

Tese apresentada para obtenção do grau de Doutor em Matemática pelo
**INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA
PURA E APLICADA - IMPA**

**FUNÇÕES DE GREEN DE EQUAÇÕES DE CASAMENTO
PARA SÍNTESE DE MOVIMENTO**

por
PERFILINO EUGÊNIO FERREIRA JÚNIOR

Orientador: PAULO CEZAR P. CARVALHO (IMPA)
Co-Orientador: JOSÉ RICARDO DE A. TORREÃO (UFF)

9 de Fevereiro de 2007

“Feliz daquele que transfere o que
sabe e aprende o que ensina.”
Cora Coralina.

Agradecimentos

A Deus, pelas peças postas à minha frente neste jogo chamado vida, pela vida, por tudo.

A meus pais e familiares, pelo grande apoio dado em todos os momentos de minha vida e por todos os seus ensinamentos.

A Simone, Rebeca e Felipe, pela paciência que tiveram durante minha ausência e pelo amor.

Aos meus orientadores, Paulo Cezar e José Torreão. Em especial a Paulo, pelo apoio, a atenção, o estímulo e pela credibilidade depositada em mim durante os anos em que me doutorava. A Torreão pela experiência passada e pelo tema de tese proposto.

Aos Professores do IMPA: Jacob Palis, Luiz Velho, Luiz Henrique e Jorge Zubelli.

Ao Professor Marcos Craizer por fazer parte da banca examinadora deste trabalho.

A Nair Duarte pelo carinho e pela atenção dispensada a mim, nos momentos difíceis e também por sua amizade.

Aos amigos e colegas do IMPA, UFRJ e do nosso grupo de volei: Ari(stófanos), Adailson, José Luiz, Lourena, Hedlena, Ana Maria, Tiago, Esdras, Ana Lucia, Taís, Asla, Dimas, Alessandra, Geisa, Ives, Emílio, Nelma, Marcelo Bernardes, Boris, Moacyr, Vinicius, Pedro Mário, Francisco, Aryana, Juscelino, Grigori, Marcos Petrúcio, André Contiero, Luiz Gustavo (LG), Marcelo Fulgêncio, Sergio Pinheiro, Anselmo Montenegro, Amaury, Mahendra Pantee, Friedli Sacha, Sérgio (cabelo).

Aos amigos e colegas da PUC-Rio: Afonso, Fabiano, Renner e Citelli.

A Fátima Russo, Luiz Carlos, Andréia e Josenildo.

Ao pessoal de suporte do IMPA: Dion, Rubens Zonenschein, Sergio Ricardo e Leonardo.

A equipe de segurança do IMPA.

Aos Professores da UFBA: Edson Coayla, Enaldo e Marco Antonio.

Ao IMPA pela oportunidade de fazer parte do quadro de alunos de Doutorado.

A CAPES, pelo financiamento de meu curso de Doutorado no IMPA.

A FAPESB, que indiretamente contribuiu com esta tese, por meio de uma bolsa de Desenvolvimento Tecnológico e Regional 2, concedida a partir de maio de 2005.

Ao Professor Augusto Cesar P. L. da Costa por ser meu responsável institucional na UFBA, junto à FAPESB.

Ao secretário Dilson Anunciação, pelo incentivo e pela estrutura que me propiciou ao longo do trabalho realizado no Departamento de Ciência da Computação da UFBA.

Ao Professor Michael Black por permitir o uso de sua implementação para estimação de movimento em imagens.

Ao GRACO - Gestores da Rede Acadêmica de Computação da UFBA.

Aqueles que não foram lembrados aqui, e que contribuíram direta ou indiretamente para o desenvolvimento deste trabalho, meus sinceros agradecimentos e pedidos de desculpas pelo lapso de memória.

Resumo

Movimento é a mudança de posição relativa no espaço. Em Computação Gráfica, sintetizar movimento consiste em gerar imagens que transmitam a percepção de movimento a um observador. Este processo pode ser realizado via a transformação de visualização de um pipeline gráfico ou via processamento de imagens.

A síntese de movimento em imagens através de filtragens é uma área relativamente pouco explorada em Computação Gráfica. Este trabalho propõe um método para síntese de movimento baseado em filtros de Green, oriundos da adoção de um modelo afim de movimento. Uma equação de casamento afim pode ser aproximada por uma equação diferencial, a qual é transformada numa equação integral, cujo núcleo é uma função de Green. Aqui, é feita uma análise das equações de casamento afim e discute-se como resolvê-las por meio das soluções por funções de Green em uma e duas dimensões. Algumas aplicações são mostradas, como simulações de movimentos rígidos e não-rígidos sobre imagens e interpolação de vídeo.

Palavras chave: Síntese de Movimento, Funções de Green, Análise Matemática.

Abstract

Movement is the change of relative position in space. In Computer Graphics, motion synthesis concerns the creation of images that give a perception of movement to the viewer. This process can be achieved through a visualization transformation of a graphics pipeline or through image processing.

Motion synthesis on images by filtering is a relatively little explored area in Computer Graphics. This work proposes a method for motion synthesis based on Green filters. Such filters arise from the adoption of an affine motion model. An affine matching equation can be expressed by a differential equation, that can be written as an integral equation having a Green's function as its kernel. In this work, we analyse affine matching equations and discuss how to solve them by using Green's function solutions in the one- and two-dimensional cases. Some applications are shown, such as simulations of rigid and nonrigid movements on images and video interpolation.

Keywords: Motion Synthesis, Green's Functions, Mathematical Analysis.

Sumário

1	Introdução	16
1.1	Motivação	16
1.2	Objetivos	22
1.3	Trabalhos relacionados	23
1.4	Contribuições	24
1.5	Publicações desta Tese	25
1.6	Considerações Finais	26
2	Preliminares Matemáticas	27
2.1	Funções de Green para equações de 1ª ordem	29
2.1.1	Função delta de Dirac e sua relação com as funções de Green	31
2.2	Funções de Green para equações de ordem $k \geq 2$	35
2.3	O Problema da Adjunta	39
2.3.1	Consequências	43
2.4	Pontos Singulares Regulares	44
2.5	Considerações Finais	46
3	Funções de Green de equações de casamento	47
3.1	Casamento unidimensional	47
3.2	Propriedades da transformação de casamento	48
3.3	Aproximando o casamento por operadores diferenciais	50
3.3.1	Soluções por funções de Green	50
3.4	Estendendo ao Casamento Bidimensional	79
3.4.1	Operadores diferenciais de 1ª ordem - caso constante	79
3.4.2	Operadores diferenciais de 2ª ordem - caso constante	80
3.4.3	Operadores diferenciais de 1ª ordem - caso afim	81
3.4.4	Operadores diferenciais de 2ª ordem - caso afim	82

3.5	Considerações Finais	85
4	Discretização de Funções de Green	86
4.1	A Discretização dos Operadores de Green de Casamento	87
4.2	Problemas de Amostragem e Reconstrução dos Operadores de Green	89
4.3	Filtros Green sobre imagens: Amostragens, comutatividade, direção de filtragem e efeitos	91
4.4	Considerações Finais	106
5	Questões Práticas e Aplicações	108
5.1	Aplicação 1: Simulação de Movimento	109
5.2	Aplicação 2: Interpolação de Vídeo	115
5.3	Considerações Finais	123
6	Conclusões e Trabalhos Futuros	124
	Referências Bibliográficas	132

Lista de Figuras

1.1	(a) Quadro 1. (b) Quadro 2. (c) Quadro 3 - negativo do frame 1. (d) Quadro 4 - negativo do frame 2.	18
1.2	(a) Imagem original. (b) Quadro 1. (c) Quadro 4. (d) Quadro 7. . .	19
1.3	(a) Imagem original. (b) Quadro 1. (c) Quadro 2. (d) Quadro 3. . .	21
2.1	Um exemplo de uma sequência delta.	32
2.2	Pulso retangular de área unitária.	33
3.1	Ilustração do efeito do operador de casamento afim: (a) Expansão ($u_1 > 0$). (b) Contração ($u_1 < 0$).	49
3.2	Aplicação do operador M_U , para $(u_0, u_1) = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$, sobre a função $f_1(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$ (círculos). O gráfico resultante da atuação do operador, $f_2(x) = M_U[f_1](x) = \frac{\sin(\frac{x-u_0}{1+u_1})^2}{(\frac{x-u_0}{1+u_1})}$, é mostrada como uma linha contínua.	49
3.3	Uma função G_u plotada como função de x , para $\xi = 0$. O parâmetro usado foi $u = 0.2$. Observe que há um salto de descontinuidade no ponto $\xi = 0$, onde $G_u(0, 0) = \frac{1}{u} = 5$	52
3.4	(a) Plotagens de $f_1(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$ (linha contínua), $f_2(x) = M_u[f_1](x) = \frac{\sin(x-u)^2}{(x-u)}$ (círculos), e $f_1 * G_u$ (cruzes), para o parâmetro $u = 0.2$. (b) Zoom de uma região planar contendo as curvas em (a).	53
3.5	Uma função G_u plotada como função de x , para $\xi = 0$. O parâmetro usado foi $u = -0.1$	55
3.6	Uma função G_u plotada como função de x , para $\xi = 0$. O parâmetro usado foi $u = 0.2$	57
3.7	(a) Plotagens de $f_1(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$ (linha contínua), $f_2(x) = M_u[f_1](x) = \frac{\sin(x-u)^2}{(x-u)}$ (círculos), e $f_1 * G_u$ (cruzes), para o parâmetro $u = 0.2$. (b) Zoom de uma região planar contendo as curvas em (a).	57

3.8 (a) Plotagens de $f_1(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$ (linha contínua), $f_2(x) = M_u[f_1](x) = \frac{\sin(x-u)^2}{(x-u)}$ (círculos), $f_1 * G_u$ em caso de 1ª ordem (losângos) e $f_1 * G_u$ em caso de 2ª ordem (cruzes), para o parâmetro $u = 0.2$. (b) Zoom de uma região planar contendo as curvas em (a). 58

3.9 Uma função G_+ plotada como função de x , para $\xi = 0$. Os parâmetros usados foram $u_0 = 0.1$ e $u_1 = 0.05$. Observa-se salto de descontinuidade se $\xi = 0$, onde $G_+(0, 0) = 10$ 65

3.10 Plotagens de $f_1(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$ (linha contínua), $f_2(x) = M_U[f_1](x) = \frac{\sin\left(\frac{x-u_0}{1+u_1}\right)^2}{\left(\frac{x-u_0}{1+u_1}\right)}$ (círculos), e $f_1 * G_+$ (cruzes). (a) Operadores atuando com parâmetros $(u_0, u_1) = (2, 1)$. (b) Zoom de uma região planar contendo as curvas em (a), numa vizinhança de x_U . (c) Operadores atuando com parâmetros $(u_0, u_1) = (0.1, 0.05)$. (d) Zoom de uma região planar contendo as curvas em (c), numa vizinhança de x_U . Apesar de aproximar melhor M_U , a curva gerada por \mathcal{G} também apresenta falha de reconstrução. 66

3.11 Ilustração dos papéis das funções G_+ e G_- na reconstrução de uma função. (a) Expansão, com $u_0 > 0$ e $u_1 > 0$: A plotagem no centro mostra $G_+(x, \xi)$, e a plotagem de baixo mostra $G_-(x, \xi)$, como as funções de ξ , para um x fixo. (b) Contração, com $u_0 > 0$ e $u_1 < 0$: Analogamente como em (a), porém com G_- sendo mostrado na plotagem do centro e G_+ na plotagem de baixo. 67

3.12 Plotagens de $G_+(x, \xi)$ (círculos) e $G_u(x, \xi)$ (linha contínua), para os parâmetros $u_0 = u_1 = u = 0.2$ ($x_U = -1$). 67

3.13 Funções G_+ plotadas como funções de x , para $\xi = 0$. (a) Polinômio indicial, $q(r)$, com raízes complexas. (b) Polinômio indicial com raízes reais e distintas. (c) Polinômio indicial com raízes reais e iguais. 76

3.14 Plotagens de $f_1(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$ (linha contínua), $f_2(x) = M_U[f_1](x) = \frac{\sin\left(\frac{x-u_0}{1+u_1}\right)^2}{\left(\frac{x-u_0}{1+u_1}\right)}$ (círculos), e $f_1 * G_+$ (cruzes). (a) Operadores atuando com parâmetros $(u_0, u_1) = (0.1, -0.05)$, quando $q(r)$ possui raízes complexas. (b) Zoom de uma região planar contendo as curvas em (a), em torno do ponto $x_U = 2$. (c) Operadores atuando com parâmetros $(u_0, u_1) = (0.875, -0.875)$, quando $q(r)$ possui raízes reais e distintas. (d) Zoom de uma região planar contendo as curvas em (c), em torno do ponto $x_U = 1$. (e) Operadores atuando com parâmetros $(u_0, u_1) = (1.66, -0.83)$, quando $q(r)$ possui raízes reais e iguais. (f) Zoom de uma região planar contendo as curvas em (e), em torno do ponto $x_U = 2$ 77

3.15 Plotagens de $f_1(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$ (círculos), $f_2(x) = M_U[f_1](x) = \frac{\sin\left(\frac{x-u_0}{1+u_1}\right)^2}{\left(\frac{x-u_0}{1+u_1}\right)}$ (linha contínua), e as $f_1 * G_+$, para os casos afim de 1ª ordem (losângos) e 2ª ordem, com raízes complexas para $q(r)$ (cruzes). (a) Operadores atuando com parâmetros $(u_0, u_1) = (0.1, -0.05)$. (b) Zoom de uma região planar contendo as curvas em (a), em torno do ponto $x_U = 2$. (c) Apenas os operadores $f_1(x)$ (círculos) e as $f_1 * G_+$ de 1ª ordem (losângos) e 2ª ordem (cruzes), foram plotados. (d) Zoom de uma região planar contendo as curvas em (c), em torno do ponto $x_U = 2$. 78

3.16 Plotagens de (a) $f_1(x, y) = \frac{\sin(x^2) \cdot \sin(y^2)}{xy}$, (b) $f_2(x, y) = M_{U,V}[f_1](x, y) = \frac{\sin\left(\frac{x-u_0}{1+u_1}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{y-v_0}{1+v_2}\right)^2}{\left(\frac{x-u_0}{1+u_1}\right)\left(\frac{y-v_0}{1+v_2}\right)}$ e (c) $f_1 * G$, para os parâmetros $u_0 = v_0 = 0.1$ e $u_1 = v_2 = -0.05$ 83

4.1 Convolução discreta unidimensional entre H e f_1 88

4.2 Convolução discreta unidimensional entre G_u e f_1 88

4.3 Filtragens por função de Green de casamento constante de 1ª ordem, com parâmetro $u = 2$. (a) Amostragem pontual. (b) Amostragem por área com 15 células por pixel. (c) Plotagem da atuação de \mathcal{G} sobre a curva $f_1(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$, utilizando amostragem pontual e parâmetro $u = 0.2$. (d) Plotagem da atuação de \mathcal{G} sobre a curva $f_1(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$, utilizando amostragem por área, com 6 células/unidade e parâmetro $u = 0.2$ 92

- 4.4 Filtragens por função de Green de casamento constante de 2^a ordem, com parâmetro $u = 2$. (a) Amostragem pontual. (b) Amostragem por área com 15 células por pixel. (c) Plotagem da atuação de \mathcal{G} sobre a curva $f_1(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$, utilizando amostragem pontual e parâmetro $u = 0.2$. (d) Plotagem da atuação de \mathcal{G} sobre a curva $f_1(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$, utilizando amostragem por área, com 6 células/unidade e parâmetro $u = 0.2$ 93
- 4.5 Filtragens por função de Green de casamento constante de 1^a e 2^a ordem, com amostragem por área com 15 células por pixel e parâmetro $u = 7$. (a) Filtro Green de 1^a ordem. (b) Filtro Green de 2^a ordem. 94
- 4.6 Filtragens por função de Green de casamento constante de 2^a ordem, com parâmetro $u = 0.1$. (a) Filtro utilizado em [25, 38, 39, 40, 41]. (b) Filtro atual. 95
- 4.7 Filtragens por função de Green de casamento constante de 2^a ordem. (a) e (d) Imagens originais. (b) e (e) Imagens geradas com um ângulo $\theta = 26.57^\circ$ e $u = 2.24$. (c) e (f) Filtragem na direção x com $u = 2$, seguida por filtragem na direção y com $u = 1$ 96
- 4.8 Filtragens por função de Green de casamento afim de 1^a ordem, com parâmetros $(u_0, u_1, x_U) = (6, -0.094, 64)$. (a) Amostragem pontual com superamostragem em torno de x_U de 30 células/pixel. (b) Amostragem por área de 6 células/pixel e superamostragem, em torno de x_U , de 30 células/pixel. (c) Amostragem por área de 15 células/pixel e superamostragem, em torno de x_U , de 120 células/pixel. (d) Amostragem por área de 15 células/pixel e superamostragem, em torno de x_U , de 600 células/pixel 97
- 4.9 Filtragens por função de Green de casamento afim de 1^a ordem, com parâmetros $(u_0, u_1, x_U) = (0.1, -0.05, 2)$. (a) Amostragem pontual com superamostragem em torno de x_U de 30 células/unidade. (b) Zoom de uma região planar em torno do ponto x_U . (c) Amostragem por área de 6 células/unidade e superamostragem, em torno de x_U , de 30 células/unidade. (d) Zoom de uma região planar em torno do ponto x_U 98

- 4.10 Filtragens por função de Green de casamento afim de 2^a ordem, com parâmetros $(u_0, u_1, x_U) = (6, -0.094, 64)$. (a) Amostragem pontual com superamostragem em torno de x_U de 30 células/pixel. (b) Amostragem por área de 6 células/pixel e superamostragem, em torno de x_U , de 30 células/pixel. (c) Amostragem por área de 6 células/pixel e superamostragem, em torno de x_U , de 120 células/pixel. (d) Amostragem por área de 15 células/pixel e superamostragem, em torno de x_U , de 600 células/pixel 100
- 4.11 Filtragens por função de Green de casamento afim de 2^a ordem, com parâmetros $(u_0, u_1, x_U) = (0.1, -0.05, 2)$. (a) Amostragem pontual com superamostragem em torno de x_U de 30 células/unidade. (b) Zoom de uma região planar em torno do ponto x_U . (c) Amostragem por área de 200 células/unidade e superamostragem, em torno de x_U , de 300 células/unidade. (d) Zoom de uma região planar em torno do ponto x_U 101
- 4.12 Exemplo da Não-Comutatividade do filtro de Green de casamento afim 1D. (a) Imagem original. (b) Imagem obtida com os parâmetros: $(u_0, u_1, x_U) = (-16, 0.286, 56)$ (horizontal) e $(v_0, v_2, y_V) = (16, -0.32, 50)$ (vertical), respectivamente. (c) Imagem obtida com os parâmetros: $(v_0, v_2, y_V) = (16, -0.32, 50)$ (vertical) e $(u_0, u_1, x_U) = (-16, 0.286, 56)$ (horizontal), respectivamente. (d) Imagem binária representando a diferença entre as duas primeiras imagens em (b) e (c). 102
- 4.13 Exemplo de síntese de movimento através de casamento afim (Zoom): A segunda imagem do par à esquerda foi sintetizado pelo operador de casamento, enquanto que o par à direita pelo operador de Green. Os parâmetros em ambos os casos foram $(u_0, u_1, x_U) = (-8, 0.0125, 64)$ (movimento horizontal) e $(u_0, u_1, x_U) = (-8, 0.0125, 64)$ (movimento vertical). 103
- 4.14 Zoom com motion blur: (a) Modelo de Acha-Peleg, para $(u_0, u_1, x_U) = (v_0, v_2, y_v) = (-4, 0.0625, 64)$, e desvio padrão gaussiano de 5 pixels. (b) Modelo de Martinsen et al. com centro $(c_x, c_y) = (64, 64)$ e comprimento de borramento $\gamma = 7$. (c) Filtro da função de Green com $(u_0, u_1, x_U) = (v_0, v_2, y_v) = (-4, 0.0625, 64)$ 105

- 5.1 Exemplo de síntese de movimento com modelo constante - parâmetro fixo $u_1 = 0$ ($U(x) = u_0$). De cima para baixo: imagem de entrada e sequência de imagens geradas por filtros de Green G_u , com os parâmetros: $u_0 = 3$ e $u_0 = 6$ 110
- 5.2 Translação Planar 1. De cima para baixo: imagem de entrada e sequência de imagens geradas por funções de Green, com os valores $(u_0, u_1) = (4, -0.004)$ e $(7, -0.007)$, respectivamente. O ponto singular, $x_U = 1000$, está fora do domínio da imagem. 111
- 5.3 Translação Planar 2. De cima para baixo: imagem de entrada e sequência de imagens geradas por funções de Green, com os parâmetros: $(u_0, u_1) = (2, -0.008)$ mais $(v_0, v_2) = (1, -0.004)$, para a segunda imagem; $(u_0, u_1) = (4, -0.016)$ mais $(v_0, v_2) = (2, -0.008)$, para a terceira imagem. O ponto singular, $(x_U, y_V) = (250, 250)$, está fora do domínio da imagem. 112
- 5.4 Pulsação de um Coração. De cima para baixo: imagem de entrada e sequência de imagens geradas por funções de Green, com os parâmetros: $(u_0, u_1) = (-2, 0.015)$, e $(2, -0.015)$. O ponto singular, $x_U = 137$, está no centro da imagem. 112
- 5.5 Zoom-Out. De cima para baixo: imagem de entrada e sequência de imagens geradas por funções de Green, com os parâmetros: $(u_0, u_1) = (v_0, v_2) = (2, -0.03)$ (segunda imagem) e $(u_0, u_1) = (v_0, v_2) = (3, -0.044)$ (terceira imagem), com $x_U = y_V = 64$ 113
- 5.6 Zoom-In. De cima para baixo: imagem de entrada e sequência de imagens geradas por funções de Green, com os parâmetros: $(u_0, u_1) = (v_0, v_2) = (-2, 0.031)$ (segunda imagem) e $(u_0, u_1) = (v_0, v_2) = (-4, 0.063)$ (terceira imagem), com $x_U = y_V = 64$ 114
- 5.7 Deformação de uma Bola. De cima para baixo: imagem de entrada e sequência de imagens geradas por funções de Green, com os parâmetros: $(u_0, u_1) = (-16, 0.286)$, e $(16, -0.286)$, com $x_U = 56$. . . 114
- 5.8 Movimento com as pálpebras. De cima para baixo: imagem de entrada e sequência de imagens geradas por funções de Green, com os parâmetros: $(u_0, u_1, x_U) = (-2, 0.022, 92)$ (horizontal) mais $(v_0, v_2, y_V) = (2, -0.026, 78)$ (vertical), para a segunda imagem; e $(u_0, u_1, x_U) = (-6, 0.065, 92)$ (horizontal) mais $(v_0, v_2, y_V) = (6, -0.077, 78)$ (vertical), para a terceira imagem. 115

5.9	Sequência Sintética Virtual 1. (a) Imagem original. (b) Quadro intermediário gerado por filtro de Green com parâmetros $(A_0, A_1, x_U) = (-1.7, 0.027, 64)$ e $(B_0, B_2, y_V) = (-1.6, 0.025, 64)$. (c) Segundo quadro gerado via warpings 1D, com os parâmetros $(a_0, a_1, x_U) = (b_0, b_2, y_V) = (-3, 0.047, 64)$	118
5.10	Sequência Sintética 1. (a) Primeiro quadro. (b) Quadro intermediário gerado por filtro de Green com parâmetros $(A_0, A_1, x_U) = (B_0, B_2, y_V) = (-1.3, 0.017, 76)$. (c) Quarto quadro.	119
5.11	Sequência de Translação Real 1. (a) Primeiro quadro. (b) Quadro intermediário gerado por filtro de Green de 1ª ordem, com parâmetro $A_0 = 1$. (c) Terceiro quadro.	120
5.12	Sequência de Rotação Planar Virtual 1. (a) Primeiro quadro. (b) Quadro intermediário gerado por filtro de Green de 2ª ordem, com os parâmetros $(A_0, A_1, A_2, x_U) = (3, 0.000848, -0.049384, 59)$ e $(B_0, B_1, B_2, y_V) = (3, -0.047969, -0.002005, 61)$. (c) Terceiro quadro gerado por warping, com parâmetros $(a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2) = (3, 0, -0.05, 3, -0.05, 0)$	121
5.13	Sequência de Rotação Planar Virtual 3. (a) Primeiro quadro. (b) Quadro intermediário gerado por filtro de Green de 1ª ordem adaptado, com os parâmetros $(A_0, A_2) = (3, -0.012)$, na direção horizontal, e $(B_0, B_1) = (3, -0.012)$, na direção vertical. (c) Terceiro quadro gerado por warping, criado como na sequência de rotação planar virtual 1.	123

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo é dada a motivação para a presente tese, bem como são listados seus objetivos, trabalhos relacionados e contribuições.

1.1 Motivação

Síntese de imagens é o processo de criação de imagens no computador. As imagens podem ser sintetizadas em Computação Gráfica via um pipeline de visualização de cenas tridimensionais ou através do processamento de imagens.

Movimento é a mudança da posição relativa de um objeto no espaço. A *síntese de movimento em imagens* diz respeito à mudança da posição relativa de objetos numa cena (observada em uma sequência de imagens) e/ou a mudança das informações de alta frequência contidas numa imagem.

A mudança da posição relativa de objetos numa cena pode ser notada em um processo de rasterização de uma cena com objetos movendo-se ou onde a câmera virtual se move; também pode ser notada após a digitalização de um vídeo ou de cartoon.

A impressão de movimento pode também ser causada pela perda das informações de alta frequência numa imagem, gerada por movimentos mecânicos rápidos de uma câmera durante a aquisição de imagens (*imaging*), em um tempo curto de exposição da cena e/ou pelo movimento de vários objetos numa cena, cada objeto podendo ter velocidades diferentes. A perda de energia nas altas frequências de uma imagem é também chamada de *motion blur* [1, 2]. Neste caso, a câmera pode ser real (digital) ou virtual (pinhole).

Motion blur é uma integração temporal de um sinal espaço-temporal, que remove as altas frequências daquele sinal se movendo com velocidade alta [2]. Sua presença

em imagens é importante para transmitir ao observador uma percepção mais realista de uma cena, ora visualizada. Tal efeito é bastante utilizado na renderização de cenas (ver cap. 14 de [3] e cap. 9 de [4]) e na produção de cartoons, a fim de simular movimentos rápidos de objetos [5]. O motion blur funciona, nesse caso, como uma técnica de anti-aliasing para sequências de imagens que foram obtidas com aliasing temporal¹ [3]. Matematicamente, motion blur pode ser expresso como uma integração temporal em forma de soma ponderada [6]. Os pesos são também chamados de *função de espalhamento de ponto* (do inglês point spread function - **PSF**). Uma **PSF** incorpora os efeitos de lente, abertura (aperture) e diafragma (shutter)² de câmera para um determinado modelo de formação da imagem [7].

Um exemplo onde síntese de movimento é obtida pela mudança da posição relativa de um objeto, porém com imagens apresentando ausência de informações de alta frequência, é a sequência de imagens em [9] (material complementar de [10]). A ausência de informações de alta frequência, naquele caso, é proposital e não se deve ao movimento percebido. O vídeo mostra uma pessoa executando uma ação comum, sem que seja possível reconhecer que pessoa se encontra presente ali, apenas permite reconhecer que aquela está se sentando. Como a percepção é algo que se comporta estocasticamente [11], o sistema visual humano não capta a informação completa do sinal espaço-temporal. O sistema visual então, faz uma “interpolação” daquele sinal e reconhece uma forma humana se movimentando. Portanto, a percepção de movimento independe das informações de altas frequências presentes numa imagem.

Movimento em imagens também pode ser obtido pelas imperfeições do olho humano, através das ilusões de movimento. Pequenos movimentos retiniais ou leves movimentos de uma folha de papel contendo padrões geométricos criados em imagens podem causar a percepção de movimento. A imagem na retina pode ser pensada como uma versão ruidosa do sinal ideal [12].

Uma outra aplicação da síntese de movimentos em Neurociência é a produção de estímulos visuais (ilusão de movimento) fornecidos a observadores, criados com a intenção de analisar o processamento de movimento visual no cérebro humano [13]. Um exemplo é o *Four-stroke Apparent Motion*, que é uma ilusão de movimento criada por um ciclo de repetição de quatro imagens diferentes, dois quadros positivos e seus respectivos negativos. Uma motocicleta se move para frente e para trás, enquanto que o observador percebe um movimento ininterrupto da motocicleta para frente. Uma inversão do contraste ocorre na transição do último quadro positivo para o primeiro

¹Aliasing temporal é a distorção do sinal espaço-temporal para o qual a taxa de amostragem no tempo foi muito baixa para representar as frequências mais altas presentes naquele sinal

²Shutter speed é um dispositivo fotográfico que regula a quantidade de luz recebida por um filme fotográfico ou sensor CCD (em caso de câmera digital) por um período de tempo específico.

negativo e na transição do último negativo para o primeiro positivo. Isso fornece a impressão de um movimento contínuo da motocicleta. A Figura 1.1 ilustra o ciclo da animação. O efeito de inversão das intensidades das imagens serve para trocar a

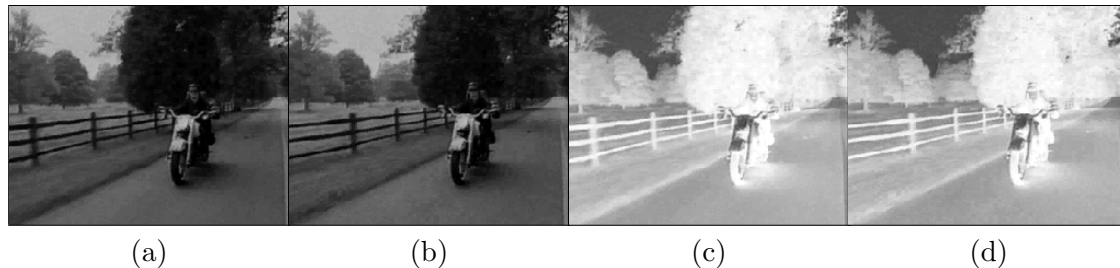


Figura 1.1: (a) Quadro 1. (b) Quadro 2. (c) Quadro 3 - negativo do frame 1. (d) Quadro 4 - negativo do frame 2.

direção do movimento percebido; em vez de aparentar movimento para trás entre os frames (b) e (c), e entre os frames (d) e (a), como realmente é, a motocicleta aparenta se movimentar para frente. Tal efeito é conhecido como *Negative Afterimage* [14]. *Afterimage* é o efeito da mudança do brilho percebido, durante um intervalo de tempo curto, que ocorre após a observação prolongada de um padrão de luminância que permanece mesmo depois de ela ter sido alterada. Possivelmente, devido à adaptação visual à região exposta. *Adaptação visual* é a mudança na sensibilidade à luz de um fotoreceptor ou do sistema visual humano como um todo para casar a intensidade média de luz presente [15].

No contexto de Computação Gráfica, a síntese de movimento em imagens pode ser obtida por métodos baseados em modelos (determinísticos ou estocásticos)[16]-[18] ou baseados em filtragens [19]. A síntese de movimento baseada meramente em filtragem de imagens é uma área relativamente pouco explorada em Computação Gráfica, pois a maioria dos algoritmos encontrados na literatura são baseados em modelos. Uma abordagem inteiramente baseada em filtragem de imagens é a de Freeman et al., baseada em filtros *steerable* [20]. Tais filtros permitem criar um efeito de ilusão de movimento, o ‘Motion Without Movement’ [19].

A técnica de Freeman et al. cria padrões de iluminação diferentes em uma imagem de entrada, que transmitem a aparência de movimento. O método é baseado em filtros de quadratura (filtros *steerable*), que variam a informação de fase local da imagem, dando a percepção de movimento. Tais filtros formam um conjunto base que gera o espaço de todas as rotações de um dado sinal $f(x, y)$. Neste caso, a base é formada pela derivada segunda de uma Gaussiana g_2 e sua respectiva transformada de Hilbert h_2 . As rotações da Gaussiana g_2 , por exemplo, seriam expressas pela

relação

$$g_2^\theta(x, y) = k_1(\theta)g_{2a}(x, y) + k_2(\theta)g_{2b}(x, y) + k_3(\theta)g_{2c}(x, y)$$

onde $k_i(\theta)$ são as funções de interpolação que permitem sintetizar o filtro na direção θ e $g_{2a,2b,2c}(x, y)$ são as funções da base para $g_2^\theta(x, y)$, cuja quantidade está relacionada ao número de frequências angulares no filtro [20]. Uma fórmula análoga para $h_2^\theta(x, y)$ é derivada de maneira similar. Para simular movimento em uma imagem $f(x, y)$ nas direções distintas $\theta(x, y)$ utiliza-se:

$$E(x, y) = f(x, y) * g_2^\theta(x, y)$$

$$O(x, y) = f(x, y) * h_2^\theta(x, y)$$

$$S(x, y, t) = \cos(\omega t)E(x, y) + \sin(\omega t)O(x, y)$$

onde $E(x, y)$ e $O(x, y)$ são, respectivamente, filtros de fase par e ímpar, e $S(x, y, t)$ é a sequência de imagens visualizada, ω é a frequência temporal do movimento visualizado e $*$ representa a operação de convolução. A saída em cada pixel é simplesmente uma combinação linear dos valores do pixel correspondente por meio das filtragens com os filtros da base. Uma implementação e algumas animações foram disponibilizadas por Liat Segal em [21]. A Figura 1.2 mostra uma sequência de filtragens de uma imagem de entrada pelo ‘Motion Without Movement’ com $\theta = 180^\circ$. Note a mudança no padrão de iluminação e o efeito degradante nas imagens de saída.

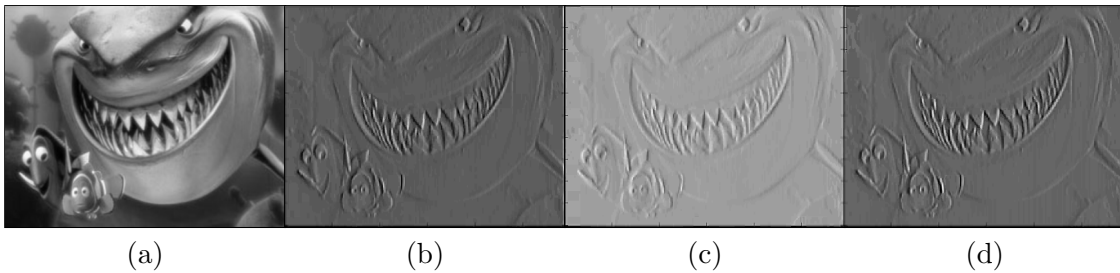


Figura 1.2: (a) Imagem original. (b) Quadro 1. (c) Quadro 4. (d) Quadro 7.

Uma questão importante no processo de síntese de movimento é transmitir realismo físico à sequência gerada. Em geral, isso requer a introdução do efeito de motion blur [6]-[8] como um passo independente do processo. A síntese simultânea de

movimento e do efeito de motion blur não parece ter sido esgotada. Aqui este processo foi explorado, considerando soluções para as equações de casamento (conservação de irradiância), da forma

$$f_2(x + U, y + V) = f_1(x, y), \quad (1.1)$$

onde f_1 é a imagem de entrada, $U(x, y)$ e $V(x, y)$ são as componentes de fluxo ótico [22]-[24] e f_2 é uma imagem de casamento, a ser determinada, que junto com f_1 fornece informação de movimento.

Soluções aproximadas para a equação (1.1), com campo de fluxo ótico constante - $U(x, y) = u$, $V(x, y) = v$ - já haviam sido consideradas em [25], num contexto de estimação de forma 3D. Neste caso, expandiu-se o membro esquerdo em uma série de Taylor até segunda ordem em u e v , e após mudança adequada de variáveis, a equação (1.1), reduziu-se a uma forma unidimensional [25]

$$\frac{u^2}{2} f_2'' + u f_2' + f_2 = f_1, \quad (1.2)$$

para um casamento feito ao longo de uma direção arbitrária θ - i.e., para $v/u = \tan \theta$. Ali $f_i = f_i(x, y + \gamma x)$, com $\gamma = \tan \theta$, e f' denota a derivação de f em relação a x .

Através do método da função de Green [26], uma solução para (1.2) pode ser dada por

$$f_2(x, y + \gamma x) = \int_{\mathcal{D}} G_u(x - \xi) f_1(\xi, y + \gamma \xi) d\xi, \quad (1.3)$$

onde G_u é um filtro linear e invariante por translação. Neste caso, ela é a função de Green para a equação (1.2), ou seja, a solução para aquela equação quando a função de impulso unitário $\delta(x - \xi)$ é substituída no membro direito dela. Em um domínio ilimitado \mathcal{D} , G_u terá a forma

$$G_u(x - \xi) = \frac{2}{u} \sin\left(\frac{x - \xi}{u}\right) e^{-\left(\frac{x - \xi}{u}\right)}, \quad (1.4)$$

para $x > \xi$, com $G_u = 0$, em caso contrário.

Como visto em [25], quando G_u é convoluída com uma imagem de shading, esta é capaz de simular seu par de *estéreo fotométrico*, i.e. uma realização da mesma cena sob iluminação deslocada. Isto permite sintetizar um certo tipo de movimento 3D, apenas baseado em filtragem de imagens, a saber, aquele do padrão de irradiância numa cena estática, surgindo da mudança da direção de iluminação (como comprovado em [27], isto pode ser modelado como uma rotação não-uniforme).

Aqui será feito uma análise aprofundada da abordagem da função de Green descrita acima, bem como de extensões que forneçam uma classe maior de

movimentos a serem sintetizados. Para isto, considera-se um modelo de fluxo ótico menos restritivo: em vez do campo uniforme o qual leva à equação (1.4), será introduzido o modelo afim $U(x) = u_0 + u_1x$, onde u_0 e u_1 são constantes³ (novamente, será assumido fluxo 1D, com $V(x) = \gamma U(x)$). Considerando a solução por funções de Green, sob este novo modelo, para as aproximações da equação de casamento (a serem vistas no Capítulo 3), obtém-se uma gama de efeitos gerados em imagens. Quando aplicado o filtro de Green em uma imagem de entrada, este é capaz de gerar sequências de imagens que simulam vários tipos de movimentos uniformes e não-uniformes. Similar ao caso de fluxo constante, a vantagem da abordagem da função de Green afim é que esta permite a geração simultânea de movimento e motion blur, o que contribui para um maior realismo do resultado. Neste caso, a função de Green afim funciona como uma **PSF** variante por translação. Alguns efeitos de degradação de movimento em imagens, por **PSF**'s variantes por translação, podem ser decompostos em distorções de coordenadas geométricas e uma transformação invariante por translação. Em [28], A. Sawchuk mostra que isso basicamente é possível para movimentos de translação e rotação de câmera. Movimentos mais complexos são mais difíceis de se obter tal decomposição. Em contrapartida, os filtros de Green afim fornecem realismo para sequências de movimentos não-rígidos (movimento dos olhos e deformação de uma bola, por exemplo, como será mostrado no Capítulo 5), gerando simultaneamente movimento e motion blur. Um exemplo da geração simultânea de movimento e motion blur pelo filtro de Green afim é ilustrado na Figura 1.3. Note que há perda de energia das altas frequências nas imagens que

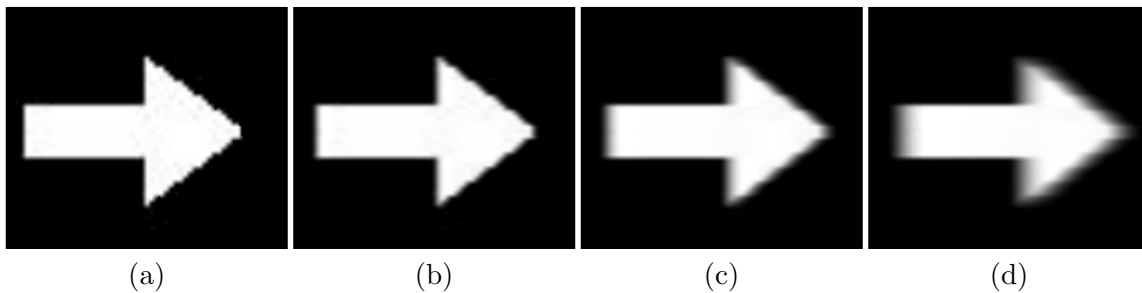


Figura 1.3: (a) Imagem original. (b) Quadro 1. (c) Quadro 2. (d) Quadro 3.

seguem da esquerda para a direita. As imagens (b), (c) e (d) apresentam informação de motion blur, conforme escolha feita dos parâmetros de movimento. Uma discussão sobre a escolha de tais parâmetros será vista no Capítulo 3.

³No Capítulo 3 será vista uma discussão acerca do modelo afim completo, i.e. $U(x, y) = u_0 + u_1x + u_2y$

Dois outros algoritmos que fazem uso de transformações afins 1D para gerar efeitos de movimento e motion blur são aqueles em [29] e [30]. O primeiro é um processo de duas etapas, que inicialmente, gera um warping sobre uma imagem de entrada e em seguida a borra. O segundo gera simultaneamente movimento e motion blur, porém para um tipo de movimento específico, o de zoom-in (seu código é um plug-in do software GIMP, disponível livremente em [31]). Aqui, será mostrado que o modelo de função de Green é qualitativamente superior aos dois.

Em relação ao motion without movement, sua qualidade é inferior no que diz respeito às imagens geradas por filtros de Green, por diminuir o contraste das imagens. O único movimento gerado é o de translação, diferentemente dos filtros de Green. Além disso, a diferença, em termos de percepção de movimento, entre a técnica de Freeman e aquela a ser apresentada aqui, é que Freeman consegue induzir a ilusão de movimento a um observador, ao passo que a técnica a ser vista mais adiante induz a idéia de um deslocamento físico para o observador.

1.2 Objetivos

O objetivo geral desta tese é a análise Matemática das funções de Green de equações de casamento, em seus modelos constante e afim. Tal análise servirá como alicerce para o problema de síntese de movimento em imagens a ser discutido como aplicação.

Como objetivos específicos estão a discretização das funções de Green estudadas e sua exploração em termos de síntese de movimento em imagens. Tal exploração compreende duas aplicações de Visão Computacional: a indução da percepção de movimento em observadores e a interpolação de vídeos para a suavização destes.

Funções de Green geram operadores integrais, chamados de Operadores de Green. O uso daquelas funções para síntese de imagens, possui vantagem em termos numéricos, uma vez que a discretização de operadores diferenciais (caso afim) é numericamente instável. O operador de casamento (proveniente da transformação de casamento) constitui na verdade um filtro de warping⁴, ao passo que os operadores de Green, bem como os operadores diferenciais correspondentes, são filtros de amplitude⁵ [32].

Filtros de warping, ao contrário dos filtros de Green aqui apresentados, não fornecem simultaneamente, simulações de deslocamento relativo e motion blur. Este último efeito, é importante para a questão do realismo produzido sobre imagens. A classe dos filtros produzidos por operadores diferenciais, apesar de estar no

⁴São filtros topológicos, ou seja, que atuam no conjunto suporte da imagem.

⁵Filtros que atuam no espaço de cor da imagem.

mesmo contexto dos filtros de Green (amplitude), possui certas particularidades. Os métodos de diferenças finitas aplicados a problemas a valores de fronteira, onde a equação diferencial possui coeficientes variáveis, caem em sistemas algébricos cuja matriz é esparsa, porém com número de condicionamento alto⁶. Por outro lado, a discretização de operadores integrais leva a uma matriz densa, porém com número de condicionamento baixo [33, 34]. Isso justifica o uso da abordagem de funções de Green para a aproximação da equação de casamento, em lugar dos operadores diferenciais. Outro fato é o de que funções de Green permitem suavizar as imagens de entrada.

1.3 Trabalhos relacionados

Existem vários trabalhos na área de síntese de movimento, porém a maioria deles baseia-se em modelos estocásticos e/ou determinísticos. Em [16], modelos estocásticos são usados para simular movimento de árvores e grama sob a influência do vento, por exemplo. Uma abordagem determinística pode ser encontrada em [18], para simular líquidos usando equações de Navier-Stokes.

Uma abordagem baseada inteiramente em filtragem de imagens é vista em [19], via o uso de *filtros steerable* para criar ilusões de movimento [20]. Aqui propõe-se uma alternativa para a simulação de movimento em imagens, usando filtros de Green. Tais filtros estão numa classe de filtros ditos paramétricos [35]. No contexto de reconstrução de formas 3D, em Visão Computacional, elas podem ser encontradas em [25]. Naquele trabalho as funções de Green são provenientes de uma equação de casamento com modelo de movimento constante [22]-[24] e abordam o problema de shape from shading. Implicitamente a isso, supõe-se que o campo de movimento 2D coincida com o fluxo ótico, movimento aparente do brilho numa imagem. Tal coincidência é possível mediante a interpretação de ambos como campos de vetores tangentes a fluxos de sistemas dinâmicos planares [36].

Em processamento de imagens, aproximações para funções de Green são usadas para melhoramento de imagens via processo de difusão não-linear, evitando a integração numérica de uma equação diferencial parcial não-linear [37]. Funções de Green de casamento podem também ser encontradas nos contextos de detecção de arestas [38] e processamento de informação neural para modelagem analítica de certos perfis de neurônios binoculares [39].

⁶Número de condicionamento é definido como sendo a razão entre o maior e o menor valor singular

Filtros de Green de casamento são gerados por funções de Green em problemas a valores de fronteira e/ou a valor inicial [26]. Tais funções são núcleos de operadores integrais que invertem operadores diferenciais, cujo processo de discretização é não trivial [33].

1.4 Contribuições

As contribuições deste trabalho, que serão vistas ao longo do texto, são:

- Uma análise completa da operação de casamento unidimensional de 1ª e 2ª ordem, reconhecendo suas componentes de translação e/ou escalamento; além da existência de um ponto singular (caso afim), cuja posição desempenha papel importante na síntese de movimento;
- A análise de uma solução por funções de Green de uma versão aproximada da equação de casamento afim e seu uso para a simulação de uma classe grande de efeitos tais como translação, rotação, zoom-in e zoom-out, e também de movimentos não-rígidos complexos, como os da deformação de uma bola e a pulsação de um coração. Grande realismo é obtido, especialmente quando simulados movimentos rápidos de câmera, pois a abordagem da função de Green permite a introdução de motion blur simultaneamente com o efeito de movimento. Note que isto não pode ser realizado com técnicas de warping padrão;
- O processo de discretização das funções de Green e a discussão dos problemas numéricos envolvidos em torno dos pontos singulares (caso afim);
- Uma comparação da abordagem de funções de Green com duas outras técnicas de motion blur também baseadas no modelo afim 1D, mostrando que seus resultados são qualitativamente superiores que aqueles casos;
- Finalmente, este trabalho estende e melhora trabalhos apresentados anteriormente em [25, 38, 39]. Além disso, uma discussão para uma extensão bidimensional particular do filtro de Green é feita. Neste caso, obtém-se equações diferenciais parciais para aproximar a equação de casamento 2D.

1.5 Publicações desta Tese

Desta tese foram publicados dois artigos em conferências internacionais, um foi submetido a uma revista internacional e um relatório técnico, a saber:

Data-Based Motion Simulation Through a Green's Function Approach [40], Proceedings of XVII Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing, pp. 193-199 (October 2004): descreve um algoritmo de simulação de movimento baseado em funções de Green de equações de casamento afim. Resolvendo tais equações via funções de Green obteve-se um par de funções usadas como filtros, que quando aplicados sobre uma imagem de entrada, permite a geração de uma sequência virtual de imagens fornecendo uma impressão de movimento convincente. Movimentos rígidos e não-rígidos foram simulados tais como: a pulsação de um coração, o galho de uma árvore balançando sob a ação do vento e uma bola levitando.

Video Interpolation Through Green's Functions of Matching Equations [41], Proceedings of IEEE International Conference on Image Processing (September 2005): foi proposta uma abordagem nova para interpolação de vídeo a partir de informações de fluxo ótico, previamente calculadas. O mesmo paradigma de funções de Green de casamento afim, do primeiro trabalho, foi usado aqui. A técnica fornece uma reconstrução suave de vídeos, especificamente de sequências criadas por translação de câmera ou a translação de objetos numa cena estática.

Motion Synthesis Through 1D Affine Matching [42], Artigo submetido à revista Pattern Analysis and Applications - PAA, em 17 de Março de 2006, recebido para ajustes em 18 de Junho e 7 de Novembro de 2006, e resubmetido, respectivamente, nas datas de 28 de Julho e 15 de Dezembro de 2006: discute a reinterpretação dos filtros de Green em [25, 40, 41], levando em consideração a existência de pontos singulares dos campos de movimento estudados. Apresenta também algumas classes adicionais de movimento em relação àqueles obtidos em [40], por exemplo, movimentos de zoom-in e zoom-out de câmera, dentre outros. Finalmente, apresenta comparação com dois modelos de motion blur, mostrando-se superior aos mesmos.

Soluções de Problemas a Valores de Fronteira Aplicadas em Processamento de Imagens [43], Relatório Técnico submetido à FAPESB - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado da Bahia, em 30 de Novembro de 2006:

aborda de maneira mais profunda, outras soluções aproximantes para a equação de casamento, de 1ª e 2ª ordem, nos modelos constante e afim. Também explora as aplicações de simulação de movimento e de interpolação de vídeo, apresentando os resultados preliminares àqueles que aparecem aqui. Os resultados obtidos foram mais significativos que aqueles em [41], uma vez que foi possível interpolar sequências de zoom-in e zoom-out de câmera.

1.6 Considerações Finais

Neste capítulo foram relatados a motivação para este trabalho, seus objetivos e os trabalhos que se relacionam com este, além de exemplificar algumas aplicações do método.

Este constitui uma alternativa para o problema de simulação de movimento em imagens [19], por meio de uma extensão para o enfoque baseado em filtragens por funções de Green, proposto em [25]. O trabalho compreendeu um estudo mais aprofundado dos modelos constante e afim de movimento entre duas imagens, via filtros de Green.

Efeitos de motion blur constituem um diferencial. Motion blur é uma integração temporal de um sinal que remove as altas frequências do mesmo, que se moveram a velocidades muito altas. Este efeito causa uma percepção mais realista da cena ora visualizada.

A apresentação dos capítulos desta tese é como segue. O capítulo 2 lista as preliminares matemáticas (equações diferenciais e funções de Green) necessárias para o entendimento dos capítulos seguintes. O capítulo 3 discute a transformação de casamento, sua aproximação por meio de funções de Green de problemas a valores de fronteira e uma extensão para o caso $2D$. O capítulo 4 traz um esquema criado para representação e reconstrução de funções de Green de casamento, bem como relata as dificuldades e propriedades daquelas funções. O capítulo 5 relata algumas questões práticas e aplicações dos filtros de Green. Finalmente, o capítulo 6 lista as conclusões e trabalhos futuros.

Capítulo 2

Preliminares Matemáticas

Este capítulo traz as ferramentas necessárias para o entendimento dos conceitos e desenvolvimento das idéias envolvidas com a teoria das equações diferenciais, a ser utilizada aqui, juntamente com a teoria das funções de Green. A seguir, serão apresentadas definições e exemplos de problemas a valores de fronteira e será discutido como solucioná-las através do método das funções de Green.

Definição 2.0.1. *Um problema a valores de fronteira (PVF) é aquele constituído de uma equação diferencial ordinária (EDO) ou parcial (EDP) e mais condição (ões) de fronteira. As condições de fronteira são informações complementares que servem para determinar uma solução única para o problema.*

Um caso particular de problema a valores de fronteira é o problema de valor inicial (PVI), em que a variável do problema passa a ser do tipo tempo e as condições passam a ser chamadas de condições iniciais, ou seja, a solução (e suas derivadas) deve(m) ter determinado(s) valor(es) num dado ponto inicial.

Um critério para classificar os problemas formulados é dado pela seguinte definição:

Definição 2.0.2. *Um problema é dito **bem posto** se este atende às condições:*

- **Existência** - *existe pelo menos uma solução;*
- **Unicidade** - *existe no máximo uma solução;*
- **Dependência contínua dos dados** - *a solução deve depender continuamente dos dados do problema.*

Quando o referido problema não atende a pelo menos uma das propriedades acima, ele é dito **mal posto**.

Os dados do problema referidos na definição (2.0.2) são uma função conhecida, incorporada na **EDO** do problema, e o(s) valor(es) da função procurada, no(s) dado(s) ponto(s) de fronteira. A terceira propriedade em (2.0.2) significa que pequenas mudanças nos dados acarretarão pequenas mudanças na solução. Um exemplo de um problema a valores de fronteira é

$$\begin{cases} -f'' = h(x) & (0 < x < 1) \\ f(0) = \alpha \text{ e } f(1) = \beta \end{cases}$$

onde $h(x)$ é a função conhecida, 0 e 1 são os pontos de fronteira e α e β são os valores de fronteira, respectivamente, naqueles pontos supracitados.

Se a solução para uma **EDO** exibir uma forma adequada da sua dependência dos dados, então quando os dados forem mudados, a expressão da solução permanecerá válida [26]. Tal fato é garantido pela linearidade do problema e pelo seguinte princípio:

Definição 2.0.3. (Princípio da Superposição) *Considere um PVF,*

$$\begin{cases} a_1(x)f'(x) + a_0(x)f(x) = h(x) & (a < x < b) \\ f(a) = \alpha \text{ e } f(b) = \beta \end{cases} \quad (2.1)$$

onde a_0 , a_1 e h são funções contínuas num intervalo $[a, b]$, com dados $\{h(x); f(a) = \alpha, f(b) = \beta\}$. Se $f_1(x)$ é a solução para o problema

$$\begin{cases} a_1(x)f'(x) + a_0(x)f(x) = h_1(x) & (a < x < b) \\ f(a) = \alpha_1 \text{ e } f(b) = \beta_1 \end{cases}$$

e $f_2(x)$ é a solução para o problema

$$\begin{cases} a_1(x)f'(x) + a_0(x)f(x) = h_2(x) & (a < x < b) \\ f(a) = \alpha_2 \text{ e } f(b) = \beta_2, \end{cases}$$

então $Af_1(x) + Bf_2(x)$ é a solução para o problema

$$\begin{cases} a_1(x)f'(x) + a_0(x)f(x) = Ah_1(x) + Bh_2(x) & (a < x < b) \\ f(a) = A\alpha_1 + B\alpha_2 \text{ e } f(b) = A\beta_1 + B\beta_2, \end{cases}$$

onde A e B são constantes.

Este princípio permite decompor um problema não-homogêneo com condições de fronteira não-homogêneas (h, α e $\beta \neq 0$ no sistema de eq. (2.1)) em dois problemas: um não-homogêneo com condições de fronteira homogêneas ($h \neq 0$ com $\alpha = \beta = 0$ no sistema de eq. (2.1)) e outro homogêneo com condições de fronteira não-homogêneas ($h = 0$ com α e $\beta \neq 0$ no sistema de eq. (2.1)). Por exemplo,

$$\{h(x); f(a) = \alpha, f(b) = \beta\} = \{h(x); f(a) = 0, f(b) = 0\} + \{0; f(a) = \alpha, f(b) = \beta\}$$

Um detalhe importante é que tal princípio pode ser estendido para n soluções, correspondentes a n conjuntos de dados.

As seções subsequentes trarão detalhes a respeito da teoria das funções de Green para **EDO's** de ordem arbitrária. Deve ser salientado aqui que todos os problemas formulados ao longo deste texto (com o intuito de aproximar equações de casamento), serão do tipo a valores de fronteira, embora no presente capítulo trate-se apenas de problemas de valor inicial. Como dito antes, estes problemas são casos particulares dos primeiros.

2.1 Funções de Green para equações de 1ª ordem

Um dos aspectos mais úteis da teoria das *distribuições ou funções generalizadas*, devida a Laurent Schwartz (1915 – 2002), é que funções descontínuas podem ser manipuladas tão facilmente quanto funções contínuas ou diferenciáveis [44]. Resultados de análise clássica como: Regra da cadeia, Regra de Leibniz para integração sob sinal de integral, Teorema da divergência, entre outros, podem ser obtidos com a teoria das distribuições.

O conceito de distribuições ou funções generalizadas permite estender o conceito de uma função para um novo espaço, a saber, o *espaço das distribuições*. Neste espaço estendido, o *modus operandi* permite identificar funções ordinárias (integráveis), como por exemplo as do espaço L^2 , com certas distribuições [45] (as distribuições induzidas por uma função). Dessa forma é possível definir um novo conceito de derivação no espaço, o das *derivadas fracas* [45].

Uma outra vantagem do uso das funções generalizadas é a possibilidade de manipular as descontinuidades de funções ordinárias através das chamadas funções de Green. O método das funções de Green, devido a Georges Green (1793 – 1841), permite transformar equações diferenciais lineares não-homogêneas em equações integrais, as quais dão as soluções para as primeiras, com economia de esforços. A função de Green obtida independe do termo fonte - função conhecida ou termo não-homogêneo - e depende apenas, da equação diferencial particular sendo examinada

e de suas condições de fronteira/iniciais impostas. Além disso, a representação integral do operador de Green é muito mais amena para análise numérica que a equação diferencial original e suas condições de fronteira/iniciais associadas [46]. Historicamente, o método das funções de Green era aplicado apenas para **EDP's** com condições de fronteira (*Problema de Dirichlet*). Depois descobriu-se que o método serviria para resolver **EDO's** [47].

Serão abordadas aqui, como enuncia a presente seção, as soluções por funções de Green para **EDO's** de 1ª ordem. Antes de tudo, considere a **EDO** não-homogênea

$$a_1(x)f'(x) + a_0(x)f(x) = h(x), \quad (2.2)$$

onde a_0 , a_1 e h são certas funções contínuas definidas num intervalo da reta ($a_1(x) \neq 0$ no referido intervalo).

A caracterização de uma solução geral para uma equação do tipo (2.2) é dada pelo teorema a seguir.

Teorema 1. (solução geral para **EDO's** não-homogêneas) [48] *Dada uma solução $f(x) = \varphi_1(x)$ da equação (2.2), toda solução de (2.2) se representa na forma*

$$f(x) = \varphi_1(x) + \varphi_0(x),$$

onde φ_0 é uma certa solução da equação homogênea associada à equação (2.2), e reciprocamente, qualquer função da forma $\varphi_1(x) + \varphi(x)$, onde φ é solução da equação homogênea associada, é uma solução de (2.2).

Quanto à determinação de uma solução particular da equação (2.2), ela pode ser baseada no *método da variação dos parâmetros*. Este consiste em supor que a solução pode ser escrita na forma $y = c(x)\varphi(x)$, onde $y = c\varphi(x)$ é a solução geral da equação homogênea associada.

Teorema 2. (uma solução particular para **EDO's** não-homogêneas) *A função*

$$f(x) = \int_{x_0}^x e^{\int_{\xi}^x \tilde{a}(\zeta) d\zeta} \tilde{h}(\xi) d\xi \quad (2.3)$$

é a solução da equação (2.2), com condição inicial $f(x_0) = 0$, onde $\tilde{a}(x) = -\frac{a_0(x)}{a_1(x)}$, $\tilde{h}(x) = \frac{h(x)}{a_1(x)}$ e $a_1(x) \neq 0, \forall x$.

Demonstração: *Substituindo $f(x) = c(x)\varphi(x)$ na equação (2.2) e omitindo-se a variável de dependência, obtém-se*

$$a_1 \{c'\varphi + c\varphi'\} + a_0c\varphi = h. \quad (2.4)$$

Como φ é solução da equação homogênea associada à (2.2), segue que

$$a_1 c' \varphi = h,$$

ou seja,

$$c(x) = \int_{x_0}^x \frac{\tilde{h}(\xi)}{\varphi(\xi)} d\xi,$$

onde $\tilde{h}(\xi) = \frac{h(\xi)}{a_1(\xi)}$ ($a_1(\xi) \neq 0 \forall \xi$). Agora, da expressão para $\varphi(x)$ e $\varphi(\xi)$, obtidas a partir da solução da equação homogênea associada, tem-se

$$f(x) = \int_{x_0}^x e^{\int_{\xi}^x \tilde{a}(\zeta) d\zeta} \tilde{h}(\xi) d\xi,$$

onde $\tilde{a}(x) = -\frac{a_0(x)}{a_1(x)}$, com $a_1(x) \neq 0, \forall x$. □

2.1.1 Função delta de Dirac e sua relação com as funções de Green

O princípio da superposição garante que a influência de uma “perturbação” é igual à soma das influências dos seus somandos. O movimento ondulatório originado por duas pedras jogadas num plano de água resulta da adição dos movimentos provocados por cada uma das pedras, separadamente.

A interpretação da equação (2.3) basear-se-á na representação de \tilde{h} como uma soma ponderada de certas perturbações. As soluções correspondentes a estas perturbações fornecem, combinadas de mesmo modo, a solução de (2.2).

Definição 2.1.1. (sequência delta) Dada qualquer sequência de intervalos I_n que tenda a $\{0\}$, denomina-se sequência delta a toda sequência de funções continuamente diferenciáveis $\{\delta_n\}$ tais que $\delta_n(x)$ se anule fora de I_n e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x) dx = 1.$$

A Figura 2.1 esboça o n -ésimo termo de uma possível sequência delta. Tal sequência delta é obtida através da lei

$$\delta_n(x) = \begin{cases} n^2 \left(\frac{1}{n} - |x|\right) & (|x| \leq \frac{1}{n}) \\ 0 & (|x| > \frac{1}{n}) \end{cases}$$

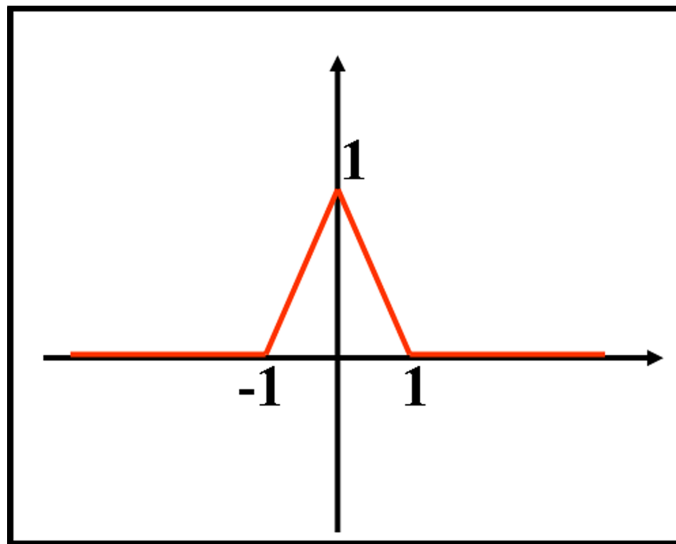


Figura 2.1: Um exemplo de uma sequência delta.

A função delta de Dirac¹, apesar de não ser uma função genuína, pode ser associada à idéia de limite quando $n \rightarrow \infty$, de uma sequência delta.

Note que para qualquer sequência delta, $\{\delta_n\}$, e qualquer função contínua, $h(x)$, pode-se verificar a relação

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x) h(x) dx = h(0).$$

Isto explica que para uma função δ postule-se que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) h(x) dx = h(0).$$

Similarmente, se considerada a sequência das transladadas $\delta_n(x - \xi)$, isto é, uma sequência de funções fortemente concentradas em ξ , pode-se explicar o uso da relação

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - \xi) h(x) dx = h(\xi). \quad (2.5)$$

Aqui $\delta(x - \xi)$ pode ser pensada como uma *fonte concentrada* ou *força impulsiva no ponto* ξ . Outra forma de expressar a equação (2.5) é pensando $\delta(x - \xi)$ como um pulso

¹Matematicamente, a função delta de Dirac é uma distribuição, ou seja, um funcional linear contínuo definido sobre um espaço de funções adequado [45, 26, 49]

infinitamente concentrado, $h(x)$ pode ser reescrita como um limite de combinações lineares de pulsos retangulares de área unitária [49] (ver Figura 2.2)

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_i h(x_i) \frac{\text{pulso unitario}}{\Delta x} \Delta x = h(x). \quad (2.6)$$

A equação (2.5) pode ser interpretada como a representação da função h como

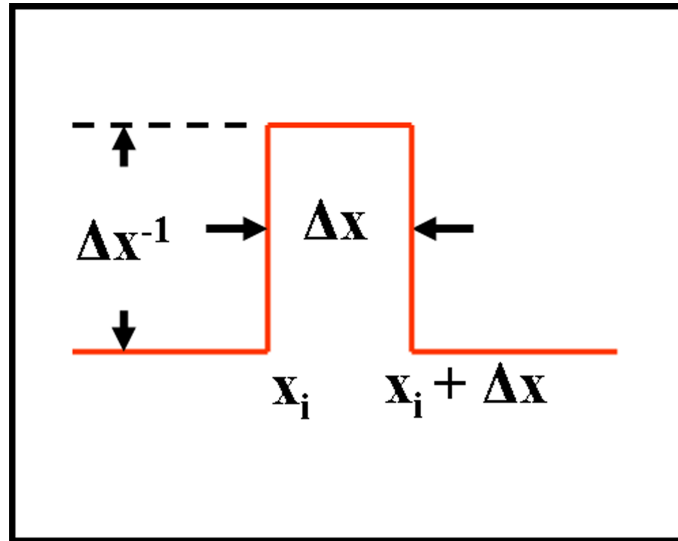


Figura 2.2: Pulso retangular de área unitária.

combinação linear das transladadas da função $\delta(x - \xi)$. Assim, é razoável, uma vez introduzido convenientemente o conceito de solução de equações da forma

$$a_1(x)f'(x) + a_0(x)f(x) = \delta(x - \xi), \quad (2.7)$$

esperar que, pelo princípio da superposição, a combinação linear destas soluções seja solução da equação (2.2). Antes disso, considere as seguintes definições:

Definição 2.1.2. (solução por sequências delta) Diz-se que uma função é solução do problema

$$\begin{cases} a_1(x)f'(x) + a_0(x)f(x) = \delta(x - \xi) & (\xi > 0) \\ f(0) = 0, \end{cases}$$

se esta for o limite quando $n \rightarrow \infty$ da sequência de soluções dos problemas

$$\begin{cases} a_1(x)f'(x) + a_0(x)f(x) = \delta_n(x - \xi) & (\xi > 0) \\ f(0) = 0, \end{cases}$$

onde $\{\delta_n\}$ é uma sequência delta e ξ é apenas um parâmetro.

Definição 2.1.3. (função de Green) Chama-se de função de Green da equação (2.2) a solução $f(x) = G(x, \xi)$ do problema

$$\begin{cases} a_1(x)f'(x) + a_0(x)f(x) = \delta(x - \xi) & (\xi > 0) \\ f(0) = 0, \end{cases}$$

onde ξ é um parâmetro.

O seguinte teorema caracteriza como pode ser expressa a função de Green para a equação (2.2). Sua prova pode ser encontrada em [48].

Teorema 3. (expressão para a função de Green) A função de Green para a equação (2.2) é dada por

$$G(x, \xi) = \begin{cases} e^{\int_{\xi}^x \tilde{a}(\zeta) d\zeta} & (x > \xi) \\ 0 & (x < \xi) \end{cases}$$

onde $\tilde{a}(x) = -\frac{a_0(x)}{a_1(x)}$ ($a_1(x) \neq 0, \forall x$) e ξ é um parâmetro.

Resulta do teorema acima o seguinte:

Corolário 2.1.1. (superposição das soluções por sequências delta) A solução da equação (2.2), com condição inicial $f(0) = 0$, é dada, para $x > 0$, através da função de Green de (2.2) como

$$f(x) = \int_0^x G(x, \xi) \tilde{h}(\xi) d\xi,$$

onde $\tilde{h}(x) = \frac{h(x)}{a_1(x)}$ e $a_1(x) \neq 0, \forall x$.

Dessa forma, a combinação linear das soluções por sequências delta é uma solução para a equação (2.7). Ambas com condição inicial $f(0) = 0$.

A função de Green, $G(x, \xi)$, é também chamada de *função influência*. Esta representa fisicamente a resposta, na posição x , a uma força unitária transmitida a um sistema, na posição ξ . As funções de Green de equações de 1ª ordem devem ser distinguidas daquelas referentes às equações de 2ª ordem [48]. Tal fato será exemplificado na seção subsequente, onde será abordado o método das funções de Green geral, para problemas de valor inicial.

2.2 Funções de Green para equações de ordem $k \geq 2$

Considere a equação diferencial ordinária arbitrária

$$\begin{cases} a_k(x)f^{(k)}(x) + \dots + a_1(x)f'(x) + a_0(x)f(x) = h(x) \quad (-\infty < x < \infty) \\ f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(k-1)}(x_0) = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

onde $f(x)$ é uma função de classe C^k , $h(x)$ uma função contínua por partes e $a_0(x)$, \dots , $a_k(x)$ funções contínuas.

Definição 2.2.1. *Uma solução fundamental para um operador diferencial linear L com polo em ξ é uma solução da equação*

$$Lf = \delta(x - \xi), \quad (2.9)$$

onde ξ é considerado como um parâmetro.

A equação (2.9) é interpretada no sentido das distribuições [45, 26]. A solução para (2.9) será denotada por $G(x, \xi)$, a qual é uma distribuição em x dependendo parametricamente de ξ .

Se existe \bar{x} tal que $a_k(\bar{x}) = 0$ não é possível calcular sem ambiguidade soluções de (2.8), pois ou $f^{(k)}(\bar{x})$ não existe ou é indeterminada. Note que o Teorema de existência e unicidade falhará, neste caso. Se $k = 2, 3, \dots$ e $a_k(\bar{x}) \neq 0$, vale o seguinte resultado:

Teorema 4. [26] *Seja $k \geq 2$ ($k \in \mathbb{Z}$). Se $a_k(x) \neq 0$ em $-\infty < x < \infty$, existe uma única solução do PVI (2.8), dada por*

$$f(x) = \int_{x_0}^x G(x, \xi)h(\xi)d\xi, \quad (2.10)$$

onde $G(x, \xi)$ é a solução do **PVI** para a equação homogênea

$$Lf = 0, \quad -\infty < x < \infty; \quad f(\xi) = 0, \dots, f^{(k-2)}(\xi) = 0 \text{ e } f^{(k-1)}(\xi) = \frac{1}{a_k(\xi)}, \quad (2.11)$$

com

$$L := a_k(x)D^{(k)} + \dots + a_1(x)D^{(1)} + a_0(x)D^{(0)},$$

onde $D^{(k)}$ representa a k -ésima derivada em relação à x .

Demonstração: Sejam $a_k(x) \neq 0$ em $-\infty < x < \infty$, e $f_\xi(x)$ a solução da equação homogênea satisfazendo as condições iniciais

$$f_\xi(\xi) = 0, \quad f'_\xi(\xi) = 0, \quad \dots, \quad f_\xi^{(k-2)}(\xi) = 0 \text{ e } f_\xi^{(k-1)}(\xi) = \frac{1}{a_k(\xi)}$$

Uma solução fundamental causal satisfazendo $LG = \delta(x - \xi)$ com $G \equiv 0$ para $x < \xi$, no sentido das distribuições (ver [26]), é

$$G(x, \xi) = H(x - \xi)f_\xi(x), \quad (2.12)$$

onde H é a função de Heaviside [45]

$$H(x - \xi) = \begin{cases} 1 & (x > \xi) \\ 0 & (x < \xi) \end{cases}$$

Pelo princípio da superposição a solução para

$$Lf = h, \quad x > x_0; \quad f(x_0) = 0, \dots, f^{(k-1)}(x_0) = 0$$

é dada por

$$f(x) = \int_{x_0}^{\infty} H(x - \xi)f_\xi(x)h(\xi)d\xi = \int_{x_0}^x f_\xi(x)h(\xi)d\xi.$$

Falta fazer a validação da candidata à solução $f(x)$ acima. Tem-se que $f(x_0) = 0$ e

$$f'(x) = f_x(x)h(x) + \int_{x_0}^x f'_\xi(x)h(\xi)d\xi,$$

tal que $f'(x_0) = 0$. Como $f_x(x) = \dots = f_x^{(k-2)}(x) = 0$, segue que

$$\begin{aligned} f^{(j)}(x) &= f_x^{(j-1)}(x)h(x) + \int_{x_0}^x f_\xi^{(j)}(x)h(\xi)d\xi \\ &= \int_{x_0}^x f_\xi^{(j)}(x)h(\xi)d\xi, \quad j = 1, 2, \dots, k - 1. \end{aligned}$$

Assim, $f^{(j)}(x_0) = 0$ para $j = 1, 2, \dots, k - 1$. Note também que

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= f_x^{(k-1)}(x)h(x) + \int_{x_0}^x f_\xi^{(k)}(x)h(\xi)d\xi \\ &= \frac{h(x)}{a_k(x)} + \int_{x_0}^x f_\xi^{(k)}(x)h(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

Agora, como $Lf_\xi = 0$

$$Lf = a_k(x)f^{(k)} + \dots + a_0(x)f = h(x) + \int_{x_0}^x Lf_\xi(x)h(\xi)d\xi = h(x).$$

□

A função G na equação (2.12) é a *função de Green*, solução fundamental causal para o operador diferencial em (2.8), ou seja, seus valores num dado “instante” dependem dos valores realizados pela própria função em “instantes” anteriores. Isto é chamado de o princípio da causalidade [49]. A função de Green neste caso, é dita *causal* ou retardada².

A função de Green de uma equação diferencial de ordem k é contínua com derivadas contínuas, até ordem $k-2$, no ponto inicial e possui uma descontinuidade de ordem $k-1$, no referido ponto. Como uma “receita de bolo”, então, para a obtenção da solução por função de Green de uma equação diferencial de ordem $k \geq 2$, alguns passos e propriedades são requeridos ([26, 49]):

- Divida o domínio em dois pedaços;
- Ache uma solução geral para a equação diferencial, de ordem k , homogênea associada e escreva esta para ambos os domínios;
- Imponha as condições iniciais no domínio adequado, a fim de obter uma solução particular;
- Em seguida, imponha as condições de continuidade até ordem $k-2$ e de salto de descontinuidade de ordem $k-1$, num ponto de referência previamente escolhido, para determinar a solução particular do domínio restante;
- Escreva a solução como um operador integral do tipo (2.10), cujo núcleo é a função de Green.

²Existem também funções de Green do tipo “acausal” ou avançada, em que a(s) condição(ões) é(são) imposta(s) em algum(uns) ponto(s) final(is), chamada(s) de condição(ões) terminal(is)

O operador integral na equação (2.10) cujo núcleo é a função de Green chama-se *operador de Green* e fornece uma solução particular para a equação não-homogênea em (2.8).

A fim de distinguir o algoritmo acima, de obtenção das funções de Green, entre os casos de ordem superior ou igual a 2 e o caso de 1ª ordem, considere o seguinte exemplo.

Exemplo 1. *Revisitando o PVI*

$$\begin{cases} a_1(x)f'(x) + a_0(x)f(x) = h(x), & x > 0; \\ f(0) = 0, \end{cases}$$

sua função de Green, após arrumação da equação acima, é definida pela solução de

$$\begin{cases} f'_\xi(x) + b_0(x)f_\xi(x) = \delta(x - \xi); \\ f_\xi(0) = 0, \end{cases}$$

onde $b_0(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)}$ e $a_1(x) \neq 0, \forall x > 0$.

Integrando esta equação obtém-se

$$f_\xi(x) = \begin{cases} c_1(\xi) e^{\int_0^x b_0(\zeta)d\zeta} & (x > \xi) \\ c_2(\xi) e^{\int_0^x b_0(\zeta)d\zeta} & (x < \xi) \end{cases}$$

onde $c_i(\xi)$ ($i = 1, 2$) são constantes em relação à x . A condição $f_\xi(0) = 0$ fornece $c_2(\xi) = 0$. Assim, a condição de salto é que

$$f_\xi(\xi+) = 1,$$

a qual dá

$$c_1(\xi) = e^{-\int_0^\xi b_0(\zeta)d\zeta}$$

Note que aqui, não foi imposta a condição de continuidade para $f_\xi(x)$, pois a EDO é de 1ª ordem. A função de Green fica na forma

$$G(x, \xi) = H(x - \xi)f_\xi(x) = \begin{cases} e^{-\int_\xi^x b_0(\zeta)d\zeta} & (x > \xi) \\ 0 & (x < \xi) \end{cases}$$

Tal função está ainda, em consonância com a função de Green derivada pelo método da variação dos parâmetros, na Seção 2.1 (compare).

Um outro fato importante a ser visto aqui é o problema da adjunta formal de operadores de derivação. Deste problema surge a *função de Green adjunta*, que é na verdade a função de Green *acausal* ou *avançada*. Esta última permitirá entender melhor como são escolhidas as condições iniciais para os problemas formulados no capítulo seguinte.

2.3 O Problema da Adjunta

Doravante serão consideradas funções em $C^k(a, b)$, onde a e b podem tomar os valores, respectivamente, de $-\infty$ e $+\infty$. O objetivo desta seção é introduzir a noção de *problemas a valores de fronteira adjuntos*. Estes servirão de modelo para as aproximações das equações de casamento constante, a serem vistas no capítulo subsequente.

Definição 2.3.1. (Adjunta Formal de um Operador) *Seja L um operador diferencial linear geral de ordem k , atuando em $C^k(a, b)$, com*

$$L[f] := \sum_{0 \leq j \leq k} a_j(x) D^j, \quad (2.13)$$

onde $D^j = \frac{d^j}{dx^j}$ e $a_j \in C^k(a, b)$ ($j = 0, 1, \dots, k$). Considere f e g funções arbitrárias em $C^k(a, b)$. Por integração por partes, vem que³

$$\int_a^b f L[g] dx = \int_a^b g L^*[f] dx + J(f, g) \Big|_a^b, \quad (2.14)$$

onde L^* é um operador de mesma classe de diferenciabilidade que L , chamado de *adjunta formal de L* . Tal adjunta é dada por

$$L^*[f] := \sum_{0 \leq j \leq k} (-1)^j D^j(a_j f), \quad (2.15)$$

e J é uma forma bilinear conjunta de f e g .

Exemplo 2. *Seja $L = a_2(x)D^2 + a_1(x)D + a_0(x)$. Então, integrando por partes o membro esquerdo de (2.14), sua adjunta formal L^* é dada por*

$$L^* = a_2 D^2 + (2a_2' - a_1) D + (a_2'' - a_1' + a_0)$$

³A expressão em (2.14) é chamada de Fórmula de Green

e por conseguinte,

$$J(f, g) = a_2(gf' - fg') + (a_1 - a_2')fg.$$

Deste ponto em diante, nesta seção, os operadores diferenciais investigados serão de ordem inferior ou igual a 2, por questões de simplicidade. As formulações para operadores de ordem superior a 2 são dadas de maneira análoga. Os próximos passos serão dados no sentido de apresentar os **PVF**'s adjuntos.

Definição 2.3.2. (PVF Geral e Funcionais de Fronteira) *Considere a equação diferencial de 2ª ordem*

$$L[f] := a_2(x)f'' + a_1(x)f' + a_0(x)f = h \quad (a < x < b) \quad (2.16)$$

onde $h(x)$ é uma função contínua por partes e $a_j \in C^0[a, b]$ ($j = 0, 1, 2$). Um **PVF geral** de 2ª ordem é dado por uma equação do tipo (2.16) junto com as condições de fronteira

$$\begin{cases} B_1[f] = \alpha_{11}f(a) + \alpha_{12}f'(a) + \beta_{11}f(b) + \beta_{12}f'(b) = \gamma_1 \\ B_2[f] = \alpha_{21}f(a) + \alpha_{22}f'(a) + \beta_{21}f(b) + \beta_{22}f'(b) = \gamma_2, \end{cases} \quad (2.17)$$

onde os vetores $(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \beta_{11}, \beta_{12})$ e $(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \beta_{21}, \beta_{22})$ são linearmente independentes. Aqui, B_1 e B_2 são ditos **funcionais de fronteira**. De fato, eles determinam para cada função suave $f(x)$, o números $B_1[f]$ e $B_2[f]$, respectivamente.

Alguns fatos importantes podem ser colhidos da Definição (2.3.2) e são listados a seguir:

- Note que a independência dos vetores linha $(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \beta_{11}, \beta_{12})$ e $(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \beta_{21}, \beta_{22})$ garante que as duas condições de fronteira sejam distintas;
- Se $\alpha_{12} = \beta_{11} = \beta_{12} = \alpha_{21} = \beta_{21} = \beta_{22} = 0$, $\alpha_{11} = 1$ e $\alpha_{22} = 1$, tem-se as condições iniciais $f(a) = \gamma_1$ e $f'(a) = \gamma_2$;
- Quando $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, as condições de fronteira são ditas *homogêneas*.

Considere o **PVF** geral dado pela equação (2.16) acompanhado das condições de fronteira homogêneas $B_1[f] = 0$ e $B_2[f] = 0$ (i.e., $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ em (2.17)). Deseja-se introduzir a noção de condições de fronteira adjuntas. Para isto é preciso analisar em que condições a parcela mais a direita da equação (2.14) se anula.

Seja

$$M = \{f \in C^2(a, b); B_1[f] = 0 \text{ e } B_2[f] = 0\}$$

Defina M^* como sendo

$$M^* = \{g \in C^2(a, b); J(f, g)|_a^b = 0, \forall f \in M\}$$

As funções em M^* podem ser caracterizadas por duas condições de fronteira homogêneas, $B_1^*[g] = 0$ e $B_2^*[g] = 0$, onde B_1^* e B_2^* são funcionais de fronteira, similares àqueles em (2.17).

As idéias agora, serão ilustradas através de exemplos, considerando funções f e g , cujas classes de diferenciabilidade dependem do operador L .

Exemplo 3. $L = D^2$, $a = 0$, $b = 1$, $B_1[f] = f'(0) - f(1)$ e $B_2[f] = f'(1)$. Neste caso, $L^* = L$ e a fórmula de Green fica na forma⁴

$$\int_0^1 (gf'' - fg'')dx = g(1)f'(1) - f(1)g'(1) - g(0)f'(0) + f(0)g'(0) \quad (2.18)$$

Neste caso,

$$M = \{f \in C^2(0, 1); f(1) = f'(0) \text{ e } f'(1) = 0\}$$

Assim, M^* será dado pelas g tais que o membro direito de (2.18) se anula, sempre que $f \in M$. Para $f \in M$, o membro direito de (2.18) fica

$$-f(1)[g(0) + g'(1)] + f(0)g'(0),$$

onde $f(0)$ e $f(1)$ são arbitrários. Logo,

$$M^* = \{g \in C^2(0, 1); g'(0) = 0 \text{ e } g(0) + g'(1) = 0\}$$

As condições de fronteira adjuntas podem ser escritas como

$$\begin{cases} B_1^*[g] = g'(0) = 0 \\ B_2^*[g] = g(0) + g'(1) = 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

⁴Quando $L^* = L$, o operador L é dito auto-adjunto.

Exemplo 4. $L = D$, $a < x < b$, $B_1[f] = f(a) + f(b)$. Aqui, $L^* = -D$ e a fórmula de Green para qualquer f e $g \in C^1(a, b)$, fica na forma

$$\int_a^b (gf' + fg')dx = J(f, g) \Big|_a^b = fg \Big|_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a) \quad (2.20)$$

Aqui,

$$M = \{f \in C^1(a, b); B_1[f] = f(a) + f(b) = 0\}$$

Então $f(a) = -f(b)$ e o membro direito de (2.20) fica

$$f(b)[g(a) + g(b)]$$

Como $f(b)$ é arbitrária segue que

$$M^* = \{g \in C^1(a, b); g(a) + g(b) = 0\}$$

Isso fornece a condição de fronteira adjunta

$$B_1^*[g] = g(a) + g(b) = 0.$$

Exemplo 5. (Problema de Valor Inicial) Considere $L = a_2D^2 + a_1D + a_0$ em $a < x < b$, com $B_1[f] = f(a)$ e $B_2[f] = f'(a)$. Então

$$M = \{f \in C^2(a, b); f(a) = f'(a) = 0\}$$

Portanto, para $f \in M$

$$J(f, g) \Big|_a^b = \{[a_1(b) - a_2'(b)]g(b) - a_2(b)g'(b)\}f(b) + a_2(b)g(b)f'(b)$$

Como $f(b)$ e $f'(b)$ são arbitrários, M^* terá a forma

$$M^* = \{g \in C^2(a, b); g(b) = g'(b) = 0\}$$

Portanto, as condições de fronteira adjuntas nunca coincidirão com as condições de fronteira originais no caso de **PVI**'s.

Dos argumentos e exemplos vistos aqui podem ser extraídas algumas consequências, que são relatadas na subseção seguinte.

2.3.1 Consequências

Considere o PVF

$$\begin{cases} L[G](x, \xi) = \delta(x - \xi) & (a < x, \xi < b) \\ B_1[G] = 0 \text{ e } B_2[G] = 0, \end{cases} \quad (2.21)$$

cuja solução é uma função de Green (também chamada função de Green direta). Seja $G^*(x, \xi)$ a *função de Green adjunta* satisfazendo

$$\begin{cases} L^*[G^*](x, \xi) = \delta(x - \xi) & (a < x, \xi < b) \\ B_1^*[G^*] = 0 \text{ e } B_2^*[G^*] = 0. \end{cases} \quad (2.22)$$

Existe uma relação forte entre G e G^* , que permite poupar esforços no sentido de obter-se uma delas. De fato, ponha $\xi = \eta$ em $G^*(x, \xi)$, multiplique a primeira equação em (2.21) por $G^*(x, \eta)$ e multiplique a primeira equação de (2.22) por $G(x, \xi)$. Agora, subtraindo e integrando de $x = a$ até $x = b$, segue que

$$\int_a^b \{G^*(x, \eta)L[G](x, \xi) - G(x, \xi)L^*[G^*](x, \xi)\} dx = G^*(\xi, \eta) - G(\eta, \xi),$$

pelas propriedades da função delta de Dirac. Pela fórmula de Green, o membro direito é exatamente igual a $J(G^*, G) \Big|_a^b$. Como G^* satisfaz as condições de fronteira homogêneas adjuntas, $J(G^*, G) \Big|_a^b = 0$, segue que

$$G^*(\xi, \eta) = G(\eta, \xi).$$

Disso, nota-se que não é preciso resolver o problema (2.22). Basta ver que sua solução é obtida através da solução de (2.21), intercalando suas variáveis.

Um último exemplo para reforçar as idéias acima é o seguinte:

Exemplo 6. (Condições iniciais e terminais) Considere u constante e o PVI

$$\begin{cases} L[G] := uG' + G = \delta(x - \xi) & (-\infty < x, \xi < +\infty) \\ B_1[G] = \lim_{x \rightarrow -\infty} G(x, \xi) = 0, \end{cases} \quad (2.23)$$

Por raciocínio similar ao visto no Exemplo 1, a função de Green G é dada por

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{u} e^{-\left(\frac{x-\xi}{u}\right)} & (x > \xi) \\ 0 & (x < \xi) \end{cases}$$

A expressão acima satisfaz a condição inicial $\lim_{x \rightarrow -\infty} G(x, \xi) = 0$. Note também que $L^*[G^*] = -uG^{*'} + G^*$ e pelo Exemplo 5, a condição homogênea adjunta é $\lim_{x \rightarrow +\infty} G^*(x, \xi) = 0$. Portanto o problema adjunto é um problema de valor terminal (PVT).

Usando o fato que $G(x, \xi) = G^*(\xi, x)$ e intercalando as variáveis x e ξ , segue que

$$G^*(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{u} e^{\left(\frac{x-\xi}{u}\right)} & (x < \xi) \\ 0 & (x > \xi) \end{cases}$$

Vale ressaltar que aqui a noção de adjunta formal difere um pouco daquela vista na Definição (2.3.1), pois a função de Green G é na verdade uma distribuição. Para maiores detalhes veja [26].

OBSERVAÇÃO 1: (ver [26]) A solução para o problema

$$\begin{cases} a_k(x)f^{(k)}(x) + \dots + a_1(x)f'(x) + a_0(x)f(x) = h(x) \quad (-\infty < x < \infty) \\ f(x_0) = \gamma_1; f'(x_0) = \gamma_2; \dots; f^{(k-1)}(x_0) = \gamma_k \end{cases} \quad (2.24)$$

onde $f(x)$ é uma função de classe C^k , $h(x)$ uma função contínua por partes e $a_0(x)$, \dots , $a_k(x)$ funções contínuas, pode ser escrita (pelo princípio da superposição) como

$$f(x) = \int_{x_0}^x G(x, \xi)h(\xi)d\xi + \gamma_1 f_1(x) + \gamma_2 f_2(x) + \dots + \gamma_k f_k(x),$$

onde cada f_n é a solução da equação homogênea associada à equação em (2.24), com condições iniciais homogêneas, exceto que $f_n^{(n-1)}(x_0) = 1$. Além disso, $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ é um conjunto linearmente independente.

Finalmente, um último conceito a ser destacado no capítulo seguinte e que caracteriza algumas equações a serem examinadas, encontra-se na seção seguinte.

2.4 Pontos Singulares Regulares

Considere a equação diferencial linear com coeficientes variáveis

$$a_0(x)f^{(k)} + a_1(x)f^{(k-1)} + \dots + a_k(x)f = 0, \quad (2.25)$$

onde a_0, a_1, \dots, a_k são funções analíticas em algum ponto x_0 .

Definição 2.4.1. (ponto singular) Um ponto x_0 tal que $a_0(x_0) = 0$ é chamado de **ponto singular** da equação (2.25).

Note que é difícil determinar a natureza das soluções para **PVI**'s envolvendo a equação (2.25) com ponto inicial x_0 , numa vizinhança daquele ponto singular. Contudo, existe uma classe grande de equações que possuem singularidades do tipo “fraca”, no sentido que seja possível resolver equações com coeficientes analíticos em pontos próximos das singularidades.

Definição 2.4.2. (ponto singular regular) Diz-se que x_0 é um **ponto singular regular** para a equação (2.25), se esta pode ser reescrita na forma

$$(x - x_0)^k f^{(k)} + b_1(x)(x - x_0)^{k-1} f^{(k-1)} + \dots + b_k(x)f = 0, \quad (2.26)$$

próximo de x_0 , onde as funções b_1, \dots, b_k são analíticas em x_0 . Se as funções b_1, \dots, b_k podem ser reescritas na forma

$$b_n(x) = (x - x_0)^n \beta_n(x), \quad (n = 1, \dots, k),$$

onde β_1, \dots, β_k são funções analíticas em x_0 , então a equação (2.26) reduz-se a

$$f^{(k)} + \beta_1(x)f^{(k-1)} + \dots + \beta_k(x)f = 0. \quad (2.27)$$

Definição 2.4.3. (equação com ponto singular regular) Uma equação da forma

$$c_0(x)(x - x_0)^k f^{(k)} + c_1(x)(x - x_0)^{k-1} f^{(k-1)} + \dots + c_k(x)f = 0 \quad (2.28)$$

possui um **ponto singular regular** em x_0 se c_0, c_1, \dots, c_k são analíticas em x_0 , e $c_0(x_0) \neq 0$.

Note que dividindo a equação (2.28) por $c_0(x)$, para x próximo de x_0 , obtém-se uma equação da forma (2.26) com $b_n(x) = \frac{c_n(x)}{c_0(x)}$, e pode-se mostrar que estas b_n são analíticas em x_0 .

Exemplo 7. Considere a equação

$$(u_0 + u_1 x)f' + f = 0, \quad (2.29)$$

onde u_0 e u_1 são constantes. Tal equação pode ser reescrita na forma

$$u_1(x - x_U)f' + f = 0,$$

onde $x_U = -\frac{u_0}{u_1}$. Note que $u_1 \neq 0$ e que x_U é um ponto singular da equação acima. As funções $c_0(x) \equiv u_1$ e $c_1(x) \equiv 1$ são analíticas em x_U , desde que $x_U < x < \frac{u_0}{u_1}$ se u_0 e u_1 tem sinais iguais, ou $\frac{u_0}{u_1} < x < x_U$ se u_0 e u_1 tem sinais contrários [50]. Como $c_0(x_U) \neq 0$, a equação (2.29) possui um ponto singular regular em x_U . Raciocínio semelhante permite mostrar que $\{\pm\infty\}$ são também pontos singulares regulares de (2.29) [50].

2.5 Considerações Finais

Neste capítulo foram introduzidos os problemas a valores de fronteira, o método da variação dos parâmetros que soluciona aqueles problemas e algumas técnicas utilizadas para derivar funções de Green para equações diferenciais. Além disso, estabeleceu-se a relação entre o delta de Dirac e a função de Green, bem como a diferença na obtenção da última função para os casos de **EDO's** de 1ª ordem e de ordem superior ou igual a 2. Finalmente, foram apresentados o problema da adjunta, as funções de Green adjuntas que surgem no referido problema, sua relação com a função de Green direta e o conceito de ponto singular regular de uma equação diferencial.

O capítulo subsequente traz o cerne do presente trabalho. Apresenta as transformações de casamento, suas propriedades e mostra como obter aproximações daquelas transformações através de soluções por funções de Green de equações diferenciais de 1ª e 2ª ordem.

Capítulo 3

Funções de Green de equações de casamento

O objetivo principal deste capítulo é estudar o comportamento da equação de casamento sobre um certo espaço de funções, em sua forma aproximada. De fato, será suposto que a equação de casamento pode ser aproximada por uma EDO, de certa ordem, juntamente com alguma(s) condição(ões) de fronteira(s), e neste caso então, o casamento será efetuado via soluções de Green. Como objetivo secundário está a preparação para o processo de discretização das funções de Green, a serem obtidas aqui, com a finalidade de sintetizar movimento em imagens.

Nas seções subsequentes serão apresentadas a equação de casamento, algumas propriedades gerais dela e em seguida serão consideradas suas soluções por funções de Green.

3.1 Casamento unidimensional

Considere o espaço das funções diferenciáveis de classe C^k , $k \in \mathbb{N}$ e $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $f_i \in C^k$ ($i = 1, 2$). Aqui o foco de interesse está sobre a equação de casamento unidimensional da forma

$$f_2(x + U) = f_1(x), \quad (3.1)$$

onde f_1 e f_2 são funções de classe C^k , e $U(x) = u_0 + u_1x$ (u_0 e u_1 constantes) é uma função afim representando o movimento do valor de f , da posição x para a posição $x + U$. A equação (3.1) é chamada de *equação de casamento afim unidimensional*. Quando $u_1 = 0$, a equação (3.1) é chamada de *equação de casamento constante unidimensional*.

3.2 Propriedades da transformação de casamento

A equação de casamento afim pode ser reescrita na forma

$$f_2(x) = M_U [f_1](x), \quad (3.2)$$

onde M_U é um operador linear dado por

$$M_U [f](x) = f\left(\frac{x - u_0}{1 + u_1}\right). \quad (3.3)$$

e será chamado de *operador de casamento afim*. Quando $u_1 = 0$, o operador M_U é chamado de *operador de casamento constante* e será denotado, simplesmente, por M_u , onde $u = u_0$. Note que se $u_1 \neq 0$, a função afim $U(x)$ apresenta um zero (ponto singular) em $x_U = -\frac{u_0}{u_1}$, que corresponde ao ponto fixo da aplicação (3.3), para o qual $f_2(x) = f_1(x)$. A partir da equação (3.3) é possível ver que, exceto quando $x = x_U$, a aplicação consistirá de uma translação de $\frac{u_0}{1+u_1}$ e um escalamento por $\frac{1}{1+u_1}$. Esta última constante representa uma expansão quando $u_1 > 0$, e uma contração quando $u_1 < 0$. O efeito da translação combinada com a transformação de escala será o de um deslocamento a partir do ponto fixo, para u_1 positivo (Fig. 3.1a), e será o de um deslocamento no sentido do ponto fixo, para u_1 negativo (Fig. 3.1b). A magnitude do vetor de deslocamento aumenta linearmente com a distância ao ponto fixo. Outro fato ilustrado na Fig. 3.1 é que o casamento afim será realizado à direita se $U > 0$, e será realizado à esquerda se $U < 0$. Além disso, no caso afim sempre existirão um casamento à esquerda e outro à direita.

A atuação característica da equação (3.1) é ilustrada pela Fig. 3.2, onde é apresentado o gráfico do operador afim atuando sobre a função $f_1(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$.

A função $U(x)$ pode ser vista como um campo de vetores afim unidimensional, $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, atuando sobre o gráfico da função f . O campo U será chamado de *campo de movimento*. Note que $f_1(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$ é contínua e U possui um ponto singular em $x_U = 2$.

Quanto ao caso da função $f(x) = |x - 1|$? Esta função é derivável, exceto no ponto $x = 1$. Apesar disso, o operador de casamento afim M_U pode ser definido para f , de maneira a possuir um ponto singular ali (por exemplo, para $u_0 = 0.5$ e $u_1 = -0.5$). Nas seções subsequentes serão analisadas aproximações para o operador M_U , definidas em termos de operadores de derivação.

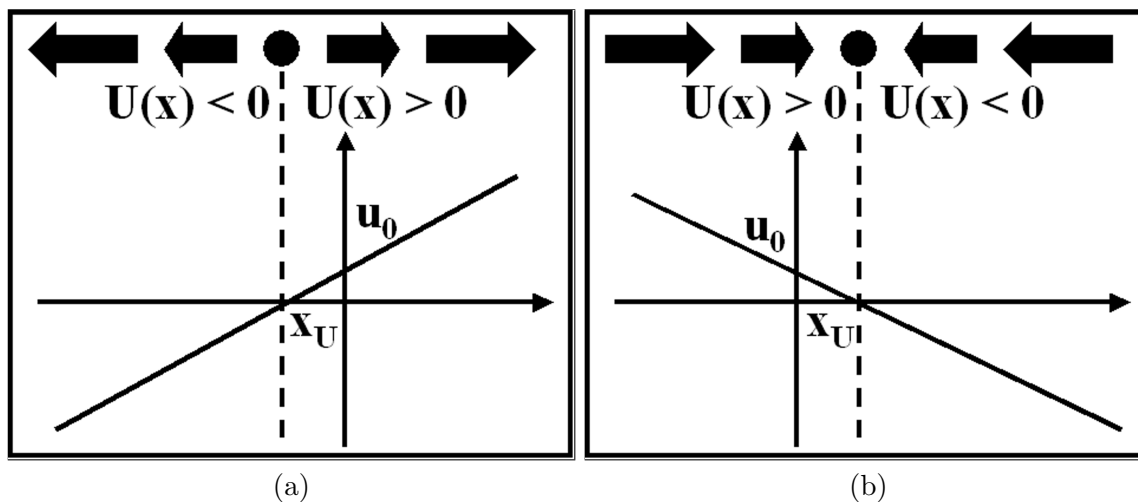


Figura 3.1: Ilustração do efeito do operador de casamento afim: (a) Expansão ($u_1 > 0$). (b) Contração ($u_1 < 0$).

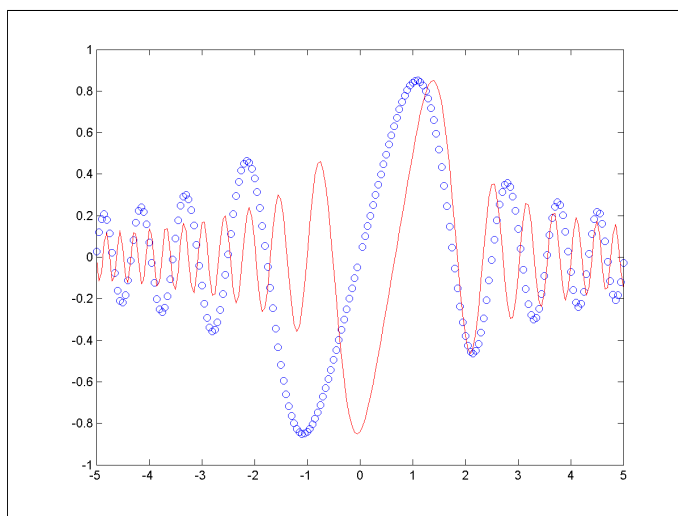


Figura 3.2: Aplicação do operador M_U , para $(u_0, u_1) = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$, sobre a função $f_1(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$ (círculos). O gráfico resultante da atuação do operador, $f_2(x) = M_U[f_1](x) = \frac{\sin(\frac{x-u_0}{1+u_1})^2}{(\frac{x-u_0}{1+u_1})}$, é mostrada como uma linha contínua.

3.3 Aproximando o casamento por operadores diferenciais

Soluções aproximadas para a equação de casamento (3.1), para um campo de movimento — $U(x) = u$ (u constante) — foram consideradas em [25], num contexto de estimação de forma 3D. Expandindo o membro esquerdo de (3.1) em série de Taylor até segunda ordem em u , ela reduz-se à forma

$$\frac{u^2}{2} f_2'' + u f_2' + f_2 = f_1, \quad (3.4)$$

onde $f_i = f_i(x)$ e f' significa derivada de primeira ordem de f em relação a x .

Através do método da função de Green, uma solução para o problema de valor de fronteira

$$\begin{cases} L_u[f_2] := \frac{u^2}{2} f_2'' + u f_2' + f_2 = f_1 \\ B_1[f_2] = \lim_{x \rightarrow -\infty} f_2(x) = B_2[f_2] = \lim_{x \rightarrow -\infty} f_2'(x) = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

onde L_u é o *operador de derivação de segunda ordem* (caso constante) e $f_i \in C^2(\mathbb{R})$, tal que $f_i = f_i(x)$ ($i = 1, 2$), pode ser dada por

$$f_2(x) = \int_{\mathbb{R}} G_u(x - \xi) f_1(\xi) d\xi, \quad (3.6)$$

onde G_u é a função de Green, espacialmente invariante, para o problema (3.5), i.e., a solução para a equação ali contida, quando a distribuição delta de Dirac $\delta(x - \xi)$ é substituída pelo membro direito dela. O núcleo do operador integral (3.6), G_u , terá a forma

$$G_u(x - \xi) = \frac{2}{u} \sin\left(\frac{x - \xi}{u}\right) e^{-\left(\frac{x - \xi}{u}\right)}, \quad (3.7)$$

para $x > \xi$, com $G_u = 0$, em caso contrário.

A subseção seguinte trará uma discussão da modelagem do problema de casamento para os casos constante e afim, de 1ª e 2ª ordem.

3.3.1 Soluções por funções de Green

Nesta seção serão determinadas as soluções por funções de Green para os PVF's a serem formulados aqui. Tais soluções são representadas por operadores integrais, cujos núcleos são funções de Green a serem determinadas.

Soluções para operadores diferenciais de 1ª ordem - caso constante

Por parecer arbitrária a aproximação da equação de casamento à direita ($u > 0$) em [25], pela EDO de segunda ordem (3.4), será investigada inicialmente, a solução por função de Green para a aproximação de (3.1), em sua forma constante, obtida por meio de uma expansão em série de Taylor até primeira ordem, contida no problema

$$\begin{cases} L_u[f_2] := uf_2' + f_2 = f_1 \\ B_1[f_2] = \lim_{x \rightarrow -\infty} f_2(x) = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

onde L_u é o operador de derivação de primeira ordem (caso constante) e $f_i \in C^1(\mathbb{R})$ é tal que $f_i = f_i(x)$ ($i = 1, 2$).

Pelo método da função de Green, uma solução para o problema (3.8) é dada por

$$f_2(x) := \mathcal{G}_u[f_1](x) = \int_{\mathbb{R}} G_u(x, \xi) f_1(\xi) d\xi, \quad (3.9)$$

onde G_u é uma função de Green, espacialmente invariante.

Para tanto, considera-se o problema acessório

$$\begin{cases} uf_\xi' + f_\xi = \delta(x - \xi) \quad (\xi > 0) \\ B_1[f_\xi] = \lim_{x \rightarrow -\infty} f_\xi(x) = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

Pelo Exemplo 1 (ou pelo Teorema 3) a função de Green para (3.10) é dada por

$$G_u(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{u} e^{-\left(\frac{x-\xi}{u}\right)} & (x > \xi) \\ 0 & (x < \xi) \end{cases} \quad (3.11)$$

onde $u > 0$ é uma constante. A Figura 3.3 mostra a plotagem de uma função G_u , como exemplo. Aqui a notação $f_1 * G_u$ será usada para denotar a operação no membro direito de (3.9).

Para ξ fixo, observe que G_u é limitada em \mathbb{R} , pois $G_u(x, \xi) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \pm\infty$. Lembrando que ξ aqui, é apenas um parâmetro.

Uma propriedade importante, principalmente no processo de discretização das funções de Green, é que tais funções são normalizadas, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}} G_u(x, \xi) d\xi = \frac{1}{u} e^{-\frac{x}{u}} \int_{-\infty}^x e^{\frac{\xi}{u}} d\xi = 1. \quad (3.12)$$

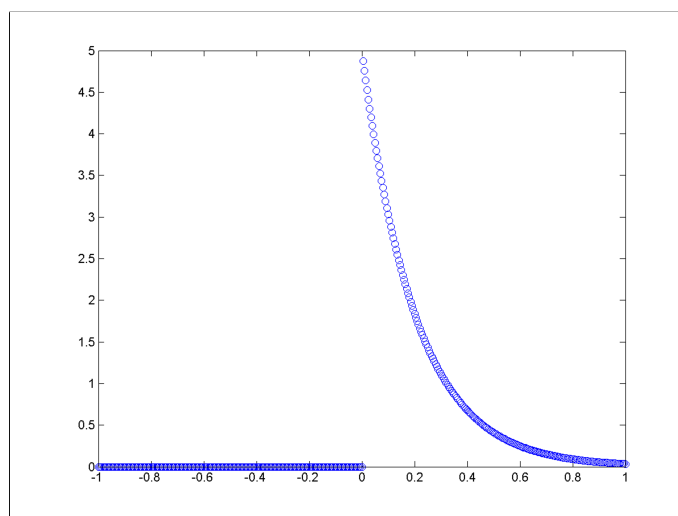


Figura 3.3: Uma função G_u plotada como função de x , para $\xi = 0$. O parâmetro usado foi $u = 0.2$. Observe que há um salto de descontinuidade no ponto $\xi = 0$, onde $G_u(0, 0) = \frac{1}{u} = 5$.

Isso diz que o gráfico da nova função, f_2 , não diferirá em média do gráfico de f_1 .

A Figura 3.4 ilustra o efeito da função G_u “convoluída” com a mesma função considerada na Figura 3.2. A função de entrada, $f_1(x)$ (linha contínua), e sua transformação $M_u[f_1](x)$ (círculos) são plotados, juntamente com $f_1 * G_u$ (cruzes), obtida como apresentado acima. No caso ilustrado, $u = 0.2$, leva a uma translação dos pontos.

Agora serão vistos alguns exemplos com o intuito de justificar a escolha das condições de fronteira para os **PVF**'s ora formulados.

Exemplo 8. Considere $f_2(x) = e^{\frac{x}{2}}$, $f_1(x) = \frac{3}{2}e^{\frac{x}{2}}$ e $u = 1$. Então,

$$u f_2'(x) + f_2(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{2}} = \frac{3}{2}e^{\frac{x}{2}} = f_1(x)$$

Neste caso, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_2(x) = 0$ e a f_2 acima atende ao problema (3.8).

Exemplo 9. Considere o problema

$$\begin{cases} f_2' + f_2 = f_1 \\ B_1[f_2] = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = 0 \end{cases}$$

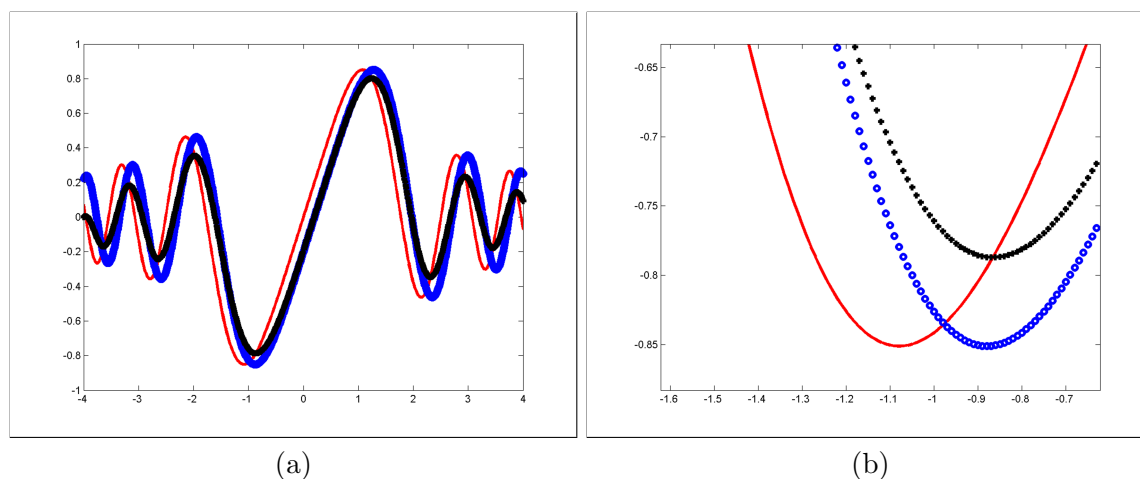


Figura 3.4: (a) Plotagens de $f_1(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$ (linha contínua), $f_2(x) = M_u[f_1](x) = \frac{\sin(x-u)^2}{(x-u)}$ (círculos), e $f_1 * G_u$ (cruzes), para o parâmetro $u = 0.2$. (b) Zoom de uma região planar contendo as curvas em (a).

Neste caso, as funções f_2 e f_1 do Exemplo 8, atendem a primeira equação acima, porém $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = +\infty$. A luz do Exemplo 1 do capítulo 2, considere o seguinte problema acessório:

$$\begin{cases} f'_\xi + f_\xi = \delta(x - \xi) & (\xi > 0) \\ B_1[f_\xi] = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_\xi(x) = 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

Por integração obtém-se

$$f_\xi(x) = \begin{cases} c_1(\xi) e^{-x} & (x > \xi) \\ c_2(\xi) e^{-x} & (x < \xi) \end{cases}$$

onde $c_i(\xi)$ ($i = 1, 2$) são constantes em relação à x . Pela condição homogênea, quando $x \rightarrow +\infty$ ($x > \xi$ com ξ fixo), não é possível determinar o valor de $c_1(\xi)$. Note que no Exemplo 1, a constante a ser determinada pela condição homogênea era $c_2(\xi)$, para a qual $x < \xi$. Em razão da unicidade não ser atendida, o problema é mal-posto.

Mais um comentário: o operador de derivação em questão aqui é $L_u = uD + I$, onde $D = \frac{d}{dx}$, I é o operador identidade e $u = 1$. Sua adjunta é $L_u^* = -uD + I$. De

acordo com o Exemplo 6 do Capítulo 2, a condição $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\xi(x) = 0$ é na verdade a condição homogênea adjunta, a qual não pode coincidir com a condição homogênea original. Aqui o **PVF** original seria aquele em (3.8), com $u = 1$. Note também que as aproximações para um casamento à direita requerem condições de fronteira no extremo esquerdo do intervalo (condições iniciais, em alusão ao caso de **PVI**'s).

O seguinte exemplo ilustra a observação 1, no final do capítulo 2, sobre soluções via funções de Green de **PVF**'s com condições de fronteira não-homogêneas.

Exemplo 10. A solução do problema

$$\begin{cases} f_2' + f_2 = f_1 \\ B_1[f_2] = f_2(a) = \frac{1}{2}e^{\frac{a}{2}}, \end{cases}$$

onde $a \in \mathbb{R}$ (qualquer), pode ser dada pela combinação da solução de (3.8) com a solução para o problema

$$\begin{cases} \tilde{f}_2' + \tilde{f}_2 = 0 \\ B_1[\tilde{f}_2] = \tilde{f}_2(a) = \frac{1}{2}e^{\frac{a}{2}} \end{cases}$$

ou seja, $\tilde{f}_2(x) = \frac{1}{2}e^{-(x-\frac{3a}{2})}$. Portanto, uma solução, garantida pelo princípio da superposição, para o problema citado é dada por

$$\int_{\mathbb{R}} G_u(x - \xi) f_1(\xi) d\xi + \frac{1}{2}e^{-(x-\frac{3a}{2})},$$

onde G_u é a função de Green para o problema (3.8).

Como visto no Exemplo 6 do Capítulo 2, os **PVF**'s cujas condições de fronteira estejam no extremo esquerdo do intervalo, correspondem a **PVI**'s. Neste caso, pode-se invocar o Teorema 4 visto ali. Os **PVF**'s com condições de fronteira no extremo direito, correspondem a **PVT**'s. Aqui será fixado que os **PVF**'s do primeiro tipo aproximarão os casamentos à direita e os **PVF**'s do segundo tipo serão problemas adjuntos daqueles de primeiro tipo e aproximarão os casamentos à esquerda. Assim, quando $u < 0$ (casamento à esquerda), o problema será proposto como um determinado problema adjunto, ou seja, como

$$\begin{cases} L_u[f_2] := -uf_2' + f_2 = f_1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

onde L_u é o operador de derivação de primeira ordem (caso constante) e $f_i \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $f_i = f_i(x)$ ($i = 1, 2$).

Pelo mesmo argumento do Exemplo acima (à luz do Exemplo 1), a função de Green para o casamento à esquerda é fornecida por

$$G_u(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{1}{u} e^{-\left(\frac{x-\xi}{u}\right)} & (x < \xi) \\ 0 & (x > \xi) \end{cases} \quad (3.15)$$

A Figura 3.5 mostra a plotagem de uma função G_u , como exemplo. Neste caso, para

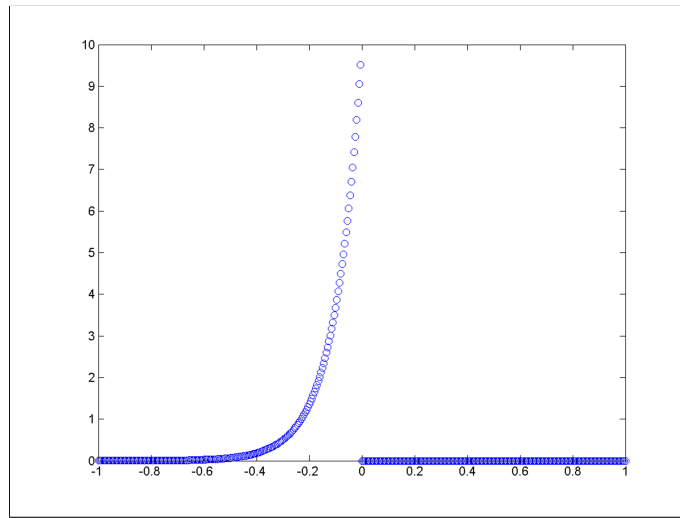


Figura 3.5: Uma função G_u plotada como função de x , para $\xi = 0$. O parâmetro usado foi $u = -0.1$.

ξ fixo, $G_u(x, \xi) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \pm\infty$ e

$$\int_{\mathbb{R}} G_u(x, \xi) d\xi = -\frac{1}{u} e^{-\frac{x}{u}} \int_x^{+\infty} e^{\frac{\xi}{u}} d\xi = 1. \quad (3.16)$$

Uma conclusão da análise feita acima é a de que as funções de Green dos casamentos à esquerda e à direita (constantes de 1ª ordem), são “bem comportadas”, no sentido que são limitadas e normalizadas.

A subseção seguinte traz uma discussão sobre as aproximações de 2ª ordem (caso constante) para a equação de casamento.

Soluções para operadores diferenciais - caso constante - 2ª ordem

Inicialmente será visto o problema de aproximação de 2ª ordem para o casamento à direita. Considere $u > 0$ e o **PVF**

$$\begin{cases} L_u[f_2] := \frac{u^2}{2}f_2'' + uf_2' + f_2 = f_1 \\ B_1[f_2] = \lim_{x \rightarrow -\infty} f_2(x) = B_2[f_2] = \lim_{x \rightarrow -\infty} f_2'(x) = 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

onde L_u é o operador de derivação de segunda ordem (caso constante) e $f_i \in C^2(\mathbb{R})$ é tal que $f_i = f_i(x)$ ($i = 1, 2$).

O objetivo é novamente, determinar uma solução do tipo (3.9). O problema acessório será

$$\begin{cases} \frac{u^2}{2}f_\xi'' + uf_\xi' + f_\xi = \delta(x - \xi) \quad (\xi > 0) \\ B_1[f_\xi] = \lim_{x \rightarrow -\infty} f_\xi(x) = B_2[f_\xi] = \lim_{x \rightarrow -\infty} f_\xi'(x) = 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

Pelo Teorema 4 a função de Green para (3.18) é dada por

$$G_u(x, \xi) = H(x - \xi)f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{2}{u} \sin\left(\frac{x-\xi}{u}\right) e^{-\left(\frac{x-\xi}{u}\right)} & (x > \xi) \\ 0 & (x < \xi) \end{cases} \quad (3.19)$$

onde $u > 0$ é uma constante. A Figura 3.6 mostra a plotagem de uma função G_u , como exemplo. Neste caso, também são verificadas as propriedades de que para ξ fixo, G_u é limitada em x ($G_u(x, \xi) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \pm\infty$) e

$$\int_{-\infty}^x G_u(x, \xi) d\xi = 1. \quad (3.20)$$

A Figura 3.7 ilustra o efeito da função G_u “convoluída” com a mesma função considerada na Figura 3.2. A função de entrada, $f_1(x)$ (linha contínua), e sua transformação $M_u[f_1](x)$ (círculos) são plotados, juntamente com $f_1 * G_u$ (cruzes), obtida como apresentado acima. No caso ilustrado, $u = 0.2$, leva a uma translação dos pontos.

A adjunta formal para o operador L_u do problema (3.17) é dada por

$$L_u^*[f_2] := \frac{u^2}{2}f_2'' - uf_2' + f_2$$

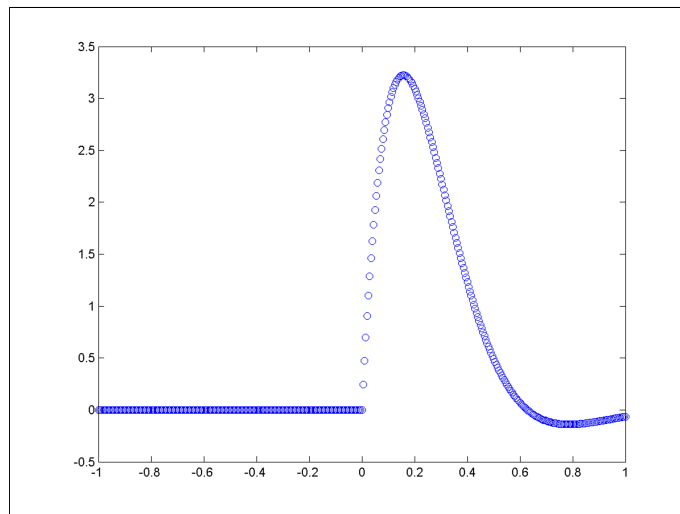


Figura 3.6: Uma função G_u plotada como função de x , para $\xi = 0$. O parâmetro usado foi $u = 0.2$.

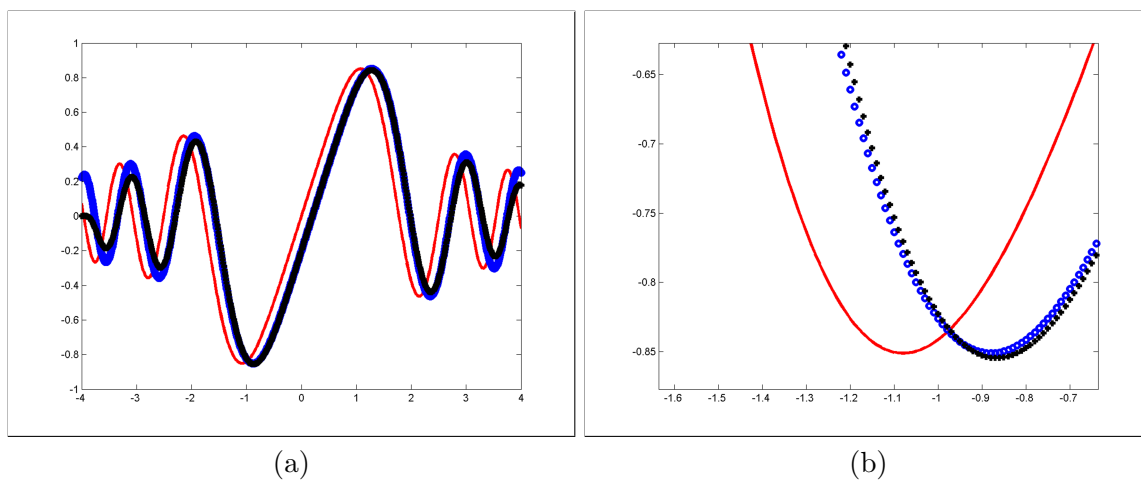


Figura 3.7: (a) Plotagens de $f_1(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$ (linha contínua), $f_2(x) = M_u[f_1](x) = \frac{\sin(x-u)^2}{(x-u)}$ (círculos), e $f_1 * G_u$ (cruzes), para o parâmetro $u = 0.2$. (b) Zoom de uma região planar contendo as curvas em (a).

Note que o operador L_u^* acima pode ser obtido por uma expansão em série de Taylor até a ordem 2, do membro esquerdo da equação $f_2(x - u) = f_1(x)$, onde u é uma constante. O operador L_u foi obtido com uma expansão de Taylor até ordem 2, do membro esquerdo de $f_2(x + u) = f_1(x)$.

Por análise similar àquela feita para o caso constante de 1ª ordem, o casamento à esquerda será aproximado com o operador L_u^* acima, acompanhado de suas condições homogêneas adjuntas

$$\begin{cases} B_1^*[f_2] = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = 0 \\ B_2^*[f_2] = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_2'(x) = 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

Analogamente, as propriedades de limitação de G_u em x (para ξ fixo) e de normalização serão mantidas.

Uma comparação entre as convoluções geradas por funções de Green do caso constante de 1ª e 2ª ordem foi feita na Figura 3.8. Nota-se, neste caso, que a

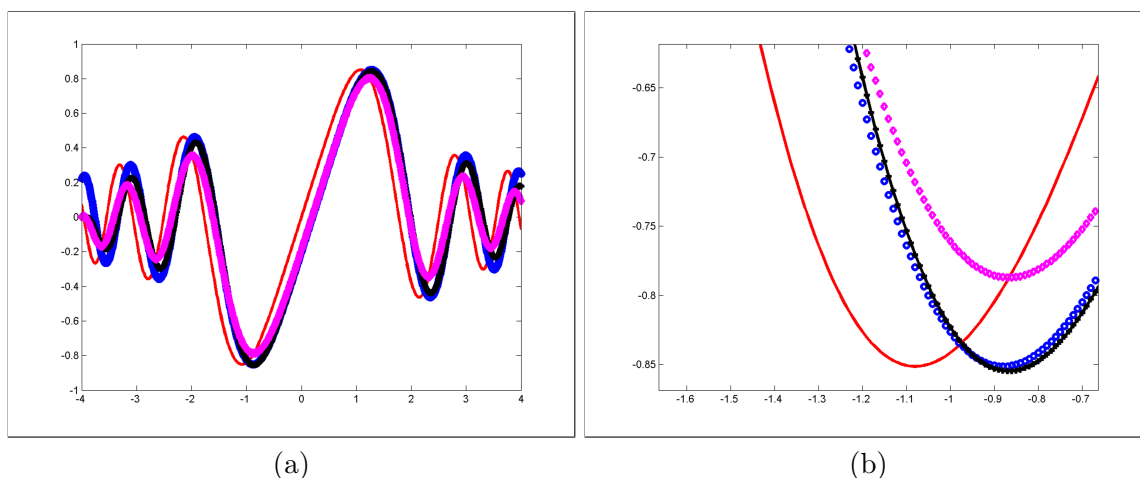


Figura 3.8: (a) Plotagens de $f_1(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$ (linha contínua), $f_2(x) = M_u[f_1](x) = \frac{\sin(x-u)^2}{(x-u)}$ (círculos), $f_1 * G_u$ em caso de 1ª ordem (losângos) e $f_1 * G_u$ em caso de 2ª ordem (cruzes), para o parâmetro $u = 0.2$. (b) Zoom de uma região planar contendo as curvas em (a).

convolução por função de Green de 1ª ordem é menos eficiente que aquela de 2ª ordem.

A próxima subseção trará uma análise de uma equação aproximante do casamento (3.1), na sua forma afim, além de apresentar as soluções por função de Green da mesma.

Soluções para operadores diferenciais - caso afim - 1ª ordem

A forma afim do problema formulado em (3.8) será dada pela substituição da constante u pela função afim $U(x) = u_0 + u_1x$, onde u_0 e u_1 são constantes. Assim, o problema (3.8) é reescrito na forma

$$\begin{cases} L_U[f_2] := (u_0 + u_1x)f_2' + f_2 = f_1 \\ B_1[f_2] = 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

onde L_U é o *operador de derivação de primeira ordem* (caso afim) e as f_i são funções C^1 por partes tal que $f_i = f_i(x)$ ($i = 1, 2$).

Aqui a formulação deste problema merece uma rediscussão, devido a algumas sutilezas inerentes ao caso. A escolha das condições de fronteira homogêneas requer mais cuidado e será investigada mais adiante. Analisando a Fig. 3.1, a idéia é formular um problema de valor de fronteira (**PVF**), num domínio \mathcal{D} apropriado. O ponto $x_U = -\frac{u_0}{u_1}$ é um ponto singular da primeira equação em (3.22), para o qual $f_2(x) = f_1(x)$. Portanto, as possibilidades de escolha para \mathcal{D} são: $\mathcal{D} \subset (x_U, +\infty)$ ou $\mathcal{D} \subset (-\infty, x_U)$.

Aqui, será adotado o método da função de Green para achar as soluções em $\mathbb{R} - \{x_U\}$. Como visto no Exemplo 7 do Capítulo 2, os pontos $\{x_U, \pm\infty\}$ são pontos singulares regulares da equação (3.22), a qual possui coeficientes analíticos em torno destes pontos. Isso garante uma solução fechada para os **PVF**'s ora estudados, nas vizinhanças daqueles pontos singulares. No ponto x_U , simplesmente ter-se-á que $f_2(x_U) = f_1(x_U)$ (x_U é ponto fixo para a aplicação M_U).

Novamente, deseja-se achar uma solução de um **PVF**, na forma

$$f_2(x) := \mathcal{G}[f_1](x) = \int_{\mathcal{D}} G(x, \xi) f_1(\xi) d\xi, \quad (3.23)$$

onde G é uma função de Green, especialmente variante, para o problema (3.22) e $f_i \in C^1(\mathcal{D})$ ($i = 1, 2$). Aqui pretende-se que a função de Green tenha propriedades similares àquelas do caso constante, como limitação em x e integral igual a 1.

De acordo com a Figura 3.1, o domínio \mathcal{D} será escolhido como visto na Tabela 3.1. Uma das diferenças entre este caso e o caso constante, é que aqui sempre haverá um casamento à esquerda e um casamento à direita. Como nos **PVF**'s do caso

Sinais de $U(x)$ e $U'(x)$	Subdomínio de G
iguais	$\mathcal{D} \subset (x_U, +\infty)$
contrários	$\mathcal{D} \subset (-\infty, x_U)$

Tabela 3.1: Critério de escolha para \mathcal{D} .

constante, o casamento à esquerda será aproximado com os operadores adjuntos dos operadores do casamento à direita. Desta vez, os **PVF**'s não serão adjuntos, pois os domínios são diferentes; apenas os operadores o serão.

Doravante serão utilizadas as seguintes notações: G_+ representará a função de Green para o casamento à direita e G_- representará a função de Green para o casamento à esquerda.

Quanto à escolha das condições de fronteira homogêneas, considere os seguintes exemplos para fixação das idéias.

Exemplo 11. *Considere o PVF*

$$\begin{cases} L_U[f_2] := x f_2' + f_2 = f_1 \\ B_1[f_2] = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = 0 \end{cases}$$

e suponha $x > 0$. Neste caso, $u_0 = 0$ e $u_1 = 1$. Este exemplo mostra um caso particular de uma aproximação de expansão em torno do ponto $x_U = 0$. Como $U(x) = x > 0$ e $U'(x) = 1 > 0$ possuem sinais iguais, $\mathcal{D} \subset (0, +\infty)$ e o casamento é realizado à direita. O problema acessório correspondente é dado por

$$\begin{cases} L[f_\xi] := x f_\xi' + f_\xi = \delta(x - \xi) \quad (0 < x, \xi < +\infty) \\ B_1[f_\xi] = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_\xi(x) = 0 \end{cases}$$

A solução deste problema será dada por

$$f_\xi(x) = \begin{cases} c_1(\xi) \frac{1}{x} & (0 < \xi < x) \\ c_2(\xi) \frac{1}{x} & (0 < x < \xi) \end{cases}$$

onde $c_i(\xi)$ ($i = 1, 2$) são constantes em relação a x . Para um parâmetro ξ fixo, a imposição da condição homogênea não fornece, neste caso, a constante $c_1(\xi)$. Esta constante é arbitrária e conseqüentemente, tem-se um problema mal-posto.

O exemplo acima mostra como não formular o problema da aproximação de uma expansão, ou seja, a escolha da condição de fronteira não é aleatória.

Exemplo 12. *Considere o PVF*

$$\begin{cases} L_U [f_2] := -x f_2' + f_2 = f_1 \\ B_1 [f_2] = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = 0 \end{cases}$$

com $x > 0$. Aqui $u_0 = 0$, $u_1 = -1$ e por conseguinte, $x_U = 0$ e $\mathcal{D} \subset (0, +\infty)$ (casamento à esquerda). Tal problema corresponde à aproximação de uma contração. A solução para o problema acessório correspondente é dada na forma

$$f_\xi(x) = \begin{cases} c_1(\xi) x & (0 < \xi < x) \\ c_2(\xi) x & (0 < x < \xi) \end{cases}$$

onde $c_i(\xi)$ ($i = 1, 2$) são constantes em relação a x . A imposição da condição homogênea fornece $c_1(\xi) = 0$, e a propriedade de descontinuidade em $x = \xi$ fornece a função de Green

$$G_-(x, \xi) = \begin{cases} 0 & (0 < \xi < x) \\ \frac{x}{\xi^2} & (0 < x < \xi) \end{cases}$$

Para ξ fixo, esta função é limitada em $(0, +\infty)$ e vale

$$\int_0^{+\infty} G_-(x, \xi) d\xi = x \int_x^{+\infty} \frac{d\xi}{\xi^2} = 1.$$

Portanto, para este caso particular de contração é possível obter uma função de Green bem comportada.

O próximo exemplo ilustra um caso particular de aproximação de uma expansão em que é possível obter uma função de Green.

Exemplo 13. *Considere $\epsilon > 0$ pequeno e arbitrário, e o PVF*

$$\begin{cases} L_U [f_2] := (1+x)f_2' + f_2 = f_1 & (-1 + \epsilon < x < +\infty) \\ B_1 [f_2] = \lim_{x \rightarrow -1+\epsilon} f_2(x) = 0 \end{cases}$$

com $x > -1$. Neste caso, $u_0 = u_1 = 1$ (expansão, com casamento à direita) e $x_U = -1$. Assim, $\mathcal{D} \subset (-1, +\infty)$. O problema acessório correspondente fornece a função

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{c_1(\xi)}{1+x} & (-1 + \epsilon < \xi < x) \\ \frac{c_2(\xi)}{1+x} & (-1 + \epsilon < x < \xi), \end{cases}$$

onde $c_i(\xi)$ ($i = 1, 2$) são constantes em relação à x e $-1 + \epsilon < x, \xi < +\infty$. Da condição homogênea segue que $c_2(\xi) = 0$. Logo, pela descontinuidade no ponto $x = \xi$, $c_1(\xi) = 1$. A função de Green correspondente é escrita como

$$G_+(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{1+x} & (-1 + \epsilon < \xi < x) \\ 0 & (-1 + \epsilon < x < \xi) \end{cases}$$

Aqui $G_+(x, \xi) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \pm\infty$ (limitada) e vale

$$\int_{-1+\epsilon}^{+\infty} G_+(x, \xi) d\xi = \frac{1}{1+x} \int_{-1+\epsilon}^x d\xi = \frac{1}{1+x} (x + 1 - \epsilon) = 1 - \frac{\epsilon}{1+x}.$$

Para um x muito grande ou quando se passa o limite quando ϵ tende a zero na expressão acima (ϵ é arbitrário), a integral tende a 1.

Portanto, este exemplo mostra como tratar o caso de expansão, de maneira razoável.

A estratégia a ser adotada aqui consistirá na escolha das condições de fronteira para os operadores $\pm U(x)f'_2 + f_2$, de maneira que se obtenha funções de Green bem comportadas.

Tendo em mente a Figura 3.1 e com base nestes exemplos, são listadas a seguir as soluções para as formulações dos PVF's tipo (3.22), correspondentes às aproximações de contração e expansão, no presente caso. Aqui o campo de movimento é dado por $U(x) = u_0 + u_1x$ (u_0 e u_1 constantes) e $U'(x) = u_1$.

A Tabela 3.2 fornece as informações acerca dos PVF's (3.22), para os casos de contração e expansão. Abaixo seguem as funções de Green referentes aos PVF's tipo (3.22) constando naquela Tabela.

II. Caso de Contração:

Sob as condições vistas acima, as funções de Green para os casamentos à direita e à

Caso de Contração		
	Casamento à direita	Casamento à esquerda
Sinal de $U(x)$	+	-
Sinal de $U'(x)$	-	-
Domínio	$\mathcal{D} \subset (-\infty, x_U)$	$\mathcal{D} \subset (x_U, +\infty)$
Operador	$U(x)f_2' + f_2$	$-U(x)f_2' + f_2$
Condição de Fronteira	$B_1[f_2] = \lim_{x \rightarrow -\infty} f_2(x) = 0$	$B_1[f_2] = f_2(a) = 0 \ (a > x_U)$
Caso de Expansão		
	Casamento à direita	Casamento à esquerda
Sinal de $U(x)$	+	-
Sinal de $U'(x)$	+	+
Domínio	$\mathcal{D} \subset (x_U, +\infty)$	$\mathcal{D} \subset (-\infty, x_U)$
Operador	$U(x)f_2' + f_2$	$-U(x)f_2' + f_2$
Condição de Fronteira	$B_1[f_2] = f_2(a) = 0 \ (a > x_U)$	$B_1[f_2] = \lim_{x \rightarrow -\infty} f_2(x) = 0$

Tabela 3.2: Dados sobre aproximações de 1ª ordem para contrações e expansões.

esquerda são dadas, respectivamente, por

$$G_+(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{1}{u_1} \frac{(x_U - \xi)^{\frac{1}{u_1} - 1}}{(x_U - x)^{\frac{1}{u_1}}} & (\xi < x < x_U) \\ 0 & (x < \xi < x_U) \end{cases}$$

e

$$G_-(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{1}{u_1} \frac{(x - x_U)^{\frac{1}{u_1}}}{(\xi - x_U)^{\frac{1}{u_1} + 1}} & (a < \xi < x) \\ 0 & (a < x < \xi) \end{cases}$$

Tais funções satisfazem as seguintes propriedades: (a) $G_+(x, \xi) \rightarrow 0$ se $x \rightarrow -\infty$ ou $x \rightarrow x_U^-$, (b) $G_-(a, \xi) = 0$, e (c) segue abaixo:

$$\int_{-\infty}^{x_U} G_+(x, \xi) d\xi = 1.$$

e

$$\int_a^{+\infty} G_-(x, \xi) d\xi = 1 - \left(\frac{x - x_U}{a - x_U} \right)^{\frac{1}{u_1}}.$$

Note que no segundo caso, se a está muito próximo a x_U seu membro direito pode ser considerado desprezível e a integral será aproximadamente 1.

III. Caso de Expansão:

Neste caso, as funções de Green para os casamentos à direita e à esquerda são dadas, respectivamente, por

$$G_+(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{u_1} \frac{(\xi - x_U)^{\frac{1}{u_1} - 1}}{(x - x_U)^{\frac{1}{u_1}}} & (a < \xi < x) \\ 0 & (a < x < \xi) \end{cases}$$

e

$$G_-(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{u_1} \frac{(x_U - x)^{\frac{1}{u_1}}}{(x_U - \xi)^{\frac{1}{u_1} + 1}} & (\xi < x < x_U) \\ 0 & (x < \xi < x_U) \end{cases}$$

Tais funções satisfazem as seguintes propriedades: (a) $G_+(a, \xi) = 0$, (b) $G_-(x, \xi) \rightarrow 0$ se $x \rightarrow -\infty$ ou $x \rightarrow x_U^-$ e (c) segue abaixo

$$\int_a^{+\infty} G_+(x, \xi) d\xi = 1 - \left(\frac{a - x_U}{x - x_U} \right)^{\frac{1}{u_1}}$$

e

$$\int_{-\infty}^{x_U} G_-(x, \xi) d\xi = 1.$$

Aqui no primeiro caso, se a está muito próximo a x_U , seu membro direito pode ser considerado desprezível e a integral será aproximadamente 1.

Conclusão: em ambos os casos, as condições de fronteira são tomadas no início do intervalo de definição do problema.

A Figura 3.9 mostra a plotagem de uma função G_+ , como exemplo de aproximação para uma expansão.

A Figura 3.10 ilustra o efeito da função G_+ obtida na Fig. 3.9, “convoluída” com a mesma função considerada na Figura 3.2. A função de entrada, $f_1(x)$ (linha contínua), e sua transformação $M_U[f_1](x)$ (círculos) são plotados, juntamente

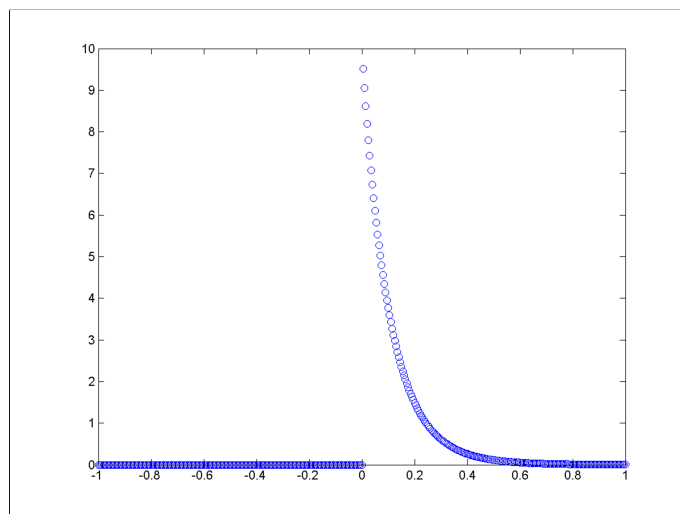


Figura 3.9: Uma função G_+ plotada como função de x , para $\xi = 0$. Os parâmetros usados foram $u_0 = 0.1$ e $u_1 = 0.05$. Observa-se salto de descontinuidade se $\xi = 0$, onde $G_+(0, 0) = 10$.

com $f_1 * G_+$ (cruzes), obtida como apresentado acima. Nos casos ilustrados, são obtidas translações seguidas de expansões dos pontos. A Figura 3.10(a) mostra o comportamento do operador de Green para valores altos do par (u_0, u_1) . Naquele caso, $(u_0, u_1) = (2, 1)$ gera aproximação razoável, de M_U pela \mathcal{G} , para alguns pontos suficientemente próximos de $x_U = -2$. Em contrapartida, valores mais baixos do par (u_0, u_1) mostram-se mais apropriados para a aproximação dos operadores, em pontos mais afastados de x_U . Neste caso, $(u_0, u_1) = (0.1, 0.05)$. É possível notar um erro de reconstrução da curva na vizinhança daquele ponto.

Uma ilustração dos papéis das funções G_+ e G_- , na aproximação do casamento afim, é apresentada na Figura 3.11. Por exemplo, na geração de uma expansão, ilustrada pela Fig. 3.11(a), o valor de f_2 num ponto x do intervalo $(x_U, +\infty)$, dependerá dos valores $f_1(\xi)$ para todo $\xi < x$. Cada um desses valores serão ponderados pelo valor da função de Green correspondente $G_+(x, \xi)$, de acordo com a equação (3.23). Similarmente, em cada ponto do intervalo $(-\infty, x_U)$, os valores de $f_1(\xi)$ para todo $\xi > x$, serão ponderados por $G_-(x, \xi)$. Dessa forma, produz-se $f_2(x)$. Na geração de uma contração, ilustrada pela Fig. 3.11(b), o valor de f_2 é calculado de maneira similar.

Uma comparação dos casos constante e afim é mostrada na Figura 3.12. Naquele caso o valor de u_1 é grande relativamente ao valor de u_0 . Apesar disso, as curvas possuem quase o mesmo traçado. Quando $u_1 \rightarrow 0$, $G_+(x, \xi) \rightarrow G_u(x, \xi)$.

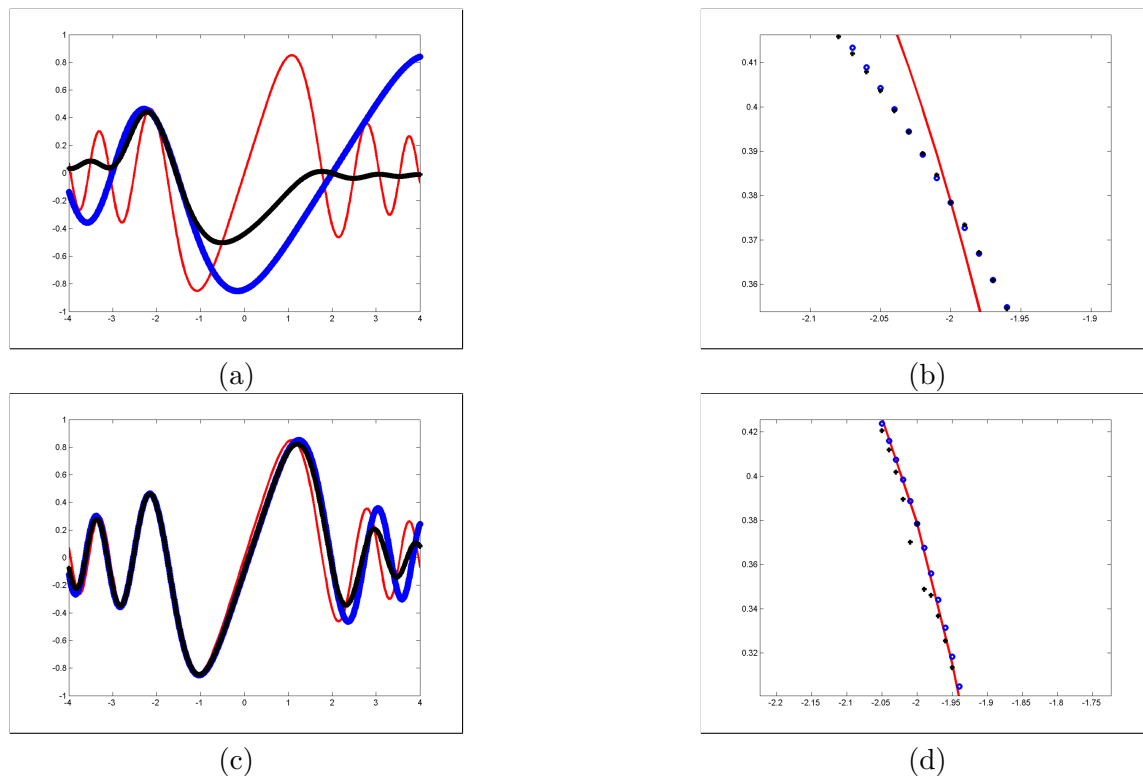


Figura 3.10: Plotagens de $f_1(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$ (linha contínua), $f_2(x) = M_U[f_1](x) = \frac{\sin\left(\frac{x-u_0}{1+u_1}\right)^2}{\left(\frac{x-u_0}{1+u_1}\right)}$ (círculos), e $f_1 * G_+$ (cruzes). (a) Operadores atuando com parâmetros $(u_0, u_1) = (2, 1)$. (b) Zoom de uma região planar contendo as curvas em (a), numa vizinhança de x_U . (c) Operadores atuando com parâmetros $(u_0, u_1) = (0.1, 0.05)$. (d) Zoom de uma região planar contendo as curvas em (c), numa vizinhança de x_U . Apesar de aproximar melhor M_U , a curva gerada por \mathcal{G} também apresenta falha de reconstrução.

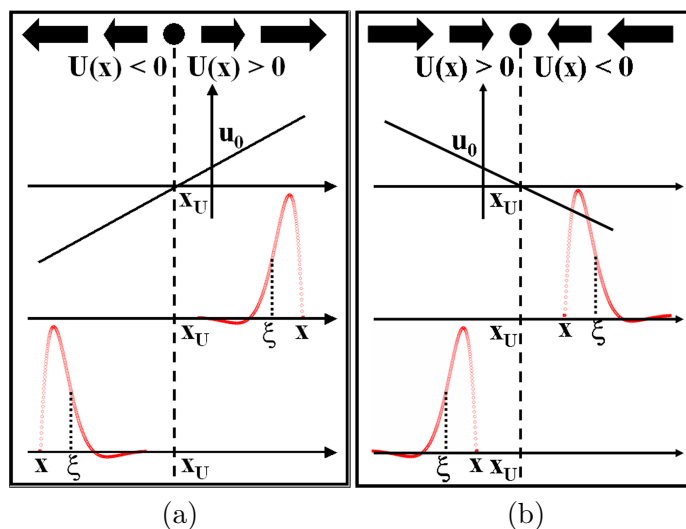


Figura 3.11: Ilustração dos papéis das funções G_+ e G_- na reconstrução de uma função. (a) Expansão, com $u_0 > 0$ e $u_1 > 0$: A plotagem no centro mostra $G_+(x, \xi)$, e a plotagem de baixo mostra $G_-(x, \xi)$, como as funções de ξ , para um x fixo. (b) Contração, com $u_0 > 0$ e $u_1 < 0$: Analogamente como em (a), porém com G_- sendo mostrado na plotagem do centro e G_+ na plotagem de baixo.

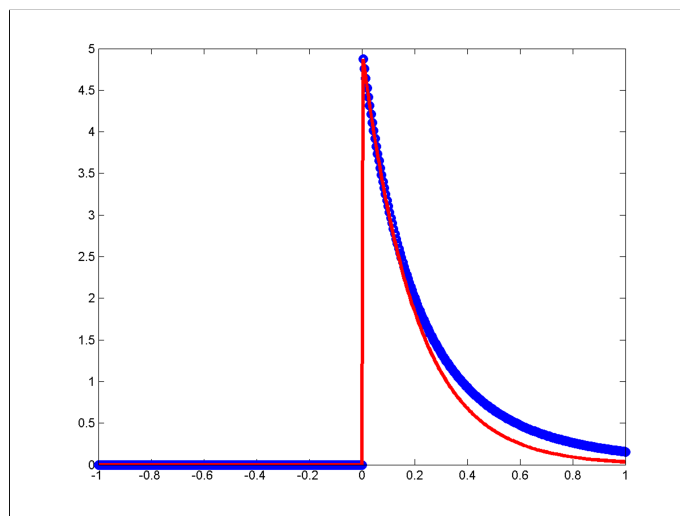


Figura 3.12: Plotagens de $G_+(x, \xi)$ (círculos) e $G_u(x, \xi)$ (linha contínua), para os parâmetros $u_0 = u_1 = u = 0.2$ ($x_U = -1$).

A subseção seguinte traz a análise do operador diferencial de segunda ordem para o caso afim.

Soluções para operadores diferenciais - caso afim - 2ª ordem

Agora é a vez de estudar aproximações da equação de casamento (3.1), através da reformulação do problema (3.22). Neste caso, a primeira equação será de 2ª ordem e o **PVF** será descrito na forma

$$\begin{cases} L_U [f_2] := \frac{(u_0+u_1x)^2}{2} f_2'' + (u_0 + u_1x) f_2' + f_2 = f_1 \\ B_1 [f_2] = 0 \\ B_2 [f_2] = 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

onde L_U é o operador de derivação de segunda ordem (caso afim) e as f_i são funções C^2 por partes tal que $f_i = f_i(x)$ ($i = 1, 2$).

A primeira equação em (3.24) possui a forma de Cauchy-Euler, a qual é analítica em torno de seus pontos singulares, $\{x_U, \pm\infty\}$ [50]. Sua solução por função de Green será expressa, sobre um domínio \mathcal{D} apropriado, como

$$f_2(x) := \mathcal{G} [f_1] (x) = \int_{\mathcal{D}} G(x, \xi) f_1(\xi) d\xi, \quad (3.25)$$

onde G é uma função de Green, especialmente variante, para o problema (3.24) e $f_i \in C^2(\mathcal{D})$ ($i = 1, 2$). Aqui serão investigadas formulações de **PVF**'s, como no caso afim de 1ª ordem. A Fig. 3.1, a Tabela 3.1 e as notações utilizadas para as funções de Green para os casamentos à direita e à esquerda afins, serão mantidas para o caso presente.

Os exemplos a seguir fazem parte da análise para a escolha das condições (ou dos funcionais) de fronteira, B_1 e B_2 , do sistema de equações (3.24).

Exemplo 14. Considere o **PVF**

$$\begin{cases} L_U [f_2] := \frac{x^2}{2} f_2'' - x f_2' + f_2 = f_1 \\ B_1 [f_2] = \lim_{x \rightarrow -\infty} f_2(x) = 0 \\ B_2 [f_2] = \lim_{x \rightarrow -\infty} f_2'(x) = 0, \end{cases}$$

com $x < 0$. Aqui $u_0 = 0$ e $u_1 = -1$, logo $x_U = 0$ e $\mathcal{D} \subset (-\infty, 0)$ (casamento à direita). Esta aproximação de uma contração corresponde ao problema acessório

$$\begin{cases} L_U [f_\xi] := \frac{x^2}{2} f_\xi'' - x f_\xi' + f_\xi = \delta(x - \xi) & (-\infty < x, \xi < 0) \\ B_1 [f_\xi] = \lim_{x \rightarrow -\infty} f_\xi(x) = 0 \\ B_2 [f_\xi] = \lim_{x \rightarrow -\infty} f_\xi'(x) = 0 \end{cases}$$

Para solucionar a equação de Cauchy-Euler que ali aparece, põe-se $f_\xi(x) = (-x)^r$, para certo r [50]. Neste caso,

$$L_U [(-x)^r] = q(r) (-x)^r$$

onde

$$q(r) = \frac{r^2}{2} - 3\frac{r}{2} + 1$$

é chamado de Polinômio Indicial para a Equação de Cauchy-Euler. As raízes do polinômio indicial fornecem a seguinte solução para o problema acessório:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} -c_1(\xi) x + c_2(\xi) x^2 & (\xi < x < 0) \\ -c_3(\xi) x + c_4(\xi) x^2 & (x < \xi < 0) \end{cases}$$

onde $c_i(\xi)$ ($i = 1, \dots, 4$) são constantes em relação à x . As condições de fronteira homogêneas permitem concluir que $c_3(\xi) = c_4(\xi) \equiv 0$. Logo,

$$f_\xi(x) = \begin{cases} -c_1(\xi) x + c_2(\xi) x^2 & (\xi < x < 0) \\ 0 & (x < \xi < 0) \end{cases}$$

Como f_ξ é contínua em $x = \xi$ (Teorema 4), $c_1(\xi) = c_2(\xi) \xi$. Agora, o salto de descontinuidade de 1ª ordem em $x = \xi$, isto é,

$$f'_\xi(\xi+) - f'_\xi(\xi-) = \frac{2}{\xi^2},$$

fornece $c_2(\xi) = \frac{2}{\xi^3}$. Portanto, $c_1(\xi) = \frac{2}{\xi^2}$ e a função de Green procurada torna-se

$$G_-(x, \xi) = \begin{cases} \frac{2}{\xi^2}(x^2 - x) & (\xi < x < 0) \\ 0 & (x < \xi < 0) \end{cases}$$

Note que $G_-(x, \xi) \rightarrow 0$ e $G'_-(x, \xi) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow -\infty$ (ξ é fixo) e

$$\int_{-\infty}^0 G_-(x, \xi) d\xi = (x^2 - x) \int_{-\infty}^x \frac{d\xi}{\xi^2} = 1 - x.$$

Neste caso, a integral é sempre maior que 1 e diverge para valor grande de x . A função de Green aqui, não é bem comportada, no sentido do que foi visto anteriormente.

A solução por funções de Green para os **PVF's** de 2ª ordem formulados aqui, dependerão das raízes dos polinômios indiciais $q(r)$, que surgirão em cada caso.

Para o caso afim de 1ª ordem as condições de fronteira foram consideradas no início de cada intervalo onde os **PVF's** eram definidos. No presente caso, as condições de fronteira podem ser consideradas nos pontos singulares regulares impróprios, ou seja, em $\{\pm\infty\}$. Os **PVF's** formulados fornecem funções de Green bem comportadas, neste caso.

A Tabela 3.3 fornece as informações acerca dos **PVF's** (3.24), para os casos de contração e expansão. Abaixo seguem as funções de Green referentes aos **PVF's**

Caso de Contração		
	Casamento à direita	Casamento à esquerda
Sinal de $U(x)$	+	-
Sinal de $U'(x)$	-	-
Domínio	$\mathcal{D} \subset (-\infty, x_U)$	$\mathcal{D} \subset (x_U, +\infty)$
Operador	$\frac{U(x)^2}{2} f_2'' + U(x) f_2' + f_2$	$\frac{U(x)^2}{2} f_2'' - U(x) f_2' + f_2$
Condição de Fronteira 1	$B_1[f_2] = \lim_{x \rightarrow -\infty} f_2(x) = 0$	$B_1[f_2] = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = 0$
Condição de Fronteira 2	$B_2[f_2] = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_2'(x) = 0$	$B_2[f_2] = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_2'(x) = 0$
Caso de Expansão		
	Casamento à direita	Casamento à esquerda
Sinal de $U(x)$	+	-
Sinal de $U'(x)$	+	+
Domínio	$\mathcal{D} \subset (x_U, +\infty)$	$\mathcal{D} \subset (-\infty, x_U)$
Operador	$\frac{U(x)^2}{2} f_2'' + U(x) f_2' + f_2$	$\frac{U(x)^2}{2} f_2'' - U(x) f_2' + f_2$
Condição de Fronteira 1	$B_1[f_2] = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = 0$	$B_1[f_2] = \lim_{x \rightarrow -\infty} f_2(x) = 0$
Condição de Fronteira 2	$B_2[f_2] = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_2'(x) = 0$	$B_2[f_2] = \lim_{x \rightarrow -\infty} f_2'(x) = 0$

Tabela 3.3: Dados sobre aproximações de 2ª ordem para contrações e expansões.

tipo (3.24) constando naquela Tabela.

II. Caso de Contração:

Sob as condições vistas acima, as funções de Green para os casamentos à direita e à esquerda são dadas, respectivamente, por

Caso de raízes complexas:

$$G_+(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{2}{u_1^2 \beta (x_U - \xi)} \left[\frac{x_U - x}{x_U - \xi} \right]^\alpha \operatorname{sen} \left\{ \beta \log \left[\frac{x_U - x}{x_U - \xi} \right] \right\} & (\xi < x < x_U) \\ 0 & (x < \xi < x_U), \end{cases}$$

com

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{u_1} \\ \beta = -\frac{1}{u_1} \sqrt{1 + u_1 - \frac{u_1^2}{4}} \\ 2(1 - \sqrt{2}) < u_1 < 2(1 + \sqrt{2}) \end{cases}$$

e

$$G_-(x, \xi) = \begin{cases} 0 & (x_U < \xi < x) \\ -\frac{2}{u_1^2 \beta (\xi - x_U)} \left[\frac{x - x_U}{\xi - x_U} \right]^\alpha \operatorname{sen} \left\{ \beta \log \left[\frac{x - x_U}{\xi - x_U} \right] \right\} & (x_U < x < \xi), \end{cases}$$

com

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{u_1} \\ \beta = -\frac{1}{u_1} \sqrt{1 - u_1 - \frac{u_1^2}{4}} \\ 2(-1 - \sqrt{2}) < u_1 < 2(-1 + \sqrt{2}) \end{cases}$$

Caso de raízes reais e distintas:

$$G_+(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{2}{u_1^2(r_2-r_1)(x_U-\xi)} \left[\left(\frac{x_U-x}{x_U-\xi} \right)^{r_2} - \left(\frac{x_U-x}{x_U-\xi} \right)^{r_1} \right] & (\xi < x < x_U) \\ 0 & (x < \xi < x_U), \end{cases}$$

com

$$\begin{cases} r_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_1} \sqrt{-1 - u_1 + \frac{u_1^2}{4}} \\ r_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_1} \sqrt{-1 - u_1 + \frac{u_1^2}{4}} \\ u_1 < 2(1 - \sqrt{2}) \text{ ou } u_1 > 2(1 + \sqrt{2}) \end{cases}$$

e

$$G_-(x, \xi) = \begin{cases} 0 & (x_U < \xi < x) \\ -\frac{2}{u_1^2(r_2-r_1)(\xi-x_U)} \left[\left(\frac{x-x_U}{\xi-x_U} \right)^{r_2} - \left(\frac{x-x_U}{\xi-x_U} \right)^{r_1} \right] & (x_U < x < \xi), \end{cases}$$

com

$$\begin{cases} r_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_1} \sqrt{-1 + u_1 + \frac{u_1^2}{4}} \\ r_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_1} \sqrt{-1 + u_1 + \frac{u_1^2}{4}} \\ u_1 < 2(-1 - \sqrt{2}) \text{ ou } u_1 > 2(-1 + \sqrt{2}) \end{cases}$$

Caso de raízes reais e iguais:

$$G_+(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{2}{u_1^2(x_U-\xi)} \left[\frac{x_U-x}{x_U-\xi} \right]^r \log \left[\frac{x_U-x}{x_U-\xi} \right] & (\xi < x < x_U) \\ 0 & (x < \xi < x_U), \end{cases}$$

com

$$\begin{cases} r = \frac{1}{2} - \frac{1}{u_1} \\ u_1 = 2(1 - \sqrt{2}) \end{cases}$$

e

$$G_-(x, \xi) = \begin{cases} 0 & (x_U < \xi < x) \\ -\frac{2}{u_1^2(\xi-x_U)} \left[\frac{x-x_U}{\xi-x_U} \right]^r \log \left[\frac{x-x_U}{\xi-x_U} \right] & (x_U < x < \xi), \end{cases}$$

com

$$\begin{cases} r = \frac{1}{2} + \frac{1}{u_1} \\ u_1 = 2(-1 - \sqrt{2}) \end{cases}$$

Tais funções satisfazem as seguintes propriedades: (a) $G_+(x, \xi) \rightarrow 0$, $G'_+(x, \xi) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow -\infty$, e $G_-(x, \xi) \rightarrow 0$, $G'_-(x, \xi) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow +\infty$ se, e só se, α, r_1, r_2 e $r \geq 0$ e (b) segue abaixo

$$\int_{\mathcal{D}} G_{\pm}(x, \xi) d\xi = 1,$$

onde \mathcal{D} é dado de acordo com a Tabela 3.1.

III. Caso de Expansão:

Neste caso, as funções de Green para os casamentos à direita e à esquerda são dadas, respectivamente, por

Caso de raízes complexas:

$$G_+(x, \xi) = \begin{cases} 0 & (x_U < \xi < x) \\ -\frac{2}{u_1^2\beta(\xi-x_U)} \left[\frac{x-x_U}{\xi-x_U} \right]^{\alpha} \text{sen} \left\{ \beta \log \left[\frac{x-x_U}{\xi-x_U} \right] \right\} & (x_U < x < \xi), \end{cases}$$

com

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{u_1} \\ \beta = \frac{1}{u_1} \sqrt{1 + u_1 - \frac{u_1^2}{4}} \\ 2(1 - \sqrt{2}) < u_1 < 2(1 + \sqrt{2}) \end{cases}$$

e

$$G_-(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{2}{u_1^2 \beta (x_U - \xi)} \left[\frac{x_U - x}{x_U - \xi} \right]^\alpha \operatorname{sen} \left\{ \beta \log \left[\frac{x_U - x}{x_U - \xi} \right] \right\} & (\xi < x < x_U) \\ 0 & (x < \xi < x_U), \end{cases}$$

com

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{u_1} \\ \beta = \frac{1}{u_1} \sqrt{1 - u_1 - \frac{u_1^2}{4}} \\ 2(-1 - \sqrt{2}) < u_1 < 2(-1 + \sqrt{2}) \end{cases}$$

Caso de raízes reais e distintas:

$$G_+(x, \xi) = \begin{cases} 0 & (x_U < \xi < x) \\ -\frac{2}{u_1^2 (r_2 - r_1) (\xi - x_U)} \left[\left(\frac{x - x_U}{\xi - x_U} \right)^{r_2} - \left(\frac{x - x_U}{\xi - x_U} \right)^{r_1} \right] & (x_U < x < \xi), \end{cases}$$

com

$$\begin{cases} r_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_1} \sqrt{-1 - u_1 + \frac{u_1^2}{4}} \\ r_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_1} \sqrt{-1 - u_1 + \frac{u_1^2}{4}} \\ u_1 < 2(1 - \sqrt{2}) \text{ ou } u_1 > 2(1 + \sqrt{2}) \end{cases}$$

e

$$G_-(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{2}{u_1^2 (r_2 - r_1) (x_U - \xi)} \left[\left(\frac{x_U - x}{x_U - \xi} \right)^{r_2} - \left(\frac{x_U - x}{x_U - \xi} \right)^{r_1} \right] & (\xi < x < x_U) \\ 0 & (x < \xi < x_U), \end{cases}$$

com

$$\begin{cases} r_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_1} \sqrt{-1 + u_1 + \frac{u_1^2}{4}} \\ r_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_1} \sqrt{-1 + u_1 + \frac{u_1^2}{4}} \\ u_1 < 2(-1 - \sqrt{2}) \text{ ou } u_1 > 2(-1 + \sqrt{2}) \end{cases}$$

Caso de raízes reais e iguais:

$$G_+(x, \xi) = \begin{cases} 0 & (x_U < \xi < x) \\ -\frac{2}{u_1^2(\xi - x_U)} \left[\frac{x - x_U}{\xi - x_U} \right]^r \log \left[\frac{x - x_U}{\xi - x_U} \right] & (x_U < x < \xi), \end{cases}$$

com

$$\begin{cases} r = \frac{1}{2} - \frac{1}{u_1} \\ u_1 = 2(1 + \sqrt{2}) \end{cases}$$

e

$$G_-(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{2}{u_1^2(x_U - \xi)} \left[\frac{x_U - x}{x_U - \xi} \right]^r \log \left[\frac{x_U - x}{x_U - \xi} \right] & (\xi < x < x_U) \\ 0 & (x < \xi < x_U), \end{cases}$$

com

$$\begin{cases} r = \frac{1}{2} + \frac{1}{u_1} \\ u_1 = 2(-1 + \sqrt{2}) \end{cases}$$

Tais funções satisfazem as seguintes propriedades: (a) $G_+(x, \xi) \rightarrow 0$, $G'_+(x, \xi) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow +\infty$, e $G_-(x, \xi) \rightarrow 0$, $G'_-(x, \xi) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow -\infty$ se, e só se, α, r_1, r_2 e $r \geq 0$ e (b) segue abaixo

$$\int_{\mathcal{D}} G_{\pm}(x, \xi) d\xi = 1,$$

onde \mathcal{D} é dado de acordo com a Tabela 3.1.

Conclusão: em ambos os casos, as condições de fronteira são tomadas no ponto singular regular impróprio da equação diferencial em questão.

A Figura 3.13 mostra as plotagens de funções G_+ ($U' < 0$ - contração).

A Figura 3.14 ilustra o efeito das funções de Green, referentes à Fig. 3.13, “convoluídas” com a mesma função considerada na Figura 3.2. A função de entrada, $f_1(x)$ (linha contínua), e sua transformação afim $M_U[f_1](x)$ (círculos) são plotadas,

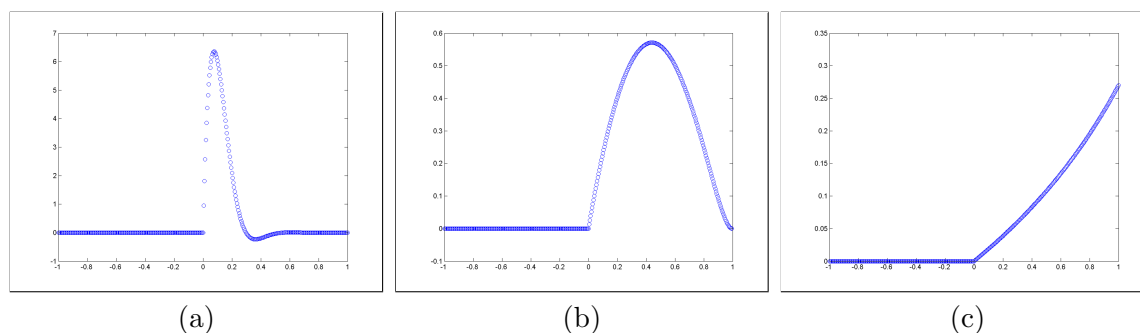


Figura 3.13: Funções G_+ plotadas como funções de x , para $\xi = 0$. (a) Polinômio indicial, $q(r)$, com raízes complexas. (b) Polinômio indicial com raízes reais e distintas. (c) Polinômio indicial com raízes reais e iguais.

juntamente com $f_1 * G$ (cruzes), obtida como apresentado acima. Note que as curvas de f_1 , $M_U[f_1]$ e $f_1 * G$ coincidem naquele ponto fixo, como esperado. Os gráficos da coluna direita da Fig. 3.14 são um zoom de uma região planar referente aos gráficos da coluna esquerda, em torno do ponto x_U . As Fig. 3.14(a)-(b) mostram curvas obtidas por funções de Green, com os parâmetros $(u_0, u_1, x_U) = (0.1, -0.05, 2)$, para raízes complexas. Neste caso, note que não existem aquelas “anomalias” vistas no caso afim de 1ª ordem (saltos de descontinuidade das funções reconstruídas, em torno do ponto x_U). As Fig. 3.14(c)-(d) mostram o comportamento inadequado para o caso de raízes reais e distintas. Os gráficos gerados pelas funções de Green não acompanham as oscilações das curvas geradas pelo operador de casamento exato. Os parâmetros utilizados foram $(u_0, u_1, x_U) = (0.875, -0.875, 1)$. Finalmente, as Fig. 3.14(e)-(f) permitem concluir que o caso de raízes reais, realmente, não é o mais apropriado para aproximações por funções de Green de casamento. O caso de raízes reais e iguais possui comportamento similar ao caso de raízes reais e distintas. Neste último caso, os parâmetros de movimento foram $(u_0, u_1, x_U) = (1.66, -0.83, 2)$.

Uma comparação entre os casos afim de 1ª e 2ª ordem pode ser vista na Fig. 3.15. Mesmo abstraído o comportamento da função de Green em torno do ponto x_U , no caso de 1ª ordem, sua performance fica aquém da função de Green do caso de 2ª ordem.

Diante das análises feitas, a conclusão é a de que eleger as funções de Green do caso de 2ª ordem para aproximação de soluções dos PVF's vistos, é a melhor opção.

Outro fato que deve ser destacado é que quando $u_1 \rightarrow 0$, $G \rightarrow G_u$.

Na seção subsequente serão considerados casos de extensões para o \mathbb{R}^2 , do método desenvolvido na presente seção. Tais extensões serão consideradas em termos de duas componentes (direções) de movimento independentes.

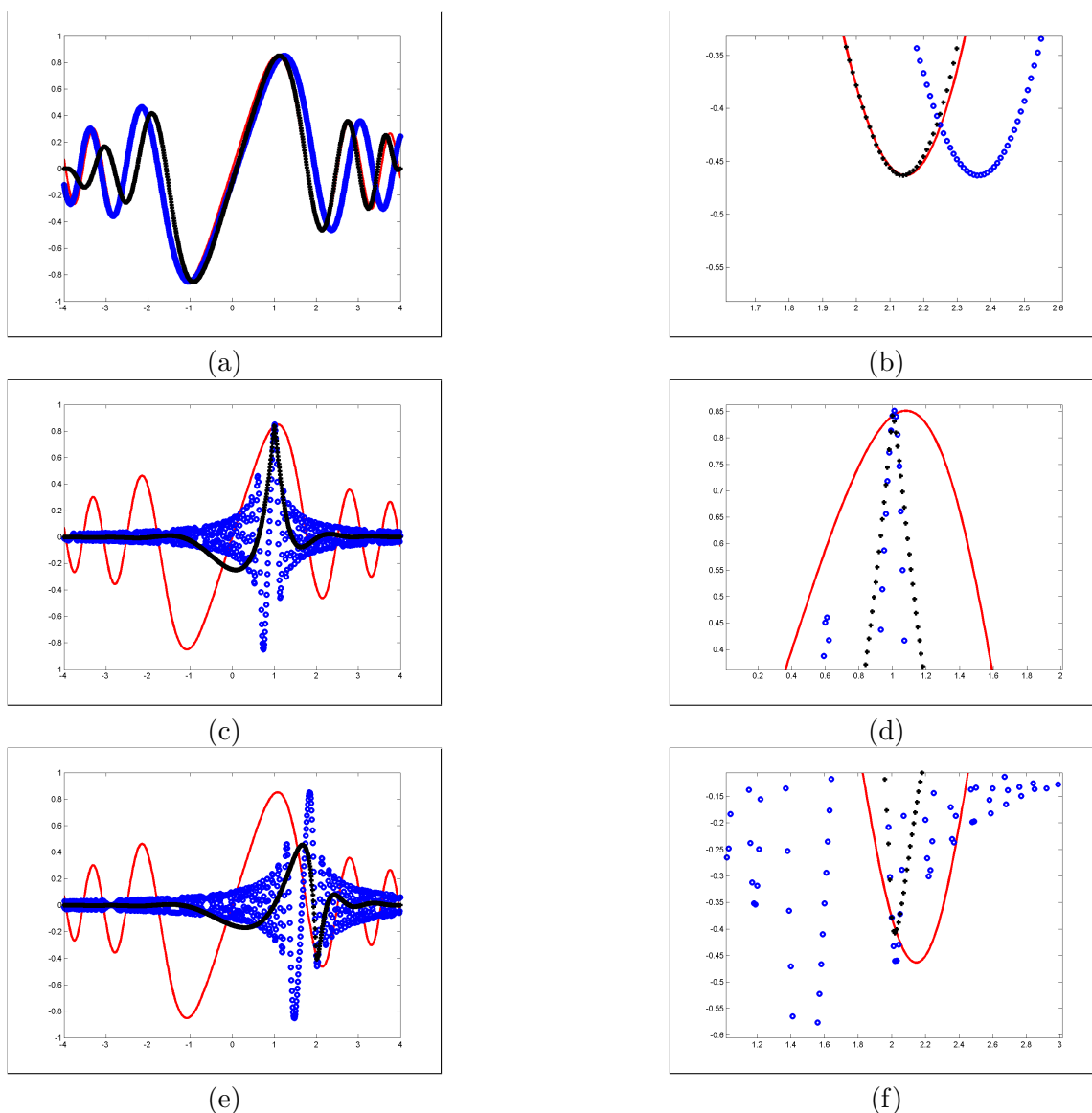


Figura 3.14: Plotagens de $f_1(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$ (linha contínua), $f_2(x) = M_U[f_1](x) = \frac{\sin\left(\frac{x-u_0}{1+u_1}\right)^2}{\left(\frac{x-u_0}{1+u_1}\right)}$ (círculos), e $f_1 * G_+$ (cruzes). (a) Operadores atuando com parâmetros $(u_0, u_1) = (0.1, -0.05)$, quando $q(r)$ possui raízes complexas. (b) Zoom de uma região planar contendo as curvas em (a), em torno do ponto $x_U = 2$. (c) Operadores atuando com parâmetros $(u_0, u_1) = (0.875, -0.875)$, quando $q(r)$ possui raízes reais e distintas. (d) Zoom de uma região planar contendo as curvas em (c), em torno do ponto $x_U = 1$. (e) Operadores atuando com parâmetros $(u_0, u_1) = (1.66, -0.83)$, quando $q(r)$ possui raízes reais e iguais. (f) Zoom de uma região planar contendo as curvas em (e), em torno do ponto $x_U = 2$.

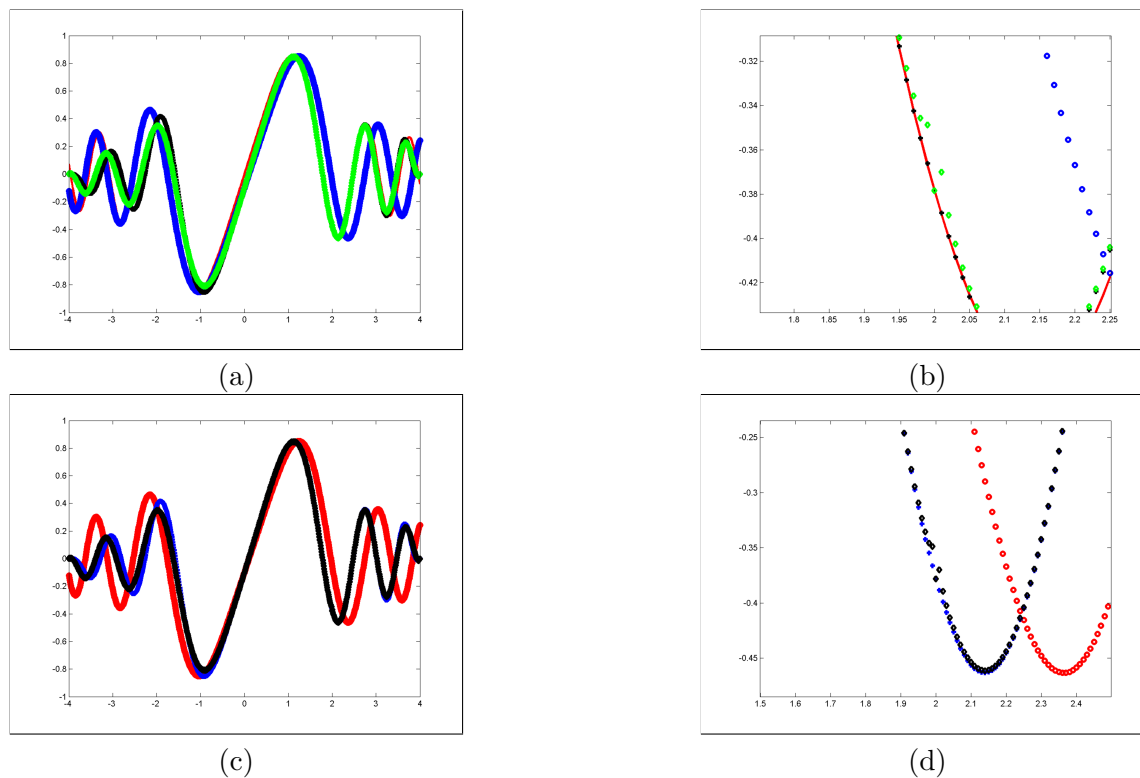


Figura 3.15: Plotagens de $f_1(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$ (círculos), $f_2(x) = M_U[f_1](x) = \frac{\sin(\frac{x-u_0}{1+u_1})^2}{(\frac{x-u_0}{1+u_1})}$ (linha contínua), e as $f_1 * G_+$, para os casos afim de 1^a ordem (losângos) e 2^a ordem, com raízes complexas para $q(r)$ (cruzes). (a) Operadores atuando com parâmetros $(u_0, u_1) = (0.1, -0.05)$. (b) Zoom de uma região planar contendo as curvas em (a), em torno do ponto $x_U = 2$. (c) Apenas os operadores $f_1(x)$ (círculos) e as $f_1 * G_+$ de 1^a ordem (losângos) e 2^a ordem (cruzes), foram plotados. (d) Zoom de uma região planar contendo as curvas em (c), em torno do ponto $x_U = 2$.

3.4 Estendendo ao Casamento Bidimensional

Para a presente seção será considerada uma extensão das aproximações da equação (3.1), para o caso 2D, ou seja, a equação de casamento será dada na forma

$$f_2(x + U, y + V) = f_1(x, y), \quad (3.26)$$

onde f_1 e f_2 são funções de classe C^2 . A equação (3.26) é chamada de *equação de casamento afim bidimensional*. Sob o modelo afim 2D, as componentes de movimento U e V , na equação (3.26), tomam a forma

$$\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{b} + \mathcal{A} \cdot \mathbf{X}, \quad (3.27)$$

com

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{b} = [u_0 \ v_0]^T \\ \mathcal{A} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{X} = [x \ y]^T \\ u_i \text{ e } v_i \text{ constantes } (i = 0, 1, 2) \end{array} \right. \quad (3.28)$$

Como no caso 1D, a extensão será analisada para os modelos constante ($\mathcal{A} = 0$)¹ e afim de movimento.

3.4.1 Operadores diferenciais de 1ª ordem - caso constante

Considere $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e suponha $u_0, v_0 > 0$. Executando uma expansão em série de Taylor, até a ordem 1, no membro esquerdo da equação (3.26), obtém-se a equação diferencial parcial (**EDP**)

$$u_0 \frac{\partial f_2}{\partial x} + v_0 \frac{\partial f_2}{\partial y} + f_2 = f_1. \quad (3.29)$$

O objetivo agora é montar um **PVF** envolvendo a **EDP** acima. Assim, considere o **PVF** seguinte:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{U,V} [f_2] := u_0 \frac{\partial f_2}{\partial x} + v_0 \frac{\partial f_2}{\partial y} + f_2 = f_1 \\ B_1 [f_2] = 0 \end{array} \right. \quad (3.30)$$

¹Aqui 0 refere-se à matriz nula de ordem 2×2 .

onde $L_{U,V}$ é o operador de derivação de primeira ordem 2D (caso constante) e $f_i \in C^2(\mathbb{R}^2)$ é tal que $f_i = f_i(x, y)$ ($i = 1, 2$). A primeira equação pode ser convertida a sua forma canônica [51]:

$$u_0 \frac{\partial f_2}{\partial \sigma} + f_2 = f_1,$$

onde $f_i = f_i(\sigma, \rho)$ ($i = 1, 2$) e $(\sigma, \rho) = [\sigma(x, y), \rho(x, y)]$. Aqui, σ é uma *curva característica*, isto é, uma curva ao longo da qual a derivada é total [51]. No presente caso, $(\sigma, \rho) = [x, -v_0x + u_0y]$, e nota-se que a primeira equação de (3.30) é idêntica à primeira equação de (3.8). Portanto sua função de Green será similar àquela de (3.11). Quanto às condições de fronteira, suponha que

$$B_1[f_2] = \lim_{x \rightarrow -\infty} f_2(x, y) = 0.$$

Assim, $\sigma \rightarrow -\infty$ e a nova condição de fronteira será

$$B_1[f_2] = \lim_{\sigma \rightarrow -\infty} f_2(\sigma, \rho) = 0.$$

Logo, os problemas (3.8) e (3.30) serão idênticos.

Os outros casos podem ser tratados analogamente, sempre recorrendo às estratégias adotadas na Seção 3.1.

3.4.2 Operadores diferenciais de 2ª ordem - caso constante

Ainda com as mesmas hipóteses do caso acima, após expansão em série de Taylor, até a ordem 2, no membro esquerdo da equação (3.26), obtém-se uma **EDP** constando do **PVF**

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{U,V}[f_2] := \frac{u_0^2}{2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} + u_0 v_0 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y} + \frac{v_0^2}{2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} + u_0 \frac{\partial f_2}{\partial x} + v_0 \frac{\partial f_2}{\partial y} + f_2 = f_1, \\ B_1[f_2] = \lim_{x,y \rightarrow -\infty} f_2(x, y) = 0 \\ B_2[f_2] = \lim_{x,y \rightarrow -\infty} f_2'(x, y) = 0 \end{array} \right. \quad (3.31)$$

onde $L_{U,V}$ é o operador de derivação de segunda ordem 2D (caso constante) e $f_i \in C^2(\mathbb{R}^2)$ é tal que $f_i = f_i(x, y)$ ($i = 1, 2$). A forma canônica para a **EDP** em (3.31) assume a forma:

$$\frac{u_0^2}{2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial \sigma^2} + u_0 \frac{\partial f_2}{\partial \sigma} + f_2 = f_1,$$

onde $f_i = f_i(\sigma, \rho)$ ($i = 1, 2$), $(\sigma, \rho) = [\sigma(x, y), \rho(x, y)]$ com σ curva característica. Aqui, $(\sigma, \rho) = [x, -v_0^2x + u_0v_0y]$. A primeira equação de (3.31), então, possui a forma da equação em (3.5) e sua função de Green será similar àquela de (3.19). Também as condições de fronteira são transformadas de maneira a que se tenha

$$\begin{cases} B_1[f_2] = \lim_{\sigma \rightarrow -\infty} f_2(\sigma, \rho) = 0 \\ B_2[f_2] = \lim_{\sigma \rightarrow -\infty} f_2'(\sigma, \rho) = 0 \end{cases}$$

Novamente as estratégias da Seção 3.1 são reutilizadas e pode-se notar que os casamentos 2D do caso constante, como aqui tratados, possuem um caráter unidimensional.

3.4.3 Operadores diferenciais de 1ª ordem - caso afim

Para o caso afim o esquema a ser adotado diferirá um pouco do que foi feito para o caso constante. No caso geral (3.27), uma dificuldade pode surgir com a redução à forma canônica [51]. Seria o caso em que é possível obter a transformação $(\sigma, \rho) = [\sigma(x, y), \rho(x, y)]$, mas não sua inversa $(x, y) = [x(\sigma, \rho), y(\sigma, \rho)]$. Aqui, o foco não estará em torno do modelo afim 2D (3.27). Apenas note que empregando modelos afins 1D independentes, ao longo das direções x e y , é possível considerar uma equação equivalente a (3.29), com (u_0, v_0) substituído por $(U(x, y), V(x, y))^T = (u_0 + u_1x, v_0 + v_2y)^T$. Este é o caso particular em que

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{bmatrix},$$

onde u_0, u_1, v_0 e v_2 são constantes. O ponto singular para o campo de vetores (U, V) é $(x_U, y_V) = (-\frac{u_0}{u_1}, -\frac{v_0}{v_2})$.

Agora, supõe-se que as f_i ($i = 1, 2$) sejam separáveis, ou seja, existam $h_1^{(i)}(x)$ e $h_2^{(i)}(y)$ tais que $f_i(x, y) = h_1^{(i)}(x) \cdot h_2^{(i)}(y)$. Dessa forma, pode-se supor ainda, que exista uma **EDP** aproximante da equação (3.26), que possa ser decomposta em um sistema de **EDO**'s dos tipos vistos na Seção 3.1. De fato, considere a **EDP**

$$U \frac{\partial f_2}{\partial x} + V \frac{\partial f_2}{\partial y} + 2f_2 = f_1, \quad (3.32)$$

onde $(U, V)^T = (U(x, y), V(x, y))^T$ é dado por (3.27).

Sua solução por função de Green é dada por

$$f_2(x, y) = \int \int_{\mathcal{D}} G_2(x, y; \xi, \eta) f_1(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (3.33)$$

onde \mathcal{D} é um domínio apropriado. A função de Green do caso acima é dada por

$$G_2(x, y; \xi, \eta) = G_1(x, \xi).G_1(y, \eta),$$

onde G_1 satisfaz ao problema acessório:

$$(u_0 + u_1 w) \frac{dG_1}{dw} + G_1 = \delta(w - \zeta),$$

com $(w, \zeta) = (x, \xi)$, na direção horizontal e $(w, \zeta) = (y, \eta)$, na direção vertical.

As condições de fronteira que interessam para o presente caso, são aquelas para as **EDO's** que fornecem os problemas acessórios acima e são tomadas consonantes com a Seção 3.1.

3.4.4 Operadores diferenciais de 2ª ordem - caso afim

Aqui também se procurará uma solução para uma **EDP** que possa ser reduzida a um sistema de **EDO's** e as condições de fronteira serão as mesmas encontradas na Seção 3.1. O raciocínio para obtenção da solução, será análogo ao visto para a extensão do caso afim 2D de 1ª ordem. A **EDP** será da forma

$$\frac{U^2}{2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} + \frac{V^2}{2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} + U \frac{\partial f_2}{\partial x} + V \frac{\partial f_2}{\partial y} + 2f_2 = f_1, \quad (3.34)$$

onde $(U, V)^T = (U(x, y), V(x, y))^T$ é dado por (3.27). Para a particular equação supõe-se que

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y} = 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{A} = \begin{bmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{bmatrix}.$$

ou seja, $(U(x, y), V(x, y))^T = (u_0 + u_1 x, v_0 + v_2 y)^T$, com ponto singular em $(x_U, y_V) = \left(-\frac{u_0}{u_1}, -\frac{v_0}{v_2}\right)$.

Sua solução por função de Green é dada pela expressão em (3.33) e a referida função dada por

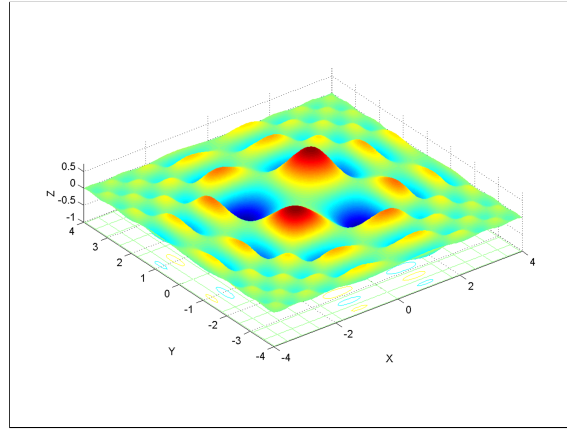
$$G_2(x, y; \xi, \eta) = G_1(x, \xi).G_1(y, \eta),$$

onde G_1 soluciona o problema acessório:

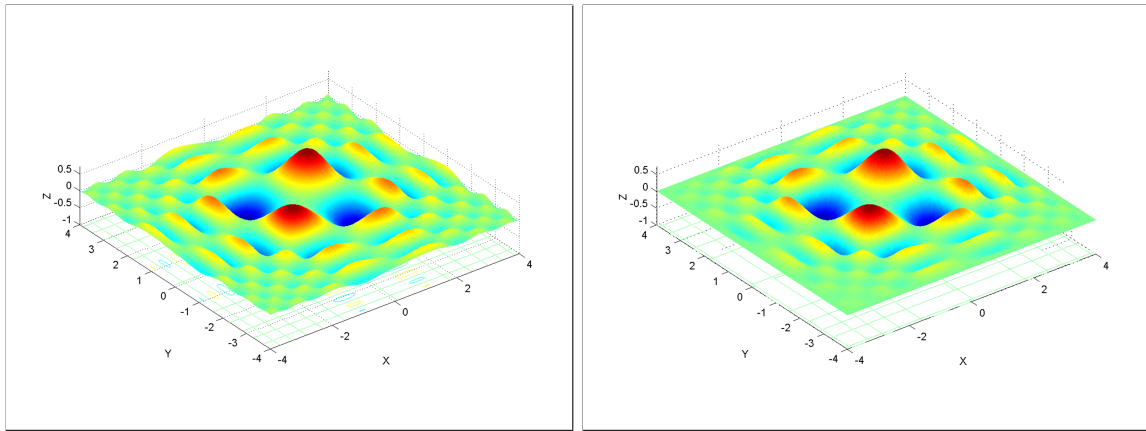
$$\frac{(u_0 + u_1 w)^2}{2} \frac{d^2 G_1}{dw^2} + (u_0 + u_1 w) \frac{dG_1}{dw} + G_1 = \delta(w - \zeta),$$

com $(w, \zeta) = (x, \xi)$, na direção horizontal e $(w, \zeta) = (y, \eta)$, na direção vertical.

A Figura 3.16 ilustra o efeito da função de Green 2D para o modelo proposto de casamento, sobre a função $f_1(x, y) = \frac{\sin(x^2) \cdot \sin(y^2)}{xy}$. A função de entrada, $f_1(x, y)$, sua transformação afim de casamento, $M_{U,V}[f_1](x, y)$ e a mesma afetada pelo operador de Green, $f_1 * G$, foram obtidas como na Seção 3.1 e 3.4. No caso ilustrado, $u_0 = v_0 = 0.1$ (componentes de translação) e $u_1 = v_1 = -0.05$ (contrações em x e y , respectivamente), a qual mantém o ponto fixo $(x_U, y_V) = (2, 2)$.



(a)



(b)

(c)

Figura 3.16: Plotagens de (a) $f_1(x, y) = \frac{\sin(x^2) \cdot \sin(y^2)}{xy}$, (b) $f_2(x, y) = M_{U,V}[f_1](x, y) = \frac{\sin\left(\frac{x-u_0}{1+u_1}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{y-v_0}{1+v_2}\right)^2}{\left(\frac{x-u_0}{1+u_1}\right)\left(\frac{y-v_0}{1+v_2}\right)}$ e (c) $f_1 * G$, para os parâmetros $u_0 = v_0 = 0.1$ e $u_1 = v_1 = -0.05$.

A superfície originada pela transformação de casamento (b), é notadamente uma contração da superfície original (a). A superfície obtida pelo operador de Green G , (c), aproxima-se mais daquela de (b), em sua região mais central.

OBSERVAÇÃO: Uma outra forma de estender ao caso 2D é obtida considerando

$$\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Esta forma contém, além de translação e expansão/contração em x , o movimento de cisalhamento em relação a x [52]. Ambos os casos afim, de 1ª e 2ª ordem, possuem funções de Green expressas da mesma forma que relatado anteriormente, porém com a componente u_0 substituída por $u_0 + u_2y$. Para cada reta paralela ao eixo Ox , o ponto singular regular pode ser mantido fixo, bastando por $x = x_U$ e calcular u_1 sobre cada reta. A versão para duas componentes, uma na direção do eixo Ox e outra na direção do eixo Oy , pode ser aplicada para gerar movimento de rotação [52]. Neste caso, os dois casamentos separados são logrados com os modelos

$$\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

para a direção do eixo Ox e

$$\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

para a direção do eixo Oy . Em tempo, observe que os casos tratados até agora se referem a

$$\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

para a direção do eixo Ox e

$$\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & v_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

para a direção do eixo Oy .

3.5 Considerações Finais

Neste capítulo foram discutidas formulações de problemas a valores de fronteira que aproximam a equação de casamento (3.1), nos casos 1D e 2D. Tais casos compreendem o uso dos modelos constante e afim de movimento. Foram mostradas maneiras de escolher as condições de fronteira daqueles problemas e suas respectivas funções de Green. A análise aprofundada dos casos constante e afim permite concluir: (1) O caso constante em [25, 38, 39] pôde ser refinado; além disso, funções de Green de aproximações de 2ª ordem mostraram-se mais apropriadas para reconstrução de curvas; (2) O caso afim é rico pela natureza dos pontos singulares envolvidos e pelas equações diferenciais que surgem; seus coeficientes analíticos em torno dos pontos singulares permitem achar uma solução fechada naquela vizinhança; (3) A maior parte das funções de Green encontradas são bem comportadas, no sentido que são limitadas e normalizadas; (4) O caso afim de 2ª ordem é melhor no sentido de reconstruir curvas, quando as raízes do polinômio indicial são complexas.

O capítulo subsequente fará uma discussão do processo de discretização das funções de Green do presente capítulo, que permitirá obter as aplicações de síntese de movimento sobre imagens. Tais funções darão nome a filtros aqui denominados de *filtros de Green*.

Capítulo 4

Discretização de Funções de Green

O presente capítulo objetiva elucidar a conversão entre as funções de Green dos modelos contínuo e discreto. Ou seja: discutir os problemas de representação e reconstrução das funções de Green das equações de casamento.

Como um passo inicial para as aplicações a serem apresentadas no capítulo seguinte, aqui, será considerada a atuação das funções de Green sobre imagens digitais. Nesse caso, serão chamadas de *filtros de Green*. Como a análise desenvolvida no capítulo 3 possui um caráter unidimensional, em sua essência, o processo de discretização aqui contido será também de mesma natureza. Assim sendo, suponha que as imagens com resolução espacial $M \times N$ - M é o número de colunas e N o número de linhas - são compostas por N imagens unidimensionais de resolução espacial M . Além disso, as imagens digitais serão discretizações de imagens contínuas, cujo suporte é compacto [32].

O operador de casamento (3.2) constitui na verdade um filtro de warping¹, ao passo que os operadores de Green (3.9),(3.23) e (3.25), bem como os operadores diferenciais correspondentes, são filtros de amplitude² [32].

Esquemas Multiresolução podem ser criados para resolver o problema de discretização de operadores diferenciais a coeficientes variáveis [33, 34]. Quanto aos operadores diferenciais a coeficientes constantes, são tratados aqui como casos particulares daqueles operadores a coeficientes variáveis, vistos até o momento. Uma outra forma de tratar tais operadores é por intermédio da Transformada de Fourier [53, 45]. Como o escopo deste trabalho está restrito ao domínio espacial, tais esquemas não serão abordados aqui.

¹São filtros topológicos, ou seja, que atuam no conjunto suporte da imagem.

²Filtros que atuam no espaço de cor da imagem.

A seção subsequente introduz o processo de representação dos operadores de Green, a serem utilizados aqui, no contexto de processamento de imagens.

4.1 A Discretização dos Operadores de Green de Casamento

Suponha que as funções $f_i(x, y)$ ($i = 1, 2$), tratadas aqui, sejam de classe $C^k(\mathbb{R}^2)$ ($k \in \{1, 2\}$), com suporte compacto num intervalo $[a, b] \times [c, d]$, isto é, $\text{supp}(f_i) \subset [a, b] \times [c, d]$ ($i = 1, 2$). O processo de discretização aqui, se restringirá às linhas das imagens. Por este motivo, as funções serão consideradas para y fixo, onde $\text{supp}(f_i) \subset [a, b] \times \{y\}$ ($i = 1, 2$) e $c \leq y \leq d$.

Antes de mais nada, observe que o operador (3.9) pode ser reescrito na forma

$$f_2(x) := \mathcal{G}_u[f_1](x) = \int_{\mathbb{R}} G_u(x - \xi) f_1(\xi) d\xi, \quad (4.1)$$

ou seja, como um operador de convolução. A forma discreta do operador de convolução (4.1), é dada por

$$f_2(n) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} G_u(n - k) f_1(k), \quad (4.2)$$

onde k e $n \in \mathbb{Z}_+$ e G_u é chamada de *resposta de impulso do filtro*³. Neste caso, a série (4.2) converge, pois f_1 possui suporte compacto.

A Figura 4.1 ilustra o cálculo de convolução para o caso de um filtro H arbitrário, que possui resposta de impulso finita (suporte compacto): na figura mostramos a sequência $H(k)$ que define o núcleo; esboçamos a sequência $H(-k)$, bem como a sequência do sinal $H(n - k)$. Os elementos do sinal $f_1(k)$ correspondentes aos elementos $H(n - k)$ são indicados por uma tonalidade mais escura. Para se obter a convolução entre H e f_1 , no ponto n , os elementos correspondentes nas duas sequências em $H(n - k)$ e $f_1(k)$ são multiplicados dois a dois, e o resultado é somado.

Entretanto, a natureza das funções de Green aqui, difere da função H fictícia, ilustrada acima (vide definição de G_u em (3.11)). As funções G_u não possuem suporte

³ G_u é também chamada de máscara do filtro e, num contexto mais específico, a saber, o de processamento de imagens, G_u é denominada de função de espalhamento de ponto, do inglês point spread function (**PSF**), que dá a informação de o quanto o sistema espalha um ponto luminoso no centro de uma imagem

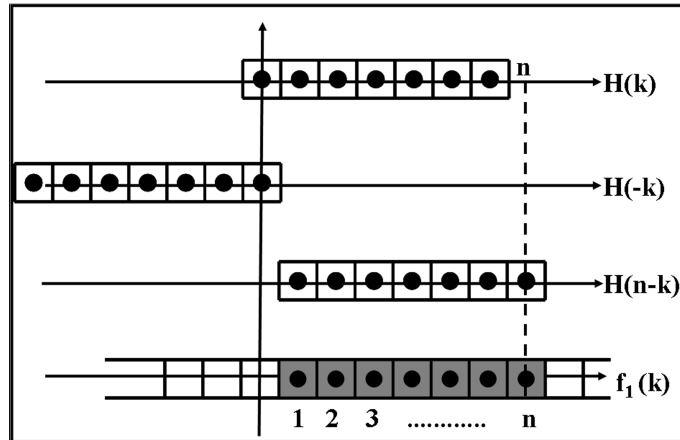


Figura 4.1: Convolução discreta unidimensional entre H e f_1

compacto e a máscara possui tamanho variável com a posição de n . A Figura 4.2 mostra a operação de média ponderada realizada por G_u sobre f_1 , num casamento à direita. O valor de $f_2(n)$ dependerá dos valores $f_1(k)$, para todo $k < n$, ponderados

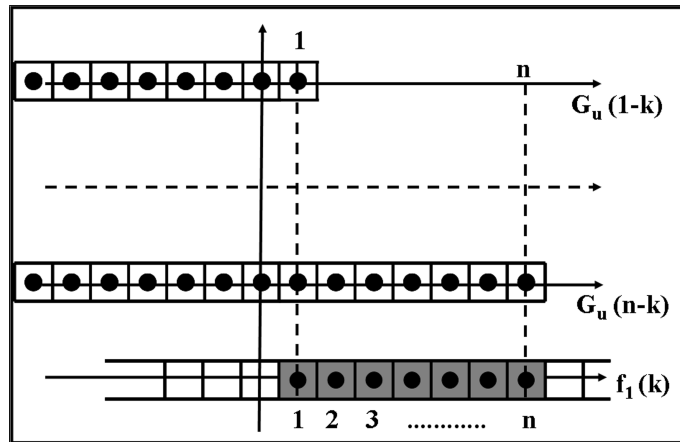


Figura 4.2: Convolução discreta unidimensional entre G_u e f_1

pelo valor da função de Green correspondente $G_u(n - k)$. Diferentemente de H , para a qual a máscara possui tamanho fixo, à medida que n avança para a direita, o suporte da máscara de G_u aumenta.

Um fato importante para o núcleo de Green G_u em (3.11), é que para cada linha y de uma imagem $M \times N$, vale

$$\int_{\mathcal{D}} G_u(x - \xi) d\xi = 1, \tag{4.3}$$

4.2 Problemas de Amostragem e Reconstrução dos Operadores de Green

onde (4.3)⁴ é avaliada em cada uma das N linhas da imagem e \mathcal{D} é um subconjunto de um intervalo de comprimento M . Aquela igualdade garante que o processo de filtragem não alterará a intensidade média dos pixels, em cada uma das N linhas da imagem $M \times N$ [32, 4].

A equação integral (4.1) refere-se às soluções por funções de Green para os casamentos com campo de movimento constante (1^a e 2^a ordem), em qual caso, o núcleo é invariante por translação.

No caso afim (1^a e 2^a ordem), a função de Green referente a um campo de movimento $U(x)$ é do tipo $G(x, \xi)$ e não possui a forma de uma convolução, pois, apesar de os operadores (3.23) e (3.25) serem lineares, $G(x, \xi)$ é variante por translação. Uma outra particularidade deste caso é que as G 's não estão definidas no ponto singular x_U . Além disso, a análise feita para as funções de Green do caso afim, no Capítulo 3, permite concluir que nem sempre a intensidade média dos pixels, para cada linha da imagem $M \times N$, será preservada. Lembre que a soma das G 's serão menores que 1 em alguns casos, isto é, haverá perda de informação de cor da imagem original. Como visto, uma escolha adequada das condições de fronteira permite reduzir este efeito, aproximando-se assim, a soma das G 's de um ganho unitário, sobre cada linha da imagem.

O processo de discretização de operadores do tipo (4.3), desenvolvido aqui, será agora, tema de discussão da próxima seção, onde se denotará as funções de Green de maneira genérica por G . A discussão envolverá ambos os casos, modelos constante e afim.

4.2 Problemas de Amostragem e Reconstrução dos Operadores de Green

Um pixel na tela do dispositivo de saída gráfica possui área finita, determinada pelas dimensões da tela do dispositivo e pela resolução espacial da imagem. Nessa área, em geral, são projetados vários objetos de uma mesma cena. O processo de amostragem consiste em escolher a cor mais adequada para representar uma cena nesse pixel. Amostragem sobre uma imagem contínua consiste em escolher as cores mais adequadas para representá-la em cada pixel. Aqui, a reconstrução se restringirá ao contexto de imagens e consistirá em obter uma imagem contínua ou uma aproximação para esta, a partir das amostras escolhidas na etapa de representação.

⁴Diz-se que G_u possui ganho unitário

4.2 Problemas de Amostragem e Reconstrução dos Operadores de Green

Três exemplos de métodos de amostragem a serem descritos aqui, são: amostragem pontual, superamostragem e amostragem por área.

1. **Amostragem pontual.** É outro termo utilizado para a amostragem de uma imagem e é realizada no centro de cada pixel;
2. **Superamostragem.** Toma-se um número grande de amostras P_1, P_2, \dots, P_n , em um pixel P , e calcula-se a intensidade final como sendo a média das intensidades de cada amostra;
3. **Amostragem por área.** Esse método consiste em tomar para valor da intensidade do pixel P , a média f_M da imagem, $f(x, y)$, nesse pixel, calculada por

$$f_M = \frac{1}{Area(P)} \int_P f(x, y) dx dy.$$

Para a discretização das equações integrais (3.9), (3.23) e (3.25) é necessário amostrar não só a imagem (função) de entrada, $f_1(x)$, como também a função de Green em questão, $G(x, \xi)$. Amostragem pontual é utilizada para f_1 , ao passo que para as G 's são feitas combinações de superamostragem e amostragem por área [54, 3], no caso afim, e amostragem pontual no caso constante. No primeiro caso há grandes variações do campo do movimento $U(x)$. A seguir são listados os passos referentes aos processos de amostragem e reconstrução dos operadores de Green. Suponha, neste caso, que se esteja executando um casamento à direita e o valor a ser obtido seja o de $f_2(n)$. O casamento à esquerda é análogo.

1º **passo.** O cálculo de $G(n, k)$ (n fixo), numa linha de uma imagem unidimensional, é feito subdividindo um pixel em s células ou subpixels (superamostragem). Em cada subpixel s , calcula-se os valores G_s por um processo de integração numérica⁵. Tais valores são então somados para fornecer o valor final da $G(n, k)$ sobre o referido pixel (amostragem por área);

2º **passo.** Em cada linha da imagem unidimensional, de resolução M , e enquanto $k < n$, some o valor $G(n, k)$, fornecido no 1º passo, multiplicado por $f_1(k)$ (veja membro direito de (4.2)). Finalmente, atribua a soma a $f_2(n)$.

Um detalhe importante no caso afim é que a taxa de superamostragem precisa ser aumentada nos pontos próximos aos pontos singulares x_U ⁶. As taxas de

⁵Aqui utilizou-se o método do trapézio[55]

⁶Amostragem estratificada

superamostragem variam bastante entre os casos afim, de 1^a e 2^a ordem, na vizinhança de x_U .

A seção subsequente ilustra alguns experimentos feitos com filtros de Green sobre imagens, acerca de amostragens, comutatividade das filtragens em casamentos 2D e etc.

4.3 Filtros Green sobre imagens: Amostragens, comutatividade, direção de filtragem e efeitos

Os exemplos aqui ilustrados visam destacar propriedades e problemas ocorridos com filtragens por funções de Green. A principal questão é sobre o aspecto da amostragem sobre as imagens.

1^o exemplo. (Amostragem pontual vs por área de filtros de 1^a ordem)
Considera-se um filtro de Green de equação de 1^a ordem, modelo constante, sobre imagens. A Figura 4.3 mostra imagens obtidas por filtragens com amostragem pontual e por área, bem como algumas plotagens de curvas. Os resultados obtidos com curvas se refletem nas reconstrução das imagens. A conclusão é que para este caso não importa a taxa de amostragem (lembre que o campo de movimento é constante).

2^o exemplo. (Amostragem pontual vs por área de filtros de 2^a ordem)
Considera-se um filtro de Green de equação de 2^a ordem, modelo constante, sobre imagens. A Figura 4.4 mostra imagens obtidas por filtragens com amostragem pontual e por área, bem como algumas plotagens de curvas. Perceptualmente falando, os resultados obtidos são muito semelhantes. As plotagens das curvas estão em consonância com as imagens geradas. Novamente, amostragem por área não é fundamental. O exemplo subsequente destaca uma tentativa de medir a diferença entre as imagens geradas por filtros de 1^a e 2^a ordem.

3^o exemplo. (Qualidade das imagens geradas por filtros de 1^a e 2^a ordem)
Considera-se dois filtros de Green de equações de 1^a e 2^a ordem, modelo constante, sobre imagens. A Figura 4.5 mostra imagens obtidas por filtragens com amostragem por área. O comportamento de uma filtragem com parâmetro grande de movimento (a partir de 4 pixels) fornece maior suavização das imagens, quando se utiliza os filtros Green de 2^a ordem. Em consequência, a intensidade média tende a ser mais preservada para o caso de 1^a ordem.

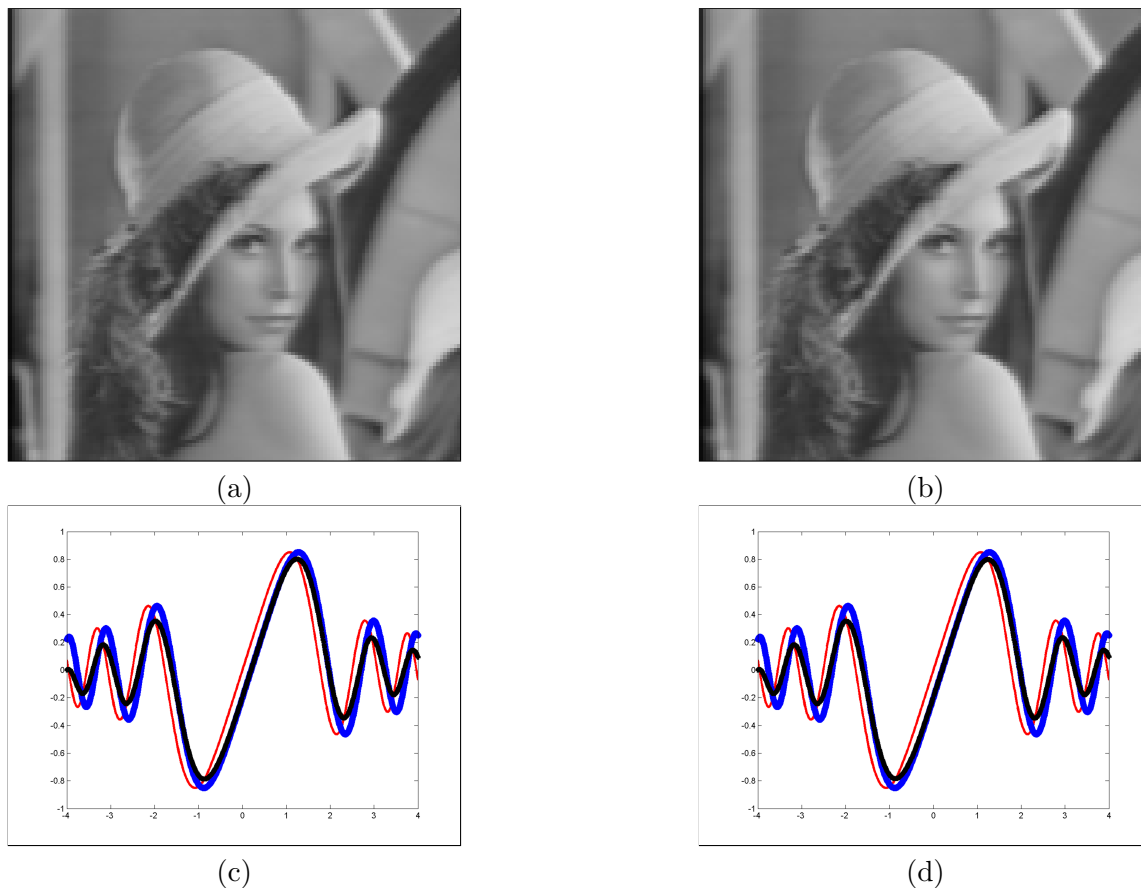


Figura 4.3: Filtragens por função de Green de casamento constante de 1^a ordem, com parâmetro $u = 2$. (a) Amostragem pontual. (b) Amostragem por área com 15 células por pixel. (c) Plotagem da atuação de \mathcal{G} sobre a curva $f_1(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$, utilizando amostragem pontual e parâmetro $u = 0.2$. (d) Plotagem da atuação de \mathcal{G} sobre a curva $f_1(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$, utilizando amostragem por área, com 6 células/unidade e parâmetro $u = 0.2$.

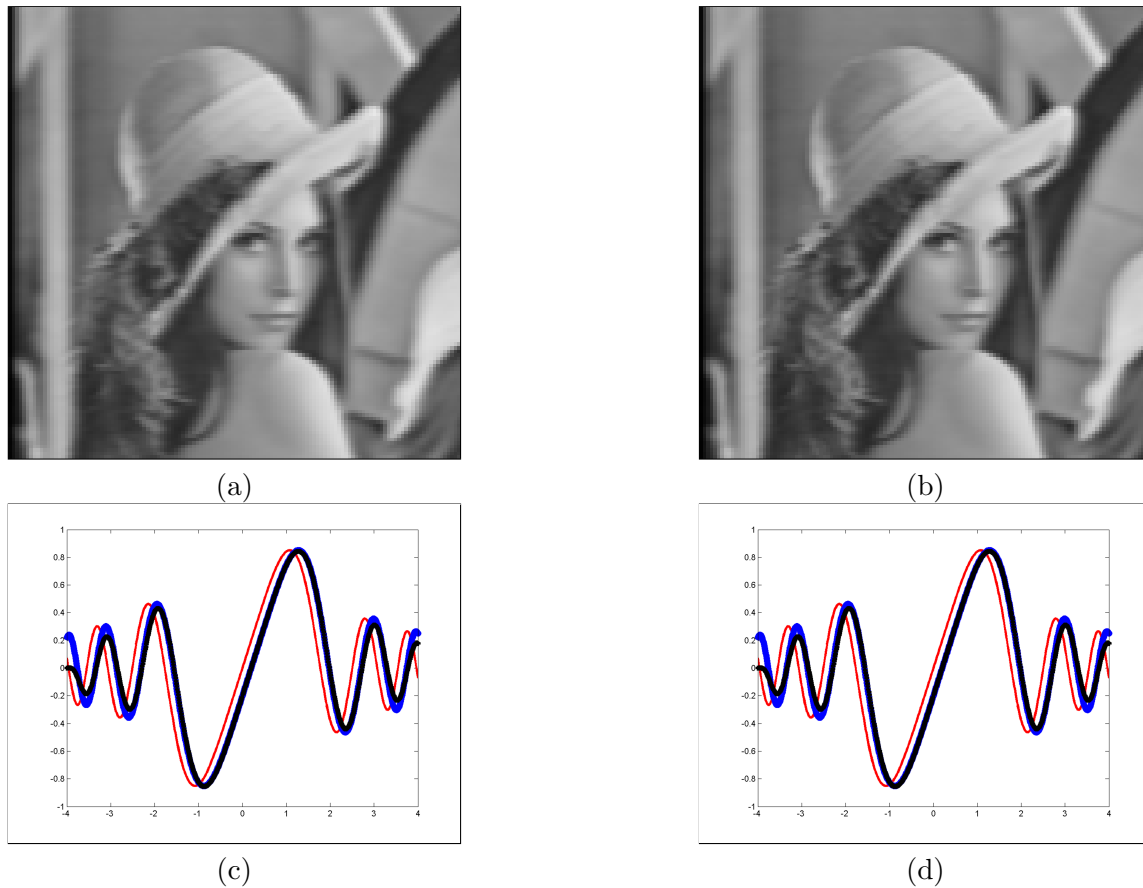


Figura 4.4: Filtragens por função de Green de casamento constante de 2^a ordem, com parâmetro $u = 2$. (a) Amostragem pontual. (b) Amostragem por área com 15 células por pixel. (c) Plotagem da atuação de \mathcal{G} sobre a curva $f_1(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$, utilizando amostragem pontual e parâmetro $u = 0.2$. (d) Plotagem da atuação de \mathcal{G} sobre a curva $f_1(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$, utilizando amostragem por área, com 6 células/unidade e parâmetro $u = 0.2$.

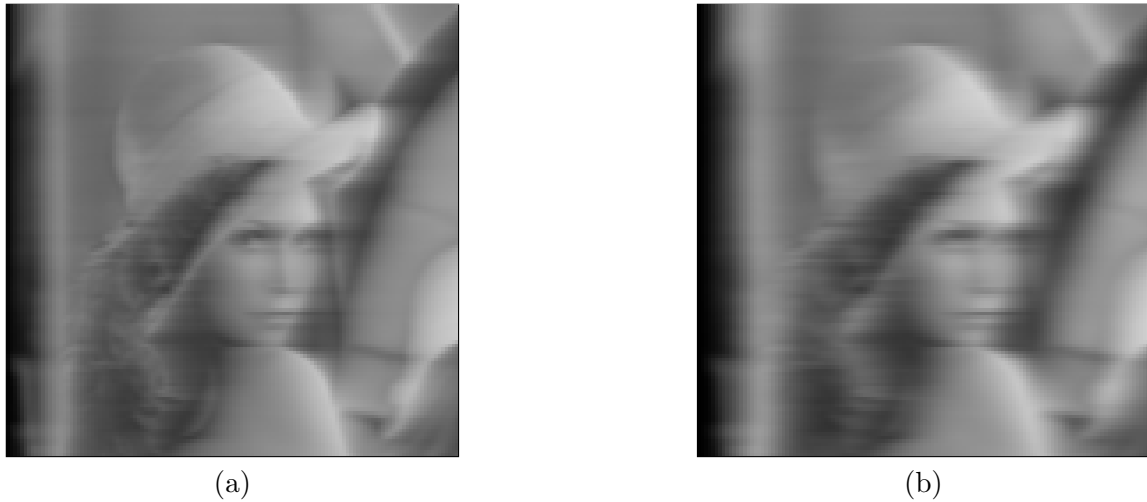


Figura 4.5: Filtragens por função de Green de casamento constante de 1^a e 2^a ordem, com amostragem por área com 15 células por pixel e parâmetro $u = 7$. (a) Filtro Green de 1^a ordem. (b) Filtro Green de 2^a ordem.

4^o exemplo. (Diferença de natureza - presente trabalho e trabalhos relacionados) Em [25, 38, 39, 40, 41] a estratégia utilizada consistia em mapear a largura da imagem de entrada em um intervalo de comprimento unitário. Ou seja: era feita uma mudança de coordenadas do espaço da imagem para o espaço do filtro de Green. Neste caso, os parâmetros de movimento eram diferentes daqueles utilizados aqui. A Figura 4.6 mostra imagens obtidas por filtragens com as funções de Green de casamento de 2^a ordem - constante - para aquelas referências e a desenvolvida no presente trabalho. O parâmetro de movimento utilizado foi $u = 0.1$, para ambos os filtros. Tal valor é considerado alto para o primeiro filtro e como era de se esperar gera um borramento grande na imagem de saída. Por sua vez, o mesmo valor é pequeno relativamente ao filtro atual. Neste caso, um campo de movimento constante e igual a 0.1 não é significativo em termos de movimento (aproximadamente zero). A imagem de saída então, é basicamente a mesma de entrada.

5^o exemplo. (Filtragens direcionais e a duas componentes) Considera-se um filtro de Green de equação de 2^a ordem, modelo constante, sobre imagens. O objetivo agora é o de saber se há uma diferença do ponto de vista perceptual para as seguintes abordagens:

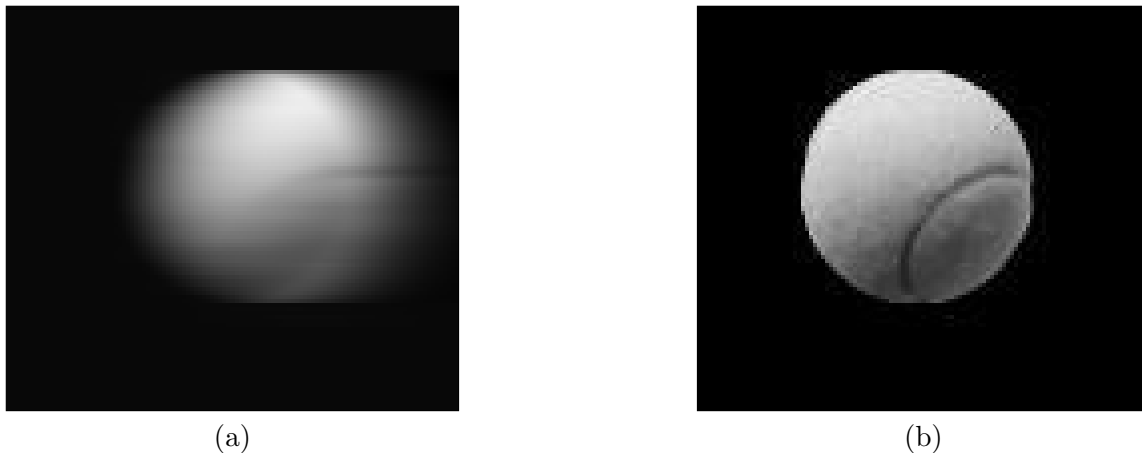


Figura 4.6: Filtragens por função de Green de casamento constante de 2ª ordem, com parâmetro $u = 0.1$. (a) Filtro utilizado em [25, 38, 39, 40, 41]. (b) Filtro atual.

1. Filtragem unidimensional numa direção arbitrária, dados um parâmetro de movimento e um ângulo de direção θ ;
2. Composição de duas filtragens unidimensionais (sobreposição), uma na direção horizontal e outra na direção vertical, com um parâmetro de movimento para cada direção dada. Neste caso, as componentes de movimento em x e em y são tais que possam fornecer o parâmetro e a direção de movimento do primeiro caso.

A Figura 4.7 mostra imagens obtidas por filtros de Green de 2ª ordem, nos casos 1 e 2. Nota-se que no caso 1 há um borramento levemente maior que no caso 2.

6º exemplo. (Amostragem pontual vs por área de filtros de 1ª ordem - caso afim) Considera-se um filtro de Green de equação de 1ª ordem, modelo afim, sobre imagens. A Figura 4.8 mostra imagens obtidas por filtragens com amostragem pontual e por área. A Figura 4.8(a) mostra uma filtragem com amostragem pontual e uma superamostragem, apenas, em torno do ponto singular x_U . Superamostragem é necessário, pois sem isso, os valores da função de Green são inadequados para a reconstrução da imagem naquela vizinhança. Naquele caso, uma faixa clara aparece em torno de x_U , ou seja, ali o brilho é mais intenso. Este erro de reconstrução se deve ao fato de que é preciso uma amostragem por área dentro de uma vizinhança em torno de x_U . Amostragem por área é feita nas Figuras 4.8(b)-(d). Em 4.8(b) aparecem faixas com variação do brilho em toda a imagem. Uma taxa de 6

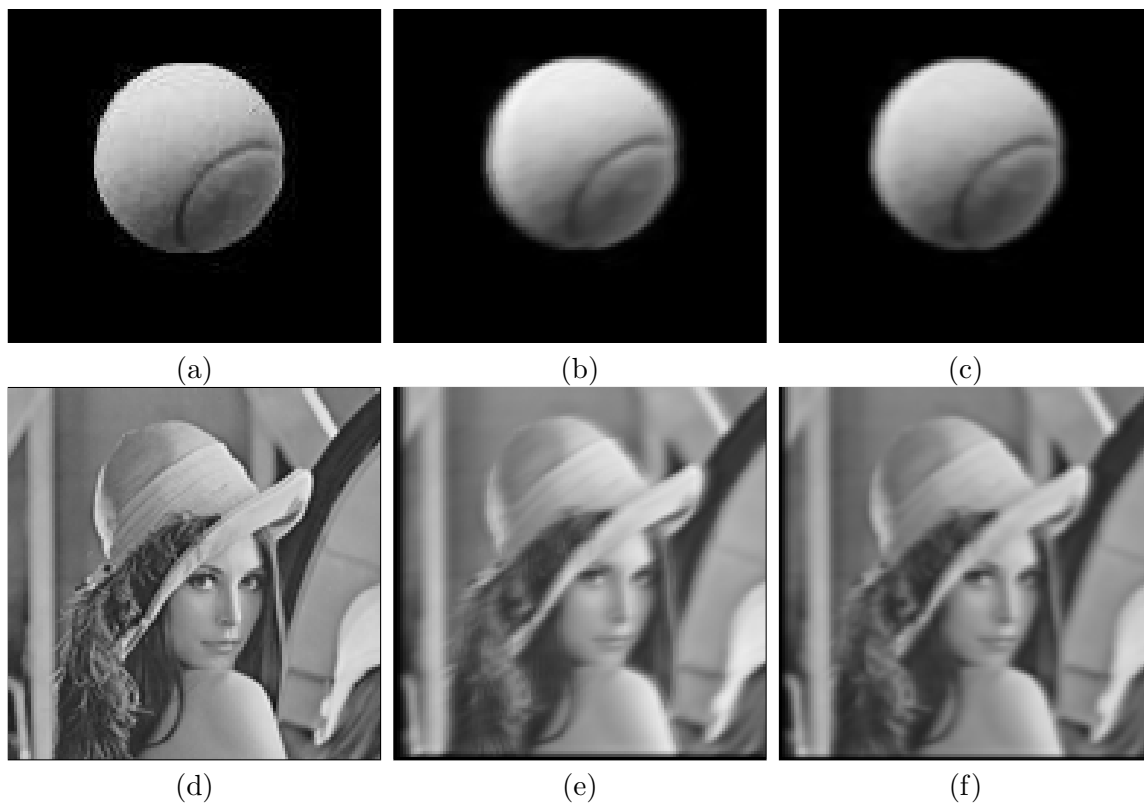


Figura 4.7: Filtragens por função de Green de casamento constante de 2^a ordem. (a) e (d) Imagens originais. (b) e (e) Imagens geradas com um ângulo $\theta = 26.57^\circ$ e $u = 2.24$. (c) e (f) Filtragem na direção x com $u = 2$, seguida por filtragem na direção y com $u = 1$.

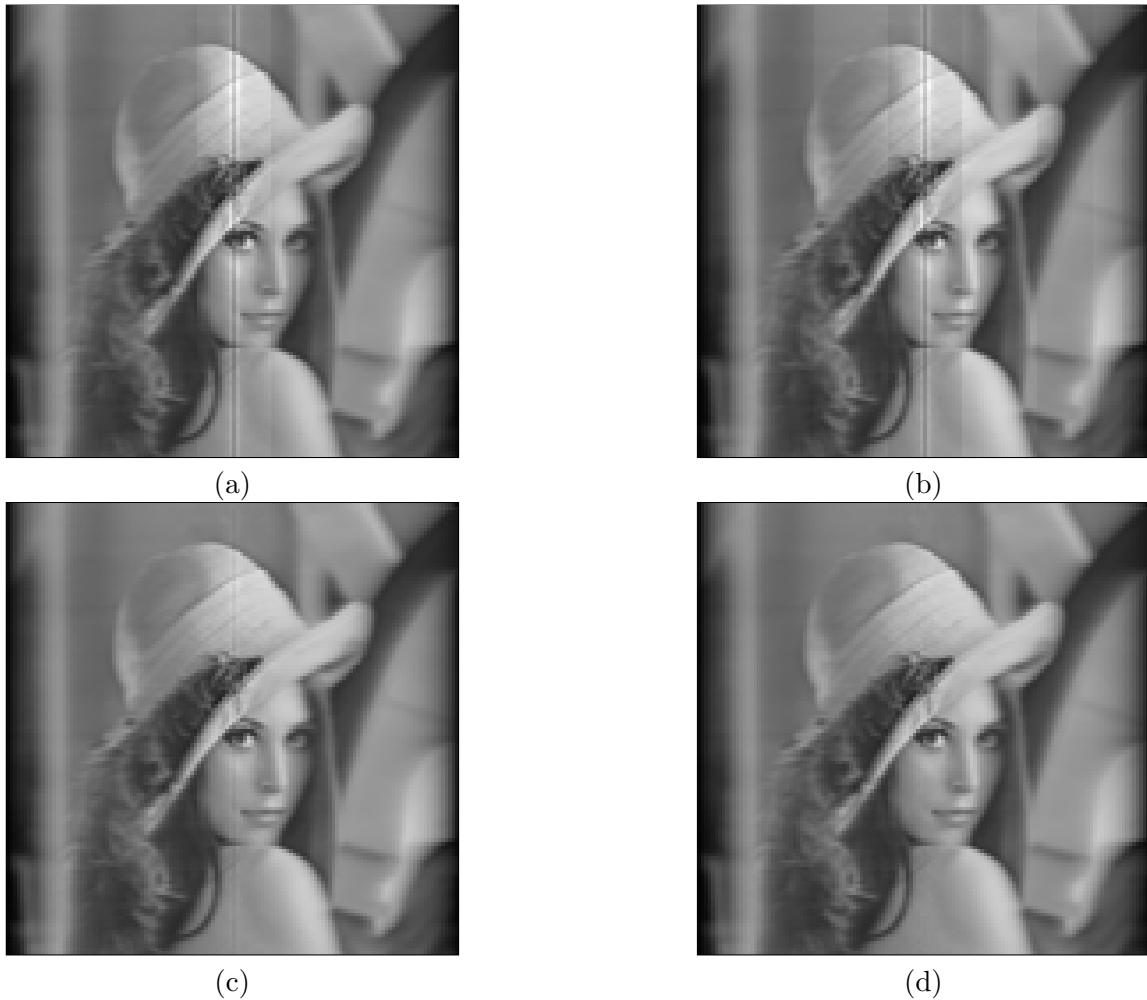


Figura 4.8: Filtragens por função de Green de casamento afim de 1ª ordem, com parâmetros $(u_0, u_1, x_U) = (6, -0.094, 64)$. (a) Amostragem pontual com superamostragem em torno de x_U de 30 células/pixel. (b) Amostragem por área de 6 células/pixel e superamostragem, em torno de x_U , de 30 células/pixel. (c) Amostragem por área de 15 células/pixel e superamostragem, em torno de x_U , de 120 células/pixel. (d) Amostragem por área de 15 células/pixel e superamostragem, em torno de x_U , de 600 células/pixel .

células/pixel parece introduzir erro de reconstrução na imagem. Na Figura 4.8(c) a taxa de amostragem é de 15 células/pixel e o problema que perdura é apenas nos pixels mais contíguos ao ponto x_U . Esse problema pôde ser resolvido com uma alta taxa de superamostragem em torno de x_U , 600 células/pixel. Os problemas referidos aqui se refletem também no caso de curvas (ver Fig. 4.9). Particularmente

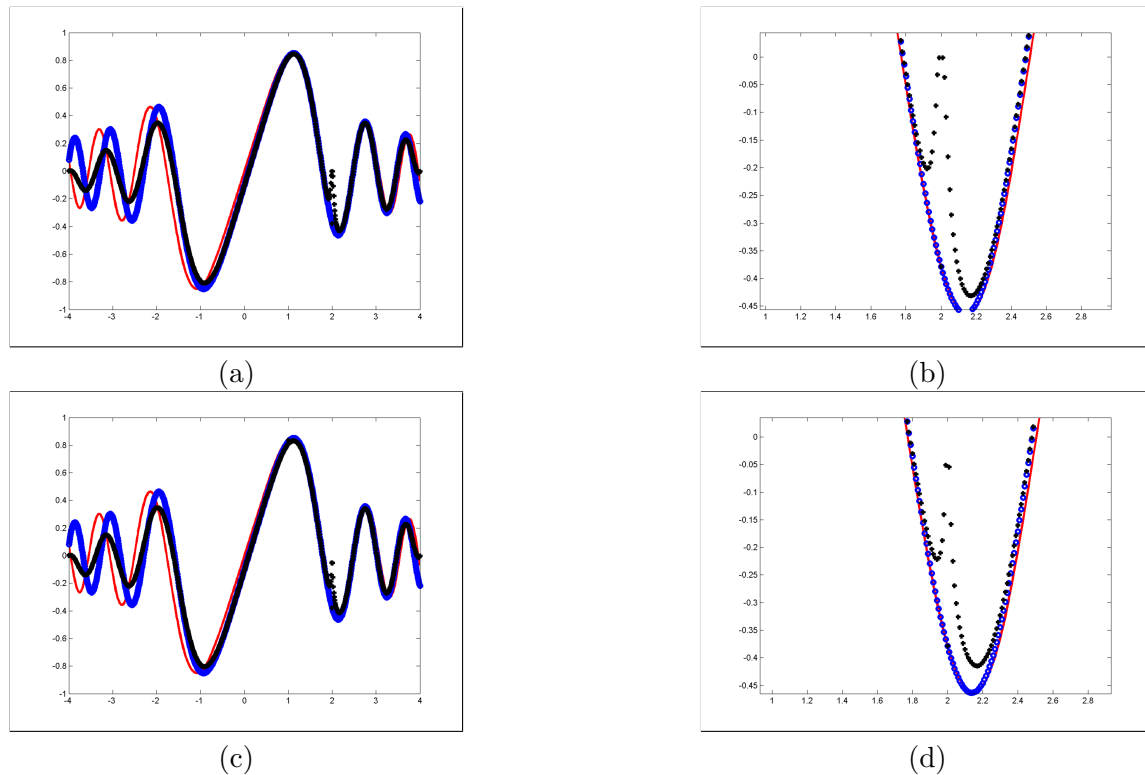


Figura 4.9: Filtragens por função de Green de casamento afim de 1ª ordem, com parâmetros $(u_0, u_1, x_U) = (0.1, -0.05, 2)$. (a) Amostragem pontual com superamostragem em torno de x_U de 30 células/unidade. (b) Zoom de uma região planar em torno do ponto x_U . (c) Amostragem por área de 6 células/unidade e superamostragem, em torno de x_U , de 30 células/unidade. (d) Zoom de uma região planar em torno do ponto x_U .

no caso de curvas, a amostragem por área de 6 células/unidade não se mostrou satisfatória. Mesmo em alguns pontos afastados de x_U , podem ser observados erros de reconstrução da curva, através de um zoom na imagem. Taxas a partir de 15 células/unidade mostram melhor resultado. Entretanto, o resultado não é bom na vizinhança em torno de x_U . A conclusão deste caso é que amostragem pontual pode

ser feita fora de determinada faixa do domínio, contendo x_U . Dentro da faixa é necessária amostragem por área e naqueles pontos muito próximos de x_U , deve-se utilizar uma superamostragem.

7º exemplo. (Amostragem pontual vs por área de filtros de 2ª ordem - caso afim) Considera-se um filtro de Green de equação de 2ª ordem, modelo afim, sobre imagens. A Figura 4.10 mostra imagens obtidas por filtragens com amostragem pontual e por área. Na amostragem pontual (Fig. 4.10(a)), uma faixa escura aparece na vizinhança de x_U , ou seja, a região possui menos brilho. Naquele caso, também foi feita superamostragem em torno de x_U . Amostragem por área é feita nas Figura 4.10(b)-(d). Pontos contíguos à x_U exibem diferença de brilho, devida a baixa taxa da superamostragem (Fig. 4.10(a)-(b)). O problema é resolvido nas Fig. 4.10(c)-(d). A Figura 4.10(d) possui as mesmas taxas de amostragem que as da Figura 4.8(d). Observa-se que filtragens afim de 2ª ordem movimentam mais as intensidades que as de 1ª ordem. Por conseguinte, os filtros de 2ª ordem suavizam mais as imagens que os filtros de 1ª ordem. Em contrapartida, os filtros de 1ª ordem são mais caros computacionalmente, pois é preciso uma taxa de superamostragem alta a fim de corrigir a falha de reconstrução em torno de x_U . A Fig. 4.11 mostra as curvas geradas para o presente filtro. A taxa de 6 células/unidade não é tão boa, mas também não causa os efeitos obtidos no caso de 1ª ordem. O comentário acerca da amostragem estratificada para o caso afim de 1ª ordem é também válido para o caso de 2ª ordem. Ao contrário do que foi obtido no exemplo anterior encontrou-se taxa de amostragem que permite obter um bom resultado.

8º exemplo. (Comutatividade de Filtros Green de 2ª ordem - caso afim) Um teste foi realizado para saber se a integral repetida do tipo (3.25) comuta. Uma primeira imagem foi gerada por um filtro de Green, sobre uma imagem de entrada, na direção horizontal e em seguida, o resultado foi filtrado novamente, na direção vertical. Utilizou-se um filtro de Green da equação de casamento afim de 2ª ordem. A segunda imagem do teste foi obtida invertendo a ordem das filtragens acima. As Figuras 4.12(b)-(c) mostram as imagens referidas acima. Os parâmetros utilizados foram $(u_0, u_1, x_U) = (-16, 0.286, 56)$ (horizontal) seguido por $(v_0, v_2, y_V) = (16, -0.32, 50)$ (vertical), para a imagem da Figura 4.12(b), e $(v_0, v_2, y_V) = (16, -0.32, 50)$ (vertical) seguida por $(u_0, u_1, x_U) = (-16, 0.286, 56)$ (horizontal), para a imagem da Figura 4.12(c). Obteve-se a imagem diferença entre as duas primeiras e a partir dela, gerou-se uma imagem binária (ver Fig. 4.12(d)). As Figuras 4.12(b)-(c) são praticamente indistinguíveis, do ponto de vista perceptual. Porém a imagem da Figura 4.12(d) mostra que elas diferem. Note que a

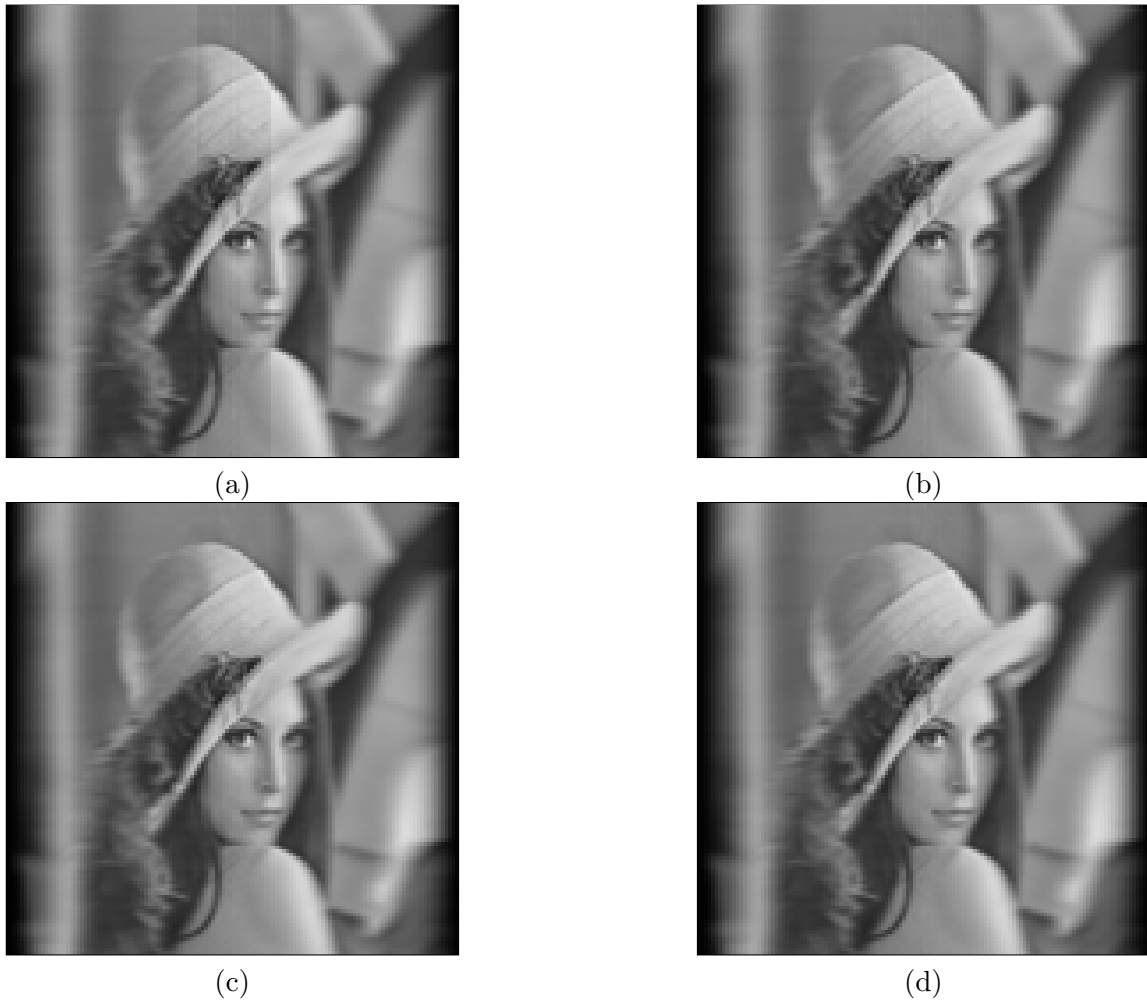


Figura 4.10: Filtragens por função de Green de casamento afim de 2^a ordem, com parâmetros $(u_0, u_1, x_U) = (6, -0.094, 64)$. (a) Amostragem pontual com superamostragem em torno de x_U de 30 células/pixel. (b) Amostragem por área de 6 células/pixel e superamostragem, em torno de x_U , de 30 células/pixel. (c) Amostragem por área de 6 células/pixel e superamostragem, em torno de x_U , de 120 células/pixel. (d) Amostragem por área de 15 células/pixel e superamostragem, em torno de x_U , de 600 células/pixel .

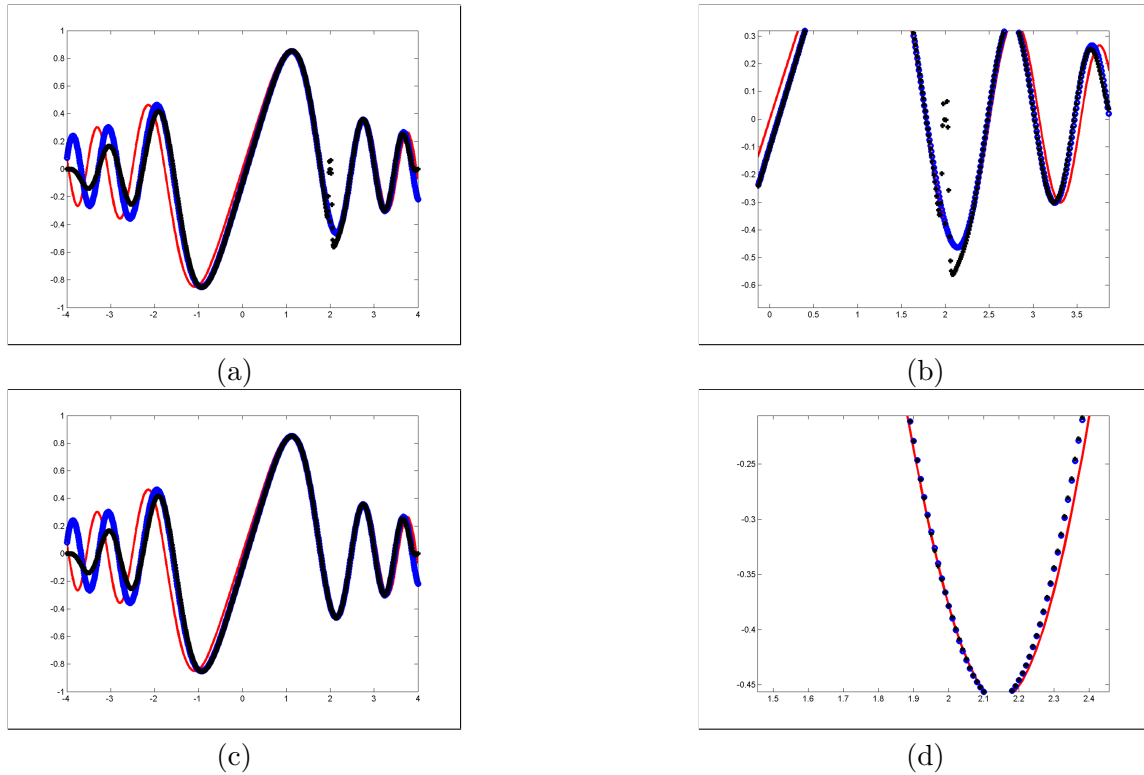


Figura 4.11: Filtragens por função de Green de casamento afim de 2ª ordem, com parâmetros $(u_0, u_1, x_U) = (0.1, -0.05, 2)$. (a) Amostragem pontual com superamostragem em torno de x_U de 30 células/unidade. (b) Zoom de uma região planar em torno do ponto x_U . (c) Amostragem por área de 200 células/unidade e superamostragem, em torno de x_U , de 300 células/unidade. (d) Zoom de uma região planar em torno do ponto x_U .

diferença entre as imagens é menos intensa na região central do objeto. As imagens utilizadas são de 113×101 .

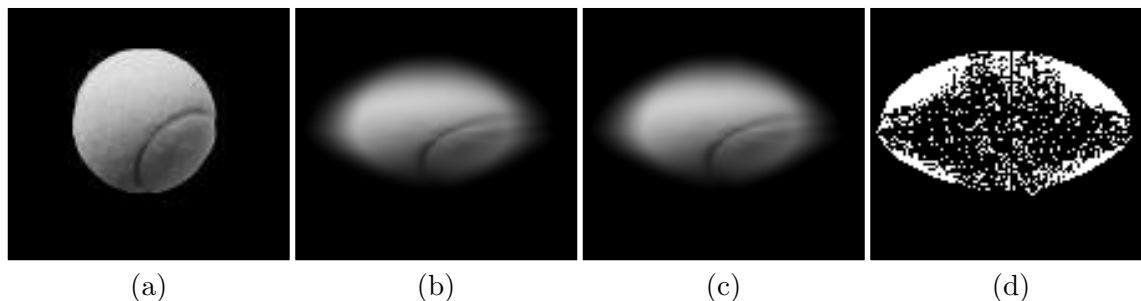


Figura 4.12: Exemplo da Não-Comutatividade do filtro de Green de casamento afim 1D. (a) Imagem original. (b) Imagem obtida com os parâmetros: $(u_0, u_1, x_U) = (-16, 0.286, 56)$ (horizontal) e $(v_0, v_2, y_V) = (16, -0.32, 50)$ (vertical), respectivamente. (c) Imagem obtida com os parâmetros: $(v_0, v_2, y_V) = (16, -0.32, 50)$ (vertical) e $(u_0, u_1, x_U) = (-16, 0.286, 56)$ (horizontal), respectivamente. (d) Imagem binária representando a diferença entre as duas primeiras imagens em (b) e (c).

9º exemplo. (Realismo - Filtros Green vs Warping) Considera-se um filtro de Green de equação de 2ª ordem, modelo afim, sobre imagens. No geral, observou-se que valores pequenos de u_0 (v_0 em caso de filtragem na direção vertical) fornecem resultados mais convincentes de movimento. Valores altos fornecem uma maior perda das informações de alta frequência nas imagens. A Figura 4.13 mostra uma comparação feita com as transformações de casamento e de Green sobre imagens, para parâmetros altos de movimento. O movimento sintetizado é o de movimento rápido de câmera. Observa-se que a Fig. 4.13(c) possui contornos bem detalhados, ao passo que a Fig. 4.13(d) apresenta perda de altas frequências na versão filtrada por função de Green. Isto se deve ao fato de as intensidades da imagem estarem sendo espalhadas, ao invés de simplesmente deslocadas. Contudo, efeitos de suavização que transmitam uma impressão de movimento mais convincente, é algo não trivial[5]-[7]. Com a abordagem das funções de Green isto surge naturalmente com o processo de síntese de movimento. Uma vantagem no processo de geração simultânea de movimento e motion blur é que se o par de warping (coluna da esquerda) for apresentado aleatoriamente a um observador, este não será capaz de dizer qual é a imagem original. Ou seja: não fica claro se é um par de zoom-in ou de zoom-out. Em contrapartida, o tipo de movimento que se intenciona



Figura 4.13: Exemplo de síntese de movimento através de casamento afim (Zoom): A segunda imagem do par à esquerda foi sintetizado pelo operador de casamento, enquanto que o par à direita pelo operador de Green. Os parâmetros em ambos os casos foram $(u_0, u_1, x_U) = (-8, 0.0125, 64)$ (movimento horizontal) e $(u_0, u_1, x_U) = (-8, 0.0125, 64)$ (movimento vertical).

transmitir com o par gerado por funções de Green é imediatamente aparente, e informações de movimento podem ser inferidas apenas, da segunda imagem. A princípio isto permitiria a estimação das direção e magnitude do movimento [56]-[58].

10º exemplo. (Comparação entre Técnicas de Motion Blur) Considera-se um filtro de Green de equação de 2ª ordem, modelo afim, sobre imagens. Ainda considerando a simulação de um zoom, serão comparados os efeitos de motion blur induzidos pela abordagem da função de Green e por dois outros modelos baseados em transformações afins, descritos brevemente, a seguir.

Modelo de Motion Blur de Acha e Peleg [29]: No modelo de motion blur de Acha-Peleg, a imagem borrada é obtida primeiro aplicando um warping à imagem de entrada, e depois aplicando um filtro 1D espacialmente invariante, ao longo de uma direção desejada. Aqui, para gerar um zoom-in, foram considerados dois warpings 1D seguidos por borramentos gaussianos, ao longo das direções horizontal e vertical.

Modelo de Zoom com Motion-Blur de Martinsen et al. [30]: Este modelo é específico para a simulação de zoom-in. Aqui, uma posição do pixel da imagem em (x, y) é substituída pela média daqueles pixels sobre um segmento de reta passando por (x, y) e com a direção do pixel central $(c_x, c_y) = (\frac{w}{2}, \frac{h}{2})$, onde w e h são, respectivamente, largura e altura da imagem. O comprimento do borramento é um parâmetro livre do algoritmo.

A Figura 4.14 mostra imagens de zoom geradas com os modelos acima e com a abordagem dos filtros de Green. As imagens nas Figs. 4.14(a) e (c), correspondem, respectivamente, aos modelos de Acha-Peleg e da função de Green, e foram gerados com os mesmos parâmetros afins de movimento $(u_0, u_1, x_U) = (v_0, v_2, y_v) = (-4, 0.0625, 64)$. A imagem da Fig. 4.14(b), corresponde ao modelo de Martinsen et al. e foi gerado com $\gamma = 7$ e $(c_x, c_y) = (64, 64)$. Abaixo de cada imagem encontra-se uma região destacada de seu canto superior direito, nas Figs. 4.14(d)-(f).

A partir das imagens pode-se notar que o efeito de zoom de câmera, produzido pelo modelo de Acha-Peleg, é pobre, principalmente devido ao motion blur uniforme induzido. Por outro lado, o modelo de Martinsen et al. fornece uma impressão mais apropriada do efeito de zoom, porém introduz alguns artefatos, evidentes, por exemplo, sobre o chapéu da Lena e no fundo da imagem (veja Figs. 4.14(b) e (e)). Quanto à imagem gerada pelo filtro de Green, esta é livre de artefatos e

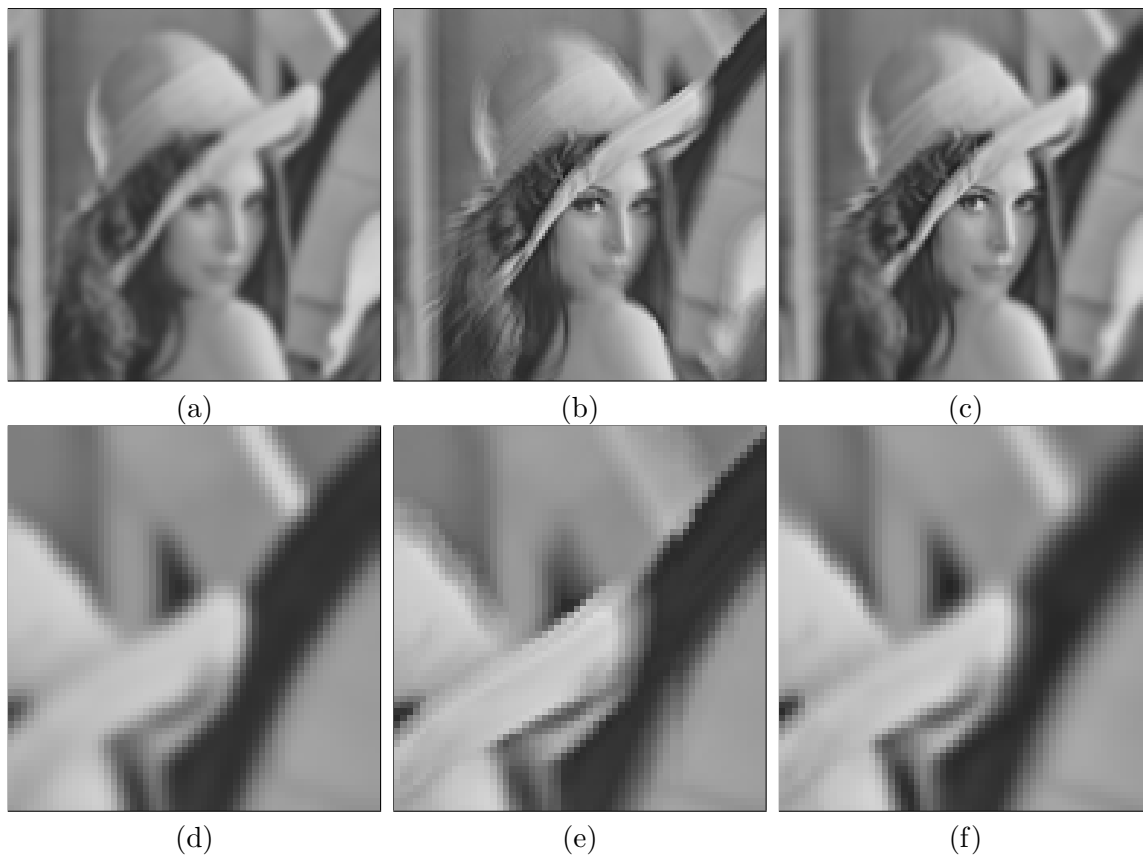


Figura 4.14: Zoom com motion blur: (a) Modelo de Acha-Peleg, para $(u_0, u_1, x_U) = (v_0, v_2, y_v) = (-4, 0.0625, 64)$, e desvio padrão gaussiano de 5 pixels. (b) Modelo de Martinsen et al. com centro $(c_x, c_y) = (64, 64)$ e comprimento de borramento $\gamma = 7$. (c) Filtro da função de Green com $(u_0, u_1, x_U) = (v_0, v_2, y_v) = (-4, 0.0625, 64)$.

ostenta uma melhor aparência. Além disso, esta última, como esperado, apresenta menos borramento sobre a região central, pois o campo de movimento possui baixa magnitude ali.

Similarmente ao caso de Martinsen e contrariamente ao Acha-Peleg, o algoritmo da função de Green implementa um processo de simulação de movimento/motion blur de um passo, porém com uma aplicabilidade maior. Tal afirmação se deve ao fato de que os filtros de Green afim não estão restritos à simulação de movimentos de zoom apenas.

4.4 Considerações Finais

No presente capítulo discutiu-se os problemas de amostragem e reconstrução obtidos na discretização de funções de Green. O objetivo era o de constatar propriedades observadas na reconstrução de curvas e imagens geradas com as referidas funções. Observou-se alguns tipos de amostragem utilizadas no processo e exemplos dos efeitos causados pelas funções de Green dos diversos casos estudados.

No caso constante, é preciso amostragem pontual apenas. Quanto ao caso afim, amostragem pontual pode ser feita fora de determinada faixa do domínio, contendo o ponto singular x_U . Dentro da faixa é necessária amostragem por área e naqueles pontos muito próximos de x_U , é requerida uma superamostragem.

O caso constante mostrou que, em termos de curvas, o desempenho é similar para 1ª e 2ª ordem, enquanto que em termos de imagens, os filtros de 1ª ordem são melhores, por suavizá-las menos. O caso afim, também demonstra melhor desempenho para a 1ª ordem, a menos de existência de ponto singular.

Pontos singulares constituem realmente o ponto chave da discussão. Observou-se que apesar de os filtros Green de 2ª ordem serem mais suavizantes que os de 1ª ordem, são mais caros computacionalmente por requererem alta taxa de superamostragem, em termos de imagens. No caso de curvas, nas vizinhanças de pontos singulares não foi possível obter uma boa reconstrução no caso de 1ª ordem.

Ainda sobre a importância do ponto singular, sua posição relativa ao domínio da imagem representa um grau adicional de liberdade, que, como será visto no capítulo subsequente, pode ser explorado para a geração de uma classe grande de movimentos em imagens (vale a pena mencionar que a importância do modelo afim para síntese e análise de movimento já havia sido reconhecida antes [59]-[64]).

Mostrou-se também que não há uma comutatividade no processo de filtragem a duas componentes de movimento e destacou-se a diferença entre a transformação de casamento (warping) e as transformações de Green (por intensidade). O último caso mostra ser vantajoso no sentido de sintetizar, simultaneamente, deslocamento

relativo e efeito de motion blur. Isso propicia às imagens criadas, um maior tom de realismo.

Finalmente, foram ilustrados dois modelos de motion blur para um caso específico de movimento - zoom-in - cujos resultados foram comparados com o algoritmo das funções de Green. Este último se mostrou qualitativamente superior aos outros dois.

Capítulo 5

Questões Práticas e Aplicações

O presente capítulo fará uma discussão sobre alguns aspectos da implementação dos filtros de Green para síntese de movimento. Novamente será focado o caso de movimento na direção horizontal. O caso de movimento em uma direção arbitrária pode ser obtida por combinações de filtragens nas direções horizontal e vertical. Esta última pode ser obtida, simplesmente pela filtragem da versão rotacionada de ângulo $\frac{\pi}{2}$, da imagem de entrada. O filtro de Green do modelo constante possui um parâmetro apenas - o de translação u . Quanto ao caso afim, dois parâmetros são escolhidos: u_0 e x_U (tendo em mente que $u_1 = -\frac{u_0}{x_U}$). O segundo caso merece atenção especial devido à existência dos chamados pontos singulares das transformações afins. A primeira questão a ser aqui tratada é justamente sobre a posição daqueles pontos.

Lembre que as funções de Green 1D, G_{\pm} , das equações de casamento vistas no capítulo 3 foram derivadas para os intervalos $(-\infty, x_U)$ e $(x_U, +\infty)$. Por outro lado, um domínio prático para a síntese de movimento será um subconjunto \mathcal{D} de $(-\infty, +\infty)$. Assim, se x_U estiver fora de tal domínio, uma função de Green apenas (G_+ ou G_-), estará envolvida na síntese de movimento, e se x_U estiver dentro, serão considerados ambos os filtros G 's. A posição do ponto singular relativo ao domínio (suporte) da imagem representa um grau de liberdade adicional, que pode ser explorado para a geração de uma classe grande de movimentos (mencione-se aqui que a importância dos pontos singulares para síntese e análise de movimento é bem conhecida [59]-[64]).

Ainda sobre x_U , as funções de Green do caso afim não são definidas naquele ponto. Logo no processo de síntese, sempre será tomada a intensidade original para aquela posição. Por outro lado, pontos na vizinhança de x_U requerem superamostragem e amostragem por área, para minimização dos erros de reconstrução, como observado no capítulo 4.

Os valores de $G(x, \xi)$, na vizinhança de x_U , são calculados por um processo de integração numérica no interior de cada pixel, na referida vizinhança¹. A discretização apropriada de G permite garantir o ganho unitário (veja eq. 4.3).

Ao filtrar imagens nas direções horizontal e vertical, tem-se liberdade para a escolha dos parâmetros das funções de Green ao longo das duas direções. Então, nos experimentos descritos abaixo, também foram considerados v_0 e y_V . Este último é o ponto singular ao longo do eixo vertical e é definido, similarmente à x_U , como $y_V = -\frac{v_0}{v_2}$, onde v_2 é a taxa de mudança do fluxo ótico ao longo do eixo Oy (veja Capítulo 3).

As seções subsequentes tratarão das aplicações desenvolvidas com os filtros de Green de equações de casamento. Sequências de animação e interpolação de vídeo da abordagem aqui vista, podem ser encontradas na página <http://www.dcc.ufba.br/~perfeuge/sintmov/welcome.html>.

5.1 Aplicação 1: Simulação de Movimento

Aqui serão discutidas as características gerais dos experimentos para a simulação de movimento com filtros de Green. Apenas um subconjunto das imagens compreendendo as animações são incluídas nas figuras.

Dada uma imagem de entrada, o conjunto das imagens em cada sequência de movimento artificial é gerada como descrito acima, escolhendo-se os parâmetros x_U , y_V , u_0 e v_0 , de maneira a produzir os efeitos desejados. Como já mencionado, sempre que for simulado movimento numa direção diferente da horizontal, duas filtragens da imagem de entrada, ao longo das direções horizontal e vertical, serão combinadas.

Como regra geral, as sequências de movimento são mais apropriadas quando os valores de u_0 são pequenos. Nestes casos, a perda das informações de alta frequência das imagens de entrada é menor. Em contrapartida, o efeito de borramento (blur) conseguido com as filtragens por funções de Green é importante para fornecer uma impressão de movimento convincente ao olho humano. Nos experimentos foi observado que num intervalo de 1 a 8 pixels/frame, os resultados são bons, enquanto que basicamente, com valores até 3 pixels/frame, o blur é negligenciável. Os valores para u_1 (os quais são obtidos a partir dos valores fornecidos de u_0 e x_U) constituem uma fração do valor de u_0 . Considerações similares valem para os parâmetros v_0 , v_2 e y_V . Note que nos experimentos aqui relatados, a origem do sistema de coordenadas é considerada no canto inferior esquerdo da imagem, com eixos coordenados positivos à direita desta (eixo Ox) e acima da mesma (eixo Oy).

¹Utilizou-se o método do trapézio neste caso.

Agora, será visto como os parâmetros afins podem ser escolhidos para simular diferentes classes de movimento.

O caso em que $u_1 = 0$ (modelo constante), ilustrado pela Fig. 5.1, já havia sido considerado em [25]. Neste caso, a função de Green correspondente é aquela na equação (3.7), que surge da equação de casamento de 2ª ordem a coeficientes constantes. Aqui, não existe ponto singular. Uma rotação não-uniforme junto com

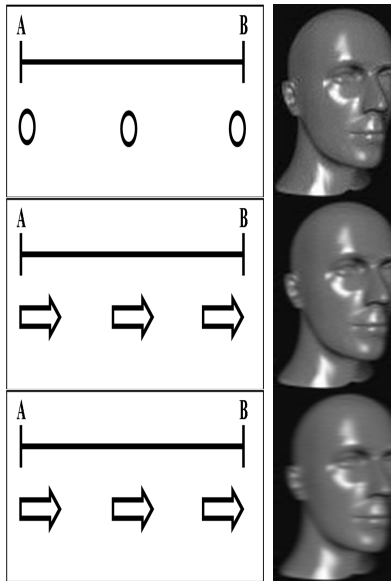


Figura 5.1: Exemplo de síntese de movimento com modelo constante - parâmetro fixo $u_1 = 0$ ($U(x) = u_0$). De cima para baixo: imagem de entrada e sequência de imagens geradas por filtros de Green G_u , com os parâmetros: $u_0 = 3$ e $u_0 = 6$.

uma translação podem ser inferidas da sequência gerada. A impressão de rotação é mais forte quando uma sequência crescente de valores u_0 é considerada, por exemplo, $u_0 = 1, 2, \dots, 8$, como na Fig. 5.1. Observe que o borramento das arestas do objeto (basicamente na região mais à direita, do presente caso), possui um papel importante na transmissão da impressão de rotação.

O modelo afim introduz novas possibilidades de simulações, por conta do parâmetro adicional u_1 . Abaixo, encontra-se uma discussão para este caso.

Translação Planar 1: Pode ser obtido com parâmetros afins tais que x_U esteja fora do domínio da imagem. Aqui é ilustrado o caso de translação horizontal, para uma sequência crescente dos valores u_0 e $|u_1|$. Uma impressão de movimento convincente é produzida por sequências com tais características. Por exemplo, as imagens da

Fig. 5.2 foram geradas com $(u_0, u_1) = (1, -0.001), (2, -0.002), (3, -0.003), \dots, (7, -0.007)$. Como o campo de movimento, $U(x)$, decresce com x , em cada uma das imagens o borramento é maior na sua região à esquerda. Por outro lado, valores crescentes de u_0 e $|u_1|$ também levam ao aumento de borramento com o tempo. A imagem de entrada é de 140×120 pixels.

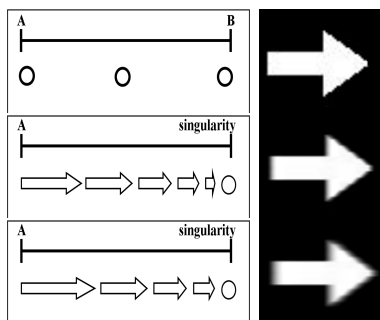


Figura 5.2: Translação Planar 1. De cima para baixo: imagem de entrada e sequência de imagens geradas por funções de Green, com os valores $(u_0, u_1) = (4, -0.004)$ e $(7, -0.007)$, respectivamente. O ponto singular, $x_U = 1000$, está fora do domínio da imagem.

Translação Planar 2: Esta simulação é similar ao caso de Translação Planar 1, porém combina filtragens nas direções horizontal e vertical. O resultado é o movimento das intensidades dos pixels ao longo de uma reta no sentido de baixo para cima e da esquerda para a direita. Os parâmetros foram: $(u_0, u_1) = (2, -0.008)$ e $(v_0, v_2) = (1, -0.004)$, para a segunda imagem; $(u_0, u_1) = (4, -0.016)$ e $(v_0, v_2) = (2, -0.008)$, para a terceira; e $(u_0, u_1) = (6, -0.024)$ e $(v_0, v_2) = (3, -0.012)$, para a quarta. Como primeira imagem da sequência foi considerada a imagem de entrada, que é de 128×128 pixels (Fig. 5.3).

A geração de movimentos mais complexos é ilustrada pelos exemplos abaixo:

Pulsção de um Coração: Neste caso (Fig. 5.4), o ponto singular x_U está localizado no centro da imagem, que é de 254×273 pixels. A sequência é obtida compondo uma expansão, a imagem de entrada e uma contração. Ambas, expansão e contração, são realizadas na direção horizontal e sobre a imagem original. Os parâmetros da expansão e contração foram, respectivamente, $(u_0, u_1, x_U) = (-2, 0.015, 137)$ (primeira imagem) e $(u_0, u_1, x_U) = (2, -0.015, 137)$ (terceira imagem).

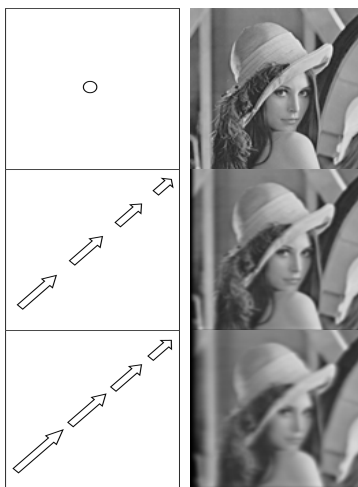


Figura 5.3: Translação Planar 2. De cima para baixo: imagem de entrada e seqüência de imagens geradas por funções de Green, com os parâmetros: $(u_0, u_1) = (2, -0.008)$ mais $(v_0, v_2) = (1, -0.004)$, para a segunda imagem; $(u_0, u_1) = (4, -0.016)$ mais $(v_0, v_2) = (2, -0.008)$, para a terceira imagem. O ponto singular, $(x_U, y_V) = (250, 250)$, está fora do domínio da imagem.

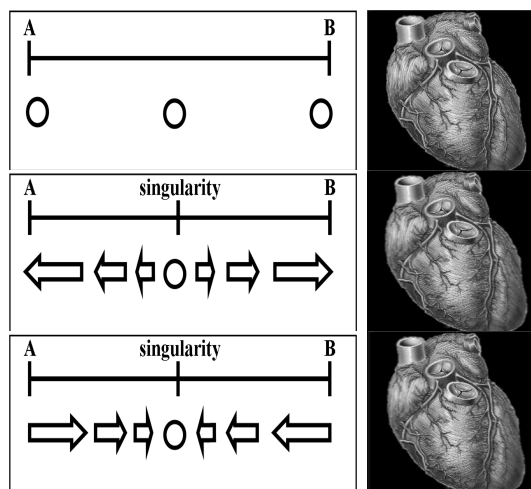


Figura 5.4: Pulsação de um Coração. De cima para baixo: imagem de entrada e seqüência de imagens geradas por funções de Green, com os parâmetros: $(u_0, u_1) = (-2, 0.015)$, e $(2, -0.015)$. O ponto singular, $x_U = 137$, está no centro da imagem.

Zoom-Out: Aqui, foi feita uma superposição das filtragens ao longo das direções horizontal e vertical. Os parâmetros afins foram: $(u_0, u_1, x_U) = (v_0, v_2, y_V) = (2, -0.03, 64)$, para gerar a segunda imagem e $(u_0, u_1, x_U) = (v_0, v_2, y_V) = (3, -0.044, 64)$, para gerar a terceira imagem, ambas a partir da imagem de entrada. As imagens são de 128×128 pixels. Aqui pode ser identificada uma transformação de contração [52]; pois em ambos os casos, $u_1 = v_2$, o ponto singular é classificado como um foco de contração [59],[60] (Fig. 5.5).

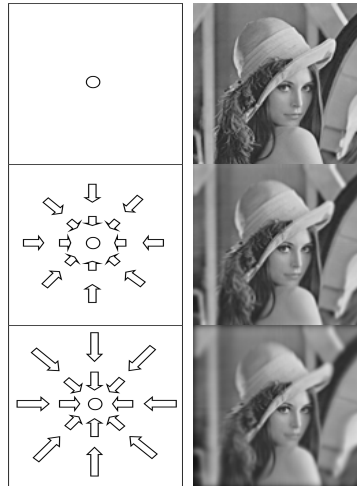


Figura 5.5: Zoom-Out. De cima para baixo: imagem de entrada e seqüência de imagens geradas por funções de Green, com os parâmetros: $(u_0, u_1) = (v_0, v_2) = (2, -0.03)$ (segunda imagem) e $(u_0, u_1) = (v_0, v_2) = (3, -0.044)$ (terceira imagem), com $x_U = y_V = 64$.

Zoom-In: Obtida similarmente ao Zoom-Out, porém com parâmetros afins $(u_0, u_1, x_U) = (v_0, v_2, y_V) = (-2, 0.031, 64)$ e $(u_0, u_1, x_U) = (v_0, v_2, y_V) = (-4, 0.063, 64)$, respectivamente, para a geração das segunda e terceira imagens. Aqui pode ser identificada uma expansão [52]; pois em ambos os casos, $u_1 = v_2$, o ponto singular é classificado como um foco de expansão [59],[60] (Fig. 5.6).

Deformação de uma Bola: Aqui, a mesma receita para gerar a Pulsção de um Coração é usada, como segue. A única exceção é a de que foi gerado um número maior de imagens. Os parâmetros utilizados foram: $(u_0, u_1) = (-16, 0.286)$, $(-12, 0.215)$, $(-8, 0.214)$, $(-4, 0.071)$, $(4, -0.071)$, $(8, -0.214)$, $(12, -0.215)$ e $(16, -0.286)$. O ponto singular, $x_U = 56$, está no centro da imagem, a qual é de 113×101 pixels (Fig. 5.7).

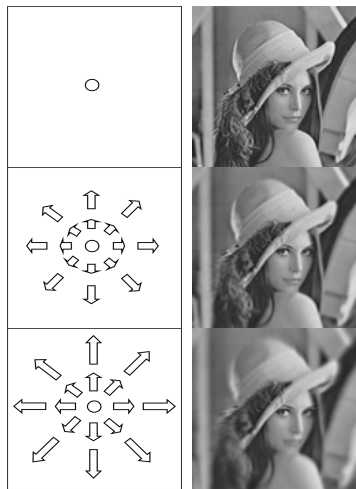


Figura 5.6: Zoom-In. De cima para baixo: imagem de entrada e seqüência de imagens geradas por funções de Green, com os parâmetros: $(u_0, u_1) = (v_0, v_2) = (-2, 0.031)$ (segunda imagem) e $(u_0, u_1) = (v_0, v_2) = (-4, 0.063)$ (terceira imagem), com $x_U = y_V = 64$.

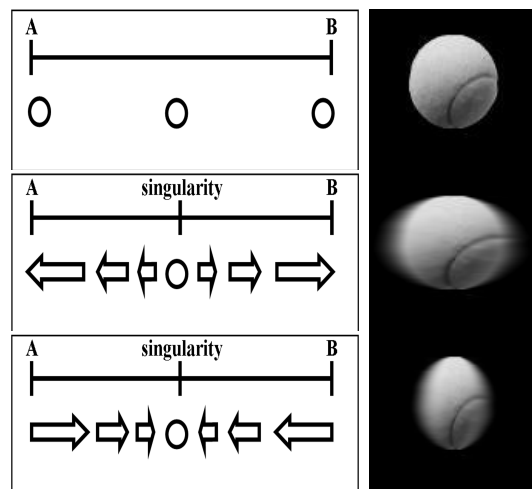


Figura 5.7: Deformação de uma Bola. De cima para baixo: imagem de entrada e seqüência de imagens geradas por funções de Green, com os parâmetros: $(u_0, u_1) = (-16, 0.286)$, e $(16, -0.286)$, com $x_U = 56$.

Movimento com as pálpebras: Esta simulação foi gerada combinando uma expansão ao longo da direção horizontal e uma contração na vertical. O movimento

resultante fica ao longo de uma hipérbole, cujos eixos são paralelos às bordas da imagem de entrada e se intersectam no centro da mesma. Os parâmetros utilizados foram: $(u_0, u_1, x_U) = (-2, 0.022, 92)$ e $(v_0, v_2, y_V) = (2, -0.026, 78)$ para a primeira imagem; $(u_0, u_1, x_U) = (-4, 0.043, 92)$ e $(v_0, v_2, y_V) = (4, -0.051, 78)$, para a segunda imagem e, $(u_0, u_1, x_U) = (-6, 0.065, 92)$ e $(v_0, v_2, y_V) = (6, -0.077, 78)$, para a terceira. As imagens são de 184×156 pixels. Aqui pode ser identificado um alongamento (stretching) [52]; pois u_1 e v_2 possuem sinais opostos. O ponto singular é um ponto de sela [59],[60] (Fig. 5.8).

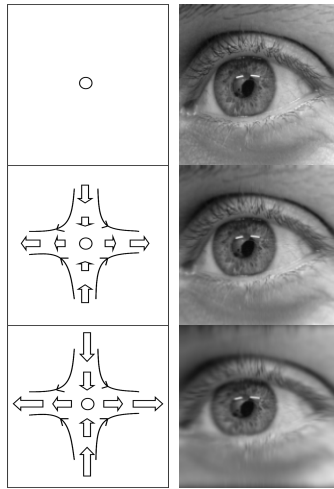


Figura 5.8: Movimento com as pálpebras. De cima para baixo: imagem de entrada e sequência de imagens geradas por funções de Green, com os parâmetros: $(u_0, u_1, x_U) = (-2, 0.022, 92)$ (horizontal) mais $(v_0, v_2, y_V) = (2, -0.026, 78)$ (vertical), para a segunda imagem; e $(u_0, u_1, x_U) = (-6, 0.065, 92)$ (horizontal) mais $(v_0, v_2, y_V) = (6, -0.077, 78)$ (vertical), para a terceira imagem.

A seção subsequente traz os experimentos sobre interpolação de vídeo, compreendendo estimação de parâmetros de movimento e geração de imagens intermediárias a compor uma nova sequência de imagens.

5.2 Aplicação 2: Interpolação de Vídeo

Para gerar quadros interpolantes de uma sequência de vídeo é preciso estimar os parâmetros de fluxo ótico afim entre quadros consecutivos. Aqui, foi utilizada

uma implementação fornecida pelo Professor Michael Black (Brown University) [65]-[66], baseada em regressão afim, que calcula os parâmetros u_0 , u_1 , u_2 , v_0 , v_1 e v_2 , de movimento (veja equação (3.27)). As componentes de translação em x e em y são, respectivamente, (u_0, v_0) . O parâmetro u_1 incorpora informações de expansão/contração em x e cisalhamento em y . O parâmetro v_2 incorpora informações de expansão/contração em y e cisalhamento em x . O parâmetro u_2 incorpora informações de rotação planar e cisalhamento em x . E o parâmetro v_1 incorpora informações de rotação planar e cisalhamento em y [52]. Alguns experimentos foram feitos com imagens sintéticas para achar uma relação entre os parâmetros de saída do programa [66] e os parâmetros de entrada dos filtros de Green. A origem do sistema de coordenadas para o programa [66] está no centro da imagem, ao passo que a origem do sistema de coordenadas dos filtros de Green está no canto inferior esquerdo da imagem. Foram testadas interpolações de sequências sintéticas e reais de vídeo, após estabelecer tal relação. Os quadros interpolados foram obtidos aplicando os filtros de Green derivados no Capítulo 3.

Antes de prosseguir, algumas notações serão aqui fixadas. O centro da imagem será denotado por (c_x, c_y) . Os parâmetros de movimento utilizados em transformações afins (warpings) serão denotados por a_0 , a_1 , a_2 , b_0 , b_1 e b_2 . Os parâmetros referentes ao programa [66] serão denotados por u_0 , u_1 , u_2 , v_0 , v_1 e v_2 . Finalmente, os parâmetros de entrada dos filtros de Green serão denotados por A_0 , A_1 , A_2 , B_0 , B_1 e B_2 (ver Tabela 5.1). Por exemplo, os parâmetros a_0 , u_0 e A_0 correspondem à componente de translação em x .

Parâmetros de Movimento		
Warping	Programa [66]	Filtros de Green
a_0	u_0	A_0
a_1	u_1	A_1
a_2	u_2	A_2
b_0	v_0	B_0
b_1	v_1	B_1
b_2	v_2	B_2

Tabela 5.1: Notação de parâmetros fixada.

Como primeiro passo para estabelecer uma relação entre a saída do programa [66] e a entrada dos filtros de Green, foram criadas sequências de imagens controladas. Ou seja, gerou-se imagens com uma transformação afim (parâmetros conhecidos). A idéia foi a de tentar obter tais parâmetros, analisando a saída do programa [66].

Por exemplo, para uma sequência de translação em x , considerou-se a transformação $M_U[f_1](x, y) = f_1[x - a_0, y]$, onde $a_0 = 1$. Neste caso, $a_1 = a_2 = b_0 = b_2 = 0$.

Os parâmetros de entrada para o filtros de Green, A_i e B_i ($i = 0, 1, 2$) são obtidos com base no sistema de equações

$$\begin{cases} u_1(x - c_x) - u_2(y - c_y) + u_0 = 0 \\ -v_1(x - c_x) + v_2(y - c_y) - v_0 = 0, \end{cases}$$

onde as u_i e v_i ($i = 0, 1, 2$) são retornadas por [66]. A Tabela 5.2 foi obtida mediante a aplicação da estratégia relatada acima. Como exemplo pode-se considerar o caso de

Relação entre os parâmetros	
$A_0 = u_0 - u_1c_x$ se $a_2 = 0$	$A_0 = -u_0 - u_2c_y$ se $a_1 = 0$
$A_1 = u_1$	$A_1 = u_1$
$A_2 = u_2$	$A_2 = u_2$
$B_0 = -v_0 - v_2c_y$ se $b_1 = 0$	$B_0 = -v_0 + v_1c_x$ se $b_2 = 0$
$B_1 = -v_1$	$B_1 = -v_1$
$B_2 = v_2$	$B_2 = v_2$

Tabela 5.2: Relação entre parâmetros do programa de [66] e os filtros de Green.

uma translação em x . Foi gerada uma imagem com a transformação $M_U[f_1](x, y) = f_1[x - a_0, y]$, onde $a_0 = 1$. A Tabela 5.3 mostra os parâmetros retornados pelo programa [66]. Neste caso, $u_0 = 0.966669$ (aproximadamente igual a a_0). Então, à

u_0	u_1	u_2	v_0	v_1	v_2
0.966669	0.000954	0.000538	0.000107	0.000002	0.000217

Tabela 5.3: Parâmetros de saída do programa [66].

A_0 foi atribuído o valor 1, isto é, $A_0 = a_0 \approx u_0$.

Abaixo encontram-se procedimentos e resultados de experimentos de interpolação de vídeo por filtros de Green. Aqui, foram utilizados os filtros do caso constante de 1ª ordem e do caso afim de 2ª ordem. As sequências que foram criadas como na seção anterior, para obtenção dos parâmetros, serão chamadas de sequências sintéticas virtuais.

Sequência Sintética Virtual 1: Sequência de zoom criada a partir da imagem da Lena - semelhante ao resultado de zoom-in da aplicação 1 - porém, obtida com

duas transformações afins 1D independentes. As transformações aplicadas foram: $M_U[f_1](x, y) = f_1[(1 - a_1)x - a_0, y]$, com $(a_0, a_1, a_2) = (-3, 0.047, 0)$ para y fixo, e $M_V[f_1](x, y) = f_1[x, (1 - b_2)y - b_0]$, com $(b_0, b_1, b_2) = (-3, 0, 0.047)$ para x é fixo. O ponto singular do campo de movimento está localizado em $(x_U, y_V) = (64, 64)$. A Tabela 5.4 mostra os parâmetros retornados pelo programa [66], ao serem fornecidas a imagem original e aquela criada. Há um erro naquelas estimativas,

u_0	u_1	u_2	v_0	v_1	v_2
-0.329287	0.048394	-0.000319	0.129099	-0.001874	0.047930

Tabela 5.4: Parâmetros de saída do programa [66].

pois a sequência foi gerada para $a_2 = b_1 = 0$ e o programa [66] retorna valores $u_2, v_1 \neq 0$. Para gerar um quadro intermediário considerou-se o equivalente a $\frac{1}{2}$ dos parâmetros de movimento estimados para filtragem com funções de Green. Os parâmetros foram $(A_0, A_1, x_U) = (-1.7, 0.027, 64)$ e $(B_0, B_2, y_V) = (-1.6, 0.025, 64)$. Aqui $A_2 = B_1 = 0$, correspondem aos parâmetros do warping com $a_2 = b_1 = 0$. A Fig. 5.9 mostra quadros criados para a sequência de vídeo virtual.



Figura 5.9: Sequência Sintética Virtual 1. (a) Imagem original. (b) Quadro intermediário gerado por filtro de Green com parâmetros $(A_0, A_1, x_U) = (-1.7, 0.027, 64)$ e $(B_0, B_2, y_V) = (-1.6, 0.025, 64)$. (c) Segundo quadro gerado via warplings 1D, com os parâmetros $(a_0, a_1, x_U) = (b_0, b_2, y_V) = (-3, 0.047, 64)$.

Sequência Sintética 1: Este caso é o de uma sequência de Zoom sintética não controlada, no sentido de que não se sabe quais são os parâmetros de movimento entre os quadros consecutivos. A sequência original foi fragmentada (tomou-se os

quadros de 1 a 4) e desta fragmentação truncou-se os quadros 2 e 3. Dessa forma, foi introduzida uma descontinuidade grande na sequência ora considerada. A Tabela 5.5 foi obtida como saída do programa [66]. A partir dos dados da Tabela 5.5 chegou-se

u_0	u_1	u_2	v_0	v_1	v_2
-0.037728	0.032712	0.000740	0.044345	-0.000296	0.037718

Tabela 5.5: Parâmetros de saída do programa [66].

a conclusão de que $(c_x, c_y) = (76, 76)$ (coordenadas do centro da imagem). Para a geração do quadro intermediário foram feitas algumas considerações. Baseado no exemplo anterior e no fato de que u_2 e v_1 são bem pequenos, considerou-se $A_2 = B_1 = 0$.

Quanto aos parâmetros, considerou-se o equivalente à $\frac{1}{2}$ dos parâmetros estimados para filtragem com funções de Green. Neste caso, $(A_0, A_1, x_U) = (B_0, B_2, y_V) = (-1.3, 0.017, 76)$. Novamente, supôs-se que $A_2 = B_1 = 0$. A Fig. 5.10 mostra os quadros criados para a sequência de vídeo.

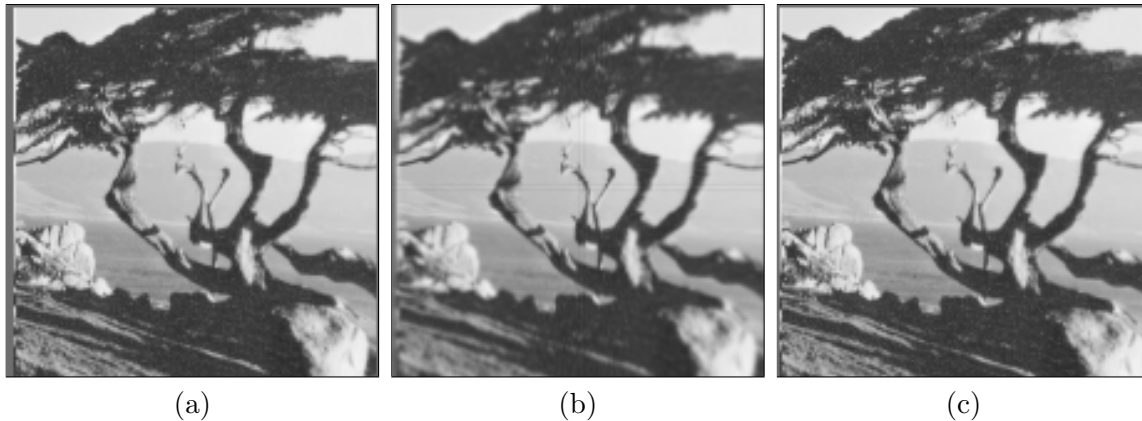


Figura 5.10: Sequência Sintética 1. (a) Primeiro quadro. (b) Quadro intermediário gerado por filtro de Green com parâmetros $(A_0, A_1, x_U) = (B_0, B_2, y_V) = (-1.3, 0.017, 76)$. (c) Quarto quadro.

Sequência de Translação Real 1: Sequência original obtida da página do Professor Michael Black [66]. A sequência original possui 10 frames, dos quais truncou-se os de número par. Em seguida a sequência foi interpolada. Os parâmetros de movimento - modelo constante - foram² (ver Tabela 5.6):

²O programa de Black permite obter também componentes de movimento do modelo constante.

Quadros envolvidos	u	v
0 e 2	1.906685	0.024679
2 e 4	1.865688	0.023129
4 e 6	1.903723	0.022881
6 e 8	1.919662	0.031960

Tabela 5.6: Parâmetros de saída do programa [66].

Para a interpolação assumiu-se que o movimento em questão fosse o de uma translação na direção horizontal apenas, e considerou-se o equivalente à $\frac{1}{2}$ dos parâmetros estimados para filtragem com funções de Green, ou seja, $A_0 \approx 1$. Aqui o filtro de Green utilizado refere-se ao modelo constante de 1ª ordem. A Fig. 5.11 mostra quadros criados para a sequência de vídeo real.

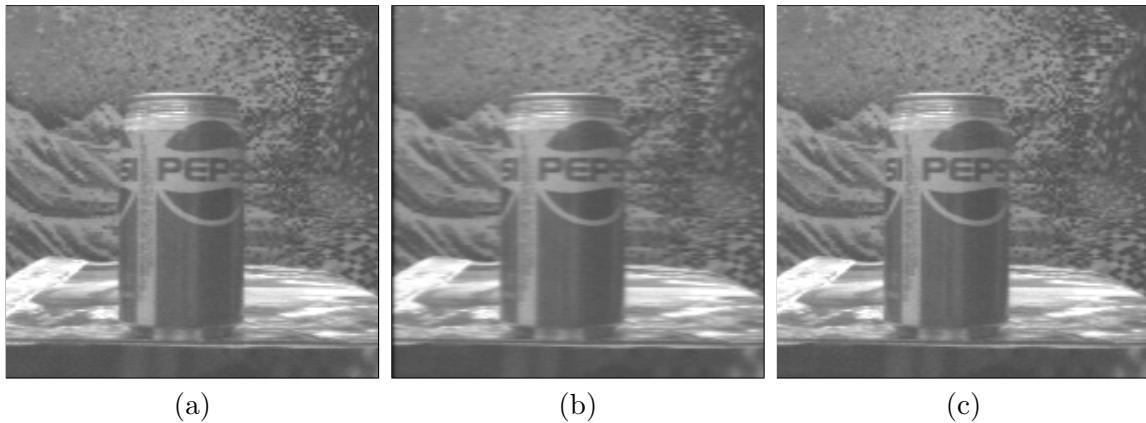


Figura 5.11: Sequência de Translação Real 1. (a) Primeiro quadro. (b) Quadro intermediário gerado por filtro de Green de 1ª ordem, com parâmetro $A_0 = 1$. (c) Terceiro quadro.

Sequência de Rotação Planar Virtual 1: Uma sequência de rotação planar virtual foi criada a partir de duas transformações afins 1D. As transformações aplicadas foram: $M_U[f_1](x, y) = f_1[(1 - a_1)x - a_2y - a_0, y]$, em cada linha da imagem de entrada, e $M_V[f_1](x, y) = f_1[x, (1 - b_2)y - b_1x - b_0]$, em cada coluna da imagem. Aqui $(a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2) = (3, 0, -0.05, 3, -0.05, 0)$. Note que aqui não existem componentes de escalamento nem em x ou em y . As transformações geraram um ponto singular em $(59, 61)$. A Tabela 5.7 mostra os parâmetros retornados pelo programa [66]. Para a interpolação por filtros de Green, utilizou-se

u_0	u_1	u_2	v_0	v_1	v_2
0.072022	0.000848	-0.049384	-0.070212	0.047969	-0.002005

Tabela 5.7: Parâmetros de saída do programa [66].

a implementação do caso afim, porém levando-se em conta o parâmetro adicional $A_2 \neq 0$ (bem como $B_1 \neq 0$). Observe que a relação utilizada aqui será aquela da coluna direita da Tabela 5.2. O objetivo era o de tentar recuperar o movimento de rotação original, com os filtros de Green. Assim, considerou-se $(A_0, A_1, A_2, x_U) = (3, 0.000848, -0.049384, 59)$ e $(B_0, B_1, B_2, y_V) = (3, -0.047969, -0.002005, 61)$. Note que para manter as posições dos pontos singulares, os parâmetros A_1 e B_2 são calculados como: $A_1 = -\frac{A_0}{x_U}$ e $B_2 = -\frac{B_0}{y_V}$. A Fig. 5.12 mostra quadros criados na tentativa de obtenção da sequência de rotação. Algumas anomalias são geradas



Figura 5.12: Sequência de Rotação Planar Virtual 1. (a) Primeiro quadro. (b) Quadro intermediário gerado por filtro de Green de 2ª ordem, com os parâmetros $(A_0, A_1, A_2, x_U) = (3, 0.000848, -0.049384, 59)$ e $(B_0, B_1, B_2, y_V) = (3, -0.047969, -0.002005, 61)$. (c) Terceiro quadro gerado por warping, com parâmetros $(a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2) = (3, 0, -0.05, 3, -0.05, 0)$.

na região central e na linha passando pelo centro da imagem (Fig. 5.12(b)). Este fato se deve à limitação do processo de reconstrução dos filtros Green utilizados; estes foram idealizados para o caso em que $A_0, A_1 \neq 0$ com $A_2 = 0$. Tais anomalias foram reduzidas com o aumento da taxa de superamostragem na região referida. Utilizou-se aqui, uma taxa de 900 células/pixel. O efeito obtido foi o de distorções simétricas em relação à posição do ponto singular x_U e uma contração

em y . Portanto, a rotação planar não pode ser gerada.

Sequência de Rotação Planar Virtual 2: A idéia utilizada aqui foi a de adaptar o filtro de Green constante de 1ª ordem, para que este levasse em conta a componente y de cada linha da imagem. Neste caso, o campo de movimento é dado por $U(y) = u_0 + u_2y$, onde u_0 e u_2 são constantes. Desta forma, ao longo de cada linha da imagem o campo de movimento é constante (não existe o ponto singular na coluna x_U da imagem) e a função de Green correspondente é aquela em (3.11), com u substituído por $U(y)$. As mesmas considerações são feitas para o campo de movimento $V(x) = B_0 + B_1x$, onde B_0 , B_1 e $V(x)$ são constantes ao longo de cada coluna da imagem. Esta abordagem, entretanto, gera um ponto singular ao longo de uma determinada linha, a saber, aquela que satisfaz $y_U = -\frac{u_0}{u_2}$. Um esquema de reconstrução também se faz necessário neste caso, porém similar àqueles casos vistos aqui. A sequência virtual analisada foi a mesma construída no exemplo Sequência de Rotação Planar Virtual 1. Ou seja: os dados de movimento retornados pelo programa [66] são aqueles vistos na Tabela 5.7. A relação obtida entre os parâmetros foi a seguinte:

Relação entre os parâmetros
$A_0 = -u_0 + u_1c_x - u_2c_y$
$A_1 = -u_1$
$A_2 = u_2$
$B_0 = -v_0 + v_1c_x + v_2c_y$
$B_1 = -v_1$
$B_2 = -v_2$

Tabela 5.8: Relação entre parâmetros do programa de [66] e os filtros de Green.

Para tentar obter a interpolação daquela sequência de rotação, aplicou-se o filtro de Green de 1ª ordem adaptado, com os parâmetros: $(A_0, A_2) = (3, -0.012)$, na direção horizontal, e $(B_0, B_1) = (3, -0.012)$, na direção vertical. Isto equivaleria a considerar as mesmas componentes de translação e $\frac{1}{4}$ dos parâmetros de cisalhamentos estimados, para filtragem com funções de Green. A Fig. 5.13 mostra quadros criados para a tentativa de interpolação da sequência de rotação. O resultado é um quadro cuja informação de movimento não acompanha o movimento da sequência original. Observa-se também que valores muito baixos para A_2 e B_1 tendem a dar ao quadro intermediário criado uma impressão de movimento de translação apenas. A conclusão é a de que é necessário um modelo mais complexo



Figura 5.13: Sequência de Rotação Planar Virtual 3. (a) Primeiro quadro. (b) Quadro intermediário gerado por filtro de Green de 1^a ordem adaptado, com os parâmetros $(A_0, A_2) = (3, -0.012)$, na direção horizontal, e $(B_0, B_1) = (3, -0.012)$, na direção vertical. (c) Terceiro quadro gerado por warping, criado como na sequência de rotação planar virtual 1.

para interpolar rotação.

5.3 Considerações Finais

Neste capítulo foram discutidas as questões de implementação dos filtros de Green para processar imagens digitais. No caso afim ficou destacada a importância dos pontos singulares no processo. Foi observado que o parâmetro de escala u_1 é calculado internamente e que os valores de u_0 devem ser pequenos para uma quantidade pequena de borramento na imagem gerada. Por outro lado, valores grandes de u_0 servem para simular movimentos rápidos de câmera, onde se explora o efeito de motion blur. Foi possível gerar movimentos complexos tais como: o de deformação de uma bola, a pulsação de um coração e o movimento das pálpebras de um olho.

Com relação à interpolação de vídeo, resultados promissores foram obtidos. Sequências de translação, zoom-in e zoom-out foram interpoladas (suavizadas). Para isso, foram estabelecidas relações entre os diversos parâmetros retornados por um programa de cálculo de fluxo óptico [66] e aqueles de entrada para os filtros Green.

O seguinte capítulo traz uma lista de conclusões e de trabalhos futuros sobre a técnica aqui desenvolvida.

Capítulo 6

Conclusões e Trabalhos Futuros

Aqui foi relatado o estudo de uma abordagem de aproximação de equações de casamento 1D e 2D, através de soluções por funções de Green, de problemas a valores de fronteira. Aplicações como simulação de movimento e interpolação de vídeo foram realizadas e os resultados foram muito satisfatórios.

Investigou-se as operações de casamento nos modelos constante e afim de movimento. Foram mostradas maneiras de escolher as condições de fronteira daqueles problemas e suas respectivas funções de Green. A análise aprofundada dos casos constante e afim permite concluir: (1) O caso constante apresentado em [25, 38, 39, 40, 41] possuía análise matemática incompleta e teve sua implementação refinada, no sentido de preservação da intensidade média das imagens; (2) Os filtros de Green de aproximações de 1ª ordem mostraram-se menos apropriados para reconstrução de curvas que os de 2ª ordem (caso constante); (3) O caso afim é rico pela existência dos pontos singulares envolvidos e pelas equações diferenciais que surgem. Seus coeficientes analíticos em torno dos pontos singulares permitem achar uma solução fechada naquela vizinhança; (4) A maior parte das funções de Green encontradas são bem comportadas, no sentido que são limitadas e normalizadas; (5) O caso afim de 2ª ordem é melhor no sentido de reconstruir curvas, quando as raízes do polinômio indicial são complexas, em comparação com as soluções para raízes reais e com as soluções de 1ª ordem; (6) A reconstrução de curvas no caso afim de 1ª ordem, na vizinhança de pontos singulares não fornece bons resultados; (7) Quanto à questão de amostragem e reconstrução, no caso constante, basta realizar amostragem pontual para obter boa reconstrução. No caso afim, amostragem pontual pode ser feita fora de determinada faixa do domínio, contendo o ponto singular x_U . Dentro da faixa é necessária amostragem por área e naqueles pontos muito próximos de x_U , é requerida uma superamostragem. (8) Em termos de processamento de imagens,

os filtros de 1ª ordem constante são melhores, por suavizá-las menos. O caso afim, também demonstra melhor desempenho para a 1ª ordem, a menos de existência de ponto singular; (9) No caso afim, os filtros Green de 2ª ordem são mais suavizantes que os de 1ª ordem, porém mais baratos computacionalmente por requererem menor taxa de superamostragem em torno do ponto x_U ; (10) Os borramentos causados pelas funções de Green transmitem uma impressão de movimento mais convincente que o operador de casamento exato; (11) Com a devida escolha dos parâmetros dos filtros de Green, foi possível simular uma classe grande de movimentos, como: translação, rotação, zoom-in e zoom-out; além de movimentos não-rígidos, tais como o de elástico de uma bola ou a pulsação de um coração; (12) Duas técnicas de motion blur baseadas em transformações afins, [29] e [30], foram comparadas com o método da função de Green afim, o qual mostrou-se qualitativamente superior a estas, quando analisado um movimento específico, a saber, o de zoom-in; (13) Do ponto de vista prático, é mais vantajoso empregar os filtros de Green (caso afim), uma vez que a discretização das equações diferenciais correspondentes, leva a sistemas de equações lineares esparsos com número de condicionamento alto; (14) Finalmente, O algoritmo de síntese de imagens, cujas aplicações foram ilustradas aqui, foi grandemente melhorado em relação às versões preliminares [25, 38, 39, 40, 41].

Ainda sobre a questão da comparação entre os filtros de Green de 1ª e 2ª ordem, ao analisar a plotagem das curvas o caso de 2ª ordem superam os de 1ª ordem, no geral. Isto é razoável, uma vez que as curvas analisadas aqui eram de classe C^∞ , exceto na origem. Assim, a medida que tomamos expansões em série de Taylor de ordens mais altas, as aproximações deverão ser melhores. Note que isto independe do método de integração numérica utilizado, pois no caso constante e até mesmo parcialmente no caso afim, a amostragem é pontual. Quanto às imagens, embora seja razoável supor que estas sejam de classe C^∞ , estas não necessariamente o são. Imagens são funções de L^2 e pensando dessa forma, as soluções por funções de Green aplicadas sobre imagens são do tipo fraca [45]. No caso de 1ª ordem a qualidade das imagens é melhor em relação ao de 2ª ordem, exceto na vizinhança do ponto singular (caso afim). A conclusão de que o caso de 2ª ordem é melhor que o de 1ª ordem, sobre imagens, foi tomada baseada especificamente na complexidade computacional exigida em torno do ponto singular.

Quando comparado ao ‘Motion Without Movement’ em [19], mencionado no Capítulo 1 e classificado como uma abordagem baseada em filtragem, pode-se dizer que o algoritmo aqui apresentado produz um efeito de ‘Motion with Movement’. Ou seja: filtros Green geram deslocamento real dos pontos das imagens e não uma ilusão de movimento, quando feita a modulação da irradiância da imagem.

Uma das extensões promissoras do presente trabalho é o possível uso das funções de Green como uma base de representação de movimento. A idéia é a de que seria possível projetar o fluxo ótico calculado sobre uma base, para derivar os coeficientes de movimento que indicariam a presença e a natureza de um movimento local. Também é pretendida a construção de uma versão multi-resolução daquelas funções. Isto, certamente, levaria a uma redução da complexidade computacional do processo.

Numa direção um pouco diferente, também seria considerada uma extensão do caso afim para um casamento bidimensional completo. Neste caso, as equações de casamento não seriam do tipo separadas, como consideradas aqui.

Finalmente, uma reinterpretação dos trabalhos [25],[27] e [38], sobre shape from shading, estéreo fotométrico e detecção de arestas com os operadores de Green de casamento constante e afim, de 1ª e 2ª ordem, é outra proposta de trabalho futuro.

Referências Bibliográficas

- [1] T. F. Chan and J. Shen, *Variational Image Deblurring - A Window into Mathematical Image Processing*, Lecture Notes, World Scientific Publishing Co., 2004.
- [2] D. Fleet, *Measurement of Image Velocity*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA (1992).
- [3] J. Gomes and L. Velho, *Fundamentos da Computação Gráfica*, Série de Computação e Matemática, Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA (2003).
- [4] P. Shirley, M. Ashikhmin, M. Gleicher and S. Marschner, *Fundamentals of Computer Graphics*, A K Peters, Ltd., 2nd Edition (2005)
- [5] G. J. Brostow and I. Essa, *Image-based motion blur for stop motion animation*, Proc. of the 28th annual conference on Computer Graphics and Interactive Techniques, pp. 561–566 (2001).
- [6] N. L. Max and D. M. Lerner, *A Two-and-a-Half-D Motion Blur Algorithm*, Computer Graphics 19, pp. 85–93 (1985).
- [7] M. Potmesil and I. Chakravarty, *Modeling Motion Blur in Computer Generated Images*, Computer Graphics 17, pp. 389–399 (1983).
- [8] A. Glassner, *An Open and Shut Case Computer Graphics*, IEEE Computer Graphics and Applications 19, pp. 82–92 (1999).
- [9] <http://www.cis.ohio-state.edu/~jwdavis/Archive/blurmotion.mov>
- [10] R. Sekuler, S. Watamaniuk, and R. Blake, *Perception of Visual Motion*, Chapter prepared for Stevens' Handbook of Experimental Psychology, 3e Hal Pashler, Series editor, Steven Yantis, Volume editor J. Wiley Publishers, New York, (June 2001).

- [11] D. Mumford, *Pattern Theory: The Mathematics of Perception*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (ICM'2002), World Scientific Publishing Co. (2002).
- [12] C. Fermüller, H. Malm and Y. Aloimonos, *Bias in Visual Motion Processes: A Theory Predicting Illusions*, Proceedings of Statistical Methods in Video Processing, Copenhagen, June (2002).
- [13] G. Mather, *Motion Perception Tutorial*, http://www.lifesci.sussex.ac.uk/home/George_Mather/Motion/Harley.HTML
- [14] Y. A. Petrov and A. V. Popple, *Effects of Negative Afterimages in Visual Illusions*, J. Opt. Soc. America, Vol. 19, No. 6, pp. 1107–1111 (June 2002).
- [15] S. Anstis, *Visual Adaptation to a Negative, Brightness-reversed World: Some Preliminary Observations*, Neural Networks for Vision and Image Processing, Bradford Books, MIT Press, pp. 1–14 (1992)
- [16] M. Shinya and A. Fournier, *Stochastic Motion – Motion Under the Influence of Wind*, Computer Graphics Forum (Procs. of Eurographics' 92) 11(3), pp. 119–128 (1992).
- [17] D. Oziem, N. Campbell, C. Dalton, D. Gibson and B. Thomas, *Combining Sampling and Autoregression for Motion Synthesis*, Proceedings of the Computer Graphics International Conference, pp. 510–513 (June 2004).
- [18] N. Foster and D.N. Metaxas, *Realistic Animation of Liquids*, CVGIP: Graphical Model and Image Processing 58(5), pp. 471–483 (1996).
- [19] W. Freeman, E. Adelson and D. Heeger, *Motion Without Movement*, Computer Graphics 4, Volume 25, pp. 27–30 (1991).
- [20] W. Freeman and E. Adelson, *The Design and Use of Steerable Filters*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence 13(9), pp. 891–906 (1991).
- [21] L. Segal, *Computational Neuroscience Exercise - Motion Without Movement*, http://www.cs.tau.ac.il/~segallia/nc_exr1.htm
- [22] B. K. P. Horn and B. Schunck, *Determining Optical Flow*, Artificial Intelligence, Vol. 16, No. 1-3, pp. 185–203 (August 1981).

- [23] B. Lucas and T. Kanade, *An Iterative Image Registration Technique with an Application to Stereo Vision*, Proceedings of Image Understanding Workshop, pp. 121–130 (1981).
- [24] J. L. Barron, D. J. Fleet and S. S. Beauchemin, *Performance of Optical Flow Techniques*, International Journal of Computer Vision, Vol. 12, No. 1, pp. 43–77 (September 1994).
- [25] J. R. A. Torreão, *A Green's Function Approach to Shape from Shading*, Pattern Recognition 34, pp. 2367–2382 (2001).
- [26] I. Stakgold, *Green's Functions and Boundary Value Problems*, Wiley-Interscience Publications (1979)
- [27] J. R. A. Torreão, *Geometric-Photometric Approach to Monocular Shape Estimation*, Image and Vision Computing 21, pp. 1045–1061 (2003).
- [28] A. Sawchuk, *Space-Variant Image Motion Degradation and Restoration*, Proceedings of IEEE Vol. 60 (7), pp. 854–861 (1972)
- [29] A. Rav-Acha and S. Peleg, *Restoration of Multiple Images with Motion Blur in Different Directions*, Workshop on Applications of Computer Vision, Palm Springs, pp. 22-28, (2000)
- [30] T. Martinsen, F. M. Quintero and D. Skarda, Plug-in to the GIMP (Open Source Code version 1.22) (1996)
- [31] <http://www.gimp.org>
- [32] J. Gomes and L. Velho, *Image Processing for Computer Graphics*, Springer-Verlag, New York (1997)
- [33] G. Beylkin, *On Wavelet-based Algorithms for Solving Differential Equations*, APPM preprint 153, Dec. 1992, and Chapter in the book *Wavelets: Mathematics and Applications*, CRC Press (1993).
- [34] M. Rasajski, *Preconditioning in a Wavelet Basis and Its Application to Some Boundary Value Problems*, Publications of the Faculty of Electrical Engineering of University of Belgrade, Series: Mathematics 14 (2003)

- [35] J. A. Sill and J. Moore, *On Some Classes of Linear Time-Varying Parametric Filters*, Ninth DSP Workshop and First Signal Processing Education Workshop, October 2000 (Available at <http://spib.ece.rice.edu/DSP2000/submission/DSP/papers/paper112/paper112.pdf>).
- [36] A. Verri and T. Poggio, *Motion Field And Optical Flow: Qualitative Properties*, IEEE Transactions on PAMII, PAMI11, pp. 490–498 (1989).
- [37] B. Fischl and E. Schwartz, *Fast Adaptive Alternatives to Nonlinear Diffusion in Image Enhancement: Green's Function Approximators and Nonlocal Filters*, First International Conference on Scale-Space Theory in Computer Vision, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 1252, pp. 327–332 (October 1997).
- [38] J. R. A. Torreão and M. S. Amaral, *Signal Differentiation Through a Green's Function Approach*, Pattern Recognition Letters 23(14), pp. 1755–1759 (December 2002).
- [39] J. R. A. Torreão, *An Analytical Model for the Disparity Selectivity Profiles of Binocular Neurons*, Proceedings of the 9th International Conference on Neural Information Processing (ICONIP'02), Vol. 3, pp. 1125–1129 (2002).
- [40] P. E. Ferreira Júnior, J. R. A. Torreão and P. C. P. Carvalho, *Data-Based Motion Simulation Through a Green's Function Approach*, Proceedings of XVII Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing, pp. 193–199 (October 2004).
- [41] P. E. Ferreira Júnior, J. R. A. Torreão, P. C. P. Carvalho and L. Velho, *Video Interpolation Through Green's Functions of Matching Equations*, IEEE International Conference on Image Processing (September 2005).
- [42] P. E. Ferreira Júnior, J. R. A. Torreão, P. C. P. Carvalho and M. B. Vieira, *Motion Synthesis Through 1D Affine Matching* (last version submitted to Pattern Analysis and Applications in 15th December 2006).
- [43] P. E. Ferreira Júnior, *Soluções de Problemas a Valores de Fronteira Aplicadas em Processamento de Imagens*, Relatório Técnico sob Termo de outorga n^o BOL 0106/2005, submetido à FAPESB - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado da Bahia, 118 páginas (Novembro de 2006).
- [44] F. Farassat, *Introduction to Generalized Functions with Applications in Aerodynamics and Aeroacoustics*, NASA Technical Paper 3428, Langley Research Center, Hampton, Virgínia (May 1994).

- [45] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics - Functional Analysis*, Academic Press (1980).
- [46] G. F. Roach, *Green's Functions*, Cambridge University Press; 2nd Edition (1982).
- [47] L. Andrews, *Elementary Partial Differential Equations with Boundary Value Problems*, Academic Press (1986).
- [48] V. I. Arnold, *Equações Diferenciais Ordinárias*, Editora MIR (1985)
- [49] R. Haberman, *Elementary Applied Partial Differential Equations*, Prentice-Hall (1987).
- [50] E. A. Coddington, *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Dover Publications (1961)
- [51] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society (1997)
- [52] B. Jähne, H. Haußecker and P. Geißler, *Handbook of Computer Vision*, Academic Press, Vol. 2 (1999)
- [53] B. Jawerth and W. Sweldens, *Wavelet Multiresolution Analysis Adapted for the Fast Solution of Boundary Value Ordinary Differential Equations*, Proceedings of the 6th Copper Mountain Multigrid Conference, NASA Conference Pub, pp. 259–273 (1993)
- [54] J. D. Foley, A. van Dam, S. K. Feiner and J. F. Hughes, *Computer Graphics: Principles and Practice in C*, Addison-Wesley Professional, 2nd Edition (1995)
- [55] G. H. Golub and C. F. Van Loan, *Matrix Computations*, North Oxford Academic (1983)
- [56] I. M. Rekleitis, *Visual Motion Estimation based on Motion Blur Interpretation*, M. Sc. Thesis of Computer Science, School of Computer Science, McGill University, Montreal (1995).
- [57] I. M. Rekleitis, *Steerable Filters and Cepstral Analysis for Optical Flow Calculation from a Single Blurred Image*, Vision Interface, pp. 159–166 (1996).
- [58] I. M. Rekleitis, *Optical Flow Recognition from the Power Spectrum of a Single Blurred Image*, Proc of IEEE International Conference on Image Processing (1996).

- [59] A. Verri A, F. Girosi and V. Torre, *Mathematical Properties of the 2D Motion Field: from Singular Points to Motion Parameters*, Journal of the Optical Society of America A 6(5), pp. 698–712 (1989)
- [60] T. Corpetti, E. Mémin and P. Pérez, *Extraction of Singular Points from Dense Motion Fields: An Analytic Approach*, Journal of Mathematical Imaging and Vision, vol. 19(3), pp. 175–198 (2003)
- [61] R. Ford and R. Strickland, *Representing and Visualizing Fluid Flow Images and Velocimetry Data by Nonlinear Dynamical Systems*, CVGIP: Graphical Models and Image Processing 57(6), pp. 462–482 (1995)
- [62] H. Nogawa, Y. Nakajima and Y. Sato, *Acquisition of Symbolic Description from Flow Fields: A New Approach Based on a Fluid Model*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence 19 (1), pp. 58–63 (1997).
- [63] K. Wohn and A. Waxman, *The Analytic Structure of Image Flows: Deformation and Segmentation*, Computer Vision and Graphical Image Processing 2 (49), pp. 127–151 (1990).
- [64] M. Maurizot, P. Bouthemy, B. Delyon, A. Juditski and J. Odobez, *Determination of Singular Points in 2D Deformable Flow Fields*, Proceedings of 2nd IEEE International Conference on Image Processing, Vol. 3, pp. 488–491 (1995).
- [65] M. J. Black and P. Anandan, *The robust estimation of multiple motions: Parametric and piecewise-smooth flow fields*, Computer Vision and Image Understanding, CVIU, 63(1), pp. 75–104 (1996)
- [66] M. J. Black, *Area-Based Optical Flow: Robust Affine Regression*, Software available on-line in <http://www.cs.brown.edu/people/black/>.