Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada
IMPA - OS

Limites de Sistemas Lineares em Curvas de Gorenstein

Patrícia Helena Araújo da Silva Nogueira

Tese apresentada para a obtenção do grau de
Doutor em Ciências
Rio de Janeiro
Setembro de 2003

Orientador: Eduardo Esteves

Aos meus grandes amores, Mário e João

e ao meu querido avô Mário Silva.

Agradecimentos

A todos que de alguma forma tornaram possível esse trabalho, em especial a Eduardo Esteves pela enorme paciência e orientação impecável, ao meu marido Mário pelo incentivo e por sua também enorme paciência, a toda minha família em especial à minha mãe Ana Maria, minha avó Cris e minha madrinha Vera, aos professores Arnaldo e Karl Otto pela minha formação em Álgebra, aos colegas e amigos do grupo de álgebra Parham, Juscelino, Míriam e Luciane, a Nivaldo e Jorge Vitório pelos toques dados nas horas certas, aos amigos companheiros de papo e chimarrão Alexandre, Fábio e Milton, às minhas grandes amigas e companheiras de sala Dayse e Renata, à Fátima por todo seu apoio e amizade, a todos os funcionários do IMPA, ou melhor, a todo o instituto onde passei uma fase muito boa da minha vida e da qual sentirei sempre muitas saudades. Por fim, agradeço também ao Cnpq pelo essencial apoio financeiro.

Resumo

O objetivo principal desse trabalho é calcular, em característica zero, o limite de pontos de ramificação em degenerações de sistemas lineares em famílias de curvas irredutíveis de Gorenstein.

No caso em que os sistemas lineares convergem para um sistema linear de fato, Lax mostrou que o limite dos pontos de ramificação correspondentes pode ser calculado como o divisor de zeros da chamada *seção Wronskiana* definida em um trabalho de Lax e Widland. Contudo, em geral, feixes invertíveis degeneram para feixes sem torção de posto um, não necessariamente invertíveis. O que fazemos portanto é determinar o divisor limite de maneira intrínseca definindo o divisor de ramificação do que chamamos de um *sistema linear fracionário*: um par do tipo (V, I), onde I é um feixe sem torção de posto um e V um subespaço vetorial do espaço de seções globais de I.

Palavras-chave: curvas de Gorenstein, limites de sistemas lineares, divisores de ramificação, feixes sem torção de posto um.

Conteúdo

Introdução

O objetivo principal desse trabalho é calcular, em característica zero, o limite de pontos de ramificação em degenerações de sistemas lineares em famílias de curvas irredutíveis de Gorenstein.

No caso em que os sistemas lineares convergem para um sistema linear de fato, Lax em [L] mostrou que o limite dos pontos de ramificação correspondentes pode ser calculado como o divisor de zeros da chamada *seção Wronskiana* definida em [LW]. Contudo, em geral, feixes invertíveis degeneram para feixes sem torção de posto um, não necessariamente invertíveis. O que fazemos portanto é determinar o divisor limite no caso em que os sistemas lineares degeneram para o que chamamos de um *sistema linear fracionário*: um par do tipo (V, I), onde I é um feixe sem torção de posto um e V um subespaço vetorial do espaço de seções globais de I.

Seja C uma curva integral de Gorenstein sobre um corpo algebricamente fechado k de característica zero. Se I é um feixe sem torção de posto um sobre C podemos sempre tomar uma injeção $I \to L$, em um feixe invertível L. Dado um sistema linear fracionário (V, I) sobre C, definimos seu *divisor de ramificação* como sendo:

$$R(V, I) = R(V, L) - (r + 1)[Y]$$

onde $R(V, L)$ é o divisor de ramificação do sistema linear (V, L), como dado em [LW] e $[Y]$ é o divisor de Weil associado ao subesquema $Y \subset C$ cujo feixe de ideais é a imagem do homomorfismo induzido $I \otimes L^{-1} \to \mathcal{O}_C$.

Se (V, I) é limite de uma família $(\mathcal{V}, \mathcal{I})$ de sistemas lineares sobre uma família de curvas, podemos tomar uma injeção $\mathcal{I} \to \mathcal{L}$ em um feixe invertível $\mathcal{L}$, cuja restrição em cada fibra permanece injetiva. Usamos então os *feixes de Jatos relativos* construídos por Laksov e Thorup em [LT2], que nos permite definir uma *seção Wronskiana relativa*, a qual comuta com mudança de base e é funtorial. Tal seção nos possibilita mostrar que o divisor limite coincide com $R(V, I)$.

No primeiro capítulo são expostos resultados básicos relativos a feixes sem torção de posto um e feixes de ideais fracionários em especial no caso de curvas.

No Capítulo 2 lembramos a definição do divisor de ramificação de um sistema linear definido sobre uma curva de Gorenstein via a chamada *seção Wronskiana* já citada. Definimos então o que vem a ser um *sistema linear fracionário* (V, I) bem como seu divisor de ramificação associado $R(V, I)$, como divisor de Weil.

Verificamos que o divisor está bem definido e que possui o grau esperado (Fórmula de Plücker, vide Proposição 2.8).

Mostramos no terceiro capítulo (vide Proposição 3.9) uma fórmula relacionando o divisor de ramificação de um sistema linear fracionário e o do induzido via uma aplicação birracional entre curvas de Gorenstein, obtendo simplificações nos casos em que as singularidades são pontos duplos e no caso em que a aplicação é a normalização da curva, recuperando em característica zero uma fórmula já obtida em [GL] e [St].

As construções dos feixes de jatos (via o trabalho de Laksov e Thorup em [LT2]) e da seção Wronskiana relativa, a qual nos permitirá falar de divisores de sistemas lineares em famílias de curvas, são feitas no quarto capítulo.

Finalmente, no Capítulo 5 (Teorema 5.13) mostramos que, quando o sistema linear fracionário considerado é limite de sistemas lineares "de fato" em uma família de curvas de Gorenstein, o divisor de ramificação fracionário, definido de forma intrínseca na curva, é de fato o limite dos divisores de ramificação correspondentes. Vemos também, através de um exemplo, que não há uma estrutura esquemática bem definida para o divisor de ramificação fracionário.

Capítulo 1

Preliminares

Seja k um corpo algebricamente fechado de característica zero. Apresentaremos a seguir alguns resultados e definições de caráter geral a serem utilizados ao longo do trabalho.

1.1 Feixes sem torção

Sejam X um esquema reduzido de tipo finito sobre k e $\mathcal{I}$ um feixe coerente de $\mathcal{O}_X$-módulos.

Dizemos que $x \in X$ é *um ponto associado de* $\mathcal{I}$ se existe uma vizinhança afim $U = \mathrm{Spec}(A)$ tal que x corresponde a um primo associado do A-módulo $\mathcal{I}(U)$. O conjunto dos pontos associados é denotado por $\mathrm{Ass}(\mathcal{I})$. Os *pontos associados do esquema* X, cujo conjunto é denotado por $\mathrm{Ass}(X)$, são os pontos associados do feixe estrutural $\mathcal{O}_X$. Pelas Proposições III.2.2 e III.2.3, p. 207, em [Mu], temos que $\mathrm{Ass}(\mathcal{I})$ é um conjunto finito e $\mathrm{Ass}(X)$ coincide com os pontos genéricos de X.

Quando $\mathcal{I}$ é invertível nos pontos associados de X dizemos que $\mathcal{I}$ *tem posto um em* X. Sendo X reduzido, quando X é irredutível, temos que $\mathcal{I}$ tem posto um se e somente se existe um aberto denso $U \subseteq X$ tal que $\mathcal{I}|_U$ é invertível.

Definimos $T(\mathcal{I})$, o *subfeixe de torção de* $\mathcal{I}$, como o feixe coerente dado pelo kernel da aplicação:

$$\mathcal{I} \longrightarrow \prod_{x \in \mathrm{Ass}(X)} \mathcal{I}_x,$$

sendo $\mathcal{I}_x = (i_x)_* i^* \mathcal{I}$ onde i é o morfismo natural $i_x : \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \to X$. Dizemos que $\mathcal{I}$ é um *feixe sem torção sobre* X se $T(\mathcal{I}) = 0$.

Proposição 1.1. *Seja $\mathcal{I}$ feixe coerente de $\mathcal{O}_X$-módulos. Então $\mathcal{I}$ é sem torção em X se e somente se* $\mathrm{Ass}(\mathcal{I}) \subseteq \mathrm{Ass}(X)$.

Demonstração. Observamos primeiramente que podemos olhar localmente em um aberto afim $U \subseteq X$. Sejam $A = \mathcal{O}_X(U)$ e $M = \mathcal{I}(U)$.

Supondo que $\mathrm{Ass}(M) \subseteq \mathrm{Ass}(A)$, podemos considerar a sequência natural de homomorfismos:

$$M \longrightarrow \prod_{\mathcal{P}\in \mathrm{Ass}(A)} M_{\mathcal{P}} \longrightarrow \prod_{\mathcal{P}\in \mathrm{Ass}(M)} M_{\mathcal{P}}$$

e sendo injetiva a composição dessas aplicações, obtemos que $T(\mathcal{I})(U) = 0$.

Vamos mostrar agora que $T(\mathcal{I})(U) = 0$ implica que $\mathrm{Ass}(M) \subseteq \mathrm{Ass}(A)$. Seja $\mathcal{Q} \in \mathrm{Ass}(M)$. Logo, $\mathcal{Q} = \mathrm{ann}(m)$ para algum $m \in M\backslash\{0\}$. Como a torção é nula, para algum $\mathcal{P} \in \mathrm{Ass}(A)$ temos que $m_{\mathcal{P}} \neq 0$ em $M_{\mathcal{P}}$. Seja $a \in A\backslash\{0\}$ tal que $\mathcal{P} = \mathrm{ann}(a)$. Afirmamos que $\mathcal{Q} = \mathcal{P}$.

De fato, seja $b \in \mathcal{Q}$. Como $m_{\mathcal{P}} \neq 0$ temos que $b \in \mathcal{P}$; ou seja $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$. Por outro lado, como A é reduzido, $\mathcal{P}$ é minimal e portanto vale a igualdade. □

Proposição 1.2. *Sejam $\mathcal{F}$ e $\mathcal{I}$ feixes coerentes de $\mathcal{O}_X$-módulos. Então:*

(i) Se $\mathcal{I}$ é sem torção, então todo subfeixe de $\mathcal{I}$ também é sem torção.

(ii) O feixe $\frac{\mathcal{F}}{T(\mathcal{F})}$ é um feixe sem torção.

(iii) Seja $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{I}$ um homomorfismo. Então $\phi(T(\mathcal{F})) \subseteq T(\mathcal{I})$. Logo, quando $\mathcal{I}$ é sem torção, ϕ se fatora por $\mathcal{F} \to \frac{\mathcal{F}}{T(\mathcal{F})}$.

(iv) Seja $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{I}$ um homomorfismo. Se $\mathcal{F}$ é sem torção e o homomorfismo induzido

$$\phi^{\mathrm{Ass}} : \prod_{x\in \mathrm{Ass}(X)} \mathcal{F}_x \longrightarrow \prod_{x\in \mathrm{Ass}(X)} \mathcal{I}_x$$

é injetivo, então ϕ é injetivo.

Demonstração. (i) Se $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{I}$, então $\mathrm{Ass}(\mathcal{F}) \subseteq \mathrm{Ass}(\mathcal{I})$. Logo, da Proposição 1.1, se $\mathcal{I}$ é sem torção, $\mathcal{F}$ também é sem torção.

(ii) Seja $\mathcal{G} = \frac{\mathcal{F}}{T(\mathcal{F})}$. Pela definição do subfeixe de torção $T(\mathcal{F})$ temos que:

$$\prod_{x\in \mathrm{Ass}(X)} \mathcal{F}_x = \prod_{x\in \mathrm{Ass}(X)} \mathcal{G}_x$$

Como a aplicação induzida:

$$\mathcal{G} \longrightarrow \prod_{x\in \mathrm{Ass}(X)} \mathcal{F}_x$$

é naturalmente injetiva, obtemos portanto $T(\mathcal{G}) = 0$.

(iii) e (iv) Basta olharmos para o diagrama comutativo abaixo cujas sequências horizontais são exatas:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & T(\mathcal{F}) & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \prod_{x\in \mathrm{Ass}(X)} \mathcal{F}_x \\
 & & & & {\scriptstyle\phi}\downarrow & & {\scriptstyle\phi^{\mathrm{Ass}}}\downarrow \\
0 & \longrightarrow & T(\mathcal{I}) & \longrightarrow & \mathcal{I} & \longrightarrow & \prod_{x\in \mathrm{Ass}(X)} \mathcal{I}_x
\end{array}$$

□

Proposição 1.3. *Sejam $\mathcal{I}$ e $\mathcal{F}$ feixes coerentes de $\mathcal{O}_X$-módulos. Se $\mathcal{I}$ é feixe sem torção, então $Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{I})$ também é sem torção.*

Demonstração. Seja $\phi \in T(Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{I}))$. Como:

$$(Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{I}))_x \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x,\mathcal{I}_x)$$

obtemos que $\phi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{I}_x$ é o homomorfismo nulo para todo x em $Ass(X)$. Logo, olhando para o diagrama comutativo abaixo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{I} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod\limits_{x\in Ass(X)} \mathcal{F}_x & \xrightarrow{\phi^{Ass}=0} & \prod\limits_{x\in Ass(X)} \mathcal{I}_x \end{array}$$

vemos que $\phi(\mathcal{F}) \subseteq T(\mathcal{I})$, e como $\mathcal{I}$ é sem torção temos que $\phi = 0$. □

Corolário 1.4. *Sejam $\mathcal{I}$ e $\mathcal{F}$ feixes coerentes de $\mathcal{O}_X$-módulos, sendo $\mathcal{I}$ feixe sem torção sobre X. Se $s,t \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{I})$ são tais que $s_x = t_x$ para todo $x \in Ass(X)$, então $s = t$.*

Proposição 1.5. *Sejam $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ feixes sem torção de posto um sobre X. Então $Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I}_1,\mathcal{I}_2)$ é um feixe sem torção de posto um sobre X.*

Demonstração. Pela Proposição 1.3 basta observar que para todo $x \in X$ vale que:

$$(Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I}_1,\mathcal{I}_2))_x \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{I}_{1,x},\mathcal{I}_{2,x})$$

e portanto nos pontos associados de X o feixe $Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I}_1,\mathcal{I}_2)$ é invertível. □

Proposição 1.6. *Suponha X irredutível, e sejam $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ feixes sem torção de posto um sobre X. Então todo homomorfismo não nulo $\phi : \mathcal{I}_1 \to \mathcal{I}_2$ é injetivo.*

Demonstração. Seja $x \in \mathrm{Ass}(X)$. Como X é irredutível, temos que $\mathcal{O}_{X,x}$ é um corpo. Por outro lado, sendo $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ feixes sem torção de posto um, o homorfismo induzido:

$$\phi_x : \mathcal{I}_{1,x} \to \mathcal{I}_{2,x}$$

é um homomorfismo não nulo de $\mathcal{O}_{X,x}$-espaços vetoriais de dimensão um, e portanto injetivo. Logo, o homomorfismo associado ϕ^{Ass} é injetivo, e pela Proposição 1.2, temos que ϕ é injetivo. □

Definição 1.7. Suponha X irredutível, e seja $\mathcal{I}$ um feixe sem torção de posto um definido sobre X. Seja $s : \mathcal{O}_X \to \mathcal{I}$ um homomorfismo não nulo, e portanto injetivo pela Proposição 1.6. Considere o homomorfismo induzido pela dualização $Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I},\mathcal{O}_X) \to \mathcal{O}_X$, o qual, pelas Proposições 1.5 e 1.6, também é injetivo. Denotamos por $\mathcal{J}_s$ o feixe de ideais imagem dessa aplicação, e chamamos de *esquema de zeros de s* o subsquema de X dado por $\mathcal{J}_s$.

Definição 1.8. Seja $\mathcal{I}$ um feixe sem torção de posto um em X. Para todo inteiro $n \geq 0$ definimos:

$$\mathcal{I}^n = \frac{\mathcal{I}^{\otimes n}}{T(\mathcal{I}^{\otimes n})}.$$

Observamos que, para $\mathcal{I}$ um feixe de ideais, o feixe $\mathcal{I}^n$ acima definido coincide com a n-ésima potência de $\mathcal{I}$, pois esta é definida como a imagem da aplicação natural $\mathcal{I}^{\otimes n} \to \mathcal{O}_X$, e portanto isomorfa a $\mathcal{I}^n$ pelas Proposições 1.6 e 1.2.

Proposição 1.9. *Sejam $\mathcal{I}$ um feixe sem torção de posto um e $\mathcal{L}$ um feixe invertível. Então:*

$$(\mathcal{I} \otimes \mathcal{L})^n \simeq \mathcal{I}^n \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}.$$

para todo inteiro $n \geq 0$.

Demonstração. Sendo $\mathcal{L}^{\otimes n}$ invertível, vemos que $(\mathcal{I}^{\otimes n} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})_x \simeq \mathcal{I}_x^{\otimes n}$ para todo $x \in X$. Logo,

$$T(\mathcal{I}^{\otimes n} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}) = T(\mathcal{I}^{\otimes n}) \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$$

Tensorizando a sequência exata $0 \to T(\mathcal{I}^{\otimes n}) \to \mathcal{I}^{\otimes n} \to \mathcal{I}^n \to 0$ pelo feixe invertível $\mathcal{L}^{\otimes n}$ vemos que:

$$\frac{\mathcal{I}^{\otimes n} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}}{T(\mathcal{I}^{\otimes n} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})} \simeq \mathcal{I}^n \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}.$$

□

1.2 Feixes sem torção de posto um em curvas

Nesse trabalho, por uma *curva* entendemos um k-esquema projetivo integral de dimensão um. Seja C uma curva.

Proposição 1.10. *Seja I um feixe coerente de $\mathcal{O}_C$-módulos. Então I é sem torção se, e somente se, I_P é um $\mathcal{O}_{C,P}$-módulo sem divisores de zero para todo $P \in C$.*

Demonstração. Fazendo a análise local, basta observar que, como A é um domínio de integridade, temos que $\operatorname{Ass}(A) = \{0\}$ e, portanto, se M é um A-módulo finitamente gerado, $\operatorname{Ass}(M) \subseteq \operatorname{Ass}(A)$ se, e somente se, M não tem divisores de zero. □

Proposição 1.11. *Seja I feixe sem torção de posto um sobre C. Então, existem um feixe L invertível e um homomorfismo $\phi : I \to L$ injetivo.*

Demonstração. Seja $m \gg 0$ tal que $Hom_{\mathcal{O}_C}(I, \mathcal{O}_C)(m)$ seja gerado por seções globais. Como vale que

$$Hom_{\mathcal{O}_C}(I, \mathcal{O}_C)(m) = Hom_{\mathcal{O}_C}(I, \mathcal{O}_C(m)),$$

existe um homomorfismo não nulo $\phi \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_C}(I, \mathcal{O}_C(m))$, o qual pela Proposição 1.6 é injetivo. □

Definição 1.12. Seja $\mathcal{K}$ o feixe de funções racionais da curva C. Um subfeixe coerente não nulo de $\mathcal{K}$ é chamado de *feixe de ideais fracionários.*

Proposição 1.13. *Seja J um feixe de ideais fracionários sobre C. Então J é um feixe sem torção de posto um.*

Demonstração. Como $J \subseteq \mathcal{K}$, temos que o feixe J é sem torção. Seja $U \subseteq C$ aberto afim não vazio. Sejam

$$\frac{f_1}{g_1}, \ldots, \frac{f_s}{g_s}$$

geradores de $J(U)$ como $\mathcal{O}_C(U)$-módulo, onde $f_i, g_i \in \mathcal{O}_C(U)$ para $i = 1, \ldots, s$.

Considere $g = \prod_{i=1}^{s} g_i$. Temos que $gJ(U) \subseteq \mathcal{O}_C(U)$ define uma subvariedade fechada Y_U de U, a qual é própria pois $J(U) \neq 0$. Logo, $gJ(U)$ é invertível, e por conseguinte $J(U)$ é invertível no aberto denso $U \backslash Y_U \subseteq C$. □

A recíproca vale:

Proposição 1.14. *Seja I um feixe sem torção de posto um sobre C. Então I é isomorfo a um feixe de ideais fracionários.*

Demonstração. Sejam $U \subseteq C$ um aberto não vazio tal que $I|_U \simeq \mathcal{O}_U$. Seja $i : U \to C$ o morfismo de inclusão. Então, o homomorfismo dado pela composição:

$$i_* I|_U \xrightarrow{\simeq} i_* \mathcal{O}_U \longrightarrow i_* \mathcal{K}|_U = \mathcal{K}$$

é injetivo. Como I é um feixe sem torção de posto um, compondo novamente com o homomorfismo natural $I \to i_* I|_U$ obtemos uma injeção $I \to \mathcal{K}$. □

Proposição 1.15. *Sejam C uma curva não singular e J um feixe de ideais fracionários. Então, J é invertível.*

Demonstração. Para cada $P \in C$, sendo a curva não singular, o anel local $\mathcal{O}_{C,P}$ é um domínio de ideais principais. Dado J_P um ideal fracionário do anel local $\mathcal{O}_{C,P}$, existe $g \in \mathcal{O}_{C,P}$ tal que $gJ_P \subseteq \mathcal{O}_{C,P}$, e portanto gJ_P é um ideal principal. Logo, J_P é um $\mathcal{O}_{C,P}$-módulo livre. □

Lema 1.16. *Seja J um feixe de ideais fracionários sobre C. Então existe um aberto não vazio $U \subseteq C$ tal que $J|_U = \mathcal{O}_U$.*

Demonstração. Tome um aberto afim não vazio $V \subseteq C$ tal que $J|_V = g\mathcal{O}_V$ para algum $g \in \mathcal{K}(C)^*$. Seja $U \subseteq V$ um aberto afim não vazio tal que $g \in \mathcal{O}_C(U)^*$. Logo, $J|_U = \mathcal{O}_U$. □

Observação 1.17. Uma maneira equivalente de tratarmos feixes de ideais fracionários em uma curva, exposta em [St], e da qual faremos uso em alguns momentos nesse trabalho, é a seguinte:

Dado um feixe de ideais fracionários $J \subseteq \mathcal{K}$, pelo Lema 1.16 podemos associar a coleção:

$$\{J_P\}_{P \in C}$$

onde cada J_P é um ideal fracionário de $\mathcal{O}_{C,P}$, e $J_P = \mathcal{O}_{C,P}$ a menos de um número finito de pontos de C.

Reciprocamente, a cada coleção desse tipo associamos de maneira única um feixe de ideais fracionários J sobre a curva C. De fato, para cada $P \in C$, sejam $g_1, \dots, g_s \in \mathcal{K}(C)$ geradores de J_P como $\mathcal{O}_{C,P}$-módulo. Seja $U \subseteq X$ um aberto afim contendo P. Considere em U o feixe coerente de $\mathcal{O}_U$-módulos J^P dado por:

$$J^P(U) = g_1\mathcal{O}_C(U) + \cdots + g_s\mathcal{O}_C(U)$$

Seja $V \subseteq U$ aberto afim não vazio tal que $J^P|_V = \mathcal{O}_V$ e tal que $J_Q = \mathcal{O}_{C,Q}$ para todo $Q \in V$. Logo, no aberto $U^P = V \cup \{P\}$ temos que $J^P_Q = J_Q$ para todo $Q \in U^P$. Como os abertos U^P cobrem C, e além disso vemos que

$$J^P|_{U^P \cap U^Q} = J^Q|_{U^P \cap U^Q} = \mathcal{O}_{U^P \cap U^Q} \text{ para } P \neq Q,$$

temos que os feixes $J^P|_{U^P}$ se colam, definindo um feixe de ideais fracionários J sobre a curva C. Tal correspondência é claramente biunívoca.

Sendo assim, para definirmos um feixe de ideais fracionários J sobre C, basta definirmos a coleção de ideais fracionários $\{J_P\}_{P \in C}$ associada.

Definição 1.18. Dados $J, H \subseteq \mathcal{K}$ feixes de ideais fracionários definimos o *feixe condutor de H em J* como sendo o feixe de ideais fracionários $(J : H)$ dado localmente em cada $P \in C$ por

$$(J : H)_P = \{\, f \in \mathcal{K}(C) \;/\; f.H_P \subseteq J_P \,\}.$$

Observamos que $Hom_{\mathcal{O}_C}(H, J) \simeq (J : H)$.

Notação 1.19. Seja J um feixe de ideais fracionários. Denotamos por J^c o feixe de ideais fracionários dado pelo feixe condutor

$$J^c = (\mathcal{O}_C : J).$$

Definição 1.20. Sejam J e H feixes de ideais fracionários sobre C. Definimos o *feixe produto JH* como sendo o feixe de ideais fracionários dado localmente em cada $P \in C$ por $J_P H_P$, sendo esse último o produto de ideais fracionários.

Observação 1.21. O feixe $J.H$ é o feixe imagem do homomorfismo natural:

$$J \otimes H \to \mathcal{K}$$

e portanto, pela Proposição 1.6, isomorfo a $J \otimes H$ quocientado pelo seu subfeixe de torção. Logo, se H é invertível, $JH \simeq J \otimes H$.

Definição 1.22. Seja J um feixe de ideais fracionários. Para cada $P \in C$ existe $a \in \mathcal{O}_{C,P}\backslash\{0\}$ tal que $aJ_P \subseteq \mathcal{O}_{C,P}$. Definimos *o grau de J* em P como:

$$\deg_P(J) := \dim_k \frac{\mathcal{O}_{C,P}}{a\mathcal{O}_{C,P}} - \dim_k \frac{\mathcal{O}_{C,P}}{aJ_P}$$

Afirmamos que tal definição não depende do elemento $a \in \mathcal{O}_{C,P}$ escolhido. De fato, seja $b \in \mathcal{O}_{C,P}$ não nulo tal que $bJ_P \subseteq \mathcal{O}_{C,P}$. Como $abJ_P \subseteq \mathcal{O}_{C,P}$ basta mostrarmos o seguinte resultado:

Lema 1.23. *Sejam A domínio local, $g \in A\backslash\{0\}$ e $\mathcal{Q} \subseteq A$ um ideal não nulo tal que $\ell_A(A/\mathcal{Q}) < \infty$. Então,*

$$\ell_A(A/g\mathcal{Q}) = \ell_A(A/gA) + \ell_A(A/\mathcal{Q}).$$

Demonstração. Sai diretamente da exatidão da sequência:

$$0 \to \frac{A}{\mathcal{Q}} \to \frac{A}{g\mathcal{Q}} \to \frac{A}{gA} \to 0$$

□

Como $\deg_P(J) = 0$ a menos de um subconjunto finito de C, podemos definir o grau de um feixe de ideais fracionários, e também o divisor de Weil a ele associado, da seguinte maneira:

Definição 1.24. Seja J um feixe de ideais fracionários. Definimos o *grau de J* como sendo:

$$\deg(J) = \sum_{P \in C} \deg_P(J)$$

Definição 1.25. Seja J um feixe de ideais fracionários. Dizemos que o divisor de Weil dado por:

$$W(J) = \sum_{P \in C} \deg_P(J)P$$

é o *divisor associado ao feixe J.*

Proposição 1.26. *Sejam J e H feixes de ideais fracionários, onde H é invertível. Então, $W(JH) = W(J) + W(H)$.*

Demonstração. Queremos mostrar que $\deg_P(JH) = \deg_P(J) + \deg_P(H)$, para cada $P \in C$. Pela definição de grau de um feixe fracionário em um ponto da curva C, vemos que podemos supor J_P e H_P ideais de $\mathcal{O}_{C,P}$ e que, sendo H invertível, $H_P = g\mathcal{O}_{C,P}$ e $J_PH_P = gJ_P$ para algum $g \in \mathcal{K}(C)^*$. Sendo assim, a afirmação sai novamente do Lema 1.23. □

Definição 1.27. Seja G um feixe coerente de $\mathcal{O}_C$-módulos com suporte finito. Definimos o *divisor de Weil* $[G]$ *associado a* G da seguinte maneira:

$$[G] := \sum_{P \in C} \dim_k(G_P).P$$

Se $Y \subseteq C$ é um subesquema finito, definimos o *divisor de Weil associado ao subesquema* Y como sendo:

$$[Y] := [\mathcal{O}_Y]$$

Proposição 1.28. *Sejam* $J \subseteq H$ *feixes de ideais fracionários sobre uma curva* C*. Então,* $W(H) - W(J) = [H/J]$.

Demonstração. Seja P um ponto da curva C. Observamos primeiramente que pela definição de grau de um feixe fracionário em um ponto podemos supor que H_P e J_P são ideais de $\mathcal{O}_{C,P}$. Logo, a afirmação sai da sequência exata:

$$0 \longrightarrow \frac{H_P}{J_P} \longrightarrow \frac{\mathcal{O}_{C,P}}{J_P} \longrightarrow \frac{\mathcal{O}_{C,P}}{H_P} \longrightarrow 0.$$

□

Seja ω_C o *feixe dualizante da curva* C (ver [H1], Proposição 7.5, p. 242). Tal feixe pode ser caracterizado como o *feixe das formas diferenciais regulares de* C, de onde se obtém um homomorfismo natural

$$\eta : \Omega^1_C \longrightarrow \omega_C$$

bijetor nos pontos não singulares de C, sendo Ω^1_C o feixe das diferenciais da curva (ver [S], p. 68 e [AK], Obs. (1.17.ii), p. 170).

Observamos que, sendo ω_C um feixe sem torção de posto um podemos vê-lo como um feixe de ideais fracionários. A um feixe de ideais fracionários isomorfo a ω_C damos o nome de *feixe de ideais canônico* e denotamos por J_ω.

Teorema 1.29. (Dualidade local) *Sejam* $J \subseteq H$ *feixes de ideais fracionários. Seja* J_ω *um feixe de ideais canônico. Então, para todo* $P \in C$ *existe um* k*-isomorfismo:*

$$\frac{(J_{\omega,P} : J_P)}{(J_{\omega,P} : H_P)} \longrightarrow \operatorname{Hom}_k(\frac{H_P}{J_P}, k)$$

Demonstração. Ver Teorema 1.5 em [St], p. 111. □

Corolário 1.30. *Seja* J_ω *um feixe de ideais canônico. Então, se* J *é um feixe de ideais fracionários, para todo* $P \in C$ *vale que*

$$\deg_P(J_\omega : J) = \deg_P(J_\omega) - \deg_P(J)$$

Demonstração. Observamos primeiramente que pela definição de grau em um ponto podemos supor $J_{\omega,P}$ e J_P ideais do anel local $\mathcal{O}_{C,P}$. Sendo assim, pelo Teorema 1.29:

$$\frac{(J_{\omega,P} : J_P)}{(J_{\omega,P} : \mathcal{O}_{C,P})} = \mathrm{Hom}_k(\frac{\mathcal{O}_{C,P}}{J_P}, k)$$

e pela Proposição 1.28 obtemos que $\deg_P(J_\omega : J) = \deg_P(J_\omega) - \deg_P(J)$. □

Corolário 1.31. (Reflexividade) *Seja J_ω um feixe de ideais canônico. Se J é um feixe de ideais fracionários, então $(J_\omega : (J_\omega : J)) = J$.*

Demonstração. Sai do Corolário 1.30 que:

$$\deg((J_\omega : (J_\omega : J))) = \deg(J).$$

Como $J \subseteq (J_\omega : (J_\omega : J))$, pela Proposição 1.28 obtemos a igualdade. □

Observação 1.32. Se $\varphi : C' \to C$ é um morfismo birracional de curvas, então o comorfismo $\varphi^\sharp : \mathcal{O}_C \to \varphi_*\mathcal{O}_{C'}$ induz um isomorfismo:

$$\mathcal{K}_C \simeq \varphi_*\mathcal{K}_{C'}$$

onde $\mathcal{K}_C$ e $\mathcal{K}_{C'}$ são os feixes de funções racionais das curvas C e C'. Ao longo desse trabalho estaremos vendo o subfeixe $\varphi_*\mathcal{O}_{C'} \subseteq \varphi_*\mathcal{K}_{C'}$ como o feixe de ideais fracionários em C correspondente via tal isomorfismo. Estaremos também cometendo um abuso de linguagem ao denotarmos, quando J' é um feixe coerente em C', $(\varphi_*J')_P$ por simplesmente J'_P, para cada ponto P da curva C.

Definição 1.33. Seja $\varphi : C' \to C$ um morfismo birracional de curvas. Definimos o *feixe condutor associado a* φ como sendo o feixe de ideais fracionários $(\varphi_*\mathcal{O}_{C'})^c$, ou seja, o feixe dado localmente em cada $P \in C$ por

$$\mathfrak{C}_P = (\mathcal{O}_{C,P} : \mathcal{O}_{C',P}).$$

Definição 1.34. Seja $\pi : \widetilde{C} \to C$ a normalização de C e $\widetilde{\mathfrak{C}}$ o feixe condutor associado. Dizemos que C é uma *curva de Gorenstein* se para todo ponto P vale que:

$$\dim_k \frac{\mathcal{O}_{\widetilde{C},P}}{\mathcal{O}_{C,P}} = \dim_k \frac{\mathcal{O}_{C,P}}{\widetilde{\mathfrak{C}}_P}$$

Teorema 1.35. *Uma curva C é de Gorenstein se, e somente se, seu feixe dualizante ω_C é invertível.*

Demonstração. Ver [St], Teorema 2.3, p. 114. □

Corolário 1.36. *Seja C uma curva de Gorenstein. Então para todo feixe J de ideais fracionários vale que $(J^c)^c = J$ e $W(J^c) = -W(J)$*

Demonstração. Sai do Teorema 1.35 e dos Corolários 1.30 e 1.31. □

Proposição 1.37. *Se C é uma curva de Gorenstein, então para todo feixe I sem torção de posto um sobre C vale que:*

$$Hom_{\mathcal{O}_C}(Hom_{\mathcal{O}_C}(I,\mathcal{O}_C),\mathcal{O}_C) \simeq I.$$

Demonstração. Sai da Proposição 1.14 e do Corolário 1.36. □

Quando I é um feixe sem torção de posto um sobre uma curva C definimos seu *grau* como:

$$\deg(I) = \chi(I) - \chi(\mathcal{O}_C)$$

onde $\chi(\cdot)$ é a característica de Euler. Vamos mostrar que esse grau coincide com o grau acima definido para um feixe de ideais fracionários.

Lema 1.38. *Sejam J e H feixes de ideais fracionários sobre C, sendo H invertível. Então $\chi(JH) = \chi(J) + \deg(H)$.*

Demonstração. Pela Observação 1.21, como H é um feixe de ideais fracionários invertível, temos que $JH \simeq J \otimes H$ e portanto se $H' \simeq H$, então $JH \simeq JH'$. Além disso, também pelo fato de H ser invertível, vale que $H \simeq \mathcal{O}_C(n_1P_1 + \cdots + n_sP_s)$, onde n_i são inteiros não nulos e P_i são pontos não singulares da curva C para $i = 1, \ldots, s$.

Considere portanto um ponto não singular P da curva C. Então, como J_P é livre de posto um como $\mathcal{O}_{C,P}$-módulo, da seguinte sequência exata:

$$0 \to J\mathcal{O}_C(-P) \to J \to J|_P \to 0$$

obtemos que $\chi(J) = \chi(J\mathcal{O}_C(-P)) + 1$. Logo, por indução, obtemos a igualdade desejada

$$\chi(JH) = \chi(J) + \deg(H).$$

□

Proposição 1.39. *Seja J um feixe de ideais fracionários. Então:*

$$\deg(J) = \chi(J) - \chi(\mathcal{O}_C)$$

Demonstração. Vamos supor primeiramente que J é um feixe de ideais. Seja $G := \mathcal{O}_C/J$. Então $\chi(\mathcal{O}_C) - \chi(J) = \chi(G)$. Sendo G com suporte finito, temos $h^1(G) = 0$ e $h^0(G) = -\deg(J)$. Logo, $\deg(J) = \chi(J) - \chi(\mathcal{O}_C)$.

Observamos que dado um feixe de ideais fracionários J, existe um feixe de ideais invertível H tal que $JH \subseteq \mathcal{O}_C$. Então, pela Proposição 1.26 vemos que:

$$\deg(JH) = \deg(J) + \deg(H)$$

Por outro lado, como JH e H são feixes de ideais temos que:

$$\deg(J) = \deg(JH) - \deg(H) = \chi(JH) - \chi(H)$$

e pelo Lema 1.38 obtemos:

$$\deg(J) = \chi(J) - \chi(\mathcal{O}_C).$$

$\square$

Capítulo 2

Divisores de ramificação

Sejam C uma curva de Gorenstein de gênero aritmético g e ω_C seu feixe dualizante. Seja $d : \mathcal{O}_C \to \omega_C$ a derivação obtida tomando a composição da diferenciação exterior $\mathcal{O}_C \to \Omega^1_C$ com o homomorfismo natural $\eta : \Omega^1_C \to \omega_C$.

2.1 O divisor de ramificação de um sistema linear

Definição 2.1. A um par (V, L), onde L é um feixe invertível de grau d e onde $V \subseteq H^0(C, L)$ é um k-subespaço vetorial de dimensão $r+1$, damos o nome de *sistema linear de posto r e grau d sobre a curva C.*

Considere portanto um sistema linear (V, L) de posto $r > 0$ e grau d definido sobre a curva C. Mostraremos agora, seguindo Lax e Widland em [LW], como associar a este sistema linear um divisor de Weil, o chamado divisor de ramificação do sistema linear (V, L).

Seja $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ uma cobertura por abertos afins de C tais que $L(U_\alpha)$ e $\omega_C(U_\alpha)$ sejam $\mathcal{O}_C(U_\alpha)$-módulos livres de posto um, sendo l_α e ϵ_α seus respectivos geradores nesse aberto. Sejam $s_1, ..., s_{r+1} \in H^0(C, L)$ formando uma base para V como k-espaço vetorial e sejam $f_1^\alpha, ..., f_{r+1}^\alpha \in \mathcal{O}_C(U_\alpha)$ definidos por $s_j|_{U_\alpha} = f_j^\alpha l_\alpha$.

A derivação $d : \mathcal{O}_C \to \omega_C$ induz localmente uma k-derivação:

$$D : \mathcal{O}_C(U_\alpha) \to \mathcal{O}_C(U_\alpha)$$

definida por $d(U_\alpha)f = (Df).\epsilon_\alpha$. Considere, para cada $\alpha \in \Gamma$, a função regular em U_α dada pelo seguinte determinante:

$$s^\alpha := \det \begin{bmatrix} f_1^\alpha & f_2^\alpha & \cdots & f_{r+1}^\alpha \\ Df_1^\alpha & Df_2^\alpha & \cdots & Df_{r+1}^\alpha \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D^r f_1^\alpha & D^r f_2^\alpha & \cdots & D^r f_{r+1}^\alpha \end{bmatrix}$$

onde D^i é a composição i vezes da aplicação D.

Mostra-se então que estas funções determinam uma seção global s do feixe invertível $L^{r+1} \otimes \omega_C^{\binom{r+1}{2}}$, chamada *seção Wronskiana*, cujo esquema de zeros Z (ver Definição 1.7) não depende das escolhas feitas inicialmente. Chamamos o divisor de Weil associado

$$R(V, L) := [Z]$$

de *divisor de ramificação do sistema linear* (V, L). Um ponto P da curva C é chamado um *ponto de ramificação do sistema linear* (V, L) se $\deg_P R(V, L) > 0$. Note que a construção acima depende do fato que L é um feixe invertível.

Proposição 2.2. (Fórmula de Plücker) *O grau do divisor $R(V, L)$ é dado por:*

$$\deg R(V, L) = (r + 1) \deg L + \binom{r+1}{2}(2g - 2)$$

Demonstração. Basta observar que o grau de $R(V, L)$ é o grau do feixe invertível $L^{r+1} \otimes \omega_C^{\binom{r+1}{2}}$. □

Proposição 2.3. *Sejam (V, L) um sistema linear de posto r e $\psi : L \to H$ uma injeção em um feixe invertível H. Então:*

$$R(V, H) = R(V, L) + (r + 1)[Y]$$

onde $Y \subset C$ o subesquema dado pelo feixe de ideais imagem do homomorfismo $L \otimes H^{-1} \to \mathcal{O}_C$ induzido por ψ.

Demonstração. Seja $U \subseteq C$ um aberto afim, e sejam l e h geradores de $L(U)$ e $H(U)$ como $\mathcal{O}_C(U)$-módulos livres de posto um. Vendo L como um subfeixe de H temos que $l = g.h$ para algum $g \in \mathcal{O}_C(U)$. Portanto se $s_1, s_2, \ldots, s_{r+1}$ formam uma base para o subespaço vetorial V, temos que:

$$s_i|_U = f_i l = f_i g h$$

para $f_i \in \mathcal{O}_C(U)$. Da fórmula da derivação de um produto e das propriedades multilineares do determinante segue que:

$$\begin{vmatrix} f_1 g & f_2 g & \cdots & f_{r+1} g \\ D(f_1 g) & D(f_2 g) & \cdots & D(f_{r+1} g) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D^r(f_1 g) & D^r(f_2 g) & \cdots & D^r(f_{r+1} g) \end{vmatrix} = g^{r+1} \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_{r+1} \\ Df_1 & Df_2 & \cdots & Df_{r+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D^r f_1 & D^r f_2 & \cdots & D^r f_{r+1} \end{vmatrix}.$$

Logo $R(V, H) = R(V, L) + (r + 1)[Y]$ como queríamos mostrar. □

2.2 Sistemas lineares fracionários

Definição 2.4. Seja I um feixe sem torção de posto um e grau d sobre C. Seja $V \subseteq H^0(C, I)$ um k-subespaço vetorial de dimensão $r+1$. Dizemos que o par (V, I) é um *sistema linear fracionário* de posto r e grau d definido sobre a curva C.

Considere portanto um sistema linear fracionário (V, I) de posto r e grau d definido sobre a curva C. Pela Proposição 1.11 existe uma injeção em um feixe invertível $\phi : I \to L$. Tensorizando-a por L^{-1} obtemos um homomorfismo injetivo:

$$\phi_L : I \otimes L^{-1} \to \mathcal{O}_C.$$

Seja Y o subesquema correspondente ao feixe de ideais dado pela imagem de ϕ_L, o qual é isomorfo ao feixe $I \otimes L^{-1}$.

Definição 2.5. Definimos o *divisor de ramificação do sistema linear fracionário* (V, I) como:

$$R(V, I) = R(V, L) - (r+1)[Y]$$

onde $R(V, L)$ é o divisor de ramificação do sistema linear (V, L) e $[Y]$ é o divisor de Weil associado ao subesquema Y (Definição 1.27).

Mostraremos agora que esse divisor está bem definido, ou seja, não depende da injeção tomada inicialmente.

Observação 2.6. Também não está claro que o divisor $R(V, I)$ é um divisor efetivo. Na verdade só conseguiremos vê-lo no caso em que I é limite de feixes invertíveis, o que será feito posteriormente (veja Observação 5.14).

Lema 2.7. *Sejam L e $\widetilde{L}$ feixes invertíveis sobre C. Sejam $\phi : I \to L$ e $\widetilde{\phi} : I \to \widetilde{L}$ duas injeções. Então, existem M feixe invertível sobre C e inclusões $\varphi : L \to M$ e $\widetilde{\varphi} : \widetilde{L} \to M$ tais que $\varphi \circ \phi = \widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\phi}$.*

Demonstração. Sejam $U \subseteq C$ aberto afim não vazio tal que $I|_U$, $L|_U$ e $\widetilde{L}|_U$ são triviais, e n, m e $\widetilde{m}$ seus respectivos geradores.

Sejam $a, \widetilde{a} \in \mathcal{O}_C(U)$ tais que $\phi(n) = a.m$ e $\widetilde{\phi}(n) = \widetilde{a}.\widetilde{m}$. Podemos definir então duas aplicações:

$$\psi(U) : L(U) \to \mathcal{O}_C(U) \quad \text{e} \quad \widetilde{\psi}(U) : \tilde{L}(U) \longrightarrow \mathcal{O}_C(U)$$

$$m \mapsto \widetilde{a} \qquad\qquad \widetilde{m} \mapsto a$$

Obtemos assim dois homomorfismos $\psi : L|_U \to \mathcal{O}_U$ e $\widetilde{\psi} : \widetilde{L}|_U \to \mathcal{O}_U$ tais que $\psi \circ \phi|_U = \widetilde{\psi} \circ \phi|_U$.

Queremos estender tais homomorfismos para toda a curva C. Vendo a curva imersa em algum $\mathbb{P}^r$, sendo $C \backslash U$ um conjunto finito de pontos, podemos definir, olhando para hiperplanos que passam por cada ponto, uma seção global de $\mathcal{O}_C(l)$

tal que, o aberto principal C_f esteja contido em U. Sejam $\psi_f := \psi|_{C_f}$ e $\widetilde{\psi}_f := \tilde{\psi}|_{C_f}$. Denotemos por F e $\widetilde{F}$ os feixes $Hom_{\mathcal{O}_C}(L, \mathcal{O}_C)$ e $Hom_{\mathcal{O}_C}(\widetilde{L}, \mathcal{O}_C)$.

Pelo Lema 5.14(b) em [H1], pg. 118, existe $n > 0$ tal que $f^n\psi_f$ se estende a uma seção global φ de $F \otimes \mathcal{O}_C(ln)$ e tal que $f^n\widetilde{\psi}_f$ se estende a uma seção global $\widetilde{\varphi}$ de $\widetilde{F} \otimes \mathcal{O}_C(ln)$. Vemos então φ e $\widetilde{\varphi}$ como homomorfismos $L \to \mathcal{O}_C(ln)$ e $\widetilde{L} \to \mathcal{O}_C(ln)$ respectivamente. Logo, em C_f vale que:

$$(\varphi \circ \phi)|_{C_f} = (f^n\psi_f) \circ \phi|_{C_f} = (f^n\widetilde{\psi}_f) \circ \widetilde{\phi}|_{C_f} = (\widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\phi})|_{C_f}$$

Como o aberto C_f é denso e os feixes em questão são sem torção, pelo Corolário 1.4 temos que $\varphi \circ \phi = \widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\phi}$. □

Para mostrarmos que o divisor $R(V, I)$ está bem definido precisamos mostrar que este não depende do feixe invertível e nem da injeção tomados inicialmente. Pelo Lema anterior, basta considerarmos o caso em que temos injeções

$$\phi : I \to L \qquad \text{e} \qquad \theta : I \to M$$

onde L e M são feixes invertíveis e $\varphi : L \to M$ é tal que $\theta = \varphi \circ \phi$.

Os homomorfismos φ, ϕ e θ induzem por sua vez, via tensorizações, os homomorfismos injetivos:

$$\varphi_M : L \otimes M^{-1} \to \mathcal{O}_C, \quad \phi_L : I \otimes L^{-1} \to \mathcal{O}_C \quad \text{e} \quad \theta_M : I \otimes M^{-1} \to \mathcal{O}_C.$$

Sejam J, I_L e I_M os feixes de ideais imagens de φ_M, ϕ_L e θ_M respectivamente. Como $\theta = \varphi \circ \phi$, temos que $I_M = I_L J$. Como J é localmente principal temos, pela Proposição 1.26,

$$W(I_M) = W(I_L) + W(J).$$

Por outro lado, pela Proposição 2.3 obtemos:

$$R(V, M) = R(V, L) + (r + 1)W(J)$$

Logo:

$$R(V, M) - (r + 1)W(I_M) = R(V, L) - (r + 1)W(I_L)$$

mostrando portanto que $R(V, I)$, o divisor de ramificação do sistema linear (V, I), está bem definido. Veremos agora o grau desse divisor:

Proposição 2.8. (Fórmula de Plücker) *Seja C uma curva projetiva irredutível Gorenstein de gênero aritmético g. Seja (V, I) um sistema linear fracionário sobre C de posto r e grau d. Seja $R(V, I)$ o divisor de ramificação de (V, I). Então vale que:*

$$\deg R(V, I) = \binom{r+1}{2}(2g - 2) + (r + 1)d.$$

Demonstração. Tomemos uma injeção $\phi : I \longrightarrow L$, onde L é um feixe invertível, cuja existência é garantida pela Proposição 1.11. Novamente, tal injeção induz um homomorfismo injetivo $\phi_L : I \otimes L^{-1} \to \mathcal{O}_C$. Seja Y o subesquema dado pelo feixe de ideais imagem de ϕ_L.

Usando que $\deg Y = \deg L - d$ pela Proposição 1.26, da definição do divisor de ramificação $R(V, I)$ e da Proposição 2.2 obtemos:

$$\begin{aligned}\deg R(V,I) &= \binom{r+1}{2}(2g-2) + (r+1)\deg L - (r+1)(\deg L - d)\\ &= \binom{r+1}{2}(2g-2) + (r+1)d\end{aligned}$$

□

Exemplo 2.9. Sejam $C \subseteq \mathbb{P}^2$ a cúbica nodal dada pela equação

$$y^2z - x^2z - x^3 = 0$$

e $P = (0:0:1)$ seu nó. Seja (V, I) o sistema linear fracionário de posto um onde $I = \mathcal{O}_C(1) \otimes \mathcal{M}_P$, onde $\mathcal{M}_P$ é o feixe de ideais do ponto P e $V := H^0(C, I)$. Tomando $L = \mathcal{O}_C(1)$, calculamos o divisor de ramificação do sistema linear (V, L), obtendo $R(V, L) = 6P$. Como $\mathcal{M}_P$ é o feixe imagem do homomorfismo induzido $I \otimes L^{-1} \to \mathcal{O}_C$, concluímos que:

$$R(V, I) = 6P - 2P = 4P.$$

Capítulo 3

Comparações

Seja $\varphi : C' \to C$ um morfismo birracional de curvas. Se I é um feixe sem torção de posto um sobre C, denotamos por $I\mathcal{O}_{C'}$ o feixe sem torção de posto um quociente de $\varphi^* I$.

Considere um sistema linear fracionário (V, I) de posto r e grau d definido sobre a curva C. Como φ é birracional, temos que $\varphi_* I\mathcal{O}_{C'}$ é um feixe sem torção de posto um sobre C, e o homomorfismo natural:

$$I \to \varphi_* I\mathcal{O}_{C'}$$

é injetor. Portanto a aplicação:

$$H^0(C, I) \to H^0(C, \varphi_* I\mathcal{O}_{C'}) = H^0(C', I\mathcal{O}_{C'})$$

também é injetiva, significando que V pode ser visto como subespaço vetorial do espaço de seções globais de $I\mathcal{O}_{C'}$. Ou seja, o sistema linear fracionário (V, I) induz de forma natural na curva C' o sistema linear fracionário $(V, I\mathcal{O}_{C'})$.

O objetivo agora é, sob essas hipóteses, relacionarmos os divisores de Weil $R(V, I)$ e $\varphi_* R(V, I\mathcal{O}_{C'})$. Para isso, precisaremos de alguns resultados.

Observação 3.1. Estaremos sempre considerando $\varphi_* \mathcal{O}_{C'}$ um feixe de ideais fracionários via o isomorfismo $\varphi_* \mathcal{K}_{C'} \simeq \mathcal{K}_C$, como descrito na Observação 1.32. Lembramos também que, ao morfismo birracional φ, é associado o feixe condutor $\mathfrak{C} = (\varphi_* \mathcal{O}_{C'})^c$ (ver Definição 1.33).

Proposição 3.2. *Seja $\varphi : C' \to C$ um morfismo birracional, onde C é uma curva de Gorenstein. Então, para cada ponto P em C vale que:*

$$\dim_k \frac{\mathcal{O}_{C',P}}{\mathcal{O}_{C,P}} = \dim_k \frac{\mathcal{O}_{C,P}}{\mathfrak{C}_P}$$

onde $\mathfrak{C}$ é o feixe condutor associado a φ.

Demonstração. Observamos primeiramente que, pela Proposição 1.28, vale que $W(\varphi_*\mathcal{O}_{C'}) = [\varphi_*\mathcal{O}_{C'}/\mathcal{O}_C]$. Por outro lado, como C é curva de Gorenstein, pelo Corolário 1.36, temos que $W(\varphi_*\mathcal{O}_{C'}) = -W(\mathfrak{C})$, o que implica na igualdade desejada. □

Lema 3.3. *Seja $\varphi : C' \to C$ um morfismo birracional de curvas. Sejam $J' \subseteq \mathcal{O}_{C'}$ feixe coerente de ideais e $Z' = -W(J')$. Então:*

$$\varphi_* Z' = W(\varphi_*\mathcal{O}_{C'}) - W(\varphi_* J')$$

Demonstração. Sejam $P \in C$ e $Q_1, ...Q_t$ os pontos de C' com imagem P por φ. Como $\dim_k(\mathcal{O}_{C',P}/J'_P) = \dim_k(\widehat{\mathcal{O}_{C',P}}/\widehat{J'_P})$, pelo Teorema 8.15 em [M], pg. 62, vale que

$$\dim_k(\mathcal{O}_{C',P}/J'_P) = \sum_{i=1}^{t} \dim_k(\mathcal{O}_{C',Q_i}/J'_{Q_i})$$

e sendo tal igualdade válida para todo ponto da curva C temos que

$$[\varphi_*(\mathcal{O}_{C'}/J')] = \varphi_* Z'. \tag{3.1}$$

Por outro lado, da sequência exata natural

$$0 \to J' \to \mathcal{O}_{C'} \to \mathcal{O}_{C'}/J' \to 0$$

e do fato que φ é um morfismo afim obtemos a sequência exata:

$$0 \to \varphi_* J' \to \varphi_*\mathcal{O}_{C'} \to \varphi_*(\mathcal{O}_{C'}/J') \to 0.$$

Logo de (3.1) e da Proposição 1.28 segue que

$$\varphi_* Z' = [\frac{\varphi_*\mathcal{O}_{C'}}{\varphi_* J'}] = W(\varphi_*\mathcal{O}_{C'}) - W(\varphi_* J').$$

□

Proposição 3.4. *Seja $\varphi : C' \to C$ um morfismo finito de curvas e seja $\mathfrak{C}$ o feixe condutor associado a φ. Sejam $\omega_{C'}$ e ω_C os feixes dualizantes das curvas C' e C. Então:*

$$\varphi_*\omega_{C'} \simeq Hom_{\mathcal{O}_C}(\varphi_*\mathcal{O}_{C'}, \omega_C)$$

Demonstração. Sejam $G := \varphi_*\omega_{C'}$ e $H := Hom_{\mathcal{O}_C}(\varphi_*\mathcal{O}_{C'}, \omega_C)$. Dado F um feixe de $\mathcal{O}_C$-módulos coerente afirmamos que existe um isomorfismo funtorial:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_C}(F, G) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_C}(F, H).$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_C}(F, \varphi_*\omega_{C'}) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{C'}}(\varphi^*F, \omega_{C'}) \quad \text{(por adjunção)}\\
&\simeq H^1(C', \varphi^*F)^\vee \quad \text{(por dualidade)}\\
&\simeq H^1(C, \varphi_*\varphi^*F)^\vee \quad \text{(pela finitude de } \varphi)\\
&\simeq H^1(C, F \otimes \varphi_*\mathcal{O}_{C'})^\vee \quad \text{(pela fórmula da projeção)}\\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_C}(F \otimes \varphi_*\mathcal{O}_{C'}, \omega_C) \quad \text{(por dualidade)}\\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_C}(F, Hom_{\mathcal{O}_C}(\varphi_*\mathcal{O}_{C'}, \omega_C))
\end{aligned}$$

Tomando $F = G$, via o isomorfismo acima, podemos considerar $\phi : G \to H$ o homomorfismo correspondente a id_G. Da mesma maneira, fazendo $F = H$ consideramos $\psi : H \to G$ o homomorfismo correspondente a id_H. Obtemos dessa maneira o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_C}(G,G) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_C}(G,H) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_C}(H,G) \arrow[r, "\simeq"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_C}(H,H)
\end{tikzcd}$$

onde os homomorfirmos verticais são dados via composição com ψ. Desse diagrama obtemos que $\phi \circ \psi = id_H$. De forma inteiramente análoga, obtemos também que $\psi \circ \phi = id_G$. Logo $G \simeq H$. □

Proposição 3.5. *Seja $\varphi : C' \to C$ um morfismo birracional de curvas de Gorenstein, e seja $\mathfrak{C}$ o feixe condutor associado a φ. Sejam $\omega_{C'}$ e ω_C os feixes dualizantes das curvas C' e C. Então:*

(i) $\varphi_*\omega_{C'} \simeq \omega_C \otimes \mathfrak{C}$;

(ii) $\mathfrak{C}\mathcal{O}_{C'}$ *é invertível.*

Demonstração. (i) Da Proposição 3.4, sendo ω_C invertível, temos que

$$\varphi_*\omega_{C'} \simeq Hom_{\mathcal{O}_C}(\varphi_*\mathcal{O}_{C'}, \omega_C) \simeq \omega_C \otimes \mathfrak{C}.$$

(ii) Do homomorfismo natural sobrejetivo $\varphi^*\varphi_*\omega_{C'} \to \omega_{C'}$, e da Proposição 1.6, obtemos o isomorfismo $\omega_{C'} \simeq \frac{\varphi^*\varphi_*\omega_{C'}}{\text{torção}}$. Logo,

$$\mathfrak{C}\mathcal{O}_{C'} = \frac{\varphi^*\mathfrak{C}}{\text{torção}} \simeq \frac{\varphi^*(\varphi_*\omega_{C'} \otimes \omega_C^{-1})}{\text{torção}} \simeq \omega_{C'} \otimes \varphi^*\omega_C^{-1}$$

e como ambas as curvas são de Gorenstein, segue que o feixe $\mathfrak{C}\mathcal{O}_{C'}$ é invertível.

□

Lema 3.6. *Seja $\varphi : C' \to C$ um morfismo birracional de curvas. Seja J um feixe sem torção de posto um sobre C'. Então, para todo $n \geq 0$ temos:*

$$\varphi_*(J^n) \simeq (\varphi_* J)^n.$$

Demonstração. Pela Proposição 1.14, podemos ver J como um feixe de ideais fracionários. Sendo assim basta ver que para cada aberto afim U de C temos que:

$$\varphi_*(J^n)(U) = J^n(\varphi^{-1}(U)) = J(\varphi^{-1}(U))^n = (\varphi_* J(U))^n = (\varphi_* J)^n(U)$$

sendo o produto tomado no corpo de funções das curvas C e C'. □

Lema 3.7. *Seja $\varphi : C' \to C$ um morfismo birracional de curvas de Gorenstein e seja $\mathfrak{C}$ seu feixe condutor. Então:*

$$W(\mathfrak{C}^n) = (2n-1)W(\mathfrak{C})$$

para todo $n \geq 1$.

Demonstração. Observamos primeiramente que

$$\dim_k \frac{\mathcal{O}_{C,P}}{\mathfrak{C}_P^n} = \dim_k \frac{\mathcal{O}_{C',P}}{\mathfrak{C}_P^n} - \dim_k \frac{\mathcal{O}_{C',P}}{\mathcal{O}_{C,P}}$$

para cada $P \in C$. Por outro lado, pela Proposição 3.5(ii), temos que

$$\dim_k \frac{\mathcal{O}_{C',P}}{\mathfrak{C}_P^n} = \dim_k \frac{\mathcal{O}_{C',P}}{\mathfrak{C}_P^n \mathcal{O}_{C',P}} = n \dim_k \frac{\mathcal{O}_{C',P}}{\mathfrak{C}_P}$$

e sendo a curva C de Gorenstein, vale que $\dim_k \frac{\mathcal{O}_{C',P}}{\mathcal{O}_{C,P}} = \dim_k \frac{\mathcal{O}_{C,P}}{\mathfrak{C}_P}$ pela Proposição 3.2. Logo,

$$\dim_k \frac{\mathcal{O}_{C,P}}{\mathfrak{C}_P^n} = (2n-1) \dim_k \frac{\mathcal{O}_{C,P}}{\mathfrak{C}_P}$$

para todo ponto $P \in C$.

□

Lema 3.8. *Seja $\varphi : C' \to C$ um morfismo birracional de curvas de Gorenstein. Sejam M um feixe invertível em C' e $s' : \mathcal{O}_{C'} \to M$ um homomorfismo não nulo de $\mathcal{O}_{C'}$-módulos. Seja $J_{s'}$ o feixe de ideais do esquema de zeros de s' (ver Definição 1.7). Considere a composição*

$$s : \mathcal{O}_C \xrightarrow{\varphi^\sharp} \varphi_* \mathcal{O}_{C'} \xrightarrow{\varphi_* s'} \varphi_* M$$

onde $\varphi^\sharp$ é o comorfismo. Seja J_s o feixe de ideais do esquema de zeros de s. Logo, vale a seguinte igualdade:

$$W(\varphi_* J_{s'}) - W(J_s) = 2W(\varphi_* \mathcal{O}_{C'})$$

Demonstração. Para cada homomorfismo de $\mathcal{O}_C$-módulos $\varphi_* M \to \mathcal{O}_C$ obtemos um homomorfismo de $\mathcal{O}_C$-módulos $\varphi_* M \to \varphi_* \mathcal{O}_{C'}$ via a composição com o comorfismo. Como φ é um morfismo finito, este corresponde a um homomorfismo de $\mathcal{O}_{C'}$-módulos $M \to \mathcal{O}_{C'}$. Dessa forma obtemos o homomorfismo natural injetivo:

$$J_s \xrightarrow{\simeq} Hom_{\mathcal{O}_C}(\varphi_* M, \mathcal{O}_C) \longrightarrow \varphi_* Hom_{\mathcal{O}_{C'}}(M, \mathcal{O}_{C'}) \xrightarrow{\simeq} \varphi_* J_{s'}.$$

Sendo M invertível em C', dado $P \in C$ temos que $J_{s',P} = f\mathcal{O}_{C',P}$ para alguma $f \in \mathcal{K}(C) = \mathcal{K}(C')$. Podemos considerar portanto $M_P = \frac{1}{f}\mathcal{O}_{C',P}$ e nesse caso:

$$J_{s,P} = \{g \in \mathcal{K}(C) \mid \frac{g}{f}\mathcal{O}_{C',P} \subseteq \mathcal{O}_{C,P}\} = f\mathfrak{C}_P$$

Como a curva C é de Gorenstein, temos que:

$$\dim_k \frac{J_{s',P}}{J_{s,P}} = \dim_k \frac{f\mathcal{O}_{C',P}}{f\mathfrak{C}_P} = 2\dim_k \frac{\mathcal{O}_{C',P}}{\mathcal{O}_{C,P}}$$

□

Obtemos finalmente uma fórmula relacionando os divisores de ramificação $R(V,I)$ e $\varphi_* R(V, I\mathcal{O}_{C'})$:

Proposição 3.9. *Sejam $\varphi : C' \to C$ um morfismo birracional de curvas de Gorenstein e (V,I) um sistema linear fracionário de posto r sobre C. Então*

$$R(V,I) - \varphi_* R(V, I\mathcal{O}_{C'}) = (r+1)^2 W(\varphi_*\mathcal{O}_{C'}) - (r+1)[\frac{\varphi_* I\mathcal{O}_{C'}}{I}]$$

onde $(V, I\mathcal{O}_{C'})$ é o sistema linear fracionário sobre a curva C' induzido por (V,I).

Demonstração. Pelo Lema 1.11 podemos tomar uma injeção $\phi : I \to L$, onde L é um feixe invertível sobre C, a qual por sua vez induz um homomorfismo de $\mathcal{O}_{C'}$-módulos injetivo $\phi' : I\mathcal{O}_{C'} \to \varphi^* L$.

Pela definição do divisor de ramificação de um sistema linear fracionário, obtemos:

$$R(V,I) = R(V,L) - (r+1)[Y] \tag{3.2}$$

$$R(V, I\mathcal{O}_{C'}) = R(V, \varphi^* L) - (r+1)[Y'] \tag{3.3}$$

onde Y e Y' são os feixes de ideais imagens dos homomorfismo injetivos induzidos:

$$\phi_L : I \otimes L^{-1} \to \mathcal{O}_C \quad \text{e} \quad \phi'_{\varphi^* L} : I\mathcal{O}_{C'} \otimes \varphi^* L^{-1} \to \mathcal{O}_{C'}.$$

De (3.2) e (3.3) obtemos:

$$R(V,I) - \varphi_* R(V, I\mathcal{O}_{C'}) = R(V,L) - \varphi_* R(V, \varphi^* L) + (r+1)(\varphi_*[Y'] - [Y]) \tag{3.4}$$

Vamos primeiramente avaliar o divisor $\varphi_*[Y'] - [Y]$. Para isso considere o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} I \otimes L^{-1} & \xrightarrow{\theta} & \varphi_*(I\mathcal{O}_{C'} \otimes \varphi^* L^{-1}) \\ {\scriptstyle \phi_L}\downarrow & & {\scriptstyle (\phi'_{\varphi^* L})_*}\downarrow \\ \mathcal{O}_C & \xrightarrow{\varphi^\sharp} & \varphi_*\mathcal{O}_{C'} \end{array}$$

onde θ é a composição do homomorfismo natural:

$$I \otimes L^{-1} \to \varphi_*(I\mathcal{O}_{C'}) \otimes L^{-1}$$

com o isomorfismo dado pela fórmula da projeção:

$$\varphi_*(I\mathcal{O}_{C'}) \otimes L^{-1} \simeq \varphi_*(I\mathcal{O}_{C'} \otimes \varphi^* L^{-1})$$

Afirmamos que tal diagrama é comutativo. De fato, sendo φ birracional, os homomorfismos $(\phi'_{\varphi^* L})_* \circ \theta$ e $\varphi^\sharp \circ \phi_L$ coincidem em um aberto denso de C. Logo, pelo Corolário 1.4 são iguais.

Sendo assim, da comutatividade do diagrama acima e do Lema 3.3 obtemos a seguinte igualdade:

$$[\frac{\varphi_*(I\mathcal{O}_{C'} \otimes \varphi^* L^{-1})}{I \otimes L^{-1}}] + \varphi_* Y' = Y + W(\varphi_*\mathcal{O}_{C'})$$

e portanto, usando novamente a fórmula da projeção:

$$\varphi_* Y' - Y = W(\varphi_*\mathcal{O}_{C'}) - [\frac{\varphi_* I\mathcal{O}_{C'}}{I}] \tag{3.5}$$

Falta portanto determinarmos o divisor $R(V, L) - \varphi_* R(V, \varphi^* L)$. Denotemos por M o feixe $\omega_{C'}^{\binom{r+1}{2}} \otimes (\varphi^* L)^{r+1}$. O divisor de ramificação $R(V, \varphi^* L)$ é o divisor de zeros da seção Wronskiana $s' : \mathcal{O}_{C'} \to M$ relativa ao sistema linear $(V, \varphi^* L)$ ou, equivalentemente, se $J_{s'}$ é feixe de ideais do esquema de zeros de s' temos que $R(V, \varphi^* L) = -W(J_{s'})$. Pelo Lema 3.3 obtemos a igualdade:

$$\varphi_* R(V, \varphi^* L) = W(\varphi_*\mathcal{O}_{C'}) - W(\varphi_* J_{s'}) \tag{3.6}$$

Seja s a composição

$$s : \mathcal{O}_C \xrightarrow{\varphi^\sharp} \varphi_*\mathcal{O}_{C'} \xrightarrow{\varphi_* s'} \varphi_* M$$

e seja J_s o feixe de ideais do esquema de zeros de s. Usando a fórmula de projeção juntamente com os isomorfismos dados pela Proposição 3.5(i) e pelo Lema 3.6 obtemos o isomorfismo

$$\varphi_* M \simeq \omega_C^{\binom{r+1}{2}} \otimes \mathfrak{C}^{\binom{r+1}{2}} \otimes L^{r+1} \tag{3.7}$$

Logo, segue de forma natural o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_C \arrow[d, "s"'] \arrow[dr, "s_L"] & \\ \varphi_* M \arrow[r] & \omega_C^{\binom{r+1}{2}} \otimes L^{r+1} \end{tikzcd}$$

onde s_L é a seção Wronskiana relativa ao sistema linear (V, L). Afirmamos que esse diagrama é comutativo. De fato, a seção de $\omega_C^{\binom{r+1}{2}} \otimes L^{r+1}$ obtida pela composição coincide com a seção s_L no aberto denso onde φ é um isomorfismo. Como são seções de um feixe invertível, pelo Corolário 1.4, têm que coincidir em toda a curva.

Sendo assim, da comutatividade desse diagrama e de (3.7) obtemos:

$$R(V, L) = -W(J_s) - W(\mathfrak{C}^{\binom{r+1}{2}}) \tag{3.8}$$

Por outro lado, pelo Lema 3.8

$$-W(J_s) = 2W(\varphi_*\mathcal{O}_{C'}) - W(\varphi_* J_{s'})$$

e pela igualdade (3.8) temos que:

$$R(V, L) = 2W(\varphi_*\mathcal{O}_{C'}) - W(\varphi_* J_{s'}) - W(\mathfrak{C}^{\binom{r+1}{2}}).$$

Assim, pelo Lema 3.7, vale que

$$R(V, L) = -W(\varphi_* J_{s'}) + (r(r + 1) + 1)W(\varphi_*\mathcal{O}_{C'})$$

e de (3.6) chegamos a

$$R(V, L) - \varphi_* R(V, \varphi_* L) = r(r + 1)W(\varphi_*\mathcal{O}_{C'})$$

Por fim, substituindo em (3.4) e utilizando (3.5) obtemos:

$$R(V, I) - \varphi_* R(V, I\mathcal{O}_{C'}) = (r + 1)^2 W(\varphi_*\mathcal{O}_{C'}) - (r + 1)[\frac{\varphi_* I\mathcal{O}_{C'}}{I}]$$

□

Estudaremos agora dois casos particulares mostrando que em ambos a fórmula obtida na Proposição 3.9 pode ser simplificada.

Definição 3.10. Seja I um feixe sem torção de posto um em C. Tome uma injeção $I \to L$, onde L é um feixe invertível e considere J o feixe de ideais imagem do homomorfismo injetivo induzido $I \otimes L^{-1} \to \mathcal{O}_C$. Definimos $Bl_I C$, o *blow-up de C ao longo de I*, como sendo o blow-up de C ao longo do subesquema definido por J.

Observação 3.11. Por [H1], Lema 7.9, p.161, a construção acima independe, a menos de isomorfismo, da injeção tomada inicialmente. Também por [H1], Proposição 7.16, p. 163, temos que $Bl_I C$ é uma curva projetiva integral birracional à curva C.

Supondo C uma curva tendo apenas pontos duplos como singularidades e $\varphi : C' \to C$ o morfismo birracional associado a $C' = Bl_I C$, podemos aplicar a fórmula dada na Proposição 3.9, pois nesse caso temos que C' também é uma curva de Gorenstein.

Lema 3.12. *Sejam C uma curva integral e I um feixe sem torção de posto um sobre C. Seja P um ponto duplo de C. Então existem um único morfismo birracional $\gamma : C^\dagger \to C$ que é trivial fora de P e um único feixe sem torção de posto um $I^\dagger$ sobre $C^\dagger$ tal que $I^\dagger$ é invertível em $\gamma^{-1}(P)$ e $\gamma_* I^\dagger = I$.*

Demonstração. Ver [EGK], Lema 6.4(iii), p. 5988. □

Lema 3.13. *Sejam C uma curva tendo somente pontos duplos como singularidades e I um feixe sem torção de posto um sobre C. Sejam $C' = Bl_I C$ e $\varphi : C' \to C$ o morfismo birracional correspondente. Então $\varphi_*(I\mathcal{O}_{C'}) = I$.*

Demonstração. Observamos primeiramente que pela Proposição 1.14 podemos considerar I como um feixe de ideais fracionários. Pelo Lema 3.12 sabemos que existe uma curva $C^\dagger$, uma aplicação birracional $\gamma : C^\dagger \to C$ trivial nos pontos onde I é invertível, e um feixe invertível $I^\dagger$ sobre $C^\dagger$ tal que $\gamma_* I^\dagger = I$.

Sendo assim, a aplicação natural $\gamma^* I \to I^\dagger$ é sobrejetiva implicando em $\frac{\gamma^* I}{\text{torção}} = I^\dagger$, e portanto o feixe $I\mathcal{O}_{C^\dagger} = \frac{\gamma^* I}{\text{torção}}$ é invertível. Pela Proposição 7.14, p. 164, em [H1], temos que γ se fatora por φ.

Suponha por absurdo que $C^\dagger \neq C'$. Como $I\mathcal{O}_{C'}$ invertível em C' para algum $P \in C$ vale que:

$$I_P \mathcal{O}_{C',P} \neq (I_P \mathcal{O}_{C',P})\mathcal{O}_{C^\dagger,P}$$

Por outro lado temos que:

$$I_P \subseteq I_P \mathcal{O}_{C',P} \subseteq (I_P \mathcal{O}_{C',P})\mathcal{O}_{C^\dagger,P} = I_P \mathcal{O}_{C^\dagger,P} = I_P$$

de onde tiramos uma contradição. Logo, $C^\dagger = C'$ e portanto $\varphi_*(I\mathcal{O}_{C'}) = I$. □

Proposição 3.14. *Sejam C uma curva tendo somente pontos duplos como singularidades e (V, I) um sistema linear fracionário de posto r sobre C. Sejam $C' = Bl_I C$ e $\varphi : C' \to C$ a aplicação birracional associada. Então, vale que*

$$R(V, I) - \varphi_* R(V, I\mathcal{O}_{C'}) = (r+1)^2 W(\varphi_* \mathcal{O}_{C'})$$

onde $(V, I\mathcal{O}_{C'})$ é o sistema linear fracionário sobre C' induzido por (V, I).

Demonstração. Basta usarmos o Lema 3.13 e a Proposição 3.9. □

Vamos mostrar agora que, no caso em que C' é não singular e (V, I) é um sistema linear de fato, podemos recuperar, em característica zero, a fórmula obtida em [GL], Proposição 1.6 e em [St], Observação 3.5.

Proposição 3.15. *Sejam C uma curva de Gorenstein e $\varphi : C' \to C$ sua dessingularização. Considere (V, I) um sistema linear de posto r e grau d sobre a curva C. Então,*

$$R(V, I) - \varphi_* R(V, I\mathcal{O}_{C'}) = r(r+1)W(\varphi_*\mathcal{O}_{C'})$$

onde $(V, I\mathcal{O}_{C'})$ é o sistema linear sobre C' induzido por (V, I).

Demonstração. Observamos novamente que podemos considerar I um feixe de ideais fracionários. Sendo este feixe invertível, dado P um ponto da curva C temos que $I_P = f\mathcal{O}_{C,P}$ para alguma $f \in \mathcal{K}(C)$ e portanto $(I\mathcal{O}_{C'})_P = f\mathcal{O}_{C',P}$. Logo, $[\frac{\varphi_* I\mathcal{O}_{C'}}{I}] = W(\varphi_*\mathcal{O}_{C'})$ e aplicando a Proposição 3.9 obtemos:

$$R(V, I) - \varphi_* R(V, I\mathcal{O}_{C'}) = r(r+1)W(\varphi_*\mathcal{O}_{C'})$$

$\square$

Capítulo 4

Feixes de jatos

O objetivo dessa seção é construir, para uma família de curvas de Gorenstein, uma seção Wronskiana global que seja natural, ou seja, tal que sua restrição às fibras coincida com as seções Wronkianas nas mesmas. Com isso, adquiriremos ferramentas a fim de podermos estudar o comportamento de divisores de ramificação em famílias de curvas.

Em [LT1], Laksov e Thorup mostram como as seções Wronskianas, e consequentemente, pontos de ramificação de sistemas lineares, podem ser definidos em uma família X/B de curvas lisas, em qualquer característica, usando os chamados *Sistemas de Wronski,* construídos nesse caso através dos *Feixes de Partes Principais* da família. Sendo a família suave, tais feixes são localmente livres. No caso singular, faz-se necessária uma substituição.

Isso é feito por alguns autores, entre os quais Esteves em [E1] no caso de famílias de curvas localmente de interseção completa, não necessariamente irredutíveis e em característica qualquer, e Gatto em [G1] e [G2] para famílias de curvas estáveis em característica zero. Ambos constroem em cada caso um homomorfismo natural:

$$\eta_{X/B} : \Omega^1_{X/B} \to \omega_{X/B}$$

onde $\Omega^1_{X/B}$ é o feixe de diferenciais relativas e $\omega_{X/B}$ é o feixe dualizante relativo da família. Tal homomorfismo dá origem uma $\mathcal{O}_B$-derivação:

$$d : \mathcal{O}_X \to \omega_{X/B}$$

possibilitando a construção dos chamados *feixes de jatos* relativos a d. Dada uma família de sistemas lineares definida sobre X/B, tais feixes de jatos permitem a construção da seção Wronskiana desejada.

Usaremos aqui a construção feita por Laksov e Thorup em [LT2], supondo a existência da aplicação natural acima mencionada no caso de uma família de curvas de Gorenstein (a existência é garantida, por exemplo, no caso de uma curva de Gorenstein devido à própria definição das diferenciais regulares e nos casos acima citados). Mostraremos também que tal construção, quando restrita a uma fibra, no caso de um sistema linear "de fato", nos fornece o divisor de ramificação descrito na Seção 2.1.

4.1 Álgebras de jatos

Sejam $R \to A$ um homomorfismo de k-álgebras comutativas e M um A-módulo livre de posto um. Seja $d : A \to M$ uma R-derivação, isto é, uma aplicação R-linear satisfazendo

$$d(fg) = d(f)g + fd(g) \quad \text{para quaisquer} \quad f, g \in A$$

Por [LT2], (1.9), p. 399, para cada $n \geq 0$ associa-se à derivação d uma R-álgebra chamada *álgebra de jatos*, denotada por J^n, sendo $J^0 = A$. Juntamente com as álgebras de jatos, para cada $n \geq 0$ temos um homomorfismo sobrejetivo de R-álgebras:

$$r : J^n \to J^{n-1}$$

e dois homomorfismos de R-álgebras:

$$\iota, \delta : A \to J^n$$

os quais comutam com r (cometendo aqui um abuso de notação ao suprimir os índices relativos à cada R-álgebra J^n). Tais homomorfismos, por sua vez, dão a cada J^n quatro estruturas de A-módulo, duas obtidas via multiplicação à direita, as quais são denotadas por J^n_δ e J^n_ι, e duas via multiplicação à esquerda, denotadas por ${}_\delta J^n$ e ${}_\iota J^n$. Observamos ainda que tais álgebras J^n não são comutativas.

Para cada $n \geq 1$ existe também um homomorfismo injetivo de A-módulos (segundo qualquer uma das estruturas consideradas):

$$i : M \to J^n$$

comutanto com as sobrejeções r.

Proposição 4.1. *A multiplicação em J^n induz para cada $n \geq 1$ um homomorfismo natural*

$$i^n : M^{\otimes n} \to J^n$$

que é A-linear com respeito às quatro estruturas de A-módulo de J^n. A sequência:

$$0 \longrightarrow M^{\otimes n} \xrightarrow{i^n} J^n \xrightarrow{r} J^{n-1} \longrightarrow 0$$

é exata para todo $n \geq 1$ e para qualquer uma das quatro estruturas de A-módulo.

Demonstração. Ver [LT2], (1.11), p. 400. $\square$

Se ϵ é um gerador para o A-módulo livre M, a R-derivação d induz uma R-derivação $D : A \to A$ dada por:

$$d(f) = D(f)\epsilon$$

Seja D^i a composição i vezes da aplicação D. Identificando M com a imagem da aplicação $i : M \to J^n$ e o anel A com sua imagem via ι obtemos o seguinte resultado:

Proposição 4.2. *Sob qualquer uma das quatro estruturas, J^n é um A-módulo livre com base $1, \epsilon, \epsilon^2, ..., \epsilon^n$. Mais ainda, a aplicação $\delta : A \to J^n$ é descrita nessa base por:*

$$\delta(f) = f + D(f)\epsilon + ... + D^n(f)\epsilon^n$$

Demonstração. Ver [LT2], Proposição 2.2, p. 402. □

As álgebras de jatos podem ser consideradas com um novo produto, chamado de *produto shuffle* ([LT2], Definição 2.4) e o qual será denotado por $*$. Pela Proposição 3.3 em [LT2], J^n torna-se, com esse produto, uma álgebra comutativa e as aplicações $\iota, \delta : A \to J^n$ homomorfismos de R-álgebras comutativas. Mostra-se ainda que:

$$f * x = fx \quad \text{e} \quad \delta(f) * x = x\delta(f).$$

para cada $f \in A$ e cada $x \in J^n$. Além disso, como

$$\epsilon^{*i} = i!\epsilon^i$$

para todo $i = 1, \cdots, n$, a base de J^n como A-módulo livre passa a ser dada por:

$$1, \epsilon, \frac{\epsilon^{*2}}{2!}, ..., \frac{\epsilon^{*n}}{n!}$$

4.2 Globalização: feixes de jatos

Neste trabalho, por uma *família de curvas* X/B entendemos um morfismo $f : X \to B$ plano, projetivo, onde $B = \mathrm{Spec}(R)$, sendo R um domínio e a fibra $X(b)$ uma curva geometricamente integral para todo $b \in B$. Observamos que nesse caso, por [M], Corolário 23.9, p. 184, X é um esquema reduzido e pelo Teorema 8, Seção I.6.3, em [Sh], é também irredutível. Dado $b \in B$, denotaremos por $\mathcal{I}(b)$ a restrição de um feixe de $\mathcal{O}_X$-módulos $\mathcal{I}$ à fibra $X(b)$.

Sejam $f : X \to B$ uma família de curvas e $\mathcal{M}$ um feixe de $\mathcal{O}_X$-módulos localmente livre de posto um. Seja $d : \mathcal{O}_X \to \mathcal{M}$ uma $\mathcal{O}_B$-derivação.

De acordo com [LT2], em 3.5, p. 419, as construções descritas na Seção 4.1, inclusive o produto *shuffle*, se globalizam. Como observado no mesmo artigo em 3.8, p. 410, associados à derivação d existem portanto para todo $n \geq 0$ feixes de

$\mathcal{O}_B$-álgebras definidos em X chamados *feixes de jatos* e denotados por $\mathcal{J}^n$, sendo $\mathcal{J}^0 = \mathcal{O}_X$, e cujas construções comutam com mudança de base $B' \to B$.

Juntamente com os feixes de jatos, para cada $n \geq 0$ temos homomorfismos sobrejetivos de álgebras:

$$r : \mathcal{J}^n \to \mathcal{J}^{n-1}$$

e dois homomorfismos de álgebras:

$$\iota, \delta : \mathcal{O}_X \to \mathcal{J}^n$$

os quais comutam com r. Existem também homomorfismos injetivos de $\mathcal{O}_X$-módulos:

$$i : \mathcal{M} \to \mathcal{J}^n$$

sendo que a multiplicação em $\mathcal{J}^n$ induz para cada $n \geq 1$ um homomorfismo natural de $\mathcal{O}_X$-módulos:

$$i^n : \mathcal{M}^{\otimes n} \to \mathcal{J}^n,$$

obtendo-se a sequência exata:

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}^{\otimes n} \xrightarrow{i^n} \mathcal{J}^n \xrightarrow{r} \mathcal{J}^{n-1} \longrightarrow 0 \tag{4.1}$$

Sob qualquer uma das estruturas dadas por ι e δ, o feixe $\mathcal{J}^n$ é um $\mathcal{O}_X$-módulo localmente livre de posto $n+1$ com base descrita localmente pela Proposição 4.2.

Estaremos considerando $\mathcal{J}^n$ com o produto *shuffle*, e portanto como uma $\mathcal{O}_X$-álgebra comutativa com duas estruturas de $\mathcal{O}_X$-módulo dadas pelos homomorfismos ι e δ.

Definição 4.3. Seja $\mathcal{I}$ um feixe de $\mathcal{O}_X$-módulos. Definimos o *$\mathcal{I}$-Jato torcido* como:

$$\mathcal{J}^n(\mathcal{I}) = \mathcal{J}^n_\delta \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{I},$$

vendo-o como um feixe de $\mathcal{O}_X$-módulos à esquerda via $\iota : \mathcal{O}_X \to \mathcal{J}^n$.

Observamos que, dado um homomorfismo de $\mathcal{O}_X$-módulos $\mathcal{I} \to \mathcal{F}$, obtemos homomorfismos naturais:

$$\mathcal{J}^n(\mathcal{I}) \to \mathcal{J}^n(\mathcal{F})$$

comutando com $r_\mathcal{I} = r \otimes id_\mathcal{I}$ e $r_\mathcal{F} = r \otimes id_\mathcal{F}$.

Tensorizando (4.1) por $\mathcal{I}$, e usando que $\mathcal{J}^n$ é localmente livre para todo n obtemos a seguinte sequência exata:

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}^{\otimes n} \otimes \mathcal{I} \xrightarrow{i^n_\mathcal{I}} \mathcal{J}^n(\mathcal{I}) \xrightarrow{r_\mathcal{I}} \mathcal{J}^{n-1}(\mathcal{I}) \longrightarrow 0 \tag{4.2}$$

onde $i^n_\mathcal{I} = i^n \otimes id_\mathcal{I}$.

Um feixe coerente de $\mathcal{O}_X$-módulos $\mathcal{I}$ é dito *sem torção de posto um* sobre X/B se $\mathcal{I}$ é plano sobre B e $\mathcal{I}(b)$ é um feixe sem torção de posto um sobre $X(b)$ para qualquer $b \in B$. Observamos que, se $\mathcal{I}$ é sem torção de posto um em X/B, então $\mathcal{I}$ é sem torção de posto um em X.

Lema 4.4. *Seja $\mathcal{I}$ um feixe sem torção de posto um em X/B. Então para todo $n \geq 0$ existe um homomorfismo funtorial injetivo:*

$$v_n(\mathcal{I}) : \mathcal{I}^{n+1} \otimes \mathcal{M}^{\otimes\binom{n+1}{2}} \to \frac{\bigwedge^{n+1} \mathcal{J}^n(\mathcal{I})}{T(\bigwedge^{n+1} \mathcal{J}^n(\mathcal{I}))}$$

Mais ainda, quando $\mathcal{I}$ é invertível, $v_n(\mathcal{I})$ é um isomorfismo.

Demonstração. Mostraremos o Lema fazendo indução em n. Para $n = 0$ o resultado é imediato. Suponhamos então que existe um homomorfismo injetivo:

$$v_{n-1}(\mathcal{I}) : \mathcal{I}^n \otimes \mathcal{M}^{\otimes\binom{n}{2}} \to \frac{\bigwedge^{n} \mathcal{J}^{n-1}(\mathcal{I})}{T(\bigwedge^{n} \mathcal{J}^{n-1}(\mathcal{I}))}$$

A partir da sequência exata:

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}^{\otimes n} \otimes \mathcal{I} \xrightarrow{i^n_{\mathcal{I}}} \mathcal{J}^n(\mathcal{I}) \xrightarrow{r_{\mathcal{I}}} \mathcal{J}^{n-1}(\mathcal{I}) \longrightarrow 0 \tag{4.3}$$

construímos o homomorfismo:

$$\phi_n(\mathcal{I}) : \bigwedge^{n} \mathcal{J}^{n-1}(\mathcal{I}) \otimes \mathcal{M}^{\otimes n} \otimes \mathcal{I} \to \frac{\bigwedge^{n+1} \mathcal{J}^n(\mathcal{I})}{T(\bigwedge^{n+1} \mathcal{J}^n(\mathcal{I}))}$$

definido localmente, módulo torção, por:

$$\nu_1 \wedge ... \wedge \nu_n \otimes s \mapsto \mu_1 \wedge ... \wedge \mu_n \wedge i^n_{\mathcal{I}}(s)$$

onde $\nu_i = r_{\mathcal{I}}(\mu_i)$, μ_i seção local de $\mathcal{J}^n(\mathcal{I})$ para todo $i = 1, ..., n$, e s seção local de $\mathcal{M}^{\otimes n} \otimes \mathcal{I}$.

Pela exatidão da sequência (4.3), para mostrarmos que tal aplicação está bem definida basta mostrarmos que um elemento não nulo do tipo:

$$i^n_{\mathcal{I}}(s_1) \wedge i^n_{\mathcal{I}}(s_2) \wedge \mu_1 \wedge ... \wedge \mu_{n-1}$$

está em $T(\bigwedge^{n+1} \mathcal{J}^n(\mathcal{I}))$. E isso vale pois, de fato, um elemento de tal tipo, nos pontos em que $\mathcal{I}$ é invertível, é necessariamente nulo. Após removida a torção, obtemos um homomorfismo injetivo:

$$\widetilde{\phi}_n(\mathcal{I}) : \frac{\bigwedge^{n} \mathcal{J}^{n-1}(\mathcal{I}) \otimes \mathcal{M}^{\otimes n} \otimes \mathcal{I}}{T(\bigwedge^{n} \mathcal{J}^{n-1}(\mathcal{I}) \otimes \mathcal{M}^{\otimes n} \otimes \mathcal{I})} \to \frac{\bigwedge^{n+1} \mathcal{J}^n(\mathcal{I})}{T(\bigwedge^{n+1} \mathcal{J}^n(\mathcal{I}))}$$

Tensorizamos $v_{n-1}(\mathcal{I})$ pela identidade em $\mathcal{M}^n \otimes \mathcal{I}$ e compomos com a projeção obtendo:

$$(\mathcal{M}^{\binom{n}{2}} \otimes \mathcal{I}^n) \otimes (\mathcal{M}^n \otimes \mathcal{I}) \to \frac{\bigwedge^{n} \mathcal{J}^{n-1}(\mathcal{I}) \otimes (\mathcal{M}^n \otimes \mathcal{I})}{T(\bigwedge^{n} \mathcal{J}^{n-1}(\mathcal{I}) \otimes \mathcal{M}^n \otimes \mathcal{I})}$$

Finalmente, compondo com $\widetilde{\phi}_n(\mathcal{I})$ e removendo a torção do domínio obtemos um homomorfismo

$$v_n(\mathcal{I}) : \mathcal{I}^{n+1} \otimes \mathcal{M}^{\otimes\binom{n+1}{2}} \to \frac{\bigwedge^{n+1} \mathcal{J}^n(\mathcal{I})}{T(\bigwedge^{n+1} \mathcal{J}^n(\mathcal{I}))}$$

o qual, sendo um homomorfismo não nulo de feixes sem torção de posto um definido em um esquema integral X, pela Proposição 1.2 é injetivo. A funtorialidade segue da própria construção da aplicação $v_n(\mathcal{I})$.

Por fim, observamos que, no caso em que $\mathcal{I}$ é invertível, a sequência (4.3) é uma sequência exata de feixes localmente livres, e nesse caso é sabido que $\phi_n(\mathcal{I})$ é um isomorfismo, o que vai implicar pela construção feita que $v_n(\mathcal{I})$ também é um isomorfismo. $\square$

4.3 Construção da seção Wronskiana em famílias

Sejam X/B uma família de curvas de Gorenstein, $\Omega^1_{X/B}$ o feixe de diferenciais relativo e $\omega_{X/B}$ o dualizante relativo da família. Temos que nesse caso $\omega_{X/B}$ é invertível. Vamos supor que exista um homomorfismo natural:

$$\eta_{X/B} : \Omega^1_{X/B} \to \omega_{X/B}$$

que seja um isomorfismo nos pontos suaves de X/B. Considerando a composição com a derivação exterior obtemos uma $\mathcal{O}_B$-derivação:

$$d : \mathcal{O}_X \to \omega_{X/B}$$

Construímos então os feixes de jatos $\mathcal{J}^n$ descritos anteriormente, considerados com o produto *shuffle* mencionado, o que os torna $\mathcal{O}_X$-álgebras comutativas. Tais feixes serão usados para a construção da seção Wronskiana desejada.

Seja $\mathcal{I}$ um feixe de $\mathcal{O}_X$-módulos. A partir do homomorfismo $\delta : \mathcal{O}_X \to \mathcal{J}^n$ obtemos uma aplicação:

$$\delta_{\mathcal{I}} = \delta \otimes id_{\mathcal{I}} : \mathcal{O}_X \otimes \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{J}^n(\mathcal{I})$$

Observamos que tal aplicação é $\mathcal{O}_X$- linear com respeito a δ, mas não é $\mathcal{O}_X$-linear segundo a estrutura que estamos considerando em $\mathcal{J}^n(\mathcal{I})$ de $\mathcal{O}_X$-módulo, dada por ι. Sendo δ uma aplicação $\mathcal{O}_B$-linear temos que:

$$\delta_{\mathcal{I}} : \mathcal{I} \to \mathcal{J}^n(\mathcal{I})$$

é um homomorfismo de $f^{-1}(\mathcal{O}_B)$-módulos via a estrutura de $\mathcal{O}_X$-módulo de $\mathcal{J}^n(\mathcal{I})$ dada por δ. Consideramos então o homomorfismo de $\mathcal{O}_X$-módulos:

$$\theta_{\mathcal{I}} : \mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_B)} \mathcal{I} \to \mathcal{J}^n(\mathcal{I})$$

localmente definido por:

$$g \otimes m \mapsto \iota(g)\delta_{\mathcal{I}}(m) \tag{4.4}$$

Dado $\mathcal{V} \subseteq f_*\mathcal{I}$ subfeixe de $\mathcal{O}_B$-módulos localmente livre obtemos uma aplicação correspondente:

$$f^{-1}\mathcal{V} \to \mathcal{I}$$

Tensorizando por $\mathcal{O}_X$ como $\mathcal{O}_{f^{-1}(\mathcal{O}_B)}$-módulo e compondo com $\theta_{\mathcal{I}}$ obtemos um homomorfismo de $\mathcal{O}_X$-módulos:

$$f^*\mathcal{V} = \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_{f^{-1}(\mathcal{O}_B)}} f^{-1}\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{J}^n(\mathcal{I})$$

Quando o posto de $\mathcal{V}$ é $n+1$, ao tomar o produto exterior $\bigwedge^{n+1}$ de ambos os lados obtemos a chamada *seção Wronskiana*:

$$s_{\mathcal{I}} : \bigwedge^{n+1} f^*\mathcal{V} \to \bigwedge^{n+1} \mathcal{J}^n(\mathcal{I})$$

Observamos que, devido às propriedades do produto tensorial e do fato de que a construção das álgebras de jatos e seus homomorfismos associados comuta com mudança de base e é funtorial, podemos concluir que a construção da seção Wronskiana por sua vez também comuta com mudança de base e é funtorial.

4.4 O caso de uma curva

Olhemos agora para o caso em que $B = \operatorname{Spec}(k)$, ou seja, $X = C$ é uma curva de Gorenstein. Nesse caso, temos um homomorfismo de $\mathcal{O}_C$-módulos:

$$\eta : \Omega^1_C \to \omega_C$$

o qual nos fornece a derivação $d : \mathcal{O}_C \to \omega_C$, e por conseguinte feixes de jatos $\mathcal{J}^n$ relativos a essa derivação.

Seja I um feixe sem torção de posto um definido sobre C. Nesse caso podemos dizer um pouco mais da aplicação $v_n(I)$ definida no Lema 4.4.

Lema 4.5. *Sejam C uma curva de Gorenstein e I um feixe sem torção de posto um sobre C. Então para todo $n \geq 0$ o homomorfismo:*

$$v_n(I) : I^{n+1} \otimes \omega_C^{\otimes\binom{n+1}{2}} \to \frac{\bigwedge^{n+1} \mathcal{J}^n(I)}{T(\bigwedge^{n+1} \mathcal{J}^n(I))}$$

é um isomorfismo.

Demonstração. Observamos primeiramente que a fim de mostrarmos a sobrejetividade, podemos fazê-lo localmente. Seja $\pi : \widetilde{C} \to C$ a normalização da curva C e seja P um ponto da curva C. A menos de isomorfismo de A-módulos, podemos supor que I_P é um ideal de $\mathcal{O}_{C,P}$.

Denotemos por A e B os anéis locais $\mathcal{O}_{C,P}$ e $\mathcal{O}_{\widetilde{C},P}$. Podemos ainda assumir que $\mathfrak{C}_P \subseteq I_P$, onde $\mathfrak{C}_P$ é o ideal condutor da normalização. De fato, temos que $I_P^c B = bB$ para algum $b \in I_P^c$, onde $I_P^c = (A : I_P)$, valendo portanto as inclusões:

$$A \subseteq \frac{1}{b} I_P^c \subseteq B$$

Dualizando, obtemos pelo Corolário 1.36:

$$\mathfrak{C}_P \subseteq bI_P \subseteq A$$

Logo, trocando I_P por bI_P podemos supor que $\mathfrak{C}_P \subseteq I_P$.

Seja agora $h \in A$ tal que $\mathfrak{C}_P = hB$. Então, pela Proposição 3.5(i), temos que $\omega_{C,P}$ é gerado por $\epsilon = \frac{1}{h}dz$, onde dz é um gerador do B-módulo $\omega_{\widetilde{C},P}$. Seja $D : A \to A$ a derivação dada por $d(f) = D(f)\epsilon$ para todo $f \in A$. Então D é dada por $D = hD_z$, onde $D_z : B \to B$ é a derivação induzida por dz. Sendo assim:

$$D(I_P) = hD_z(I_P) \subseteq hD_z(A) \subseteq hB = \mathfrak{C}_P$$

e portanto, sob as hipóteses acima feitas, obtemos que $D(I_P) \subseteq I_P$.

Olhando a prova do Lema 4.4 observamos que, por indução, para mostrarmos a sobrejetividade de $v_n(I)$ basta mostrarmos a sobrejetividade da aplicação:

$$\phi_n : \bigwedge^n \mathcal{J}^{n-1}(I) \otimes \mathcal{M}^{\otimes n} \otimes I \to \frac{\bigwedge^{n+1} \mathcal{J}^n(I)}{T(\bigwedge^{n+1} \mathcal{J}^n(I))}$$

definida localmente a partir da sequência exata (4.3) por:

$$\nu_1 \wedge ... \wedge \nu_n \otimes s \mapsto \mu_1 \wedge ... \wedge \mu_n \wedge i_I^n(s)$$

onde $\nu_i = r_I(\mu_i)$ para todo $i = 1, ..., n$. Ou seja, pela Proposição 4.2, basta então mostrarmos que todo elemento do tipo:

$$\gamma = (\epsilon^{*i_0} \otimes a_0) \wedge \cdots \wedge (\epsilon^{*i_n} \otimes a_n) \quad (\text{módulo torção})$$

onde $a_0, \cdots, a_n \in I_P$ e $0 \leq i_0, \cdots, i_n \leq n$, está na imagem de ϕ_n.

Vendo os elementos de $\frac{\bigwedge^{n+1} J^n(I_P)}{\text{torção}}$ como elementos de $\bigwedge^{n+1} J^n(A)$, temos que:

$$\epsilon^{*k} \otimes a = (\epsilon^{*k}\delta(a)) \otimes 1 = \sum_{m=0}^{n} \frac{D^m(a)}{m!} \epsilon^{*(m+k)} \otimes 1$$

Portanto γ pode ser escrito como uma combinação linear de termos da forma:

$$(\prod_{m=0}^{n} \frac{D^{j_m}(a_m)}{j_m!})(\epsilon^{*(i_0+j_0)} \otimes 1) \wedge \cdots \wedge (\epsilon^{*(i_n+j_n)} \otimes 1)$$

onde $0 \leq j_0, \cdots, j_n \leq n$. Usando o fato de que $D^j(I_P) \subseteq I_P$, e também as propriedades do produto exterior, basta mostrarmos então que termos do tipo:

$$(\prod_{m=0}^{n} b_m)(1 \otimes 1) \wedge (\epsilon \otimes 1) \wedge \cdots \wedge (\epsilon^{*n} \otimes 1)$$

onde $b_0, \cdots, b_n$ são elementos de I_P, estão na imagem desejada. Observamos agora que, sendo:

$$\begin{aligned} a(\epsilon^{*k} \otimes 1) &= \epsilon^{*k}(\delta(a) - \sum_{m=1}^{n} \frac{D^m(a)}{m!}\epsilon^{*m}) \otimes 1 \\ &= \epsilon^{*k} \otimes a - \sum_{m=1}^{n} \frac{D^m(a)}{m!}(\epsilon^{*(m+k)} \otimes 1) \end{aligned}$$

para a um elemento qualquer de A temos que:

$$(\prod_{m=0}^{n} b_m)(1 \otimes 1) \wedge (\epsilon \otimes 1) \wedge \cdots \wedge (\epsilon^{*n} \otimes 1) = (1 \otimes b_0) \wedge \cdots \wedge (\epsilon^{*n} \otimes b_n) + \beta$$

onde β é uma combinação linear de termos da forma:

$$(\prod_{m=0}^{n} D^{j_m}(b_m))(\epsilon^{*j_0} \otimes 1) \wedge \cdots \wedge (\epsilon^{*(n+j_n)} \otimes 1)$$

para $0 \leq j_0, \cdots, j_n \leq n$ satisfazendo $j_0 + \cdots + j_n > 0$. Como pelo menos um dos j_m é positivo, irão existir dois inteiros m_1, m_2 tais que $m_1 + j_{m_1} = m_2 + j_{m_2}$, e portanto $\beta = 0$, implicando que γ pertence à imagem da aplicação ϕ_n.

$\square$

Sejam I um feixe invertível e (V, I) um sistema linear de posto n definido sobre C. Repetindo a construção da Seção 4.3 obtemos a seção Wronskiana:

$$s : \bigwedge^{n+1} V \otimes \mathcal{O}_C \to \bigwedge^{n+1} \mathcal{J}^n(I)$$

Vamos dar uma descrição local desse homomorfismo a fim de mostrar que seu divisor de zeros nos fornece o divisor de ramificação do sistema linear (V, I) segundo a definição dada por Lax e Widland em [LW], a qual aparece na Seção 2.1.

Sejam l e ϵ geradores dos $\mathcal{O}_{C,P}$-módulos livres I_P e $\omega_{C,P}$ respectivamente em um ponto P da curva C. Logo, pela Proposição 4.2, fazendo-se as identificações necessárias e considerando $\mathcal{J}^n$ com o produto *shuffle*, temos que

$$1 \otimes l, \epsilon \otimes l, ..., \frac{\epsilon^{*n}}{n!} \otimes l$$

formam uma base para o $\mathcal{O}_{C,P}$-módulo livre $\mathcal{J}^n(I)_P$.

Usando a descrição local de δ_I dada pela Proposição 4.2, obtemos:

$$\begin{aligned}\delta_{I,P}(fl) = 1 \otimes fl = \delta(f) \otimes l &= (f + Df\epsilon + ... + \frac{D^n f}{n!}\epsilon^{*n}) \otimes l \\ &= f(1 \otimes l) + Df(\epsilon \otimes l) + ... + \frac{D^n f}{n!}(\epsilon^{*n} \otimes l)\end{aligned}$$

Sejam $v_1, ..., v_{n+1} \in V$ formando uma base para o k-espaço vetorial V. Logo, $v_{i,P} = f_i l$ para todo $i = 1, ..., n+1$. Nesse caso, a seção s é descrita localmente como o determinante da matriz:

$$\begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_{n+1} \\ Df_1 & Df_2 & \cdots & Df_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{D^n f_1}{n!} & \frac{D^n f_2}{n!} & \dots & \frac{D^n f_{n+1}}{n!} \end{bmatrix}$$

Portanto, comparando com a definição dada na Seção 2.1, vemos que tal seção nos fornece como divisor de zeros exatamente o divisor de ramificação definido por Lax e Widland em [LW].

Capítulo 5

Famílias de curvas

Após definirmos de forma intrínseca o divisor de ramificação de um sistema linear fracionário sobre uma curva, queremos estudar o comportamento desse divisor em famílias, justificando assim a sua definição. Queremos mostrar que se o sistema linear fracionário (V, I) é limite de sistemas lineares em uma família de curvas, então o divisor de ramificação $R(V, I)$ é por sua vez o *limite dos divisores de ramificação correspondentes.* Ainda que como subesquema o limite seja variável, o que veremos em exemplo a seguir, como divisor de Weil o limite está bem definido e coincide com a definição feita anteriormente.

Mostraremos ainda que existe uma "parte esquemática" do divisor $R(V, I)$, a qual é invariante por deformações e que chamaremos de *divisor básico de ramificação.*

Vamos agora tornar nossas afirmações mais precisas e mostrar alguns resultados auxiliares que nos permitam demonstrá-las.

5.1 O Divisor básico de ramificação

Sejam C uma curva de Gorenstein de gênero aritmético g e (V, I) um sistema linear fracionário de posto r e grau d definido sobre C. Denotaremos por $\mathrm{Sing}(I)$ o conjunto dos pontos de C onde I não é invertível. Como I é sem torção temos que $\mathrm{Sing}(I) \subseteq \mathrm{Sing}(C)$.

Na Seção 4, vimos que a partir dos feixes de jatos $\mathcal{J}^n$ associados a uma derivação $d : \mathcal{O}_C \to \omega_C$ podemos definir a seção Wronskiana

$$s : \bigwedge^{r+1} V \otimes \mathcal{O}_C \longrightarrow \frac{\bigwedge^{r+1} \mathcal{J}^r(I)}{\text{torção}}.$$

Seja $\overline{R}(V, I)$ o esquema de zeros da seção Wronskiana, e seja J_I seu feixe de ideais. Chamaremos tal subesquema de C de *divisor básico de ramificação* do sistema linear fracionário (V, I).

Observação 5.1. Pelo Lema 4.5, temos que $\frac{\Lambda^{r+1}\mathcal{J}^r(I)}{\text{torção}} \simeq I^{r+1} \otimes \omega_C^{\otimes\binom{r+1}{2}}$ e portanto $J_I \simeq Hom(I^{r+1} \otimes \omega_C^{\otimes\binom{r+1}{2}}, \mathcal{O}_C)$. Como C é Gorenstein, pelo Corolário 1.36, vale que:

$$\deg[\overline{R}(V,I)] = \deg(I^{r+1} \otimes \omega^{\binom{r+1}{2}}).$$

A fim de avaliarmos o grau do divisor $\overline{R}(V,I)$ precisamos avaliar o grau de I^{r+1}, o que somente será feito posteriormente sob a hipótese de que I é limite de feixes invertíveis em uma dada família. Nesse caso veremos que vale a desigualdade

$$\deg(\overline{R}(V,I)) \leq (r+1)d + \binom{r+1}{2}(2g-2).$$

Queremos agora estudar a relação entre $\overline{R}(V,I)$ e o divisor de ramificação $R(V,I)$. Pela Proposição 1.11 podemos tomar uma injeção $\phi : I \to L$, onde L é um feixe invertível. De acordo com a Proposição 1.6, a aplicação induzida

$$\phi_{r+1} : I^{r+1} \to L^{r+1}$$

também é injetiva. Tensorizando as aplicações ϕ e ϕ_{r+1} pelos feixes L^{-1} e $L^{-(r+1)}$ respectivamente obtemos os homomorfismos injetores

$$I \otimes L^{-1} \to \mathcal{O}_C \quad \text{e} \quad I^{r+1} \otimes L^{-(r+1)} \to \mathcal{O}_C.$$

Sejam I_Y e $I_{Y^{r+1}}$ os feixes de ideais imagens dessas injeções, onde Y e Y^{r+1} são os subesquemas dados por tais feixes. Isso feito obtemos o seguinte:

Proposição 5.2.

(i) A relação entre o divisor de ramificação $R(V,I)$ e o divisor básico $\overline{R}(V,I)$ é dada pela seguinte igualdade:

$$R(V,I) = [\overline{R}(V,I)] + [Y^{r+1}] - (r+1)[Y];$$

(ii) Seja J_L o feixe de ideais de $\overline{R}(V,L)$. Então o feixe de ideais J_I é dado em cada $P \in C$ por:

$$(J_{L,P} : I_{Y^{r+1},P})$$

Demonstração. Pela funtorialidade das construções, da injeção $I \to L$ obtemos o seguinte diagrama comutativo composto de aplicações injetivas:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_C \arrow[d, "s_I"'] \arrow[dr, "s_L"] & \\
I^{r+1} \otimes \omega_C^{\binom{r+1}{2}} \arrow[r, "\phi_{r+1}\otimes id"] & L^{r+1} \otimes \omega_C^{\binom{r+1}{2}}
\end{tikzcd}$$

Como o feixe $L^{r+1} \otimes \omega_C^{\binom{r+1}{2}}$ é invertível, pela comutatividade do diagrama acima obtemos que para cada $P \in C$ vale a igualdade:

$$J^c_{I,P} J_{L,P} = I_{Y^{r+1},P}$$

Portanto, como J_L é localmente principal, temos pela Proposição 1.26 que

$$-[Y^{r+1}] = [\overline{R}(V,I)] - R(V,L)$$

ou seja,

$$R(V,I) = [\overline{R}(V,I)] + [Y^{r+1}] - (r+1)[Y].$$

Obtemos ainda que o feixe de ideais de $\overline{R}(V,I)$ é dado em cada $P \in C$ por:

$$J_{I,P} = (\mathcal{O}_{C,P} : J^c_{I,P}) = (\mathcal{O}_{C,P} : I_{Y^{r+1},P} J^c_{L,P}) = (J_{L,P} : I_{Y^{r+1},P}).$$

□

Observação 5.3. Vemos que o suporte de $R(V,I) - [\overline{R}(V,I)]$ está contido em $\mathrm{Sing}(I)$, apesar de não conseguirmos dizer se tal inclusão pode ser própria. Também não conseguimos afirmar que $R(V,I)$ é um divisor positivo. Na verdade, tudo passa pela dificuldade em avaliarmos para cada $P \in \mathrm{Sing}(I)$ a diferença:

$$n \dim_k\left(\frac{\mathcal{O}_{C,P}}{J}\right) - \dim_k\left(\frac{\mathcal{O}_{C,P}}{J^n}\right)$$

quando $J \subset \mathcal{O}_{C,P}$ é um ideal próprio.

Exemplo 5.4. Voltemos ao Exemplo 2.9 onde C é a curva nodal plana dada pela equação $y^2z - x^2z - x^3 = 0$ e (V,I) é o sistema linear fracionário dado pelas retas passando pelo ponto $P = (0:0:1)$, onde $I = \mathcal{O}_C(1) \otimes \mathcal{M}_P$. Tomando novamente $L = \mathcal{O}_C(1)$ vemos que, no aberto afim $z \neq 0$, o feixe de ideais que define o divisor de ramificação do sistema linear (V,L) é dado pela equação:

$$3x^3 + 2x^2 - 2y^2 = 0$$

ou seja $x^3 = 0$. Nesse caso, sendo Y^2 o subesquema dado pelo feixe de ideais $\mathcal{M}_P^2$, vemos que $\overline{R}(V,I)$ é dado em P por $(x^3 : (x,y)^2) = (x,y)^2$. Logo $\overline{R}(V,I) = Y^2$.

5.2 Comportamento em famílias

Seja $f : X \to B$ uma família de curvas de Gorenstein, onde $B = \mathrm{Spec}(R)$, sendo R um domínio de valorização discreta, η seu ponto genérico e s seu ponto especial. Suponha que a fibra especial $X(s)$ seja a curva C. Como já foi observado na Seção 4.2, nesse caso temos que X é reduzido e irredutível.

Lembramos também que sendo R um domínio de ideais principais, um feixe de $\mathcal{O}_X$-módulos $\mathcal{F}$ é plano sobre B se, e somente se, $f_*\mathcal{F}$ é sem torção sobre B.

Definição 5.5. Sejam $\mathcal{I}$ um feixe sem torção de posto um sobre X/B e $\mathcal{V} \subseteq f_*\mathcal{I}$ um $\mathcal{O}_B$-subfeixe localmente livre de posto $r+1$. Dizemos que $(\mathcal{V}, \mathcal{I})$ é uma *família de sistemas lineares em* X/B se a aplicação composta:

$$\mathcal{V}(s) \longrightarrow f_*\mathcal{I}(s) \longrightarrow H^0(X(s), \mathcal{I}(s))$$

é injetiva.

Observação 5.6. Nesse caso, sendo $\mathcal{I}$ plano sobre $B = \mathrm{Spec}(R)$ e R um anel de valorização discreta, o próprio feixe de $\mathcal{O}_B$-módulos $f_*\mathcal{I}$ é sem torção e portanto um feixe localmente livre.

Definição 5.7. Dizemos que o sistema linear fracionário (V, I) é *limite de sistemas lineares em* X/B se existe uma família de sistema lineares $(\mathcal{V}, \mathcal{I})$ tal que $\mathcal{I}(s) = I$, $\mathcal{V}(s) = V$ e também que $\mathcal{I}(\eta)$ seja invertível sobre $X(\eta)$.

Suponhamos então que (V, I) é limite de sistemas lineares na família X/B. Seja R_η o subesquema de $X(\eta)$ representando o divisor de ramificação do sistema linear $(\mathcal{V}(\eta), \mathcal{I}(\eta))$. Pela Proposição 9.8, p. 258 em [H1], o fecho esquemático $\mathcal{R}$ de R_η em X é plano sobre B. O divisor limite da família de sistemas lineares $(\mathcal{V}, \mathcal{I})$ será dado portanto por $[\mathcal{R}(s)]$. Nosso objetivo agora é provar que:

$$[\mathcal{R}(s)] = R(V, I)$$

além de mostrar também que $\overline{R}(V, I)$ é um subesquema de $\mathcal{R}(s)$. Para efetuar essa comparação vamos supor a existência de um homomorfismo natural

$$\eta_{X/B} : \Omega^1_{X/B} \to \omega_{X/B},$$

onde $\Omega^1_{X/B}$ é o feixe de diferenciais relativas e $\omega_{X/B}$ é o feixe dualizante relativo da família X/B, lembrando que, sendo a família de Gorenstein, $\omega_{X/B}$ é um feixe invertível em X.

Pelo Capítulo 4 existem feixes de $\mathcal{O}_X$-álgebras $\mathcal{J}^n$ associados a derivação $d : \mathcal{O}_X \to \omega_{X/B}$, induzida por $\eta_{X/B}$, juntamente com homomorfismos sobrejetivos de álgebras:

$$r : \mathcal{J}^n \to \mathcal{J}^{n-1}$$

Vimos que, dados $\mathcal{I}$ feixe sem torção de posto um em X/B e $\mathcal{V} \subseteq f_*\mathcal{I}$ subfeixe localmente livre de posto $r+1$, os feixes de jatos nos permitem definir a chamada seção Wronskiana

$$s : \bigwedge^{n+1} f^*\mathcal{V} \to \bigwedge^{n+1} \mathcal{J}^n(\mathcal{I}),$$

cuja construção, como já foi observado na Seção 4.3, é funtorial e comuta com mudança de base. Vamos agora utilizá-la para estudarmos limite dos divisores de ramificação dessa família na fibra especial C.

Precisaremos também de alguns resultados preliminares a fim de mostrarmos que, nesse caso, o divisor limite coincide com o divisor $R(V, I)$ definido intrinsecamente na curva.

Lema 5.8. *Sejam X/B uma família de curvas e $\mathcal{F}$ feixe coerente sobre X plano sobre B. Seja $\phi : \mathcal{H} \to \mathcal{F}$ um homomorfismo de feixes coerentes sobre X e considere $\mathcal{G} :=$ coker (ϕ). Seja $b \in B$. São equivalentes:*

(i) $\phi(b) : \mathcal{H}(b) \to \mathcal{F}(b)$ *é injetivo;*

(ii) Existe uma vizinhança U de b tal que $\phi|_{f^{-1}(U)}$ é injetivo e $\mathcal{G}|f^{-1}(U)$ é plano sobre U.

Demonstração. Ver [E2], Lema (2.10). □

Lema 5.9. *Seja X/B uma família de curvas de Gorenstein onde $B = \operatorname{Spec}(R)$, sendo R um domínio de valorização discreta. Sejam η o ponto genérico de B e s o ponto especial. Seja $\mathcal{I}$ feixe sem torção de posto um sobre X/B. Então existem um feixe invertível $\mathcal{L}$ sobre X e uma injeção $\varphi : \mathcal{I} \to \mathcal{L}$ com cokernel plano sobre B.*

Demonstração. Observamos primeiramente que, pelo Teorema de Serre, existe um inteiro m tal que que $Hom(\mathcal{I}(s), \mathcal{O}_{X(s)}(m))$ é gerado por seções globais. Considere portanto um homomorfismo não nulo $\varphi_s : \mathcal{I}(s) \to \mathcal{O}_{X(s)}(m)$. Vamos mostrar que φ_s se levanta a uma aplicação $\varphi : \mathcal{I} \to \mathcal{O}_X(m)$.

Da sobrejeção natural

$$H^0(X, Hom(\mathcal{I}, \mathcal{O}_X(m))) \longrightarrow H^0(X, Hom(\mathcal{I}, \mathcal{O}_X(m)))(s),$$

vemos que basta mostrarmos o isomorfismo

$$H^0(X, Hom(\mathcal{I}, \mathcal{O}_X(m)))(s) \simeq H^0(X(s), Hom(\mathcal{I}(s), \mathcal{O}_{X(s)}(m))).$$

De fato, por [AK1], (6.5.3), p. 96, temos que $Ext^1(\mathcal{I}, \omega_{X/B}) = 0$. Como a família é de Gorenstein, $\omega_{X/B}$ é invertível e portanto:

$$Ext^1(\mathcal{I}, \mathcal{O}_X(m)) = 0.$$

Logo pelo Teorema (1.9)(ii) de [AK1], p. 59, sendo $Ext^1(\mathcal{I}, \mathcal{O}_X(m))$ plano sobre B vale a mudança de base

$$Hom(\mathcal{I}, \mathcal{O}_X(m))(b) \simeq Hom(\mathcal{I}(b), \mathcal{O}_{X(b)}(m)).$$

para todo $b \in B$. Por outro lado, por Serre, podemos supor também que m é tal que para qualquer $b \in B$ vale que:

$$H^1(X(b), Hom(\mathcal{I}(b), \mathcal{O}_{X(b)}(m))) = 0$$

Logo, pelo Teorema 12.11, em [H1], p. 290, se $\mathcal{F} := Hom(\mathcal{I}, \mathcal{O}_X(m))$ e $b \in B$, a aplicação

$$R^1 f_*(\mathcal{F}) \otimes k(b) \longrightarrow H^1(X(b), \mathcal{F}(b))$$

é sobrejetiva e portanto um isomorfismo. Sendo assim, $R^1f_*(\mathcal{F}) = 0$ o que, pelo mesmo Teorema, implica que

$$f_*(\mathcal{F}) \otimes k(s) \longrightarrow H^0(X(s), \mathcal{F}(s))$$

é um isomorfismo. Logo

$$f_*(\mathcal{F}) \otimes k(s) = H^0(X, \mathcal{F})(s) \simeq H^0(X(s), Hom(\mathcal{I}(s), \mathcal{O}_{X(s)}(m)))$$

como queríamos mostrar.

Por fim, como φ_s é injetiva, pois $\mathcal{I}(s)$ é sem torção de posto um, pelo Lema 5.8 temos que φ é também injetiva e seu cokernel é plano sobre B. □

Lema 5.10. *Sejam X/B uma família de curvas onde $B = \operatorname{Spec}(R)$, sendo R um domínio de valorização discreta. Seja η o ponto genérico de B. Sejam $\mathcal{H}$ feixe coerente sobre X e $u_\eta : \mathcal{H}(\eta) \to G$ um homomorfismo sobrejetivo. Então existe um único quociente $u : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ estendendo u_η e tal que $\mathcal{G}$ é plano sobre B*

Demonstração. Seja $\iota : X(\eta) \to X$ a aplicação de inclusão. A sobrejeção u_η induz a composição

$$u : \mathcal{H} \longrightarrow \iota_*\mathcal{H}(\eta) \longrightarrow \iota_*G,$$

sendo a primeira aplicação, a adjunta da identidade. Seja $\mathcal{G}$ a imagem de u. Obtemos assim o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} \iota^*\mathcal{H} = H(\eta) \arrow[d, "u(\eta)"'] \arrow[dr, "u_\eta"] & \\ \iota^*\mathcal{G} \arrow[r, "j"] & \iota^*\iota_*G = G \end{tikzcd}$$

Como ι é uma inclusão de um aberto, temos que j também é uma inclusão. Sendo u_η e $u(\eta)$ sobrejeções obtemos portanto que $\iota^*\mathcal{G} = G$. Como $G(X(\eta))$ é um módulo sobre o corpo de frações de R, temos que ι_*G é um feixe sem torção sobre B, e portanto $\mathcal{G}$ também o é. Logo, como R é um domínio de valorização discreta, $\mathcal{G}$ é plano sobre B.

Suponhamos que exista um outro quociente $\mathcal{H} \to \mathcal{F}$ com as mesmas propriedades. Observando o diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F} \arrow[d, "h"'] \\ \iota_*\iota^*\mathcal{H} \arrow[r] & \iota_*\iota^*\mathcal{F} = \iota_*G \end{tikzcd}$$

vemos que $h(\mathcal{F}) = u(\mathcal{H}) = \mathcal{G}$. Por outro lado, como $\mathcal{F}$ é plano sobre B, o homomorfismo h é injetivo. Logo, $\mathcal{F} \simeq \mathcal{G}$. □

Lembramos que, dado V um subesquema de X, podemos definir a *multiplicidade geométrica em* V de um subesquema integral $F \subset X$ como sendo $m_V(F) = 0$, no caso em que F não é uma componente irredutível de V ou, caso contrário, como $m_V(F) = \ell(A_{\mathcal{P}})$, onde $A := \mathcal{O}_{V,Q}$, sendo Q um ponto de F e $\mathcal{P}$ o primo minimal de A correspondente à componente F.

Lema 5.11. *Sejam R um domínio de valorização discreta e $B = \operatorname{Spec}(R)$. Sejam s o ponto especial e η o ponto genérico de B. Sejam X/B uma família de curvas e V um subesquema finito e plano sobre B. Então, se $Q \in V(s)$ vale que:*

$$m_{V(s)}(Q) = \sum_F m_V(F) m_{F(s)}(Q),$$

onde a soma percorre todos os subesquemas integrais F de X que sejam planos e finitos sobre B.

Demonstração. Sejam $Q \in V(s)$ e $A := \mathcal{O}_{V,Q}$. Sejam $V_1, \ldots, V_l$ as componentes irredutíveis de V passando por Q e $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_l$ os primos minimais de A correspondentes. Seja $t \in R$ um parâmetro local. Como V é plano sobre B, temos que t não é um divisor de zero em A. Segue de [F], Lema A.2.7, p. 410, que

$$\ell(A/tA) = \sum_{i=1}^{l} \ell(A_{\mathcal{P}_i}) \ell(A/(\mathcal{P}_i + tA)). \tag{5.1}$$

e portanto, em termos de multiplicidades geométricas, obtemos

$$m_{V(s)}(Q) = \sum_{i=1}^{l} m_V(V_i) m_{V_i(s)}(Q). \tag{5.2}$$

Note que, sendo V plano sobre $B = \operatorname{Spec}(R)$ e R um domínio de valorização discreta, nenhuma componente irredutível de V está contida em $X(s)$. Logo, cada V_i é também plano e finito sobre B. Por outro lado, se F é um subesquema integral de X, e F é plano e finito sobre B então $F = V_i$ para algum i se e somente se $F \subseteq V$ e $Q \in F(s)$. Logo, podemos reescrever (5.2) como

$$m_{V(s)}(Q) = \sum_F m_V(F) m_{F(s)}(Q), \tag{5.3}$$

onde a soma percorre todos os subesquemas integrais F de X que sejam planos e finitos sobre B. □

Proposição 5.12. *Seja X/B uma família de curvas onde $B = Spec(R)$, sendo R um domínio de valorização discreta. Seja η o ponto genérico de B e s o ponto especial. Sejam Y, Z e W subesquemas de X finitos e planos sobre B. Suponha que $W(\eta) = Y(\eta) \cup Z(\eta)$ esquematicamente. Se $Y(\eta)$ é localmente principal onde $Z(\eta)$ não é, então:*

$$[W(s)] = [Y(s)] + [Z(s)].$$

Demonstração. Como W, Y e Z são planos e finitos sobre B e $W(\eta) = Y(\eta) \cup Z(\eta)$, o suporte de W é o mesmo que o de $Y \cup Z$. Logo, basta mostrarmos que vale

$$m_{W(s)}(Q) = m_{Y(s)}(Q) + m_{Z(s)}(Q)$$

para todo $Q \in W(s)$ e pelo Lema 5.11, basta mostrarmos que

$$m_W(F) = m_Y(F) + m_Z(F) \tag{5.4}$$

para toda subesquema integral F de X que seja plano e finito sobre B. Seja então um tal F, e seja P seu ponto genérico. Seja $S := \mathcal{O}_{X,P}$. Sejam I e J os ideais de Y e Z em S. Como F é plano sobre B, o ponto P pertence a $X(\eta)$. Logo, como $W(\eta) = Y(\eta) \cup Z(\eta)$ esquematicamente, o ideal de W em S é o produto IJ. Logo (5.4) é equivalente a:

$$\ell(S/IJ) = \ell(S/I) + \ell(S/J). \tag{5.5}$$

Como $P \in X(\eta)$, ou Y ou Z é localmente principal em P. Portanto, ou I ou J é principal. Suponha, sem perda de generalidade que I é principal, gerado por $b \in S$. Como $X(\eta)$ é integral, b não é um divisor de zero em S. Logo a sequência abaixo é exata:

$$0 \longrightarrow S/J \xrightarrow{\ b\ } S/bJ \longrightarrow S/bS \longrightarrow 0.$$

Como o comprimento é aditivo em sequências exatas, e $I = bS$, obtemos (5.5). □

Teorema 5.13. *Sejam C uma curva de Gorenstein de gênero aritmético g e (V, I) um sistema linear fracionário de posto r e grau d definido sobre essa curva. Seja X/B uma família de curvas de Gorenstein, onde $B = Spec(R)$, R anel de valorização discreta, tendo C como sua fibra especial e (V, I) como limite de uma família de sistemas lineares definida sobre X/B. Então, se existe uma aplicação natural*

$$\eta_{X/B} : \Omega^1_{X/B} \to \omega_{X/B},$$

onde $\Omega^1_{X/B}$ é o feixe de diferenciais relativas e $\omega_{X/B}$ é o feixe dualizante relativo da família X/B, temos que o divisor de ramificação limite dessa família coincide, enquanto divisor de Weil, com o divisor de ramificação fracionário $R(V, I)$. Além disso, o divisor básico de ramificação $\overline{R}(V, I)$ é um subesquema do esquema limite correspondente, e portanto

$$\deg[\overline{R}(V, I)] \leq (r+1)d + \binom{r+1}{2}(2g-2).$$

Demonstração. Seja $(\mathcal{V}, \mathcal{I})$ a família de sistemas lineares definida sobre X/B cujo limite é o sistema linear fracionário (V, I). Seja R_η o subesquema de $X(\eta)$ associado ao divisor de ramificação do sistema linear $(\mathcal{V}(\eta), \mathcal{I}(\eta))$. Tomando $\mathcal{R} =$

$\overline{R_\eta}$, o fecho esquemático de R_η em X/B, queremos mostrar portanto que $\overline{R}(V,I) \subseteq \mathcal{R}(s)$ e que $[\mathcal{R}(s)] = R(V,I)$.

Pelo Lema 5.9, podemos considerar uma injeção $\phi : \mathcal{I} \to \mathcal{L}$, onde $\mathcal{L}$ é um feixe invertível e ϕ tem cokernel plano sobre B. Logo, pelo Lema 5.8, o homomorfismo induzido na fibra especial $\mathcal{I}(s) \to \mathcal{L}(s)$ é injetivo.

Seja $\phi_{r+1} : \mathcal{I}^{\otimes(r+1)} \to \mathcal{L}^{r+1}$ a aplicação induzida por ϕ e $\mathcal{G} :=$ coker ϕ_{r+1}. Pelo Lema 5.10, existe $\mathcal{H}$ feixe plano sobre B, quociente de $\mathcal{G}$ tal que $\mathcal{G}(\eta) = \mathcal{H}(\eta)$. Considere a composição $\mathcal{L}^{r+1} \to \mathcal{H}$ e denote por $\mathcal{I}_{r+1}$ o kernel dessa aplicação. Obtemos assim o diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{I}^{\otimes(r+1)} \arrow[r, "\phi_{r+1}"] & \mathcal{L}^{r+1} \arrow[r] \arrow[d, "id"'] & \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{I}_{r+1} \arrow[r] & \mathcal{L}^{r+1} \arrow[r] & \mathcal{H} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

de onde concluímos que ϕ_{r+1} se fatora pela injeção $\mathcal{I}_{r+1} \to \mathcal{L}^{r+1}$ e também que $\mathcal{I}_{r+1}(\eta) = \mathcal{I}^{\otimes(r+1)}(\eta)$.

Além disso, observamos que $\mathcal{I}_{r+1}$ é plano sobre B, pois $\mathcal{H}$ e $\mathcal{L}^{r+1}$ o são, e que $\mathcal{I}_{r+1}$ é um feixe sem torção de posto um sobre X/B, sendo portanto o homomorfismo induzido na fibra especial:

$$I^{\otimes(r+1)} \longrightarrow \mathcal{I}_{r+1}(s)$$

fatorado por uma injeção $I^{r+1} \to \mathcal{I}_{r+1}(s)$.

Obtemos dessa maneira $\mathcal{I}_{r+1}$, um feixe plano sobre B, que coincide genericamente com o feixe $\mathcal{I}^{\otimes(r+1)}$, e cujo grau na curva C é dado por:

$$\begin{aligned}
\deg \mathcal{I}_{r+1}(s) &= \deg \mathcal{I}_{r+1}(\eta) \\
&= \deg \mathcal{I}^{\otimes(r+1)}(\eta) \\
&= (r+1)\deg \mathcal{I}(\eta) \\
&= (r+1)\deg I.
\end{aligned}$$

Lembramos que, supondo a existência de um homomorfismo natural

$$\eta_{X/B} : \Omega^1_{X/B} \to \omega_{X/B},$$

podemos construir a seção Wronskiana global

$$s : \bigwedge^{r+1} f^*\mathcal{V} \to \bigwedge^{r+1} \mathcal{J}^r(\mathcal{I}).$$

Pelo Lema 4.4, obtemos um homomorfismo funtorial

$$v_n(\mathcal{L}) : \mathcal{L}^{r+1} \otimes \omega_{X/B}^{\binom{r+1}{2}} \to \bigwedge^{r+1} \mathcal{J}^r(\mathcal{L}),$$

o qual é um isomorfismo pelo fato de $\mathcal{L}$ ser invertível. Considere portanto o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
\bigwedge^{r+1} f^*\mathcal{V} & \longrightarrow & \bigwedge^{r+1} \mathcal{J}^r(\mathcal{I}) & & \mathcal{I}_{r+1} \otimes \omega_{X/B}^{\binom{r+1}{2}} \\
{\scriptstyle id}\downarrow & & \downarrow & & {\scriptstyle \iota}\downarrow \\
\bigwedge^{r+1} f^*\mathcal{V} & \longrightarrow & \bigwedge^{r+1} \mathcal{J}^r(\mathcal{L}) & \xrightarrow{v_n(\mathcal{L})^{-1}} & \mathcal{L}^{r+1} \otimes \omega_{X/B}^{\binom{r+1}{2}}
\end{array}$$

Pelo Lema 4.4, temos que a composição:

$$\psi : \bigwedge^{r+1} \mathcal{J}^r(\mathcal{I}) \longrightarrow \bigwedge^{r+1} \mathcal{J}^r(\mathcal{L}) \xrightarrow{v_n(\mathcal{L})^{-1}} \mathcal{L}^{r+1} \otimes \omega_{X/B}^{\binom{r+1}{2}}$$

se fatora sobre $X(\eta)$ pelo isomorfismo

$$\bigwedge^{r+1} \mathcal{J}^r(\mathcal{I})(\eta) \simeq (\mathcal{I}_{r+1} \otimes \omega_{X/B}^{\binom{r+1}{2}})(\eta).$$

Como o cokernel de ι é plano sobre B, pelo Lema 5.10, ψ se fatora por ι. Obtemos assim um homomorfismo

$$\sigma : \bigwedge^{r+1} f^*\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{I}_{r+1} \otimes \omega_{X/B}^{\binom{r+1}{2}}$$

cuja restrição à fibra genérica é a seção Wronskiana de $(\mathcal{V}(\eta), \mathcal{I}(\eta))$. Sendo $\mathcal{I}_{r+1}$ plano sobre B, temos que $\mathcal{R} = \overline{R_\eta}$ é o esquema de zeros de σ.

Olhando para a fibra especial obtemos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc}
\bigwedge^{r+1} V \otimes \mathcal{O}_C & \longrightarrow & I^{r+1} \otimes \omega_C^{\binom{r+1}{2}} \\
{\scriptstyle id}\downarrow & & \downarrow \\
\bigwedge^{r+1} V \otimes \mathcal{O}_C & \xrightarrow{\sigma(s)} & \mathcal{I}_{r+1}(s) \otimes \omega_C^{\binom{r+1}{2}}
\end{array}$$

do qual se obtém a inclusão $\overline{R}(V, I) \subseteq \mathcal{R}(s)$, e portanto a desigualdade

$$\deg[\overline{R}(V, I)] \leq \deg[\mathcal{R}(s)] = (r+1)d + \binom{r+1}{2}(2g-2).$$

Lembrando que, pela Proposição 5.2(i),

$$R(V, I) = [\overline{R}(V, I)] + [\frac{L^{\otimes(r+1)}}{I^{r+1}}] - (r+1)[\frac{L}{I}]$$

onde $L := \mathcal{L}(s)$, vemos que, para provarmos que $[\mathcal{R}(s)] = R(V, I)$, basta que mostremos a igualdade

$$[\frac{\mathcal{I}_{r+1}(s)}{I^{r+1}}] = [\frac{L^{\otimes(r+1)}}{I^{r+1}}] - (r+1)[\frac{L}{I}] \tag{5.6}$$

Observamos que, devido à sequência de injeções $I^{r+1} \to \mathcal{I}_{r+1}(s) \to L^{r+1}$, mostrarmos (5.6) equivale a provarmos a igualdade

$$[\frac{L^{\otimes(r+1)}}{\mathcal{I}_{r+1}(s)}] = (r+1)[\frac{L}{I}]. \tag{5.7}$$

O homomorfismo injetor $\phi : \mathcal{I} \to \mathcal{L}$ induz, após tensorização pelo feixe $\mathcal{L}^{-1}$, um outro homomorfismo injetor $\phi_{\mathcal{L}} : \mathcal{I} \otimes \mathcal{L}^{-1} \to \mathcal{O}_X$. Seja $\mathcal{Y}$ o subesquema de X dado pela imagem de $\phi_{\mathcal{L}}$. Observamos que $\mathcal{Y}$ é um subesquema plano e finito sobre B, pois o cokernel de ϕ é plano sobre B e com fibras possuindo suporte finito. Analogamente a partir da injeção $\mathcal{I}_{r+1} \to \mathcal{L}^{r+1}$ obtemos um subesquema $\mathcal{Y}_{r+1}$ plano e finito sobre B, cujo feixe de ideais é isomorfo a $\mathcal{I}_{r+1} \otimes \mathcal{L}^{-(r+1)}$.

Como $\mathcal{Y}_{r+1}(\eta) = (r+1)\mathcal{Y}(\eta)$, temos que $\mathcal{Y}_{r+1}$ é o fecho esquemático do subesquema $(r+1)\mathcal{Y}(\eta)$ e mostrar (5.7) equivale a mostrar que

$$[\mathcal{Y}_{r+1}(s)] = (r+1)[\mathcal{Y}(s)] \tag{5.8}$$

Vamos mostrar (5.8) fazendo indução em r. Para $r = 0$ não há nada a provar. Suponhamos que (5.8) está demonstrada para $r \geq 0$; ou seja vale que

$$[\mathcal{Y}_r(s)] = r[\mathcal{Y}(s)]. \tag{5.9}$$

Observamos que $\mathcal{Y}_{r+1}(\eta) = \mathcal{Y}(\eta) \cup \mathcal{Y}_r(\eta)$ sendo essa união esquemática, ou seja, dada pelo produto dos ideais de definição. Aplicando a Proposição 5.12, obtemos

$$[\mathcal{Y}_{r+1}(s)] = [\mathcal{Y}(s)] + [\mathcal{Y}_r(s)] = (r+1)[\mathcal{Y}(s)],$$

sendo a última igualdade dada pela hipótese de indução (5.9). □

Observação 5.14. Observamos que, na prova do Teorema 5.13, obtemos uma inclusão de I^{r+1} em um feixe sem torção $\mathcal{I}_{r+1}(s)$, cujo grau é dado por $(r+1)\deg I$. Logo, como consequência da prova desse Teorema, mostra-se que, no caso em que I é limite de feixes invertíveis, vale a seguinte desigualdade:

$$\deg I^{r+1} \leq (r+1)\deg I$$

Exemplo 5.15. Queremos estudar deformações do sistema linear (V, I), dado pelas retas passando por $P = (0 : 0 : 1)$ na cúbica nodal plana dada por:

$$y^2 z - x^2 z - x^3 = 0$$

Nesse caso, vimos no Exemplo 5.4 que o divisor básico de ramificação $\overline{R}(V, I)$ é dado pelo feixe de ideais $\mathcal{M}_P^2$.

Pelo Teorema 5.13, sabemos que, dada uma deformação do sistema linear (V, I), o divisor limite é um subesquema de grau 4 com feixe de ideais J entre $\mathcal{M}_P^3$ e $\mathcal{M}_P^2$. Logo,

$$J_P = (axy + by^2)\mathcal{O}_{C,P} + (\mathcal{M}_P^3)_P$$

com $a, b \in k$. Vamos mostrar que, para todo $(a : b) \in \mathbb{P}^1$ existe uma deformação do sistema linear acima tendo o subesquema correspondente a J_P como limite. De fato, considere a seguinte família a um parâmetro de cúbicas planas projetivas olhada no aberto afim $z \neq 0$:

$$y^2 - x^3 - x^2 - t^2 = 0$$

Seja $(\mathcal{V}, \mathcal{I})$ a família de sistemas lineares das retas no plano passando por $(0, t)$. Vemos que (V, I) é o sistema linear limite de tal família para $t \to 0$. Com a ajuda do [*CoCoA*] vemos que o ideal que define o divisor limite $\mathcal{R}(s)$ nesse aberto é dado por:

$$(xy, y^2 - x^2 - x^3, x^3)$$

representando portanto na notação acima o ponto $(1 : 0) \in \mathbb{P}^1$.

Considere agora a família a dois parâmetros dada por:

$$y^2 + (t-1)x^2 - x^3 - t\lambda y + t^2 = 0$$

e seja $(\mathcal{V}', \mathcal{I}')$ a família de sistemas lineares dada pelas retas do plano passando por $(t, \lambda t)$. Novamente (V, I) é o sistema linear limite dessa família para $t \to 0$. Também com o auxílio do [*CoCoA*] calculamos o ideal de $\mathcal{R}(s)$ obtendo para cada $\lambda \in k$:

$$(xy\lambda + 2y^2, y^2 - x^3 - x^2, x^3)$$

correspondendo ao ponto $(\frac{\lambda}{2} : 1) \in \mathbb{P}^1$.

Vemos com esse exemplo que apesar do divisor de ramificação fracionário estar bem definido como divisor de Weil, não há como colocarmos uma estrutura de esquema bem definida, tal como acontece no caso de um sistema linear usual.

Na verdade, de acordo com a demonstração do Teorema 5.13, havendo uma deformação do sistema linear fracionário dado, a estrutura extra de esquema dada pelo limite não depende na verdade do sistema linear em si, mas do feixe sem torção de posto um em questão. Um passo natural a ser dado seria, portanto, estudar a variação dessa estrutura esquemática proveniente de limites em famílias, tentando decidir, por exemplo, em que situação todos os casos possíveis são realizados, o que foi feito em um caso particular no exemplo anterior.

Bibliografia

[AK] A. Altman, S. Kleiman, *Introduction to Grothendieck Duality Theory*, Lecture Notes in Math. 146, Springer-Verlag (1970).

[AK1] A. Altman, S. Kleiman, *Compatifying the Picard Scheme*, Adv. Math. 35 (1980), 50-112.

[*CoCoA*] A. Capani, G. Niesi, L. Robbiano, *CoCoA, a system for doing Computations in Commutative Algebra*, http://cocoa.dima.unige.it, (2000).

[E1] E. Esteves, *Wronski Algebra Systems on families of singular curves*, Ann.Scient. Éc. Norm. Sup. (4) 29 (1996), 107-134.

[E2] E. Esteves, *Construção de Espaços de Moduli*, 21º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA (1997).

[EGK] E. Esteves, M. Gagné, S. Kleiman, *Abel maps and presentation schemes*, Comm. Alg. 28 (12) (2000), 5961-5992.

[F] W. Fulton, *Intersection Theory*, Springer-Verlag (1985).

[G1] L. Gatto, *K-forme wronskiane, successioni di pesi e punti di Weierstraß su curve di Gorenstein*, Tesi di Dottorato, Università di Torino (1993).

[G2] L. Gatto, *On the closure in $\overline{M}_g$ of smooth curves having a special Weierstrass point*, Math. Scand. 88 (2001), nº 1, 41-71.

[GL] A. Garcia , R. F. Lax, *Weierstrass points on Gorenstein curves*, Comm. Alg. 22 (1994), 4841-4854.

[H1] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, GTM 52, Springer Verlag (1977).

[L] R. F. Lax, *Weierstrass weight and degenerations,* Proc. Amer. Soc. 101 (1987), nº 1, 8-10.

[LW] R. F. Lax, C. Widland, *Weierstrass points on Gorenstein curves*, Pac. J. Math. 142 (1990), 197-208.

[LT1] D. Laksov, A. Thorup, *Weierstrass points and gap sequences for families of curves*, Ark. Mat. 32 (1994), 393-422.

[LT2] D. Laksov, A. Thorup, *The Algebra of Jets*, Michigan Math. J. 48 (2000), 393-416.

[M] H. Matsumura, *Commutative Ring Theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 8.

[Mu] D. Mumford, *The Red Book of Varieties and Schemes*, Lecture Notes in Math. 1358, Springer-Verlag (1988).

[S] J.-P. Serre, *Algebraic Groups and Class Fields*, GTM 117, Springer-Verlag (1988).

[Sh] I. R. Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry 1*, Springer-Verlag (1988).

[St] K. O. Stöhr, *On the poles of regular differentials of singular curves*, Bol. Soc. Bras. Mat., 24 (1993), 105-136.