Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada-IMPA

Percolação de Bernoulli dependente em $\mathbb{Z}^2$

Bernardo Nunes Borges de Lima

Orientador: Prof. Vladas Sidoravicius

Fevereiro de 2003

Apoio: CAPES e CNPq

Agradecimentos

Inicialmente gostaria de agradecer ao meu orientador, Prof. Vladas Sidoravicius, pela oportunidade em desenvolver este trabalho, pelos conhecimentos transmitidos, conselhos... e principalmente pela enorme paciência que teve comigo durante todo este tempo. Gostaria de agradecer aos demais membros da banca examinadora pelas sugestões; gostaria de agradecer em especial à Profa. Maria Eulália Vares não só pelas críticas e sugestões durante a defesa mas principalmente pelos ensinamentos que foram parte importantíssima da minha formação em Probabilidade.

Gostaria de agradecer ao IMPA pelo ambiente, a acolhida, a presteza de seus funcionários e a agradável convivência com os colegas durante todos estes anos; em especial gostaria de agradecer aos amigos Jorge Vitório Pereira, José de Arimatéia Fernandes, Leandro Pimentel e Mariela Sued por ter tornado o mais agradável possível todos estes anos no Rio de Janeiro. Agradeço também a vários dos meus colegas do departamento de Matemática da UFMG pelo apoio constante, à CAPES e ao CNPq pela bolsa de estudos.

Finalmente gostaria de agradecer à minha família; principalmente meus pais, a quem devo tudo o que aprendi e o que ainda aprenderei, e a Sonaly, companheira eterna que mesmo à distância foi fonte de força nos momentos mais difíceis e de inspiração nos mais luminosos.

A todos vocês, muito obrigado.

Belo Horizonte, 26 de março de 2003.

Sumário

Introdução

"Se esse mundo não fosse uma região de espíritos desatentos, era escusado lembrar ao leitor que eu só afirmo certas leis, quando as possuo deveras; em relação a outras restrinjo-me à admissão de probabilidade."

Machado de Assis
Memórias Póstumas de Brás Cubas

O modelo matemático de percolação foi introduzido em 1957 por Broadbent e Hammersley [7] com o objetivo de descrever a propagação de um fluido em meio poroso. Variantes do modelo de percolação também já foram usadas em modelagem de propagação de epidemias e circuitos elétricos aleatórios.

A teoria de percolação faz uso de técnicas de vários campos do conhecimento como Combinatória, Probabilidade, Mecânica Estatística e Análise. E tem sido desenvolvida continuamente desde suas origens até os dias atuais, tendo tido um grande impulso a partir do fim da década de 70 e início da década de 80; um marco neste período é o surgimento do importante livro *Percolation theory for Mathmaticians* de Harry Kesten.

De modo geral, os problemas de percolação têm a peculiaridade de normalmente serem simples de enunciar e difíceis de solucionar, alguns problemas de enunciado simples são problemas em aberto até os dias atuais!

Este trabalho trata do estudo de alguns modelos de percolação dependente em $\mathbb{Z}^2$. A motivação para o estudo de tais modelos é que ao contrário do caso independente, no caso dependente a caracterização da transição de fase é mais difícil. Outra motivação é que o modelo de percolação dependente de elos em $\mathbb{Z}^2$ tem relação com outros modelos tais como o problema de Winkler de compatibilidade de seqüências, percolação de palavras no regime de altas densidades, percolação na Rede Esticada entre outros.

No primeiro capítulo, definimos o modelo de percolação independente e enunciamos alguns resultados sobre modelos independentes que serão úteis nos capítulos seguintes, como a desigualdade FKG e a Fórmula de Russo.

No segundo capítulo, definimos o modelo de percolação dependente de elos em $\mathbb{Z}^2$ que é o principal objeto de estudo deste trabalho; enunciamos um teorema de transição de fase para este modelo que garante percolação em certa região dos parâmetros do modelo; este é o resultado principal da tese (teorema 2.2.1).

Em seguida definimos o modelo de percolação na Rede Esticada, outro modelo de percolação dependente desenvolvido por Jonasson, Mossel e Peres em [16]. Enunciamos o teorema que caracteriza transição de fase na Rede Esticada em $d \geq 3$ conforme mostrado em [16]; em [16] é conjecturada a existência de percolação na Rede Esticada em $d = 2$, fato que também foi objeto de estudo de [15]. Mostramos que a existência de percolação em nosso modelo de percolação dependente de elos em $\mathbb{Z}^2$ implica na existência de percolação na Rede Esticada em $d = 2$, provando a conjectura contida em [16].

O capítulo 2 termina com a prova do teorema principal da tese. Há dois ingredientes básicos na prova deste teorema; o primeiro é a prova de que há percolação em um modelo de percolação de elos em $\mathbb{Z}^2$ em que há dois tipos de elos com as respectivas probabilidades de estarem abertos diferentes, estes dois tipos de elos estão distribuidos segundo um padrão hierárquico, tal modelo será denotado por percolação na Rede Hierárquica. O segundo ingrediente é o uso de técnicas desenvolvidas por Kesten, Sidoravicius e Vares em [19] na prova da existência de transição de fase em um modelo de percolação de sítios dependente e orientada em $\mathbb{Z}^2_+$, tais técnicas permitem comparar o modelo de percolação dependente de elos em $\mathbb{Z}^2$ com o modelo de Percolação na Rede Hierárquica, de modo a garantir percolação no primeiro modelo. Na seção 2.3 descrevemos rapidamente o modelo estudado em [19] e explicamos o agrupamento combinatório lá desenvolvido, agrupamento este que será extremamente útil na prova do teorema principal e na seção 3.2.

O terceiro capítulo trata do problema de Percolação de Palavras e é dividido em duas seções. A primeira seção trata da questão de percolação de palavras em meio aleatório, conforme introduzido em [3]. Uma palavra é uma seqüência binária, isto é, um elemento do conjunto $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$; em [3] é mostrado que cada palavra é vista em configurações aleatórias de $\mathbb{Z}^d$ ou $\mathbb{Z}^d_+$ (orientado) com probabilidade 0 ou 1, além disso é mostrado que o conjunto das palavras que são vistas com probabilidade 1 tem probabilidade 0 ou 1. É demonstrado em [19] que quando as probabilidades de aparecerem 1's, tanto nas palavras quanto nas configurações de $\mathbb{Z}^d$ ou $\mathbb{Z}^d_+$, são ambas suficientemente próximas de 1 ou ambas suficientemente próximas de 0, a probabilidade do conjunto das palavras que são vistas com probabilidade 1 é 1 e não 0; analogamente mostramos que quando as probabilidades de aparecerem 1's na palavra e nas configurações de $\mathbb{Z}^d_+$ são suficientemente próximas de 0 e 1 (ou 1 e 0), respectivamente, a probabilidade do conjunto das palavras que são vistas com probabilidade 1 é 0 e não 1.

A segunda seção deste capítulo contém alguns resultados sobre percolação de palavras em meios determinísticos, o que nos permite provar que o conjunto das palavras que são vistas a partir da origem em algumas estruturas hierárquicas, como o Carpete de Sierpinsky, tem probabilidade estritamente positiva.

Capítulo 1

Noções de Percolação em meio independente

Neste capítulo, iremos descrever, muito rapidamente, o modelo de percolação independente e enunciar alguns resultados básicos que serão importantes para a compreensão do restante da tese. Os livros de Grimmett [12] e Kesten [18] são os textos clássicos de percolação e servem como referência para tudo (e muito mais!) que será dito neste capítulo; em língua portuguesa, podemos destacar a monografia [11], que serve como uma rápida introdução aos principais resultados e técnicas de percolação independente.

1.1 O modelo e definições básicas

Seja $G = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ um grafo infinito, localmente finito, onde $\mathbb{V}$ e $\mathbb{E}$ são os conjuntos de vértices (sítios) e elos de G, respectivamente. A cada elo ou sítio associamos uma variável aleatória que assume os valores 0 (fechado) ou 1 (aberto), sejam $(p_v)_{v\in\mathbb{V}}$ e $(p_e)_{e\in\mathbb{E}}$ seqüências tais que $0 \leq p_v, p_e \leq 1$, $\forall\ v \in \mathbb{V}, e \in \mathbb{E}$, onde p_v (respectivamente p_e) é a probabilidade do vértice v (respectivamente, do elo e) estar aberto.

Considerando que todos os elos e sítios estão abertos ou fechados independentemente, o espaço de probabilidade que descreve o modelo é $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, onde $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{V}} \times \{0,1\}^{\mathbb{E}}$, $\mathcal{A} = \sigma(\text{cilindros})$ e $P = \prod_{v\in\mathbb{V}} b_{p_v} \times \prod_{e\in\mathbb{E}} b_{p_e}$, onde b_α é a medida de Bernoulli de parâmetro α. Alguns casos particulares de especial interesse são os modelos homogêneos: percolação de elos, quando $p_e = p$, $\forall\ e \in \mathbb{E}$ e $p_v = 1$, $\forall\ v \in \mathbb{V}$; percolação de sítios, quando $p_v = p$, $\forall\ v \in \mathbb{V}$ e $p_e = 1$, $\forall\ e \in \mathbb{E}$ e percolação mista, quando $p_e = p_v = p$, $\forall\ e \in \mathbb{E}$, $\forall\ v \in \mathbb{V}$. Devido a importância deste último caso no capítulo

2, os resultados deste capítulo serão enunciados no contexto de percolação mista, sendo que denotaremos por P_p^m a respectiva medida de probabilidade, o super-índice m se refere ao fato de trabalharmos no modelo misto. Nos capítulos seguintes, outros modelos aparecerão e a respectiva medida de probabilidade será denotada de maneira diferente, contudo, isto ficará claro no contexto.

Inicialmente, uma pergunta de interesse é sobre o comportamento do conjunto de vértices abertos que está conectado à origem por um caminho de elos e sítios abertos. Mais precisamente, para cada $x \in \mathbb{V}$ seja $C_x = \{y \in \mathbb{V}; y \leftrightarrow x\}$, onde a notação $y \leftrightarrow x$ quer dizer que x está conectado a y, isto é, existe caminho, $\gamma = \langle x, e_1, v_1, ..., e_n, y\rangle$, de elos e sítios todos abertos, aqui e_i é o elo $\langle v_{i-1}, v_i\rangle$, $\forall\ i = 1, ..., n$ $(v_0 = x, v_n = y)$. Em particular, se x está fechado, temos que $C_x = \emptyset$. O conjunto C_x é o aglomerado de sítios de x ou simplesmente o aglomerado de x.

A primeira pergunta a respeito dos aglomerados é sobre a sua cardinalidade, isto é, dado o vértice x, qual a distribuição da variável aleatória $\#C_x$. Em grafos com invariância translacional, as variáveis aleatórias $\#C_x$ têm a mesma distribuição para todo $x \in \mathbb{V}$, portanto podemos concentrar as atenções no aglomerado da origem, C_0, que será denotado simplesmente por C. Usaremos também a notação $(0 \leftrightarrow \infty)$ para o evento $\{\omega \in \Omega; \#C = +\infty\}$.

Mais especificamente, gostaríamos de saber qual a probabilidade de C ser infinito. Para isto, considere a função $\theta^m(p) : [0,1] \to [0,1]$ definida por $\theta^m(p) = P_p^m\{\omega \in \Omega; \#C = \infty\}$. O seguinte resultado é largamente conhecido e caracteriza uma transição de fase no modelo de percolação. Em [8], há uma prova do teorema abaixo no contexto de percolação de elos e sítios.

Teorema 1.1.1 *Seja $G = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$, onde $G = \mathbb{Z}^d$, $d \geq 2$. Então, existe um ponto crítico $p_c(d) \in (0,1)$ tal que*

$$\theta^m(p) \begin{cases} = 0 \ , \ p < p_c(d) \\ > 0 \ , \ p > p_c(d). \end{cases} \tag{1.1}$$

Pela Lei 0-1 de Kolmogorov temos que $\theta^m(p) > 0$ é equivalente ao fato de existir vértice x tal que $\#C_x = \infty$ P_p^m *q.c.* . Portanto o teorema acima nos indica a existência de duas fase distintas: a subcrítica, quando $p < p_c$, caracterizada pela não existência de aglomerado infinito (quase certamente) e a fase supercrítica, quando $p > p_c$ e há (quase certamente) aglomerado infinito.

Uma das perguntas simples de enunciar e difíceis de responder é sobre o comportamento de $\theta^m(p)$ no ponto crítico. Sabemos que, para o modelo homogêneo de elos, $\theta(p_c) = 0$ quando $d = 2$ ([17]) e quando $d \geq 19$ ([14]), o comportamento de $\theta(p_c)$ em outras dimensões continua em aberto até os dias atuais.

Uma última observação é que resultados como o teorema 1.1.1 também são verdadeiros em outros grafos além de $\mathbb{Z}^d$, como por exemplo, no modelo de percolação orientada em $\mathbb{Z}^d_+$. No modelo de percolação orientada, consideramos apenas os caminhos orientados, isto é, aqueles cujos elos são percorridos apenas na direção positiva.

Dados $G = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ e $v_0 \in \mathbb{V}$, definimos a norma do grafo G, com origem em v_0, como a função $\| \ \| : \mathbb{V} \to \mathbb{N}$ definida por $\|v\| = \inf\{|\gamma|; \gamma$ é caminho que liga v_0 a $v\}$, onde $|.|$ é o número de elos do caminho γ; quando o grafo tiver uma origem óbvia iremos dizer simplesmente a norma do grafo sem mencionar a origem. Quando $\mathbb{V} = \mathbb{Z}^d$ ou $\mathbb{Z}^d_+$ usaremos também a norma $\| \ \|_\infty$, definida por $\|v\|_\infty = \max\{|v_i|; i = 1, ..., d\}$, $\forall\ v = (v_1, ..., v_d) \in \mathbb{Z}^d$ ou $\mathbb{Z}^d_+$.

1.2 A desigualdade FKG e a Fórmula de Russo

No conjunto de configurações Ω, considere a seguinte ordem parcial. Sejam $\omega, \omega' \in \Omega$, dizemos que $\omega \preccurlyeq \omega'$ se e somente se $\omega_x \leq \omega'_x$, $\forall\ x \in \mathbb{V} \cup \mathbb{E}$.

Definição 1.2.1 *Dizemos que o evento $A \in \mathcal{A}$ é crescente se para todo $\omega \in A$, temos que $\omega' \in A$, $\forall\ \omega \preccurlyeq \omega'$. Dizemos que o evento A é decrescente se seu complementar é crescente.*

A seguir, enunciaremos dois importantes resultados sobre eventos crescentes, a desigualdade FKG e a Fórmula de Russo. As demonstrações destes resultados podem ser vistas em qualquer uma das referências [11], [12] ou [18] anteriormente citadas.

Teorema 1.2.2 *(Desigualdade FKG) Sejam $A, B \in \mathcal{A}$ eventos ambos crescentes ou ambos decrescentes. Então, temos que*

$$P(A \cap B) \geq P(A)P(B).$$

De fato, a desigualdade FKG é um resultado bastante intuitivo, pois eventos crescentes são aqueles que são favorecidos com a abertura de elos ou sítios, portanto a ocorrência de um evento crescente favorece a ocorrência de outros eventos crescentes.

Definição 1.2.3 *Sejam $x \in \mathbb{V} \cup \mathbb{E}$ um elo ou sítio qualquer, $A \in \mathcal{A}$ um evento qualquer e $\omega \in \Omega$ uma configuração. Dizemos que o elo ou sítio x é pivotal para o par (A, ω), se $\omega \in A$ e $\omega' \notin A$, ou $\omega \notin A$ e $\omega' \in A$, onde ω' é a configuração obtida a partir de ω trocando-se apenas o estado do elo ou sítio x, isto é*

$$\omega'(y) = \begin{cases} \omega(y), & \textit{se } y \neq x \\ 1 - \omega(y), & \textit{se } y = x. \end{cases} \tag{1.2}$$

Teorema 1.2.4 *(A Fórmula de Russo) Sejam A evento crescente que depende apenas de uma quantidade finita de elos e sítios, x um elo ou sítio qualquer e p_x a probabilidade de x estar aberto. Então, temos que*

$$\frac{\partial P(A)}{\partial p_x} = P\{\omega \in \Omega; x \textit{ é pivotal para } (A, \omega)\}.$$

Em particular, para o modelo de percolação homogêneo de elos e sítios, temos que

$$\frac{dP_p^m(A)}{dp} = \mathbb{E}_p[\textit{número de elos e sítios pivotais do evento } A].$$

Capítulo 2

Percolação em meio dependente

2.1 Motivação

De modo geral, ao contrário dos modelos de percolação independente, os modelos de percolação dependente são mais difíceis de serem estudados. A caracterização da transição de fase, quanto à percolação ou não, é bem mais difícil de ser mostrada nos modelos dependentes.

Normalmente, a dependência está associada à aleatoriedade do meio e esta pode se manifestar de diversas maneiras. Os primeiros trabalhos nesta direção foram [24] e [25] que estudaram modelos de Ising bidimensionais em meio aleatório.

Dois exemplos de modelos de percolação dependente são o de percolação na Rede Esticada, introduzido por Jonasson, Mossel e Peres em [16] e o modelo de percolação de sítios orientada dependente, desenvolvido recentemente por Kesten, Sidoravicius e Vares em [19]; ambos serão discutidos nesta tese. No contexto de percolação dependente podemos também citar os trabalhos [1], [21] e [27]. Cabe citar também alguns trabalhos que tratam de questões sobre o processo de contato em meio aleatório, como os artigos [6], [21] e [23].

O objetivo principal deste capítulo é introduzir um modelo de percolação de elos, dependente, em $\mathbb{Z}^2$. Mostraremos que a existência de percolação neste modelo (com mais uma hipótese razoável que será descrita adiante) implica na existência de percolação na Rede Esticada em $d = 2$, fato que é conjecturado em [16]. Em seguida, utilizamos as técnicas desenvolvidas em [19] para provar a existência de percolação no modelo de percolação dependente de elos em $\mathbb{Z}^2$; portanto, provando a conjectura de [16] em que há transição de fase na Rede Esticada em $d = 2$.

2.2 Percolação de elos dependente em $\mathbb{Z}^2$

Considere o seguinte modelo de percolação de elos em $\mathbb{Z}^2$. Para cada $i \in \mathbb{Z}$, os conjuntos de elos $\xi_V^i = \{\langle (x_1, x_2); (y_1, y_2)\rangle \in \mathbb{E}(\mathbb{Z}^2); x_1 = i, y_1 = i+1, x_2 = y_2\}$ e $\xi_H^i = \{\langle (x_1, x_2); (y_1, y_2)\rangle \in \mathbb{E}(\mathbb{Z}^2); x_2 = i, y_2 = i+1, x_1 = y_1\}$ são chamados de i-ésima escada vertical e i-ésima escada horizontal, respectivamente. Dados os parâmetros $\delta, p_1, p_2 \in (0,1), p_1 \leq p_2$, associamos a cada escada o estado boa (ou 0) ou ruim (ou 1), de maneira independente, com probabilidade $1 - \delta$ e δ, respectivamente. Para cada elo $e \in \mathbb{E}(\mathbb{Z}^2)$, seja $\xi(e)$ a escada que contém o elo e. Dada a configuração com os estados de todas as escadas (boas ou ruins), $(X(\xi_V^i))_{i\in\mathbb{Z}}, (X(\xi_H^i))_{i\in\mathbb{Z}}$, atribuimos a cada elo os estados aberto ou fechado (1 ou 0), independentemente, da seguinte maneira:

$$P_{\delta,p_1,p_2}(e \text{ é aberto}|(X(\xi_V^i))_{i\in\mathbb{Z}}, (X(\xi_H^i))_{i\in\mathbb{Z}}) =$$

$$= 1 - P_{\delta,p_1,p_2}(e \text{ é fechado}|(X(\xi_V^i))_{i\in\mathbb{Z}}, (X(\xi_H^i))_{i\in\mathbb{Z}}) = p_2 \ , \quad \text{se } X(\xi(e)) = 0;$$

$$P_{\delta,p_1,p_2}(e \text{ é aberto}|(X(\xi_V^i))_{i\in\mathbb{Z}}, (X(\xi_H^i))_{i\in\mathbb{Z}}) =$$

$$= 1 - P_{\delta,p_1,p_2}(e \text{ é fechado}|(X(\xi_V^i))_{i\in\mathbb{Z}}, (X(\xi_H^i))_{i\in\mathbb{Z}}) = p_1 \ , \quad \text{se } X(\xi(e)) = 1.$$

Para cada elo $e \in \mathbb{E}$, seja Y_e a variável aleatória que indica o estado de cada elo (aberto ou fechado, 1 ou 0, respectivamente), se e e f são elos pertencentes à mesma escada, podemos observar que

$$E_{\delta,p_1,p_2}(Y_e Y_f) - E_{\delta,p_1,p_2}(Y_e)E_{\delta,p_1,p_2}(Y_f) = \delta(1-\delta)(p_1 - p_2)^2 > 0$$

isto é, os estados dos elos situados em uma mesma escada têm correlação positiva, portanto não são variáveis aleatórias independentes; de modo análogo podemos observar que os estados de elos situados em escadas distintas são independentes.

A partir daqui, iremos nos referir ao modelo acima simplesmente por percolação dependente em $\mathbb{Z}^2$. De fato, o caso interessante é quando $p_1 < p_c(\mathbb{Z}^2) < p_2$, neste caso mostraremos a existência de percolação para δ suficientemente pequeno. Este é o resultado principal da tese.

Teorema 2.2.1 *Existe $\widehat{p_2} < 1$, tal que $\forall\ p_1 > 0, \forall\ p_2 > \widehat{p_2}$, existe $\widehat{\delta}(p_1, p_2)$ com a propriedade que $\forall\ \delta < \widehat{\delta}(p_1, p_2)$ temos que $P_{\delta, p_1, p_2}(0 \leftrightarrow \infty) > 0$ no modelo de percolação dependente em $\mathbb{Z}^2$.*

Em [16], é provado resultado análogo ao teorema acima, no contexto de percolação orientada em $\mathbb{Z}_+^d$, com $d \geq 3$.

Na realidade, a prova do teorema acima nos permite concluir algo um pouco mais forte. A prova indicará que o aglomerado infinito (que contém a origem) atravessa todos os feixes de escadas ruins segundo uma linha reta; isto é, ao atravessar um feixe de escadas ruins consecutivas, o aglomerado utiliza apenas os elos deste feixe. Isto por sua vez nos permite mostrar a conjectura contida em [16] para a Rede Esticada em $d = 2$, conforme descreveremos a seguir.

2.2.1 Percolação na Rede Esticada

Percolação na Rede Esticada é um modelo de percolação em meio dependente, introduzido em [16], descrito da seguinte maneira: em $\mathbb{R}^d$, para cada um dos d eixos coordenados, realize processos de Poisson independentes, todos com a mesma intensidade λ. No primeiro eixo, em cada ponto do processo de Poisson construa um hiperplano de codimensão 1 perpendicular ao eixo, repita este procedimento para todos os d eixos coordenados. Após isto, temos que o espaço $\mathbb{R}^d$ é dividido em diversos paralelepípedos; a Rede Esticada é o grafo cujos vértices e elos são os vértices e elos destes paralelepípedos, sem perda de generalidade, podemos supor que a origem da Rede Esticada é o vértice situado no primeiro octante de $\mathbb{R}^d$ mais próximo da origem de $\mathbb{R}^d$. Observe que a Rede Esticada é um grafo isomorfo a $\mathbb{Z}^d$ e cada paralelepípedo tem arestas (elos) cujo comprimento é uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro λ.

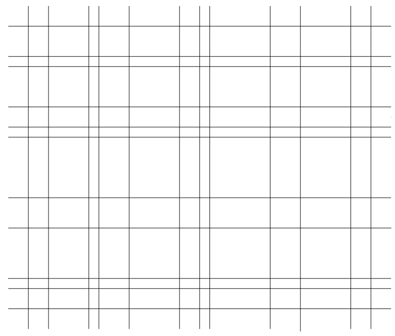

Figura 2.1: Um trecho da Rede Esticada

Além disso, temos a seguinte relação de dependência entre os comprimentos dos elos, seja $(L_e)_{e\in\mathbb{E}}$ a seqüência de comprimentos dos elos, então temos que $L_e \sim \exp(\lambda)$ $\forall e \in \mathbb{E}$, $L_e = L_{e'}$ se e somente se e' pode ser obtido como uma translação de e, ortogonal a reta que contém e; caso contrário, temos que L_e e $L_{e'}$ são independentes.

Dados os comprimentos de todos os elos, $(L_e)_{e\in\mathbb{E}}$, definimos o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P_L)$, onde $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{E}}$, $\mathcal{A} = \sigma(cilindros)$ e P_L é a medida produto, onde para cada elo definimos a probabilidade marginal do elo estar aberto ou fechado (1 ou 0) da seguinte maneira:

$$P_L(e \text{ é aberto}) = \exp(-L_e) = 1 - P_L(e \text{ é fechado}).$$

Ou seja, dada a configuração dos comprimentos de cada elo da Rede Esticada, os estados, aberto ou fechado, de cada elo são variáveis aleatórias independentes. Porém, desconhecidos os comprimentos de cada elo, podemos ver que os estados, aberto ou fechado, de dois elos, que podem ser obtidos um através do outro por uma translação ortogonal à reta que contém o primeiro, têm correlação positiva. A partir daqui, para a Rede Esticada usaremos as notações $P_{\lambda,L}$ e P_λ para as medidas de probabilidade condicionada à configuração (comprimento dos elos) e não condicionada à configuração, respectivamente. Abaixo, temos um resultado contido em [16], cuja prova será omitida, que caracteriza uma transição de fase na Rede Esticada.

Teorema 2.2.2 *Considere a Rede Esticada d-dimensional, então:*

$$i) \qquad \forall d \geq 2 \quad P_\lambda(0 \leftrightarrow \infty) = 0, \ \ se \ \lambda \leq \frac{1}{d-1};$$

$$ii) \ \forall d \geq 3 \quad P_\lambda(0 \leftrightarrow \infty) > 0, \ \ se \ \lambda \text{ é suficientemente grande.}$$

Portanto, para $d \geq 3$, o teorema acima mostra uma transição de fase em λ. O fato crucial da prova do ítem *ii)* do teorema anterior funcionar apenas em $d \geq 3$, tem a ver com a seguinte definição:

Definição 2.2.3 *i) Sejam $G = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ um grafo e $v_0 \in \mathbb{V}$, denotaremos por $\Upsilon(G, v_0)$ a coleção de todos os caminhos, φ, infinitos, sem auto-interseção, que partem de v_0 e cujo n-ésimo vértice de φ dista exatamente n de v_0 (na métrica do grafo).*
ii) Dado $0 < \nu < 1$, dizemos que uma medida de probabilidade μ em $\Upsilon(G, v_0)$ tem interseção de caudas com decaimento exponencial com parâmetro ν (notação EIT(ν)), se existe constante positiva C, tal que $\mu \times \mu\{(\varphi, \psi); |\varphi \cap \psi| \geq n\} \leq C\nu^n$, onde $|\varphi \cap \psi|$ é o número de elos em comum entre os caminhos φ e ψ.

Na prova da parte *ii)* do teorema anterior, o seguinte lema é essencial.

Lema 2.2.4 *Para todo $d \geq 3$, existe $\nu(d) < 1$ e uma medida de probabilidade suportada em $\Upsilon(G, v_0)$, tal que μ é EIT($\nu(d)$).*

Quando $d \geq 4$, [9] mostra que a medida uniforme é EIT, a prova da existência de medida EIT $d = 3$ é feito em [4] e quando $d = 2$ [16] observa que não existe medida EIT. Portanto, os métodos do artigo [16] para a parte *ii)* do teorema anterior se aplicam somente quando $d \geq 3$.

Conforme mencionado anteriormente, a prova da conjectura de que há transição de fase na Rede Esticada em $d = 2$ é uma conseqüência do teorema 2.2.1, com a restrição adicional que o aglomerado infinito atravessa os feixes de escadas ruins segundo uma linha reta. Este é o conteúdo do próximo teorema.

Teorema 2.2.5 *Existe λ suficientemente grande tal que há percolação na Rede Esticada bidimensional, isto é, $P_\lambda(0 \leftrightarrow \infty) > 0$.*

Demonstração: Tome p tal que $\widehat{p_2} < p < 1$, onde $\widehat{p_2}$ é dado pelo teorema 2.2.1. Na Rede Esticada, dizemos que um elo é de classe n se $-n \log p \leq L_e < -(n+1) \log p$. Portanto,

$$p^{n+1} < P_\lambda(e \text{ está aberto}|e \text{ é de classe } n) \leq p^n$$

se $n = 0$ dizemos que o elo é bom, se $n \geq 1$ dizemos que o elo é ruim de classe n.

A Rede de Transição é o grafo formado a partir da Rede Esticada, introduzindo $n - 1$ vértices em cada elo ruim de classe n, de modo que cada elo ruim de classe n é substituido por n elos ruins de classe 1. Dado o grafo da Rede de Transição, os elos estão abertos ou fechados independentemente, sendo que a probabilidade de estar aberto é p ou p^2, nos casos do elo ser bom ou ruim, respectivamente.

Como a probabilidade de um elo bom na Rede Esticada estar aberto é $\exp(-L_e) \geq p$ e de um elo ruim de classe n estar aberto é $\exp(-L_e) \geq p^{n+1} \geq (p^2)^n, \forall\ n \geq 1$, podemos comparar os dois processos de modo que percolação na Rede de Transição implique em percolação na Rede Esticada.

Seja $\delta = \widehat{\delta}(p^2, p)$ dado pelo teorema 2.2.1 com $p_1 = p^2$ e $p_2 = p$. Com estes parâmetros, o teorema 2.2.1 nos garante percolação no modelo de percolação dependente em $\mathbb{Z}^2$, com o aglomerado atravessando os feixes de escadas ruins consecutivas segundo uma linha reta. Então podemos comparar os modelos de percolação de elos dependente em $\mathbb{Z}^2$ (com parâmetros $p_1 = p^2$, $p_2 = p$ e δ) e a Rede de Transição, de modo que percolação dependente de elos em $\mathbb{Z}^2$ implique em percolação na Rede de Transição.

Seja x um vértice da Rede de Transição em que se inicia uma seqüência de elos ruins, adjacentes e colineares; como estamos supondo que o aglomerado infinito no modelo de percolação dependente atravessa segundo uma linha reta os feixes de escadas ruins consecutivas, basta verificar que a probabilidade do evento $A_{x,n}$ em que esta seqüência de elos ruins, adjacentes e colineares que se inicia a partir do vértice x é formada por exatamente n elos ruins não é superior a probabilidade de termos um bloco de exatamente n escadas ruins consecutivas se iniciando a partir de um vértice fixo no modelo de percolação de elos em $\mathbb{Z}^2$, isto é:

$$P_{RT}(A_{x,n}) \leq \delta^n(1-\delta),\ \forall\ n \geq 1, \tag{2.1}$$

onde P_{RT} é a medida de probabilidade da Rede de Transição. O que implica que as possíveis configurações de elos bons e ruins na Rede de Transição dominam estocasticamente as configurações de elos bons e ruins em $\mathbb{Z}^2$, isto é, podemos acoplar as configurações de elos bons e ruins em ambos os grafos de modo que elo ruim na Rede de Transição implique que o elo correspondente em $\mathbb{Z}^2$ também seja ruim.

Então, para concluir a demonstração basta mostrar que existe λ suficientemente grande tal que 2.1 seja verdadeira. De fato:

$$P_{RT}(A_{x,n}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{x_1+\ldots+x_i=n;x_j\geq 1} P_\lambda(e \text{ é bom na Rede Esticada}) \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{i} P_\lambda(e \text{ é ruim de classe } x_j \text{ na Rede Esticada}).$$

Como

$$P_\lambda(e \text{ é ruim de classe } n \text{ na Rede Esticada}) = P(-n\log p \leq \exp(-L_e) < -(n+1)\log p) =$$

$$= \int_{-n\log p}^{-(n+1)\log p} \lambda e^{-\lambda x} dx = (p^\lambda)^n(1-p^\lambda).$$

Portanto,

$$P_{RT}(A_{x,n}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{x_1+\ldots+x_i=n;x_j\geq 1} (1-p^\lambda) \prod_{j=1}^{i} [(p^\lambda)^{x_j}(1-p^\lambda)] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (p^\lambda)^n (1-p^\lambda)^{i+1} \binom{n-1}{i-1} = (p^\lambda)^n(1-p^\lambda)^2 \sum_{i=0}^{n-1} (1-p^\lambda)^i \binom{n-1}{i} =$$

$$= (p^\lambda)^n(1-p^\lambda)^2(2-p^\lambda)^{n-1} = [p^\lambda(2-p^\lambda)]^n \frac{(1-p^\lambda)^2}{2-p^\lambda} \leq$$

$$\leq [p^\lambda(2-p^\lambda)]^n(1-p^\lambda)^2 = [p^\lambda(2-p^\lambda)]^n[1-p^\lambda(2-p^\lambda)] \leq \delta^n(1-\delta)$$

sempre que $p^\lambda(2-p^\lambda) < \delta$ (é claro que estamos supondo $\delta < \frac{1}{2}$).

Então, basta tomar λ suficientemente grande tal que $p^\lambda(2-p^\lambda) < \widehat{\delta}(p^2, p)$. □

2.2.2 Percolação na Rede Hierárquica

A prova do teorema 2.2.1 consiste em agrupar os feixes de escadas ruins consecutivas de modo que cada agrupamento possa ser tratado como um único feixe de escadas ruins consecutivas (este agrupamento será descrito na próxima seção) e mostrar como atravessar este agrupamento de escadas de maneira adequada. Faremos isto, via uma renormalização em múlti-escala. Com o objetivo de mostrar uma das idéias básicas da prova do teorema 2.2.1 que é a renormalização em múlti-escala, provaremos inicialmente um resultado análogo ao teorema 2.2.1 em um contexto diferente. Diferentemente do teorema 2.2.1, onde a configuração de escadas boas e ruins é aleatória (distribuição de Bernoulli), mostraremos o caso em que cada escada de $\mathbb{Z}^2$ é boa ou ruim de modo determinístico, isto é, associaremos um padrão hierárquico de escadas boas ou ruins conforme as definições a seguir.

Definição 2.2.6 (A seqüência hierárquica) *Seja $M \geq 3$ inteiro ímpar. Considere a seqüência infinita $\tilde{\eta}^M = (\tilde{\eta}^M_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$ definida por*

$$\tilde{\eta}^M_j = \begin{cases} \max\{k \in \mathbb{N}; M^k | (1 + j + \frac{M-1}{2}\sum_{i=1}^k M^{i-1})\}\ ,\ se\ j \geq 0 \\ \max\{k \in \mathbb{N}; M^k | (-j + \frac{M-1}{2}\sum_{i=1}^k M^{i-1})\}\ ,\ se\ j < 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

A seqüência hierárquica, $\eta^M = (\eta^M_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$, é a seqüência binária obtida a partir de $\tilde{\eta}^M$ trocando cada elemento $\tilde{\eta}^M_j = k,\ k \geq 2$ de $\tilde{\eta}^M$ por um bloco de k 1's consecutivos. Isto é, no lugar onde aparece um elemento $\tilde{\eta}^M_j = k,\ k \geq 2,\ j > 0$ nós o removemos e inserimos um bloco de k 1's consecutivos, transladando a parte $(\tilde{\eta}^M_i)_{i\geq j+1}$ da seqüência original, $\tilde{\eta}^M$, por $k-1$ unidades à direita; analogamente, no lugar onde aparece um elemento $\tilde{\eta}^M_j = k,\ k \geq 2,\ j < 0$ nós o removemos e inserimos um bloco de k 1's consecutivos, transladando a parte $(\tilde{\eta}^M_i)_{i\leq j-1}$ da seqüência original, $\tilde{\eta}^M$, por $k-1$ unidades à esquerda.

Definição 2.2.7 (A Rede Hierárquica) *Seja $M \geq 3$ inteiro ímpar. A cada escada de $\mathbb{Z}^2$, ξ, iremos associar a variável de estado, $X(\xi)$, que assume os valores boa ou ruim (0 ou 1, respectivamente) de acordo com a seguinte regra determinística:*

$$X(\xi_V(j)) = X(\xi_H(j)) = \eta_j^M, \ \forall \ j \in \mathbb{Z}$$

onde $\eta^M = (\eta_j^M)_{j\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$ é a seqüência hierárquica definida anteriormente. Cometeremos o abuso de notação em denotar o grafo $\mathbb{Z}^2$ com a configuração de escadas boas e ruins descrita acima como Rede Hierárquica com parâmetro M ou simplesmente, Rede Hierárquica.

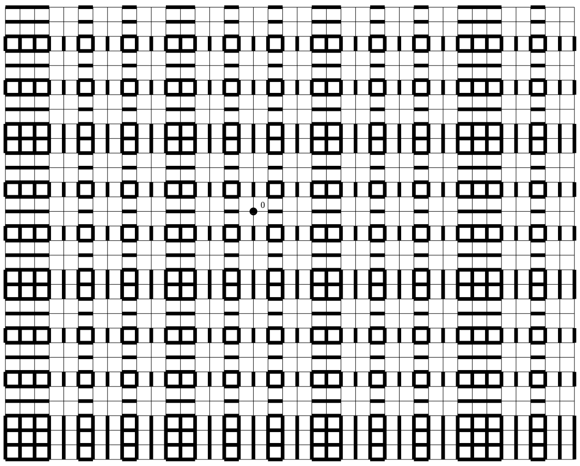

Figura 2.2: Um trecho da Rede Hierárquica. Os traços mais escuros representam as escadas ruins.

A figura acima mostra a Rede Hierárquica no caso $M = 3$.

O modelo de percolação de elos no grafo acima, onde os elos são declarados abertos ou fechados de maneira independente e com probabilidade de cada elo estar aberto igual a p_1 ou p_2, dependendo do elo pertencer a uma escada ruim ou boa, respectivamente, será chamado de percolação na Rede Hierárquica com parâmetro M e a respectiva medida de probabilidade será denotada por P_{M,p_1,p_2}.

O resultado a seguir é análogo ao teorema 2.2.1 no contexto de percolação na Rede Hierárquica.

Teorema 2.2.8 *Existe $\widetilde{p_2} < 1$, tal que $\forall \ p_1 > 0, \forall \ p_2 > \widetilde{p_2}$, existe $M = M(p_1, p_2)$ grande o suficiente de modo que $P_{M,p_1,p_2}(0 \leftrightarrow \infty) > 0$.*

Antes de demonstrarmos o teorema 2.2.8, provaremos uma proposição sobre cruzamentos na fase supercrítica e outra proposição sobre o comportamento da função $\theta^m(p)$

que é um corolário da Fórmula de Russo, ambas as proposições serão usadas na prova do teorema seguinte.

Seja $(\theta^m)'^{,-}(p)$ a derivada à esquerda da função $\theta^m(p)$ no ponto p, então:

Proposição 2.2.9 *Para o modelo homogêneo de percolação de elos e sítios em $\mathbb{Z}^2$, temos que $(\theta^m)'^{,-}(1) = 0$. Em particular, temos que existe $p^* < 1$ tal que $\theta^m(p) \geq p$, $\forall\ p \geq p^*$.*

Demonstração:

Sejam $B_n = \{x \in \mathbb{V}; \|x\| \leq n\}$ e $\partial B_n = \{x \in \mathbb{V}; \|x\| = n\}$, onde a norma $\|.\|$ é a norma do grafo, e $A_n = \{\omega \in \Omega; 0 \leftrightarrow \partial B_n\}$. Temos que $A_{n+1} \subset A_n$, $\forall\ n$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0 \leftrightarrow \infty\}$ e cada um dos eventos A_n é crescente. Portanto, se considerarmos as funções $f_n(p) = \frac{P_p^m(A_n)}{1-p}$, temos que $f_n(p) \to \frac{\theta^m(p)}{1-p}$ pontualmente, $\forall\ p \in [0,1)$, quando $n \to +\infty$. Afirmo que existe $p_0 < 1$ tal que $f_n(p) \to \frac{\theta^m(p)}{1-p}$ uniformemente em todo intervalo $[p_0, 1)$. Para isto é suficiente mostrar que a seqüência $(f_n(p))_n$ é uniformemente de Cauchy em todo o intervalo $[p_0, 1)$.

Ou seja, mostraremos que existe $p_0 < 1$ de modo que, para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\epsilon)$ tal que $f_n(p) - f_m(p) \leq \epsilon$, $\forall\ m \geq n \geq n_0$, $\forall\ p \in [p_0, 1]$. Temos que

$$f_n(p) - f_m(p) \leq \frac{P_p(A_{n_0} \backslash \{0 \leftrightarrow \infty)\}}{1-p} \leq \frac{1}{1-p} \sum_{i=4n_0}^{\infty} C^i (1-p)^i$$

A última desigualdade foi obtida via argumento tipo Peierls, C^i é uma cota superior para o número de circuitos de elos e sítios contendo a origem e formadas por i elos e sítios da rede dual (no caso de percolação de elos e sítios em $\mathbb{Z}^2$ podemos tomar $C = 8$), e $(1-p)^i$ é a probabilidade de cada um destes circuitos serem formados apenas por elos e sítios fechados (maiores detalhes sobre o argumento de Peierls veja [11],[12] ou [18]). Tomando $p_0 = 1 - \frac{1}{2C}$, para todo $p \in [p_0, 1)$ temos:

$$f_n(p) - f_m(p) \leq \frac{C[C(1-p)]^{4n_0-1}}{1 - [C(1-p)]} \leq C(\frac{1}{2})^{4n_0-2}$$

Então, dado $\epsilon > 0$, basta tomar n_0 grande o suficiente, de modo que $C(\frac{1}{2})^{4n_0-2} < \epsilon$. Isto mostra a convergência uniforme da seqüência $(f_n(p))_n$ em todo intervalo $[p_0, 1)$, logo $\theta^m(p)$ é contínua em $[p_0, 1)$, pois são contínuas as funções $f_n(p)$.

Pela definição de derivada à esquerda, temos que

$$(\theta^m)'^{,-}(1) = \lim_{p \to 1^-} \frac{\theta^m(1) - \theta^m(p)}{1-p} \ =$$

$$= \lim_{p \to 1^-} \lim_{n \to +\infty} \frac{1 - P_p(A_n)}{1-p} = \lim_{n \to +\infty} \lim_{p \to 1^-} \frac{1 - P_p(A_n)}{1-p} \ =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}_1^m[\# \text{ elos e sítios pivotais no evento } A_n] = 0.$$

A antepenúltima igualdade segue da convergência uniforme; a penúltima, da Fórmula de Russo e a última, da observação que quando $p = 1$, o número de elos e sítios pivotais, para o evento A_n, é zero $\forall\ n$.

Seja $i(p) = p$ a função identidade, como $\theta^m(p)$ e $i(p)$ são ambas contínuas e $\theta^m(1) = i(1) = 1$, a conclusão final do teorema segue do fato que $(\theta^m)'^{,-}(1) = 0 < 1 = i'(1)$. $\square$

Observe que $p^* > \frac{1}{2}$, pois uma vez que $p_c > \frac{1}{2}$, temos que $\theta^m(\frac{1}{2}) = 0$.

Sejam $\frac{3}{4} < x < 1$, $N > 0$ fixo e $\mathcal{R}_N$ o conjunto de todos os retângulos R cujos lados têm pelo menos N sítios e no máximo $6N - 1$ sítios. Seja A_R o evento em que existe aglomerado de sítios e elos abertos dentro de R, que contém em cada lado da fronteira de R pelo menos xl sítios abertos, onde l é o número de sítios do lado em questão; e este mesmo aglomerado contém um circuito de elos e sítios abertos em torno do centro do retângulo. Definimos a função $f_N(p)$ como

$$f_N(p) = \inf_{R\in\mathcal{R}_N} P_p^m(A_R).$$

Proposição 2.2.10 *Seja $\frac{3}{4} < x < 1$. Então existe $p(x)$, suficientemente próximo de 1, tal que*

$$\lim_{N\to+\infty} f_N(p) = 1$$

para todo $p \geq p(x)$.

Demonstração: Sejam Q_N o quadrado de $N \times N$ sítios, $B_{Q_N}^{ed}$ o evento em que há pelo menos $xN + 1$ caminhos disjuntos de elos e sítios abertos, conectando os lados esquerdo e direito de Q_N e $B_{Q_N}^{cb}$ o evento em que há pelo menos $xN + 1$ caminhos disjuntos de elos e sítios abertos, conectando os lados de cima e de baixo de Q_N.

Na seção 2.6 de [12], a equação 2.47 implica que existe $p(x)$, suficientemente próximo de 1, de modo que $\forall\ p \geq p(x)$,

$$\lim_{N\to+\infty} P_p^m(B_{Q_N}^i) = 1,\ i = ed, cb.$$

Observe que a equação 2.47 de [12] se refere ao modelo de percolação de elos, porém pequenas modificações nos permitem concluir o mesmo para o modelo de percolação de elos e sítios.

Então, $\forall \epsilon > 0,\ \exists\ N_0$ tal que

$$P_p^m(B_{Q_N}^i) > 1 - \frac{\epsilon}{7},\ \forall\ N \geq N_0,\ \forall\ p \geq p(x).$$

Dado $R \in \mathcal{R}_{N_0}$, podemos supor que l e L, os comprimentos dos lados menor e maior de R, correspondem aos lados verticais e horizontais, respectivamente. Seja $i = \lfloor \frac{L}{l} \rfloor + 1 \leq 6$, onde $\lfloor x \rfloor$ denota a parte inteira de x. Podemos supor, sem perda de generalidade, que os vértices de R têm coordenadas $(0,0), (0,l), (L,l)$ e $(L,0)$. Sejam Q_L o quadrado cujos vértices têm coordenadas $(0,0), (0,L), (L,L)$ e $(L,0)$; Q_l^j, $\forall\, j = 1, \ldots, i-1$ os quadrados cujos vértices têm coordenadas $((j-1)l, 0), ((j-1)l, l), (jl, l)$ e $(jl, 0)$, respectivamente, e Q_l^i o quadrado cujos vértices têm coordenadas $(L-l, 0), (L-l, l), (L, l)$ e $(L, 0)$.

Observando que $B_{Q_L}^{cb} \cap \left(\cap_{j=1}^{i} B_{Q_l^j}^{ed} \right) \subset A_R$, pois como $\frac{3}{4} < x < 1$ a ocorrência do evento $\cap_{j=1}^{i} B_{Q_l^j}^{ed}$ implica que no retângulo R há pelo menos um cruzamento de elos e sítios abertos, conectando os lados esquerdo e direito de R e passando por cima do sítio central de R e há pelo menos outro cruzamento de elos e sítios abertos, conectando os lados esquerdo e direito de R e passando por baixo do sítio central de R; isto juntamente com a ocorrência do evento $B_{Q_L}^{cb}$ irá garantir que o aglomerado de elos e sítios de R contém um circuito em torno do centro de R. Logo, usando a desigualdade FKG temos que

$$P_p^m(A_R) \geq P_p^m \left(B_{Q_L}^{cb} \cap \left(\cap_{j=1}^{i} B_{Q_l^j}^{ed} \right) \right) \geq \left(1 - \frac{\epsilon}{7} \right)^7 \geq 1 - \epsilon, \ \forall R \in \mathcal{R}_{N_0}, \ \forall\, p \geq p(x)$$

portanto, $\forall \epsilon > 0, \ \exists\, N_0$ tal que $\forall\, N \geq N_0$ vale

$$f_N(p) = \inf_{R \in \mathcal{R}_N} P_p^m(A_R) > 1 - \epsilon.$$

$\square$

Observe que no evento A_R definido acima, há um aglomerado que contém pelo menos xl (l é o número de sítios da face) vértices de cada face do retângulo e, ou a origem pertence a este aglomerado ou este aglomerado possui circuito fechado de elos e sítios abertos em torno da origem. De modo que, se a origem pertence a um aglomerado infinito, então necessariamente ela está conectada à rede de cruzamentos abertos do evento A_R em questão.

Demonstração do teorema 2.2.8: Para a Rede Hierárquica com parâmetro M, definiremos a caixa de k-ésimo nível, ou k-caixa, como a parte do grafo $\mathbb{Z}^2$ formada pelos elos e sítios contidos no interior da região quadrada compreendida entre quatro feixes, 2 horizontais consecutivos e 2 verticais consecutivos, de pelo menos k escadas ruins consecutivas.

Mostraremos que com as hipóteses do teorema, existe M grande o suficiente de modo que, com probabilidade estritamente positiva, o aglomerado da origem toca a fronteira de todas as k-caixas que contém a origem em seu interior, $\forall k \geq 1$, o que implica no aglomerado da origem ser infinito.

A partir daqui, será útil nesta demostração, considerarmos o modelo de percolação de elos e sítios, onde tanto elos e sítios podem estar abertos ou fechados independentemente, com probabilidade de estarem abertos iguais a a e b, respectivamente. Denotaremos por $P^m_{a,b}$ a medida de probabilidade deste modelo, $\theta^m(a,b) = P^m_{a,b}(0 \leftrightarrow \infty | 0 \text{ é aberto})$ e $\theta^m(p) = P^m_{p,p}(0 \leftrightarrow \infty | 0 \text{ é aberto})$.

Sejam x, ψ e p' tais que $\frac{3}{4} < x < 1$, $\psi = 2x - 1 > \frac{1}{2}$ e $p' = \max\{p^*, p(x)\}$, onde p^* e $p(x)$ são dados pelas proposições 2.2.9 e 2.2.10, respectivamente, como $p_c > \frac{1}{2}$, temos que $\theta^m(p') > \frac{1}{2}$. Seja $y' = -\ln(1-p')$, podemos supor que $y' \geq 1$, caso contrário faça $p' = 1 - e^{-1}$. Agora, seja A_{Q_M} o seguinte evento, já definido antes da proposição 2.2.10, dentro de um quadrado $M \times M$ sítios, o aglomerado de elos e sítios abertos toca pelo menos xM sítios de cada lado da fronteira e este mesmo aglomerado ou contém o centro do quadrado ou possui um circuito de elos e sítios abertos em torno do centro do quadrado. Caso este aglomerado exista, será denotado por aglomerado principal.

Seja $h_M(p) = P^m_p(A_M)$. Devido a proposição 2.2.10 podemos escolher M, grande o suficiente, de modo que satisfaça as duas condições abaixo:

$$i)\ h_M(p') > 1 - \exp(-2y');$$

$$ii)\ p_1 M\psi \geq y'.$$

Considere a função $h_M(p)$, afirmo que existe p'' suficientemente próximo de 1 de modo que $h_M(p) \geq g(p) = 1 - \exp(-y')(1-p)$, $\forall\ p \geq p''$. De fato, como $h_M(p)$ e $g(p)$ são contínuas, $h_M(1) = g(1) = 1$ e $g'(p) = \exp(-y')$, pela Fórmula de Russo temos que

$$h'_M(p) = \mathbb{E}_p[\#\text{elementos pivotais(sítios+elos) de } A_{Q_M}]$$

logo $h'_M(p) \to 0$ quando $p \to 1$. Então, basta escolher p'' suficientemente próximo de 1 de modo que $h'_M(p) < \exp(-y')$, $\forall p \geq p''$.

Por outro lado, seja C_n o evento em que o aglomerado da origem toca pelo menos $(xM)^n$ sítios em cada lado do quadrado compreendido entre os 4 feixes de n escadas ruins consecutivas mais próximas da origem.

Observando que $(0 \leftrightarrow +\infty) \supseteq \cap C_n$, temos que

$$P_{M,p_1,p_2}(0 \leftrightarrow +\infty) \geq P_{M,p_1,p_2}(\cap C_n) \geq \lim_{n\to+\infty} \prod_{i=1}^{n} P_{M,p_1,p_2}(C_i).$$

Onde a última desigualdade é devido à desigualdade FKG. Então, é suficiente mostrar que

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{i=1}^{n} P_{M,p_1,p_2}(C_i) > 0.$$

Para calcular o limite acima, iremos fazer uma renormalização em múlti-escala. Consideremos dois casos, primeiro quando $p' \geq p''$.

Tome $p_2 > p'$, para calcular $P_{M,p_1,p_2}(C_1)$ iremos considerar o evento C_1 em um modelo de percolação independente de elos e sítios (do nível 0), cujas probabilidades de estarem abertos são $a_0 = p_2$ e $b_0 = 1$, respectivamente. Portanto

$$P_{M,p_1,p_2}(C_1) \geq P^m_{p_2,1}(A_{Q_M} \cap \{0 \leftrightarrow \partial B(M)\}) \ \geq$$

$$\geq \ P^m_{p_2,1}(0 \leftrightarrow \partial B(M)) \ P^m_{p_2,1}(A_{Q_M}) \geq \theta^m(p_2) \ h_M(p_2) \ \geq$$

$$\geq \ p_2 h_M(p_2) \geq (1 - e^{-y'})(1 - e^{-2y'}).$$

O evento C_2 será considerado em um modelo de percolação (não necessariamente independente) de elos e sítios. Cada sítio (do nível 1) é representado pelos elos e sítios do quadrado de $M \times M$ sítios do nível 0 de uma 1-caixa. Cada sítio do nível 1 é dito aberto se o evento A_{Q_M} ocorre na respectiva 1-caixa. Se b_1 é a probabilidade de um sítio do nível 1 estar aberto, temos que

$$b_1 \geq h_M(p_2) \geq 1 - e^{-2y'}.$$

Na região de interesse para o evento C_2, cada elo do nível 1 é representado pelo trecho da escada ruim que separa sítios (do nível 1) adjacentes. Caso estes dois sítios (do nível 1) adjacentes sejam abertos, declaramos o elo (do nível 1) que os une como aberto se existe algum elo (do nível 0) aberto fazendo a ligação entre os aglomerados principais de ambos os sítios (do nível 1).

Aqui cabe uma observação que irá persistir em todos os níveis, observe que os sítios (do nível 1) estão abertos ou fechados independentemente, pois para cada sítio o evento o sítio é aberto depende dos estados de elos (do nível 0) de regiões disjuntas de $\mathbb{Z}^2$, todavia o estado aberto ou fechado para cada elo (do nível 1) é uma variável aleatória que depende dos estados dos elos (de nível 0) contidos nos respectivos sítios (do nível 1) que são unidos pelo elo de nível 1 em questão. Porém, se a_1 é a probabilidade de um elo (do nível 1) estar aberto condicionado ao fato que os sítios (de nível 1) que este elo une são abertos, temos que

$$a_1 \geq 1 - (1 - p_1)^{\psi M} \geq 1 - \exp[-p_1 \psi M] \geq 1 - e^{-y'}.$$

Caso pelo menos um dos sítios (de nível 1) adjacentes esteja fechado, não precisamos verificar o estado do elo (de nível 1) que os une, logo sua probabilidade de estar aberto pode ser definda arbitrariamente. Portanto tal modelo de percolação dependente domina estocasticamente o modelo de percolação independente de elos e sítios com probabilidade de estarem abertos iguais a a_1 e b_1, respectivamente; aqui por dominar estocasticamente entendemos que o número de sítios do aglomerado da origem no primeiro modelo não é inferior ao número de sítios do aglomerado da origem no segundo. Portanto

$$P_{M,p_1,p_2}(C_2) \geq P^m_{a_1,b_1}(A_{Q_M} \cap \{0 \leftrightarrow \partial B(M)\}) \ \geq$$

$$\geq \ P^m_{a_1,b_1}(0 \leftrightarrow \partial B(M)) \ P^m_{a_1,b_1}(A_{Q_M}) \geq \theta^m(1 - e^{-y'}) \ h_M(1 - e^{-y'}) \geq (1 - e^{-y'})(1 - e^{-2y'}).$$

Na região de interesse para o evento C_3, cada sítio do nível 2 é representado pelos elos e sítios do quadrado de $M \times M$ sítios do nível 1 de uma 2-caixa. Cada sítio do nível 2 é aberto se o evento A_{Q_M} ocorre na respectiva 2-caixa. Neste caso, se b_2 é a probabilidade de tal sítio (do nível 2) estar aberto, temos que

$$b_2 \geq P^m_{a_1,b_1}(A_{Q_M}) \geq h_M(1 - e^{-y'}) \geq 1 - e^{-2y'}.$$

Cada elo do nível 2 é representado pelo trecho do feixe de 2 escadas ruins consecutivas que separa os 2 sítios (do nível 2) adjacentes. Caso estes dois sítios sejam abertos declaramos o elo (do nível 2) que os une como aberto se existem 2 elos (do nível 0), adjacentes, contidos no feixe de escadas ruins e ambos abertos, estes elos fazendo a ligação entre os aglomerados principais dos sítios do nível 2. Como no nível 1, pelos mesmos motivos, os sítios de nível 2 estão abertos independentemente, mas o estado aberto ou fechado para cada elo (do nível 2) é uma variável aleatória que depende dos estados dos elos e sítios (de nível 1) contidos nos respectivos sítios (do nível 2) que são unidos pelo elo de nível 2 em questão. Porém, se a_2 é a probabilidade de tal elo (do nível 2) estar aberto condicionado ao fato que os sítios (de nível 2) que este elo une estão abertos, temos que

$$a_2 \geq 1 - (1 - p_1^2)^{(\psi M)^2} \geq 1 - \exp[-(p_1 \psi M)^2] \geq 1 - e^{-2y'}.$$

Como no nível anterior, caso pelo menos um dos sítios (de nível 2) adjacentes esteja fechado, não precisamos verificar o estado do elo que os une, logo sua probabilidade de estar aberto pode ser definda arbitrariamente. Portanto tal modelo de percolação dependente domina estocasticamente o modelo de percolação independente de elos e sítios com probabilidade de estarem abertos iguais a a_2 e b_2, respectivamente. Portanto

$$P_{M,p_1,p_2}(C_3) \geq P^m_{a_2,b_2}(A_{Q_M} \cap \{0 \leftrightarrow \partial B(M)\}) \ \geq$$

$$\geq \ P^m_{a_2,b_2}(0 \leftrightarrow \partial B(M)) \ P^m_{a_2,b_2}(A_{Q_M}) \ \geq$$

$$\geq\ \theta^m(1-e^{-2y'})\ h_M(1-e^{-2y'}) \geq (1-e^{-2y'})(1-e^{-3y'}).$$

Procedendo desta maneira, por indução, temos que para o evento C_{k+1} cada sítio do nível k é representado pelos elos e sítios do quadrado de $M \times M$ sítios do nível $k-1$ de uma k-caixa. De maneira análoga, cada sítio do nível k está aberto se ocorre o evento A_{Q_M} na respectivamente k-caixa. Neste caso, se b_k é a probabilidade de um sítio do nível k estar aberto, temos que

$$b_k \geq P^m_{a_{k-1},b_{k-1}}(A_{Q_M}) \geq h_M(1-e^{-(k-1)y'}) \geq 1-e^{-ky'}.$$

Cada elo do nível k é representado pelo trecho do feixe de k escadas ruins consecutivas que separa um par de sítios (do nível k) adjacentes. Caso estes 2 sítios (do nível k) sejam abertos declaramos o elo (do nível k) que os une como aberto se existem k elos (do nível 0), adjacentes, contidos no feixe de escadas ruins e todos abertos, estes k elos fazendo a ligação entre os aglomerados principais dos sítios do nível k. Como nos níveis anteriores, pelos mesmos motivos, os sítios de nível k estão abertos independentemente, mas o estado aberto ou fechado para cada elo (do nível k) é uma variável aleatória que depende dos estados dos elos e sítios (de nível $k-1$) contidos nos respectivos sítios (do nível k) que são unidos pelo elo de nível k em questão. Porém, se a_k é a probabilidade de tal elo (do nível k) estar aberto condicionado ao fato que os sítios (de nível k) que este elo une estão abertos, temos que

$$a_k \geq 1-(1-p_1^k)^{(\psi M)^k} \geq 1-e^{-ky'}.$$

Como nos níveis anteriores, caso pelo menos um dos sítios (de nível k) adjacentes esteja fechado, não precisamos verificar o estado do elo que os une, logo sua probabilidade de estar aberto pode ser definda arbitrariamente. Portanto tal modelo de percolação dependente domina estocasticamente o modelo de percolação independente de elos e sítios com probabilidade de estarem abertos iguais a a_k e b_k, respectivamente. Portanto

$$P_{M,p_1,p_2}(C_{k+1}) \geq P^m_{a_k,b_k}(A_{Q_M} \cap \{0 \leftrightarrow \partial B(M)\})\ \geq$$

$$\geq\ P^m_{a_k,b_k}(0 \leftrightarrow \partial B(M))\ P^m_{a_k,b_k}(A_{Q_M})\ \geq$$

$$\geq\ \theta^m(1-e^{-ky'})\ h_M(1-e^{-ky'}) \geq (1-e^{-ky'})(1-e^{-(k+1)y'}).$$

Portanto

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{i=1}^{n} P_{M,p_1,p_2}(C_i) > 0.$$

Consideremos agora o caso $p'' > p'$. Neste caso, sejam y'' e M'' tal que, $p'' = 1 - \exp[-y'']$, $h_{M''}(p'') \geq 1 - \exp[-2y'']$ e $M''p_1\psi \geq y''$. Observando que $h_{M''}(p) \geq h_M(p)$, $\forall\ p > p_c^m$.

Realizando renormalização em múlti-escala análoga ao caso anterior, obtemos os seguintes valores para as seqüências $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}, (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$:

$$b_0 = 1\ ,\ a_0 = p'',$$

$$b_1 \geq 1 - \exp[-y - y'']\ ,\ a_1 \geq 1 - \exp[-y''],$$

$$b_k \geq 1 - \exp[-(k-1)y - y'']\ ,\ a_k \geq 1 - \exp[-ky''],\ \forall\ k \geq 2.$$

Obtendo que

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{i=1}^{n} P_{M,p_1,p_2}(C_i) > 0.$$

Então basta tomarmos $\widetilde{p_2} = \max\{p', p''\}$ que segue o teorema. $\square$

Observação 2.2.11 *Na demonstração acima, o aglomerado da origem construído atravessa todos os feixes de escadas ruins consecutivas segundo uma linha reta.*

2.3 Percolação de sítios dependente orientada em $\mathbb{Z}_+^2$

Para provarmos o teorema 2.2.1 uma das ferramentas mais importantes é um agrupamento combinatório desenvolvido em [19] que irá nos permitir agrupar escadas ruins de maneira adequada. Antes de explicarmos o agrupamento, iremos definir rapidamente o modelo de percolação de sítios dependente orientada em $\mathbb{Z}_+^2$ proposto em 2.3.1 e enunciaremos o teorema que caracteriza a transição de fase neste modelo (este teorema será usado posteriormente no capítulo 3).

Dados os parâmetros $\Delta, p, \delta \in [0,1]$, considere no grafo $G = \mathbb{Z}_+^2$ o seguinte modelo de percolação orientada: para cada $n \in \mathbb{N}$ declare as retas $r_n = \{x \in \mathbb{Z}_+^2; \|x\| = n\}$ como boas ($X(r_n) = 0$) ou ruins ($X(r_n) = 1$), de maneira independente, com probabilidade $1-\delta$ e δ, respectivamente. Dada a configuração de retas boas ou ruins $(X(r_i))_i$, declare os vértices de $\mathbb{Z}_+^2$ como abertos ou fechados, dependendo de x pertencer a uma reta boa ou ruim, da seguinte maneira

$$P_{\Delta,p,\delta}(x \text{ é aberto}|X(r_i),\ \forall\ i) = p = 1 - P_{\Delta,p,\delta}(x \text{ é fechado}|X(r_i),\ \forall\ i),\ \text{se } X(r(x)) = 0$$

$$P_{\Delta,p,\delta}(x \text{ é aberto}|X(r_i),\ \forall\ i) = \Delta = 1 - P_{\Delta,p,\delta}(x \text{ é fechado}|X(r_i),\ \forall\ i),\ \text{ se } X(r(x)) = 1$$

Onde $P_{\Delta,p,\delta}$ é a medida de probabilidade adequada e $r(x)$ é a reta que contém o vértice x. Por simplicidade, denotaremos este modelo simplesmente por percolação dependente em $\mathbb{Z}^2_+$.

A questão que se coloca é para quais valores dos parâmetros, Δ, p e δ, temos que, com probabilidade estritamente positiva, a origem está conectada a infinitos vértices abertos por caminhos orientados (i.e., caminhos que são percorridos apenas na direção positiva dos eixos coordenados) de vértices abertos. De fato, o caso mais interessante é quando $\Delta < p_c(\mathbb{Z}^2_+) < p$, onde $p_c(\mathbb{Z}^2_+)$ é o ponto crítico para percolação orientada e independente em $\mathbb{Z}^2_+$. O teorema abaixo, contido em [19], nos diz que para δ suficientemente pequeno, temos percolação em $\mathbb{Z}^2_+$.

Teorema 2.3.1 (KSV) *No modelo de percolação de sítios orientada e dependente em $\mathbb{Z}^2_+$ descrito acima, temos que $\forall\ \Delta > 0,\ \forall\ p > p_c(\mathbb{Z}^2_+)$, existe $\delta = \delta(\Delta, p) > 0$ suficientemente pequeno, tal que $P_{\Delta,p,\delta}(0 \leftrightarrow +\infty) > 0$. Ou de modo equivalente, há percolação $P_{\Delta,p,\delta}$ q.c. .*

Apesar do enunciado do teorema 2.3.1 guardar algumas semelhanças como enunciado do teorema 2.2.1, há duas diferenças fundamentais que gostaríamos de ressaltar: a primeira é que o teorema 2.3.1 trata de percolação orientada, ao contrário do teorema 2.2.1 que trata de percolação não orientada; a segunda diferença é que no teorema 2.3.1 a dependência é manifestada segundo um feixe de retas paralelas enquanto no teorema 2.2.1 a dependência é manifestada segundo dois feixes ortogonais de escadas paralelas, isto é uma dificuldade adicional, pois sob estas condições não sabemos provar resultado análogo ao teorema 2.2.1 no contexto de percolação orientada.

Omitiremos a prova do teorema 2.3.1. Descreveremos a seguir o agrupamento combinatório, desenvolvido em [19] que é fundamental na prova do teorema anterior e será usado no restante deste trabalho.

Seja $\xi \in \Xi = \{0, 1\}$ uma seqüência binária (palavra), onde cada dígito assume os valores 0 ou 1 de modo independente e a probabilidade de cada dígito ser 1 é δ, e $M \geq 2$ um inteiro. O agrupamento desenvolvido em [19] consiste em criar uma seqüência de partições, $(\Pi_k)_{k\in\mathbb{N}}$, de $\mathbb{N}$, $\Pi_k = (\pi_{k,j})_{j\in\mathbb{N}}$, onde para todo $k \in \mathbb{N}$ temos que $\cup_{j\in\mathbb{N}}\pi_{k,j} = \mathbb{N}$, $\pi_{k,i} \cap \pi_{k,j} = \emptyset\ \forall\ i \neq j$ e $\pi_{k,j}$ é um intervalo de $\mathbb{N}$. Para esta seqüência de partições de $\mathbb{N}$ associaremos uma seqüência de partições, $(\mathcal{C}_k)_{k\in\mathbb{N}}$, da palavra ξ. Cada partição $\mathcal{C}_k = (C_{k,j})_{j\in\mathbb{N}}$ será definida de modo que $C_{k,j} = (\xi_i)_{i\in\pi_{k,j}}$. Cada elemento $C_{k,j}$ de uma partição de ξ será chamado de aglomerado.

Para cada aglomerado, $C_{k,j}$, iremos atribuir uma massa, $m(C_{k,j})$, de modo que

$$d(\pi_{k,j},\pi_{k,j'}) \geq M^r, \quad se \ \min\{m(C_{k,j}),m(C_{k,j'})\} \geq r, \quad r=1,...,k.$$

Onde $d(A,B)$ é a distância euclidiana entre os conjuntos A e B. A cada aglomerado, iremos também associar a função, $l(C_{k,j}) \in \{1,...,k\}$, que será a etapa em que cada aglomerado é formado, teremos que $0 \leq l(C_{k,j}) < m(C_{k,j})$.

Finalmente, definiremos as partições limite $\Pi_\infty = \{\pi_{\infty,j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ e $\mathcal{C}_\infty = \{C_{\infty,j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$ e ξ, respectivamente, com a propriedade que $C_{\infty,j} = (\xi_i)_{i\in\pi_{\infty,j}}$.

Para cada aglomerado, $C_{\infty,j}$, da partição limite iremos definir as funções massa, $m(C_{\infty,j})$, e etapa , $l(C_{\infty,j})$, de modo que $0 \leq l(C_{\infty,j}) < m(C_{\infty,j})$ e com a seguinte propriedade

$$d(\pi_{\infty,j},\pi_{\infty,j'}) \geq M^r, \quad se \ \min\{m(C_{\infty,j}),m(C_{\infty,j'})\} \geq r, \quad r \geq 1.$$

A construção de cada uma destas partições será realizada em etapas conforme descreveremos a seguir. Iremos utilizar a notação $I(C)$ para denotar o intervalo de $\mathbb{N}$ dos índices que formam o aglomerado C, neste caso temos que $I(C_{k,j}) = \pi_{k,j}, \ \forall \ k,j$.
<u>Etapa 0:</u> A partição $\Pi_0 = \{\pi_{0,j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ é aquela em que cada aglomerado é formado por um único dígito de $\mathbb{N}$, isto é, $\pi_{0,j} = \{j\}$. Definimos a massa de cada aglomerado como

$$m(C_{0,j}) = \begin{cases} 0 \ , \ se \ \xi_j = 0 \\ 1 \ , \ se \ \xi_j = 1. \end{cases}$$

Além disso, sejam $l(C_{0,j}) = 0$, $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_{0,0} = \{C_{0,j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ e $\mathcal{C}_{0,1} = \{C_{0,j} \in \mathcal{C}_0; m(C_{0,j}) = 1\}$. Podemos renomear (da esquerda para a direita) os elementos de $\mathcal{C}_{0,1}$ como $\mathcal{C}_{0,1} = \{C^0_{0,i}; i \in \mathbb{N}\}$.
<u>Etapa 1:</u> Dizemos que os aglomerados $C^0_{0,s}, C^0_{0,s+1}, ..., C^0_{0,s+n-1}$ da etapa 0 formam uma 1-cadeia maximal de comprimento n ($n \geq 2$) se:

$$d(I(C^0_{0,i}), I(C^0_{0,i+1})) < M, \quad i = s,...,s+n-2$$

e

$$d(I(C^0_{0,i}), I(C^0_{0,i+1})) \geq M \begin{cases} para \ i = s-1, i = s+n-1 \ \ , \ se \ s > 1 \\ para \ i = s+n-1 \qquad , \ se \ s = 1. \end{cases}$$

Os aglomerados $C^0_{0,s}, C^0_{0,s+1}, ..., C^0_{0,s+n-1}$ da etapa 0 serão chamados de constituintes da cadeia. Considere as 1-cadeias maximais consecutivas de comprimento pelo menos 2, podemos denotá-las (da esquerda para a direita) por $r^1_1, r^1_2, ...$ É imediato,

P *q.c.*, que todas as cadeias são finitas e ocorrem um número infinito destas. Escrevemos $r_i^1 = r_i^1(C_{0,s_i}^0, C_{0,s_i+1}^0, ..., C_{0,s_i+n_i-1}^0)$, se a i-ésima cadeia consiste dos constituintes $C_{0,s_i}^0, C_{0,s_i+1}^0, ..., C_{0,s_i+n_i-1}^0$ (observe que $n_i \geq 2$ e $s_i + n_i \leq s_{i+1}, \ \forall \ i$). A seqüência $C_{1,i}^1 = (\xi_j)_{j \in I(C_{1,i}^1)}$, onde $I(C_{1,i}^1) = span[I(C_{0,s_i}^0) \cup I(C_{0,s_i+1}^0) \cup ... \cup I(C_{0,s_i+n_i-1}^0)]$ e $span[A]$ é o menor intervalo de $\mathbb{N}$ que contém A, será um aglomerado da etapa 1, isto é, $l(C_{1,i}^1) = 1$; definimos a massa de $C_{1,i}^1$ como

$$m(C_{1,i}^1) = \sum_{j=1}^{n_i} m(C_{0,s_i-1+j}^0) = n_i.$$

Denotamos por $\mathcal{C}_{1,1}$ o conjunto de todos os aglomerados da etapa 1. Sejam $\Pi_{0,1}' = \{\pi_{0,i} \in \Pi_0; \pi_{0,i} \cap I(C_{1,i}^1) = \emptyset, \ \forall \ i = 1, 2, ...\}$ e $\mathcal{C}_{0,1}' = \{C \in \mathcal{C}_0; I(C) \in \Pi_{0,1}'\}$. Definimos $\Pi_1 = \Pi_{0,1}' \cup \{I(C); \forall \ C \in \mathcal{C}_1^1\}$, pode-se verificar que de fato Π_1 é uma partição de $\mathbb{N}$ em intervalos, podemos denotá-los da esquerda para a direita por $\Pi_1 = \{\pi_{1,j}\}_{j \in \mathbb{N}}$. Neste caso definimos a partição, $\mathcal{C}_1 = \{C_{1,j}\}_{j \in \mathbb{N}}$, de ξ de modo que $C_{1,j} = (\xi_i)_{i \in \pi_{1,j}}$. Observe que $\mathcal{C}_{1,1}$ e $\mathcal{C}_{0,1}'$ são formados por aglomerados das etapas 1 e 0, respectivamente. Como na etapa 0, iremos denotar por $C_{1,j}^1$ e $C_{1,j}$ os j-ésimos (sempre contando da esquerda para a direita) aglomerados de $\mathcal{C}_{1,1}$ e $\mathcal{C}_1$, respectivamente.

Etapa 2: Dizemos que os aglomerados $C_{1,s}^1, C_{1,s+1}^1, ..., C_{1,s+n-1}^1$ da etapa 1 formam uma 2-cadeia maximal de comprimento n ($n \geq 2$) se:

$$d(I(C_{1,i}^1), I(C_{1,i+1}^1)) < M^2, \quad i = s, ..., s+n-2$$

e

$$d(I(C_{1,i}^1), I(C_{1,i+1}^1)) \geq M^2 \begin{cases} para \ i = s-1, i = s+n-1 & , \ se \ s > 1 \\ para \ i = s+n-1 & , \ se \ s = 1. \end{cases}$$

Aqui d é a distância euclidiana, porém os intervalos de $\mathbb{N}$ referentes aos aglomerados da etapa 1 serão tratados como um único ponto. Os aglomerados $C_{1,s}^1, C_{1,s+1}^1, ..., C_{1,s+n-1}^1$ da etapa 1 serão chamados de constituintes da cadeia. Considere as 2-cadeias maximais consecutivas de comprimento pelo menos 2, podemos denotá-las (da esquerda para a direita) por $r_1^2, r_2^2, ...$ É imediato, P *q.c.*, que todas as cadeias são finitas e ocorrem um número infinito destas. Escrevemos $r_i^2 = r_i^2(C_{1,s_i}^1, C_{1,s_i+1}^1, ..., C_{1,s_i+n_i-1}^1)$, se a i-ésima cadeia consiste dos constituintes $C_{1,s_i}^1, C_{1,s_i+1}^1, ..., C_{1,s_i+n_i-1}^1$ (observe que $n_i \geq 2$ e $s_i + n_i \leq s_{i+1}, \ \forall \ i$). A seqüência $C_{2,i}^2 = (\xi_j)_{j \in I(C_{2,i}^2)}$, onde $I(C_{2,i}^2) = span[I(C_{1,s_i}^1) \cup I(C_{1,s_i+1}^1) \cup ... \cup I(C_{1,s_i+n_i-1}^1)]$, será um aglomerado da etapa 2, isto é, $l(C_{2,i}^2) = 2$. Definimos a massa de $C_{2,i}^2$ como

$$m(C_{2,i}^2) = \sum_{j=1}^{n_i} m(C_{1,s_i-1+j}^1) - (n_i - 1).$$

Denotamos por $\mathcal{C}_{2,2}$ o conjunto de todos os aglomerados da etapa 2. Sejam $\Pi'_{1,2} = \{\pi_{1,i} \in \Pi_1; \pi_{1,i} \cap I(C^2_{2,i}) = \emptyset,\ \forall\ i = 1, 2, ...\}$ e $\mathcal{C}'_{1,2} = \{C \in \mathcal{C}_1; I(C) \in \Pi'_{1,2}\}$. Definimos $\Pi_2 = \Pi'_{1,2} \cup \{I(C); \forall\ C \in \mathcal{C}^2_2\}$, pode-se verificar que de fato Π_2 é uma partição de $\mathbb{N}$ em intervalos, como na primeira etapa, podemos denotá-los da esquerda para a direita por $\Pi_2 = \{\pi_{2,j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ neste caso definimos a partição, $\mathcal{C}_2 = \{C_{2,j}\}_{j\in\mathbb{N}}$, de ξ de modo que $C_{2,j} = (\xi_i)_{i\in\pi_{2,j}}$. Observe que $\mathcal{C}_{2,2}$ e $\mathcal{C}'_{1,2}$ são formados por aglomerados das etapas 2 e no máximo 1, respectivamente. Como nas etapas anteriores, iremos denotar por $C^2_{2,j}$ e $C_{2,j}$ os j-ésimos (sempre contando da esquerda para a direita) aglomerados de $\mathcal{C}_{2,2}$ e $\mathcal{C}_2$, respectivamente.

Etapa k ($k \geq 3$): Seja $\mathcal{C}_{k-1,k} = \{C \in \mathcal{C}_{k-1}; m(C) \geq k\}$, iremos denotar por $C^{k-1}_{k,j}$ o j-ésimo elemento (da esquerda para a direita) de $\mathcal{C}_{k-1,k}$. Observe que $\mathcal{C}_{1,2} = \mathcal{C}_{1,1}$.

Dizemos que os aglomerados $C^{k-1}_{k,s}, C^{k-1}_{k,s+1}, ..., C^{k-1}_{k,s+n-1}$ de $\mathcal{C}_{k-1,k}$ formam uma k-cadeia maximal de comprimento n ($n \geq 2$) se:

$$d(I(C^{k-1}_{k,i}), I(C^{k-1}_{k,i+1})) < M^k, \quad i = s, ..., s+n-2$$

e

$$d(I(C^{k-1}_{k,i}), I(C^{k-1}_{k,i+1})) \geq M^k \begin{cases} para\ i = s-1, i = s+n-1 & , se\ s > 1 \\ para\ i = s+n-1 & , se\ s = 1. \end{cases}$$

Aqui d é a distância euclidiana, porém os intervalos de $\mathbb{N}$ referentes aos aglomerados das etapas anteriores serão tratados como um único ponto. Os aglomerados $C^{k-1}_{k,s}, C^{k-1}_{k,s+1}, ..., C^{k-1}_{k,s+n-1}$ da etapa $k-1$ serão chamados de constituintes da cadeia. Considere as k-cadeias maximais consecutivas de comprimento pelo menos 2, podemos denotá-las (da esquerda para a direita) por $r^k_1, r^k_2, ...$ É imediato, P $q.c.$, que todas as cadeias são finitas e ocorrem um número infinito destas. Escrevemos $r^k_i = r^k_i(C^{k-1}_{k,s_i}, C^{k-1}_{k,s_i+1}, ..., C^{k-1}_{k,s_i+n_i-1})$, se a i-ésima cadeia consiste dos constituintes $C^{k-1}_{k,s_i}, C^{k-1}_{k,s_i+1}, ..., C^{k-1}_{k,s_i+n_i-1}$ (observe que $n_i \geq 2$ e $s_i + n_i \leq s_{i+1},\ \forall\ i$). A seqüência $C^k_{k,i} = (\xi_j)_{j\in I(C^k_{k,i})}$, onde $I(C^k_{k,i}) = span[I(C^{k-1}_{k,s_i}) \cup I(C^{k-1}_{k,s_i+1}) \cup ... \cup I(C^{k-1}_{k,s_i+n_i-1})]$ será um aglomerado da etapa k, isto é, $l(C^k_{k,i}) = k$; definimos a massa de $C^k_{k,i}$ como

$$m(C^k_{k,i}) = \sum_{j=1}^{n_i} m(C^{k-1}_{k,s_i-1+j}) - (n_i - 1)(k-1).$$

Denotamos por $\mathcal{C}_{k,k}$ o conjunto de todos os aglomerados da etapa k. Sejam $\Pi'_{k-1,k} = \{\pi_{k-1,i} \in \Pi_{k-1}; \pi_{k-1,i} \cap I(C^k_{k,i}) = \emptyset,\ \forall\ i = 1, 2, ...\}$ e $\mathcal{C}'_{k-1,k} = \{C \in \mathcal{C}_{k-1}; I(C) \in \Pi'_{k-1,k}\}$. Definimos $\Pi_k = \Pi'_{k-1,k} \cup \{I(C); \forall\ C \in \mathcal{C}^k_k\}$, pode-se verificar que de fato Π_k é uma partição de $\mathbb{N}$ em intervalos, como nas etapas anteriores, podemos denotá-los da esquerda para a direita por $\Pi_k = \{\pi_{k,j}\}_{j \in \mathbb{N}}$. Neste caso definimos a partição, $\mathcal{C}_k = \{C_{k,j}\}_{j \in \mathbb{N}}$, de ξ de modo que $C_{k,j} = (\xi_i)_{i \in \pi_{k,j}}$. Observe que $\mathcal{C}_{k,k}$ e $\mathcal{C}'_{k-1,k}$ são formados por aglomerados das etapas k e no máximo $k-1$, respectivamente. Como nas etapas anteriores, iremos denotar por $C^k_{k,j}$ e $C_{k,j}$ os j-ésimos (sempre contando da esquerda para a direita) aglomerados de $\mathcal{C}_{k,k}$ e $\mathcal{C}_k$, respectivamente.

<u>Construção de $\mathcal{C}_\infty$</u>: Seja $i \in \mathbb{N}$, definimos o índice aleatório

$$\gamma(i) = \sup\{l \in \mathbb{N}; i \in I(C) \text{ para algum } C \in \mathcal{C}_{l,l}\}.$$

O teorema 2.3.3 abaixo nos diz que $\gamma(i) < \infty$ P *q.c.*, isto é, existe um aglomerado da etapa $\gamma(i)$ que contém ξ_i, mais que isto, este aglomerado é único pois os elementos de $\mathcal{C}_{l,l}$ são dois a dois disjuntos. Nós denotaremos este aglomerado por aglomerado maximal que contém ξ_i e escreveremos simplesmente C_{ξ_i}. Além disso, se $j \in I(C_{\xi_i})$, então $\gamma(i) = \gamma(j)$ e $C_{\xi_i} = C_{\xi_j}$.

A partição limite $\mathcal{C}_\infty = \{C_{\infty,j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ é definida da seguinte maneira: definimos $C_{\infty,1} = C_{\xi_0}$, tendo definidos $C_{\infty,j} = C_{\xi_{i_j}}$ para $j = 0, 1, \ldots, k$ definimos $i_{k+1} = \min\{l \in \mathbb{N}; l \notin \cup_{j=1}^k I(C_{\infty,j})\}$ e $C_{\infty,k+1} = C_{\xi_{i_{k+1}}}$. Isto define as partições limite $\Pi_\infty = \{\pi_{\infty,j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ e $\mathcal{C}_\infty = \{C_{\infty,j}\}_{j \in \mathbb{N}}$, onde $\pi_{\infty,j} = I(C_{\infty,j})$.

Observação 2.3.2 *Seja C um aglomerado de massa m e etapa l formado por r constituintes C_i, $i = 1, \ldots, r$. Temos que a massa de C_i é pelo menos l, $\forall\ i = 1, \ldots, r$. Portanto, isto implica em $r \leq m - l + 1$.*

O teorema seguinte é uma conseqüência do agrupamento (KSV) (veja [19], para a prova).

Teorema 2.3.3 *[KSV] Se $\delta < \frac{1}{64M^2}$, então a probabilidade que na palavra ξ, a partir do ponto $n \in \mathbb{N}$, começa um aglomerado de massa superior a k, decai exponencialmente rápido em k. Em particular, a massa de cada aglomerado cresce, no máximo, uma quantidade finita de vezes.*

Então, pelo teorema anterior, todo aglomerado sairá do jogo (isto é, nunca mais irá incorporar massa) em alguma etapa. Há duas possibilidades para este aglomerado: ou ele fará parte de um aglomerado maior que o contém (sem contribuir para a massa deste último!) ou não; no primeiro caso, o aglomerado em questão será dito fazer parte da "poeira" de aglomerados do aglomerado maior; no segundo caso, este aglomerado será um dos elementos da partição limite $\mathcal{C}_\infty$. Nos dois casos, definimos a etapa do aglomerado, $l(C)$, como a última etapa em que ele incorporou massa e definimos sua massa $m(C)$

como a massa definida na última etapa em que o aglomerado incorporou massa. A partir daqui, sempre que nos referirmos a aglomerados estaremos nos referindo aos elementos da partição limite e iremos escrever simplesmente $C(m,l)$ para denotar que C é um aglomerado de massa m formado na etapa l.

Definição 2.3.4 *Seja $\xi \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ uma seqüência binária. Dizemos que a seqüência ξ é M-espaçada, se*

$$d(\{0\}, I(C_{\infty,i})) \geq M^{m(C_{\infty,i})}$$

e

$$d(I(C_{\infty,i}), I(C_{\infty,j})) \geq M^{\min\{m(C_{\infty,i}), m(C_{\infty,j})\}}$$

para todos $i, j \in \mathbb{N}$.

Corolário 2.3.5 *Se $\delta < \frac{1}{64M^2}$ o conjunto das seqüências M-espaçadas tem probabilidade estritamente positiva.*

Na verdade, na prova do teorema 2.2.1, usaremos o agrupamento acima para seqüências $\xi \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$. Neste caso, dizemos que a seqüência ξ é M-espaçada, se apenas a segunda condição da definição 2.3.4 é satisfeita. O teorema 2.3.3 e o corolário 2.3.5 permanecem válidos com enunciados análogos.

Sejam ξ e η seqüências finitas de 0's e 1's (não necessariamente aglomerados); a partir daqui usaremos o símbolo $\oplus$ para denotar por $\xi \oplus \eta$ a seqüência de 0's e 1's formada pela seqüência ξ seguida de η, nesta ordem; isto é se $\xi = (\xi_i)_{i=1}^{n}$ e $\eta = (\eta_i)_{i=1}^{m}$, então $\xi \oplus \eta = (z_i)_{i=1}^{n+m}$ onde

$$z_i = \begin{cases} \xi_i, \ \textit{se } i = 1, \ldots, n \\ \eta_{i-n}, \ \textit{se } i = n+1, \ldots, m. \end{cases}$$

Observe que geralmente $\xi \oplus \eta \neq \eta \oplus \xi$. O lema seguinte diz respeito à estrutura dos aglomerados e será usado posteriormente.

Lema 2.3.6 *Seja $C(i,l)$ um aglomerado de massa i e formado na etapa l.*
i) Então, $\forall\ j \leq i$ o aglomerado C pode ser decomposto em duas partes, C' e C'', tal que $C' \oplus C''$, C' é um aglomerado e $m(C') = j$.
ii) Se $C^c(j)$ é um aglomerado de massa j formado por j 1's consecutivos, isto é, a seqüência formada por j 1's consecutivos, temos que $C^c(j) \oplus C''$ é um aglomerado de massa i formado no máximo até a etapa l.

Demonstração: *i)* A prova é por indução em l. Se $l = 1$, então basta definirmos C' como a subseqüência de C compreendido do primeiro 1 de C até o j-ésimo 1 de C.

Suponha o lema válido $\forall\ l < n$, seja $C(i,n)$ um aglomerado da etapa n, $C(i,n) = C_1(i_1,l_1)\oplus P_1 \oplus C_2(i_2,l_2)\oplus\cdots\oplus P_{r-1}\oplus C_r(i_r,l_r)$, onde C é formado na etapa n pelos $r (r \geq 2)$ aglomerados constituintes $C_1(i_1,l_1),\ldots,C_r(i_r,l_r)$ com $l_k \leq n-1,\ i_k \geq n,\ \forall\ 1 \leq k \leq r$ (pois todo aglomerado que participa da etapa n tem massa pelo menos n) e P_k é a "poeira" de aglomerados da etapa $n-1$ entre os constituintes $C_k(i_k,l_k)$ e $C_{k+1}(i_{k+1},l_{k+1})$; observe que $I(P_i) = span[I(C_i)\cup I(C_{i+1})]\backslash(I(C_i)\cup I(C_{i+1}))$ e $i = \sum_{k=1}^{r} i_k - (r-1)(n-1)$. Seja $\tau = \tau(j)$ tal que

$$\sum_{k=1}^{\tau-1} i_k - (\tau-2)(n-1) < j \leq \sum_{k=1}^{\tau} i_k - (\tau-1)(n-1)$$

logo

$$j - \sum_{k=1}^{\tau-1} i_k + (\tau-1)(n-1) \leq i_\tau$$

portanto, pela hipótese de indução, podemos decompor C_τ como $C_\tau = C'_\tau \oplus C''_\tau$ tal que

$$m(C'_\tau) = j - \sum_{k=1}^{\tau-1} i_k + (\tau-1)(n-1).$$

Pode-se verificar que $C' = C_1 \oplus P_1 \oplus \cdots \oplus C_{\tau-1} \oplus P_{\tau-1} \oplus C'_\tau$ é o aglomerado com as propriedades desejadas. Definimos $C'' = (\xi_s)_{s\in I(C)\backslash I(C')}$, observe que se $i = j$ então $C'' = \emptyset$ e $C = C'$.

ii) Como no item anterior a prova é por indução em l. Se $l = 1$ temos que tanto C' quanto $C^c(j)$ são aglomerados de massa j e formados na primeira etapa, portanto como $C' \oplus C''$ é aglomerado de massa i e formado na primeira etapa, temos que $C^c(j) \oplus C''$ também o é.

Suponha o lema válido $\forall\ l < n$, seja C_τ o constituinte de $C(i,n)$ descrito na prova do item anterior. Como C_τ e C'_τ são aglomerados de massa i_τ e $m(C'_\tau) = j - \sum_{k=1}^{\tau-1} i_k + (\tau-1)(n-1)$, respectivamente, então pela hipótese de indução temos que $C^c(j - \sum_{k=1}^{\tau-1} i_k + (\tau-1)(n-1)) \oplus C''_\tau$ é aglomerado de massa i_τ. Portanto $C^c(i_1) \oplus P_1 \oplus C^c(i_2) \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus C^c(i_{\tau-1}) \oplus P_{\tau-1} \oplus C^c(j - \sum_{k=1}^{\tau-1} i_k + (\tau-1)(n-1)) \oplus C''_\tau \oplus P_\tau \oplus \cdots \oplus P_{r-1} \oplus C_r(i_r,l_r)$ é aglomerado de massa i e formado no máximo até a etapa n, isto por sua vez implica que $C^c(i_1) \oplus C^c(i_2 - n + 1) \oplus \cdots \oplus C^c(i_{\tau-1} - n + 1) \oplus C^c(j - \sum_{k=1}^{\tau-1} i_k + (\tau-1)(n-1) - n + 1) \oplus C''_\tau \oplus P_\tau \oplus \cdots \oplus P_{r-1} \oplus C_r(i_r,l_r)$ também é aglomerado de massa i e formado até a etapa n, logo $C^c(j) \oplus C''_\tau \oplus P_\tau \oplus \cdots \oplus P_{r-1} \oplus C_r(i_r,l_r)$ também o é; pois $j = i_1 + (i_2 - n + 1) + \cdots + (i_{\tau-1} - n + 1) + j - \sum_{k=1}^{\tau-1} i_k + (\tau-1)(n-1) - n + 1$. Como $C'' = C''_\tau \oplus P_\tau \oplus \cdots \oplus P_{r-1} \oplus C_r(i_r,l_r)$, isto conclui a demonstração do teorema. $\square$

Observação 2.3.7 *C'' não é necessariamente um aglomerado como os obtidos através do agrupamento (KSV).*

2.4 Demonstração do teorema 2.2.1

A prova do teorema 2.2.1 consiste no uso das técnicas desenvolvidas em [19] com o objetivo de reduzir a prova do teorema 2.2.1 (onde os estados boa e ruim de cada escada são aleatórios) a um caso similar ao da Rede Hierárquica (teorema 2.2.8).

De modo geral, a idéia é agrupar as escadas verticais ruins conforme o agrupamento (KSV) descrito na seção anterior e escolher δ pequeno o suficiente de modo que aglomerados de escadas de massa pelo menos k estejam suficientemente espaçados (exponencialmente em k, veja corolário 2.3.5) com probabilidade estritamente positiva. Analogamente, temos o mesmo para as escadas horizontais.

Outra idéia fundamental de [19] usada na prova é podermos afirmar que a probabilidade de um aglomerado de escadas qualquer, de massa k, ser "atravessado" é maior que a probabilidade de atravessar um feixe de k escadas ruins consecutivas caso este feixe seja atravessado de uma maneira "rigorosa".

A seguir definiremos vários parâmetros, explicaremos o significado do termo "rigoroso" e faremos a demostração do teorema 2.2.1. Algumas passagens são totalmente análogas às do teorema 2.2.8, neste caso os detalhes serão omitidos.

Definição dos parâmetros. O primeiro objetivo é definir os parâmetros N e q_k, $\forall\, k$, que estarão relacionados como tamanho de um sítio na escala do nível k e sua probabilidade de estar aberto, respectivamente. Como no teorema 2.2.8, sejam x, ψ e p' tais que $\frac{3}{4} < x < 1$, $\psi = 2x - 1 > \frac{1}{2}$ e $p' = \max\{p^*, p(x)\}$, onde p^* e $p(x)$ são dados pelas proposições 2.2.9 e 2.2.10, respectivamente, como $p_c > \frac{1}{2}$, temos que $\theta^m(p') > \frac{1}{2}$. Seja $y' = -\ln(1-p')$, podemos supor que $y' \geq 1$ e grande o suficiente de modo a satisfazer a proposição 2.4.1 abaixo. Neste caso faça $p' = 1 - e^{-y'}$. Pela proposição 2.2.10, podemos escolher N'_0 grande o suficiente de modo que

$$f_N(p') > 1 - \exp(-2y'),\ \forall\ N \geq N'_0$$

e $N'_0 \geq \frac{L'_0}{9}$, onde $L'_0 = L'_0(p')$ dado pela proposição 2.4.3 a ser enunciada posteriormente.

Seja κ dado pela proposição 2.4.3 e

$$\alpha' = [\prod_{k\in\mathbb{N}} 1 - \exp(-ky')]^{\kappa} > 0,$$

agora escolha N' grande o suficiente de modo que

$$\frac{p_1 \psi \alpha' \sqrt{N'}}{6} \geq 2y' \tag{2.3}$$

(o porquê disto ficará claro quando entendermos o significado do termo "rigoroso").

Seja $N = \max\{N_0', N'\}$, como no teorema 2.3.3 existe p'' suficientemente próximo de 1 tal que

$$f_N(p) > 1 - (1-p)\exp(-y'), \ \forall\, p \geq p''.$$

Se $p' \geq p''$ fazemos

$$q_k = 1 - \exp[-(k+1)y']$$

e podemos prosseguir.

Se $p' < p''$ devemos recalcular as constantes anteriores como no caso da Rede Hierárquica: sejam $y'' = -\ln(1-p'')$, N_0'' grande o suficiente de modo que

$$f_N(p'') > 1 - \exp(-2y''), \ \forall\, N \geq N_0'',$$

e $N_0'' \geq \frac{L_0''}{9}$, onde $L_0'' = L_0''(p'')$ dado pela proposição 2.4.3.

Seja κ (dado pela proposição 2.4.3), $\alpha'' = [\prod_{k\in\mathbb{N}} 1 - \exp(-y'' - (k-1)y')]^\kappa > 0$ e N'' grande o suficiente de modo que

$$\frac{p_1 \psi \alpha'' \sqrt{N''}}{6} \geq 2y'' \tag{2.4}$$

neste caso, sejam $N = \max\{N_0'', N''\}$ e $q_k = 1 - \exp(-y'' - ky')$.

A partir daqui iremos escrever simplesmente α para denotar as constantes α' ou α'' nos casos em que $p' \geq p''$ ou $p' \leq p''$, respectivamente.

Agora, fixamos o valor de $\widehat{p_2}$ como $\max\{p', p''\}$ e definimos $\widehat{\delta}(p_1, p_2)$ como $\widehat{\delta}(p_1, p_2) = \frac{1}{64(3N(p_1,p_2))^2}$, $\forall\, p_1 > 0$, $\forall\, p_2 > \widehat{p_2}$. Neste caso, pelo teorema 2.3.3 temos que, $\forall\, \delta < \widehat{\delta}(p_1, p_2)$, os aglomerados de escadas (horizontais e verticais) ao serem agrupados com constante de separação $3N$ serão $3N$-espaçados (isto é, aglomerados de massa pelo menos k estão distantes pelo menos $(3N)^k$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$) com probabilidade $P_{p_1,p_2,\delta}$ estritamente positiva. Então, basta mostrar que existe $c > 0$ tal que

$$P_{p_1,p_2,\delta}(0 \leftrightarrow \infty | (X(\xi_V^i))_{i\in\mathbb{Z}}, (X(\xi_H^i))_{i\in\mathbb{Z}})) > c > 0, \tag{2.5}$$

para toda $(X(\xi_V^i))_{i\in\mathbb{Z}}, (X(\xi_H^i))_{i\in\mathbb{Z}})$ configuração de escadas $3N$-espaçada.

Definidos os parâmetros, iremos agora realizar uma renormalização em múlti-escala, onde cada sítio do nível k será um retângulo de elos e sítios do nível $k-1$ e cujos lados terão pelo menos N sítios (do nível $k-1$) e na máximo $6N-1$ sítios (do nível $k-1$); e os elos do nível k serão os trechos dos aglomerados escadas de massa k que separa os sítios do nível k em questão. Ainda não definimos precisamente quem são os elos e os sítios de cada nível, porém podemos adiantar que um sítio do nível k estará aberto se no retângulo R de elos e sítios do nível $k-1$ em que este sítio é definido o evento A_R ocorre (conforme definido antes da proposição 2.2.10).

Definição do modo "rigoroso". Sejam v_1 e v_2 sítios do nível k adjacentes, separados por um feixe de k escadas ruins consecutivas. Dado que v_1 e v_2 estão abertos, iremos definir o que significa o feixe de escadas que os separa ser atravessado de modo "rigoroso". Como v_1 e v_2 estão abertos, há pelo menos ψN pares de sítios de nível $k-1$ (um sítio em v_1 outro em v_2) que são colineares e adjacentes ao feixe de k escadas ruins consecutivas (isto é, estes sítios e o feixe de escadas têm sítios do nível 0 em comum). Destes pelo menos ψN pares declaramos o primeiro (podemos ordená-los de cima para baixo ou da esquerda para a direita, conforme for o caso) como válido, os $3\sqrt{N}-1$ próximos como inválidos, o próximo como válido, os $3\sqrt{N}-1$ próximos como inválidos e assim por diante, de modo que teremos pelo menos $\frac{\psi\sqrt{N}}{3}$ pares de sítios (do nível $k-1$) colineares válidos.

Cada um destes pelo menos $\frac{\psi\sqrt{N}}{3}$ pares de sítios do nível $k-1$ válidos possui pelo menos ψN pares de sítios (um em v_1 o outro em v_2) do nível $k-2$, colineares, abertos e adjacentes ao feixe de k escadas ruins consecutivas. Como antes, repetimos o mesmo procedimento de seleção declarando como válido apenas um par de sítios a cada $3\sqrt{N}$, deste modo temos pelo menos $\frac{\psi\sqrt{N}}{3}^2$ pares válidos. Para cada um destes $\frac{\psi\sqrt{N}}{3}^2$ pares de sítios do nível $k-2$ válidos, lançamos uma moeda cuja probabilidade de sucesso é q_{k-2}^{κ} e eliminamos aqueles pares cujo resultado da moeda foi fracasso, após o lançamento das moedas se o número de pares de sítios válidos for inferior a $(\frac{\psi\sqrt{N}}{3})^2\frac{q_{k-2}^{\kappa}}{2}$ paramos por aí e declaramos que o feixe de k escadas ruins consecutivas não é atravessado de modo "rigoroso" e declaramos o elo de nível k que este feixe representa como fechado.

Caso tenhamos pelo menos $(\frac{\psi\sqrt{N}}{3})^2\frac{q_{k-2}^{\kappa}}{2}$ sucessos (pelo teorema de Cramèr esta probabilidade é pelo menos $1-\exp[-(\frac{\psi\sqrt{N}}{3})^2 I_{q_{k-2}^{\kappa}}(\frac{q_{k-2}^{\kappa}}{2})]$, onde $I_p(x) = x\ln\frac{x}{p} + (1-x)\ln\frac{1-x}{1-p}$) cada um destes pares de sítios (do nível $k-2$) colineares possui pelo menos ψN pares de sítios (do nível $k-3$) colineares, repetimos o mesmo processo de seleção anterior para escolhermos pelo menos $\frac{\psi\sqrt{N}}{3}$ pares válidos obtendo um total de pelo menos $(\frac{\psi\sqrt{N}}{3})^3\frac{q_{k-2}^{\kappa}}{2}$ pares válidos (de sítios do nível $k-3$). Para cada um destes pares lançamos duas moedas, de modo independente, cuja probabilidade de sucesso é q_{k-3}^{κ} e eliminamos os pares cujo resultado das moedas teve pelo menos um fracasso, se o número de pares válidos remanescentes for superior a $(\frac{\psi\sqrt{N}}{3})^3\frac{q_{k-2}^{\kappa}}{2}.\frac{q_{k-3}^{2\kappa}}{2}$ (o que ocorre com probabilidade pelo menos $1-\exp[-(\frac{\psi\sqrt{N}}{3})^2 I_{q_{k-2}^{\kappa}}(\frac{q_{k-2}^{\kappa}}{2})] - \exp[-(\frac{\psi\sqrt{N}}{3})^3\frac{q_{k-2}^{\kappa}}{2} I_{q_{k-3}^{2\kappa}}(\frac{q_{k-3}^{2\kappa}}{2})]$) continuamos, caso contrário paramos e declaramos o elo de nível k que este feixe representa como fechado.

Ao continuar, repetimos este procedimento até chegarmos em pares de sítios do nível 0 colineares, isto é escolhendo um par a cada $3\sqrt{N}$ e, para este par, lançamos $k-s-1$ moedas cuja probabilidade de sucesso é q_s^κ e eliminamos os pares cujo resultado das moedas teve pelo menos um fracasso, onde s é o nível do par de sítios a ser testado. Se o número de pares de sítios do nível 0 válidos for superior a $(\frac{\psi\sqrt{N}}{3})^k \prod_{i=0}^{k-2} \frac{q_i^{(k-i-1)\kappa}}{2} \geq (\frac{\psi\alpha\sqrt{N}}{6})^k$ continuamos; caso contrário, paramos e declaramos o elo de nível k que este feixe representa como fechado. Podemos verificar que a probabilidade de continuarmos é superior a

$$1-\sum_{i=1}^{k-1}\exp[-(\frac{\psi}{3}\sqrt{N})^{i+1}\left(\prod_{j=1}^{i-1}\frac{q_{k-j-1}^{j\kappa}}{2}\right)I_{q_{k-i-1}^{i\kappa}}(\frac{q_{k-i-1}^{i\kappa}}{2})].$$

Proposição 2.4.1 *Podemos escolher y' grande o suficiente de modo que*

$$1-\sum_{i=1}^{k-1}\exp[-(\frac{\psi}{3}\sqrt{N})^{i+1}\left(\prod_{j=1}^{i-1}\frac{q_{k-j-1}^{j\kappa}}{2}\right)I_{q_{k-i-1}^{i\kappa}}(\frac{q_{k-i-1}^{i\kappa}}{2})]\geq 1-\frac{1-q_k}{2}. \qquad (2.6)$$

Demonstração: Gostaríamos de mostrar que

$$\sum_{i=1}^{k-1}\exp\left[-(\frac{\psi\sqrt{N}}{3})^{i+1}\left(\prod_{j=1}^{i-1}\frac{q_{k-j-1}^{j\kappa}}{2}\right)f(q_{k-i-1}^{i\kappa})\right]\leq\frac{1-q_k}{2}$$

onde $f(x)=-\frac{x}{2}\ln 2+(1-\frac{x}{2})\ln\left[\frac{1-\frac{x}{2}}{1-x}\right]$, $q_k=1-\exp[-(k+1)y']$ e $\frac{\psi\sqrt{N}}{3}>\frac{4y'}{\alpha}$. Isto é, estamos considerando o caso $p'\geq p''$, o caso $p'<p''$ se faz de modo análogo. Então, temos que

$$\sum_{i=1}^{k-1}\exp\left[-(\frac{\psi\sqrt{N}}{3})^{i+1}\left(\prod_{j=1}^{i-1}\frac{q_{k-j-1}^{j\kappa}}{2}\right)f(q_{k-i-1}^{i\kappa})\right]\leq\sum_{i=1}^{k-1}\exp\left[-(\frac{4y'}{\alpha})^{i+1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{i-1}f(q_{k-i-1}^{i\kappa})\right]\leq$$

$$\leq\sum_{i=1}^{k-1}\exp[-4(2y')^{i+1}f(q_{k-i-1}^{i\kappa})]=\sum_{i=1}^{\frac{k}{2}-1}\exp[-4(2y')^{i+1}f(q_{k-i-1}^{i\kappa})]+\sum_{i=\frac{k}{2}}^{k-1}\exp[-4(2y')^{i+1}f(q_{k-i-1}^{i\kappa})]\leq$$

$$\leq\frac{k}{2}\left[\exp[-16y'^2f(q_{\frac{k}{2}}^{\frac{k\kappa}{2}})]+\exp[-4(2y')^{\frac{k}{2}+1}f(q_0^{(k-1)\kappa})]\right].$$

Portanto, basta mostrar que

$$16y'^2f(q_{\frac{k}{2}}^{\frac{k\kappa}{2}})\geq\ln k+(k+1)y'$$

e

$$4(2y')^{\frac{k}{2}+1}f(q_0^{(k-1)\kappa})\geq\ln k+(k+1)y'.$$

Quanto a primeira estimativa temos que

$$16y'^2 f(q_{\frac{k}{2}}^{\frac{k\kappa}{2}}) \geq 8y'^2 \left(-2\ln 2 - \ln(1 - q_{\frac{k}{2}}^{\frac{k\kappa}{2}})\right) \geq$$

$$\geq 8y'^2 \left[-2\ln 2 - \ln\left(1 - \sum_{i=0}^{\frac{k\kappa}{2}} \binom{\frac{k\kappa}{2}}{i} (-1)^i \exp[-iy'(\frac{k}{2}+1)]\right)\right]$$

$$\geq 8y'^2 \left[-2\ln 2 - \ln\left(\frac{k\kappa}{2} 2^{\frac{k\kappa}{2}} \exp[-y'(\frac{k}{2}+1)]\right)\right] \geq 8y'^2 \left[-1 - \ln k - \ln\kappa + \frac{k}{2}[y' - \kappa\ln 2]\right].$$

y' pode ser escolhido grande o suficiente de modo que

$$8y'^2 \left[-1 - \ln k - \ln\kappa + \frac{k}{2}[y' - \kappa\ln 2]\right] \geq 8y'^2\frac{k}{4} = 2y'^2 k \geq 2y'k \geq \ln k + (k+1)y',$$

o que mostra a primeira estimativa. Quanto a segunda temos que

$$4(2y')^{\frac{k}{2}+1} f(q_0^{(k-1)\kappa}) \geq 8y(2y')^{\frac{k}{2}} f(q_0^{k\kappa}).$$

Tomando y' grande o suficiente podemos observar que existe constante $A > 1$ tal que

$$8y(2y')^{\frac{k}{2}} f(q_0^{k\kappa}) \geq 8y'A^k \geq 2y'k \geq \ln k + (k+1)y'$$

O que mostra a estimativa 2.6 □

Finalmente, dizemos que o feixe é atravessado de modo "rigoroso" se e somente se para pelo menos um dos $(\frac{\psi\alpha\sqrt{N}}{6})^k$ pares de sítios (do nível 0) colineares, os k elos do feixe de escadas ruins que os une estão abertos. Portanto, por 2.3, 2.4 e 2.6, a probabilidade de um feixe de k escadas consecutivas ser atravessado de modo rigoroso é pelo menos q_k.

Observe inicialmente que devido a 2.3 e 2.4, a prova do teorema 2.2.8 continua válida se fizermos a exigência que os feixes de k escadas ruins consecutivas sejam atravessadas de modo "rigoroso". Isto é, para o valor da constante N escolhida temos que, $P^r_{N,p_1,p_2}(0 \leftrightarrow \infty) > 0$, onde P^r_{N,p_1,p_2} é a medida de probabilidade associada à Rede Hierárquica com parâmetro N, o superíndice r se refere ao fato de exigirmos que feixes de escadas ruins consecutivas sejam atravessadas de modo "rigoroso". Iremos mostrar que 2.5 é verdadeira com $c = P^r_{N,p_1,p_2}(0 \leftrightarrow \infty) > 0$.

Renormalização. Seja $(X(\xi^i_V))_{i\in\mathbb{Z}}, (X(\xi^i_H))_{i\in\mathbb{Z}})$ configuração de escadas boas e ruins, o parâmetro δ foi escolhido de modo que após agruparmos as escadas segundo o agrupamento KSV descrito na seção 2.3, as partições limite $\mathcal{C}^V_\infty$ e $\mathcal{C}^H_\infty$ (os superíndices V e H se referem às escadas verticais e horizontais respectivamente) são ambas $3N$-espaçadas com probabilidade estritamente positiva.

Denotaremos um elemento das partições $\mathcal{C}_i^V$, $i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ por $C^V(m,l)$, onde $C^V(m,l)$ é um aglomerado de escadas verticais de massa m e formado na etapa l, algumas vezes denotaremos por apenas C. Definimos $\alpha(C^V(m,l))$ e $\omega(C^V(m,l))$, os pontos inicial e final do aglomerado $C^V(m,l)$ como

$$\alpha(C^V(m,l)) = \min\{l \in \mathbb{Z}; \xi_l^V \in C^V(m,l)\},$$

$$\omega(C^V(m,l)) = \max\{l \in \mathbb{Z}; \xi_{l-1}^V \in C^V(m,l)\}.$$

De modo análogo definimos $\alpha(C^H(m,l))$ e $\omega(C^H(m,l))$ para os aglomerados de escadas horizontais.

Com o objetivo de mostrar 2.5, a idéia é mostrar que para toda $(X(\xi_V^i))_{i\in\mathbb{Z}}, (X(\xi_H^i))_{i\in\mathbb{Z}})$ configuração de escadas $3N$-espaçada o modelo de percolação de elos com configurações de escadas boas e ruins $3N$-espaçadas pode ser comparado com o modelo de percolação na Rede Hierárquica, com parâmetro N, com a exigência que feixes de escadas ruins consecutivas sejam atravessados de modo rigoroso. Esta comparação é realizada de modo que percolação neste último modelo implique em percolação no primeiro, portanto a equação 2.5 estará provada.

A chave desta comparação é a seguinte proposição cuja demonstração será deixada para o final.

Proposição 2.4.2 *Seja $\mathcal{C}(m,l)$ um aglomerado de escadas de massa m e formado na etapa l que separa dois sítios abertos, de nível m adjacentes. Então, a probabilidade destes dois sítios estarem conectados através de $\mathcal{C}(m,l)$ não é inferior à probabilidade destes mesmos sítios, isto é, com as mesmas configurações internas de elos e sítios abertos, estarem conectados através de um feixe de m escadas ruins consecutivas de modo "rigoroso".*

Seguirá da prova da proposição acima que o aglomerado de elos e sítios abertos atravessa os feixes de escadas ruins consecutivas de $C(m,l)$ segundo uma linha reta.

Os elos e sítios da rede renormalizada serão definidos segundo o procedimento a seguir.

<u>Nível 1:</u> Em cada região retangular compreendida entre 4 aglomerados de escadas de massa pelo menos 1, dois aglomerados verticais consecutivos e dois aglomerados horizontais consecutivos, digamos C_1^V, C_2^V, C_1^H e C_2^H, podemos subdividir esta região em quadrados e retângulos culos lados têm pelo menos N sítios (do nível 0) e no máximo $2N-1$ sítios (do nível 0) da seguinte maneira: sejam j^V e j^H definidos como

$$j^V = \left\lfloor \frac{\alpha(C_2^V) - \omega(C_1^V) + 1}{N} \right\rfloor \geq 3,$$

$$j^H = \left\lfloor \frac{\alpha(C_2^H) - \omega(C_1^H) + 1}{N} \right\rfloor \geq 3.$$

Cada sítio do nível 1 é o subgrafo de $\mathbb{Z}^2$ determinado por cada um dos $j^V \cdot j^H$ retângulos

$$[(r-1)N + \omega(C_1^V), rN + \omega(C_1^V)] \times [(s-1)N + \omega(C_1^H), sN + \omega(C_1^H)],$$

$$[(j^V-1)N + \omega(C_1^V), \alpha(C_2^V)] \times [(s-1)N + \omega(C_1^H), sN + \omega(C_1^H)],$$

$$[(r-1)N + \omega(C_1^V), rN + \omega(C_1^V)] \times [(j^H-1)N + \omega(C_1^H), \alpha(C_2^H)],$$

$$[(j^V-1)N + \omega(C_1^V), \alpha(C_2^V)] \times [(j^H-1)N + \omega(C_1^H), \alpha(C_2^H)],$$

para $r = 1, \ldots, j^V - 1 \quad s = 1, \ldots, j^H - 1$.

Podemos observar que cada sítio do nível 1 é um retângulo de elos e sítios do nível 0 cujos lados do retângulo têm entre N e $2N-1$ sítios do nível 0. Dizemos que um sítio do nível 1 está aberto se o evento A_R ocorre no respectivo retângulo R que define o sítio. Neste caso, como na Rede Hierárquica, temos que a probabilidade que cada sítio estar aberto é pelo menos q_1 e os sítios estão abertos ou não de modo independente.

Considere um par de sítios do nível 1 adjacentes que é separado por uma escada boa ou uma escada ruim, isto é, um aglomerado de escadas de massa no máximo 1. Caso estes dois sítios do nível 1 estejam abertos, dizemos que o elo de nível 1 que os une está aberto se existe pelo menos um elo (do nível 0) aberto nesta escada unindo os aglomerados principais dos sítios de nível 1 adjacentes. Novamente, como no caso de Rede Hierárquica, temos que a probabilidade de um elo do nível 1 estar aberto dado que os dois sítios do nível 1 que este elo une estão abertos é de pelo menos q_1.

<u>Nível 2:</u> Os sítios de nível 2 serão definidos a partir dos sítios do nível 1 da seguinte maneira, cada região retangular compreendida entre 4 aglomerados de escadas, 2 verticais consecutivos e 2 horizontais consecutivos, de massa pelo menos 2, digamos C_1^V, C_2^V, C_1^H e C_2^H, é subdividida em regiões retangulares menores cujos lados têm pelo menos N sítios do nível 1 e no máximo $6N-1$ sítios do nível 1, esta divisão é feita da seguinte maneira: sejam j^V e j^H definidos como

$$j^V = \left\lfloor \frac{\alpha(C_2^V) - \omega(C_1^V) + 1}{3N^2} \right\rfloor \geq 3,$$

$$j^H = \left\lfloor \frac{\alpha(C_2^H) - \omega(C_1^H) + 1}{3N^2} \right\rfloor \geq 3.$$

Considere os $j^V \cdot j^H$ retângulos

$$[(r-1)3N^2 + \omega(C_1^V), r3N^2 + \omega(C_1^V)] \times [(s-1)3N^2 + \omega(C_1^H), s3N^2 + \omega(C_1^H)],$$

$$[(j^V-1)3N^2 + \omega(C_1^V), \alpha(C_2^V)] \times [(s-1)3N^2 + \omega(C_1^H), s3N^2 + \omega(C_1^H)],$$

$$[(r-1)3N^2+\omega(C_1^V), r3N^2+\omega(C_1^V)] \times [(j^H-1)3N^2+\omega(C_1^H),$$

$$[(j^V-1)3N^2+\omega(C_1^V), \alpha(C_2^V)] \times [(j^H-1)3N^2+\omega(C_1^H), \alpha(C_2^H)],$$

para $r = 1, \ldots, j^V - 1 \;\; s = 1, \ldots, j^H - 1$.

A cada um dos retângulos acima iremos associar um sítio do nível 2 que será formado por todos os sítios de nível 1 que estão totalmente contidos no retângulo e mais os sítios do nível 1 cujos respectivos sítios do nível 0 são compartilhados entre o retângulo em questão e os retângulos abaixo e a esquerda deste; caso este sítio do nível 1 tenha seus sítios do nível 0 em 4 retângulos distintos, este sítio do nível 1 pertencerá ao sítio do nível 2 que corresponde ao retângulo superior direito.

Podemos observar que cada sítio do nível 2 é um retângulo de elos e sítios do nível 1 cujos lados do retângulo têm entre N e $6N-1$ sítios do nível 1. Dizemos que um sítio do nível 2 está aberto se o evento A_R ocorre no respectivo retângulo R de elos e sítios do nível 1. Neste caso, como na Rede Hierárquica, temos que a probabilidade que cada sítio estar aberto é pelo menos q_2 e os sítios estão abertos ou não de modo independente.

Considere um par de sítios do nível 2 adjacentes que é separado por um aglomerado de escadas de massa no máximo 2. Caso estes dois sítios do nível 2 estejam abertos, dizemos que o elo de nível 2 que os une está aberto se existe caminho de elos e sítios (do nível 0) abertos unindo os aglomerados principais dos sítios de nível 2 adjacentes e atravessando os feixes de escadas ruins consecutivas deste aglomerado segundo uma linha reta. Novamente, como no caso da Rede Hierárquica e devido à proposição 2.4.2, temos que a probabilidade de um elo do nível 2 estar aberto dado que os dois sítios do nível 2 que este elo une estão abertos é de pelo menos q_2.

Nível $k(k \geq 3)$: Indutivamente, os sítios de nível k serão definidos a partir dos sítios do nível $k-1$ da seguinte maneira. Cada região retangular, compreendida entre 4 aglomerados de escadas, 2 verticais consecutivos e 2 horizontais consecutivos, de massa pelo menos k, digamos C_1^V, C_2^V, C_1^H e C_2^H, pode ser subdividida em regiões retangulares menores cujos lados têm pelo menos N sítios do nível $k-1$ e no máximo $6N-1$ sítios do nível $k-1$, esta divisão é feita da seguinte maneira: sejam j^V e j^H definidos como

$$j^V = \left\lfloor \frac{\alpha(C_2^V) - \omega(C_1^V) + 1}{3^{k-1}N^k} \right\rfloor \geq 3,$$

$$j^H = \left\lfloor \frac{\alpha(C_2^H) - \omega(C_1^H) + 1}{3^{k-1}N^k} \right\rfloor \geq 3.$$

Iremos realizar uma divisão em $j^V \cdot j^H$ retângulos análoga à dos níveis anteriores, onde cada lado dos novos retângulos tem entre $3^{k-1}N^k$ e $\frac{2}{3}(3N)^k$ sítios do nível 0, porém não contamos com aqueles sítios do nível 0 que estão no interior de aglomerados escadas de massa pelo menos 2.

A cada um dos retângulos acima iremos associar um sítio do nível k que será formado por todos os sítios de nível $k-1$ que estão totalmente contidos no retângulo e mais os sítios do nível $k-1$ cujos respectivos sítios do nível 0 são compartilhados entre o retângulo em questão e os retângulos abaixo e a esquerda deste; caso este sítio do nível $k-1$ tenha seus sítios do nível 0 em 4 retângulos distintos, este sítio do nível $k-1$ pertencerá ao sítio do nível k que corresponde ao retângulo superior direito.

Podemos observar que cada sítio do nível k é um retângulo de elos e sítios do nível $k-1$ cujos lados do retângulo têm entre N e $6N-1$ sítios do nível $k-1$. Dizemos que um sítio do nível k está aberto se o evento A_R ocorre no respectivo retângulo R de elos e sítios do nível $k-1$. Neste caso, como na Rede Hierárquica, temos que a probabilidade de cada sítio estar aberto é pelo menos q_k e os sítios estão abertos ou não de modo independente.

Considere um par de sítios do nível k adjacentes que é separado por um aglomerado de escadas de massa no máximo k. Caso estes dois sítios do nível k estejam abertos, dizemos que o elo de nível k que os une está aberto se existe caminho de elos e sítios (do nível 0) abertos unindo os aglomerados principais dos sítios de nível k adjacentes e atravessando os feixes de escadas ruins consecutivas deste aglomerado segundo uma linha reta. Novamente, como no caso de Rede Hierárquica e pela proposição 2.4.2, temos que a probabilidade de um elo do nível k estar aberto dado que os dois sítios do nível k que este elo une estão abertos é de pelo menos q_k.

Portanto, devido a proposição 2.4.2, nosso modelo de percolação original (teorema 2.2.1), com configuração de escadas boas e ruins $X(\xi_i^V)$ e $X(\xi_i^H)$ $3N$-espaçadas, pode ser comparado com o modelo de percolação na Rede Hierárquica com parâmetro N e com os feixes de escadas ruins consecutivas sendo atravessadas apenas de modo "rigoroso", de modo que percolação no último implique em percolação no primeiro.

Como já observado anteriormente, as constantes foram escolhidas de modo que a prova de percolação na Rede Hierárquica com parâmetro N e com os feixes de escadas ruins consecutivas sendo atravessadas apenas de modo "rigoroso" é idêntica à prova do teorema 2.2.8. Isto conclui a prova do teorema 2.2.1.

As próximas proposições serão usados na prova da proposição 2.4.2.

Como na proposição 2.2.10, a próxima proposição também diz respeito a cruzamentos dentro de retângulos, porém na próxima proposição iremos considerar regiões retangulares um pouco diferentes como na figura abaixo onde um dos lados menores da fronteira é formado apenas por elos perpendiculares ao lado em questão (no caso da figura abaixo, o lado direito é formado apenas por elos horizontais), sejam $l(R)$ e $c(R)$ as dimensões do menor e do maior lados de R, respectivamente. Dizemos que o retângulo R é cruzado centralmente (notação C_R) se existe caminho de elos e sítios abertos contidos em R conectando o vértice central do menor dos lados ao elo central do lado oposto, conforme a figura abaixo.

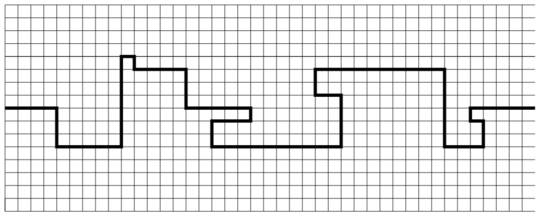

Figura 2.3: Um retângulo $c(R) \times l(R)$. Os traços mais fortes representam um caminho de elos e sítios que cruza R centralmente.

Os resultados seguintes serão usados a seguir na prova do teorema 2.4.2.

Proposição 2.4.3 *Para todo* $p_0 > p_c^m$ *existem* $L_0(p) > 0$ *e* κ *tal que*

$$P_p^m(C_R) \geq p^\kappa \ \forall \ p \geq p_0, \ \forall \ R \ com \ l(R) \geq \sqrt{L_0}, \ c(R) \leq l(R)^2$$

Demonstração: Faremos a prova no contexto de percolação de elos, pequenas modificações permitem a passagem para o caso de elos e sítios.

Em [10] (veja [22] para resultados análogos no caso do processo de contato) é mostrado que existe $\gamma(p)$ tal que

$$P_p\left(\{0\} \times [-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}] \not\leftrightarrow \infty | \text{Todos os elos do segmento } \{0\} \times [-\tfrac{N}{2}, \tfrac{N}{2}] \text{ estão abertos}\right) \leq \exp[-\gamma(p)N].$$

Então tome N grande o suficiente de modo que $\exp[-\gamma(p)N] < 1 - p$.

Em um quadrado de lado t, seja A_t o número de vértices de um dos lados do quadrado que estão conectados através de caminhos orientados ao vértice central do lado oposto (sem perda de generalidade suponha que este vértice é a origem); em [10] (ou [22], no caso de processo de contato) é mostrado também que condicionado ao evento $(0 \leftrightarrow \infty)$ existe constante $c = c(p) > 0$ tal que

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{A_t}{t} = c \quad q.c.$$

Portanto, podemos tomar t grande o suficiente de modo que

$$P_p(A_t > N | 0 \leftrightarrow \infty) > 1 - e^{-t}$$

e $(1+t)e^{-t} < 1-p$. Neste caso, tomando $t = \sqrt{L_0}$ temos que $P_p^m(C_R) > p^{2N+3}$. Logo a proposição estará provada tomando $\kappa = 2N+3$. $\square$

A partir daqui, por economia de notação denotaremos $b(n,p)|b(n,p) \neq 0$ simplesmente por $\widetilde{b}(n,p)$.

Proposição 2.4.4 *Sejam $X = b(n,p)$ variável aleatória com distribuição binomial com parâmetros n e p, e $X' = b(n,p')$ com $p \geq p'$. Então, $\widetilde{X} \succcurlyeq \widetilde{X'}$.*

Demonstração: Seja $f(n,k,p) = f(k,p) = P(b(n,p) = k)$. Temos que mostrar que para todo $m = 1, \ldots, n$

$$\frac{\sum_{k \geq m}^{n} f(k,p')}{\sum_{k \geq m}^{n} f(k,p)} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} f(k,p')}{\sum_{k=1}^{n} f(k,p)},$$

para isto é suficiente mostrar que a função $g(m) = \frac{\sum_{k \geq m}^{n} f(k,p')}{\sum_{k \geq m}^{n} f(k,p)}$ é decrescente em m, isto por sua vez é verdadeiro se $h(k) = \frac{f(k,p')}{f(k,p)}$ for decrescente em k. Como $h(k) = \left(\frac{1-p'}{1-p}\right)^n \left[\frac{p'(1-p)}{p(1-p')}\right]^k$, temos que $h(k)$ é decrescente em k se e somente se $\frac{p'}{1-p'} \leq \frac{p}{1-p}$ o que é verdade pois $p' \leq p$.
$\square$

Antes da prova da proposição 2.4.2, faremos algumas definições que serão úteis. Podemos indexar os sítios de nível k com os vértices de $\mathbb{Z}^2$; se $S_{v_1}^k$ e $S_{v_2}^k$ são sítios do nível k adjacentes, então temos que $v_2 = v_1 \pm e_i$, $i = 1,2$, onde e_i são os vetores da base canônica. A partir daqui, iremos supor que $v_2 = v_1 + (1,0)$, isto é, $S_{v_2}^k$ é o sítio de nível k imediatamente à direita de $S_{v_1}^k$. Suponha $S_{v_1}^k$ e $S_{v_2}^k$ separados por $C^V(m,l)$, um aglomerado de escadas verticais de massa m e etapa l ($l \geq k+1$).

A região entre os constituintes de $C(m,l)$, a poeira de aglomerados como foi denotada na seção 2.3, será chamada de meio poroso do nível l. Como na definição dos sítios durante a renormalização, podemos definir elos e sítios de nível até $l-1$ no meio poroso de nível l; porém como já foi dito durante a renormalização, os sítios de nível 0 dos meios porosos não são levados em consideração na contagem que define os sítios de nível k da rede renormalizada.

Definição 2.4.5 *A k-faixa determinada pelo par $S_{v_1}^k$ e $S_{v_2}^k$ é o subgrafo de $\mathbb{Z}^2$ contido no retângulo $[\alpha(C^V(m,l)), \omega(C^V(m,l))] \times [a_{v_1}, b_{v_1}]$, onde a_{v_1} e b_{v_1} são dados por*

$$a_{v_1} = \min\{y \in \mathbb{Z}; \exists (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \text{ sítio do nível 0, com } (x,y) \in \widetilde{S}^k_{v_1+(0,-\frac{3\sqrt{N}}{2})}\},$$

$$b_{v_1} = \max\{y \in \mathbb{Z}; \exists (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \text{ sítio do nível 0, com } (x,y) \in \widetilde{S}^k_{v_1+(0,+\frac{3\sqrt{N}}{2})}\}.$$

Onde $\widetilde{S}^k$ é o conjunto de todos os sítios de nível 0 pertencentes ao sítio do nível k S^k. Denotaremos esta k-faixa por $F^V(S_{v_1}^k, S_{v_2}^k, C^V(m,l))$.

Seja $C^V(m,l)$ formado na etapa l pelos r constituintes $C_i^V(m_i,l_i)$, com $m_i \geq l$ para todo $i = 1,\ldots,r$. Sejam $C_i'^V$ e $C_i''^V$ uma decomposição do aglomerado $C^V(m,l)$, conforme o lema 2.3.6 onde $C_i'^V$ é aglomerado de massa exatamente k e $\alpha(C^V(m,l)) = \alpha(C_i'^V)$.

Definição 2.4.6 *Os $r-1$ subgrafos de $F^V(S_{v_1}^k, S_{v_2}^k, C^V(m,l))$ contidos nos respectivos retângulos*

$$[\omega(C_i^V(m_i,l_i)), \omega(C_{i+1}'^V)] \times [a_{v_1}, b_{v_1}],\ i = 1,\ldots,r-1$$

são chamados de k-túneis de $F^V(S_{v_1}^k, S_{v_2}^k, C^V(m,l))$. Por definição aqueles 0-túneis que correspondem ao interior de duas escadas ruins consecutivas não existem, isto é, o conjunto de vértices de tal grafo é o conjunto vazio.

Observe que $F^V(S_{v_1}^k, S_{v_2}^k, C^V(m,l))$ têm no máximo $m-l$ k-túneis (veja observação 2.3.2).

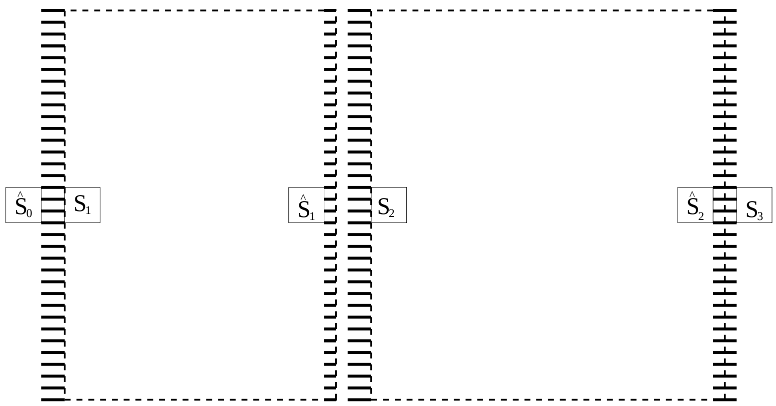

Figura 2.4: Uma 1-faixa, $F(\widehat{S}_0, S_3, C(5,2))$. As regiões contidas nos dois retângulos tracejados são os 1-túneis.

Sejam $S_{v_1}^k$ e $S_{v_2}^k$ sítios do nível k, adjacentes, ambos abertos e separados por um aglomerado de escadas $C(m,l)$ $(l \geq k+1)$. Então, como $S_{v_1}^k$ e $S_{v_2}^k$ estão abertos, podemos escolher pelo menos ψN pares de sítios do nível $k-1$, colineares, pertencendo aos aglomerados principais de $S_{v_1}^k$ e $S_{v_2}^k$ e cada um dos sítios de nível $k-1$ deste par é escolhido de modo que contenha sítios de nível 0 que também estejam em $C(m,l)$. Destes pelo menos ψN pares de sítios de nível $k-1$, podemos escolher $\frac{\psi\sqrt{N}}{3}$ pares de modo que as respectivas $k-1$-faixas sejam subgrafos disjuntos.

Notação Estes $\frac{\psi\sqrt{N}}{3}$ pares de sítios (do nível $k-1$) definidos acima serão chamados de pares de *sítios gêmeos* (do nível $k-1$). Indutivamente, para todo $i = l-1,\ldots,k-1$ podemos definir $\left(\frac{\psi\sqrt{N}}{3}\right)^{k-i}$ pares de sítios gêmeos de nível i. Iremos denotar os pares de sítios gêmeos do nível i, determinados por $S_{v_1}^k$ e $S_{v_2}^k$, por $S_{i,j}^k$ e $\widehat{S}_{i,j}^k$ para $i = l-1,\ldots,k-1$ e $j = 1,\ldots,\left(\frac{\psi\sqrt{N}}{3}\right)^{k-i}$.

Sejam $S^k_{l-1,j}$ e $\widehat{S}^k_{l-1,j}$ um par de sítios gêmeos (do nível $l-1$) determinado por $S^k_{v_1}$ e $S^k_{v_2}$, suponha que o aglomerado de escadas $C(m,l)$ que separa $S^k_{v_1}$ e $S^k_{v_2}$ seja formado por $R+1$ constituintes $C_1(m_1,l_1),\ldots,C_{R+1}(m_{R+1},l_{R+1})$ (observe que $m_r \geq l$, $l_r < l$ e $\sum_{r=1}^{R+1} m_r - R(l-1) = m$). Para cada $r = 1,\ldots,R+1$ sejam $\widehat{s}_{r-1}$ e s_r os sítios de nível $l-1$, colineares com $S^k_{l-1,j}$ e $\widehat{S}^k_{l-1,j}$ e situados imediatamente à esquerda e à direita de $C_r(m_r,l_r)$, respectivamente (observe que aqui temos que $\widehat{s}_0 = S^k_{l-1,j}$ e $s_{R+1} = \widehat{S}^k_{l-1,j}$); conforme mostrado na figura 2.4. Dado o par de sítios $\widehat{s}_{r-1}$ e s_r do nível $l-1$ separados por $C_r(m_r,l_r)$, de maneira análoga eles irão definir pares de sítios gêmeos de níveis $l_r - 1$ até $l-2$. Podemos prosseguir desta maneira até definirmos os pares de sítios gêmeos do nível 0. Portanto, observe que os sítios gêmeos do nível 0 pertencentes a $S^k_{v_2}$ não são necessariamente pares gêmeos de sítios do nível 0 de $S^k_{v_1}$. A figura 2.5 abaixo ilustra esta situação no caso $l=2$ e $m=4$.

Com objetivo de simplificar a notação, a partir daqui, faremos $n = \frac{\psi\sqrt{N}}{3}$.

Definição 2.4.7 *Para todo $i = l-1,\ldots,k-1$, definimos a i-sombra induzida pelo par $S^k_{v_1}$ e $S^k_{v_2}$ na reta $\{z\}\times\mathbb{Z}$, com $z \in [\alpha(C(m,l)),\omega(C(m,l))]$ como o seguinte conjunto dos sítios de nível 0*

$$\{(z,y)\in\mathbb{Z}^2; \exists(x,y)\in\mathbb{Z}^2 \ com \ (x,y)\in \cup_{j=1}^{n^{k-i}} \widetilde{S}^k_{i,j}\}.$$

De modo análogo, para os pares de sítios $\widehat{s}_{r-1}$ e s_r do nível $l-1$ separados por $C_r(m_r,l_r)$, podemos definir, para todo $i = l_r-1,\ldots,l-2$, a i-sombra induzida por $\widehat{s}_{r-1}$ e s_r na reta $\{z\}\times\mathbb{Z}$, com $z\in[\alpha(C_r(m_r,l_r)),\omega(C_r(m_r,l_r))]$. Observe que as 0 sombras induzidas pelos sítios gêmeos de $S^k_{v_2}$ na reta $\omega(C(m,l))\times\mathbb{Z}$ não são necessariamente determinadas pelos sítios gêmeos de nível 0 de $S^k_{v_1}$ (veja figura abaixo).

Definição 2.4.8 *Definimos um 0-vetor, $\mathcal{N}_0$, como uma variável aleatória que assume os valores 0 ou 1; dado $r\in\mathbb{N}$ definimos um r-vetor, $\mathcal{N}_r = (\mathcal{N}_{r,1},\ldots,\mathcal{N}_{r,n})$, como um vetor de n componentes ($n = \frac{\psi\sqrt{N}}{3}$) independentes, em que cada componente é um $r-1$-vetor. Se $\mathcal{N}_0$ é um 0-vetor, definimos $\#\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}_0$ e se $\mathcal{N}_r = (\mathcal{N}_{r,1},\ldots,\mathcal{N}_{r,n})$ é um r-vetor definimos $\#\mathcal{N}_r = \sum_{i=1}^n \#\mathcal{N}_{r,i}$. Finalmente, sejam $\mathcal{N}_0$ e $\widehat{\mathcal{N}}_0$ 0-vetores, dizemos que $\mathcal{N}_0 \preccurlyeq \widehat{\mathcal{N}}_0$ se $\mathcal{N}_0$ é dominado estocasticamente (no sentido usual) por $\widehat{\mathcal{N}}_0$ e $\forall\ r\in\mathbb{N}$ dizemos que $\mathcal{N}_r \preccurlyeq \widehat{\mathcal{N}}_r$ se $\mathcal{N}_{r,i} \preccurlyeq \widehat{\mathcal{N}}_{r,i}, \forall\ i = 1,\ldots,n$ (já que as componentes são independentes).*

Sejam $S^k_{v_1}$ e $S^k_{v_2}$ sítios do nível k, adjacentes, ambos abertos e separados por um aglomerado de escadas $C(m,l)$ ($l \geq k+1$). Iremos utilizar a notação $\mathcal{N}_k(S^k_{v_1}, S^k_{v_2}, C(m,l))$ para designar o k-vetor das funções indicadoras que diz quais das 0-sombras, induzidas por

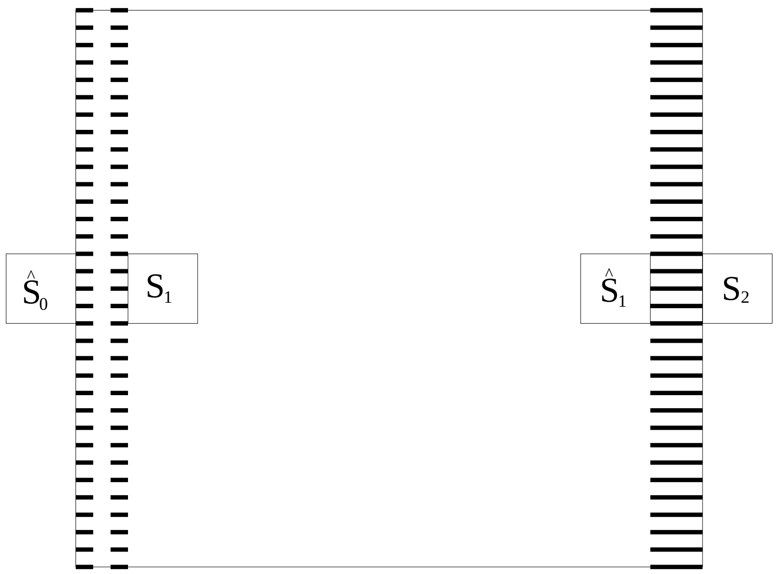

Figura 2.5: No 1-túnel acima, $\widehat{S}_0$, S_1, $\widehat{S}_1$ e S_2 são sítios abertos do nível 1. As 0-sombras induzidas em S_2 são determinadas pelo par $\widehat{S}_1$ e S_2; analogamente para o par $\widehat{S}_0$ e S_1.

$S^k_{v_2}$ na linha $\{\omega(C(m,l))\} \times \mathbb{Z}$, estão conectadas ao aglomerado principal de $S^k_{v_1}$. Observe que a probabilidade dos aglomerados principais de $S^k_{v_1}$ e $S^k_{v_2}$ estarem conectados através de $C(m,l)$ é $P\{\#\mathcal{N}_k(S^k_{v_1}, S^k_{v_2}, C(m,l)) \neq 0\}$. Seja $\mathcal{N}$ um r-vetor qualquer, como antes iremos usar a notação $\widetilde{\mathcal{N}}$ para designar a distribuição do r-vetor $\mathcal{N}|\#\mathcal{N} \neq 0$.

Demonstração da proposição 2.4.2

Iremos provar algo um pouco mais forte. Mostraremos que na definição de "rigoroso", dependendo da etapa em que o aglomerado de escadas é formado, nem todas as moedas serão necessárias. Mostraremos que a probabilidade de um par de sítios $S^m_{v_1}$ e $S^m_{v_1}$ adjacentes (podemos supor que $v_2 = v_1 + (1,0)$), do nível m, ambos abertos e separados pelo aglomerado de escadas $C(m,l)$, ser conectado através de $C(m,l)$, não é inferior à probabilidade destes mesmos sítios (isto é, com as mesmas configurações internas de elos e sítios abertos) estarem conectados através de um feixe de m escadas ruins consecutivas como no modo "rigoroso", porém sem lançarmos as moedas cuja probabilidade de sucesso é q^κ_i, $\forall\ m-2 \geq i \geq l$, isto é, só lançamos as moedas cuja probabilidade de sucesso é q^κ_i, $\forall\ i = 0, ..., l-1$. Para distinguir este caso do modo "rigoroso", iremos denotá-lo como o modo "fracamente rigoroso". Iremos utilizar a notação $X^{l-1}_k(m)$ para denotar o número dos n^k sítios gêmeos do nível 0 determinados por $S^k_{v_1}$ e $S^k_{v_2}$, sítios de nível k abertos, que estão conectados através de um feixe de m escadas ruins consecutivas de modo "fracamente rigoroso", lançando apenas as moedas cuja probabilidade de sucesso é q^κ_i, $\forall\ i = 0, ..., l-1$.

Portanto, gostaríamos de mostrar que

$$P\{\#\mathcal{N}_m(S^m_{v_1}, S^m_{v_2}, C(m,l)) \neq 0\} \geq P\{X^{R_{l-1}}_m(m) \neq 0\}.$$

A prova é por indução em l, a etapa em que o aglomerado foi formado. O caso $l = 0$ é trivial, pois os elementos da partição $\mathcal{C}_0$ são todos conjuntos unitários. Com objetivo de maior clareza no passo de indução, provaremos inicialmente os casos $l = 1$ e $l = 2$.

$\underline{l = 1}$ Sejam $S^m_{v_1}$ e $S^m_{v_2}$ sítios adjacentes (podemos supor que $v_2 = v_1 + (1, 0)$), do nível m, ambos abertos e separados por um aglomerado de escadas, $C(m, 1)$, de massa m e formado na primeira etapa.

Como $S^m_{v_1}$ e $S^m_{v_2}$ estão abertos existem pelo menos n^m pares de sítios gêmeos do nível 0 de modo que as respectivas 0-faixas sejam subgrafos disjuntos. É suficiente mostrarmos que a probabilidade de cada par de sítios gêmeos (do nível 0) s e $\widehat{s}$ estar conectado através de $F(s, \widehat{s}, C(m, 1))$ por um caminho de elos e sítios abertos contido em $F(s, \widehat{s}, C(m, 1))$ não é inferior à probabilidade do mesmo par de sítios do nível 0 estar conectado através de um feixe de m escadas ruins consecutivas percorridas de modo "fracamente rigoroso".

Sabemos que cada 0-faixa de $C(m, 1)$ tem no máximo $m - 1$ 0-túneis e cada 0-túnel tem largura $3\sqrt{N}$ e comprimento no máximo $3N$ (na escala do nível 0). Suponha que cada 0-faixa contenha exatamente $k (k \leq m - 1)$ 0-túneis, isto é, $C(m, 1)$ é composto por exatamente m escadas ruins que estão agrupadas em $k + 1$ blocos de escadas ruins consecutivas. Sejam $B_1(m_1), ..., B_{k+1}(m_{k+1})$ estes $k + 1$ blocos onde o i-ésimo bloco é formado por exatamente m_i escadas ruins consecutivas (é claro que $m = \sum_{i=1}^{k+1} m_i$).

Sejam s_i e $\widehat{s}_i$ sítios (de nível 0) colineares com s e $\widehat{s}$, onde s_i é o sítio situado imediatamente a direita de $B_i(m_i)$ e $\widehat{s}_i$ é o sítio situado imediatamente a esquerda de $B_{i+1}(m_{i+1})$. Dizemos que o 0-túnel que contém s_i e $\widehat{s}_i$ é bom se existe caminho de elos e sítios (do nível 0) abertos, totalmente contido no respectivo 0-túnel, conectando s_i a $\widehat{s}_i$. Pelo lema 2.4.3 sabemos que a probabilidade de um 0-túnel ser bom é pelo menos q_0^{κ}.

Dizemos que o par de sítios s e $\widehat{s}$ (do nível 0) é conectado através da respectiva 0-faixa se todos os k 0-túneis são bons e para todo $i = 1, \ldots, k + 1$ os m_i elos do segmento de reta que une $\widehat{s}_i$ a s_{i+1} estão todos abertos (aqui $\widehat{s}_0 = s$ e $s_{k+1} = \widehat{s}$).

Seja X o número de pares de sítios (do nível 0) colineares que estão conectados através de $C(m, 1)$ e $X^0_m(m)$ o número de pares que estariam conectados através de um feixe de m escadas ruins consecutivas percorridas de modo "fracamente rigoroso". Como cada 0-faixa de $C(m, 1)$ tem no máximo $m - 1$ 0-túneis, temos que

$$X \succcurlyeq b(n^m, p_1^m . q_0^{(m-1)\kappa}) \backsim X^0_m(m)$$

Isto conclui o caso $l = 1$.

$\underline{l=2}$ Sejam $S^m_{v_1}$ e $S^m_{v_2}$ sítios adjacentes (podemos supor que $v_2 = v_1 + (1,0)$, do nível m, ambos abertos e separados por um aglomerado de escadas, $C(m,2)$, de massa m e formado na segunda etapa.

Como $S^m_{v_1}$ e $S^m_{v_2}$ estão abertos existem n^{m-1} pares de sítios gêmeos do nível 1 de modo que as respectivas 1-faixas sejam subgrafos disjuntos. É suficiente mostrarmos que a probabilidade de cada par de sítios gêmeos (do nível 1) s e $\widehat{s}$ estar conectado através de $F(s,\widehat{s},C(m,2))$ por um caminho de elos e sítios abertos contido em $F(s,\widehat{s},C(m,2))$ não é inferior à probabilidade do mesmo par de sítios gêmeos do nível 1 estar conectado através de um feixe de m escadas ruins consecutivas percorridas de modo "fracamente rigoroso". Isto é, basta mostrar que

$$P\{\#\mathcal{N}_1(s,\widehat{s},C(m,2)) \neq 0\} \geq P\{X^1_1(m) \neq 0\}. \tag{2.7}$$

Sabemos que cada 1-faixa $F(s,\widehat{s},C(m,2))$ tem no máximo $m-2$ 1-túneis e cada 1-túnel tem largura $3\sqrt{N}$ e comprimento no máximo $9N$ (na escala do nível 1, isto é, o 1-túnel é um retângulo com um lado com $3\sqrt{N}$ sítios do nível 1 e o outro lado tem no máximo $9N$ sítios do nível 1). Suponha que cada 1-faixa contenha exatamente $k(k \leq m-2)$ 1-túneis, isto é, $C(m,2)$ é composto por exatamente $k+1$ aglomerados formados na primeira etapa e de massa pelo menos 2; digamos $C_1(m_1,1),...,C_{k+1}(m_{k+1},1)$ (é claro que $m = \sum_{i=1}^{k+1} m_i - k$), pelo lema 2.3.6 os aglomerados $C_i(m_i,1)$, $\forall\ i = 2,...,k+1$ podem ser decompostos sob a forma $C'_i \oplus C''_i$, onde C'_i é um aglomerado de massa 1 (e portanto, formado no máximo até a primeira etapa), chamaremos C'_i e C''_i de partes não-essencial e essencial de $C_i(m_i,1)$, respectivamente.

Sejam s_i e $\widehat{s}_i$ sítios (de nível 1) colineares com s e $\widehat{s}$, onde s_i é o sítio situado imediatamente a direita de $C_i(m_i,1)$ e $\widehat{s}_i$ é o sítio situado imediatamente a esquerda de $C_{i+1}(m_{i+1},1)$; como no caso $l=1$, temos que, caso s e s_1 estejam abertos, s e s_1 possuem pelo menos n pares de sítios gêmeos (do nível 0), com um sítio de cada lado da fronteira exterior de $C_1(m_1,1)$ e com as respectivas 0-faixas disjuntas, temos o mesmo para $\widehat{s}_i$, s_{i+1} e $C_{i+1}(m_{i+1},1)$, com $i=1,...,k-1$, e $\widehat{s}_k$, $\widehat{s}$ e $C_{k+1}(m_{k+1},1)$ respectivamente. Dizemos que o 1-túnel que contém s_i e $\widehat{s}_i$ é bom se s_i e $\widehat{s}_i$ estão abertos, existe caminho de elos e sítios (do nível 1) abertos, totalmente contidos no respectivo 1-túnel, conectando s_i a $\widehat{s}_i$ e pelo menos 1 dos n sítios gêmeos (do nível 0) de $\widehat{s}_i$ está conectado ao outro lado de C'_{i+1} (isto é, o elo de C'_{i+1} adjacente ao sítio em questão está aberto, já que C'_{i+1} é apenas uma escada ruim).

Seja $T_{1,i}$ a probabilidade do i-ésimo 1-túnel, isto é, aquele que contém s_i e $\widehat{s}_i$, estar aberto. Pelo lema 2.4.3 sabemos que $T_{1,i} \geq q^{\kappa}_1$, $\forall\ i = 1,\ldots,k$.

É condição suficiente para que o par de sítios s e $\widehat{s}$ (do nível 1) seja conectado através da respectiva 1-faixa que os seguintes eventos ocorram: todos os 1-túneis são bons; pelo menos um dos n pares de sítios gêmeos do nível 0 determinados por s e s_1 estão conectados através de $F(s, s_1, C_1(m_1, 1))$; pelo menos um dos n pares de sítios gêmeos do nível 0 determinados por $\widehat{s}_i$ e s_{i+1} estão conectados através de $F(\widehat{s}_i, s_{i+1}, C_{i+1}(m_{i+1}, 1))$, $\forall\ i = 2, ..., k-1$ (observe que dado que o 1-túnel em questão é bom, a parte não essencial de $C_{i+1}(m_{i+1}, 1)$ é sempre atravessada) e pelo menos um dos n pares de sítios gêmeos do nível 0 determinados por $\widehat{s}_k$ e $\widehat{s}$ estão conectados através de $F(\widehat{s}_k, \widehat{s}, C_{k+1}(m_{k+1}, 1))$.

De fato, é suficiente mostrarmos que para todo $i = 1, \ldots, k+1$

$$P\{\#\mathcal{N}_1(s, s_i, span[\cup_{s=1}^{i} C_s(m_s, 1)]) \neq 0\} \geq q_1^{(i-1)\kappa} P\{X_1^0(\sum_{s=1}^{i} m_s - (i-1)) \neq 0\}. \quad (2.8)$$

Aqui estamos cometendo a abuso de notação em denotar por $span[\cup_{s=1}^{i} C_s(m_s, 1)]$ o aglomerado C tal que $I(C) = span[\cup_{s=1}^{i} I(C_s)]$. Fazendo $i = k+1$ na equação 2.8 temos que

$$P\{\#\mathcal{N}_1(s, \widehat{s}, C(m, 2)) \neq 0\} \geq q_1^{k\kappa} P\{X_1^0(m) \neq 0\} \geq P\{X_1^1(m) \neq 0\}$$

o que prova 2.7.

A prova de 2.8 é por indução em i. O caso $i = 1$ é imediato já que $C_1(m_1, 1)$ é aglomerado do nível 1. Suponha 2.8 válida para todo $i = 1, \ldots, j$.

Seja $\mathcal{X}_i$ o 1-vetor das funções indicadoras que diz quais das 0-sombras, induzidas por $\widehat{s}_i$ e s_{i+1} na linha $\{\omega(C'_{i+1}(m_{i+1}, l_{i+1}))\} \times \mathbb{Z}$, estão conectadas ao aglomerado principal de s.

Seja $\mathcal{Y}_i$ o 1-vetor

$$\mathcal{Y}_i = \delta_0[1 - q_1^{i\kappa} P\{X_1^0(\sum_{s=1}^{i} m_s - (i-1)) \neq 0\}] +$$

$$+ \widetilde{X_1^0}(\sum_{s=1}^{i} m_s - (i-1)) q_1^{i\kappa} P\{X_1^0(\sum_{s=1}^{i} m_s - (i-1)) \neq 0\}$$

que é o 1-vetor que representa a distribuição dos sítios gêmeos de s e $\widehat{s}$ que atravessam um feixe de $\sum_{s=1}^{i} m_s - (i-1)$ escadas ruins consecutivas de modo "fracamente rigoroso" condicionado a sucesso em todos os i lançamentos independentes de uma moeda cuja probabilidade de sucesso é q_1^κ, caso o resultado de pelo menos uma moeda seja fracasso fazemos $\mathcal{Y}_i = \delta_0$. Aqui δ_0 é o 1-vetor cuja distribuição é concentrada no 1-vetor $\mathcal{N}_1 = 0$.

Neste caso, temos que a distribuição de $\mathcal{X}_j$ é dada por

$$\mathcal{X}_j \backsim \delta_0(1 - T_{1,j} P\{\#\mathcal{N}_1(s, s_j, span[\cup_{s=1}^{j} C_s(m_s, 1)]) \neq 0\}) +$$

$$+ \widetilde{\mathcal{N}}_1(\widehat{s}_j, s_{j+1}, C'_{j+1})T_{1,j}P\{\#\mathcal{N}_1(s, s_j, span[\cup_{s=1}^{j} C_s(m_s, 1)]) \neq 0\} \succcurlyeq$$

$$\succcurlyeq \delta_0(1 - q_1^{\kappa} q_1^{(j-1)\kappa} P\{X_1^0(\sum_{s=1}^{j} m_s - (j-1)) \neq 0\}) +$$

$$+ \widetilde{\mathcal{N}}_1(\widehat{s}_j, s_{j+1}, C'_{j+1}) q_1^{\kappa} q_1^{(j-1)\kappa} P\{X_1^0(\sum_{s=1}^{j} m_s - (j-1)) \neq 0\} \backsim$$

$$\backsim \delta_0(1 - q_1^{j\kappa} P\{X_1^0(\sum_{s=1}^{j} m_s - (j-1)) \neq 0\}) + \widetilde{X_1^0(1)} q_1^{j\kappa} P\{X_1^0(\sum_{s=1}^{j} m_s - (j-1)) \neq 0\} \succcurlyeq$$

$$\succcurlyeq \delta_0(1 - q_1^{j\kappa} P\{X_1^0(\sum_{s=1}^{j} m_s - (j-1)) \neq 0\}) +$$

$$+ \widetilde{X_1^0}(\sum_{s=1}^{j} m_s - (j-1)) q_1^{j\kappa} P\{X_1^0(\sum_{s=1}^{j} m_s - (j-1)) \neq 0\} \backsim \mathcal{Y}_j$$

Aqui, temos que a primeira desigualdade é devido à proposição 2.4.3 e a hipótese de indução; a primeira igualdade de distribuições é devido ao fato que $\mathcal{N}_1(\widehat{s}_j, s_{j+1}, C'_{j+1}) \backsim b(n, p_1) \backsim X_1^0(1)$ e a segunda desigualdade é devido à proposição 2.4.4 e ao fato que

$$X_1^0(1) \backsim b(n, p_1) \succcurlyeq b(n, p_1^{\sum_{s=1}^{j} m_s - (j-1)} q_0^{[\sum_{s=1}^{j} m_s - (j-1) - 1]\kappa}) \backsim X_1^0(\sum_{s=1}^{j} m_s - (j-1)).$$

Portanto, temos que $\mathcal{X}_i \succcurlyeq \mathcal{Y}_i$, o que implica em

$$P\{\#\mathcal{N}_1(s, s_{j+1}, span[\cup_{s=1}^{j+1} C_s(m_s, 1)]) \neq 0\} \geq$$

$$\geq q_1^{j\kappa} P\{\#\mathcal{N}_1(s, s_{j+1}, C^{R_0}(\sum_{s=1}^{j} m_s - (j-1)) \oplus C''_{j+1}) \neq 0\} \geq$$

$$\geq q_1^{j\kappa} P\{X_1^0(\sum_{s=1}^{j+1} m_s - j) \neq 0\}$$

onde $C^{R_l}(m)$ é um aglomerado de m escadas ruins consecutivas que só pode ser atravessado de modo "fracamente rigoroso" lançando apenas as moedas cuja probabilidade de sucesso é q_i^{κ}, $i = 0, \ldots, l$; pelo item *ii)* do lema 2.3.6 temos que $C^{R_0}(\sum_{s=1}^{j} m_s - (j-1)) \oplus C''_{j+1}$ é um aglomerado de escadas de massa exatamente $\sum_{s=1}^{j+1} m_s - j$. Portanto 2.8 é válida para $i = j+1$. O que conclui o caso $l = 2$.

$\underline{l = r(r \geq 3)}$ Suponha, por indução, a proposição válida para todo $l < r$. Sejam $S_{v_1}^m$ e $S_{v_2}^m$ sítios adjacentes (podemos supor que $v_2 = v_1 + (1,0)$), do nível m, ambos abertos e separados por um aglomerado de escadas, $C(m,r)$, de massa m e formado na r-ésima etapa.

Como $S_{v_1}^m$ e $S_{v_2}^m$ estão abertos existem n^{m-r+1} pares de sítios gêmeos do nível $r-1$ pertencendo aos aglomerados principais de $S_{v_1}^m$ e $S_{v_2}^m$ de modo que as respectivas $r-1$-faixas sejam subgrafos disjuntos. É suficiente mostrarmos que a probabilidade de cada um destes pares de sítios gêmeos, s e $\widehat{s}$, do nível $r-1$ estar conectado através de $F(s,\widehat{s},C(m,r))$ por um caminho de elos e sítios abertos contido em $F(s,\widehat{s},C(m,r))$ não é inferior à probabilidade do mesmo par de sítios gêmeos do nível $r-1$ estar conectado através de um feixe de m escadas ruins consecutivas percorridas de modo "fracamente rigoroso". Isto é, basta mostrar que

$$P\{\#\mathcal{N}_{r-1}(s,\widehat{s},C(m,r)) \neq 0\} \geq P\{X_{r-1}^{r-1}(m) \neq 0\}. \tag{2.9}$$

Sabemos que cada $r-1$-faixa $F(s,\widehat{s},C(m,r))$ tem no máximo $m-r$ $r-1$-túneis e cada $r-1$-túnel tem largura $3\sqrt{N}$ e comprimento no máximo $9N$ (na escala do nível $r-1$, isto é, o $r-1$-túnel é um retângulo com um lado com $3\sqrt{N}$ sítios do nível $r-1$ e o outro lado têm no máximo $9N$ sítios do nível $r-1$). Suponha que cada $r-1$-faixa contém exatamente $k(k \leq m-r)$ $r-1$-túneis, isto é, $C(m,r)$ é composto por exatamente $k+1$ aglomerados formados, no máximo, até a etapa $r-1$ e de massa pelo menos r; digamos $C_1(m_1,l_1),...,C_{k+1}(m_{k+1},l_{k+1})$ (é claro que $m = \sum_{i=1}^{k+1} m_i - k(r-1)$ e $l_i \leq r-1$), pelo lema 2.3.6 os aglomerados $C_i(m_i,l_i)$, $\forall\ i = 2,...,k+1$ podem ser decompostos sob a forma $C_i' \oplus C_i''$, onde C_i' é um aglomerado de massa $r-1$ (e portanto, formado no máximo até a etapa $r-2$), chamaremos C_i' e C_i'' de partes não-essencial e essencial de $C_i(m_i,l_i)$, respectivamente.

Sejam s_i e $\widehat{s}_i$ sítios (de nível $r-1$) colineares com s e $\widehat{s}$, onde s_i é o sítio situado imediatamente a direita de $C_i(m_i,l_i)$ e $\widehat{s}_i$ é o sítio situado imediatamente a esquerda de $C_{i+1}(m_{i+1},1)$; como nos casos anteriores, temos que, caso s e s_1 estejam abertos, s e s_1 possuem pelo menos n pares de sítios gêmeos (do nível $r-2$) com um sítio de cada lado da fronteira exterior de $C_1(m_1,l_1)$ e com as respectivas $r-2$-faixas de cada par disjuntas, temos o mesmo para $\widehat{s}_i$, s_{i+1} e $C_{i+1}(m_{i+1},l_{i+1})$, com $i = 1,...,k-1$, e $\widehat{s}_k$, $\widehat{s}$ e $C_{k+1}(m_{k+1},l_{k+1})$ respectivamente. Dizemos que o $r-1$-túnel que contém s_i e $\widehat{s}_i$ é bom se s_i e $\widehat{s}_i$ estão abertos, existe caminho de elos e sítios (do nível $r-1$) abertos conectando s_i a $\widehat{s}_i$ e pelo menos 1 dos n sítios gêmeos (do nível $r-2$) de $\widehat{s}_i$ está conectado ao outro lado de C'_{i+1}. Pelo lema 2.4.3 sabemos que a probabilidade de um $r-1$-túnel ser bom é pelo menos q_{r-1}^{κ}.

É condição suficiente, para que o par de sítios s e $\widehat{s}$ (do nível $r-1$) seja conectado através da respectiva $r-1$-faixa, que os seguintes eventos ocorram: todos os $r-1$-túneis são bons, pelo menos um dos n pares de sítios gêmeos do nível $r-2$ determinados por s e s_1 estão conectados através de $F(s, s_1, C_1(m_1, l_1))$, pelo menos um dos n pares de sítios gêmeos do nível $r-2$ determinados por $\widehat{s}_i$ e s_{i+1} estão conectados através de $F(\widehat{s}_i, s_{i+1}, C_{i+1}(m_{i+1}, l_{i+1}))$, $\forall\ i = 2, ..., k-1$ (observe que dado que o $r-1$-túnel em questão é bom, a parte não essencial de $C_{i+1}(m_{i+1}, l_{i+1})$ é sempre atravessada) e pelo menos um dos n pares de sítios gêmeos, do nível $r-2$, determinados por $\widehat{s}_k$ e $\widehat{s}$ estão conectados através de $F(\widehat{s}_k, \widehat{s}, C_{k+1}(m_{k+1}, l_{k+1}))$.

Como no caso $l = 2$, é suficiente mostrarmos que para todo $i = 1, \ldots, k+1$

$$P\{\#\mathcal{N}_{r-1}(s, s_i, span[\cup_{s=1}^{i} C_s(m_s, l_s)]) \neq 0\} \geq q_{r-1}^{(i-1)\kappa} P\{X_{r-1}^{r-2}(\sum_{s=1}^{i} m_s - (i-1)) \neq 0\}. \tag{2.10}$$

Pois fazendo $i = k+1$ na equação 2.10 temos que

$$P\{\#\mathcal{N}_{r-1}(s, \widehat{s}, C(m, r)) \neq 0\} \geq q_{r-1}^{k\kappa} P\{X_{r-1}^{r-2}(m) \neq 0\} \geq P\{X_{r-1}^{r-1}(m) \neq 0\}$$

o que prova 2.9.

A prova de 2.10 é por indução em i. O caso $i = 1$ é imediato já que $C_1(m_1, l_1)$ é aglomerado do nível $l_1 \leq r-1$. Suponha 2.10 válida para todo $i = 1, \ldots, j$.

Seja $\mathcal{X}_i$ o $r-1$-vetor das funções indicadoras que diz quais das 0-sombras, induzidas por $\widehat{s}_i$ e s_{i+1} na linha $\{\omega(C'_{i+1}(m_{i+1}, l_{i+1}))\} \times \mathbb{Z}$, estão conectadas ao aglomerado principal de s.

Seja $\mathcal{Y}_i$ o $r-1$-vetor

$$\mathcal{Y}_i = \delta_0[1 - q_{r-1}^{i\kappa} P\{X_{r-1}^{r-2}(\sum_{s=1}^{i} m_s - (i-1)) \neq 0\}] +$$

$$+ \widetilde{X}_{r-1}^{r-2}(\sum_{s=1}^{i} m_s - (i-1)) q_{r-1}^{i\kappa} P\{X_{r-1}^{r-2}(\sum_{s=1}^{i} m_s - (i-1)) \neq 0\}$$

que é o $r-1$-vetor que representa a distribuição dos sítios gêmeos de s e $\widehat{s}$ que atravessam um feixe de $\sum_{s=1}^{i} m_s - (i-1)$ escadas ruins consecutivas de modo "fracamente rigoroso" condicionado a sucesso em todos os i lançamentos independentes de uma moeda cuja probabilidade de sucesso é q^{κ}_{r-1}, caso o resultado de pelo menos uma moeda seja fracasso fazemos $\mathcal{Y}_i = \delta_0$. Aqui δ_0 é o $r-1$-vetor cuja distribuição é concentrada no $r-1$-vetor $\mathcal{N}_{r-1} = 0$.

Neste caso, temos que a distribuição de $\mathcal{X}_j$ é dada por

$$\mathcal{X}_j \backsim \delta_0(1 - T_{r-1,j} P\{\#\mathcal{N}_{r-1}(s, s_j, span[\cup_{s=1}^{j} C_s(m_s, l_s)]) \neq 0\}) +$$

$$+ \widetilde{\mathcal{N}}_{r-1}(\widehat{s}_j, s_{j+1}, C'_{j+1}) T_{r-1,j} P\{\#\mathcal{N}_{r-1}(s, s_j, span[\cup_{s=1}^{j} C_s(m_s, l_s)]) \neq 0\} \succcurlyeq$$

$$\succcurlyeq \delta_0(1 - q^{\kappa}_{r-1} q^{(j-1)\kappa}_{r-1} P\{X^{r-2}_{r-1}(\sum_{s=1}^{j} m_s - (j-1)) \neq 0\}) +$$

$$+ \widetilde{\mathcal{N}}_{r-1}(\widehat{s}_j, s_{j+1}, C'_{j+1}) q^{\kappa}_1 q^{(j-1)\kappa}_{r-1} P\{X^{r-2}_{r-1}(\sum_{s=1}^{j} m_s - (j-1)) \neq 0\} \succcurlyeq$$

$$\succcurlyeq \delta_0(1 - q^{j\kappa}_{r-1} P\{X^{r-2}_{r-1}(\sum_{s=1}^{j} m_s - (j-1)) \neq 0\}) +$$

$$+ \widetilde{X}^{r-2}_{r-1}(r-1) q^{j\kappa}_{r-1} P\{X^{r-2}_{r-1}(\sum_{s=1}^{j} m_s - (j-1)) \neq 0\} \succcurlyeq$$

$$\succcurlyeq \delta_0(1 - q^{j\kappa}_{r-1} P\{X^{r-2}_{r-1}(\sum_{s=1}^{j} m_s - (j-1)) \neq 0\}) +$$

$$+ \widetilde{X}^{r-2}_{r-1}(\sum_{s=1}^{j} m_s - (j-1)) q^{j\kappa}_{r-1} P\{X^{r-2}_{r-1}(\sum_{s=1}^{j} m_s - (j-1)) \neq 0\} \backsim \mathcal{Y}_i$$

Aqui, temos que a primeira desigualdade é devido à proposição 2.4.3 e a hipótese de indução; a segunda desigualdade é devida a proposição 2.4.4 e ao fato que C'_{j+1} é aglomerado de massa $r-1$ e formado até a etapa $r-2$, logo pelo caso $l \leq r-1$ temos que $\mathcal{N}_{r-1}(\widehat{s}_j, s_{j+1}, C'_{j+1}) \succcurlyeq X^{r-2}_{r-1}(r-1)$ e a terceira desigualdade é devido à proposição 2.4.4 e ao fato que

$$X^{r-2}_{r-1}(r-1) \succcurlyeq X^{r-2}_{r-1}(\sum_{s=1}^{j} m_s - (j-1))$$

pois $r - 1 \leq \sum_{s=1}^{j} m_s - (j-1)$.

Portanto, temos que $\mathcal{X}_i \succcurlyeq \mathcal{Y}_i$, o que implica em

$$P\{\#\mathcal{N}_{r-1}(s, s_{j+1}, span[\cup_{s=1}^{j+1} C_s(m_s, l_s)]) \neq 0\} \geq$$

$$\geq q_{r-1}^{j\kappa} P\{\#\mathcal{N}_{r-1}(s, s_{j+1}, C^{R_{r-2}}(\sum_{s=1}^{j} m_s - (j-1)) \oplus C''_{j+1}) \neq 0\} \geq$$

$$\geq q_{r-1}^{j\kappa} P\{X_{r-1}^{r-2}(\sum_{s=1}^{j+1} m_s - j) \neq 0\}$$

onde $C^{R_{r-2}}(m)$ é um aglomerado de m escadas ruins consecutivas que só pode ser atravessado de modo "fracamente rigoroso" lançando apenas as moedas cuja probabilidade de sucesso é q_i^{κ}, $i = 0, \ldots, r-2$; pelo item *ii)* do lema 2.3.6 temos que $C^{R_{r-2}}(\sum_{s=1}^{j} m_s - (j-1)) \oplus C''_{j+1}$ é um aglomerado de escadas de massa exatamente $\sum_{s=1}^{j+1} m_s - j$. Portanto 2.10 é válida para $i = j+1$.

Isto conclui o passo de indução $l = r$ e portanto a demonstração da proposição 2.4.2.

Observação 2.4.9 *Observe que a construção acima garante que todos os feixes de escadas ruins consecutivas são atravessadas segundo uma linha reta.*

Capítulo 3

Percolação de Palavras

3.1 Palavras em meio aleatório

Seja $G = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ um grafo infinito, localmente finito. Considere o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P_\alpha)$ onde $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{V}}$, $\mathcal{A} = \sigma(\text{cilindros})$ e $P_\alpha = \prod_{v \in \mathbb{V}} b_\alpha$, b_α é a medida de Bernoulli de parâmetro α. Cada elemento $\omega \in \Omega$ será denominado configuração. Este é o modelo probabilístico que descreve o problema da percolação de sítios em G (caso independente e identicamente distribuído). Por percolação, entende-se a existência de caminhos infinitos de 1's (ou 0's) sem auto interseção.

Seguindo [3], uma maneira de generalizar este problema seria a procura de caminhos infinitos sem auto interseção, onde a seqüência de 0's e 1's vista é uma seqüência aleatória de 0's e 1's previamente determinada. Mais precisamente, seja $(\Xi, \mathcal{F}, \mu_\beta)$ o seguinte espaço de probabilidade, $\Xi = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{F} = \sigma(\text{cilindros})$ e $\mu_\beta = \prod_{n \in \mathbb{N}} b_\beta$. Cada elemento $\xi \in \Xi$ será chamado de palavra.

Definição 3.1.1 *Dizemos que uma palavra $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots) \in \Xi$ é vista em uma configuração $\omega \in \Omega$, a partir do vértice v_0, se existe caminho $\gamma = \langle v_0, v_1, \dots \rangle$ partindo de v_0, sem auto interseção (isto é, $\|v_{i+1} - v_i\|_1 = 1$, $\forall i$, $v_i \neq v_j$,$\forall i \neq j$), tal que $x_i = \omega_{v_i}$, $\forall i = 1, 2, \dots$. Uma palavra $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots) \in \Xi$ é dita ser vista em uma configuração $\omega \in \Omega$, se existe $v_0 \in \mathbb{V}$ tal que ξ seja vista em ω a partir de v_0 .*

Observe que o fato de uma palavra ξ ser vista em ω a partir de v_0 não depende do valor de ω_{v_0}. A partir daqui, salvo menção em contrário o grafo G será sempre $\mathbb{Z}^d$ (não orientado) ou $\mathbb{Z}^d_+$ (com orientação positiva).

Temos o seguinte resultado devido a Benjamini e Kesten [3]:

Teorema 3.1.2 *Para todos $\alpha, \beta \in [0,1]$ temos os seguintes resultados:*
i) O conjunto $\Lambda = \{(\xi, \omega); \xi$ é vista em $\omega\}$ é $\mathcal{F} \times \mathcal{A}$ mensurável ;
ii) Considere a função $g_\alpha : \Xi \to [0,1]$, definida por $g_\alpha(\xi) = P_\alpha\{\omega; \xi$ é vista em $\omega\}$. Então $g_\alpha(\xi) \in \{0,1\}, \forall\ \xi \in \Xi$, quando $g_\alpha(\xi) = 1$ dizemos que a palavra ξ percola ;
iii) Considere a função $h : [0,1]^2 \to [0,1]$, definida por $h(\alpha, \beta) = \mu_\beta\{\xi \in \Xi; g_\alpha(\xi) = 1\}$. Então $h(\alpha, \beta) \in \{0,1\}$, quando $h(\alpha, \beta) = 1$ dizemos que a palavra aleatória percola.

Demonstração: *i)* Fixe $(\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n) \in \{0,1\}^n$, definimos o conjunto $B_n(\eta_1, ..., \eta_n) = \{\omega \in \Omega; \exists\ v_0 \in \mathbb{V},\ \exists$ caminho $\gamma = \langle v_0, v_1, ..., v_n\rangle$ tal que $\omega_{v_i} = \eta_i,\ \forall\ 1 \leq i \leq n\}$. Como $\mathbb{V}$ é enumerável e $\forall\ v_0 \in \mathbb{V}$ o número de caminhos de comprimento n partindo de v_0 é finito temos que $B_n(\eta_1, ..., \eta_n) \in \mathcal{A},\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ \forall\ (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n) \in \{0,1\}^n$.

Seja $C_n(\eta_1, ...\eta_n) = \{\xi \in \Xi;\ \xi_i = \eta_i,\ \forall\ 1 \leq i \leq n\}$. Temos claramente que $C_n(\eta_1, ...\eta_n) \in \mathcal{F},\ \forall\ n$. Observando que

$$\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{(\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n) \in \{0,1\}^n} B_n(\eta_1, ..., \eta_n) \times C_n(\eta_1, ...\eta_n)$$

segue que $\Lambda \in \mathcal{A} \times \mathcal{F}$.
ii) $g_\alpha(\xi)$ é a probabilidade da ξ-seção de Λ, logo por i), $g_\alpha(\xi)$ é mensurável. Observe que as translações $\tau : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ são transformações que preservam a medida P_α e ergódicas (mais que isto, são mixing !). Como $\forall \xi \in \Xi$ o evento $\{\omega \in \Omega; \xi$ é vista em $\omega\}$ é invariante por translação segue que $g_\alpha(\xi) = P_\alpha\{\omega\ ; \xi$ é vista em $\omega\} \in \{0,1\}$. Para maiores detalhes sobre transformações ergódicas veja o capítulo 5 de [26].
iii) Seja $\xi \in \Xi$ tal que $g_\alpha(\xi) = 1$ ou de maneira equivalente $P_\alpha\{\omega; \xi$ é vista em ω a partir de $0\} > 0$, então $\forall \xi' \in \Xi$ tal que $\|\xi - \xi'\|_1 < \infty$ (isto é, diferem por, no máximo, uma quantidade finita de coordenadas) temos que $P_\alpha\{\omega; \xi'$ é vista em ω a partir de $0\} > 0$, ou de maneira equivalente $g_\alpha(\xi') = 1$. Isto é, $g_\alpha(\xi) = 1 \Rightarrow g_\alpha(\xi') = 1$ se $\|\xi - \xi'\|_1 < \infty$. Mais que isto, temos também que $g_\alpha(\xi) = 0 \Rightarrow g_\alpha(\xi') = 0$ se $\|\xi - \xi'\|_1 < \infty$, pois suponha por absurdo que $g_\alpha(\xi') = 1$ e $\|\xi - \xi'\|_1 < \infty$, então pelo caso anterior temos que $g_\alpha(\xi) = 1$ o que contradiz $g_\alpha(\xi) = 0$. Ou seja, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ a variável aleatória $g_\alpha(\xi)$ é independente de $(\xi_1, ..., \xi_n)$, logo segue da Lei 0-1 de Kolmogorov (veja [26]) que $\mu_\beta\{\xi \in \Xi; g_\alpha(\xi) = 1\} = 0$ ou 1 . $\square$

Em [3], o teorema acima é provado também no caso em que $\alpha = \frac{1}{2}$ e G é uma árvore localmente finita.

Uma questão interessante é estudar o comportamento da função $h(\alpha, \beta)$ para determinados grafos G. O teorema abaixo resume algumas propriedades de $h(\alpha, \beta)$:

Teorema 3.1.3 *A função $h(\alpha,\beta)$ tem as seguintes propriedades :*
i)

$$h(\alpha,\beta) = h(1-\alpha, 1-\beta) \ , \ \forall \ \alpha,\beta \in [0,1]^2$$

ii)

$$h(\alpha,1) = \begin{cases} 1 \ , \ \alpha > p_c(G) \\ 0 \ , \ \alpha < p_c(G) \end{cases} \tag{3.1}$$

iii)

$$h(1,\beta) = \begin{cases} 1 \ , \ \beta = 1 \\ 0 \ , \ \beta \neq 1 \end{cases} \tag{3.2}$$

iv) Se $G = \mathbb{Z}_+^d$, temos que $h(\alpha,\beta) = 0$ se $\alpha\beta + (1-\alpha)(1-\beta) \leq \frac{1}{d}$
v) $\forall \alpha > p_c(\mathbb{Z}_+^2)$, $\exists \ \beta_0(\alpha)$ tal que $h(\alpha,\beta) = 1$, $\forall \beta \geq \beta_0(\alpha)$, onde $p_c(\mathbb{Z}_+^2)$ é o ponto crítico de percolação de sítios orientada em $\mathbb{Z}_+^2$.

Demonstração: *i)*, *ii)* e *iii)* são triviais ;
iv) No espaço de probabilidade $(\Omega \times \Xi \ , \ \mathcal{A} \times \mathcal{F} \ , \mathcal{P}_\alpha \times \mu_\beta)$ considere a seqüência crescente de σ-álgebras $F_n = \sigma(\xi_i, \ \forall i \leq n \ ; \ \omega, \ \|\omega\|_1 \leq n)$ e a seqüência de variáveis aleatórias $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde $Z_n = \#\{v_n \in \mathbb{Z}_+^d \ ; \|v_n\| = n$ e $\exists \gamma = \langle 0, v_1, ..., v_n \rangle$ tal que $x_i = \omega_{v_i}\}$, temos claramente que $\mathbb{E}Z_n < \infty$ e Z_n é F_n mensurável, $\forall n \in \mathbb{N}$. Seja $\eta = \alpha\beta + (1-\alpha)(1-\beta) \leq \frac{1}{d}$, temos que

$$\mathbb{E}[Z_{n+1}|F_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Z_{n+1}|F_n, \xi_{n+1}]|F_n] \ \preccurlyeq$$

$$\preccurlyeq \ \mathbb{E}[I_{\{\xi_{n+1}=0\}} dZ_n(1-\alpha) + I_{\{\xi_{n+1}=1\}} dZ_n\alpha|F_n] = d\eta Z_n \leq Z_n$$

Portanto, a seqüência $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um supermartingale positivo com respeito à seqüência de σ-álgebras $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, além disso temos que $\mathbb{E}|Z_n| \leq (d\eta)^n \mathbb{E}Z_0 \leq 1$, logo pelo teorema de convergência de martingales (veja [26]) segue que $Z_n \to 0$ $P_\alpha \times \mu_\beta$ *q.c.*.

Portanto, temos que $P_\alpha \times \mu_\beta\{(\omega,\xi) \ ; \ \xi$ é vista em $\omega\} = 0$. O teorema de Fubini permite concluir que :

$$0 \ = \ P_\alpha \times \mu_\beta\{(\omega,\xi); \ \xi \text{ é vista em } \omega\} \ =$$

$$= \ \int_{\Omega\times\Xi} I_{\{(\omega,\xi) \ ; \ \xi \text{ é vista em } \omega\}} \ d(P_\alpha \times \mu_\beta)(\omega,\xi) \ =$$

$$= \int_\Xi [\int_\Omega I_{\{(\omega,\xi)\ ;\ \xi \text{ é vista em } \omega\}}\ d(P_\alpha)(\omega)]\ d(\mu_\beta)(\xi)\ =$$

$$= \int_\Xi P_\alpha\{\omega\ ;\ \xi \text{ é vista em } \omega\}\ d(\mu_\beta)(\xi)\ =$$

$$= \int_\Xi g_\alpha(\xi)\ d(\mu_\beta)(\xi)\ =\ \mu_\beta\{\xi\ ; g_\alpha(\xi) = 1\}\ =\ h(\alpha,\beta)$$

v) (Demonstração devido a Kesten, Sidoravicius e Vares; veja [19] para maiores detalhes). Sem perda de generalidade podemos supor que $G = \mathbb{Z}^2_+$. Este resultado é um corolário do teorema 2.3.1 discutido no capítulo anterior. Dado o par (ω,ξ), associe a cada reta $r_n = \{\omega; \|\omega\|_1 = n\}$ o estado boa ou ruim conforme ξ_n ser 1 ou 0, respectivamente. Declare o vértice v aberto se $\omega_v = \xi_{\|v\|_1}$ e fechado caso contrário. Usando as notações do teorema 2.3.1 temos a seguinte correspondência:

$$\delta = P\{\text{reta } r \text{ é ruim}\} = 1 - \beta,$$

$$p = P\{v \text{ é aberto}|r_{\|v\|_1} \text{ é boa}\} = \alpha,$$

$$\Delta = P\{v \text{ é aberto}|r_{\|v\|_1} \text{ é ruim}\} = 1 - \alpha.$$

Observando que a existência de caminho infinito de vértices abertos é equivalente ao fato da palavra ξ ser vista em ω. O teorema 2.3.1 nos permite concluir que $\forall \alpha > p_c(\mathbb{Z}^2_+)$, $\exists \beta_0(\alpha) (= \delta(\alpha, 1-\alpha))$ tal que $P_\alpha \times \mu_\beta\{(\omega,\xi); \xi \text{ é vista em } \omega\} = 1\ , \forall \beta \geq \beta_0(\alpha)$. Uma aplicação do teorema de Fubini, análoga a feita no ítem iv) permite concluir que $h(\alpha,\beta) = 1$. □

Observações 3.1.4

i) Acredita-se que $h(p_c(G), 1) = 0$, porém este fato só é conhecido nos casos $G = \mathbb{Z}^2$ [17], $G = \mathbb{Z}^d\ \forall d \geq 19$ [14] e $G = \mathbb{Z}^d_+$, $\forall\ d \geq 2$ [13] no caso orientado e [2] no caso não orientado.

ii) Um resultado devido a Booth e Meester [5] é que em $\mathbb{Z}^2$, existe α_c tal que $h(\alpha, \frac{1}{2}) = 0$, $\forall \alpha \geq \alpha_c$. Na verdade, uma pergunta interessante é : para todo $\beta \neq 1$ existe $\alpha_c(\beta)$, tal que $h(\alpha,\beta) = 0$, $\forall \alpha \geq \alpha_c$?

iii) Em $\mathbb{Z}^2_{pc}$ (isto é, o grafo $\mathbb{Z}^2$ adicionando as duas diagonais de cada quadrado unitário) é sabido que $p_c(\mathbb{Z}^2_{pc}) < \frac{1}{2}$, portanto se $\alpha \in (p_c(\mathbb{Z}^2_{pc}), 1 - p_c(\mathbb{Z}^2_{pc}))$ tanto a palavra $(1, 1, ...)$ quanto $(0, 0, ...)$ percolam. Em [20] é mostrado que $P_\alpha\{\omega;\ \xi \text{ é visto em } \omega,\ \forall\ \xi \in \Xi\} = 1$, $\forall\ \alpha \in (p_c(\mathbb{Z}^2_{cp}), 1 - p_c(\mathbb{Z}^2_{cp}))$, em particular $h(\alpha,\beta) = 1$, $\forall\ (\alpha,\beta) \in (p_c(\mathbb{Z}^2_{pc}), 1 - p_c(\mathbb{Z}^2_{pc})) \times [0,1]$. Outra pergunta interessante é se isto continua válido em outros grafos com $p_c(G) < \frac{1}{2}$, por exemplo, $\mathbb{Z}^d\ \forall d \geq 3$.

3.2 Palavras em meio determinístico

Na seção anterior, foi discutido o caso de percolação de palavras em meio aleatório, isto é, para cada vértice $v \in \mathbb{V}$ do grafo, ω_v é uma variável aleatória. Nesta seção, discutiremos o caso onde ω_v é um valor fixo, ou seja a configuração $\omega = (\omega_v)_{v\in\mathbb{V}}$ é determinística.

Este caso, além de ser fonte de algumas questões interessantes, parece ser uma ferramenta útil no estudo de percolação de palavras em meio aleatório e possui relações com o problema de Winkler [27] de compatibilidade de seqüências .

Aqui, algumas definições serão ligeiramente diferentes das definições da seção anterior. Cada palavra é um elemento do conjunto $\mathcal{Z} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \{z = (z_0, z_1, z_2, ...); z_i \in \mathbb{N}\}$, para evitar confusão com as palavras de 0's e 1's da seção anterior, aqui será util pensar em cada palavra como uma seqüência de cores, onde a cada número natural está associado uma cor diferente.

Seja $G = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ um grafo qualquer, uma pintura para G é uma função $f : \mathbb{V} \to \mathbb{N}$. Dizemos que uma palavra z é vista em G, a partir do vértice v_0, com pintura f se existe caminho $\gamma = \langle v_0, v_1, ...\rangle$ partindo de v_0 sem auto interseção (isto é, $\|v_{i+1} - v_i\|_1 = 1$, $\forall i$, $v_i \neq v_j$,$\forall i \neq j$) tal que $z_i \leq f(v_i)$, $\forall i = 1, 2, ...$ Uma palavra $z = (z_1, z_2, ...)$ é dita ser vista em G com pintura f, se existe $v_0 \in \mathbb{V}$ tal que z seja vista em G a partir de v_0 com pintura f.

Definição 3.2.1 *Seja M inteiro positivo, uma palavra de cores $z = (z_1, z_2, ...)$ é dita M-espaçada se $\forall\ i < j \in \mathbb{N}$, temos que $j - i \geq M^{\min\{z_i,z_j\}}$ e $j \geq M^{z_j}$. Seja $A_M = \{z \in \mathcal{Z}; z$ é M-espaçada $\}$.*

O seguinte resultado, apelidado de Algoritmo das Cores, parece ser útil em percolação de palavras em meio determinístico.

Teorema 3.2.2 *(Algoritmo das Cores) Seja $L \geq 2$ inteiro positivo. Considere o grafo $G = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$, onde $\mathbb{V} = \mathbb{Z}^2_+$ e $\mathbb{E} = \{\langle x, y\rangle; \|x - y\|_\infty = 1\}$ (isto é, o primeiro quadrante de $\mathbb{Z}^2_{pc}$) com a pintura $f_L : \mathbb{Z}^2_+ \to \mathbb{N}$, definida por:*

$$f_L(x_1, x_2) = \begin{cases} 0\ , & se\ x_2 \neq 0\ ou\ (x_1, x_2) = (0, 0) \\ k\ , & se\ x_2 = 0, x_1 \neq 0, L^k | x_1\ e\ L^{k+1} \nmid x_1 \end{cases} \tag{3.3}$$

Se $M \geq 3L$, temos que z é vista em G, a partir da origem, com pintura f_L, $\forall\ z \in A_M$.

Demonstração: Para cada palavra z associamos o grafo $G_z = (\mathbb{V}_z, \mathbb{E}_z) \subset G$, definido a seguir (aqui será conveniente fazer a convenção que $z_0 = 0$). Temos que $(0, 0) \in \mathbb{V}_z$.

Conhecido o grafo G_z até a altura n, isto é, $G_z \cap (\mathbb{R}_+ \times [0,n])$, ele é definido, indutivamente, até a altura $n+1$ do seguinte modo. Se $z_n = 0$, então $(a, n+1) \in \mathbb{V}_z$ se e somente se (a,n) ou $(a-1,n)$ pertencem a $\mathbb{V}_z$, neste caso, acrescentamos o elo $\langle (a,n);(a,n+1)\rangle$ ou $\langle (a-1,n);(a,n+1)\rangle$, conforme for o caso. Se $z_n \neq 0$ temos que $(a,n+1) \in \mathbb{V}_z$ se e somente se $(a-1,n) \in \mathbb{V}_z$ e $z_n \leq f_L(a-1,0)$, neste caso, acrescentamos o elo $\langle (a-1,n);(a,n+1)\rangle$.

Um elo vertical do tipo $\langle (a,n);(a,n+1)\rangle$ significa que a n-ésima cor da palavra (que é 0) foi colocada em um vértice de $\mathbb{Z}_+^2$ cuja abscissa é a. Um elo diagonal do tipo $\langle (a-1,n);(a,n+1)\rangle$ significa que a n-ésima cor da palavra foi colocada em um vértice de $\mathbb{Z}_+^2$ cuja abscissa é $a-1$. Então, não é difícil ver que z é vista em G, a partir da origem, com pintura f_L se e somente se G_z é infinito. Mais que isto, a palavra z é vista através de um caminho que é orientado na direção positiva do eixo das abscissas.

Veja na próxima página um exemplo típico de parte do grafo G_z.

Então, basta mostrar que G_z é infinito $\forall\ z \in A_M$. O que segue, nada mais é que uma aplicação do Princípio da Casa do Pombo. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sejam $i_k(z) = \min\{n \in \mathbb{N}; z_n \geq k\}$ e $\mathbb{V}_z(k) = \mathbb{V}_z \cap (\mathbb{Z} \times \{i_k(z)\})$; como z é M-espaçada, temos que $i_k(z) \geq M^k$,$\forall\ z \in A_M$. Como $z \in A_M$ e $M \geq L$ não é difícil ver que $\mathbb{V}_z(k)$ é formado por vértices cujas abscissas são inteiros consecutivos.

Seja $d_k(z) = \#\{(a, i_k(z)) \in \mathbb{V}_z(k); f(a,0) \geq k\}$. Para ver que G_z é infinito, é suficiente mostrar que $d_k(z) > 0,\ \forall z \in A_M, \forall k \in \mathbb{N}$. Na verdade, mostraremos que

$$d_k(z) \geq \lfloor \frac{i_k(z)}{LM^{k-1}} \rfloor \geq 3 \tag{3.4}$$

De fato, temos que

$$d_k(z) = \lfloor \frac{\#\mathbb{V}_z(k)}{L^k} \rfloor \tag{3.5}$$

$$\#\mathbb{V}_z(k) \geq i_k(z) - \sum_{j=1}^{k-1} (2L^j)(\lfloor \frac{i_k(z)}{M^j} \rfloor - 1) \geq$$

$$\geq i_k(z)[1 - \sum_{j=1}^{k-1} 2(\frac{L}{M})^j] \geq i_k(z)[1 - \sum_{j=1}^{k-1} 2(\frac{1}{3})^j] \geq \frac{i_k(z)}{3^{k-1}} \tag{3.6}$$

Substituindo 3.6 em 3.5, temos 3.4. Isto conclui a demonstração do teorema. □

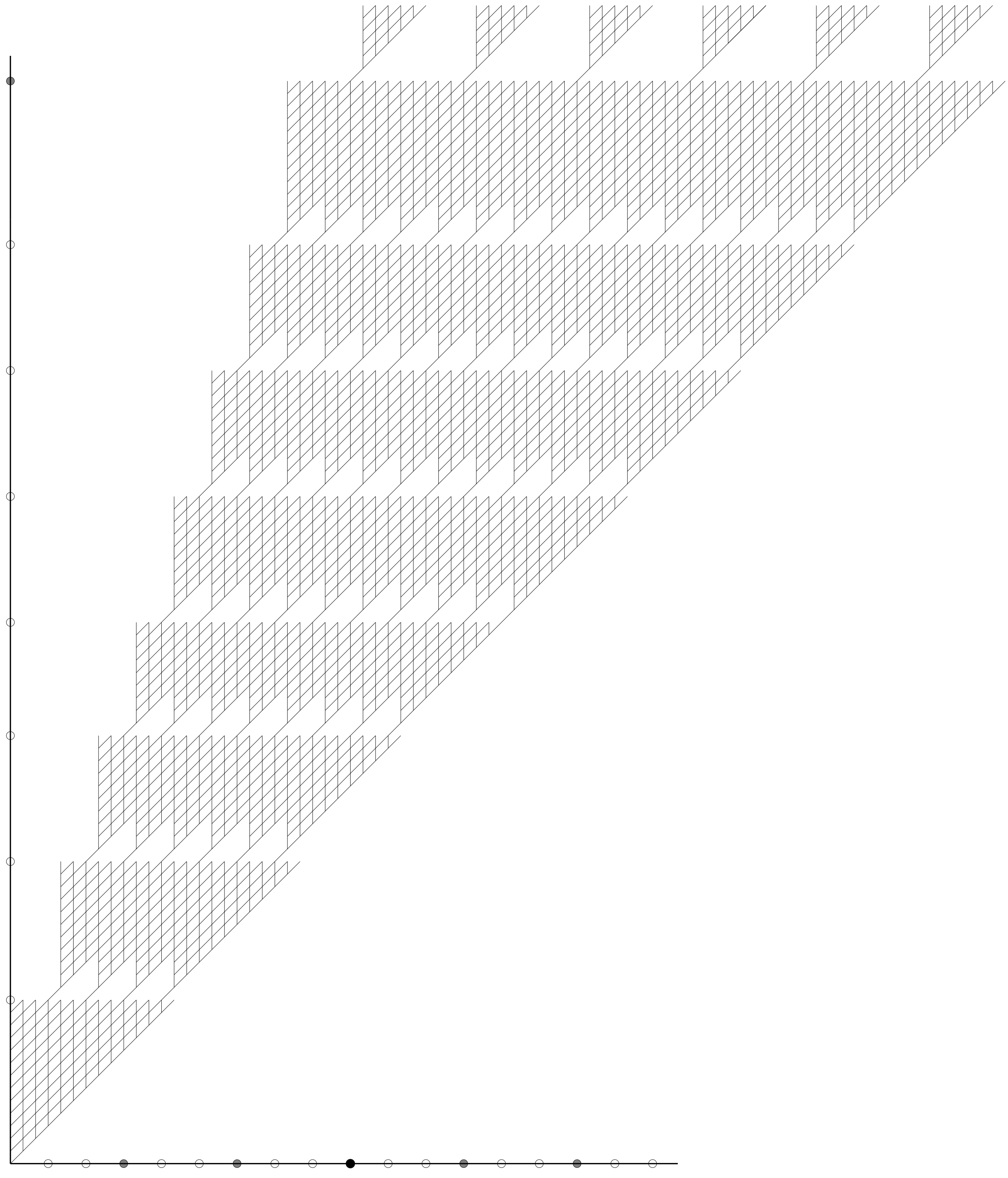

Figura 3.1: O grafo G_z. Neste caso temos $L = 3$, os vértices de cores 1, 2 e 3 são representados pelos círculos branco, cinza e preto, respectivamente; os vértices de cor 0 não estão indicados na figura. A palavra de cores z é aquela que se lê no eixo das ordenadas.

O uso do Algoritmo das Cores em conjunto com o agrupamento em aglomerados da seção 2.3, nos permite uma interpretação do problema de percolação de palavras em meios determinísticos. Mais precisamente para cada palavra $\xi \in \Xi = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ associamos a palavra de cores $z_\xi = \{z_{\xi,j}\}_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, definida da seguinte maneira: seja $\mathcal{C}_\infty = \{C_{\infty,j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ a partição limite da palavra ξ, conforme explicado na seção 2.3, definimos $z_{\xi,j} = m(C_{\infty,j})$ como a massa do aglomerado $C_{\infty,j}$. Portanto, pelo corolário 2.3.5, sabemos que se β é suficientemente pequeno (na verdade, $\beta \leq \frac{1}{64M^2}$), então $\mu_\beta\{\xi \in \Xi; z_\xi \text{ é } M\text{-espaçada}\} > 0$.

Portanto, uma questão que se coloca é a seguinte: Quais propriedades devem ter o grafo G e a configuração ω, tal que, $\mu_\beta\{\xi \in \Xi; \xi \text{ é visto em } \omega \text{ a partir de } 0\} > 0$?

Podemos observar, por exemplo, que para aquelas configurações ω em que há uma componente conexa infinita com apenas 1's, há outra componente conexa infinita com apenas 0's e há uma fronteira comum entre elas também infinita temos que $\mu_\beta\{\xi \in \Xi; \xi \text{ é visto em } \omega \text{ a partir de } 0\} > 0$. Enquanto para aquelas configurações ω em que existe $K > 0$ tal que todas as componentes conexas com apenas 1's (ou 0's) têm no máximo K vértices, temos que $\mu_\beta\{\xi \in \Xi; \xi \text{ é visto em } \omega \text{ a partir de } 0\} = 0$.

Os casos mais interessantes são as configurações hierárquicas como, por exemplo, o Carpete de Sierpinsky.

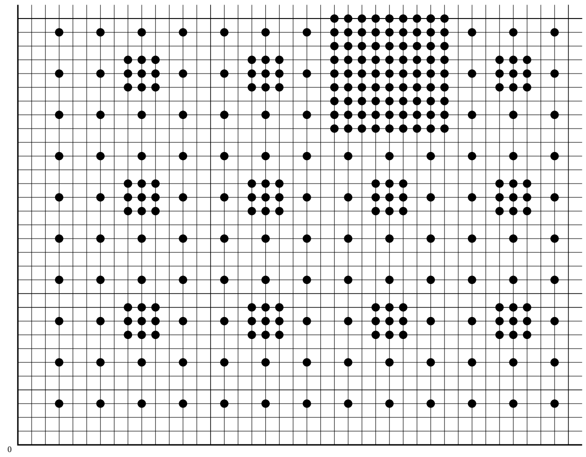

Figura 3.2: Um trecho do Carpete de Sierpinsky

Sejam $G = \mathbb{Z}_+^2$ e L inteiro positivo ímpar. Para todo, $k \in \mathbb{N}^*$, seja Q_k o quadrado cujo lado possui L^{k-1} vértices e cujo vértice central é o ponto $(L^k, L^k) \in \mathbb{Z}_+^2$, isto é, Q_k é formado pelos vértices de $\mathbb{Z}_+^2$ contidos no quadrado $[L^k - \frac{L^{k-1}-1}{2}, L^k + \frac{L^{k-1}-1}{2}] \times [L^k - \frac{L^{k-1}-1}{2}, L^k + \frac{L^{k-1}-1}{2}]$. O Carpete de Sierpinsky é a configuração $S_L(x_1, x_2)$ de $\mathbb{Z}_+^2$ (veja figura), dada pela regra abaixo:

$$S_L(x_1,x_2) = \begin{cases} 1 \text{ , } se\ \exists k,t,s \in \mathbb{N} \text{ tal que } (x_1,x_2) \in Q_k + (tL^k, sL^k) \\ 0 \text{ , caso contrário} \end{cases} \tag{3.7}$$

Encerraremos esta seção, com um exemplo de meio determinístico (de 0's e 1's) em que toda palavra $\xi \in \Xi$, tal que z_ξ seja M-espaçada, é lida a partir da origem. Antes um lema, sobre os agrupamentos em aglomerados, que será útil na prova do próximo teorema.

Após o agrupamento (com separação M), para cada aglomerado $C(k,l) \in \mathcal{C}_\infty$, seja $\mathcal{D}(C(k,l)) = \#\{i \in \mathbb{N};\ i \in I(C(k,l))$ e $\xi_i = 1\}$ e $\mathcal{D}(M,k) = \sup_{C;m(C)=k} \mathcal{D}(C)$, relembramos que $I(C)$ é o intervalo de $\mathbb{N}$ dos índices que determinam o aglomerado C, então:

Lema 3.2.3 $\mathcal{D}(M,k) \leq (2M)^k, \forall\ k \in \mathbb{N}$.

Demonstração: A prova é por indução em k, a massa do aglomerado. Se $k = 1$ temos que $\mathcal{D}(M,1) = 1 \leq 2M$. Suponha o lema verdadeiro para todo $k \leq n$. Considere um aglomerado de massa $n+1$, ou ele é formado na primeira etapa (logo seu número de 1's é $n+1 \leq (2M)^{n+1}$), ou ele é formado a partir de pelo menos dois aglomerados unidos na i-ésima etapa ($2 \leq i \leq n$). Neste último caso, sem perda de generalidade podemos supor os constituintes são dois aglomerados de massas p e q ($p, q \leq n$); pois como a prova é por indução em k e não em l como as provas anteriores, podemos agrupar os constituintes em dois blocos de aglomerados (o primeiro constituinte e os demais, por exemplo) de modo que cada um dos dois blocos é um aglomerado de massa no máximo n. Portanto, temos que $n+1 = p+q-i+1$ e a "poeira de aglomerados" entre os aglomerados de massa p e q é formada por no máximo M^{i-r} aglomerados de massa r, $\forall\ r = 1, 2, ..., i-1$. Portanto, temos que

$$\mathcal{D}(M,n+1) \leq \mathcal{D}(M,p) + \mathcal{D}(M,q) + \sum_{r=1}^{i-1} M^{i-r}\mathcal{D}(M,r) \ \leq$$

$$\leq\ \mathcal{D}(M,p) + \mathcal{D}(M,q) + M^i \sum_{r=1}^{i-1} 2^r \leq (2M)^p + (2M)^q + (2M)^i \ =$$

$$=\ (2M)^i[(2M)^{p-i} + (2M)^{q-i} + 1] \leq (2M)^i[(2M)^{p+q-2i} + 1] \ \leq$$

$$\leq\ (2M)^i(2M)^{p+q-2i+1} = (2M)^{n+1}$$

□

O teorema abaixo fornece um exemplo de configuração hierárquica, ω_L, tal que,

$$\mu_\beta\{\xi; \xi \text{ é visto em } \omega_L \text{ a partir de } 0\} > 0.$$

Teorema 3.2.4 *Sejam $L \geq 865$, inteiro ímpar, e $G = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$, onde $\mathbb{V} = \mathbb{Z}^3_+$ e $\mathbb{E} = \{\langle x, y\rangle; x, y \in \mathbb{V}, \|x - y\|_\infty = 1\}$ com a configuração hierárquica $\omega_L : \mathbb{V} \to \{0, 1\}$. Definida por*

$$\omega_L(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} S_L(x_1, x_2) \ , \ \text{se } x_3 = 0 \\ 0 \ , \ \text{se } x_3 \neq 0. \end{cases} \tag{3.8}$$

Onde $S_L(x_1, x_2)$ é o Carpete de Sierpinsky definido anteriormente. Então, existe $\beta > 0$, pequeno o suficiente, tal que $\mu_\beta\{\xi; \xi$ é visto em ω_L a partir de $0\} > 0$.

Demonstração: Seja M inteiro positivo, tal que $M \geq 3L$ e $(2M)^k \leq (\frac{L^{k-1}+1}{2})^2$, $\forall\ k \geq 3$. É fácil ver que isto é sempre posssível, pois $L \geq 865$. Tome $\beta \leq \frac{1}{64M^2}$, então pelo corolário 2.3.5 sabemos que $\mu_\beta\{\xi \in \Xi; z_\xi \in A_M\} > 0$, então basta mostrar que ξ é visto em ω_L a partir de 0, $\forall\ \xi \in \{\xi \in \Xi; z_\xi \in A_M\}$.

Percorrendo a reta

$$\overrightarrow{r} : \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 = x_2 \end{cases} \tag{3.9}$$

encontramos vários vértices que são centros de quadrados, cujos vértices têm configuração igual a 1. Se um vértice desta reta for centro de um quadrado de 1's de lado L^{k-1} mas não for centro de um quadrado de 1's de lado L^k, iremos declarar este vértice como sendo da cor k. Dado um vértice da cor k, sua zona alvo é o quarto superior esquerdo do quadrado de 1's de lado L^{k-1} que tem este vértice como seu centro (veja figura abaixo). Observe que as zonas alvo de cada vértice colorido são subconjuntos disjuntos.

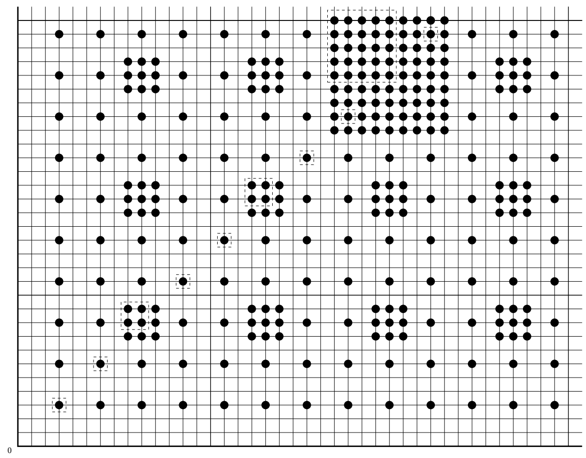

Figura 3.3: As zonas alvo são os vértices contidos nos quadrados pontilhados

Observe que os vértices coloridos ao longo da reta $\overrightarrow{r}$ seguem o padrão da seqüência determinística, formada no eixo das abscissas, do Algoritmo das Cores. Como $M \geq 3L$, pelo Algoritmo das Cores, sabemos que se z_ξ é M-espaçada, então é possíver ver z_ξ em G (a partir da origem) percorrendo somente os vértices de G que estão no plano formado pela reta $\overrightarrow{r}$ e o eixo x_3. Portanto, para ver a palavra ξ é suficiente mostrar que todo o aglomerado de massa k pode ser visto a partir do vértice central v, de um quadrado de lado L^{k-1}, através de um caminho sem auto interseção, totalmente contido no cilindro $C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3_+; (x_1, x_2)$ pertencem à zona alvo de v, $x_3 \in \mathbb{Z}_+\}$ e cujo último 1 do aglomerado é visto exatamente sobre o vértice $v + (0, 1, 0)$. Isto é sempre possível, pois o número de 1's da zona alvo de um vértice da cor k é $(\frac{L^{k-1}+1}{2})^2, \forall\ k$, e o número de 1's de um aglomerado de massa k, pelo lema anterior, é sempre menor que $(2M)^k$ (para $k = 1, 2$, temos que o número de 1's são 1 e 2, respectivamente). Como $(2M)^k \le (\frac{L^{k-1}+1}{2})^2$, $\forall k \ge 3$, há sempre 1´s, na zona alvo, em quantidade suficiente. Isto mostra o resultado! $\square$

Observação 3.2.5 Como só utilizamos os 1's pertencentes a quadrados com centro na reta $\overrightarrow{r}$, podemos enfraquecer a hipótese do teorema anterior, retirando 1's da configuração de G, trocando a configuração ω_L por g_L, onde

$$g_L(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 1\ , & se\ x_3 = 0, \exists k \in \mathbb{N}, \exists s \in \mathbb{N} \text{ tal que } (x_1, x_2) \in Q_k + (sL^k, sL^k) \\ 0\ , & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{3.10}$$

Referências Bibliográficas

[1] Balister, P.N., Bollobas, B. and Stacey, A.M. (2000) Dependent Percolation in two dimensions. *Probability Theory and Related Fields* **117**, 495-513.

[2] Barsky, D.J., Grimmett, G.R. and Newman, C.M. (1991) Percolation in half spaces: equality of critical probabilities and continuity of the percolation probability. *Probability Theory and Related Fields* **90**, 111-148.

[3] Benjamini, I. and Kesten, H. (1995) Percolation of arbitrary words in $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. *Annals of Probability* **23**, 1024-1060.

[4] Benjamini, I., Pemantle, R. and Peres, Y. (1998) Unpredictable paths and percolation. *Annals of Probability* **26**, 1198-1211.

[5] Booth, L. and Meester, R. (2001) Infinity paths with bounded or recurrent partial sums. *Probability Theory and Related Fields* **120**, 118-142.

[6] Bramson, M., Durrett, R.T. and Schonmann, R.H. (1991) The contact process in a random environment. *Annals of Probability* **19**, 960-983.

[7] Broadbent, S.R. and Hammersley, J.M. (1957) Percolation Process I. Cristals and mazes. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **53**, 629-641.

[8] Chayes, L. and Schonmann, R.H. (2000) Mixed percolation as a bridge between site and bond percolation. *The Annals of Applied Probability* **10**, 1182-1196.

[9] Cox, J.T. and Durrett, R.T. (1983) Oriented percolation in dimensions $d \geq 4$: bounds and asymptotic formulas. *Mathmatical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **93**, 151-162.

[10] Durret, R. (1984) Oriented percolation in two dimensions. *Annals of Probability* **12**, 999-1040.

[11] Fontes, L.R.G. (1996) Notas em Percolação. Monografias em Matemática no. 54. Instituto de Matemática Pura e Aplicada.

[12] Grimmett, G.R. (1999) Percolation, 2nd edition. Springer-Verlag, Berlin.

[13] Grimmett, G.R. and Hiemer, P. (2002) Directed percolation and random walk. In *In and out of equilibrium. Probability with Physics Flavor* (V. Sidoravicius, ed.), 273-297. Birkhäuser, Boston.

[14] Hara, T. and Slade, G. (1990) Mean field critical behavior for percolation in high dimentions. *Communications in Mathmatical Physics* **128**, 333-391.

[15] Hoffman, C. (2002) Phase transition in dependent percolation. Preprint.

[16] Jonasson, J., Mossel, E. and Peres, Y. (2000) Percolation in dependent random environment. *Random Structures and Algorithms* **16**, 333-343.

[17] Kesten, H. (1980) The critical probability of bond percolation on the square lattice equals $\frac{1}{2}$. *Communications in Mathmatical Physics* **74**, 41-59.

[18] Kesten, H. (1982) Percolation theory for Mathmaticians. Birkhäuser, Boston.

[19] Kesten, H., Sidoravicius, V. and Vares, M.E. (2002) Oriented percolation in dependent environment. Preprint.

[20] Kesten, H., Sidoravicius, V. and Zhang, Y. (2001) Percolation of arbitrary words on the closed packed graph of $\mathbb{Z}^2$. *Eletronic Journal of Probability* **6** n. 4, 1-27.

[21] Klein, A. (1994) Multiscale Analysis in disorder systems: percolation and contact process in random environments. In *Probability and Phase transitions*, Nato ASI series, Kluwer Academic Publishers, Dordecht.

[22] Liggett, T. (1985) Interacting Particle Systems. Springer-Verlag, Berlin.

[23] Liggett, T. (1992) The survival of the one dimensional contact process in random environments. *Annals of Probability* **20**, 696-723.

[24] McCoy, B.M. and Wu, T.T. (1968) Theory of a Two-Dimensional Ising Model with Random Impurities. I. Thermodynamics. *Physical Review* **176** n. 2, 631-643.

[25] McCoy, B.M. and Wu, T.T. (1969) Theory of a Two-Dimensional Ising Model with Random Impurities. II. Spin Correlation Functions. *Physical Review* **188** n. 2, 982-1013.

[26] Shiryaev, A.N. (1989) Probability, 2nd edition. Springer-Verlag, Berlin.

[27] Winkler, P. (2000) Dependent percolation and colliding random walks. *Random Structures and Algorithms* **16**, 58-84.