_{i+1}^2 + r_{i+1} r_i + r_i^2) - \frac{1}{4} (r_{i+1}^2 + r_i^2) (r_{i+1} + r_i) \right] \\
&= \alpha^{-1} \frac{\Delta z}{\Delta r} \left[(r_{i+1} + r_i) \frac{1}{12} (r_{i+1}^2 - 2r_i r_{i+1} + r_i^2) \right] \\
&= \alpha^{-1} \frac{\Delta z}{\Delta r} \frac{1}{12} (r_{i+1} + r_i) (r_{i+1} - r_i)^2 \\
&= \frac{1}{12} \alpha^{-1} \Delta z \Delta r (r_{i+1} + r_i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3. \int_E \alpha^{-1} \left(\frac{r - r_i}{\Delta r} \right)^2 r \, dr dz &= \\
&= \alpha^{-1} \Delta z \int_{r_i}^{r_{i+1}} \frac{r^3}{\Delta r^2} - \frac{2r_i r^2}{\Delta r^2} + \frac{r_i^2 r}{\Delta r^2} \, dr \\
&= \alpha^{-1} \frac{\Delta z}{\Delta r^2} \int_{r_i}^{r_{i+1}} r^3 - 2r_i r^2 + r_i^2 r \, dr \\
&= \alpha^{-1} \frac{\Delta z}{\Delta r^2} \left[\frac{r_{i+1}^4 - r_i^4}{4} - 2r_i \frac{r_{i+1}^3 - r_i^3}{3} + r_i^2 \frac{r_{i+1}^2 - r_i^2}{2} \right]
\end{aligned}$$

Usando (B.2), (B.3) e (B.4),

$$\begin{aligned}
&= \alpha^{-1} \frac{\Delta z}{\Delta r^2} \frac{1}{12} [3(r_{i+1}^2 + r_i^2)(r_{i+1} + r_i) - 8r_i(r_{i+1}^2 + r_{i+1}r_i + r_i^2) + 6r_i^2(r_{i+1} + r_i)] \\
&= \alpha^{-1} \frac{\Delta z}{\Delta r^2} \frac{1}{12} [(r_{i+1} + r_i)(3r_{i+1}^2 + r_i^2) - 8r_i r_{i+1}^2] \\
&= \alpha^{-1} \frac{\Delta z}{\Delta r^2} \frac{1}{12} [3r_{i+1}^3 + r_{i+1}r_i^2 - 5r_i r_{i+1}^2 + r_i^3] \\
&= \alpha^{-1} \frac{\Delta z}{\Delta r} \frac{1}{12} (3r_{i+1} + r_i) (r_{i+1} - r_i)^2 \\
&= \frac{1}{12} \alpha^{-1} \Delta z \Delta r (3r_{i+1} + r_i)
\end{aligned}$$

Assim, a matriz elementar de A^r é:

$$A^r(E) = \frac{1}{12} \alpha^{-1} \Delta z \Delta r \begin{bmatrix} r_{i+1} + 3r_i & r_{i+1} + r_i \\ r_{i+1} + r_i & 3r_{i+1} + r_i \end{bmatrix}.$$

Também temos três integrais para a matriz A^z :

$$\begin{aligned} \int_E \alpha^{-1} \xi_1^z \xi_1^z r \, dr dz &= \int_E \alpha^{-1} \left(1 - \frac{z - z_i}{\Delta z}\right)^2 r \, dr dz \\ \int_E \alpha^{-1} \xi_1^z \xi_2^z r \, dr dz &= \int_E \alpha^{-1} \left(1 - \frac{z - z_i}{\Delta z}\right) \left(\frac{z - z_i}{\Delta z}\right) r \, dr dz \\ \int_E \alpha^{-1} \xi_2^z \xi_2^z r \, dr dz &= \int_E \alpha^{-1} \left(\frac{z - z_i}{\Delta z}\right)^2 r \, dr dz. \end{aligned}$$

Calculando cada uma delas:

$$\begin{aligned} 1. \int_E \alpha^{-1} \left(1 - \frac{z - z_i}{\Delta z}\right)^2 r \, dr dz &= \\ &= \alpha^{-1} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \left(1 - \frac{z - z_i}{\Delta z}\right)^2 \int_{r_i}^{r_{i+1}} r \, dr dz = \\ &= \alpha^{-1} \frac{r_{i+1}^2 - r_i^2}{2} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \left(1 - \frac{z - z_i}{\Delta z}\right)^2 dz \end{aligned}$$

Usando (B.2) e integrando em z ,

$$\begin{aligned} &= \alpha^{-1} \frac{\Delta r (r_{i+1} + r_i)}{2} \frac{\Delta z}{-3} \left[\left(1 - \frac{z - z_i}{\Delta z}\right)^3 \right]_{z_i}^{z_{i+1}} \\ &= \frac{\alpha^{-1} \Delta z \Delta r (r_{i+1} + r_i)}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \int_E \alpha^{-1} \left(1 - \frac{z - z_i}{\Delta z}\right) \left(\frac{z - z_i}{\Delta z}\right) r \, dr dz &= \\ &= \alpha^{-1} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \left(1 - \frac{z - z_i}{\Delta z}\right) \left(\frac{z - z_i}{\Delta z}\right) \int_{r_i}^{r_{i+1}} r \, dr dz = \\ &= \alpha^{-1} \frac{r_{i+1}^2 - r_i^2}{2} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \left(1 - \frac{z - z_i}{\Delta z}\right) \left(\frac{z - z_i}{\Delta z}\right) dz = \end{aligned}$$

Usando (B.2)

$$\begin{aligned}
&= \alpha^{-1} \frac{\Delta r(r_{i+1} + r_i)}{2} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{1}{\Delta z^2} (\Delta z - z + z_i)(z - z_i) dz \\
&= \frac{\alpha^{-1} \Delta r(r_{i+1} + r_i)}{2\Delta z^2} \int_{z_i}^{z_{i+1}} z\Delta z - z_i\Delta z - z^2 + zz_i + zz_i - z_i^2 dz \\
&= \frac{\alpha^{-1} \Delta r(r_{i+1} + r_i)}{2\Delta z^2} \int_{z_i}^{z_{i+1}} -z_i(z_i + \Delta z) + z(2z_i + \Delta z) - z^2 dz
\end{aligned}$$

Usando (B.1), (B.2), (B.3), (B.4), (B.5) e integrando em z temos:

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha^{-1} \Delta r(r_{i+1} + r_i)}{2\Delta z^2} \left(-z_i z_{i+1} \Delta z + (z_i + z_{i+1}) \frac{\Delta z(z_i + z_{i+1})}{2} - \frac{\Delta z(z_{i+1}^2 + z_i z_{i+1} + z_i^2)}{3} \right) \\
&= \frac{\alpha^{-1} \Delta r(r_{i+1} + r_i)}{2\Delta z} \left(\frac{z_i^2}{6} + \frac{z_{i+1}^2}{6} - \frac{z_i z_{i+1}}{3} \right) \\
&= \frac{\alpha^{-1} \Delta r(r_{i+1} + r_i)}{2\Delta z} \frac{1}{6} (z_{i+1} - z_i)^2 \\
&= \frac{1}{12} \alpha^{-1} \Delta z \Delta r(r_{i+1} + r_i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3. \int_E \alpha^{-1} \left(\frac{z - z_i}{\Delta z} \right)^2 r dr dz &= \\
&= \alpha^{-1} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \left(\frac{z - z_i}{\Delta z} \right)^2 \int_{r_i}^{r_{i+1}} r dr dz = \\
&= \alpha^{-1} \frac{r_{i+1}^2 - r_i^2}{2} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \left(\frac{z - z_i}{\Delta z} \right)^2 dz
\end{aligned}$$

Usando (B.1) e integrando em z :

$$\begin{aligned}
&= \alpha^{-1} \frac{\Delta r(r_{i+1} + r_i)}{2} \frac{\Delta z}{3} \left[\left(\frac{z - z_i}{\Delta z} \right)^3 \right]_{z_i}^{z_{i+1}} \\
&= \frac{1}{6} \alpha^{-1} \Delta z \Delta r(r_{i+1} + r_i)
\end{aligned}$$

Assim, nossa matriz elementar $A^z(E)$ é

$$A^z(E) = \frac{\alpha^{-1} \Delta z \Delta r}{12} \begin{bmatrix} 2(r_{i+1} + r_i) & r_{i+1} + r_i \\ r_{i+1} + r_i & 2(r_{i+1} + r_i) \end{bmatrix}.$$

Faremos a mesma coisa para a matriz B . As entradas da matriz B^r vêm de

$$\begin{aligned} B^r(E) &= - \int_E \psi_i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \xi_j^r) d\Omega \\ &= - \int_E \psi_i \left(\xi_j^r + r \frac{\partial \xi_j^r}{\partial r} \right) dr dz \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} \xi_1^r &= 1 - \frac{r - r_i}{\Delta r} \Rightarrow \frac{\partial \xi_1^r}{\partial r} = -\frac{1}{\Delta r} \\ \xi_2^r &= \frac{r - r_i}{\Delta r} \Rightarrow \frac{\partial \xi_2^r}{\partial r} = \frac{1}{\Delta r} \\ \psi &= 1 \text{ em } E. \end{aligned}$$

Daí, temos duas integrais a serem calculadas em B^r :

$$\begin{aligned} B_1^r(E) &= - \int_E 1 \left(1 - \frac{r - r_i}{\Delta r} - r \frac{1}{\Delta r} \right) dr dz \\ &= - \int_E 1 + \frac{r_i}{\Delta r} - \frac{2r}{\Delta r} dr dz \\ &= - \left\{ \left(1 + \frac{r_i}{\Delta r} \right) \Delta r \Delta z - \frac{\Delta z}{\Delta r} (r_{i+1}^2 - r_i^2) \right\} \\ &= - \left\{ (\Delta r + r_i) \Delta z - \frac{\Delta z}{\Delta r} (r_{i+1} - r_i)(r_{i+1} + r_i) \right\} \\ &= - \left\{ (\Delta r + r_i) \Delta z - \Delta z (2r_i + \Delta r) \right\} \\ &= r_i \Delta z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2^r(E) &= - \int_E 1 \left(\frac{r - r_i}{\Delta r} + r \frac{1}{\Delta r} \right) dr dz \\ &= - \int_E -\frac{r_i}{\Delta r} + \frac{2r}{\Delta r} dr dz \\ &= - \left\{ -\frac{r_i}{\Delta r} \Delta r \Delta z + \frac{\Delta z}{\Delta r} (r_{i+1}^2 - r_i^2) \right\} \\ &= - \left\{ -r_i \Delta z + \Delta z (2r_i + \Delta r) \right\} \\ &= -r_{i+1} \Delta z. \end{aligned}$$

A matriz elementar para B^r é então:

$$B^r(E) = \begin{bmatrix} \Delta z r_i \\ -\Delta z r_{i+1} \end{bmatrix}.$$

Para B^z , temos novamente duas integrais:

$$B^z(E) = - \int_E \psi_i \frac{\partial \xi_j^z}{\partial z} d\Omega.$$

$$\begin{aligned} B_1^z(E) &= - \int_E -\frac{r}{\Delta z} dr dz \\ &= \frac{1}{2}(r_{i+1}^2 - r_i^2) \\ &= \Delta r(r_i + \Delta r/2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2^z(E) &= - \int_E \frac{r}{\Delta z} dr dz \\ &= - \left\{ \frac{1}{2}(r_{i+1}^2 - r_i^2) \right\} \\ &= -\{\Delta r(r_i + \Delta r/2)\}. \end{aligned}$$

A matriz elementar para B^z é então:

$$B^z(E) = \begin{bmatrix} \Delta r(r_i + \Delta r/2) \\ -\Delta r(r_i + \Delta r/2) \end{bmatrix}.$$

Uma vez calculadas as matrizes locais, conhecemos as matrizes globais. Para o exemplo 3x2, capítulo 5, as matrizes globais são:

$$A^r = \frac{\alpha^{-1} \Delta z \Delta r}{12} * A_1,$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3r_1 + r_2 & r_1 + r_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r_1 + r_2 & r_1 + 6r_2 + r_3 & r_2 + r_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 + r_3 & r_2 + 6r_3 + r_4 & r_3 + r_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 + r_4 & r_3 + 3r_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3r_1 + r_2 & r_1 + r_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_1 + r_2 & r_1 + 6r_2 + r_3 & r_2 + r_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_2 + r_3 & r_2 + 6r_3 + r_4 & r_3 + r_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_3 + r_4 & r_3 + 3r_4 \end{bmatrix}$$

$$A^z = \frac{\alpha^{-1} \Delta z \Delta r}{12} * A_2,$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2r_1 + 2r_2 & r_1 + r_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r_1 + r_2 & 2r_1 + 4r_2 + 2r_3 & r_2 + r_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 + r_3 & 2r_2 + 4r_3 + 2r_4 & r_3 + r_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 + r_4 & 2r_3 + 2r_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2r_1 + 2r_2 & r_1 + r_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_1 + r_2 & 2r_1 + 4r_2 + 2r_3 & r_2 + r_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_2 + r_3 & 2r_2 + 4r_3 + 2r_4 & r_3 + r_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_3 + r_4 & 2r_3 + 2r_4 \end{bmatrix}$$

$$B^r = \Delta z \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r_2 & r_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r_3 & r_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r_2 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -r_3 & r_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_4 \end{bmatrix}.$$

$$B^z = \Delta r \begin{bmatrix} r_1 + \Delta r/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(r_1 + \Delta r/2) & 0 & 0 & (r_i + \Delta r/2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r(r_i + \Delta r/2) & 0 & 0 \\ 0 & (r_i + \Delta r/2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(r_i + \Delta r/2) & 0 & 0 & (r_i + \Delta r/2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(r_i + \Delta r/2) & 0 \\ 0 & 0 & (r_i + \Delta r/2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(r_i + \Delta r/2) & 0 & 0 & (r_i + \Delta r/2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(r_i + \Delta r/2) \end{bmatrix}.$$

Para o caso específico que escolhemos (exemplo 3x2), com base na figura (5.4), nossas integrais de fronteira são:

Para E no oeste:

$$\begin{aligned} f^r(E) &= 0 \\ f^z(E) &= - \int_O (0.2 - 40z^2) \left(1 - \frac{r_i - r_i}{\Delta r}\right) 0.1 (-1) (-dz) \\ &= \int_{z_i}^{z_{i+1}} 0.02 - 4z^2 dz \\ &= 0.02\Delta z - 4/3(z_{i+1}^3 - z_i^3) \end{aligned}$$

Para E no sul

$$\begin{aligned} f^r(E) &= - \int_S 20r^2 \left(1 - \frac{z_i - z_i}{\Delta z}\right) r (-1) dr \\ &= \int_{r_i}^{r_{i+1}} 20r^3 dr \\ &= 5(r_{i+1}^4 - r_i^4) \\ f^z(E) &= 0; \end{aligned}$$

Para E no leste

$$\begin{aligned} f^r(E) &= 0 \\ f^z(E) &= - \int_L 24.2 - 40z^2 \left(\frac{r_{i+1} - r_i}{\Delta r}\right) 1.1 (1) (1) dz \\ &= - \int_{z_i}^{z_{i+1}} 26.62 - 44z^2 dz \\ &= -26.62\Delta z + 44/3(z_{i+1}^3 - z_i^3) \end{aligned}$$

Para E no norte

$$\begin{aligned} f^r(E) &= - \int_N 20r^2 - 40 \left(\frac{z_{i+1} - z_i}{\Delta z}\right) r 1 (-dr) \\ &= - \int_{r_i}^{r_{i+1}} -20r^3 + 40r dr \\ &= -5(r_{i+1}^4 - r_i^4) + 20(r_{i+1}^2 - r_i^2) \\ f^z(E) &= 0; \end{aligned}$$

Referências Bibliográficas

- [1] F. Al-Abduwani, B. Zwart, R. Farajzadeh, W. M. G. T van den Broek, and P. K. Currie. Utilising Static Filtration Experiments to Test Existing Filtration Theories for Conformance. 2nd Produced Water Workshop, April 2004.
- [2] M. B. Allen, R. E. Ewing, and P. Lu. Well-Conditioned Iterative Schemes for Mixed Finite Element Models of Porous Media Flows. *SIAM J. Sci. Stat. Comput*, 13(3):794–814, 1992.
- [3] A. C. Alvarez. *Inverse Problem for Deep Bed Filtration in Porous Media*. PhD thesis, IMPA, 2005.
- [4] T. Arbogast and M. F. Wheeler. A Characteristic-Mixed Finite Element for Advection-Dominated Transport Problemas. *SIAM J. Numer. Anal.*, 32:404–424, 1995.
- [5] J. C. G Arrieta. Acoplamento Poço-Reservatório via Elementos Finitos. Dissertação De Mestrado, IMPA, 2004.
- [6] F. A. Barbosa. Estudo Numérico do Declínio de Injetividade em Rochas. Dissertação de Mestrado, PUC - Rio, 2002.
- [7] V. M. Barenblat, G. I. Entov and V. M. Ryzhik. *Theory of Fluid Flows Through Natural Rocks*. Dordrecht Boston: Kluwer Academic Publishers, 1990.
- [8] J. Bear. *Dynamics of Fluids in Porous Media*.
- [9] P. Bedrikovetsky. *Mathematical Theory of Oil and Gas Recovery: With Application to ex-USSR Oil and Gas Fields*. Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [10] P. Bedrikovetsky, D. Marchesin, G. Hime, A.G. Siqueira, A. L. Serra, J. R. P. Rodrigues, A. Marchesin, and Vinicius. M. Inverse Problem for Treatment of Laboratory Data on Injectivity Impairment. *SPE 86523*, 2004.

- [11] P. Bedrikovetsky, D. Marchesin, F. Shecaira, A. L. Serra, and E. Rezende. Characterization of Deep Bed Filtration System from Laboratory Pressure Drop Measurements. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 32(3):167–177, 2001.
- [12] P. Bedrikovetsky, D. Marchesin, F. Shecaira, A. L. Souza, and E. Rezende. Injectivity Decline During Injection of Sea/Produced Water. Paper IBP 43300, Proc. Rio Oil and Gas Expo and Conference, Rio de Janeiro, Brasil. 2000.
- [13] D. Braess. *Finite Elements: Theory, Fast Solvers and Applications in Solid Mechanics*. Cambridge University Press, 1997.
- [14] M. Brown. Full Scale Attack. *The BP Technology Magazine*, Review 30:30–32, 1998.
- [15] M. A. Celia, T. F. Russell, I. Herrera, and R. E. Ewing. An Eulerian-Lagrangian Localized Adjoint Method for the Advection-Difusion Equation. *Adv. Water. Resour.*, 13(4):187–206, 1990.
- [16] M. Crabtree, T. Eslinger, P. Fletcher, A. Johnson, and G. King. Fighting Scale - Removal and Prevention. *Oilfield Review*, pages 30–45, Autumn 1999.
- [17] M. A. C da Silva. Simulação do Escoamento de Água e Óleo em Meios Porosos. Dissertação De Mestrado, PUC - Rio, 2002.
- [18] C. N. Dawson, T. F. Russel, and M. F. Wheeler. Some Improved Error Estimates for the Modified Method of Characteristics. *SIAM Numer. Anal.*, 26:1487–1512, 1989.
- [19] J. Douglas Jr, F. Furtado, and F. Pereira. On The Numerical Simulation of Waterflooding of Heterogeneous Petroleum Reservoirs. *Computational Geosciences*, 1:155–190, 1997.
- [20] J. Douglas Jr, C. S. Huang, and F. Pereira. The Modified Method of Characteristics With Adjusted Advection. *Numerische Mathematik*, 83:353–369, 1999.
- [21] J. Douglas Jr and T. F. Russel. Numerical Methods for Convection-Dominated Diffusion Problems Based on Combining the Method of Characteristics with Finite Element or Finite Difference Procedures. *SIAM J. Numer. Anal.*, 19:871–885, 1982.
- [22] G. H. Golub and C. V Loan. *Matrix Computation*. Baltimore : Johns Hopkins University Press, 1983.

- [23] L. J. N. Guimarães. *Análisis Multi-Componente no Isotermo en Medio Poroso Deformable no Saturado*. PhD thesis, Universitat Politècnica de Catalunya, 2002.
- [24] A Harten. High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. *JCP*, pages 357–393, 1983.
- [25] J. P. Herzig, D. M. Leclerc, and P. Le Goff. Flow of Suspensions Through Porous Media Application to Deep Filtration. *Industrial and Engineering Chemistry*, 62(5):8–35, 1970.
- [26] P. Lax. *Linear Algebra*. John Wiley & Sons, 1997.
- [27] J. Lee and J. Koplik. A Simple Model for Deep Bed Filtration. *Physical Review E*, 54(4):4011–4020, 1996.
- [28] R. J. LeVeque. *Numerical Methods for Conservative Laws*. Birkhauser Verlag, 1992.
- [29] D. Levy and E. Tadmor. Non-Oscillatory Central Schemes for the Incompressible 2D Euler Equations. *Mathematics Research Letters*, 4:1–20, 1997.
- [30] S. Mancuso. Aproximação Numérica de Leis de Conservação por Esquemas Euleriano-Lagrangeanos Localmente Conservativos. Dissertação de Mestrado, UERJ, 2004.
- [31] D. Marchesin, J. Glimm, and E. et al Isaacson. Front Tracking for Hyperbolic Systems. *Advances in Applied Mathematics*, 2:91–119, 1981.
- [32] M. E. Monroe. *Introduction to Measure and Integration*. Addison-Wesley, Cambridge, 1953.
- [33] H. Nessyahu and E. Tadmor. Non-Oscillatory Central Differencing for Hyperbolic Conservation Laws. *Journal of Computational Physics*, 87:408–463, 1990.
- [34] T. Neubauer and P Bastian. On a Monotonicity Preserving Eularian-Lagrangian Localized Adjoint Method for Advection-Diffusion Equations. *to appear*.
- [35] J. Ochi, J. L. Detienne, P. Rivet, and Y. Lacourie. External Filter Cake Proprieties During Injection in Produced Waters. *SPE 54773*, 1999.
- [36] S. Pang and M. M. Sharma. A Model for Predicting Injectivity Decline in Water Injection Wells. *SPE 28489*, 1996.

- [37] P. J. Rasch and D. L. Williamson. On Shape-Preserving Interpolation and Semi-Lagrangian Transport. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, II(4):656–687, 1990.
- [38] P. A. Raviart and J. M. Thomas. *A Mixed Finite Element Method for Second Order Elliptic Problems*. Lecture Notes in Mathematics 606, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1977.
- [39] P. L. Roe. Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors and Difference Schemes. *JCP*, 135(2):250–258, 1997.
- [40] W. B. Russel, D. A. Saville, and W. R. Schowalter. *Colloid Dispersion*. Cambridge University Press, 1989.
- [41] T. F. Russell and M. A. Celia. An Overview of Research on Eulerian-Lagrangian Localized Adjoint Methods (ellam). *Adv. Water. Resour.*, 25:1215–1231, 2002.
- [42] Y. Saad. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. PWS Publishing Company, 1996.
- [43] M. M Sharma and Y. C. Yortsos. Transport of Particulate Suspensions in Porous Media: Model Formulation. *AIChE*, 33, October:1636–1643, 1987.
- [44] R. Shecter. *Oil Well Stimulation*. Prentice Hall, New Jersey, 1992.
- [45] G. Strang. *Linear Algebra and Its Applications*. San Diego : Harcourt, Brace, Jovanovich, Publishers, 1988.
- [46] J. C. Strikwerda. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*. Wadsworth & Brooks/Cole, 1989.
- [47] J. E. Thomas. *Fundamentos de Engenharia de Petróleo*. Editora Interciência, 2001.
- [48] C. Tien and A. C. Payatakes. Advances in Deep Bed Filtration. *AIChE*, 25(5):737–759, 1979.
- [49] K. E. Wennberg. *Particle Retention in Porous Media: Applications to Water Injectivity Decline*. PhD thesis, The Norwegian University of Science and Technology, 1994.
- [50] K. E. Wennberg and M. M Sharma. Determination of the Filtration Coefficient and the Transition Time for Water Injections Wells. *SPE 38181*, 1997.