

Associação Instituto Nacional de Matemática
Pura e Aplicada - IMPA-OS

**Problema de Riemann para Duas
Leis de Conservação do Tipo IV com
Região Elíptica**

por

Vítor Manuel Martins de Matos

Tese Apresentada para a obtenção do grau de
Doutor em Matemática

Abril de 2004

Banca

Dan Marchesin

Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Brasil

Hermano Frid

Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Brasil

Bradley Plohr

State University of New York at Stony Brook, EUA

Carlos Frederico B. Palmeira

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Brasil

Arthur V. F. Azevedo

Universidade de Brasília, Brasil

Agradecimentos

Cabe neste momento agradecer, com prazer, àqueles que ao longo de mais de quatro anos contribuíram, de alguma forma, para a realização deste trabalho.

Agradeço profundamente ao Professor Dan Marchesin pela sua orientação. Agradeço também pela sua paciência, pelas conversas estimulantes, pela sua atenção e pelos apoios tão diversos que me foi dando.

Deixo também o meu muito obrigado:

- à Ruth pelo seu amor e carinho;
- aos meus pais, António Matos e Maria Carmen Martins, e aos meus irmãos, José, Jorge e Rui, que, apesar da distância, sempre senti próximos;
- ao Professor Arthur Azevedo por tudo que me ensinou sobre os programas RP e Evolve;
- ao Sérgio, e também ao Airon, por todo o apoio informático que me deram;
- à Beata e à Mónica pelo auxílio prestado;
- à Michelle e à Mariela pelos maravilhosos momentos partilhados;
- a todos os meus amigos, tenham eles vindo visitar-me quer não, quer eles estejam em Portugal, no Brasil ou noutra parte qualquer;
- ao IMPA pelas condições de trabalho proporcionadas e aos seus professores pela sua manifesta qualidade e disponibilidade;
- aos funcionários e colegas do IMPA pelo ambiente agradável;
- ao Brasil e ao Rio pelo que são;
- à Universidade do Porto, à Faculdade de Economia e em especial aos meus colegas pela possibilidade de usufruir de uma estadia prolongada no Brasil;
- à Fundação para a Ciência e a Tecnologia e ao Fundo Social Europeu que no âmbito do terceiro Quadro Comunitário de apoio ao Desenvolvimento financiaram parcialmente os meus estudos.

Sumário

Nesta tese obtivemos essencialmente três tipos de resultados. Primeiro: obtivemos resultados gerais para duas Leis de Conservação, usados em um método prático para a resolução teórica de Problemas de Riemann. Segundo: estudamos um modelo quadrático de duas Leis de Conservação do tipo IV com Região Elíptica para o qual encontramos soluções satisfazendo o critério de entropia de Lax. Seguidamente provamos a existência de uma bifurcação de Hopf que garante a inexistência de Perfil Viscoso para algumas soluções encontradas, incluindo quando ambos os estados se encontram na Região Hiperbólica; esta é, tanto quanto sabe o autor, a primeira vez que se determina a inexistência de solução global para um Problema de Riemann. Terceiro: fizemos simulações numéricas para pares de estados para os quais não haviam sido encontradas soluções teóricas. Nestes casos obtivemos soluções numéricas de longa duração que, acreditamos, não sejam soluções assintóticas da Equação Diferencial Parcial. Serão necessários trabalhos posteriores para maior entendimento destes resultados.

Abstract

On this thesis we obtained essentially three kinds of results. First we obtain general results on two conservation laws used in a practical method for Riemann Problems solving. Also we study a quadratic model of two Conservation Laws of type IV with elliptic region. We solve the Riemann Problem with Lax's entropy criterion. Then we prove the existence of a Hopf bifurcation that implies non-existence of a travelling-wave for several solutions, even with both states in the strictly hyperbolic region. Finally we perform numerical simulations for pairs of states without solution and we find long lasting solutions, which, we believe, fail to be asymptotic solutions. However more numerical simulations are needed in order a best understanding of these numerical results.

Conteúdo

1	Introdução	13
2	Duas Leis de Conservação	16
2.1	Problema de Riemann	17
2.2	Soluções Fundamentais	17
2.2.1	Choques de Lax	18
2.2.2	Perfis Viscosos	19
2.3	Conjuntos Relevantes	20
2.3.1	Estruturas de Codimensão-1	21
2.3.2	Locais Sónicos	23
2.4	Sectores da Curva de Rankine-Hugoniot e as suas Fronteiras	23
2.4.1	Ambos os Estados na Região Estritamente Hiperbólica	23
2.4.2	Um estado na Região Estritamente Hiperbólica e outro na Região Elíptica	25
2.5	Bifurcações na Classificação da Curva de Rankine-Hugoniot	27
2.5.1	Bifurcações na Inflexão	27
2.5.2	Bifurcações na Histerese	29
2.5.3	Bifurcações nos Contactos Duplos	31
2.5.4	Bifurcações na Extensão Esquerda da Coincidência	35
2.6	Construção das Soluções	37
2.6.1	Diagramas para a Construção dos Grupos de Onda	38
2.6.2	Choques Triplos	39
2.7	Equilíbrios do Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias Associado	41
3	O Modelo Quadrático Específico	44
3.1	O Modelo	44
3.2	Estruturas de Codimensão-1 do Modelo	45
3.2.1	Inflexão	48
3.2.2	Histerese	48
3.2.3	Coincidência	49
3.2.4	Extensão Esquerda da Coincidência	49
3.2.5	Bifurcação Secundária	50
3.2.6	Contactos Duplos	50
3.3	Curvas de Rankine-Hugoniot	51
3.4	L-Regiões e Curvas Suplementares	55
4	Soluções	59
4.1	Soluções em \mathcal{L}_1	60
4.1.1	Solução para $U_L \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$	60
4.1.2	Solução para $U_L \in \Gamma_3 \cup \Gamma_4$	62
4.1.3	Outras Soluções em \mathcal{L}_1	66
4.1.4	Solução para o Ponto <i>DRS</i>	66
4.1.5	Caso Fronteira entre \mathcal{L}_1 e \mathcal{L}_2	71
4.2	Soluções em \mathcal{L}_2	72
4.2.1	Uma Solução para $U_L \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{R}_H$ acima da Curva <i>K</i>	72

4.2.2	Descrição geral das soluções em \mathcal{L}_2	76
4.3	Soluções em \mathcal{L}_3	77
5	Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias Associado ao Modelo Específico	82
5.1	Pontos de Equilíbrio	82
5.2	Bifurcação de Hopf do Modelo	83
5.3	Relevância da Bifurcação de Hopf para as Soluções	87
5.3.1	L-região 1	87
5.3.2	L-região 2	87
5.3.3	L-região 3	88
6	Soluções de Longa Duração	90
6.1	Simulações para $U_L \in \mathcal{L}_2$	90
6.2	Simulações com $U_L \in \mathcal{L}_3$	97
6.3	Simulações com Ciclos	98
7	Conclusão	105
A	Soluções Estruturalmente Estáveis	106
B	Fluxo de Schaeffer e Shearer	109
B.1	Fluxo Homogêneo	109
B.2	Fluxo Não Homogêneo	112
C	Bifurcação de Hopf	115
D	Bifurcações de Hopf e Bogdanov-Takens para Duas Leis de Conservação	117

Lista de Figuras

2.1	Choques de Lax.	19
2.2	Sectores da curva de Rankine-Hugoniot próximo de \mathcal{I}	28
2.3	Sectores da curva de Rankine-Hugoniot na Bifurcação da Histerese.	29
2.4	Bifurcação em Contactos Duplos Hiperbólicos e Eliptico-hiperbólicos.	32
2.5	Bifurcação em Contactos Duplos Hiperbolico-elípticos.	35
2.6	Bifurcação na Extensão da Coincidência.	36
2.7	Exemplo de Classes Esquerda e Direita sob o Conjunto de Rankine-Hugoniot.	43
3.1	Estruturas de Codimensão-1 (formas próximas das reais) e algumas Gama-regiões.	46
3.2	Todas as Gama-regiões (Estruturas altamente distorcidas).	47
3.3	Campos integrais dos autovectores e Inflexões.	48
3.4	Curvas de Rankine-Hugoniot classificadas.	55
3.5	L-Regiões \mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_2 , e \mathcal{L}_3 definidas pelas curvas \mathcal{T} e \mathcal{S}	57
4.1	Convenção Gráfica das Figuras.	60
4.2	L-região \mathcal{L}_1 e as Gama-regiões que intersecta.	61
4.3	Grupo de Ondas-1 para $U_L \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$	63
4.4	Solução Global para $U_L \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$	63
4.5	R-regiões para $U_L \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ (não consideramos \mathcal{C} , $\mathcal{D}_{12}W$ nem \mathcal{I}_2 na divisão do plano).	64
4.6	Grupo de Ondas-1 para $U_L \in \Gamma_3 \cup \Gamma_4$	64
4.7	Solução Global para $U_L \in \Gamma_3 \cup \Gamma_4$	65
4.8	R-regiões para $U_L \in \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ (não consideramos \mathcal{C} , $\mathcal{D}_{12}W$ nem \mathcal{I}_2 na divisão do plano).	65
4.9	Solução Global para $U_L \in \mathcal{B}$ com $u_L > 0$	67
4.10	Solução Global para $U_L \in \Gamma_{8as}$	67
4.11	Solução Global para $U_L \in \Gamma_{8a1}$	68
4.12	Solução Global para $U_L \in \Gamma_{8a2}$	68
4.13	Solução Global para $U_L \in \Gamma_{8ai}$	69
4.14	Solução Global para $U_L \in (\Gamma_{12} \cup \Gamma_{5ai}) \cap \mathcal{L}_1$	69
4.15	Solução Global para o DRS	70
4.16	R-regiões do DRS (não consideramos a Coincidência na divisão do plano).	70
4.17	Solução Global para $U_L \in \mathcal{B}$ e $u_L < -\sqrt{3}/3$	72
4.18	R-regiões para U_L na fronteira entre \mathcal{L}_1 e \mathcal{L}_2 (não consideramos \mathcal{C} , $\mathcal{D}_{12}W$ nem \mathcal{I}_2 na divisão do plano).	78
4.19	Regiões por onde passa a 1-Rarefação que parte de Γ_{5a} e chega à Coincidência na fronteira entre Γ_{6d} e Γ_{9d}	78
4.20	$U_{M11} \in \Gamma_{6d}$: Choque Quádruplo.	78
4.21	Solução Parcial (I) para $U_L \in \Gamma_{5a}$	79
4.22	Solução Parcial (II) para $U_L \in \Gamma_{5a}$	80
4.23	R-regiões para $U_L \in \Gamma_{5a}$	80
4.24	Solução Incompleta para $U_L \in \Gamma_{12} \cap \mathcal{L}_3$	81
4.25	R-regiões para $U_L \in \Gamma_{12} \cap \mathcal{L}_3$ (não consideramos a Coincidência na divisão do plano).	81
5.1	Sistema Dinâmico Associado a $U_L = U_{M53} \in \mathcal{D}_{2e}C$ com velocidade crítica $s = \lambda_2(U_L)$	84

5.2	Sistema Dinâmico Associado a $U_L = U_{M53} \in \mathcal{D}_{2e}C$ com uma velocidade sobrecrítica $s > \lambda_2(U_L)$	84
5.3	Sistema Dinâmico Associado a $U_L = U_{M53} \in \mathcal{D}_{2e}C$ com uma velocidade subcrítica $s < \lambda_2(U_L)$	84
5.4	Áreas de Bifurcação de Hopf sobre a Fronteira entre \mathcal{H}_{1S} e \mathcal{H}_{2E}	87
5.5	Áreas de Bifurcação de Hopf sobre as Fronteiras entre \mathcal{H}_C e \mathcal{H}_{TE} e entre \mathcal{H}_E e \mathcal{H}_{TD}	87
5.6	Sistema Dinâmico Associado a $U_{M53}^{2Se} \in \mathcal{D}_{e2}M$ com velocidade crítica $s = \text{Re}(\lambda(U_{M53}^{2Se}))$	89
5.7	Sistema Dinâmico Associado a $U_{M53}^{2Se} \in \mathcal{D}_{e2}M$ com velocidade subcrítica $s < \text{Re}(\lambda_e(U_{M53}^{2Se}))$	89
5.8	Sistema Dinâmico Associado a $U_{M53}^{2Se} \in \mathcal{D}_{e2}M$ com velocidade supercrítica $s > \text{Re}(\lambda_e(U_{M53}^{2Se}))$	89
6.1	Solução numérica para $U_L = (-1.5; -0.7)$, $U_R = (0; -4.5)$ e tempo 120.	91
6.2	Solução numérica para $U_L = (-1.5; -0.7)$, $U_R = (0; -4.5)$ e tempo 220.	92
6.3	Solução numérica para $U_L = (-1.5; -0.7)$, $U_R = (0; -4.5)$ e tempo 780.	92
6.4	Solução numérica para $U_L = (-1.5; -0.7)$, $U_R = (0; -4.5)$ e tempo 2400.	93
6.5	Simulação com o Choque sem Perfil Viscoso isolado: tempo 0 e $eps = 1.0$	93
6.6	Pormenor do Choque sem Perfil Viscoso: tempo 0 e $eps = 1.0$	94
6.7	Pormenor do Choque sem Perfil Viscoso: tempo 500 (iteração 20900) e $eps = 1.0$	94
6.8	Pormenor do Choque sem Perfil Viscoso: tempo 1000 (iteração 41800) e $eps = 1.0$	95
6.9	Simulação com Choque sem Perfil Viscoso isolado: tempo 0 e $eps = 2.0$	95
6.10	Pormenor do Choque sem Perfil Viscoso: tempo 0 e $eps = 2.0$	96
6.11	Pormenor do Choque sem Perfil Viscoso: tempo 500 (iteração 24900) e $eps = 2.0$	96
6.12	Pormenor do Choque sem Perfil Viscoso: tempo 1000 (iteração 49800) e $eps = 2.0$	97
6.13	Solução numérica para $U_L = (1.1; -1.6)$, $U_R = (1.1; -1.0)$, tempo 1400.	99
6.14	Pormenor da solução numérica para $U_L = (1.1; -1.6)$, $U_R = (1.1; -1.0)$, tempo 6000.	99
6.15	Esquema da solução numérica observada para $U_L = (1.1; -1.6)$ e $U_R = (1.1; -1.0)$	100
6.16	Solução numérica para $U_L = (1.1; -1.6)$, $U_R = (1.1; -1.0)$, tempo 6000 e nove pontos da curva de Rankine-Hugoniot de $U_{M1} = (0.343; -3.925)$ incluindo a velocidade sónica $s = 0.345$	100
6.17	Condição inicial A para $U_L = (-1.0; -1.0)$, $U_R = (-1.0; -2.0)$	101
6.18	Solução numérica para $U_L = (-1.0; -1.0)$, $U_R = (-1.0; -2.0)$, tempo 324 (iteração 4050) e condição inicial A	101
6.19	Solução numérica para $U_L = (-1.0; -1.0)$, $U_R = (-1.0; -2.0)$, tempo 688 (iteração 8725) e condição inicial A	102
6.20	Condição inicial B para $U_L = (-1.0; -1.0)$, $U_R = (-1.0; -2.0)$	103
6.21	Solução numérica para $U_L = (-1.0; -1.0)$, $U_R = (-1.0; -2.0)$, tempo 213 (iteração 2450) e condição inicial B	103
6.22	Solução numérica para $U_L = (-1.0; -1.0)$, $U_R = (-1.0; -2.0)$, tempo 2000 (iteração 25340) e condição inicial B	104
B.1	Definição de θ e de ψ	110
B.2	Curvas U , V e W no plano $a - b$. Em cada região do plano estão esboçados exemplos dos campos para as duas famílias.	111
B.3	Soluções das relações de Rankine-Hugoniot.	112
B.4	Construção de $\mathcal{H}(U_L)$	112

Capítulo 1

Introdução

Leis de Conservação têm sido estudadas desde há muito tempo pois são modelos matemáticos para diversos problemas físicos como, por exemplo, dinâmica dos gases ou escoamento em meios porosos.

O estudo dos sistemas hiperbólicos foi iniciado por Riemann no século XIX tratando do problema de dois gases contidos num tubo e separados por uma membrana que se rompe. Observa-se um choque e uma rarefacção deslocando-se em sentidos opostos dentro do tubo. Já nos anos cinquenta do século XX Lax descreveu a solução do Problema de Riemann local (ver [16]) e introduziu um critério de entropia que viria a ficar conhecido pelo seu próprio nome. Soluções completas também foram determinadas, como, por exemplo, no p -sistema da dinâmica dos gases (ver [21]). Com a maturidade da teoria a perda de hiperbolicidade tornar-se-ia o alvo das atenções. Nos anos oitenta Keyfitz, Kranzer, Isaacson e Temple estudaram linhas de pontos de equilíbrio no plano, mais propriamente linhas onde os autovalores coincidem mas o autoespaço geométrico da diferencial do fluxo tem dimensão 1. Estes autores introduziram também o critério de entropia de contacto conhecido por KKIT, adequado aos modelos que estudaram. O problema do estudo de linhas de pontos de equilíbrio reside no facto destes serem fortemente instáveis do ponto de vista estrutural. Em 1987 Schaeffer e Shearer estudaram leis quadráticas homogéneas com uma singularidade isolada no plano onde os autovalores coincidem e o autoespaço geométrico tem dimensão 2. Os autores lograram, então, reduzir os parâmetros do fluxo de seis para dois e classificar estes pontos de equilíbrio em quatro tipos (I, II, III e IV) não degenerados (ver [19]). Os Problema de Riemann para estes quatro tipos de pontos de equilíbrio foram sendo resolvidos por diversos autores (ver, por exemplo, [15]).

O passo seguinte foi perturbar o fluxo com termos lineares de forma a se obter uma região elíptica e, portanto, obter soluções para problemas com fluxos quadráticos. Holden em [10] resolveu um caso particular do tipo I usando o critério de entropia de Lax, obtendo soluções múltiplas. Palmeira estudou os fluxos com termos lineares (ver [18]) construindo uma variedade onde foliações representam choques e rarefacções. A classificação de Schaeffer e Shearer mantém-se válida para estes fluxos mais complexos.

Azevedo usou o mesmo modelo de Holden mas estudou-o utilizando o critério de entropia de Gel'fand, Courant e Friedrichs (ver [5], [9] e [2]) obtendo ainda assim multiplicidade de soluções. Estas soluções são, porém, realizáveis. Este critério pressupõe que os choques tenham um perfil de onda viajante, o que implica a existência de uma trajectória conectando os dois estados de um choque num sistema de equações diferenciais ordinárias. Plöhr e Čanić estudaram certas bifurcações que podem levar ao desaparecimento dessa trajectória (ver [4]).

Nesta tese foi estudado um modelo do Tipo IV com Região Elíptica. Usando o critério de Lax foram encontradas regiões apresentando, dependendo dos dados, tanto unicidade como multiplicidade ou mesmo inexistência de soluções. Encontramos exemplos de problemas de Riemann em cuja solução necessariamente aparecem choques de Lax que não possuem perfis viscosos; daí temos inexistência de solução incluindo quando ambos os estados estão fora da Região Elíptica. Foi feito ainda um breve estudo numérico de soluções envolvendo descontinuidades que, apesar de satisfazerem a relação de Rankine-Hugoniot, violam a condição de Lax ou apenas não possuem Perfil Viscoso. Os resultados são descritos no Capítulo 6.

Esta tese é composta essencialmente por duas partes; a primeira constituída pelo capítulo 2 e a

segunda pelos capítulos 3, 4, 5 e 6.

No primeiro capítulo -cuja leitura por especialistas pode ser omitida com a excepção de algumas partes referidas mais à frente- são apresentados resultados gerais para Sistemas de Duas Leis de Conservação. Esta apresentação não é exaustiva, pelo contrário, ela apresenta apenas o que será necessário na segunda parte do trabalho. Este direccionamento reflecte-se, por exemplo, no facto de não se fazer qualquer estudo com U_L e U_R ambos dentro da Região Elíptica (ver conclusão B.1) ou pela escolha das Estruturas de Codimensão-1 a serem tratadas, tanto na secção 2.3 como na secção 2.5. Contudo também é verdade que na secção 2.5 estão listadas bifurcações que não aparecem no modelo; mas aqui o motivo é a simplicidade, evitando seleccionar a priori somente as bifurcações relevantes para a o resto do trabalho.

Na primeira parte pode salientar-se alguns resultados e definições que não estão presentes, ou não são padrão, na literatura; portanto de interesse mesmo para especialistas na área. Apesar da naturalidade da definição de Contacto Duplo Heterogéneo (definição 2.21), este apresenta-se fundamental na construção das soluções quando associadas aos Choques Sesqui-sónicos (definição na subsecção 2.4.2). A importância deste Contacto Duplo Heterogéneo torna premente o estudo da curva de Rankine-Hugoniot dentro da Região Elíptica. O teorema de Bethe-Wendroff não é válido nesta região, o que motivou um novo teorema (ver teorema 2.2) que não é, ao contrário do que se poderia esperar, uma extensão da validade do resultado obtido por Bethe-Wendroff. Com este novo teorema é possível apresentar as bifurcações típicas (subsecção 2.5.3) da curva de Rankine-Hugoniot quando o estado à esquerda na Região Estritamente Hiperbólica cruza um Contacto Duplo Hiperbolico-elíptico (definição 2.21).

Na secção 2.6 é dada a forma de construir os Grupos de Ondas partindo de curvas de Rankine-Hugoniot classificadas. Contudo saber construir Grupos de Ondas não é ter um método completo de obtenção de soluções, pois é necessário saber quando terminar essa construção. Para isso é fundamental o estudo dos Choques Triplos (subsecção 2.6.2) onde é crucial o lema 2.1. Este novo resultado permite determinar tangências e incompatibilidades geométricas entre Grupos de Ondas. Deste método advêm soluções que satisfazem as condições de entropia de Lax.

Na segunda parte da tese é estudado detalhadamente um modelo específico, cujo fluxo é dado pela equação (3.1). No capítulo 3 é apresentado o modelo juntamente com as suas simetrias, as Estruturas de Codimensão-1 e as curvas de Rankine-Hugoniot para cada uma das Gama-regiões (definição 3.1). Por fim são definidas três L-regiões para o problema.

O capítulo 4 é dividido em três secções: em cada uma é exibida a solução de Riemann para uma L-região usando o critério de Lax. O uso deste critério foi motivado pela existência de ciclos limite que tornam particularmente restritiva a exigência de Perfil Viscoso. Assim, com o critério de Lax, foi possível procurar eventuais soluções de uma forma exaustiva utilizando os resultados apresentados na secção 2.6.

Na primeira secção deste capítulo serão dadas todas as soluções estruturalmente estáveis da L-região \mathcal{L}_1 . Mais três soluções especiais são exibidas, todas sobre a Bifurcação Secundária, sendo uma delas a solução para o ponto *DRS*. Todas estas soluções são muito semelhantes às encontradas no problema com ponto umbílico.

Na segunda secção serão dadas em detalhe apenas as soluções para uma parte da L-região \mathcal{L}_2 (como em todo este Capítulo usamos o critério de Lax); as soluções obtidas estão completas mas apresentam multiplicidade. Para o restante de \mathcal{L}_2 as soluções são discutidas de uma forma genérica. Todas estas soluções compreendem Rarefacções Transicionais. Este tipo de onda havia sido previsto teoricamente mas, tanto quanto sabe o autor, nunca haviam sido encontradas naturalmente num problema. Agradecemos a Arthur Azevedo por te-las apontado para nós. Intimamente associado a estas Rarefacções Transicionais existe um conjunto de ondas de velocidade positiva que é recorrente nas soluções de \mathcal{L}_2 . Com isto queremos dizer que perturbações de U_L , dentro de \mathcal{L}_2 , não levam à habitual leve alteração (\mathcal{L}_{Loc}^1 contínua) no conjunto de ondas; estas simplesmente mantêm-se inalteradas.

Por fim, na última secção são descritas as soluções para \mathcal{L}_3 nas R-regiões em que estas existem. A inexistência de solução global, por um lado, deve-se ao súbito desaparecimento das ondas de velocidade positiva, por outro, deve-se ao facto do Grupo de Ondas-1 passar a terminar na Coincidência.

O capítulo 5 versa sobre os Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias Associados ao modelo estudado e está dividido em três secções. Na primeira faz-se o estudo do tipo de pontos de equilíbrio encontrados no modelo. Na segunda secção são encontradas condições para a existência de bifurcações de Hopf nas equações diferenciais associadas ao modelo específico - no apêndice D mostra-se que na realidade esta bifurcação faz parte de uma bifurcação de Bogdanov-Takens. Esta bifurcação e as características dos conjuntos de Rankine-Hugoniot deste modelo permitem concluir a existência de descontinuidades que

satisfazem as desigualdades de Lax, para ambas as famílias, que não são choques visto que não tem perfis viscosos. Na terceira secção avalia-se a relevância da bifurcação nas soluções encontradas no Capítulo 4. Pensamos que na L-região \mathcal{L}_1 todas as soluções tem Perfil Viscoso. Contudo, esta bifurcação garante a inexistência de Perfil Viscoso para um choque de Lax usado na construção de todas as soluções da L-região \mathcal{L}_2 . Mais, para parte da L-região \mathcal{L}_2 , onde se situa o estado cuja solução foi dada em detalhe, a inexistência desse Perfil Viscoso resulta na inexistência de solução para algumas R-regiões, assim como no desaparecimento da multiplicidade de soluções. Na L-regiões \mathcal{L}_3 verifica-se um agravamento da inexistência de soluções.

No capítulo 6 são descritos resultados obtidos via simulação numérica. As soluções de Riemann com Perfil Viscoso encontradas foram confirmadas. Depois foram escolhidos estados tais que se enquadrassem nos vários casos onde não existia solução de Lax, ou, a existir, que esta não possuísse Perfil Viscoso. Em todas as simulações foram encontradas soluções que persistem por longos períodos de tempo, na realidade persistiram e resistiram em todas as simulações realizadas. Nas soluções de longa duração aparecem choques inadmissíveis, em alguns casos como previsto teoricamente no Capítulo 4. Contudo acreditamos tratarem-se de artefactos numéricos, ou seja, de alguma forma a viscosidade física é dominada pela numérica. Estamos convictos que estas soluções que contemplam choques sem perfil não são realmente soluções assintóticas da Equação Diferencial Parcial.

Quando foram usados estados rodeados por ciclos limite não foram encontradas soluções oscilantes de alta frequência que indicassem estarmos na presença de soluções em medida obtidas por Frid, ver [8], contudo não podemos afirmar que este tipo de solução não aparece neste modelo. Foi também possível observar soluções de longa duração que dependem da estrutura do salto inicial, à semelhança do já observado por A. Azevedo em [2]. Por exemplo, é possível observar ciclos que permanecem por longos períodos que parecem resultantes de órbitas homoclínicas.

Apesar das explicações encontradas para resultados numéricos esperamos realizar posteriormente mais experimentos assim como tratamento analítico das simulações.

Por fim temos quatro apêndices com resultados que são utilizados no corpo da tese.

Capítulo 2

Duas Leis de Conservação

Um sistema de duas Leis de Conservação é o conjunto de equações

$$U_t + F(U)_x = 0 \quad (2.1)$$

onde

$$(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, U(x, t) \in \mathbb{R}^2 \\ F : U \in \mathbb{R}^2 \mapsto F(U) \in \mathbb{R}^2 \text{ de classe } \mathcal{C}^2$$

Ao semi-plano $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ chama-se espaço físico e ao plano $U \in \mathbb{R}^2$ chama-se espaço de estados, portanto aos vectores U chama-se estados. À função $F(U)$ chama-se Fluxo.

Lax solucionou o Problema de Riemann Local no caso de a diferencial do Fluxo ter autovalores reais e distintos (ver [16]). De forma a identificar onde o Teorema de Lax é aplicável tornam-se naturais as seguintes definições:

Definição 2.1 Chama-se **Região Estritamente Hiperbólica** ao conjunto $\mathcal{R}_H \subset \mathbb{R}^2$ onde $DF(U)$ tem autovalores reais e distintos.

Definição 2.2 Na Região Estritamente Hiperbólica os autovalores são ordenados de tal forma que $\lambda_1(U) < \lambda_2(U)$. Mais, define-se uma base de autovectores à direita de $DF(U)$, $\{r_1(U), r_2(U)\}$, associados aos autovalores com o mesmo índice. Define-se também a sua base dual, $\{l_1(U), l_2(U)\}$, que são autovectores à esquerda de $DF(U)$.

Nota 2.1 Usualmente normaliza-se o campo de vectores à direita de forma a apontar no sentido do crescimento dos autovalores correspondentes. Na Definição 2.2 não o fizemos, tornando-a equivalente a uma definição de um campo de direcções.

Definição 2.3 Chama-se **Região Elíptica** ao conjunto $\mathcal{R}_E \subset \mathbb{R}^2$ onde $DF(U)$ tem autovalores complexos conjugados com parte imaginária diferente de zero.

Na Região Elíptica é desnecessária a ordenação dos autovalores complexos e então ambos são identificados por λ_e ; isto porque o mais importante é a parte real do autovalor complexo e temos $\text{Re}(\lambda_1) = \text{Re}(\lambda_2) = \text{Re}(\lambda_e)$.

Definição 2.4 Na Região Elíptica define-se uma base de vectores, $\{r_1(U), r_2(U)\}$, tal que de $DF(U)$, escrita nessa base, tome a forma $\begin{bmatrix} \text{Re}(\lambda_e) & -\text{Im}(\lambda_e) \\ \text{Im}(\lambda_e) & \text{Re}(\lambda_e) \end{bmatrix}$, assim como a sua base dual $\{l_1(U), l_2(U)\}$.

Nota 2.2 No interior da Região Elíptica a definição 2.4 não estabelece um único campo de direcções definido; existe uma infinidade de bases que transformam $DF(U)$ na forma pretendida. Apesar de tudo considera-se escolhida uma base na vizinhança de cada ponto.

2.1 Problema de Riemann

Riemann, no meio do século XIX, estudou o problema de um tubo com dois gases. Desprezando o efeito das paredes do tubo, devido à viscosidade dos gases, este é um problema essencialmente unidimensional. Este tipo de problema de valor inicial ficou então conhecido como Problema de Riemann.

Explicitamente, chama-se Problema de Riemann associado à Lei de Conservação (2.1) ao seguinte problema de valor inicial

$$U(x, t = 0) = \begin{cases} U_L & \text{if } x < 0, \\ U_R & \text{if } x > 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

O sistema de equações (2.1) com o valor inicial (2.2) resulta num problema independente de escala; queremos dizer com isto que uma mudança de coordenadas $(x, t) \rightarrow (\alpha x, \alpha t)$ com $\alpha > 0$ não altera nem o sistema de equações nem as condições iniciais. Admitindo existência e unicidade de solução conclui-se que todas as soluções são constantes ao longo de semirectas centradas na origem no semiplano superior. Logo a solução depende apenas de um parâmetro, por exemplo da velocidade $\xi = x/t$. Para $t > 0$ podemos reescrever o sistema de equações com este parâmetro obtendo

$$-\xi U_\xi + F(U)_\xi = 0 \quad (2.3)$$

e as condições fronteira

$$\begin{aligned} U(\xi) &\rightarrow U_L \text{ com } \xi \rightarrow -\infty, \\ U(\xi) &\rightarrow U_R \text{ com } \xi \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

2.2 Soluções Fundamentais

Definição 2.5 Chama-se *Rarefação* a uma solução de (2.3) com $U_\xi \neq 0$ para $\xi \in [\xi_1, \xi_2]$.

Numa Rarefação U_ξ é autovector de $DF(U)$ e ξ é um autovalor de $DF(U)$. Se procurarmos soluções de um Problema de Riemann partindo do estado à esquerda teremos que usar Rarefações com ξ crescente; se procurarmos soluções de um Problema de Riemann partindo do estado à direita teremos que usar Rarefações com ξ decrescente.

A solução trivial de (2.3) tal que $U_\xi = 0$ é extremamente importante pois será usada em todas as soluções. Contudo ainda não é possível resolver todos os problemas apenas com soluções triviais e Rarefações, é necessário admitir soluções descontínuas para garantir as sua existência.

As soluções descontínuas têm que, de certa forma, satisfazer a Lei de Conservação; mais propriamente satisfazem a sua forma integral, ver [16],

$$\frac{d}{dt} \int_a^b U(x, t) dx = F(U(a, t)) - F(U(b, t)).$$

Suponhamos que existe uma descontinuidade de U em $\xi = s$ com limite esquerdo U_L e direito U_R , então esta descontinuidade satisfaz a lei integral se e só se satisfazer as relações de Rankine-Hugoniot que passamos a definir, ver [16].

Definição 2.6 Chama-se *relações de Rankine-Hugoniot* a

$$-s(U_R - U_L) + F(U_R) - F(U_L) = 0.$$

Para estudar as relações de Rankine-Hugoniot é útil definir algumas funções.

Definição 2.7 Define-se H como uma função de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ em \mathbb{R}^2 tal que

$$H(U_L; U_R; s) = -s(U_R - U_L) + F(U_R) - F(U_L).$$

Definição 2.8 Define-se h_{U_L} como uma função de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ em \mathbb{R}^2 tal que

$$h_{U_L}(U_R; s) = H(U_L; U_R; s).$$

Definição 2.9 Define-se como **conjunto**, ou **curva**, de **Rankine-Hugoniot** de um estado fixo U_L o conjunto

$$\mathcal{H}(U_L) = \{U_R \in \mathbb{R}^2 : \exists s \in \mathbb{R}, H(U_L; U_R; s) = 0\}$$

Definição 2.10 Seja π a projecção de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ em \mathbb{R}^2 que leva (U_R, s) em U_R .

Pode então definir-se $\mathcal{H}(U_L)$ como $\pi(h_{U_L}^0)$, onde $h_{U_L}^0$ é o conjunto de nível zero de h_{U_L} .

Definição 2.11 Quando, fixando U_L e U_R , existe s tal que $H(U_L; U_R; s) = 0$ é fácil ver que ele é único se e só se $U_L \neq U_R$; então para $U_L \neq U_R$ define-se esse s como $s(U_L, U_R)$.

Definição 2.12 Chama-se **Choque** aos tripletos (U_L, U_R, s) com $U_L \neq U_R$ que satisfazem as relações de Rankine-Hugoniot.

Definição 2.13 Ao parâmetro $s = s(U_L, U_R)$ chama-se **Velocidade do Choque**; a descontinuidade em $U(\xi)$ acontece precisamente quando $\xi = s(U_L, U_R)$.

Temos agora condições necessárias para a construção de soluções $U(\xi)$ com descontinuidades, todavia estas condições não são suficientes. Muitas das soluções das relações de Rankine-Hugoniot não representam choques fisicamente admissíveis. Urge então encontrar um critério para determinar se um Choque pode ou não ser utilizado, por outras palavras determinar se um Choque é ou não admissível. Todavia não existe nenhum critério que seja aceito universalmente. As duas próximas subsecções apresentam dois critérios de admissibilidade, também chamados de critérios de entropia.

2.2.1 Choques de Lax

Em 1957 Lax estabeleceu condições para a admissibilidade dos choques, ver [16]. No caso particular de duas Leis de Conservação estas condições resumem-se a admitir apenas dois tipos de choque, 1-Choque e 2-Choque, definidos a seguir.

Definição 2.14 Chama-se **1-Choque** a um choque (U_L, U_R, s) que satisfaça:

$$s < \lambda_1(U_L) \text{ e } \lambda_1(U_R) < s < \lambda_2(U_R). \quad (2.4)$$

Chama-se **2-Choque** a um choque (U_L, U_R, s) que satisfaça:

$$\lambda_1(U_L) < s < \lambda_2(U_L) \text{ e } \lambda_2(U_R) < s. \quad (2.5)$$

Na Figura 2.1 são dados exemplos de dois problemas de Riemann cujas soluções são um 1-Choque e um 2-Choque. Nota-se pela figura que os nomes são sugestivos:

- no 1-Choque a Característica 1 «choca-se» com a descontinuidade por ambos os lados; e a Característica 2 cruza a descontinuidade da esquerda para a direita.
- no 2-Choque a Característica 1 cruza a descontinuidade da direita para a esquerda; e a Característica 2 «choca-se» com a descontinuidade por ambos os lados.

Os Choques de Lax são boas aproximações à admissibilidade sobretudo para choques fracos, ou seja, choques onde U_L e U_R estão próximos.

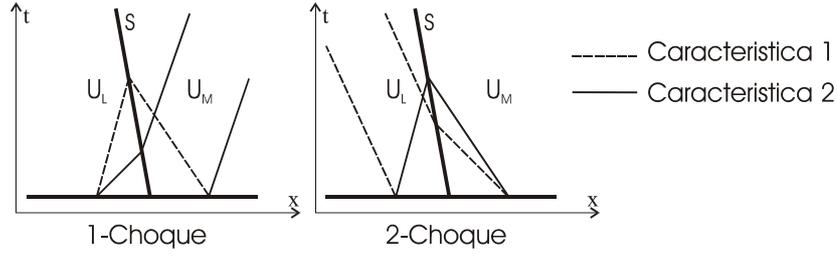


Figura 2.1: Choques de Lax.

2.2.2 Perfis Viscosos

O sistema de equações (2.1) geralmente resulta da simplificação de sistemas mais complexos (ver [9],[21]), frequentemente de sistemas da forma

$$U_t + DF(U)U_x = \epsilon (D(U)U_x)_x. \quad (2.6)$$

Fisicamente o termo direito do sistema (2.6) pode representar viscosidades, tensões capilares e outras grandezas; contudo é habitual chamar-se, indiscriminadamente, de viscosidade; à matriz $D(U)$ chama-se Matriz de Viscosidade e a ϵ factor multiplicador. O estudo destes problemas com termos parabólicos é bastante complicado, assim sempre que possível simplifica-se a equação eliminando o termo da direita para obter uma aproximação.

Uma forma de se determinar a admissibilidade de um Choque é verificar se a solução de (2.6) tende para esse Choque quando se faz ϵ tender a zero. É muito complexo validar Choques assim.

Outra forma de se determinar a admissibilidade é pedir que o Choque seja o limite de uma solução especial de (2.6) quando ϵ tende a zero. Mais propriamente essa solução especial é uma solução do tipo onda viajante; ou seja, uma solução que depende apenas do parâmetro $\eta = x - ct$, onde c é chamada de velocidade da onda.

Reescrevendo (2.6) na coordenada η obtemos

$$-cU_\eta + DF(U)U_\eta = \epsilon (D(U)U_\eta)_\eta;$$

integrando em η chegamos a

$$-cU + F(U) + K = \epsilon D(U)U_\eta. \quad (2.7)$$

Motivados pelos Choques impomos as seguintes condições fronteira

$$\lim_{\eta \rightarrow -\infty} U(\eta) = U_L, \quad \lim_{\eta \rightarrow -\infty} U_\eta = 0, \quad (2.8a)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} U(\eta) = U_R, \quad \lim_{\eta \rightarrow +\infty} U_\eta = 0; \quad (2.8b)$$

substituindo em (2.7) temos

$$-c(U_R - U_L) + F(U_R) - F(U_L) = 0, \quad (2.9a)$$

$$K = cU_L - F(U_L), \quad (2.9b)$$

o que reafirma a necessidade das condições de Rankine-Hugoniot, pois $s = c$ dado s ser único para $U_L \neq U_R$. De (2.9) tira-se igualmente $K = cU_R - F(U_R)$.

Até agora não avançamos nada quando à admissibilidade. Voltemos ao sistema (2.7), podemos olhar para ele como um sistema de Equações Diferenciais Ordinárias da forma

$$U_{\bar{\eta}} = D^{-1}(U)H(U_L; U; s), \quad (2.10)$$

onde se admitiu a inversibilidade de $D(U)$ e se fez a mudança de variável $\bar{\eta} = \eta/\epsilon$. Tecnicamente deveríamos distinguir a função $U(\eta)$ da função $U(\bar{\eta})$, ou seja, escrever $\bar{U}(\bar{\eta})$; mas para não sobrecarregar a notação omitimos a barra.

Definição 2.15 Chama-se *Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias Associado* a (U_L, s) ao sistema (2.10).

Por construção os estados U_L e U_R são pontos estacionários do Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias Associado; pode haver outros.

Definição 2.16 Diz-se que um choque (U_L, U_R, s) tem *Perfil Viscoso* se existe pelo menos uma trajectória do Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias Associado a $(U_L, s(U_L, U_R))$ tendo U_L como α -limite e U_R como ω -limite.

Neste trabalho será usada a matriz identidade para a Matriz de Viscosidade, isto é $D(U) = I$. Assim podemos reescrever o Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias Associado ao choque (U_L, U_R, s) como

$$U_{\bar{\eta}} = H(U_L; U; s). \quad (2.11)$$

Mais, os autovalores de um ponto de equilíbrio de (2.11), U , são $\lambda(U) - s$.

2.3 Conjuntos Relevantes

O estudo do conjunto de Rankine-Hugoniot de um estado U_L é feito seguidamente. Começemos com o conhecido teorema de Bethe-Wendroff (ver [24] ou [22]).

Teorema 2.1 (Bethe-Wendroff) *Seja $U_R \in \mathcal{H}(U_L) \cap \mathcal{R}_H$ com $U_R \neq U_L$ tal que $l_i(U_R) \cdot (U_R - U_L) \neq 0$. Então a velocidade $s(U_L, U)$, vista como uma função ao longo da curva de Rankine-Hugoniot, tem um ponto crítico em U_R se e só se $s(U_L, U_R) = \lambda_i(U_R)$ para algum $i \in \{1, 2\}$. Nesse ponto $\mathcal{H}(U_L)$ é tangente a $r_i(U_R)$.*

Mais, esse ponto crítico é degenerado se e só se $l_i(U_R) D^2 F(U_R) r_i^2(U_R) = 0$.

O teorema de Bethe-Wendroff não é aplicável quando U_R está em \mathcal{R}_E .

Quando temos um dos estados de um choque dentro da Região Elíptica a estabilidade da singularidade do Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias é dada pelo sinal da diferença entre a parte real dos autovalores e a velocidade do choque; assim é importante a comparação entre $\text{Re}(\lambda)$ e s . A seguir é enunciado um novo teorema complementar ao de Bethe-Wendroff, onde $U_R \in \mathcal{R}_E$.

Teorema 2.2 *Seja $U_R \in \mathcal{H}(U_L) \cap \mathcal{R}_E$ com $U_R \neq U_L$; se $s(U_L, U_R) = \text{Re}(\lambda_e(U_R))$ então a velocidade $s(U_L, U)$, vista como uma função ao longo da curva de Rankine-Hugoniot, tem U_R como ponto regular. Temos $\mathcal{H}(U_L)$ parametrizável e tangente, em U_R , ao vector*

$$(\dot{u}, \dot{v})^T = k(l_2(U_R - U_L), -l_1(U_R - U_L))^T, \quad k \neq 0,$$

nas coordenadas da base $\{r_1, r_2\}$ escolhida; sendo $(\dot{u}, \dot{v})^T$ o vector velocidade de uma parametrização de $\mathcal{H}(U_L)$ temos $\dot{s} = -k \text{Im}(\lambda_e(U_R))$.

Prova. Tomemos $Dh_{U_L} = (U_R - U_L) ds - [DF(U_R) - s] dU_R$ e $s(U_L, U_R) = \text{Re}(\lambda_e(U_R))$. Suponhamos que o vector $(\dot{s} = 0, \dot{U}_R \neq 0)$ pertence ao o núcleo de Dh_{U_L} . Sabemos que $[DF(U_R) - s]$ é regular pois $U_R \in \mathcal{R}_E$, logo também $[U_R - U_L \quad DF(U_R) - s]$ é regular e então o núcleo de Dh_{U_L} é unidimensional. Mas como $Dh_{U_L}(\dot{s} = 0, \dot{U}_R)$ é igual a $[DF(U_R) - s] \dot{U}_R$ temos que $Dh_{U_L}(\dot{s} = 0, \dot{U}_R) = 0$ implica que $\dot{U}_R = 0$. Assim, por absurdo, conclui-se que $\dot{s} \neq 0$.

Como Dh_{U_L} é regular temos $\mathcal{H}(U_L)$ localmente parametrizável em U_R .

Escrevendo Dh_{U_L} na base de vectores $\{r_i(U_R)\}_i$ definida na Região Elíptica (ver definição 2.4) obtemos

$$Dh_{U_L} \begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1(U_R - U_L) & \text{Re}(\lambda_e(U_R)) - s & -\text{Im}(\lambda_e(U_R)) \\ l_2(U_R - U_L) & \text{Im}(\lambda_e(U_R)) & \text{Re}(\lambda_e(U_R)) - s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix}$$

tomando $s = \text{Re}(\lambda_e(U_R))$ obtemos

$$Dh_{U_L} \begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1(U_R - U_L) & 0 & -\text{Im}(\lambda_e(U_R)) \\ l_2(U_R - U_L) & \text{Im}(\lambda_e(U_R)) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix}$$

cujos núcleos são

$$\begin{aligned} \dot{s} &= -k \text{Im}(\lambda_e(U_R)) \\ \dot{u} &= k \cdot l_2(U_R - U_L) \\ \dot{v} &= -k \cdot l_1(U_R - U_L). \end{aligned}$$

É de notar que $(l_1(U_R - U_L), l_2(U_R - U_L)) \neq (0, 0)$ pois $U_R \neq U_L$. ■

Sabemos então que acontece exactamente o contrário, acerca de \dot{s} , daquilo que poderia ser esperado por uma analogia directa com o teorema de Bethe-Wendroff.

Tomemos $(U_R^0, s^0) \in h_{U_L}^0$ e a diferencial $Dh_{U_L} = (U_R - U_L) ds + [DF(U_R) - s] dU_R$. Se $Dh_{U_L}(U_R^0, s^0)$ é regular então, pelo teorema da submersão, temos que $h_{U_L}^0$ é localmente uma curva, logo parametrizável localmente.

Por definição o ponto (U_R^0, s^0) é singular se e só se $Dh_{U_L}(U_R^0, s^0)$ é singular, e $Dh_{U_L}(U_R^0, s^0)$ é singular se e só se existe um covector l diferente de zero tal que $l \cdot Dh_{U_L}(U_R^0, s^0) = 0$. Quando $Dh_{U_L}(U_R^0, s^0)$ é singular, normalmente o conjunto bifurca em (U_R^0, s^0) ; todavia podem acontecer várias coisas para além da bifurcação como, por exemplo, (U_R^0, s^0) ser um ponto isolado de $h_{U_L}^0$.

Estudo de $h_{U_L}^0$:

1. Para $U_R^0 = U_L$ temos:

(a) Se (U_R^0, s^0) é ponto singular então $s^0 = \lambda_i(U_R^0)$.

Se $U_R^0 = U_L \in \mathcal{R}_H$ então existem 2 valores de s^0 que satisfazem $s^0 = \lambda_i(U_R^0)$. Neste caso dizemos que ocorre a Bifurcação Primária de $\mathcal{H}(U_L)$, isto é, partindo de U_L saem 2 ramos de $\mathcal{H}(U_L)$, cada um com a direcção de um autovector;

(b) Se (U_R^0, s^0) é ponto regular então $h_{U_L}^0$ é localmente uma curva “vertical” (no sentido que $\dot{U}_R = 0$), logo π é singular.

Se $U_R^0 = U_L \in \mathcal{R}_E$ então qualquer que seja o valor de s^0 temos $Dh_{U_L}(U_R^0, s^0)$ regular, logo U_L é ponto isolado de $\mathcal{H}(U_L)$.

2. Para $U_R^0 \neq U_L$ temos:

(a) Se (U_R^0, s^0) é ponto singular então $Dh_{U_L}(U_R^0, s^0)$ é singular, isto é, existe um l tal que $l \cdot Dh_{U_L}(U_R, s) = 0$.

Para termos $Dh_{U_L}(U_R^0, s^0)$ singular também $DF(U_R^0) - s^0$ terá que ser singular, assim temos $s^0 = \lambda_i(U_R^0)$ e por consequência $l = l_i(U_R^0)$. Para $l \cdot Dh_{U_L}(U_R, s) = 0$ ser satisfeito necessariamente $l_i(U_R^0)(U_R^0 - U_L) = 0$.

Estes pontos são pontos de possível bifurcação de $h_{U_L}^0$;

(b) Se (U_R^0, s^0) é ponto regular então $h_{U_L}^0$ é localmente uma curva. Esta curva não é “vertical” pois se $\dot{U}_R = 0$ teríamos $(U_R - U_L)\dot{s} = 0$ o que implica $\dot{s} = 0$, absurdo pela regularidade de Dh_{U_L} . Neste caso $h_{U_L}^0$ projecta regularmente e $\mathcal{H}(U_L)$ é parametrizável.

2.3.1 Estruturas de Codimensão-1

Nesta subsecção serão definidas Estruturas de Codimensão-1 relevantes para o modelo a ser estudado no capítulo 3. A importância geral destas estruturas ficará patente na secção 2.5.

Definição 2.17 Chama-se ***i -Bifurcação Secundária*** ao conjunto

$$\mathcal{B}_i = \{U_L \in \mathbb{R}^2 : \exists U_R \in \mathcal{H}(U_L), U_R \neq U_L, s(U_L, U_R) = \lambda_i(U_R) \text{ e } l_i(U_R) \cdot (U_R - U_L) = 0\}$$

e chama-se simplesmente ***Bifurcação Secundária*** ao conjunto $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$.

Apesar do nome sabemos que mesmo com $U_L \in \mathcal{B}$ não temos necessariamente um $U_R \in \mathcal{H}(U_L) \setminus U_L$ tal que $\mathcal{H}(U_L)$ bifurque; temos sim que $Dh_{U_L}(U_R, s(U_L, U_R))$ é singular para algum U_R .

Definição 2.18 Chama-se ***i -Inflexão*** ao conjunto $\mathcal{I}_i = \{U \in \mathcal{R}_H : D\lambda_i(U) r_i(U) = 0\}$ e chama-se simplesmente ***Inflexão*** ao conjunto $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$.

Este conjunto pode ser visto assim: tomemos o valor do i -autovalor, $\lambda_i(U)$, como uma função sobre o campo integral de $r_i(U)$. Esta função atinge um ponto crítico ao cruzar o Local de i -Inflexão. Se esse ponto crítico for um máximo então as i -rarefações terminarão de ambos os lados da i -Inflexão; de modo similar se esse ponto crítico for um mínimo então as i -rarefações começarão de ambos os lados da i -Inflexão.

Proposição 2.1 Na Região Estritamente Hiperbólica vale (ver [11])

$$D\lambda_i(U) r_i(U) = 0 \Leftrightarrow l_i(U) DF^2(U) r_i(U)^2 = 0. \quad (2.12)$$

Com esta proposição podemos redefinir as i -Inflexões como

$$\mathcal{I}_i = \left\{ U \in \mathbb{R}^2 : l_i(U) DF^2(U) r_i(U)^2 = 0 \right\}.$$

Definição 2.19 Chama-se ***Local de Coincidência***, ou simplesmente ***Coincidência***, ao conjunto

$$\mathcal{C} = \{U \in \mathbb{R}^2 : DF(U) \text{ tem dois autovalores reais iguais}\}$$

Nota 2.3 No contexto dos artigos que usam a Variedade de Onda Fundamental, introduzida em [11], a letra \mathcal{C} é usada para representar a Variedade Característica; e a letra \mathcal{E} , essa sim, é usada para Coincidência. Nesta tese \mathcal{C} representa a Coincidência e, como veremos bem mais tarde, a letra \mathcal{E} a Extensão Esquerda da Coincidência.

Definição 2.20 Chama-se ***(ij)-Contacto Duplo Hiperbólico*** ao conjunto

$$\mathcal{D}_{ij} = \{U_L \in \mathcal{R}_H : \exists U_R \in \mathcal{H}(U_L) \cap \mathcal{R}_H, U_R \neq U_L, s(U_L, U_R) = \lambda_i(U_L) = \lambda_j(U_R)\}$$

e chama-se simplesmente ***Contacto Duplo Hiperbólico*** ao conjunto $\mathcal{D}_H = \cup_{j=1}^2 \cup_{i=1}^2 \mathcal{D}_{ij}$.

Existe uma identificação natural entre \mathcal{D}_{ij} e \mathcal{D}_{ji} , ou seja se $U_L \in \mathcal{D}_{ij}$, $U_R \in \mathcal{H}(U_L) \cap \mathcal{R}_H$, $U_L \neq U_R$ e $s(U_L, U_R) = \lambda_i(U_L) = \lambda_j(U_R)$ então $U_R \in \mathcal{D}_{ji}$.

Definição 2.21 Chama-se ***(ei)-Contacto Duplo Elíptico-hiperbólico*** ao conjunto

$$\mathcal{D}_{ei} = \{U_L \in \mathcal{R}_E : \exists U_R \in \mathcal{H}(U_L) \cap \mathcal{R}_H, s(U_L, U_R) = \text{Re}(\lambda_e(U_L)) = \lambda_i(U_R)\}.$$

Chama-se ***(ie)-Contacto Duplo Hiperbolico-elíptico*** ao conjunto

$$\mathcal{D}_{ie} = \{U_L \in \mathcal{R}_H : \exists U_R \in \mathcal{H}(U_L) \cap \mathcal{R}_E, s(U_L, U_R) = \lambda_i(U_L) = \text{Re}(\lambda_e(U_R))\}$$

e chama-se simplesmente ***Contacto Duplo Heterogéneo*** ao conjunto $\mathcal{D}_E = \cup_{i=1}^2 (\mathcal{D}_{ie} \cup \mathcal{D}_{ei})$.

Claramente, também aqui, existe uma identificação natural entre o (ei)-Contacto Duplo Elíptico-hiperbólico, \mathcal{D}_{ei} , e o (ie)-Contacto Duplo Hiperbolico-elíptico \mathcal{D}_{ie} .

Definição 2.22 Chama-se ***i -Extensão Esquerda*** de um conjunto \mathcal{Z} ao conjunto

$$\mathcal{E}(\mathcal{Z})_i = \{U_R \in \mathbb{R}^2 : \exists U_L \in \mathcal{Z}, U_R \in \mathcal{H}(U_L), U_R \neq U_L, s(U_L, U_R) = \lambda_i(U_L)\}$$

e chama-se simplesmente ***Extensão Esquerda*** de um conjunto \mathcal{Z} ao conjunto $\mathcal{E}(\mathcal{Z}) = \mathcal{E}(\mathcal{Z})_1 \cup \mathcal{E}(\mathcal{Z})_2$.

Definição 2.23 Chama-se ***i-Extensão Direita*** de um conjunto \mathcal{Z} ao conjunto

$$(\mathcal{Z}) \mathcal{E}_i = \{U_R \in \mathbb{R}^2 : \exists U_L \in \mathcal{Z}, U_R \in \mathcal{H}(U_L), U_R \neq U_L, s(U_L, U_R) = \lambda_i(U_R)\}$$

e chama-se simplesmente ***Extensão Direita*** de um conjunto \mathcal{Z} ao conjunto $(\mathcal{Z}) \mathcal{E} = (\mathcal{Z}) \mathcal{E}_1 \cup (\mathcal{Z}) \mathcal{E}_2$.

Definição 2.24 Seja $U_R \in \mathcal{E}(\{U_L\})$ então diz-se que U_R e U_L são **associados**.

Passaremos a chamar U_R e U_L de associados se estiverem identificados pela identificação natural. Por razões históricas cabe também definir:

Definição 2.25 Chama-se ***i-Histerese***, \mathcal{H}_i , à *i-Extensão Esquerda* da *i-Inflexão*. Ou seja,

$$\mathcal{H}_i = \mathcal{E}(\mathcal{I}_i)_i = \{U_R \in \mathbb{R}^2 : \exists U_L \in \mathcal{I}_i, U_R \in \mathcal{H}(U_L), U_R \neq U_L, s(U_L, U_R) = \lambda_i(U_L)\}$$

e chama-se simplesmente ***Histerese*** ao conjunto $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$.

Cada elemento da Histerese é associado de algum elemento da Inflexão.

2.3.2 Locais Sónicos

Esta secção versa sobre estruturas de Codimensão-2; estruturas de Codimensão-1 definidas sobre o conjunto de Rankine-Hugoniot.

Definição 2.26 Chama-se ***i-Local Sónico à Esquerda*** de um estado U_L , ${}^*_i\mathcal{S}(U_L)$, à sua própria *i-Extensão Esquerda*. Ou seja

$${}^*_i\mathcal{S}(\{U_L\}) = \mathcal{E}(U_L)_i = \{U_R \in \mathcal{H}(U_L) : U_R \neq U_L \text{ e } s(U_L, U_R) = \lambda_i(U_L)\}$$

Chama-se simplesmente ***Local Sónico Esquerdo*** de U_L ao conjunto ${}^*\mathcal{S}(U_L) = {}^*_1\mathcal{S} \cup {}^*_2\mathcal{S}$.

Definição 2.27 Chama-se ***i-Local Sónico à Direita*** de um estado U_L , $\mathcal{S}_i^*(U_L)$, à sua própria *i-Extensão Direita*. Ou seja

$$\mathcal{S}_i^*(\{U_L\}) = \mathcal{E}(U_L)_i = \{U_R \in \mathcal{H}(U_L) : U_R \neq U_L \text{ e } s(U_L, U_R) = \lambda_i(U_R)\}$$

Chama-se simplesmente ***Local Sónico Direito*** de U_L ao conjunto $\mathcal{S}^*(U_L) = \mathcal{S}_1^* \cup \mathcal{S}_2^*$.

Os Locais Sónicos, como é bem conhecido, são fundamentais na construção das soluções dos Problemas de Riemann. No apêndice A, resumo do artigo [20], este facto fica patente.

2.4 Sectores da Curva de Rankine-Hugoniot e as suas Fronteiras

Como já dissemos nem todas as soluções das relações de Rankine-Hugoniot representam realmente choques. Contudo é útil classificar todo o conjunto de Rankine-Hugoniot, mesmo quando ele representa choques inadmissíveis.

2.4.1 Ambos os Estados na Região Estritamente Hiperbólica

À semelhança da classificação de Lax para o 1 e 2-choques faremos a classificação de todo o conjunto de Rankine-Hugoniot baseada nas relações entre as duas velocidades características à esquerda, $\lambda_1(U_L)$ e $\lambda_2(U_L)$, à direita do choque, $\lambda_1(U_R)$ e $\lambda_2(U_R)$, e a própria velocidade do choque, $s = s(U_L, U_R)$. Existem nove relações abertas possíveis entre os parâmetros acima. Nos esquemas estão representados no plano xt a descontinuidade (linha vertical) e as posição relativa das características de cada lado do choque; junto encontra-se a convenção gráfica para cada Sector que será usada em todas as figuras.

Definição 2.28 (Sector) Cada conjunto de pontos de uma curva de Rankine-Hugoniot com a mesma classificação será chamado de **Sector** dessa curva.

$\mathcal{H}(U_L)$ tem nove classificações possíveis:

1. Transporte à Direita, $\mathcal{H}_{TD}(U_L)$ se $s < \lambda_1(U_L) < \lambda_2(U_L)$ e $s < \lambda_1(U_R) < \lambda_2(U_R)$ 
2. 1-Choque, $\mathcal{H}_{1S}(U_L)$ se $s < \lambda_1(U_L) < \lambda_2(U_L)$ e $\lambda_1(U_R) < s < \lambda_2(U_R)$ 
3. Compressivo ou Sobrecompressivo, $\mathcal{H}_C(U_L)$ se $s < \lambda_1(U_L) < \lambda_2(U_L)$ e $\lambda_1(U_R) < \lambda_2(U_R) < s$ 
4. 1-Expansivo, $\mathcal{H}_{1E}(U_L)$ se $\lambda_1(U_L) < s < \lambda_2(U_L)$ e $s < \lambda_1(U_R) < \lambda_2(U_R)$ 
5. Cruzamento, $\mathcal{H}_X(U_L)$ se $\lambda_1(U_L) < s < \lambda_2(U_L)$ e $\lambda_1(U_R) < s < \lambda_2(U_R)$ 
6. 2-Choque, $\mathcal{H}_{2S}(U_L)$ se $\lambda_1(U_L) < s < \lambda_2(U_L)$ e $\lambda_1(U_R) < \lambda_2(U_R) < s$ 
7. Expansivo, $\mathcal{H}_E(U_L)$ se $\lambda_1(U_L) < \lambda_2(U_L) < s$ e $s < \lambda_1(U_R) < \lambda_2(U_R)$ 
8. 2-Expansivo, $\mathcal{H}_{2E}(U_L)$ se $\lambda_1(U_L) < \lambda_2(U_L) < s$ e $\lambda_1(U_R) < s < \lambda_2(U_R)$ 
9. Transporte à Esquerda, $\mathcal{H}_{TE}(U_L)$ se $\lambda_1(U_L) < \lambda_2(U_L) < s$ e $\lambda_1(U_R) < \lambda_2(U_R) < s$ 

Definição 2.29 Se um choque de Cruzamento admite Perfil Viscoso então ele chama-se Transicional. Logo parte de $\mathcal{H}_X(U_L)$ poderá ser classificada como $\mathcal{H}_T(U_L)$.

É também útil classificar os Locais Sônicos que são, em casos não degenerados, pontos isolados no conjunto de Rankine-Hugoniot que se situam na fronteira entre dois sectores. A fronteira entre dois sectores será escrita como $\mathcal{F}(\cdot, \cdot)$. Abaixo os Contactos Duplos aparecem classificados com um W ou um M , classificação que só será dada em 2.5.3.

Se $U_L \in \mathcal{R}_H$ e $U_R \in \mathcal{R}_H \cap \mathcal{H}(U_L)$ temos os seguintes locais relevantes:

1. 1-Choque:

(a) Sónico à Esquerda, ${}^*_1\mathcal{S}(U_L)$ se $s = \lambda_1(U_L) < \lambda_2(U_L)$ e $\lambda_1(U_R) < s < \lambda_2(U_R)$:

$$U_R \in \mathcal{F}(\mathcal{H}_{1S}(U_L), \mathcal{H}_X(U_L)); \quad \text{Diagram showing shock and characteristics on both sides.}$$

(b) Sónico à Direita, $\mathcal{S}_1^*(U_L)$ se $s < \lambda_1(U_L) < \lambda_2(U_L)$ e $\lambda_1(U_R) = s < \lambda_2(U_R)$:

$$U_R \in \mathcal{F}(\mathcal{H}_{1S}(U_L), \mathcal{H}_{TD}(U_L)); \quad \text{Diagram showing shock and characteristics on both sides.}$$

(c) Duplamente Sónico, ${}^*_1\mathcal{S}_1^*(U_L)$ se $s = \lambda_1(U_L) < \lambda_2(U_L)$ e $\lambda_1(U_R) = s < \lambda_2(U_R)$:

$$U_R \in \mathcal{F}(\mathcal{H}_{1S}(U_L), \mathcal{H}_{TE}(U_L)) \text{ se } U_L \in \mathcal{D}_{11}W \text{ e } U_R \in \mathcal{D}_{11}M \text{ ou}$$

$$U_R \in \mathcal{F}(\mathcal{H}_X(U_L), \mathcal{H}_{1E}(U_L)) \text{ se } U_L \in \mathcal{D}_{11}M \text{ e } U_R \in \mathcal{D}_{11}W.$$

2. 2-Choque:

(a) Sónico à Esquerda, ${}^*_2\mathcal{S}(U_L)$ se $\lambda_1(U_L) < s = \lambda_2(U_L)$ e $\lambda_1(U_R) < \lambda_2(U_R) < s$:

$$U_R \in \mathcal{F}(\mathcal{H}_{2S}(U_L), \mathcal{H}_{TE}(U_L)); \quad \text{Diagram showing shock and characteristics on both sides.}$$

- ii. Cruzamento, $\mathcal{H}_X(U_L)$;
 - iii. 2-Choque, $\mathcal{H}_{2S}(U_L)$;
2. Se $U_L \in \mathcal{R}_H$ e $U_R \in \mathcal{R}_E$ então:
- (a) São possíveis os seguintes sectores:
 - i. Transporte à Direita, $\mathcal{H}_{TD}(U_L)$ se $s < \lambda_1(U_L) < \lambda_2(U_L)$ e $s < \text{Re}(\lambda(U_R))$;
 - ii. Compressivo ou Sobrecompressivo, $\mathcal{H}_C(U_L)$ ou $C(U_L)$ se $s < \lambda_1(U_L) < \lambda_2(U_L)$ e $\text{Re}(\lambda(U_R)) < s$;
 - iii. 1-Expansivo, $\mathcal{H}_{1E}(U_L)$ se $\lambda_1(U_L) < s < \lambda_2(U_L)$ e $s < \text{Re}(\lambda(U_R))$;
 - iv. 2-Choque, $\mathcal{H}_{2S}(U_L)$ se $\lambda_1(U_L) < s < \lambda_2(U_L)$ e $\text{Re}(\lambda(U_R)) < s$;
 - v. Expansivo, $\mathcal{H}_E(U_L)$ se $\lambda_1(U_L) < \lambda_2(U_L) < s$ e $s < \text{Re}(\lambda(U_R))$;
 - vi. Transporte à Esquerda, $\mathcal{H}_{TE}(U_L)$ se $\lambda_1(U_L) < \lambda_2(U_L) < s$ e $\text{Re}(\lambda(U_R)) < s$;
 - (b) São impossíveis os sectores:
 - i. 1-Choque, $\mathcal{H}_{1S}(U_L)$;
 - ii. Cruzamento, $\mathcal{H}_X(U_L)$;
 - iii. 2-Expansivo, $\mathcal{H}_{2S}(U_L)$.

Apesar das diferenças, relativamente ao choque com ambos os estados na Região Estritamente Hiperbólica, será usada a mesma convenção gráfica nas figuras.

Há também diferenças nos Locais Sónicos. Aqui será usada uma nomenclatura que não consta da literatura.

1. Se $U_L \in \mathcal{R}_E$ e $U_R \in \mathcal{R}_H \cap \mathcal{H}(U_L)$ então temos um Local:

- (a) 1-Choque:

- i. Sesqui-sónico à Esquerda, ${}^*_e\mathcal{S}(U_L)$ se $s = \text{Re}(\lambda(U_L))$ e $\lambda_1(U_R) < s < \lambda_2(U_R)$:

$U_R \in \mathcal{F}(\mathcal{H}_{2E}(U_L), \mathcal{H}_{1S}(U_L));$ 

- ii. Sónico à Direita, $\mathcal{S}_1^*(U_L)$ se $s < \text{Re}(\lambda(U_L))$ e $\lambda_1(U_R) = s < \lambda_2(U_R)$:

$U_R \in \mathcal{F}(\mathcal{H}_{1S}(U_L), \mathcal{H}_{TD}(U_L));$ 

- iii. Sesqui-uni-sónico, ${}^*_e\mathcal{S}_1^*(U_L)$ se $s = \text{Re}(\lambda(U_L))$ e $\lambda_1(U_R) = s < \lambda_2(U_R)$:
 $U_R \in \mathcal{F}(\mathcal{H}_{2E}(U_L), \mathcal{H}_E(U_L))$ se $U_L \in \mathcal{D}_{e1}W$ ou
 $U_R \in \mathcal{F}(\mathcal{H}_{1S}(U_L), \mathcal{H}_{TD}(U_L))$ se $U_L \in \mathcal{D}_{e1}M$.

- (b) Choque Compressivo:

- i. Sesqui-sónico à Esquerda, ${}^*_e\mathcal{C}(U_L)$ se $s = \text{Re}(\lambda(U_L))$ e $\lambda_1(U_R) < \lambda_2(U_R) < s$:

$U_R \in \mathcal{F}(\mathcal{H}_{TE}(U_L), \mathcal{H}_C(U_L));$ 

- ii. Sónico à Direita, $\mathcal{C}_e^*(U_L)$ se $s < \text{Re}(\lambda(U_L))$ e $\lambda_1(U_R) < \lambda_2(U_R) = s$:

$U_R \in \mathcal{F}(\mathcal{H}_C(U_L), \mathcal{H}_{1S}(U_L));$ 

- iii. Sesqui-uni-sónico, ${}^*_e\mathcal{C}_2^*(U_L)$ se $s = \text{Re}(\lambda(U_L))$ e $\lambda_1(U_R) < \lambda_2(U_R) = s$:
 $U_R \in \mathcal{F}(\mathcal{H}_{TE}(U_L), \mathcal{H}_{2E}(U_L))$ se $U_L \in \mathcal{D}_{e2}W$ ou
 $U_R \in \mathcal{F}(\mathcal{H}_{1S}(U_L), \mathcal{H}_C(U_L))$ se $U_L \in \mathcal{D}_{e2}M$.

2. Se $U_L \in \mathcal{R}_H$ e $U_R \in \mathcal{R}_E$ então temos um Local:

- (a) 2-Choque:

- i. Sónico à Esquerda, ${}^*_2\mathcal{S}(U_L)$ se $\lambda_1(U_L) < s = \lambda_2(U_L)$ e $\text{Re}(\lambda(U_R)) < s$:

$U_R \in \mathcal{F}(\mathcal{H}_{TE}(U_L), \mathcal{H}_{2S}(U_L));$ 

- ii. Sesqui-sónico à Direita, $\mathcal{S}_e^*(U_L)$ se $\lambda_1(U_L) < s < \lambda_2(U_L)$ e $\text{Re}(\lambda(U_R)) = s$:

$$U_R \in \mathcal{F}(\mathcal{H}_{2S}(U_L), \mathcal{H}_{1E}(U_L)); \quad \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array}$$

- iii. Uni-sesqui-sónico, ${}^*_2\mathcal{S}_e^*(U_L)$ se $\lambda_1(U_L) < s = \lambda_2(U_L)$ e $\text{Re}(\lambda(U_R)) = s$:
 $U_R \in \mathcal{F}(\mathcal{H}_{TE}(U_L), \mathcal{H}_{1E}(U_L))$ se $U_L \in \mathcal{D}_{2e}X$ ou
 $U_R \in \mathcal{F}(\mathcal{H}_E(U_L), \mathcal{H}_{2S}(U_L))$ se $U_L \in \mathcal{D}_{e2}Z$.

(b) Choque Compressivo:

- i. Sónico à Esquerda, ${}^*_1\mathcal{C}(U_L)$ se $s = \lambda_1(U_L) < \lambda_2(U_L)$ e $\text{Re}(\lambda(U_R)) < s$:

$$U_R \in \mathcal{F}(\mathcal{H}_{2S}(U_L), \mathcal{H}_C(U_L)); \quad \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array}$$

- ii. Sesqui-sónico à Direita, $\mathcal{C}_e^*(U_L)$ se $s < \lambda_1(U_L) < \lambda_2(U_L)$ e $\text{Re}(\lambda(U_R)) = s$:

$$U_R \in \mathcal{F}(\mathcal{H}_C(U_L), \mathcal{H}_{TD}(U_L)); \quad \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array}$$

- iii. Uni-sesqui-sónico, ${}^*_1\mathcal{C}_e^*(U_L)$ se $s = \lambda_1(U_L) < \lambda_2(U_L)$ e $\text{Re}(\lambda(U_R)) = s$:
 $U_R \in \mathcal{F}(\mathcal{H}_{2S}(U_L), \mathcal{H}_{TD}(U_L))$ se $U_L \in \mathcal{D}_{1e}X$ e
 $U_R \in \mathcal{F}(\mathcal{H}_{1E}(U_L), \mathcal{H}_C(U_L))$ se $U_L \in \mathcal{D}_{1e}Z$.

Notar que há sobreposições nas definições. Nem sempre há diferença quando um estado está, ou não, na região elíptica. Por exemplo, o conjunto Choque Compressivo Sónico à Esquerda é escrito como ${}^*_1\mathcal{C}(U_L)$ independentemente da localização de U_R .

2.5 Bifurcações na Classificação da Curva de Rankine-Hugoniot

Na secção 2.3 foram definidas as estruturas de codimensão-1 para um Sistema de Leis de Conservação. Cabe agora estudar o que acontece quando U_L cruza essas estruturas. Como se verá ocorre uma alteração da classificação do conjunto de Rankine-Hugoniot, ou seja, Sectores aparecem, ou desaparecem, em locais bem determinados.

2.5.1 Bifurcações na Inflexão

Tomemos um estado U_{L2} sobre a i -Inflexão e dois estados próximos U_{L1} e U_{L3} um de cada lado a i -Inflexão. Pode-se observar uma de quatro bifurcações genéricas, duas para cada uma das i -Inflexões, \mathcal{I}_1 e \mathcal{I}_2 , referentes a máximos e mínimos do respectivo autovalor. Nas quatro bifurcações dois sectores colapsam com a aproximação de U_L à Inflexão, e depois reaparecem do lado oposto em ordem inversa (mas na mesma ordem relativamente a U_L).

Para obter estas bifurcações analisa-se a sequência de sectores para os U_{Lj} com $j \in \{1, 2, 3\}$, ou seja, U_{L1} , U_{L2} e U_{L3} . Sabemos que na Região Estritamente Hiperbólica $\mathcal{H}(U_{Lj})$ bifurca em U_{Lj} , bifurcação primária. Para cada um dos estados U_{Lj} atendámos então apenas ao i -ramo de $\mathcal{H}(U_{Lj})$ que é tangente a $r_i(U_{Lj})$ em U_{Lj} . Sabemos também que próximo a U_{Lj} temos $s(U_{Lj}, U) = (\lambda_i(U_{Lj}) + \lambda_i(U))/2 + O^2(|U - U_{Lj}|)$ (ver [21]); pelo Teorema 2.1 de Bethe-Wendroff sabemos que $s(U_{Lj}, U) = \lambda_i(U)$ se e só se $\dot{s} = 0$, desde que $l_i(U - U_{Lj}) \neq 0$, logo $U \neq U_{Lj}$.

Na Figura 2.2 estão representados, no eixo horizontal, os i -ramos dos estados U_{L1} , U_{L2} e U_{L3} ; em cada um dos gráficos da figura estão representados $\lambda_i(U)$, abreviado para λ_i , $s(U_L, U)$, abreviado para s , e $\lambda_i(U_{Lj})$, abreviado para λ_i^{Lj} . Dado o carácter local e genérico deste estudo é considerado que o outro autovalor tanto de U_L quanto de U nunca iguale qualquer um dos escalares representados nos gráficos.

Tomemos, a título de exemplo, $i = 1$. Temos:

1. Nos sectores identificados por $S1$ vale: $\lambda_1(U_L) < s < \lambda_1(U) < \lambda_2(U_L), \lambda_2(U)$, logo temos um sector tipo 1-Expansivo;
2. Nos sectores $S2$ vale: $\lambda_1(U) < s < \lambda_1(U_L) < \lambda_2(U_L), \lambda_2(U)$, logo temos um sector tipo 1-Choque;

3. Nos sectores $S3$ vale: $s < \lambda_1(U_L), \lambda_1(U) < \lambda_2(U_L), \lambda_2(U)$, logo temos um sector tipo Transporte à Direita;
4. Nos sectores $S4$ vale: $\lambda_1(U_L) < s < \lambda_1(U) < \lambda_2(U_L), \lambda_2(U)$, logo temos um sector tipo 1-Expansivo.

Neste exemplo temos um mínimo de λ_1 , então este conjunto de bifurcação será chamado \mathcal{I}_1m (ver a seguir os quatro casos).

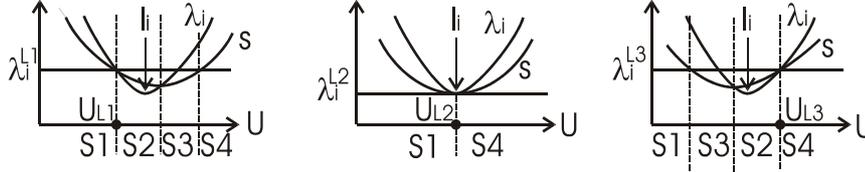


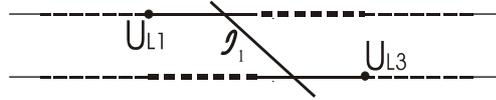
Figura 2.2: Sectores da curva de Rankine-Hugoniot próximo de \mathcal{I} .

Seguem-se as quatro bifurcações com o nome, as seqüências de sectores e ainda diagramas com os i-ramos de U_L com os sectores classificados, isto para U_{L1} e U_{L3} . A Inflexão esta representada por um segmento de recta oblíquo.

1. Inflexão 1:

- (a) Máximo de λ_1 :

Definição 2.30 \mathcal{I}_1M : Conjunto de bifurcação onde a seqüência (1-Choque, U_L , 1-Expansivo, Cruzamento, 1-Choque) passa a (1-Choque, Cruzamento, 1-Expansivo, U_L , 1-Choque):



- (b) Mínimo de λ_1

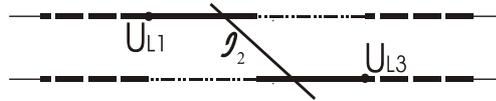
Definição 2.31 \mathcal{I}_1m : Conjunto de bifurcação onde a seqüência (1-Expansivo, U_L , 1-Choque, Transporte à Direita, 1-Expansivo) passa a (1-Expansivo, Transporte à Direita, 1-Choque, U_L , 1-Expansivo):



2. Inflexão 2:

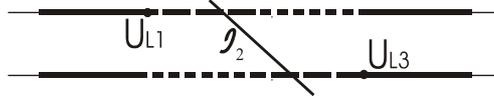
- (a) Máximo de λ_2

Definição 2.32 \mathcal{I}_2M : Conjunto de bifurcação onde a seqüência (2-Choque, U_L , 2-Expansivo, Transporte à Esquerda, 2-Choque) passa a (2-Choque, Transporte à Esquerda, 2-Expansivo, U_L , 2-Choque):



- (b) Mínimo de λ_2

Definição 2.33 \mathcal{I}_2m : Conjunto de bifurcação onde a sequência (2-Expansivo, U_L , 2-Choque, Cruzamento, 2-Expansivo) passa a (2-Expansivo, Cruzamento, 2-Choque, U_L , 2-Expansivo):



2.5.2 Bifurcações na Histerese

Tomemos um estado U_{L2} sobre a i -Histerese e dois estados próximos U_{L1} e U_{L3} um de cada lado a i -Histerese. Pode observar-se uma de doze bifurcações genéricas, seis para cada uma das Histereses \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 , três referentes a máximos e três referentes a mínimos do respectivo autovalor na Inflexão. Em todos os casos um sector aparece, ou desaparece, no meio de um outro sector.

Na Figura 2.3 temos três gráficos, um para cada um dos estados U_{L1} , U_{L2} e U_{L3} ; cada um deles representa uma parametrização de $\mathcal{H}(U_{Lj})$ perto de \mathcal{I}_i onde estão esboçadas as funções $\lambda_i(U)$, abreviada para λ_i e $s(U_{Lj}, U)$, abreviada para s_j . Pelo teorema 2.1 de Bethe-Wendroff sabemos que $s(U_{Lj}, U) = \lambda_i(U)$ se e só se $\dot{s} = 0$, desde que $l_i(U - U_{Lj}) \neq 0$. Mais, nas condições atrás e atentando à proposição 2.1 temos $\ddot{s}(U_{Lj}, U) = 0$ se e só se $U \in \mathcal{I}_i$.

Dado o carácter local e genérico deste estudo é considerado que os autovalores não representados nunca igualam qualquer um dos escalares dos gráficos.

Tomemos, a título de exemplo, $i = 2$, $\lambda_1(U_L), \lambda_1(U) < s < \lambda_2(U_L)$. Neste caso temos:

1. Nos sectores identificados por $S1$ vale: $\lambda_1(U_L), \lambda_1(U) < s < \lambda_2(U) < \lambda_2(U_L)$, logo temos um sector tipo Cruzamento;
2. No sector identificado por $S2$ vale: $\lambda_1(U_L), \lambda_1(U) < \lambda_2(U) < s < \lambda_2(U_L)$, logo temos um sector tipo 2-Choque;

O exemplo corresponde ao Conjunto de bifurcação \mathcal{H}_2m_2 .

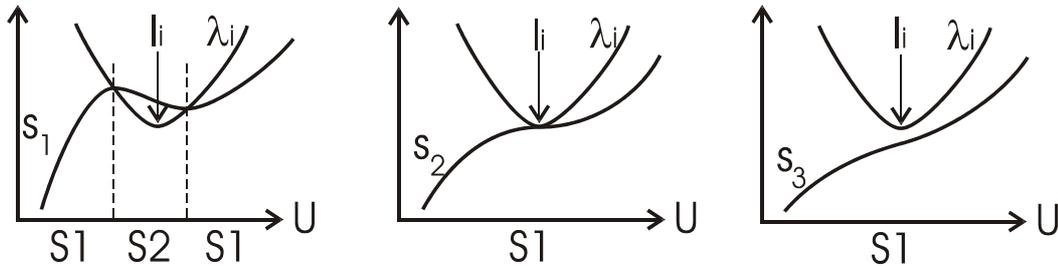


Figura 2.3: Sectores da curva de Rankine-Hugoniot na Bifurcação da Histerese.

Seguem-se as doze bifurcações com o nome, as suas descrições e ainda diagramas de $\mathcal{H}(U_L)$ com os sectores classificados, isto para U_{L1} e U_{L3} . A Histerese está representada por um segmento de recta oblíquo.

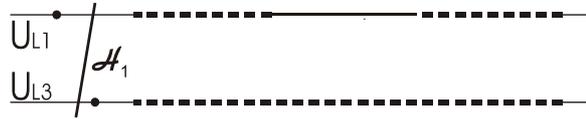
1. Histerese 1:

(a) Máximo de λ_1 :

- i. **Definição 2.34** \mathcal{H}_1M_1 : Conjunto de bifurcação onde aparece um Transporte à Direita no meio de um 1-Choque:



Definição 2.35 \mathcal{H}_1M_2 : Conjunto de bifurcação onde aparece um 1-Expansivo no meio de um Cruzamento:



Definição 2.36 \mathcal{H}_1M_3 : Conjunto de bifurcação onde aparece um Expansivo no meio de um 2-Expansivo:

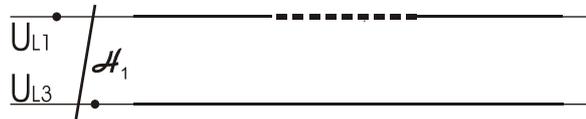


(b) Mínimo de λ_1 :

i. **Definição 2.37** \mathcal{H}_1m_1 : Conjunto de bifurcação onde aparece um 1-Choque no meio de um Transporte à Direita:



Definição 2.38 \mathcal{H}_1m_2 : Conjunto de bifurcação onde aparece um Cruzamento no meio de um 1-Expansivo;



Definição 2.39 \mathcal{H}_1m_3 : Conjunto de bifurcação onde aparece um 2-Expansivo no meio de um Expansivo:



2. Histerese 2:

(a) Máximo de λ_2 :

i. **Definição 2.40** \mathcal{H}_2M_1 : Conjunto de bifurcação onde aparece um 1-Choque no meio de um Compressivo:



Definição 2.41 \mathcal{H}_2M_2 : Conjunto de bifurcação onde aparece um Cruzamento no meio de um 2-Choque:



Definição 2.42 \mathcal{H}_2M_3 : Conjunto de bifurcação onde aparece um 2-Expansivo no meio de um Transporte à Esquerda:



(b) Mínimo de λ_2 :

i. **Definição 2.43** \mathcal{H}_2m_1 : Conjunto de bifurcação onde aparece um Compressivo no meio de um 1-Choque:



Definição 2.44 \mathcal{H}_2m_2 : Conjunto de bifurcação onde aparece um 2-Choque no meio de um Cruzamento:



Definição 2.45 \mathcal{H}_2m_3 : Conjunto de bifurcação onde aparece um Transporte à Esquerda no meio de um 2-Expansivo:



2.5.3 Bifurcações nos Contactos Duplos

Estado à direita em \mathcal{R}_H

Tomemos um estado U_{L2} sobre um Contacto Duplo Hiperbólico, ou um Contacto Duplo Eliptico-hiperbólico, e dois estados próximos U_{L1} e U_{L3} um de cada lado do Contacto. Pode observar-se uma de doze bifurcações genéricas, duas para cada um dos Contactos \mathcal{D}_{11} , \mathcal{D}_{12} , \mathcal{D}_{21} , \mathcal{D}_{22} , \mathcal{D}_{e1} e $\mathcal{D}_{e,2}$. Em todos os casos aparecem, ou desaparecem, dois sectores na fronteira entre dois sectores distintos.

Na Figura 2.4 temos três gráficos, um para cada um dos estados U_{L1} , U_{L2} e U_{L3} ; cada um deles representa uma parametrização de $\mathcal{H}(U_{Lk})$ perto de \mathcal{D}_{ji} onde estão esboçadas as funções $\lambda_j(U)$, abreviada para λ_j , $s(U_{Lj}, U)$, abreviada para s_k e $\text{Re}(\lambda_i(U_{Lk}))$, abreviada para $\text{Re}(\lambda_i^{Lk})$. Em todos os Contactos Duplos, acima referidos, temos $s(U_{L2}, U_R) = \text{Re}(\lambda_i(U_{L2})) = \lambda_j(U_R)$, onde $U_R \in \mathcal{D}_{ji}$, e nos quatro primeiros temos também $\text{Re}(\lambda_i(U_{L2})) = \lambda_i(U_L)$; pelo teorema 2.1 de Bethe-Wendroff sabemos que $s(U_{L2}, U)$ atinge um ponto crítico em U_R e que $\mathcal{H}(U_{L2})$ tem a direcção de $r_j(U_R)$ em U_R .

Dado o carácter local e genérico deste estudo é considerado que os autovalores não representados nunca igualam qualquer um dos escalares dos gráficos.

Tomemos, a título de exemplo, $i = 1$, $j = 2$ e $\lambda_1(U) < s < \lambda_2(U_L)$. Neste caso temos:

1. Nos sectores identificados por $S1$:

$$\lambda_1(U) < \lambda_1(U_L) < s(U_L, U) < \lambda_2(U) < \lambda_2(U_L)$$

logo temos um sector tipo Cruzamento;

2. Nos sectores identificados por $S2$:

$$\lambda_1(U) < \lambda_2(U) < \lambda_1(U_L) < s(U_L, U) < \lambda_2(U_L)$$

logo temos um sector tipo 2-Choque;

3. Nos sectores identificados por $S3$:

$$\lambda_1(U) < s(U_L, U) < \lambda_1(U_L), \lambda_2(U) < \lambda_2(U_L)$$

logo temos um sector tipo 1-Choque;

4. Nos sectores identificados por $S4$:

$$\lambda_1(U) < \lambda_2(U) < s(U_L, U) < \lambda_1(U_L) < \lambda_2(U_L)$$

logo temos um sector tipo Compressivo;

O exemplo corresponde ao Conjunto de bifurcação $\mathcal{D}_{12}W$.

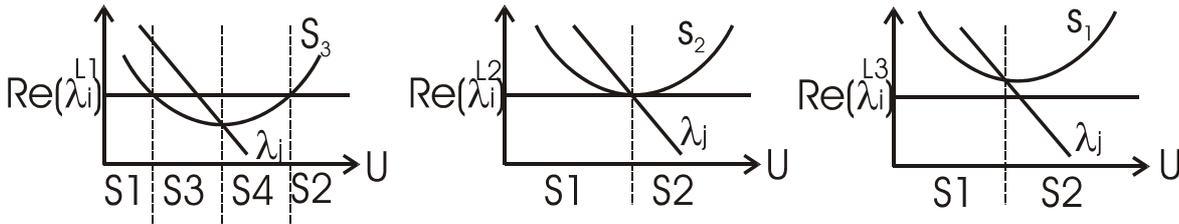


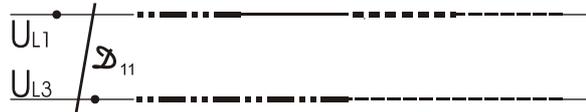
Figura 2.4: Bifurcação em Contactos Duplos Hiperbólicos e Eliptico-hiperbólicos.

Seguem-se as doze bifurcações com o nome, as suas descrições e ainda diagramas de $\mathcal{H}(U_L)$ com os sectores classificados, isto para U_{L1} e U_{L3} . O Contacto Duplo está representada por um segmento de recta oblíquo.

1. Contacto Duplo Hiperbólico:

(a) \mathcal{D}_{11}

i. **Definição 2.46** $\mathcal{D}_{11}M$: Conjunto de bifurcação onde da sequência (Transporte à Direita, 1-Expansivo, Cruzamento, 1-Choque) passa a (Transporte à Direita, 1-Choque):



Definição 2.47 $\mathcal{D}_{11}W$: Conjunto de bifurcação onde da sequência (Cruzamento, 1-Choque, Transporte à Direita, 1-Expansivo) passa a (Cruzamento, 1-Expansivo):



(b) \mathcal{D}_{12}

- i. **Definição 2.48** $\mathcal{D}_{12}M$: Conjunto de bifurcação onde da sequência (1-Choque, Cruzamento, 2-Choque, Compressivo) passa a (1-Choque, Compressivo):

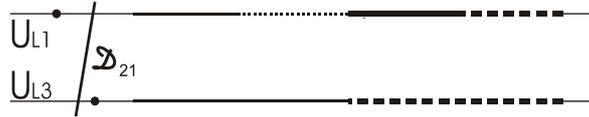


- Definição 2.49** $\mathcal{D}_{12}W$: Conjunto de bifurcação onde da sequência (2-Choque, Compressivo, 1-Choque, Cruzamento) passa a (2-Choque, Cruzamento):



(c) \mathcal{D}_{21}

- i. **Definição 2.50** $\mathcal{D}_{21}M$: Conjunto de bifurcação onde da sequência (1-Expansivo, Expansivo, 2-Expansivo, Cruzamento) passa a (1-Expansivo, Cruzamento):



- Definição 2.51** $\mathcal{D}_{21}W$: Conjunto de bifurcação onde da sequência (2-Expansivo, Cruzamento, 1-Expansivo, Expansivo) passa a (2-Expansivo, Expansivo):



(d) \mathcal{D}_{22}

- i. **Definição 2.52** $\mathcal{D}_{22}M$: Conjunto de bifurcação onde da sequência (Cruzamento, 2-Expansivo, Transporte à Esquerda, 2-Choque) passa a (Cruzamento, 2-Choque):



- Definição 2.53** $\mathcal{D}_{22}W$: Conjunto de bifurcação onde da sequência (Transporte à Esquerda, 2-Choque, Cruzamento, 2-Expansivo) passa a (Transporte à Esquerda, 2-Expansivo):



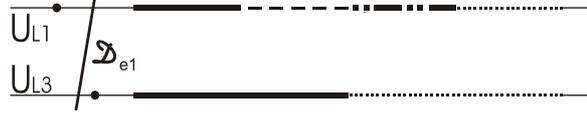
2. Contacto Duplo Eliptico-hiperbólico:

(a) \mathcal{D}_{e1}

- i. **Definição 2.54** $\mathcal{D}_{e1}M$: Conjunto de bifurcação onde da sequência (Transporte à Direita, Expansivo, 2-Expansivo, 1-Choque) passa a (Transporte à Direita, 1-Choque):



Definição 2.55 $\mathcal{D}_{e1}W$: Conjunto de bifurcação onde da sequência (2-Expansivo, 1-Choque, Transporte à Direita, Expansivo) passa a (2-Expansivo, Expansivo):



(b) \mathcal{D}_{e2}

i. **Definição 2.56** $\mathcal{D}_{e2}M$: Conjunto de bifurcação onde da sequência (1-Choque, 2-Expansivo, Transporte à Esquerda, Compressivo) passa a (1-Choque, Compressivo):



Definição 2.57 $\mathcal{D}_{e2}W$: Conjunto de bifurcação onde da sequência (Transporte à Esquerda, Compressivo, 1-Choque, 2-Expansivo) passa a (Transporte à Esquerda, 2-Expansivo):



Estado à direita em \mathcal{R}_E

Tomemos um estado U_{L2} sobre um Contacto Duplo Hiperbolico-elíptico e dois estados próximos U_{L1} e U_{L3} um de cada lado do Contacto. Pode observar-se uma de quatro bifurcações genéricas, duas para cada um dos Contactos \mathcal{D}_{1e} e \mathcal{D}_{2e} . Nos quatro casos desaparece um estado na fronteira entre dois sectores distintos e aparece um quarto na mesma fronteira.

Na Figura 2.5 temos três gráficos, um para cada um dos estados U_{L1} , U_{L2} e U_{L3} ; cada um deles representa uma parametrização de $\mathcal{H}(U_{Lk})$ perto de \mathcal{D}_{ei} onde estão esboçadas as funções $\lambda_i(U_{Lk})$, abreviada para λ_i^{Lk} , $s(U_{Lk}, U)$, abreviada para s_k e $\text{Re}(\lambda_e(U))$, abreviada para $\text{Re}(\lambda_e)$. Pelo teorema 2.2 sabemos que $s(U_{L2}, U)$ tem como ponto regular $U_R \in \mathcal{D}_{ei}$.

Dado o carácter local e genérico deste estudo é considerado que os autovalores não representados nunca igualam qualquer um dos escalares dos gráficos.

Tomemos, a título de exemplo, $i = 1$ e $s < \lambda_2(U_L)$. Neste caso temos:

1. Nos sectores identificados por $S1$: $s(U_L, U) < \lambda_1(U_L) < \text{Re}(\lambda_e(U_R)) < \lambda_2(U)$, logo temos um sector tipo Transporte à Direita;
2. Nos sectores identificados por $S2$: $\text{Re}(\lambda_e(U_R)), \lambda_1(U_L) < s(U_L, U) < \lambda_2(U)$, logo temos um sector tipo 2-Choque;
3. Nos sectores identificados por $S3$: $\text{Re}(\lambda_e(U_R)) < s(U_L, U) < \lambda_1(U_L) < \lambda_2(U)$, logo temos um sector tipo Compressivo;
4. Nos sectores identificados por $S4$: $\lambda_1(U_L) < s(U_L, U) < \text{Re}(\lambda_e(U_R)) < \lambda_2(U)$, logo temos um sector tipo 1-Expansivo;

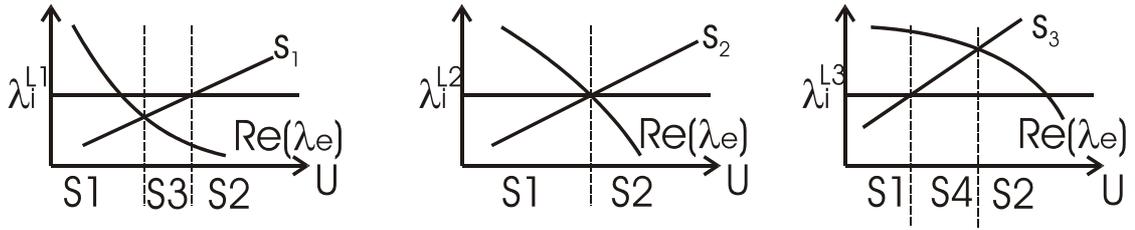


Figura 2.5: Bifurcação em Contactos Duplos Hiperbolico-elípticos.

O exemplo corresponde ao Conjunto de bifurcação $\mathcal{D}_{1e}C$.

Seguem-se as quatro bifurcações com o nome, as suas descrições e ainda diagramas de $\mathcal{H}(U_L)$ com os sectores classificados, isto para U_{L1} e U_{L3} . O Contacto Duplo Hiperbolico-elíptico está representada por um segmento de recta oblíquo.

1. (a) $\mathcal{D}_{1,e}$

i. **Definição 2.58** $\mathcal{D}_{1e}C$: Conjunto de bifurcação onde da sequência (2-Choque, 1-Expansivo, Transporte à Direita) passa a (2-Choque, Compressivo, Transporte à Direita):



Definição 2.59 $\mathcal{D}_{1e}D$: Conjunto de bifurcação onde da sequência (1-Expansivo, 2-Choque, Compressivo) passa a (1-Expansivo, Transporte à Direita, Compressivo):



(b) $\mathcal{D}_{2,e}$

i. **Definição 2.60** $\mathcal{D}_{2e}C$: Conjunto de bifurcação onde da sequência (Transporte à Esquerda, Expansivo, 1-Expansivo) passa a (Transporte à Esquerda, 2-Choque, 1-Expansivo):



Definição 2.61 $\mathcal{D}_{2e}D$: Conjunto de bifurcação onde da sequência (Expansivo, Transporte à Esquerda, 2-Choque) passa a (Expansivo, 1-Expansivo, 2-Choque):



2.5.4 Bifurcações na Extensão Esquerda da Coincidência

Tomemos um estado U_{L2} sobre a Extensão Esquerda da Coincidência e dois estados próximos U_{L1} e U_{L3} um de cada lado da Extensão. Pode observar-se uma de seis bifurcações genéricas, três para máximos

de $\text{Re}(\lambda_1(U_R))$ e outras três para mínimos de $\text{Re}(\lambda_2(U_R))$. Em todos os casos um sector aparece, ou desaparece, na fronteira entre dois sectores distintos.

Na Figura 2.6 temos três gráficos, um para cada um dos estados U_{L1} , U_{L2} e U_{L3} ; cada um deles representa uma parametrização de $\mathcal{H}(U_{Lk})$ perto da Coincidência onde estão esboçadas as funções $\lambda_i(U)$, abreviadas para λ_i , $s(U_{Lk}, U)$, abreviada para s_k e $\text{Re}(\lambda_e(U))$, abreviada para $\text{Re}(\lambda_e)$. Pelo teorema 2.2 sabemos que $s(U_{L2}, U)$ tem como ponto regular $U_R \in \mathcal{D}_{ei}$. Mais, num caso genérico (fora do ponto DRS e fluxo não degenerado) as derivadas direccionais (D_V), na direcção do autovector V sobre a Coincidência, são escritas como $D_V(\text{Re}(\lambda)) = K$ e $D_V(\lambda_{\pm}) = K \pm |L|$ para alguns parâmetros K e L . No Apêndice B este facto é provado para Fluxos Quadráticos não Homogêneos, que são boas aproximações de fluxos genéricos (ver as equações (B.21)). No caso da figura 2.6 temos $K < 0$ e $|L| > |K|$, contudo é de referir que se obtêm bifurcações similares para outras relações entre K e L .

Dado o caracter local e genérico deste estudo é considerado que os autovalores não representados nunca igualam qualquer um dos escalares dos gráficos.

Tomemos, a título de exemplo, $\lambda_1(U_L) < s < \lambda_2(U_L)$. Neste caso temos:

1. Nos sectores identificados por $S1$: $\lambda_1(U_L) < \lambda_1(U_R) < s(U_L, U) < \lambda_2(U_R) < \lambda_2(U_L)$, logo temos um sector tipo Cruzamento;
2. Nos sectores identificados por $S2$: $\lambda_1(U_L) < \text{Re}(\lambda_1(U_R)) = \text{Re}(\lambda_2(U_R)) < s(U_L, U) < \lambda_2(U_L)$, logo temos um sector tipo 2-Choque;
3. Nos sectores identificados por $S3$: $\lambda_1(U_L) < s(U_L, U) < \text{Re}(\lambda_1(U_R)), \text{Re}(\lambda_2(U_R)) < \lambda_2(U_L)$, logo temos um sector tipo 1-Expansivo;

O exemplo corresponde a um máximo de $\text{Re}(\lambda_1(U_R))$ e ao conjunto de bifurcação $\mathcal{E}\lambda_b$:

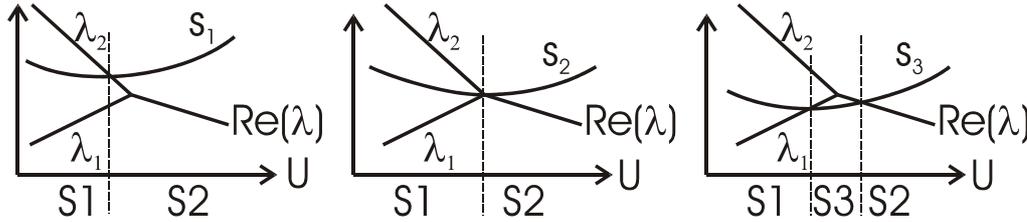
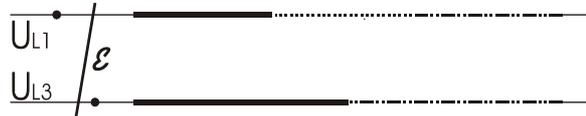


Figura 2.6: Bifurcação na Extensão da Coincidência.

Seguem-se as seis bifurcações com os seus nomes, as suas descrições e ainda diagramas de $\mathcal{H}(U_L)$ com os sectores classificados, isto para U_{L1} e U_{L3} . A Extensão da Coincidência está representada por um segmento de recta oblíquo.

1. Máximo de $\text{Re}(\lambda_1)$:

- (a) **Definição 2.62** $\mathcal{E}\lambda_a$: Conjunto de bifurcação onde aparece um Expansivo na Fronteira entre um 1-Expansivo e um Transporte à Esquerda:



- Definição 2.63** $\mathcal{E}\lambda_b$: Conjunto de bifurcação onde aparece um 1-Expansivo na Fronteira entre um Cruzamento e um 2-Choque:



Definição 2.64 $\mathcal{E}\lambda_c$: Conjunto de bifurcação onde aparece um Transporte à Direita na Fronteira entre um 1-Choque e um Compressivo:



2. Mínimo de $\text{Re}(\lambda_2)$:

(a) **Definição 2.65** $\mathcal{E}y_a$: Conjunto de bifurcação onde aparece um Transporte à Esquerda na Fronteira entre um 2-Expansivo e um Expansivo:



Definição 2.66 $\mathcal{E}y_b$: Conjunto de bifurcação onde aparece um 2-Choque na Fronteira entre um Cruzamento e um 1-Expansivo:



Definição 2.67 $\mathcal{E}y_c$: Conjunto de bifurcação onde aparece um Compressivo na Fronteira entre um 1-Choque e um Transporte à Direita:



2.6 Construção das Soluções

Em 1996 S. Schechter, D. Marchesin e B. Plohr estudaram a estabilidade estrutural de soluções do Problema de Riemann. O apêndice A contém uma versão simplificada do artigo [20] que irá nortear a nossa busca por soluções. Contudo será feita uma ponte entre o estudo teórico de 1996 e a construção prática de soluções partindo do conhecimento das curvas de Rankine-Hugoniot com os sectores classificados. Este conhecimento pode ser obtido por via computacional, por exemplo, usando o programa [14], ou analiticamente.

A supra-referida ponte é feita nesta secção, obtendo-se um método novo (apenas na forma) de construir soluções de Riemann. Na primeira subsecção são dados os diagramas para a construção dos quatro grupos de onda. Os três primeiros, Grupo de Ondas-1, Grupo de Ondas-2 e Grupo Transicional, aparecem em soluções estruturalmente estáveis (ver A); enquanto que o último, o Grupo Compressivo, desempenha um papel distinto, determina uma fronteira na construção de soluções, ou seja, determina quando se deve parar com uma construção devido a incompatibilidade geométrica. Papel idêntico ao do Grupo Compressivo desempenham os Choques Triplos e o caso especial tratados na subsecção 2.6.2.

2.6.1 Diagramas para a Construção dos Grupos de Onda

Nesta subsecção será dado o método prático de construir os diversos Grupos de Onda Compostos partindo de conjuntos de Rankine-Hugoniot previamente classificados. Na lista abaixo serão dadas as formas de construir cada pedaço de todos os Grupos de Onda. A parte visual do procedimento é esquematizado nos diagramas.

1. Grupo de Ondas-1:

- (a) Composta Rarefacção/Choque: $R_1 {}^* \mathcal{S}$, após uma 1-Rarefacção entre U_L e U_M pode haver um

choque entre U_M e U_R com $U_R \in {}^* \mathcal{S}(U_M)$  ;

- (b) Composta Choque/Rarefacção: $\mathcal{S}_1 {}^* R_1$, após um 1-Choque Sónico à Direita entre U_L e U_M , ou

seja $U_M \in \mathcal{S}_1^*(U_L)$, pode haver uma 1-Rarefacção de U_M até U_R  ;

- (c) $R_1 {}^* \mathcal{S}_1 {}^* R_1$: Após uma 1-Rarefacção entre U_L e U_{M1} pode haver um choque duplamente sónico entre U_{M1} e U_{M2} com:

- i. $U_{M1} \in \mathcal{D}_{11}W$ e $U_{M2} \in \mathcal{D}_{11}M$ ou
- ii. $U_{M1} \in \mathcal{D}_{11}M$ e $U_{M2} \in \mathcal{D}_{11}W$

e por fim pode haver uma 1-Rarefacção conectando U_{M2} e U_R ;

2. Grupo de Ondas-2:

- (a) Composta Rarefacção/Choque: $R_2 {}^* \mathcal{S}$, após uma 2-Rarefacção entre U_L e U_M pode haver um

choque entre U_M e U_R com $U_R \in {}^* \mathcal{S}(U_M)$  ;

- (b) Composta Choque/Rarefacção: $\mathcal{S}_2 {}^* R_2$, após um 2-Choque Sónico à Direita entre U_L e U_M , ou

seja $U_M \in \mathcal{S}_2^*(U_L)$, pode haver uma 2-Rarefacção de U_M até U_R  ;

- (c) $R_2 {}^* \mathcal{S}_2 {}^* R_2$: Após uma 2-Rarefacção entre U_L e U_{M1} pode haver um choque duplamente sónico entre U_{M1} e U_{M2} com:

- i. $U_{M1} \in \mathcal{D}_{22}W$ e $U_{M2} \in \mathcal{D}_{22}M$ ou
- ii. $U_{M1} \in \mathcal{D}_{22}M$ e $U_{M2} \in \mathcal{D}_{22}W$

e por fim pode haver uma 2-Rarefacção conectando U_{M2} e U_R .

3. Grupo Transicional:

- (a) Composta Rarefacção/Choque: $R_2 {}^* \mathcal{X}$, após uma 2-Rarefacção entre U_L e U_M pode haver

um choque entre U_M e U_R com $U_R \in {}^* \mathcal{X}(U_M)$  ;

- (b) Composta Choque/Rarefacção: $\mathcal{X}_1 {}^* R_1$, após um Choque de Cruzamento Sónico à Direita entre U_L e U_M , ou seja $U_M \in \mathcal{X}_1^*(U_L)$, pode haver uma 1-Rarefacção de U_M até U_R

 ;

- (c) $R_2 {}^* \mathcal{X}_1 {}^* R_1$: Após uma 2-Rarefacção entre U_L e U_{M1} pode haver o choque duplamente sónico entre U_{M1} e U_{M2} com:

- i. $U_{M1} \in \mathcal{D}_{21}W$ e $U_{M2} \in \mathcal{D}_{12}M$ ou
- ii. $U_{M1} \in \mathcal{D}_{21}M$ e $U_{M2} \in \mathcal{D}_{12}W$

e por fim pode haver uma 1-Rarefacção conectando U_{M2} e U_R .

4. Grupo Compressivo:

- (a) $R_1 {}^*C$: Após uma 1-Rarefação entre U_L e U_M pode continuar-se de U_M até U_R com um 2-Choque; contudo a construção do 2-Choque deve cessar quando $U_R \in {}^*C(U_M)$; ou seja, o uso do sector Compressivo de U_M , após uma 1-Rarefação, viola a Compatibilidade Geométrica;

no esquema U_R só pode situar-se na região cinza ;

- (b) $C_2 {}^*R_2$: Após um 1-Choque entre U_L e U_M pode continuar-se de U_M até U_R com uma 2-Rarefação; todavia o uso da 2-Rarefação deve cessar quando $U_M \in C_2^*(U_L)$; ou seja, a construção de uma 2-Rarefação partindo do sector Compressivo de U_L viola a Compatibilidade Geométrica; no esquema U_R só pode situar-se na região cinza ;

- (c) $R_1 {}^*C_2 {}^*R_2$: Após uma 1-Rarefação entre U_L e U_{M1} pode haver o choque duplamente sónico entre U_{M1} e U_{M2} com:

- i. $U_{M1} \in \mathcal{D}_{12}W$ e $U_{M2} \in \mathcal{D}_{21}M$ ou
- ii. $U_{M1} \in \mathcal{D}_{12}M$ e $U_{M2} \in \mathcal{D}_{21}W$

e por fim pode haver uma 2-Rarefação conectando U_{M2} e U_R .

Nota 2.4 As ondas compostas do tipo Rarefação/Choque aparecem como continuação natural do Grupo de Ondas após uma Rarefação intersectar a sua Inflexão. Uma vantagem da utilização destes diagramas reside no facto de não ser necessário conhecer o local desta intersecção para se construir a onda Composta. Efectivamente existem ondas compostas sem que a Rarefação intersecte a Inflexão.

2.6.2 Choques Triplos

Na resolução do problema de Riemann sabemos que é necessário ter em atenção a velocidade crescente das ondas, ou seja, a Compatibilidade Geométrica. Após uma 1-Rarefação sempre poderá haver uma 2-Rarefação, dado que $\lambda_1 \leq \lambda_2$. Contudo nem sempre é possível que exista um 2-Choque, de U_M até U_R , após um 1-Choque de U_L até U_M ; isto porque a velocidade $s(U_M, U_R)$, a grosso modo, diminui com a distância entre U_M e U_R , podendo assim ficar inferior à velocidade $s(U_L, U_M)$. Contudo o U_R tal que $s(U_L, U_M) = s(U_M, U_R)$ pode ser bem caracterizado. Também é possível generalizar estas ideias para outros tipos de choque. Começemos pela conhecida Regra de Choque Triplo (ver, por exemplo [22]):

Proposição 2.2 (Regra do Choque Triplo) Suponhamos que $U_M \in \mathcal{H}(U_L)$, $U_R \in \mathcal{H}(U_M)$ e $U_L \in \mathcal{H}(U_R)$. Então ou U_L , U_M e U_R representam três estados sobre uma mesma recta (estados U_L , U_M e U_R colineares) ou então $s(U_L, U_M) = s(U_M, U_R) = s(U_R, U_L)$.

Proposição 2.3 (Existência de Choque Triplo) Suponhamos que temos $U_M \in \mathcal{H}(U_L)$, $U_R \in \mathcal{H}(U_M)$ e $s(U_L, U_M) = s(U_M, U_R) = s$. Então $U_R \in \mathcal{H}(U_L)$ e $s(U_R, U_L) = s$.

Apesar da sua simplicidade a proposição da Existência de Choque Triplo é extremamente útil na procura de soluções; isto porque, por vezes, é extremamente simples saber que dois choques têm a mesma velocidade, pela análise dos sectores.

Em seguida enunciamos um novo Lema para Choques Triplos.

Lema 2.1 Tomemos $U_M \in \mathcal{H}(U_L)$ e $U_R \in \mathcal{R}_H \cap \mathcal{H}(U_M) \cap \mathcal{H}(U_L)$; mais, suponhamos U_L , U_M e U_R não colineares nem elementos de \mathcal{B} . Pela Regra do Choque Triplo temos $s(U_L; U_M) = s(U_M; U_R) = s(U_R; U_L) = s_0$. Podemos então afirmar

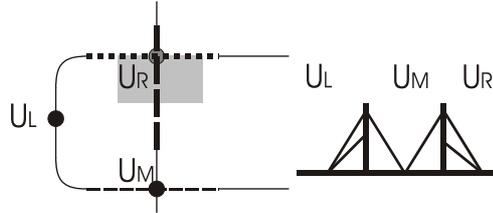
1. Se $U_R \notin \mathcal{S}^*(U_M)$ então, pelo Teorema 2.1 de Bethe-Wendroff, existe uma vizinhança, A , de U_R tal que $A \cap \mathcal{H}(U_M)$ pode ser parametrizado por $\xi(U) = s(U_M; U) - s_0$; isto, por Compatibilidade Geométrica, garante-nos que a sequência dos choque de U_L até U_M seguido de U_M até U é **inválida** para $U : \xi(U) < 0$.
2. Se $U_R \in \mathcal{S}_i^*(U_M)$ então $\lambda_i(U_R) = s_0$ e também $U_R \in \mathcal{S}_i^*(U_L)$. Pelo Teorema 2.1 de Bethe-Wendroff $\mathcal{H}(U_L)$ e $\mathcal{H}(U_M)$ são tangentes a $r_i(U_M)$ em U_R , logo **tangentes** entre si.

A alínea 1 deste último lema dá-nos informação sobre quando devemos parar a construção de um Grupo de Onda partindo de um U_M que por sua vez está num Grupo de Onda de um U_L ; a alínea 2 dá-nos informação, em casos particulares, sobre tangências destes Grupos de Onda.

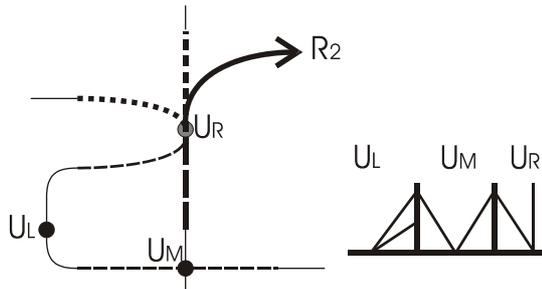
Cinco Choques Triplos Particulares

Nas soluções de Riemann (dadas no capítulo 4) do modelo que iremos estudar no capítulo 3 são utilizadas os seguintes cinco Choques Triplos:

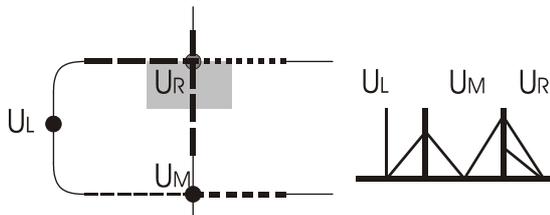
1. $\tau_a : U_M \in \mathcal{H}_{1S}(U_L), U_R \in \mathcal{H}_C(U_L)$ e $U_R \in \mathcal{H}_{2S}(U_M)$: a construção do Grupo de Ondas-2, que parte de U_M , termina em U_R ;



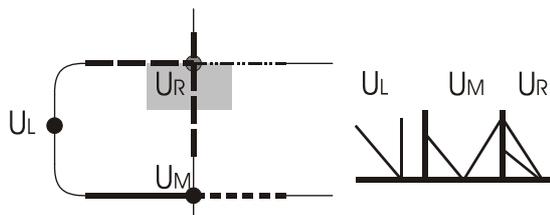
2. $\tau_b : U_M \in \mathcal{H}_{1S}(U_L), U_R \in \mathcal{C}_2^*(U_L)$ e $U_R \in \mathcal{S}_2^*(U_M)$: a construção do Grupo de Ondas-2, que parte de U_M , é tangente a $\mathcal{H}(U_L)$ exactamente em U_R ; é também nesse ponto de tangência onde o Grupo de Ondas-2 passa de 2-Choque para 2-Rarefação (ver secção 2.6.1);



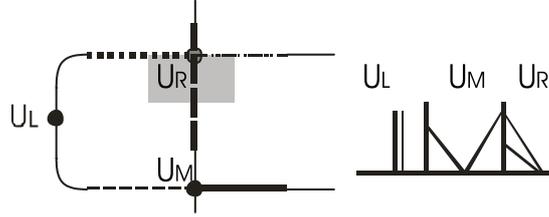
3. $\tau_c : U_M \in {}_1^*\mathcal{S}(U_L), U_R \in {}_1^*\mathcal{C}(U_L)$ e $U_R \in \mathcal{H}_{2S}(U_M)$: a construção do Grupo de Ondas-2, que parte de U_M , termina em U_R ;



4. $\tau_d : U_M \in {}_2^*\mathcal{T}(U_L), U_R \in {}_2^*\mathcal{S}(U_L)$ e $U_R \in \mathcal{H}_{2S}(U_M)$: a construção do Grupo de Ondas-2, que parte de U_M , termina em U_R ;



5. $\tau_e : U_M \in {}^e\mathcal{S}(U_L), U_R \in {}^e\mathcal{C}(U_L)$ e $U_R \in \mathcal{H}_{2S}(U_M)$: a construção do Grupo de Ondas-2, que parte de U_M , termina em U_R ;



A verificação das condições do Lema 2.1 por vezes é imediata se usada a Proposição da Existência de Choque Triplo. Mais, para dois Choques Sónicos com um estado comum a ambos é muito simples determinar se têm a mesma velocidade; basta tomar em atenção que autovalor é igual à velocidade do choque. Uma forma mnemónica de identificar essa igualdade consiste em observar se os dois tipos de Choque Sónicos tem o mesmo número do lado correspondente ao estado em comum.

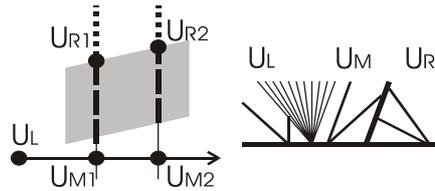
Exemplos (Y e Z representam qualquer tipo de Choque Sónico):

1. Se $U_M \in Y_p^*(U_L)$ e $U_R \in {}^qZ(U_M)$ então $s(U_M, U_L) = \lambda_p(U_M)$ e $s(U_R, U_M) = \lambda_q(U_M)$, logo basta ter $p = q$ para estes dois choques terem a mesma velocidade;
2. Se $U_M \in {}^pY(U_L)$ e $U_R \in {}^qZ(U_L)$ então $s(U_M, U_L) = \lambda_p(U_L)$ e $s(U_R, U_L) = \lambda_q(U_L)$, logo basta ter $p = q$ para estes dois choques terem a mesma velocidade.

Caso Especial

Nesta secção dedicada aos Choques Triplos cabe expor um caso especial, que não sendo um Choque Triplo, tem um papel similar na construção de soluções. Pode colocar-se então a seguinte questão, será possível efectuar um 2-Choque entre U_M e U_R após uma 1-Rarefacção entre U_L e U_M ? A resposta é a mesma que a dada para os choque triplos.

Choque tipo ρ : $U_M \in R_1(U_L), U_R \in {}^1\mathcal{C}(U_M)$: a construção do Grupo de Ondas-2, que parte de U_M , termina em U_R ;



2.7 Equilíbrios do Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias Associado

Como foi visto na subsecção 2.2.2 a cada choque é associado um sistema de duas equações diferenciais ordinárias, referido como Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias Associado ao Choque. Nesta secção será feito um estudo sobre os seus pontos de equilíbrio.

Esta subsecção estudamos do número máximo de pontos de equilíbrio desses sistemas, para tal os Choques são agrupados em três Classes Esquerdas (A, S e R - que dependem apenas de U_L e s) e em três Classes Direitas (também A, S e R - que dependem apenas de U_R e s). Esta nomenclatura advém da natureza dos seus pontos de equilíbrio nos Sistemas de Equações Diferenciais Associados; ou seja:

1. Classe Esquerda A implica que U_L seja um Atractor;
2. Classe Esquerda S implica que U_L seja uma Sela;
3. Classe Esquerda R implica que U_L seja um Repulsor;
4. Classe Direita A implica que U_R seja um Atractor;
5. Classe Direita R implica que U_R seja uma Sela;
6. Classe Direita S implica que U_R seja um Repulsor.

Definimos então as Classes assim:

Definição 2.68 *Classe Esquerda:*

Os Choques ou sectores que satisfazem $\operatorname{Re}(\lambda_1(U_L)) \leq \operatorname{Re}(\lambda_2(U_L)) < s$ são de Classe Esquerda A .

Os Choques ou sectores que satisfazem $\lambda_1(U_L) < s < \lambda_2(U_L)$ são de Classe Esquerda S .

Os Choques que satisfazem $s < \operatorname{Re}(\lambda_1(U_L)) \leq \operatorname{Re}(\lambda_2(U_L))$ são de Classe Esquerda R .

Definição 2.69 *Classe Direita:*

Os Choques ou sectores que satisfazem $\operatorname{Re}(\lambda_1(U_R)) \leq \operatorname{Re}(\lambda_2(U_R)) < s$ são de Classe Direita A .

Os Choques ou sectores que satisfazem $\lambda_1(U_R) < s < \lambda_2(U_R)$ são de Classe Direita S .

Os Choques que satisfazem $s < \operatorname{Re}(\lambda_1(U_R)) \leq \operatorname{Re}(\lambda_2(U_R))$ são de Classe Direita R .

Nestas definições a utilização da parte real dos autovalores é obviamente desnecessária na Região Estritamente Hiperbólica. Mais, se U_L está na Região Elíptica então não existem sectores de Classe Esquerda S , se é U_R que está Região Elíptica então não existem sectores de Classe Direita S .

É de notar que definidas as Classes de um Choque, ou sector, este fica classificado; por exemplo, o sector dos 2-Choques tem Classe Esquerda S e Classe Direita A . Dizemos que os 2-Choques são de Classe SA .

De forma exaustiva dizemos:

- os Transportes à Esquerda são de Classe AA ;
- os Choques 2-Expansivos são de Classe AS ;
- os Choques Expansivos são de Classe AR ;
- os 2-Choques são de Classe SA ;
- os Choques de Cruzamento são de Classe SS ;
- os Choques 1-Expansivos são de Classe SR ;
- os Choque Compressivos são de Classe RA ;
- os 1-Choques são de Classe RS ;
- os Transportes à Direita são de Classe RR .

Este estudo é genérico, logo admitimos que as condições para a aplicação do Teorema de Bethe-Wendroff (teorema 2.1) são satisfeitas. Nestas condições, e directamente de Bethe-Wendroff e do Teorema 2.2, sabemos que a velocidade (vista como função sobre a curva de Rankine-Hugoniot) atinge pontos críticos apenas nas transições entre sectores com Classes Direitas diferentes que ocorram na Região Estritamente Hiperbólica. Ou seja, os pontos da Região Elíptica onde ocorra mudança de Classe Direita serão pontos regulares da função s . Este facto leva à seguinte definição:

Definição 2.70 *Tomemos uma curva de Rankine-Hugoniot, $\mathcal{H}(U_L)$. Nesta curva cada Classe Esquerda X tem um Índice, $\omega_{\mathcal{H}(U_L)}(X)$, ou simplesmente $\omega(X)$. Este Índice é dado pela diferença entre o número de sectores distintos de $\mathcal{H}(U_L)$ pertencentes à Classe Esquerda X e o número de transições entre sectores de Classe Esquerda X que ocorrem dentro da Região Elíptica.*

Ou seja, $\omega(X) = N(X) - T(X)$, onde $N(X)$ é o número de sectores de Classe Esquerda X , em $\mathcal{H}(U_L)$, e $T(X)$ é o número de transições entre sectores de Classe Esquerda X que ocorrem na Região Elíptica.

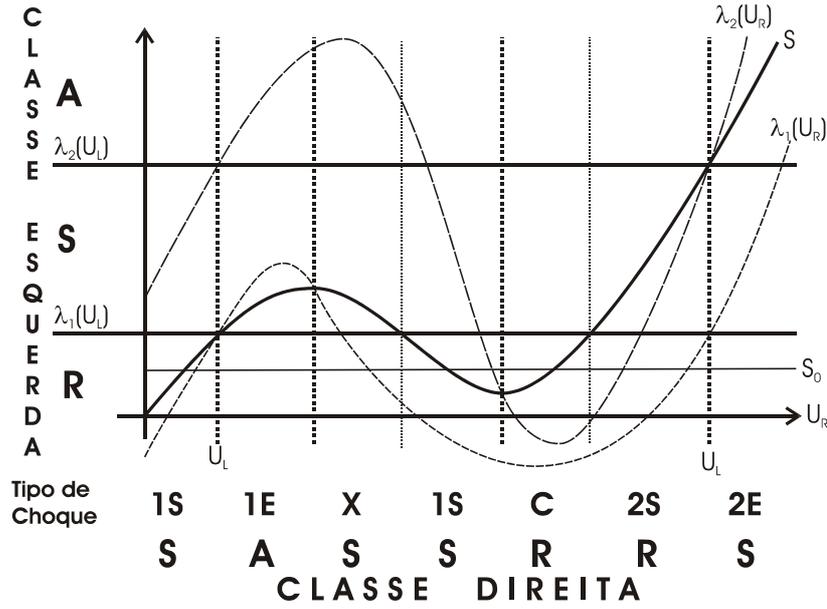


Figura 2.7: Exemplo de Classes Esquerda e Direita sob o Conjunto de Rankine-Hugoniot.

Esta definição de Índice está relacionada com o número de vezes que a Velocidade de Choque é crítica entre sectores da mesma Classe Esquerda. Claramente por cada ponto crítico (não degenerado) de s é possível encontrar dois estados cuja Velocidade de Choque é a mesma, ver a Figura 2.7. Na Figura o Índice da Classe Esquerda R é três, $\omega(R) = 3$, pois existem três sectores de Classe Esquerda R , dois 1-Choque e um Compressivo; ainda, a transição de Classes Direitas dentro desta Classe Esquerda faz-se de S para R , logo com um ponto crítico de s . Se forem considerados os choques de velocidade s_0 as Equações Diferenciais Associadas tem quatro equilíbrios, em U_L , um em cada sector de 1-Choque e um no sector Compressivo.

É de notar que uma transição entre sectores de uma mesma Classe Esquerda ocorre na Região Elíptica se e só se essa transição se faz entre um sector de Classe Direita A e um de Classe Direita R . Por exemplo, a transição de um sector de Classe SA (2-Choque) para um sector de Classe SR (1-Expansivo) necessariamente ocorre na Região Elíptica e, portanto, a velocidade do Choque não é crítica na transição. Dada uma curva de Rankine-Hugoniot classificada é fácil calcular o Índice de cada Classe Esquerda.

Definição 2.71 Dado U_L e s o Sistema de Equações Diferenciais Associado é único. Define-se então $\Sigma(U_L, s)$ ao número de pontos de equilíbrio desse sistema.

Lema 2.2 Dado U_L e s temos definidos a Classe Esquerda, $C(U_L, s)$, e o seu Índice, $\omega(C(U_L, s))$. Mais, temos definido o Sistema de Equações Diferenciais Associado, logo também $\Sigma(U_L, s)$. É válido então $\Sigma(U_L, s) \leq \omega(C(U_L, s)) + 1$.

Este Lema dá-nos um majorante para o número de pontos de equilíbrio que podem ser encontrados. A sua prova é imediata pela contagem dos estados U_R que satisfazem as condições de Rankine-Hugoniot para o dado U_L e s .

Capítulo 3

O Modelo Quadrático Específico

3.1 O Modelo

Usamos como modelo o Sistemas de Duas Leis de Conservação com fluxo

$$F \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3u^2 + v^2 \\ 2uv \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

$$DF \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3u & v+2 \\ v & u \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

do Tipo IV, segundo a classificação de Schaeffer e Shearer. Explicitamente temos $a = 3$, $b = 0$.

Como não temos este fluxo na forma simplificada a região elíptica não está centrada na origem. A origem é o ponto DRS (Dumortier, Roussarie e Sotomayor - ver [6]) e o ponto $(0, -4)$ é a extensão esquerda do ponto DRS , que chamaremos de ponto DRS' .

Os autovalores da diferencial do Fluxo, DF , são

$$\lambda_1 = 2u - \sqrt{u^2 + (v+1)^2 - 1}, \quad (3.3a)$$

$$\lambda_2 = 2u + \sqrt{u^2 + (v+1)^2 - 1}, \quad (3.3b)$$

e os autovectores à direita na Região Hiperbólica são

$$r_1 = \left(u - \sqrt{u^2 + (v+1)^2 - 1}, v \right)^T \text{ e} \quad (3.4a)$$

$$r_2 = \left(u + \sqrt{u^2 + (v+1)^2 - 1}, v \right)^T. \quad (3.4b)$$

A escolha do parâmetro $b = 0$ não foi casual, foi feita para que o modelo tenha as simetrias apresentadas a seguir.

Seja R a reflexão no eixo vertical, por exemplo, se $U = (u, v)$ então $R(U) = (-u, v)$. Temos então uma simetria no Fluxo, nomeadamente $F(R(U)) = -R(F(U))$. Daqui resultam outras simetrias, que seguem no texto.

A curva de Rankine-Hugoniot associada a $U_L = (u_L, v_L)$ é

$$\mathcal{H}(U_L) = \{(u_R, v_R) = U_R : \exists s \in \mathbb{R}, H_1(u_L, v_L; u_R, v_R; s) = 0 \text{ e } H_2(u_L, v_L; u_R, v_R; s) = 0\}$$

onde

$$H_1(u_L, v_L; u_R, v_R; s) = -s(u_R - u_L) + \frac{3}{2}(u_R^2 - u_L^2) + \frac{1}{2}(v_R^2 - v_L^2) + 2(v_R - v_L) \quad (3.5a)$$

$$H_2(u_L, v_L; u_R, v_R; s) = -s(v_R - v_L) + u_R v_R - u_L v_L \quad (3.5b)$$

Temos também $\lambda_1(u, v) = 2u - \sqrt{u^2 + (v+1)^2 - 1}$ e $\lambda_2(u, v) = 2u + \sqrt{u^2 + (v+1)^2 - 1}$. Claramente

$$H_1(u_L, v_L; u_R, v_R; s) = H_1(-u_L, v_L; -u_R, v_R; -s), \quad (3.6a)$$

$$H_2(u_L, v_L; u_R, v_R; s) = -H_2(-u_L, v_L; -u_R, v_R; -s), \quad (3.6b)$$

$$\lambda_1(U) = -\lambda_2(R(U)), \quad (3.6c)$$

$$\lambda_2(U) = -\lambda_1(R(U)). \quad (3.6d)$$

Assim

$$R(\mathcal{H}(U)) = \mathcal{H}(R(U)) \text{ e } s(R(U_L), R(U_R)) = -s(U_L, U_R). \quad (3.7)$$

Tendo em consideração os autovalores para U e $R(U)$ temos a seguinte regra de reflexão dos sectores de Lax:

- $R(1\text{-Choque}) = 2\text{-Expansivo}$ e $R(2\text{-Expansivo}) = 1\text{-Choque}$;
- $R(2\text{-Choque}) = 1\text{-Expansivo}$ e $R(1\text{-Expansivo}) = 2\text{-Choque}$;
- $R(\text{Compressivo}) = \text{Expansivo}$ e $R(\text{Expansivo}) = \text{Compressivo}$;
- $R(\text{Cruzamento}) = \text{Cruzamento}$.

Seja o Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias Associado a $(u_L, v_L; s)$ definido pelo campo de vectores

$$(H_1(u_L, v_L; u_R, v_R; s), H_2(u_L, v_L; u_R, v_R; s))^T \triangleq (\bar{H}_1, \bar{H}_2)^T. \quad (3.8)$$

Então o Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias reflectido, associado a $(-u_L, v_L; -s)$ é gerado pelo campo de vectores

$$(H_1(-u_L, v_L; -u_R, v_R; -s), H_2(-u_L, v_L; -u_R, v_R; -s))^T = (\bar{H}_1, -\bar{H}_2)^T = -R(\bar{H}_1, \bar{H}_2)^T. \quad (3.9)$$

Ou seja, todas as trajectórias são reflectidas com inversão temporal, isto é, são percorridas em sentido inverso.

3.2 Estruturas de Codimensão-1 do Modelo

Nas Figuras 3.1 e 3.2 estão esboçadas as Estruturas de Codimensão-1 e pontos importantes das suas intersecções.

Estas estruturas dividem o espaço de fase em diversas regiões; em cada uma destas regiões as curvas de Rankine-Hugoniot são idênticas (ou seja, tem exactamente a mesma sucessão de sectores).

Definição 3.1 *As regiões definidas pelas Estruturas de Codimensão-1 serão chamadas de Gama-regiões, Γ_i .*

A secção seguinte contém as curvas de Rankine-Hugoniot classificadas para cada uma das Gama-regiões.

Nas próximas subsecções são dadas formas paramétricas para as Estruturas de Codimensão-1; os cálculos foram feitos em Maple (programa [23]) partindo directamente das definições das Estruturas. A classificação das bifurcações foi feita por comparação das curvas de Rankine-Hugoniot nas diversas regiões (ver próxima secção). Para se obter as curvas de Rankine-Hugoniot e as suas classificações foi usado o programa RP, [14].

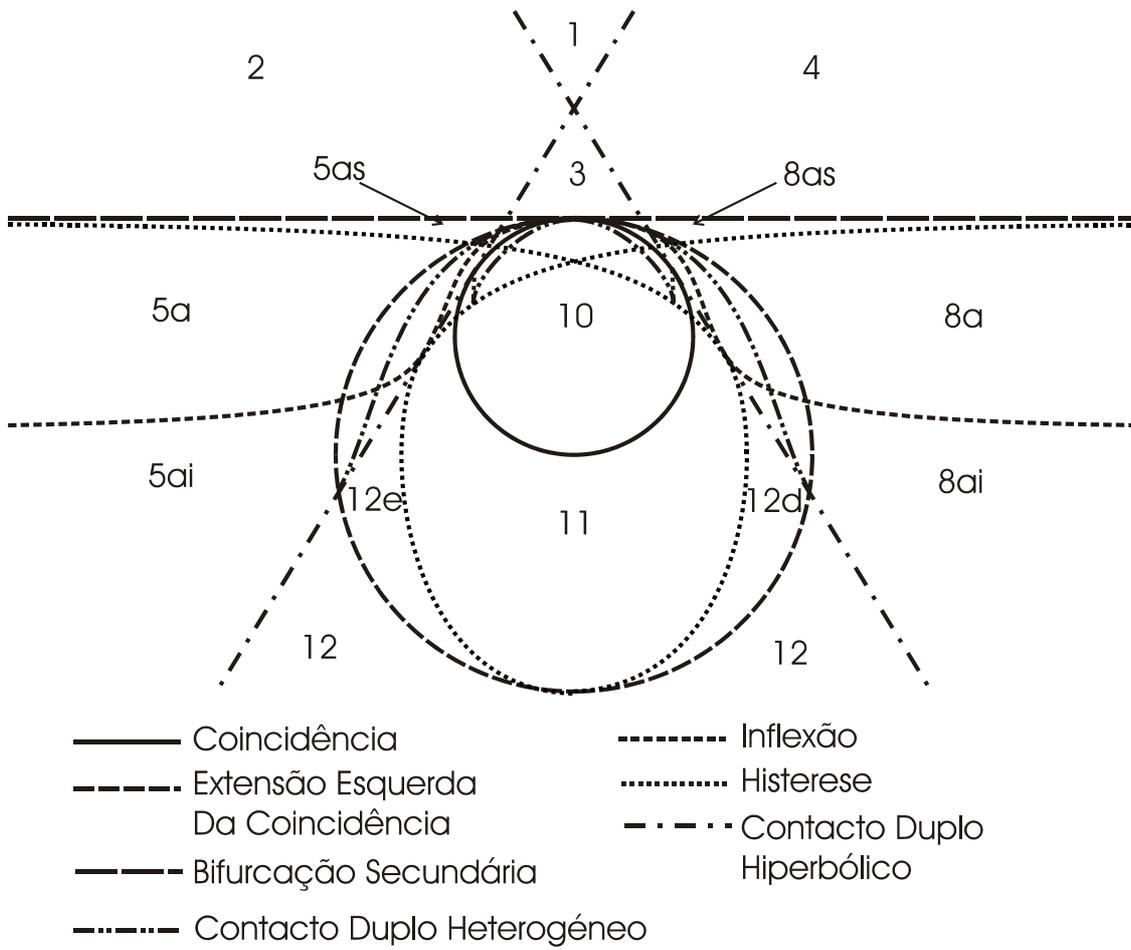


Figura 3.1: Estruturas de Codimensão-1 (formas próximas das reais) e algumas Gama-regiões.

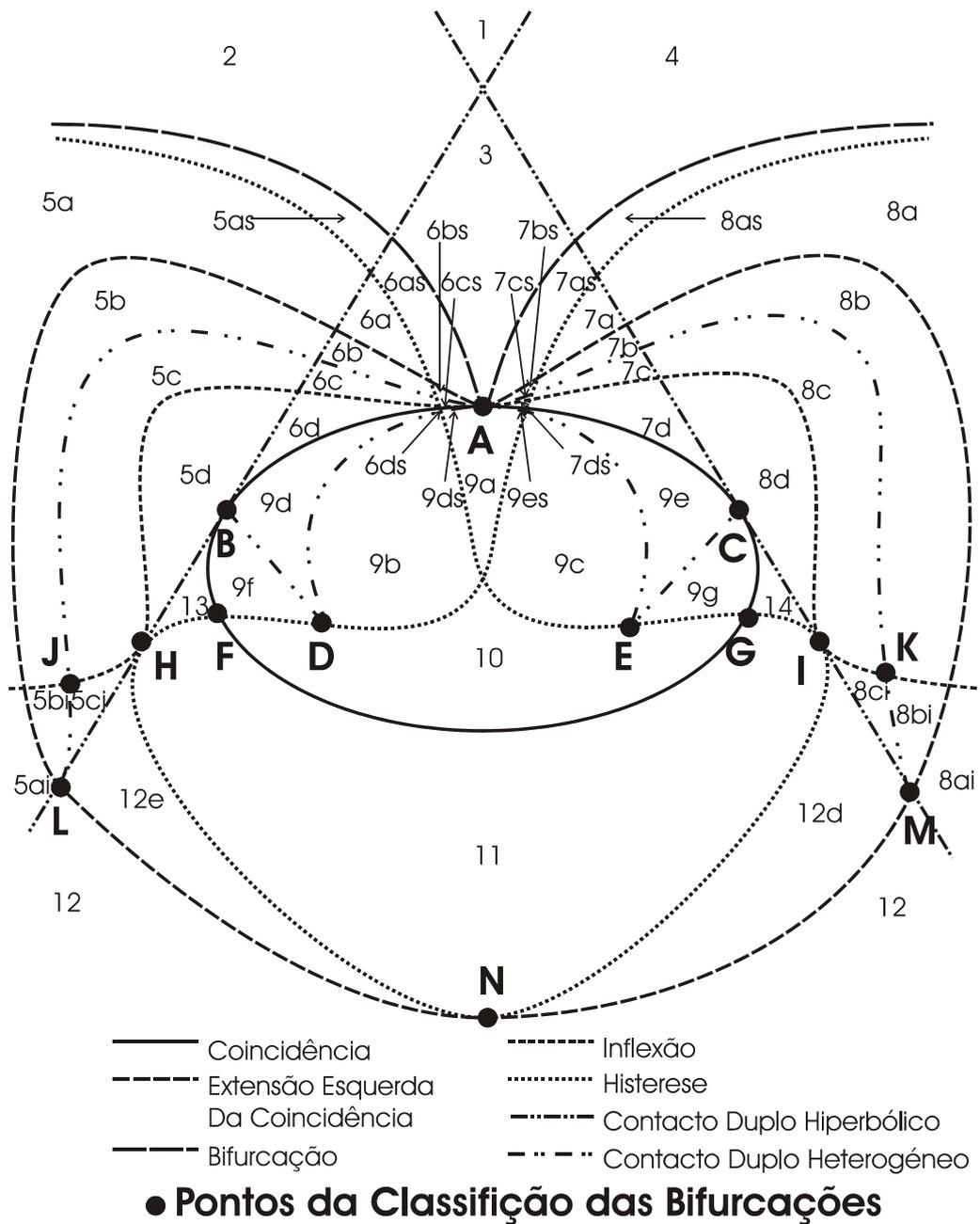


Figura 3.2: Todas as Gama-regiões (Estruturas altamente distorcidas).

3.2.1 Inflexão

As *Inflexões*, \mathcal{I}_1 e \mathcal{I}_2 , são dadas pelas curvas

$$\mathcal{I}_1 = \left\{ u = \sqrt{\frac{-\eta}{12+9\eta}}(5+3\eta), v = \eta, \eta \in \left[-\frac{3}{4}, 0\right] \right\} \quad (3.10a)$$

$$\mathcal{I}_2 = \left\{ u = -\sqrt{\frac{-\eta}{12+9\eta}}(5+3\eta), v = \eta, \eta \in \left[-\frac{3}{4}, 0\right] \right\} \quad (3.10b)$$

Na Figura 3.3 estão esboçados os campos integrais dos autovectores; as setas indicam o sentido de crescimento dos autovalores. Estão representadas também as *Inflexões*. É de notar que algumas curvas integrais dos autovectores cruzam a *Inflexão* duas vezes.

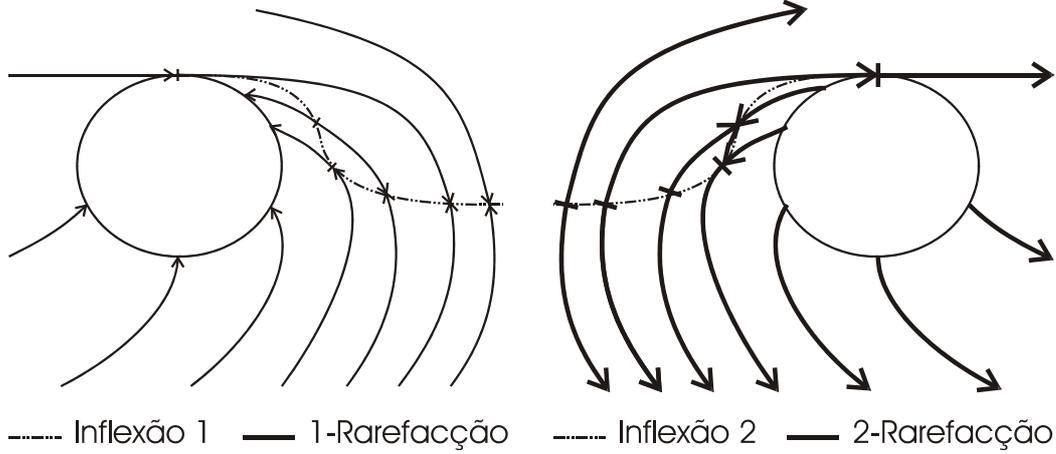


Figura 3.3: Campos integrais dos autovectores e *Inflexões*.

As bifurcações da Rankine-Hugoniot em \mathcal{I} são as seguintes (ver Figura 3.2 e secção 2.5):

1. Entre o infinito e H: \mathcal{I}_2M ;
2. Entre H e A: \mathcal{I}_2m ;
3. Entre A e I: \mathcal{I}_1m ;
4. Entre I e o infinito \mathcal{I}_1M .

Com a reflexão no eixo vertical temos as seguintes trocas $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 1$, $M \rightarrow m$ e $m \rightarrow M$.

3.2.2 Histerese

As Histereses são dadas pelas curvas paramétricas

$$\mathcal{H}_2 = \left\{ u = \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{\frac{-\eta}{7\eta+9}}(7\eta+9), v = -3\eta-4, \eta \in \left[-\frac{3}{4}, 0\right] \right\}, \quad (3.11a)$$

$$\mathcal{H}_2 = \left\{ u = -\frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{\frac{-\eta}{7\eta+9}}(7\eta+9), v = -3\eta-4, \eta \in \left[-\frac{3}{4}, 0\right] \right\}. \quad (3.11b)$$

Cada ponto das Histereses é associado ao ponto com o mesmo parâmetro η da respectiva *Inflexão*, dadas por 3.10a e 3.10b.

As bifurcações da Rankine-Hugoniot em \mathcal{H} são as seguintes (ver Figura 3.2 e secção 2.5):

1. Entre o infinito e G: $\mathcal{H}_1 M_3$;
2. Entre G e I: $\mathcal{H}_1 M_1$;
3. Entre I e N: $\mathcal{H}_1 m_2$;
4. Entre N e H: $\mathcal{H}_2 M_2$;
5. Entre H e F: $\mathcal{H}_2 m_3$;
6. Entre F e o infinito: $\mathcal{H}_2 m_1$.

Com a reflexão no eixo vertical temos as seguintes trocas, primeiro índice, $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 1$, $M \rightarrow m$, $m \rightarrow M$, segundo índice, $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 2$ e $3 \rightarrow 1$.

3.2.3 Coincidência

A *Região Elíptica*, \mathcal{R}_E , é limitada pela *Coincidência*, \mathcal{C} , que por sua vez é a circunferência de raio 1 centrada em $(0, -1)$:

$$\mathcal{C} = \{u^2 + (v + 1)^2 = 1\} \quad (3.12)$$

A *Região Estritamente Hiperbólica*, \mathcal{R}_H , é a parte do plano exterior a \mathcal{C} .

3.2.4 Extensão Esquerda da Coincidência

A *Extensão Esquerda da Coincidência*, \mathcal{E} , é uma curva muito próxima de uma elipse centrada em $(0, -2)$ com eixo horizontal de 1.49 e eixo vertical igual a 2. Precisamente \mathcal{E} é dada pela curva paramétrica

$$3u = \pm f(\eta) + g(\eta), \quad (3.13a)$$

$$3v = h(\eta) + \eta, \quad (3.13b)$$

cujos pontos são associados aos pontos com o mesmo η da calota $v > -\frac{1}{2}$ da *Coincidência* duplamente coberta por

$$3u = \pm f(\eta) - g(\eta), \quad (3.14a)$$

$$3v = h(\eta) - \eta, \quad (3.14b)$$

onde

$$f(\eta) = \frac{(10\eta - 7)\sqrt{-\eta^2 - 2\eta}}{4\eta - 1}$$

$$g(\eta) = \sqrt{-\eta^2 - 2\eta}$$

$$h(\eta) = \frac{\eta(2\eta - 5)}{4\eta - 1}$$

$$-2 \leq \eta \leq 0$$

ou seja, cada ponto da calota de \mathcal{C} dá origem a dois pontos de \mathcal{E} .

Para cada um dos seguintes trechos de \mathcal{E} temos (ver Figura 3.2 e secção 2.5):

1. Entre A e M: Extensão do segmento AC de \mathcal{C} e Bifurcação $\mathcal{E}\lambda_c$;
2. Entre M e N: Extensão do segmento AC de \mathcal{C} e Bifurcação $\mathcal{E}\lambda_b$;
3. Entre A e L: Extensão do segmento AB de \mathcal{C} e Bifurcação $\mathcal{E}y_b$;
4. Entre L e N: Extensão do segmento AB de \mathcal{C} e Bifurcação $\mathcal{E}y_a$.

Com a reflexão no eixo vertical temos as seguintes trocas $\lambda \rightarrow y$, $y \rightarrow \lambda$, $a \rightarrow c$, $b \rightarrow b$ e $c \rightarrow a$.

3.2.5 Bifurcação Secundária

A *Bifurcação Secundária*, \mathcal{B} , é o eixo horizontal, $v = 0$ e $\mathcal{H}(u_L, 0)$ bifurca em $(-3u_L, 0)$.

3.2.6 Contactos Duplos

O *Contacto Duplo Hiperbólico* é constituído pelas duas rectas dadas pelas formas paramétricas:

$$u = \pm\sqrt{3}/3(\eta - 1), \quad (3.15a)$$

$$v = \eta. \quad (3.15b)$$

A solução de declive negativo corresponde a um (1,2)-Contacto Duplo para $\eta < -3/2$, a um (1,1)-Contacto Duplo para $-3/2 < \eta < -1/2$ e a um (2,1)-Contacto Duplo para $-1/2 < \eta$. A solução de declive positivo corresponde a um (2,1)-Contacto Duplo para $\eta < -3/2$, a um (2,2)-Contacto Duplo para $-3/2 < \eta < -1/2$ e a um (1,2)-Contacto Duplo para $-1/2 < \eta$. Os pontos são associados aos pontos com o mesmo η das mesmas rectas com a parametrização

$$u = \mp\sqrt{3}/3(\eta + 3) \quad (3.16a)$$

$$v = -\eta - 2 \quad (3.16b)$$

O Contacto Duplo Hiperbólico apresenta as seguintes bifurcações (ver Figura 3.2 e secção 2.5):

1. Entre o infinito e L: $\mathcal{D}_{21}M$;
2. Entre L e H: $\mathcal{D}_{22}M$;
3. Entre H e B: $\mathcal{D}_{22}W$;
4. Entre B e o infinito: $\mathcal{D}_{22}W$;
5. Entre o infinito e C: $\mathcal{D}_{21}M$;
6. Entre C e I: $\mathcal{D}_{11}M$;
7. Entre I e M: $\mathcal{D}_{11}W$;
8. Entre M e o infinito: $\mathcal{D}_{12}W$.

Há uma identificação natural $\mathcal{D}_{ij} \rightarrow \mathcal{D}_{ji}$, $M \rightarrow W$ e $W \rightarrow M$.

Como já foi dito os *Contactos Duplos Heterogéneos* aparecem aos pares pela identificação natural, cada ponto do *Contacto Hiperbolico-elíptico* é identificado com um ponto do *Contacto Elíptico-hiperbólico*, o seu associado.

O *Contacto Elíptico-hiperbólico* é dado pelas duas curvas paramétricas, juntamente com as respectivas reflexões no eixo vertical,

$$u = -f_{\pm}(\eta) + g_{\pm}(\eta), \quad (3.17a)$$

$$v = \eta, \quad (3.17b)$$

e o *Contacto Hiperbolico-elíptico* é dado pelas duas curvas paramétricas, juntamente com as respectivas reflexões no eixo vertical,

$$u = g_{\pm}(\eta), \quad (3.18a)$$

$$v = h_{\pm}(\eta). \quad (3.18b)$$

Os estados associados são os que tem o mesmo parâmetro η . O domínio das funções f_+ , g_+ e h_+ é $[-8/5, -1/2]$ enquanto que o domínio das funções f_- , g_- e h_- é $[-8/5, 0]$. Explicitamente temos as funções

$$\begin{aligned}\Psi(\eta) &= \sqrt{16\eta^2 + 50\eta + 25} \\ 5h_{\pm}(\eta) &= \eta \mp \Psi(\eta) - 5 \\ 15f_{\pm}(\eta) &= \sqrt{24\eta^2 + 78\eta - 24\eta h_{\pm}(\eta) \pm 18\Psi(\eta) + 90} \\ 75g_{\pm}(\eta) &= \sqrt{-1905\eta^2 - 1050\eta \pm 930\Psi(\eta) [930\eta + 1800] + 9000}\end{aligned}$$

É de notar que os domínios das funções seriam alargados se em vez de se impor a igualdade entre a velocidade do choque com a parte real dos autovalores complexos fosse pedida a igualdade entre s e a média entre os dois autovalores que é sempre $2u$, independentemente da localização do estado. Nesse caso os contactos não terminariam na Coincidência.

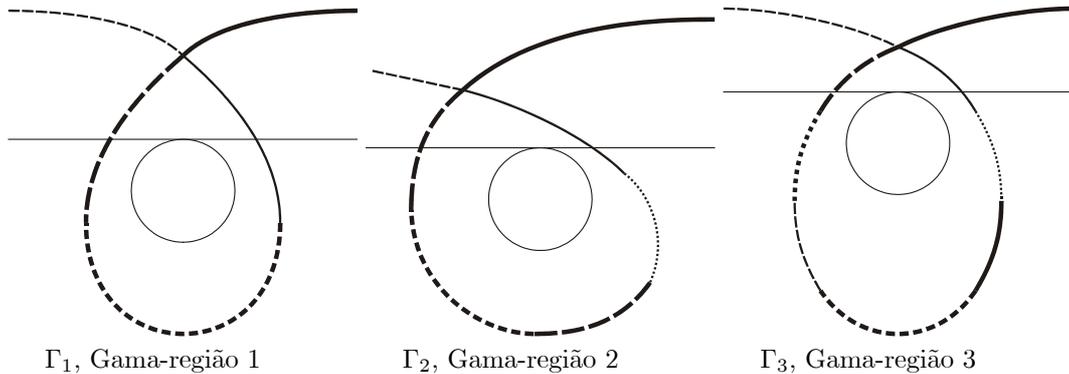
Estes contactos são curvas com as seguintes bifurcações e conjugações (ver Figura 3.2 e secção 2.5):

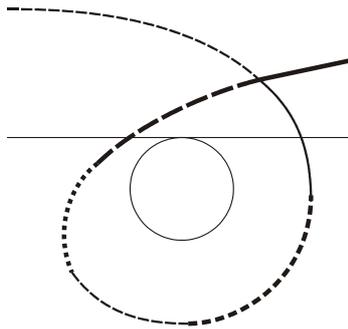
1. Contacto Hiperbolico-elíptico entre L e J: $\mathcal{D}_{2e}C$;
Contacto Eliptico-hiperbólico entre B e D: $\mathcal{D}_{e2}W$;
2. Contacto Hiperbolico-elíptico entre J e A: $\mathcal{D}_{2e}C$;
Contacto Eliptico-hiperbólico entre D e A: $\mathcal{D}_{e2}M$;
3. Contacto Hiperbolico-elíptico entre A e K: $\mathcal{D}_{1e}C$;
Contacto Eliptico-hiperbólico entre A e E: $\mathcal{D}_{e1}W$;
4. Contacto Hiperbolico-elíptico entre K e M: $\mathcal{D}_{1e}C$;
Contacto Eliptico-hiperbólico entre E e C: $\mathcal{D}_{e1}M$.

Para todos os Contactos Duplos temos a reflexão no eixo vertical faz-se com as seguintes trocas $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 1$, $M \rightarrow W$ e $W \rightarrow M$; mantêm-se C , D e e .

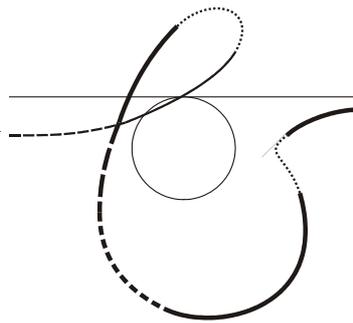
3.3 Curvas de Rankine-Hugoniot

Usou-se o programa RP, [14], para obter os conjuntos de Rankine-Hugoniot classificados que se seguem. Será omitida a indicação explícita do U_L quando este for elemento de \mathcal{R}_H pois ele se situa na única bifurcação. Na Região Elíptica U_L é representado por um ponto; não foi tomado o cuidado de o localizar exactamente na região a que pertence. As figuras são distorcidas de forma a se evidenciarem todos os seus sectores; contudo preservou-se similaridade com a forma inicial.

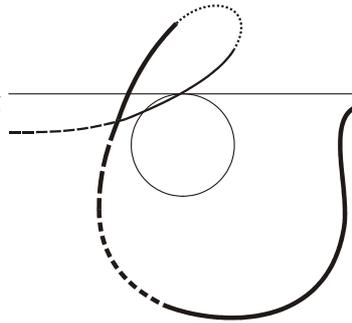




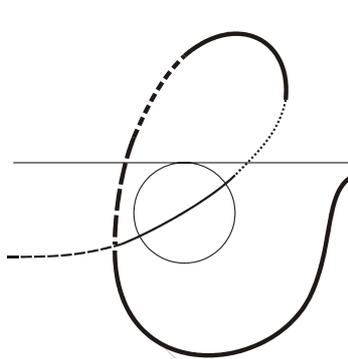
Γ_4 , Gama-região 4



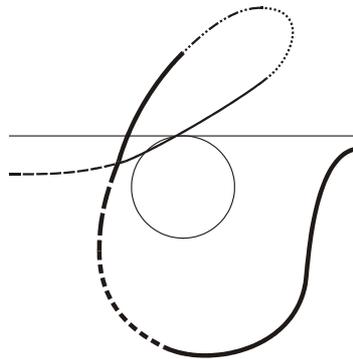
Γ_{5as} , Gama-região 5as



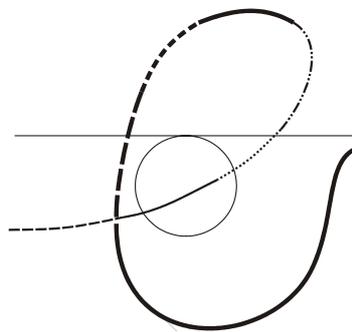
Γ_{5a} , Gama-região 5a



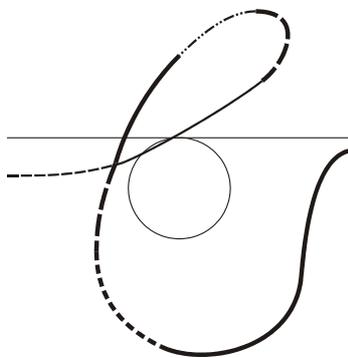
Γ_{5ai} , Gama-região 5ai



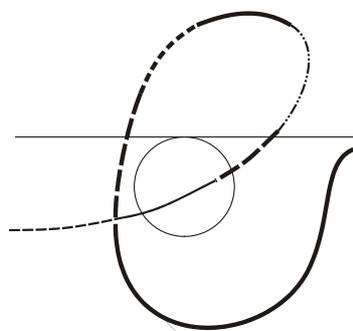
Γ_{5b} , Gama-região 5b



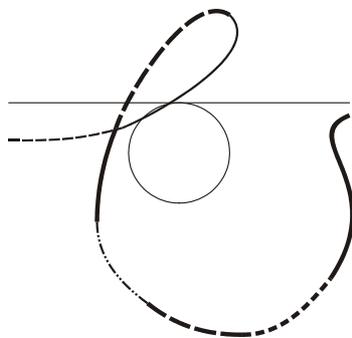
Γ_{5bi} , Gama-região 5bi



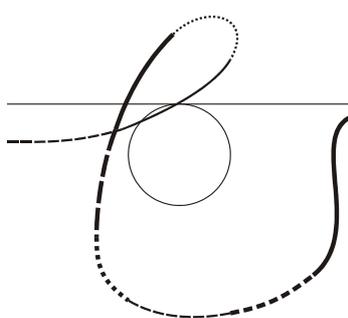
Γ_{5c} , Gama-região 5c



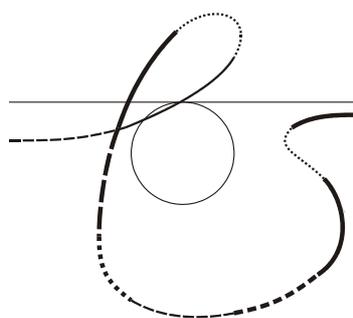
Γ_{5ci} , Gama-região 5ci



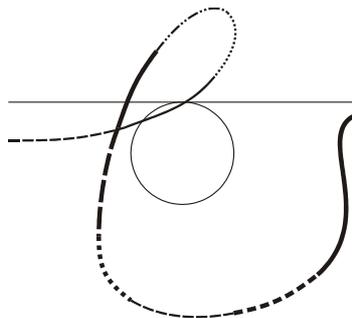
Γ_{5d} , Gama-região 5d



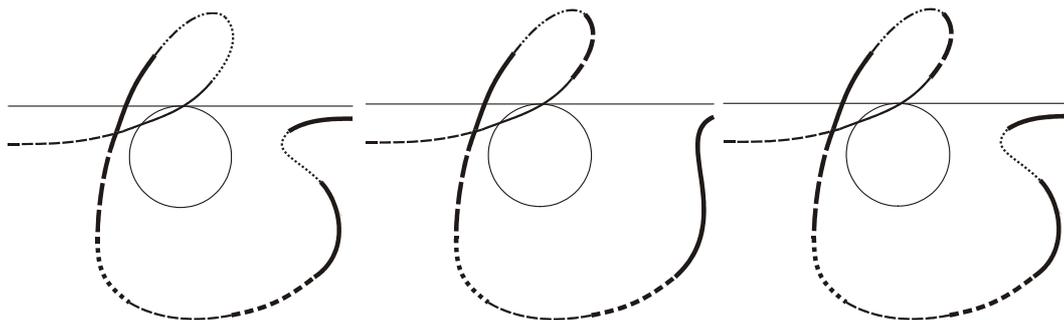
Γ_{6a} , Gama-região 6a



Γ_{6as} , Gama-região 6as



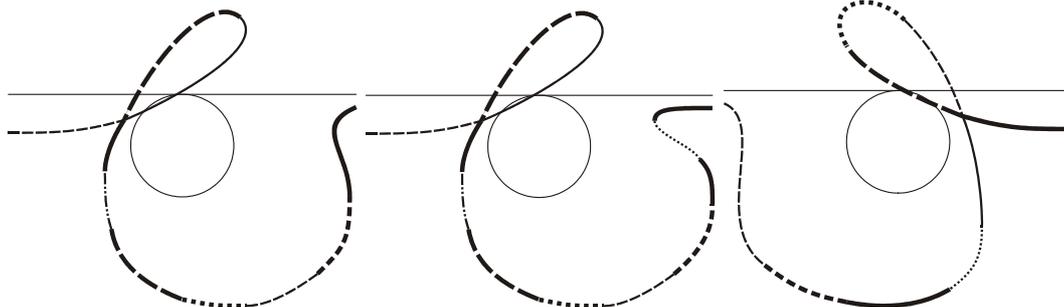
Γ_{6b} , Gama-região 6b



Γ_{6bs} , Gama-região 6bs

Γ_{6c} , Gama-região 6c

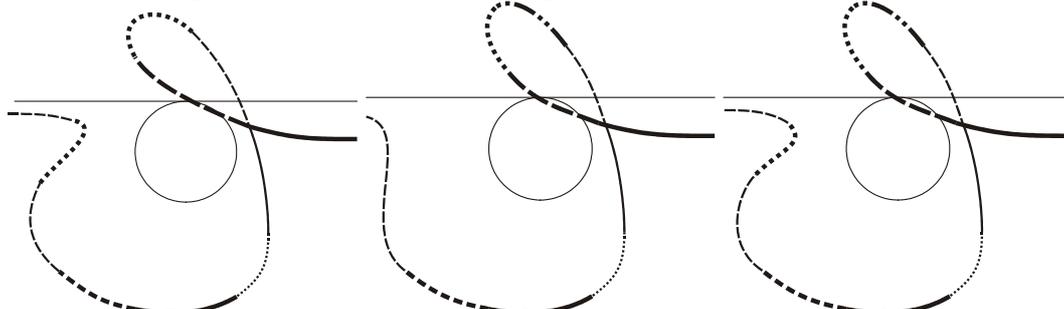
Γ_{6cs} , Gama-região 6cs



Γ_{6d} , Gama-região 6d

Γ_{6d} , Gama-região 6ds

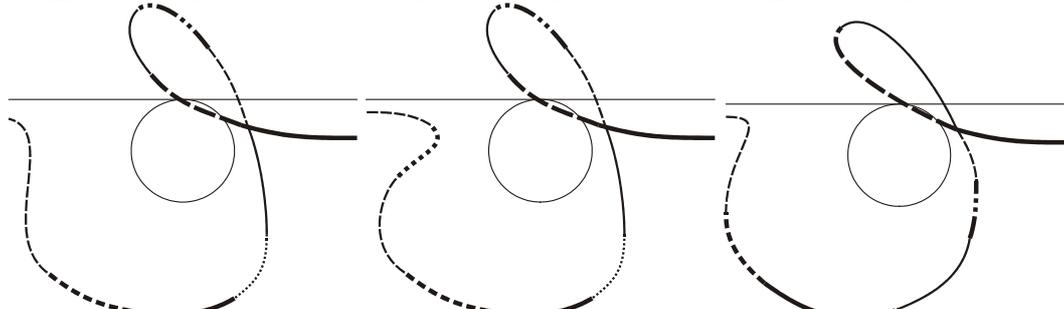
Γ_{7a} , Gama-região 7a



Γ_{7as} , Gama-região 7as

Γ_{7b} , Gama-região 7b

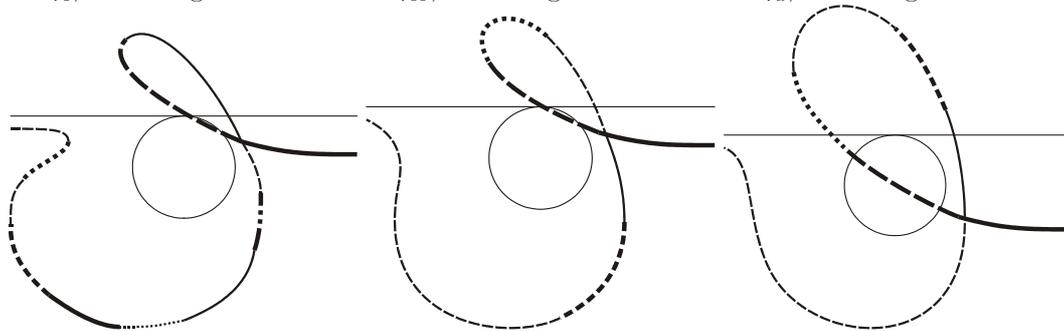
Γ_{7bs} , Gama-região 7bs



Γ_{7c} , Gama-região 7c

Γ_{7cs} , Gama-região 7cs

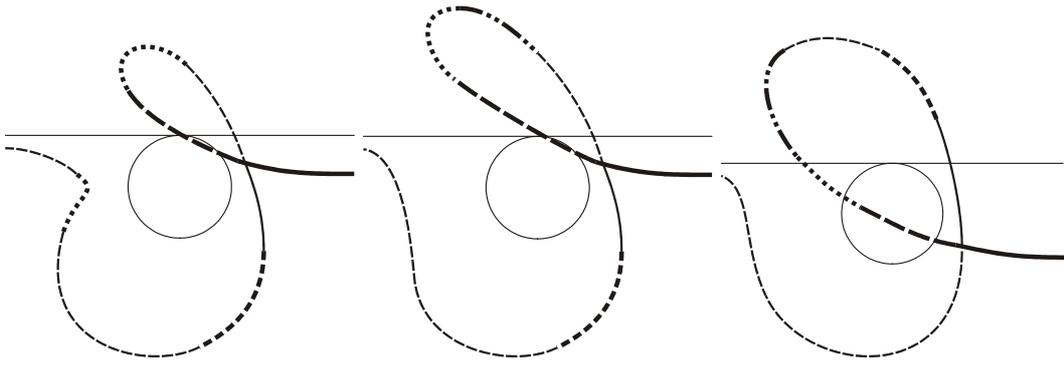
Γ_{7d} , Gama-região 7d



Γ_{7ds} , Gama-região 7ds

Γ_{8a} , Gama-região 8a

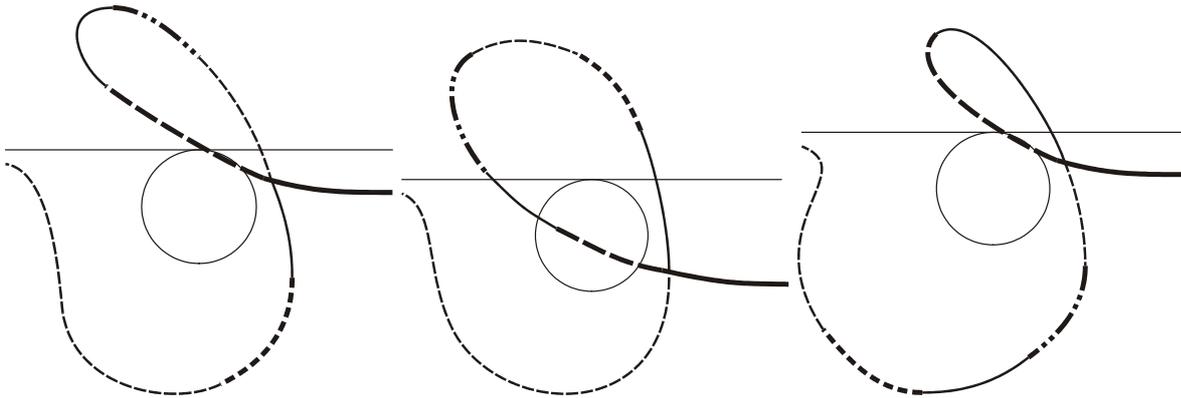
Γ_{8ai} , Gama-região 8ai



Γ_{8as} , Gama-região 8as

Γ_{8b} , Gama-região 8b

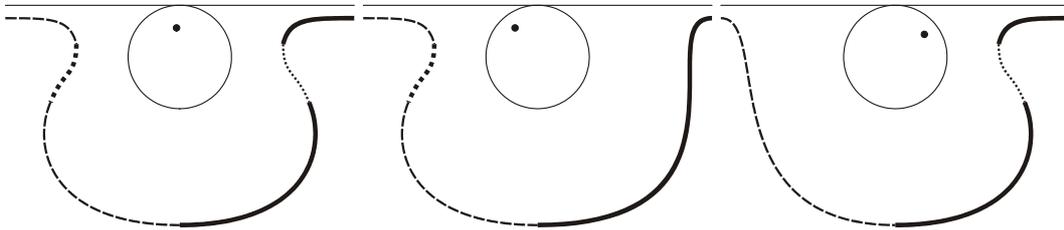
Γ_{8bi} , Gama-região 8bi



Γ_{8c} , Gama-região 8c

Γ_{8ci} , Gama-região 8ci

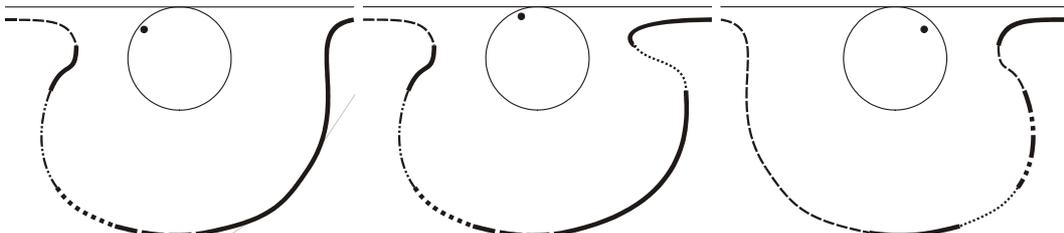
Γ_{8d} , Gama-região 8d



Γ_{9a} , Gama-região 9a

Γ_{9b} , Gama-região 9b

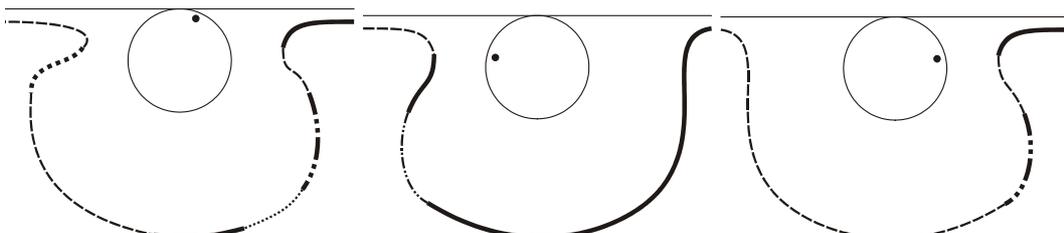
Γ_{9c} , Gama-região 9c



Γ_{9d} , Gama-região 9d

Γ_{9ds} , Gama-região 9ds

Γ_{9e} , Gama-região 9e



Γ_{9es} , Gama-região 9es

Γ_{9f} , Gama-região 9f

Γ_{9g} , Gama-região 9g

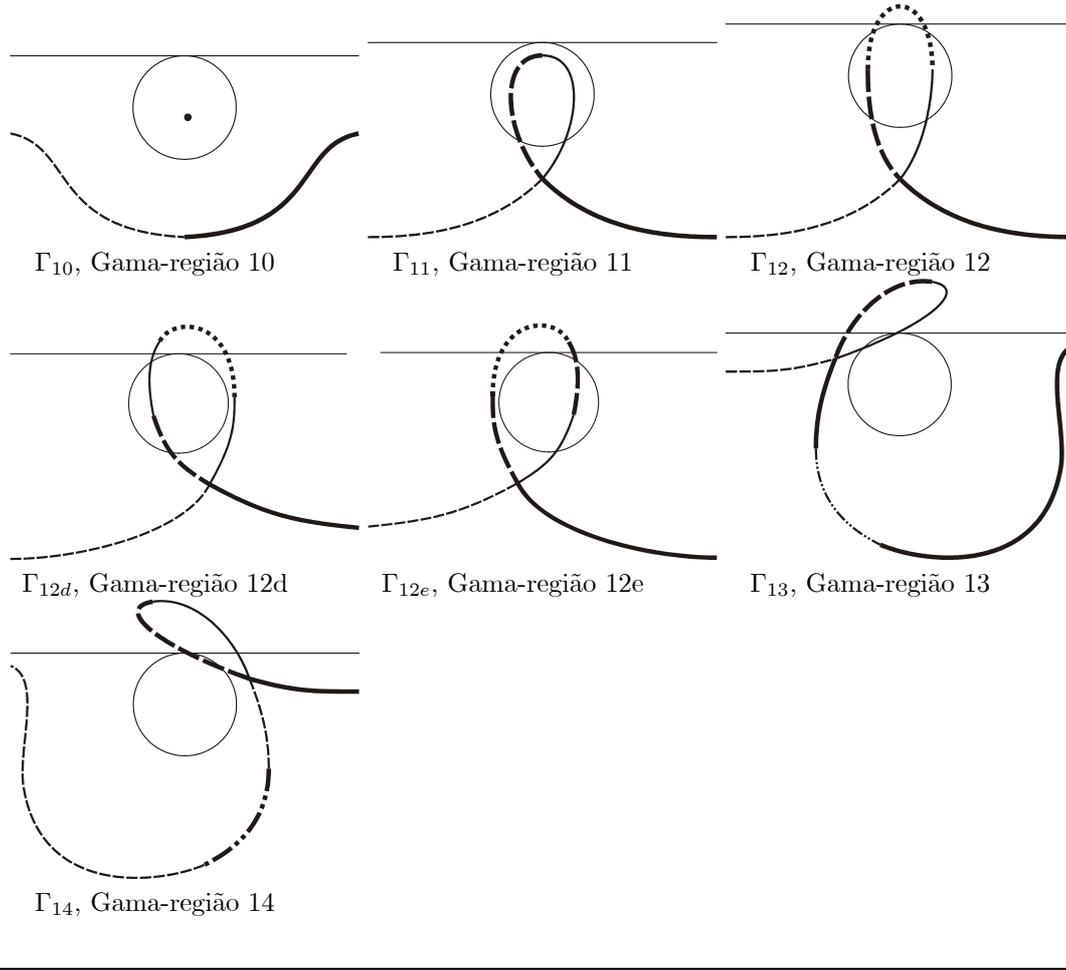


Figura 3.4: Curvas de Rankine-Hugoniot classificadas.

3.4 L-Regiões e Curvas Suplementares

Nesta secção serão definidas as L-regiões deste problema; no capítulo seguinte serão resolvidos os Problemas de Riemann. Naturalmente a definição das L-regiões está intrinsecamente relacionada com as próprias soluções, logo nesta secção serão referidos, além das próprias regiões, alguns aspectos gerais das soluções.

Neste problema as soluções foram reunidas em três grupos genéricos, ou seja, três L-regiões; que chamaremos de \mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_2 e \mathcal{L}_3 . Estas estão separadas por duas curvas (ver Figura 3.5), as curvas \mathcal{T} e \mathcal{S} . Acima e à direita da curva \mathcal{T} situa-se a L-região \mathcal{L}_1 ; a curva \mathcal{S} divide o resto do Espaço de Estados nas L-regiões \mathcal{L}_2 e \mathcal{L}_3 , respectivamente acima e abaixo de \mathcal{S} .

A L-região \mathcal{L}_1 situa-se na Região Estritamente Hiperbólica e as suas soluções caracterizam-se pelo facto de o Grupo de Ondas-1, dos seus estados, estar totalmente contido também na Região Estritamente Hiperbólica, \mathcal{R}_H , especificamente, sem tocar a Coincidência. Todos os estados na Região Estritamente Hiperbólica pertencentes às outras duas L-regiões têm como última onda o Grupo de Ondas-1 uma 1-Rarefação; 1-Rarefação esta que termina na Coincidência. Notar que o Grupo de Ondas-1 não passa pela Região Elíptica, pois aí não há Rarefacções nem 1-Choques.

A curva \mathcal{S} , desconsiderando \mathcal{L}_1 , separa a região para a qual a solução contém uma Rarefacção Transicional, da que não a possui, respectivamente \mathcal{L}_2 e \mathcal{L}_3 . Ambas as regiões contêm estados na Região Elíptica.

Definição 3.2 A curva \mathcal{T} é o conjunto de pontos U_L que estão na fronteira entre os estados da Região Estritamente Hiperbólica cujo Grupo de Ondas-1 termina na Coincidência, via 1-Rarefação, e aqueles estados da Região Estritamente Hiperbólica cujo Grupo de Ondas-1 está totalmente contido na Região Estritamente Hiperbólica sem tocar a Coincidência.

De forma equivalente, a curva \mathcal{T} é constituída pela parte esquerda da Bifurcação Secundária, do infinito até o Ponto A , pela Extensão Esquerda da Coincidência entre os Pontos A e M e por fim pela 1-Rarefação do infinito até o Ponto M (ver Figura 3.2).

Definição 3.3 A curva \mathcal{T} divide o espaço de estados em dois: a região acima e à direita de \mathcal{T} foi chamada de região \mathcal{L}_1 .

Cabe analisar porque as duas definições dadas para \mathcal{T} são equivalentes. Na subsecção 4.1.5 do próximo capítulo será dada a solução para a parte esquerda da Bifurcação Secundária; contudo é claro que nestes casos o Grupo de Ondas-1 não está estritamente contido em \mathcal{R}_H , dado que uma 1-Rarefação percorre o semi-eixo negativo de u , da esquerda para a direita, cruzando a Coincidência na origem, o ponto DRS . Imediatamente acima deste semi-eixo, como será mostrado na subsecção 4.1.1, o Grupo de Ondas-1 não toca a Coincidência; imediatamente abaixo as 1-Rarefações terminam na Coincidência. Mais, claramente todas as 1-Rarefações abaixo continuam terminando na Coincidência até que cruzam a 1-Inflexão. Isto acontece no Ponto I onde se intersectam a Inflexão, a Histerese e o Contacto Duplo (ver Figura 3.2 para localizar todos os pontos sobre as Estruturas de Codimensão-1 que se usam nesta explicação). Para se saber como continua o Grupo de Ondas-1 é fundamental ter em atenção que parte do Contacto Duplo é intersectado pela 1-Rarefação. Se isto acontece entre os Pontos I e M então o Contacto Duplo é do tipo $\mathcal{D}_{11}W$, logo, como se sabe pelos diagramas de construção de soluções (ver subsecção 2.6.1), o Grupo de Ondas-1 continua com uma 1-Rarefação no ponto associado ao ponto da intersecção, que necessariamente se situa entre os Pontos C e I onde temos o Contacto $\mathcal{D}_{11}M$. Partindo daí chega-se à Coincidência. Na secção 4.3 é dado um exemplo deste tipo de construção. Por outro lado, se a intersecção entre a 1-Rarefação e o Contacto Duplo se dá abaixo de M então o Contacto é do tipo $\mathcal{D}_{12}W$ e o Grupo de Ondas-1 termina no ponto associado, que necessariamente está localizado acima de C , logo em $\mathcal{D}_{21}M$. No Capítulo 4 será dada uma solução deste tipo (ver Figura 4.14).

Por fim, por observação das curvas de Rankine-Hugoniot sabe-se que nas Gama-regiões Γ_{7b} , Γ_{7bs} , Γ_{7c} , Γ_{7cs} , Γ_{7d} , Γ_{7ds} , Γ_{8b} , Γ_{8bi} , Γ_{7c} , Γ_{8ci} e Γ_{7d} a Curva de Rankine-Hugoniot possui a Fronteira entre 1-Choque e Transporte à Direita (condição para a construção de uma composta, ver subsecção 2.6.1) no espaço entre a Coincidência e a Inflexão; logo o Grupo de Ondas-1 chega à Coincidência via 1-Rarefação. É de notar que tal não acontece nas Gama-regiões Γ_{7a} , Γ_{7as} , Γ_{8a} , Γ_{8as} e Γ_{8ai} onde o Grupo de Ondas-1 está completamente na Região Estritamente Hiperbólica. Também é fácil de ver que nas Gama-regiões Γ_{7d} , Γ_{8d} e Γ_{14} existe uma 1-Rarefação ligando directamente qualquer estado à Coincidência.

Definição 3.4 Chama-se curva \mathcal{S} ao trecho da 1-Rarefação que contém o ponto DRS' desde o infinito até o próprio ponto DRS' reunido com $\mathcal{H}_{2E}(DRS')$.

Para além das curvas \mathcal{T} e \mathcal{S} foram definidas mais três curvas auxiliares, \mathcal{R} , \mathcal{J} e \mathcal{K} (ver Figura 3.5); estas últimas não são relevantes para a definição das L -Regiões.

A L -região \mathcal{L}_1 tem soluções muito similares às do problema com ponto umbílico (ver [15]), por este facto serão dadas todas as soluções particulares da classe de soluções de \mathcal{L}_1 . Para tal é necessário definir a curva \mathcal{J} .

Definição 3.5 A curva \mathcal{J} é o conjunto de pontos U_L cujo sector $\mathcal{H}_{1S}(U_L)$ é tangente a \mathcal{I}_2 quando $u \rightarrow -\infty$.

Esta curva distingue dois tipos de solução, dependendo de existência ou não de intersecção do sector $\mathcal{H}_{1S}(U_L)$ com \mathcal{I}_2 .

Para se encontrar \mathcal{J} no modelo basta tomar em consideração que sobre \mathcal{I}_2 temos $v \rightarrow -\frac{4}{3}$ quando $u \rightarrow -\infty$ e que sobre a Rankine-Hugoniot $v \rightarrow 3v_L$ quando $u \rightarrow -\infty$. Assim \mathcal{J} é definida por $v = -\frac{4}{9}$.

Neste modelo existem rarefações transicionais (ver [12]). Estas rarefações cruzam \mathcal{C} tangencialmente, e isso ocorre no ponto DRS . Então é conveniente definir a seguinte curva:

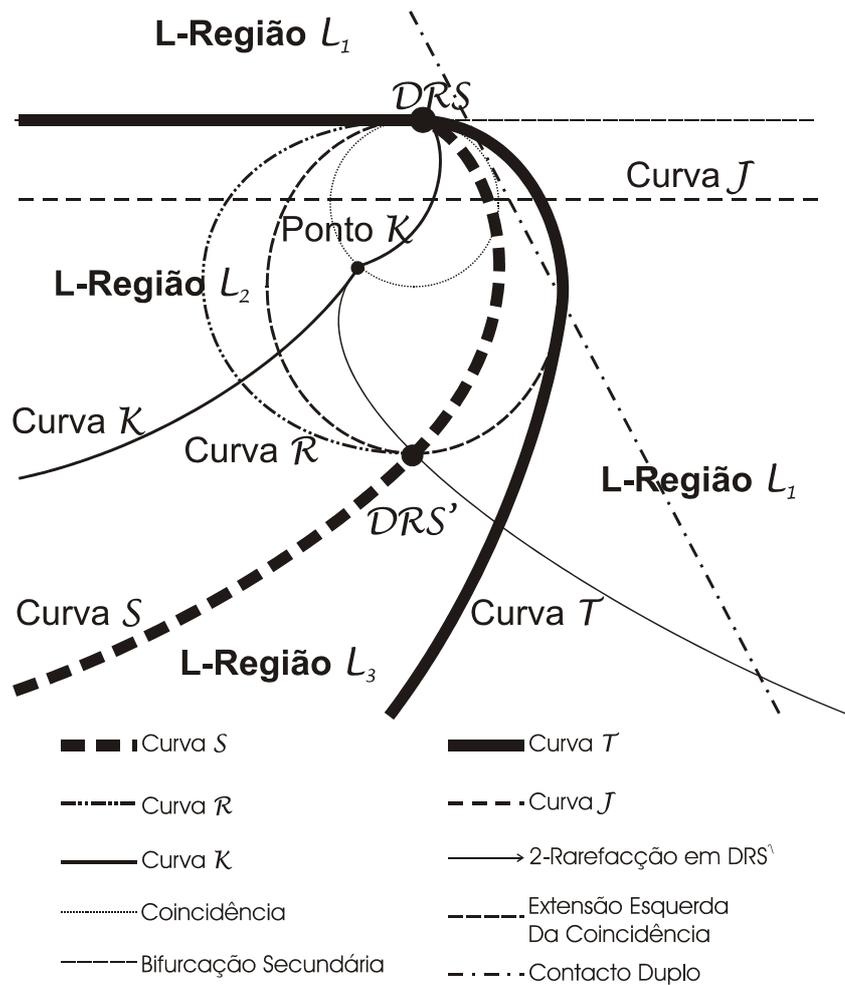


Figura 3.5: L-Regiões \mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_2 , e \mathcal{L}_3 definidas pelas curvas \mathcal{T} e \mathcal{S} .

Definição 3.6 *Chama-se curva \mathcal{R} à 2-Rarefação que se inicia em \mathcal{I}_2 e cujo extremo é o ponto DRS ; junta-se ainda aos estados cujo 2-Choque Sónico à Direita coincide com algum estado da 2-Rarefação. Resulta que \mathcal{R} é uma curva unindo o ponto DRS ao ponto DRS' .*

De forma equivalente, \mathcal{R} é o Grupo de Ondas-2 para trás do ponto DRS que se inicia com uma 2-Rarefação.

É de notar que a curva \mathcal{R} não é simplesmente o Grupo de Ondas-2 para trás do ponto DRS ; teremos que excluir o sector de 2-Choque para trás, ou seja, excluir o sector 2-Expansivo (para a frente) do ponto DRS .

A curva \mathcal{S} distingue os estados para os quais o Grupo de Ondas-1 cruza \mathcal{R} , ou seja estados em \mathcal{L}_2 , daqueles cujo Grupo de Ondas-1 não cruza a curva \mathcal{R} , ou seja os estados em \mathcal{L}_3 . Quando o Grupo de Ondas-1 cruza \mathcal{R} teremos uma Rarefação Transicional, que desempenha um papel relevante no problema.

A L-região \mathcal{L}_2 é dividida pela Curva K . Se um estado de \mathcal{L}_2 está em \mathcal{R}_H então o Grupo de Ondas-1 termina na Coincidência; desse ponto na Coincidência parte o Grupo de Ondas-2. A Curva K distingue se o Grupo de Ondas-2 referido passa à direita ou à esquerda do ponto DRS' . Se o estado está em \mathcal{R}_E então a Curva K distingue se o Grupo de Ondas-2 que parte da fronteira entre os sectores 2-Expansivo e 1-Choque passa à direita ou à esquerda do mesmo ponto DRS' .

É de notar que aqui será mais correcto usar uma ideia generalizada do Grupo de Ondas-2, e só aí verificar se esse Grupo de Ondas-2 generalizado passa à esquerda ou à direita do ponto DRS' . Contudo a explicação desta generalização será deixada para a subsecção 4.2.1.

Definição 3.7 *Define-se como Ponto K aquele sobre a Coincidência cuja 2-Rarefação passa pelo ponto DRS' .*

Definição 3.8 *Definição auxiliar: à porção de 2-Rarefação entre o ponto K e o ponto DRS' chama-se Porção- K .*

Esta última definição é útil apenas para simplificar a próxima.

Definição 3.9 *Define-se como Curva K a união da 1-Rarefação que chega ao Ponto K com os estados da Região Elíptica cuja fronteira entre os sectores 2-Expansivo e 1-Choque coincide com a Porção- K .*

Capítulo 4

Soluções

Neste capítulo serão dadas soluções para as três L-regiões usando o critério de Lax para validar as soluções, relaxando o pedido da existência de Perfil Viscoso. Assim o método dado na secção 2.6 apresenta-se suficiente para a construção das soluções. Contudo muitas vezes, como sabem todos que já usaram o programa [14], só após a visualização da solução é que se torna claro e fácil encontrar o choque que se procurava.

Nas construções de soluções deste capítulo muitas vezes terá que usar notações pesadas, em vista a simplificar um pouco serão usadas as convenções que se seguem:

1. Grupo de Ondas-1:

- (a) Se $U_j \in \mathcal{H}_{1S}(U_i)$ então U_j será escrito como U_i^1 ;
- (b) Se $U_j \in {}_1^*\mathcal{S}(U_i)$ então U_j será escrito como U_i^{1S} ;
- (c) Se $U_j \in \mathcal{S}_1^*(U_i)$ então U_j será escrito como U_i^{S1} ;
- (d) Se $U_j \in {}_e^*\mathcal{S}(U_i)$ então U_j será escrito como U_i^{eS} ;
- (e) Se $U_j \in {}_1^*\mathcal{S}_1^*(U_i)$ então U_j será escrito como U_i^{1S1} ;
- (f) Se $U_j \in {}_e^*\mathcal{S}_1^*(U_i)$ então U_j será escrito como U_i^{eS1} .

2. Grupo de Ondas-2:

- (a) Se $U_j \in \mathcal{H}_{2S}(U_i)$ então U_j será escrito como U_i^2 ;
- (b) Se $U_j \in {}_2^*\mathcal{S}(U_i)$ então U_j será escrito como U_i^{2S} ;
- (c) Se $U_j \in \mathcal{S}_2^*(U_i)$ então U_j será escrito como U_i^{S2} ;
- (d) Se $U_j \in \mathcal{S}_e^*(U_i)$ então U_j será escrito como U_i^{Se} ;
- (e) Se $U_j \in {}_2^*\mathcal{S}_2^*(U_i)$ então U_j será escrito como U_i^{2S2} ;
- (f) Se $U_j \in {}_e^*\mathcal{S}_2^*(U_i)$ então U_j será escrito como U_i^{2Se} .

3. Grupo de Cruzamento:

- (a) Se $U_j \in \mathcal{H}_X(U_i)$ então U_j será escrito como U_i^X ;
- (b) Se $U_j \in {}_2^*\mathcal{X}(U_i)$ então U_j será escrito como U_i^{2X} ;
- (c) Se $U_j \in \mathcal{X}_1^*(U_i)$ então U_j será escrito como U_i^{X2} ;
- (d) Se $U_j \in {}_2^*\mathcal{X}_1^*(U_i)$ então U_j será escrito como U_i^{2X1} .

4. Grupo Compressivo:

- (a) Se $U_j \in \mathcal{H}_C(U_i)$ então U_j será escrito como U_i^C ;
- (b) Se $U_j \in {}_1^*\mathcal{C}(U_i)$ então U_j será escrito como U_i^{1C} ;

- (c) Se $U_j \in {}^* \mathcal{C}_e(U_i)$ então U_j será escrito como $U_i^{\varepsilon C}$;
- (d) Se $U_j \in \mathcal{C}_2^*(U_i)$ então U_j será escrito como U_i^{C2} ;
- (e) Se $U_j \in \mathcal{C}_e^*(U_i)$ então U_j será escrito como $U_i^{C\varepsilon}$;
- (f) Se $U_j \in {}^* \mathcal{C}_2^*(U_i)$ então U_j será escrito como U_i^{1C2} ;
- (g) Se $U_j \in {}^* \mathcal{C}_e^*(U_i)$ então U_j será escrito como $U_i^{\varepsilon C2}$;
- (h) Se $U_j \in {}^* \mathcal{C}_e^*(U_i)$ então U_j será escrito como $U_i^{1C\varepsilon}$.

Por vezes temos $U_k = U_j^Y$ e $U_j = U_i^Z$, nestes casos escreve-se $U_k = (U_i^Z)^Y$.

Nas figuras onde são construídas as soluções será usada a convenção gráfica para as ondas apresentada na Figura 4.1. Nas Compostas Rarefacção-Choque a secta de U_M até U_R pode ser eliminada.

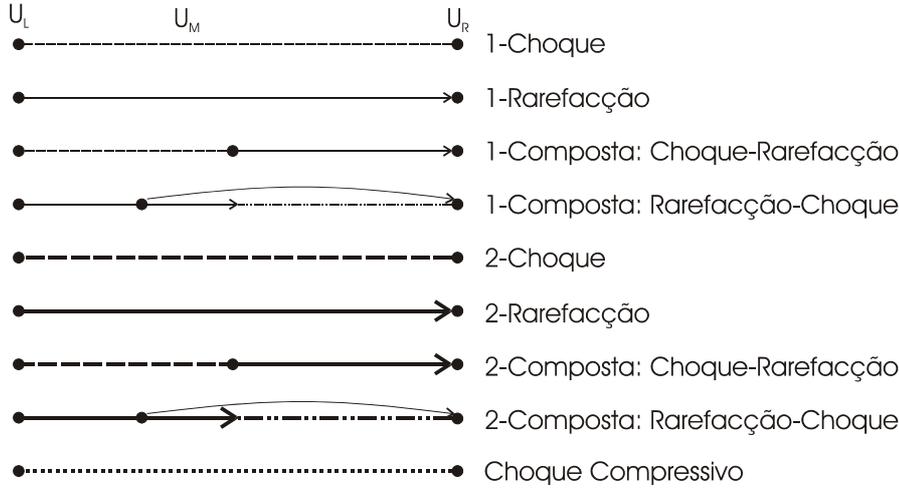


Figura 4.1: Convenção Gráfica das Figuras.

4.1 Soluções em \mathcal{L}_1

Recordemos as Gama-regiões que intersectam \mathcal{L}_1 , são elas $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_{8as}, \Gamma_{8a1}, \Gamma_{8a2}, \Gamma_{8ai}, \Gamma_{12}$ e Γ_{5ai} . Notamos que Γ_{8a} foi dividida em dois, Γ_{8a1} e Γ_{8a2} respectivamente acima e abaixo de \mathcal{J} . Ver Figura 4.2.

Nesta secção serão dadas todas as soluções estruturalmente estáveis encontradas na L-região \mathcal{L}_1 . Contudo apenas a primeira, correspondente a $U_L \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, será dada com detalhe. A segunda já será dada de forma mais breve, enquanto que para as restantes, dadas as semelhanças entre todas, apresentar-se-á apenas a figura com a solução completa. Mais, serão dadas também três soluções especiais, todas sobre a Bifurcação Secundária, sendo uma delas a solução para o ponto DRS .

4.1.1 Solução para $U_L \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$

1. Grupo de Ondas-1 (ver Figura 4.3):

- (a) À esquerda de U_L constrói-se naturalmente um 1-Choque até o infinito, $S_1(U_L)$;
- (b) À direita constrói-se uma 1-Rarefacção, $R_1(U_L)$, até $U_{M4} \in \mathcal{I}_1$ na fronteira entre Γ_{8a} e Γ_{8ai} ;

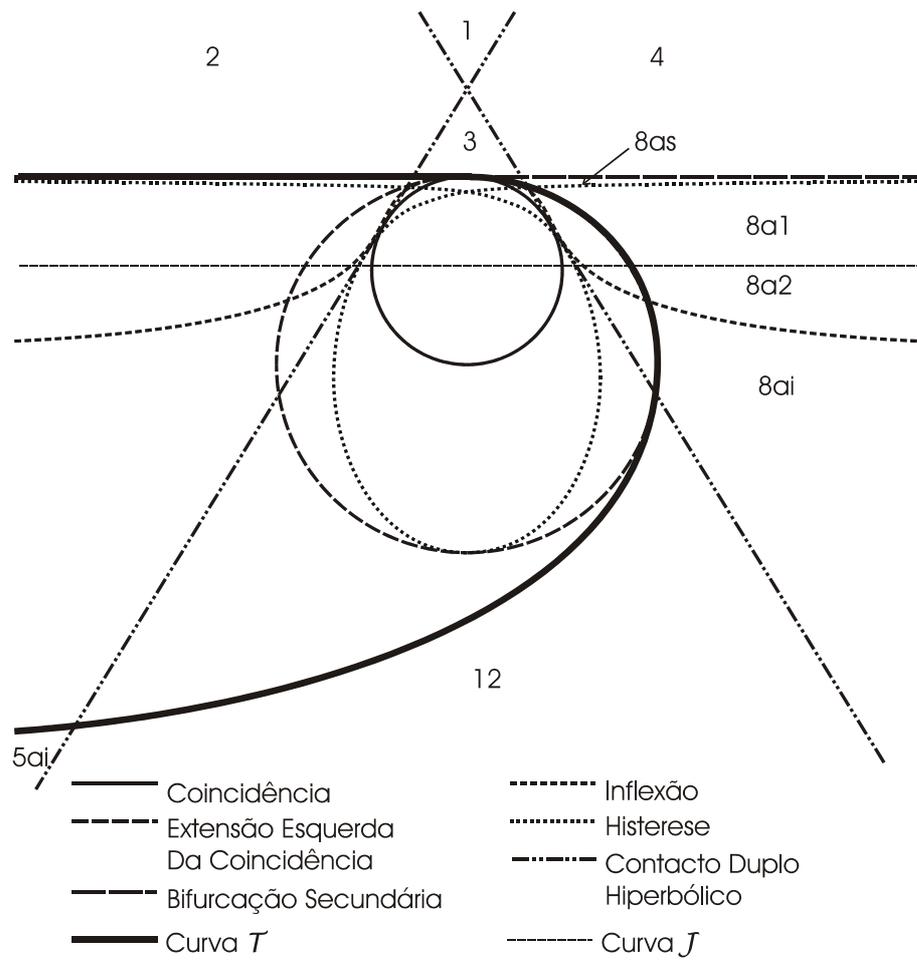


Figura 4.2: L-região \mathcal{L}_1 e as Gama-regiões que intersecta.

- (c) Inicia-se aí uma composta: 1-Rarefação de U_L até $U_{M3} \in R_1(U_L)$ e depois um 1-Choque Sónico à Esquerda de U_{M3} até $U_{M3}^{1S} \in R_1S_1(U_L)$; esta construção pára em $U_{M2} \in \mathcal{D}_{12}W$, onde há o colapso de U_{M2}^{1S} , U_{M2}^{1C} e U_{M2}^{S2} em U_{M2}^{1C2} - conforme a notação definida no início deste capítulo.

2. Grupo de Ondas-2 (ver Figura 4.4):

- (a) De U_K onde $K \in \{M5, L, M1, M2\}$ constrói-se para cima uma 2-Rarefação até o infinito; para baixo usa-se o sector $\mathcal{H}_{2S}(U_K)$ que termina em U_K^{S2} ; continua-se para baixo com uma 2-Rarefação até o infinito. No caso de U_{M2} sabemos que há o colapso de U_{M2}^{1S} , U_{M2}^{1C} e U_{M2}^{S2} em U_{M2}^{1C2} .
- (b) De U_K onde $K \in \{M3, M4\}$ constrói-se para a direita uma 2-Rarefação até o infinito; para a esquerda usa-se o sector $\mathcal{H}_{2S}(U_K)$ que termina em $U_K^{1C} \in R_1C(U_L)$;
- (c) De $U_{M3}^{1S} \in R_1S_1(U_L)$ constrói-se para a direita uma 2-Rarefação até o infinito; para a esquerda constrói-se um 2-Choque sobre sector $\mathcal{H}_{2S}(U_{M3}^{1S})$ até $U_{M3}^{1C} \in R_1C(U_L)$ onde ocorre um Choque Triplo tipo τ_c .

Para os $U_L \in (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \cap \mathcal{L}_1$ temos oito tipos de soluções Estruturalmente Estáveis, uma em cada R-região, P_i , do plano dividido pelas curvas da Figura 4.5 (as Estruturas de Codimensão-1 não devem ser consideradas nesta divisão do plano em R-regiões).

Em cada R-região as soluções são da forma:

1. P_1 : 1-Choque, 2-Rarefação;
2. P_2 : 1-Rarefação, 2-Rarefação;
3. P_3 : 1-Composta (1-Rarefação, 1-Choque), 2-Rarefação;
4. P_4 : 1-Rarefação, 2-Composta (2-Choque, 2-Rarefação);
5. P_5 : 1-Choque, 2-Composta (2-Choque, 2-Rarefação);
6. P_6 : 1-Choque, 2-Choque;
7. P_7 : 1-Rarefação, 2-Choque;
8. P_8 : 1-Composta (1-Rarefação, 1-Choque), 2-Choque.

4.1.2 Solução para $U_L \in \Gamma_3 \cup \Gamma_4$

A solução para este caso é praticamente idêntica à da subsecção anterior. Contudo há uma diferença, neste caso existe $\mathcal{H}_C(U_L)$ e este sector é utilizado na construção. Este facto leva ao aparecimento de um Choque Triplo que não aparecia para $U_L \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Na Figura 4.6 temos o Grupo de Ondas-1, na Figura 4.7 temos a solução global.

Para os $U_L \in \Gamma_3 \cap \Gamma_4$ temos nove tipos de soluções Estruturalmente Estáveis; uma em cada R-região, P_i , do plano dividido pelas curvas da Figura 4.8 (as Estruturas de Codimensão-1 não devem ser consideradas nesta divisão do plano).

Em cada R-região as soluções são da forma:

1. P_1 : 1-Choque, 2-Rarefação;
2. P_2 : 1-Rarefação, 2-Rarefação;
3. P_3 : 1-Composta (1-Rarefação, 1-Choque), 2-Rarefação;
4. P_4 : 1-Choque, 2-Rarefação;
5. P_5 : 1-Choque, 2-Composta (2-Choque, 2-Rarefação);

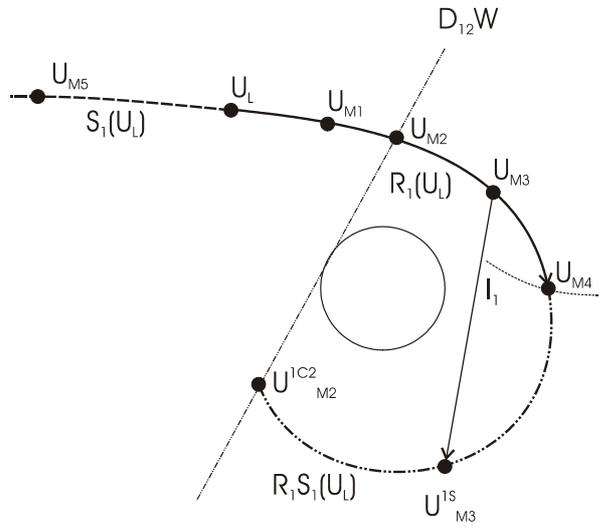


Figura 4.3: Grupo de Ondas-1 para $U_L \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

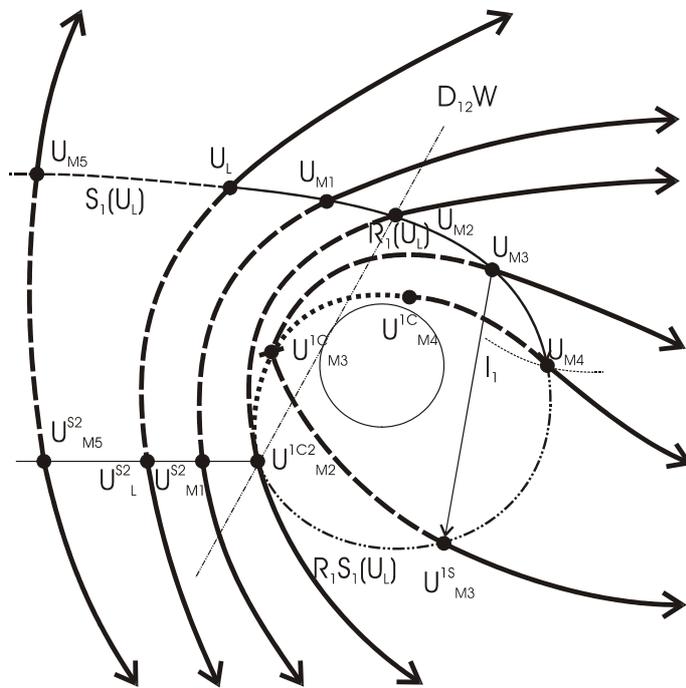


Figura 4.4: Solução Global para $U_L \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

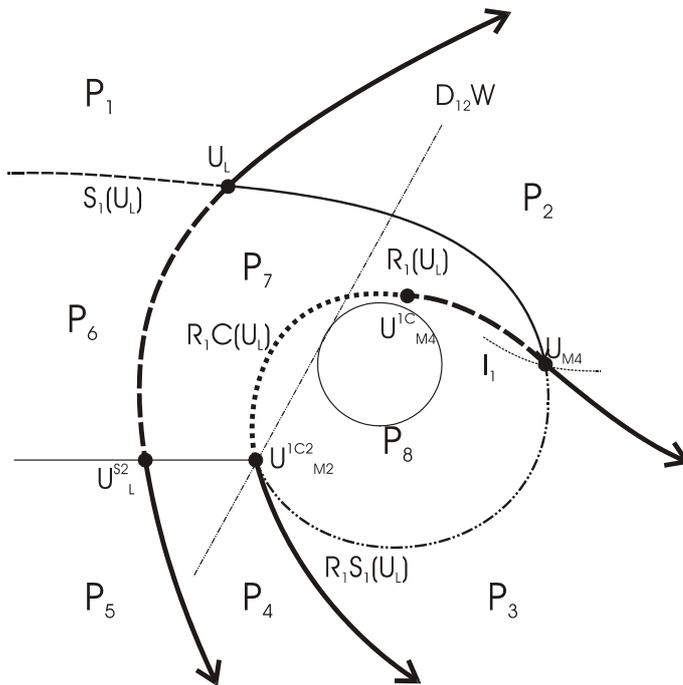


Figura 4.5: R-regiões para $U_L \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ (não consideramos C , $D_{12}W$ nem \mathcal{I}_2 na divisão do plano).

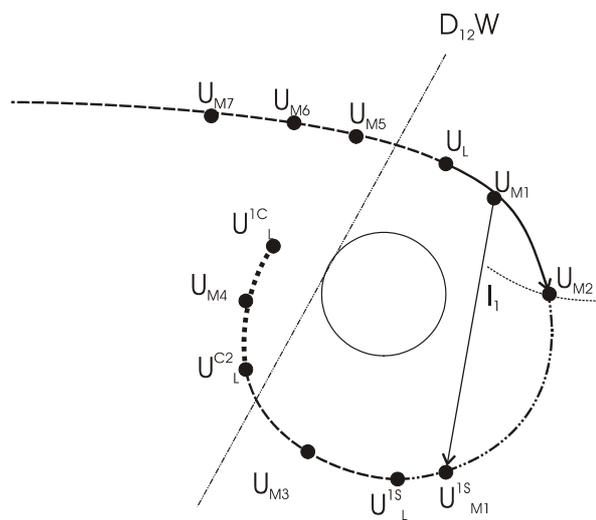


Figura 4.6: Grupo de Ondas-1 para $U_L \in \Gamma_3 \cup \Gamma_4$.

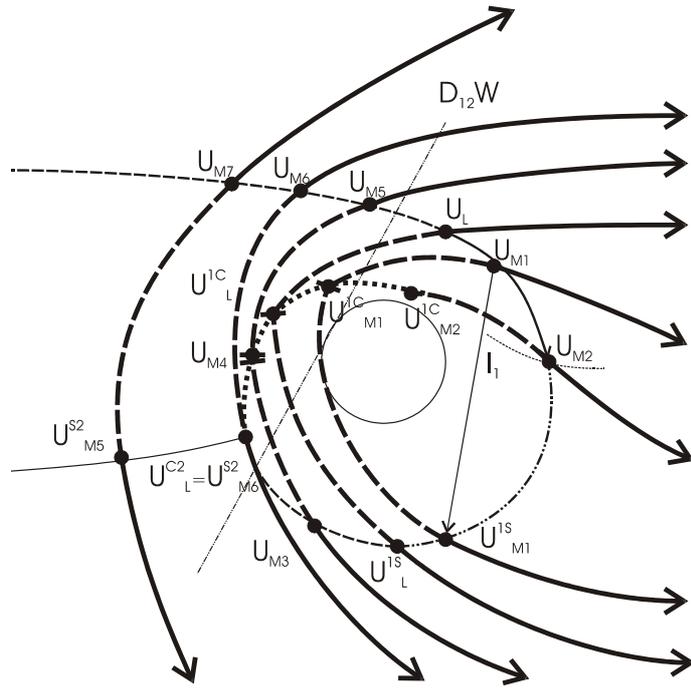


Figura 4.7: Solução Global para $U_L \in \Gamma_3 \cup \Gamma_4$.

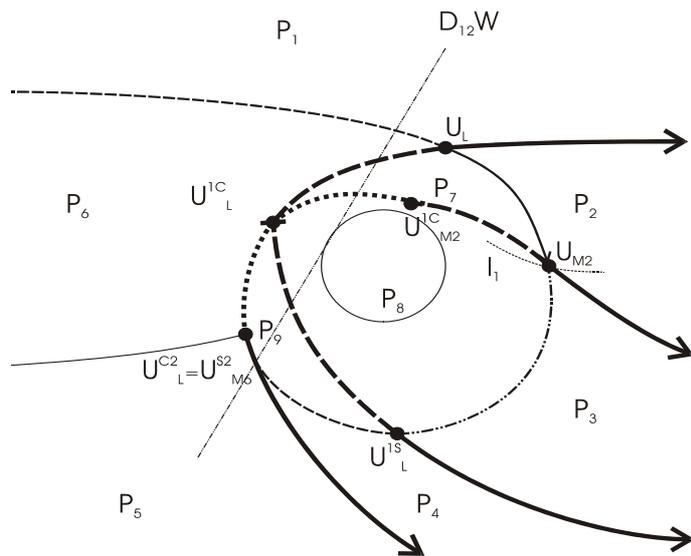


Figura 4.8: R-regiões para $U_L \in \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ (não consideramos \mathcal{C} , $\mathcal{D}_{12}W$ nem \mathcal{I}_2 na divisão do plano).

6. P_6 : 1-Choque, 2-Choque;
7. P_7 : 1-Rarefacção, 2-Choque;
8. P_8 : 1-Composta (1-Rarefacção, 1-Choque), 2-Choque;
9. P_9 : 1-Choque, 2-Choque;

4.1.3 Outras Soluções em \mathcal{L}_1

Das restantes soluções da L-região \mathcal{L}_1 será dada apenas a solução final, pois não aparece nenhum facto novo nas construções.

A solução para $U_L \in \mathcal{B}$ com $u_L > 0$ está esboçada na Figura 4.9; a solução para $U_L \in \Gamma_{8as}$ está esboçada na Figura 4.10; a solução para $U_L \in \Gamma_{8a1}$ está esboçada na Figura 4.11; a solução para $U_L \in \Gamma_{8a2}$ está esboçada na Figura 4.12; a solução para $U_L \in \Gamma_{8ai}$ está esboçada na Figura 4.13; finalmente a solução para $U_L \in (\Gamma_{5ai} \cup \Gamma_{12}) \cap \mathcal{L}_1$ está esboçada na Figura 4.14; neste último caso convém referir que a 1-Rarefacção que parte de U_L cruza o (1,2)-Contacto Duplo.

4.1.4 Solução para o Ponto DRS

A solução para o ponto DRS é muito similar às soluções na L-Região \mathcal{L}_1 , nomeadamente à solução na região Γ_3 . Por este facto dar-se-á apenas a descrição da solução global, ver Figura 4.15, e a Figura com as R-regiões, 4.16.

Enfatizamos que para U_L sobre o ponto DRS temos a solução para qualquer U_R . Então, claramente, também temos a solução para qualquer U_R na vizinhança do próprio ponto DRS . Apesar das semelhanças entre as soluções para $U_L \in \Gamma_3$ e $U_L = DRS$ existe uma diferença fundamental: para $U_L = DRS$ e U_R na vizinhança do ponto DRS não temos apenas ondas de pequena amplitude. Por exemplo, como veremos, tomando $U_R = (0, -\epsilon)$ -com um pequeno $\epsilon > 0$ - a solução consiste numa 1-Composta do ponto DRS até um ponto U_M próximo do ponto DRS' seguido de um 2-Choque de U_M até U_R . Fazendo ϵ tender a zero, isto é, fazendo U_R tender para o ponto DRS , então o ponto U_M tende para o ponto DRS' . Temos assim ondas de grande amplitude mesmo para Problemas de Riemann de pequena amplitude, em grande contraste com o que acontece para qualquer estado à esquerda situado na Região Estritamente Hiperbólica. Temos também que quando U_R tende para U_L a velocidade da onda entre U_L e U_M e a velocidade da onda entre U_M e U_R tendem ambas para zero, evidenciando assim a esperada continuidade \mathcal{L}_{loc}^1 .

Em cada R-região as soluções são da forma (ver Figuras 4.15 e 4.16):

1. P_1 : 1-Choque, 2-Rarefacção;
2. P_2 : 1-Rarefacção, 2-Rarefacção;
3. P_3 : 1-Composta (1-Rarefacção, 1-Choque), 2-Rarefacção;
4. P_4 : 1-Choque, 2-Rarefacção;
5. P_5 : 1-Choque, 2-Composta (2-Choque, 2-Rarefacção);
6. P_6 : 1-Choque, 2-Choque;
7. P_7 : 1-Rarefacção, 2-Choque;
8. P_8 : 1-Composta (1-Rarefacção, 1-Choque), 2-Choque;
9. P_9 : 1-Choque, 2-Choque;

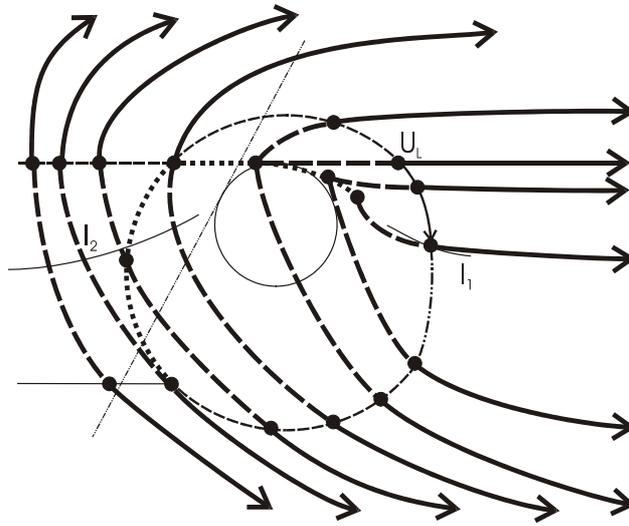


Figura 4.9: Solução Global para $U_L \in \mathcal{B}$ com $u_L > 0$.

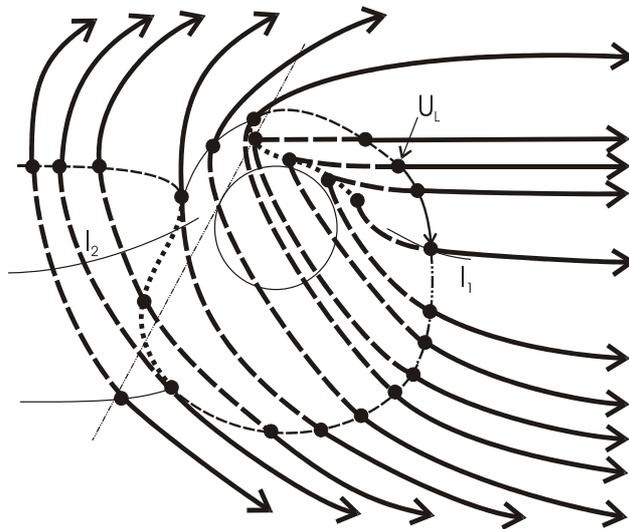


Figura 4.10: Solução Global para $U_L \in \Gamma_{8as}$.

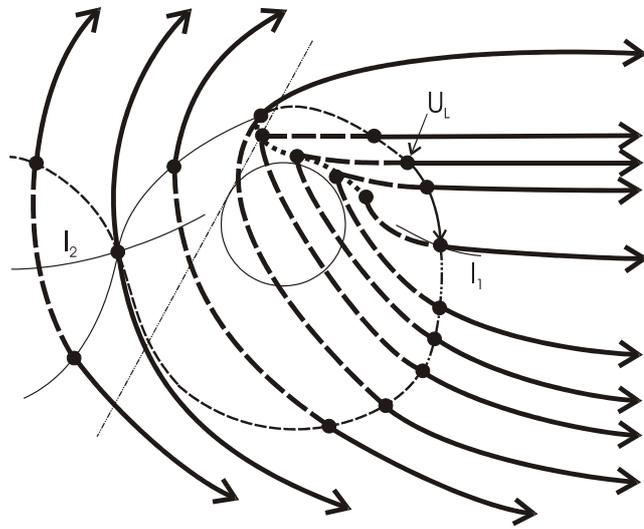


Figura 4.11: Solução Global para $U_L \in \Gamma_{8a1}$.

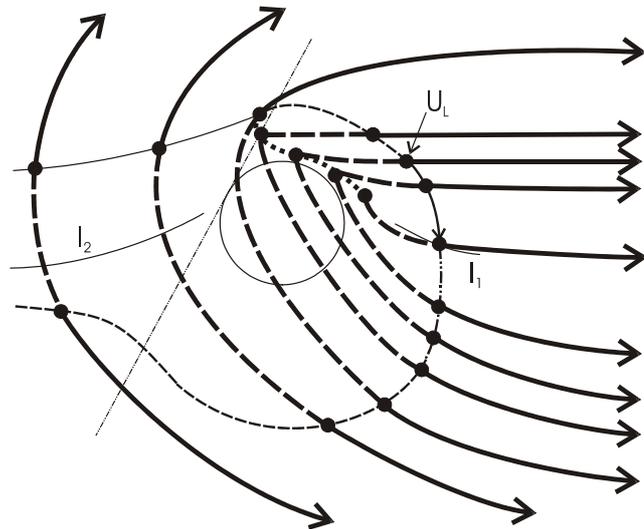


Figura 4.12: Solução Global para $U_L \in \Gamma_{8a2}$.

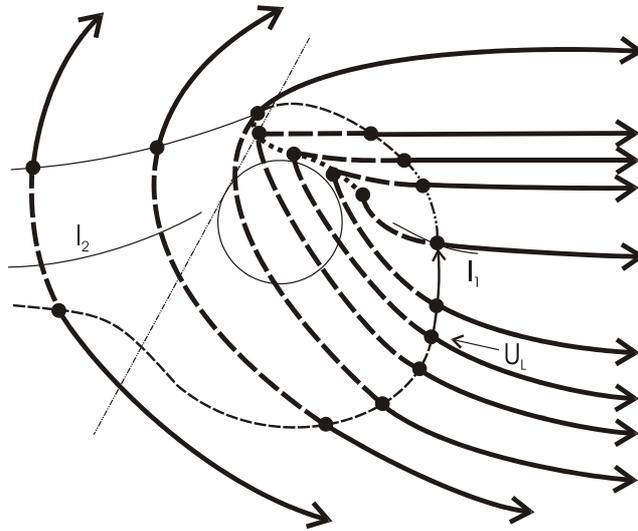


Figura 4.13: Solução Global para $U_L \in \Gamma_{8ai}$.

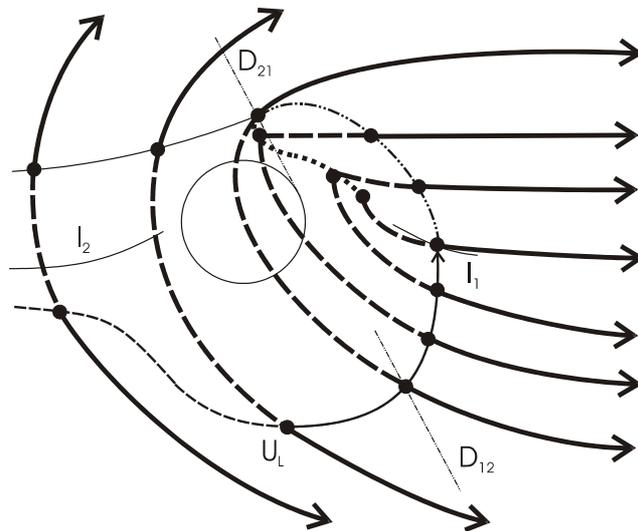


Figura 4.14: Solução Global para $U_L \in (\Gamma_{12} \cup \Gamma_{5ai}) \cap \mathcal{L}_1$.

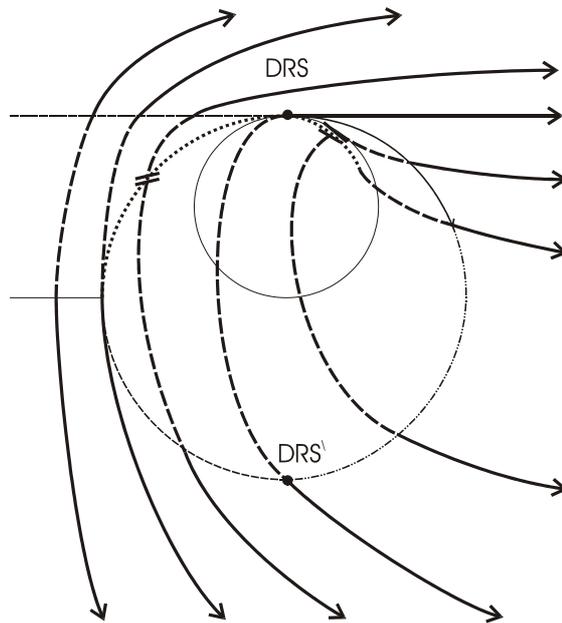


Figura 4.15: Solução Global para o DRS .

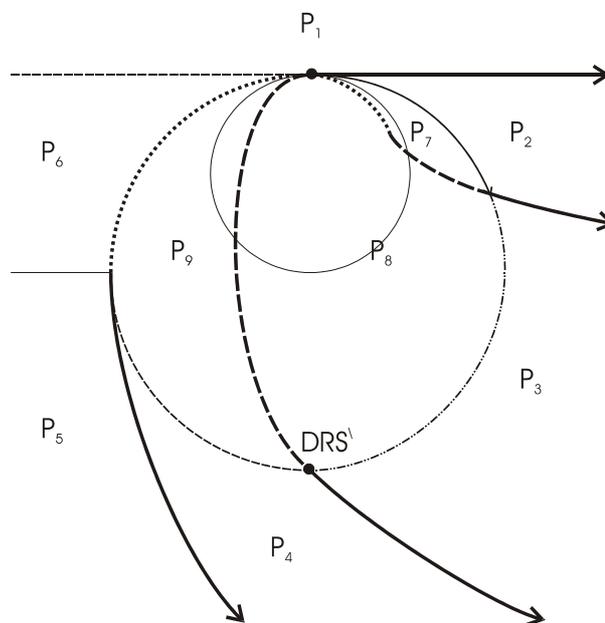


Figura 4.16: R-regiões do DRS (não consideramos a Coincidência na divisão do plano).

Suponhamos agora que se chega ao ponto DRS via uma 1 ou 2-Rarefação. Por Compatibilidade Geométrica temos acesso apenas a parte dos estados, aqueles cujas ondas têm velocidade não negativa. Logo não é mais possível utilizar $\mathcal{H}_{1S}(DRS)$ nem $\mathcal{H}_C(DRS)$. Assim após a 1 ou 2-Rarefação que passam pelo DRS só é possível aceder às R-regiões P_2, P_3, P_7 e P_8 , ver novamente a Figura 4.16. Em particular se o Grupo de Ondas-1 de um estado cruza a curva \mathcal{R} então é possível aceder a estas R-regiões pela Rarefação Transicional que passa no ponto DRS .

Conclusão 4.1 *Partindo de qualquer estado U_L na L-região \mathcal{L}_2 é possível aceder a qualquer U_R nas R-regiões P_2, P_3, P_7 e P_8 do ponto DRS via Rarefação Transicional. Mais, fixando U_R , numa daquelas R-regiões, as ondas de velocidade positiva são exactamente as mesmas independentemente da localização de U_L em \mathcal{L}_2 .*

As soluções dos Problema de Riemann normalmente exibem variações (não nulas) \mathcal{L}_{loc}^1 em relação a U_L . Pictoricamente as R-regiões adaptam-se à mudança de U_L de forma suave e de tal maneira que todas voltam a «encaixar». Contudo aqui observa-se este comportamento inusitado intimamente relacionado com a Rarefação Transicional.

4.1.5 Caso Fronteira entre \mathcal{L}_1 e \mathcal{L}_2

A fronteira entre \mathcal{L}_1 e \mathcal{L}_2 é constituída pela parte esquerda da Bifurcação Secundária, \mathcal{B} . Todavia, nesta subsecção, será tratado apenas o caso em que $U_L = (u_L < -\sqrt{3}/3, v_L = 0)$. Esta solução é apresentada para evidenciar a continuidade \mathcal{L}_{loc}^1 quando se passa da L-região \mathcal{L}_1 para a \mathcal{L}_2 .

O Grupo de Ondas-1 de U_L é constituído, em parte, pela própria fronteira entre \mathcal{L}_1 e \mathcal{L}_2 ; o conjunto de Rankine-Hugoniot de um estado $U_M = (u_M < 0, v_M = 0)$ é constituído pela recta $v = 0$ e pelo círculo de centro em $(-u_M, -2)$ e raio $2\sqrt{u_M^2 + 1}$; este conjunto bifurca em U_M (bifurcação primária) e em $(-3u_M, 0)$ (Bifurcação Secundária). É também fácil o cálculo dos Locais Sónicos, em particular dos seguintes:

Para $(-\sqrt{3}/3 < u_M < 0, v_M = 0)$:

- 1-Local Sónico à Esquerda para $u_R = 3u_M, v_R = -2 \pm 2\sqrt{1 - 3u_M^2}$ e $s = 3u_M$;
- 2-Local Sónico à Esquerda para $u_R = u_M, v_R = -4$ e $s = u_M$;
- 2-Local Sónico à Direita para $u_R = -u_M - 2\sqrt{u_M^2 + 1}, v_R = -2$ e $s = -u_M - 2\sqrt{u_M^2 + 1} = u_R$.

Para $(u_L < u_M < -\sqrt{3}/3, v_M = 0)$:

- 2-Local Sónico à Esquerda para $u_R = u_M, v_R = -4$ e $s = u_M$;
- 2-Local Sónico à Direita para $u_R = -u_M - 2\sqrt{u_M^2 + 1}, v_R = -2$ e $s = -u_M - 2\sqrt{u_M^2 + 1} = u_R$.

A solução final para estes estados é muito similar ao primeiro caso tratado ($U_L \in (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \cap \mathcal{L}_1$, subsecção 4.1.1) e foi esboçada na Figura 4.17.

Para esta solução vamos definir 12 L-regiões (ver Figura 4.18), quando apenas 8 são estritamente necessárias. Foi usada uma numeração não usual afim de facilitar a comparação com as soluções em \mathcal{L}_2 .

Em cada R-região as soluções são da forma:

1. P_1 : 1-Choque, 2-Rarefação;
2. P_2 : 1-Rarefação, 2-Rarefação;
3. P_3 : 1-Rarefação, 2-Choque;
4. P_{10} : 1-Choque, 2-Choque
5. P_{11} : 1-Choque, 2-Composta (2-Choque, 2-Rarefação);
6. P_{12} : 1-Rarefação, 2-Composta (2-Choque, 2-Rarefação);

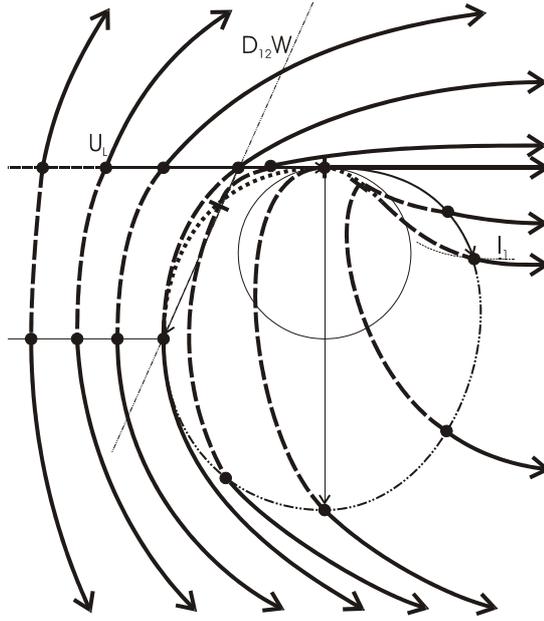


Figura 4.17: Solução Global para $U_L \in \mathcal{B}$ e $u_L < -\sqrt{3}/3$.

7. P_{13} : 1-Composta (1-Rarefação, 1-Choque), 2-Choque;
8. P_{15} : 1-Composta (1-Rarefação, 1-Choque), 2-Rarefação;
9. P_{17} : 1-Composta (1-Rarefação, 1-Choque), 2-Rarefação;
10. P_{18} : 1-Composta (1-Rarefação, 1-Choque), 2-Choque;
11. P_{19} : 1-Rarefação, 2-Choque;
12. P_{20} : 1-Rarefação, 2-Rarefação.

4.2 Soluções em \mathcal{L}_2

A classe de soluções da L-região \mathcal{L}_2 é muito extensa. Por este facto apresentaremos apenas duas soluções particulares, pois isto é suficiente para o que queremos mostrar. Ou seja, na construção das soluções será usado um 1-Choque Sónico à Esquerda; contudo no capítulo seguinte será mostrado que não existe Perfil Viscoso para esse choque. Mais, na parte de \mathcal{L}_2 que fica acima da Curva K esta bifurcação resulta na inexistência de solução com Perfil Viscoso.

A solução para $U_L \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{R}_H$ acima da Curva K (ver definição 3.9) será dada com bastante detalhe. Depois será feita uma análise do comportamento geral das soluções em \mathcal{L}_2 .

4.2.1 Uma Solução para $U_L \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{R}_H$ acima da Curva K

Tomemos $U_L \in \Gamma_{5a}$ de forma que a 1-Rarefação que sai de U_L toque \mathcal{C} na fronteira entre Γ_{6d} e Γ_{9d} não passando por nenhuma outra Gama-região 6 (ver Figura 4.19).

Na Figura 3.4 vemos as curvas de Rankine-Hugoniot referentes a todas Gamas-regiões, neste caso as mais relevantes são Γ_{5a} , Γ_{5b} , Γ_{5c} , Γ_{5d} , Γ_{6d} , Γ_{9d} , Γ_{9b} e Γ_{12e} .

Temos os seguintes passos na construção da solução (ver figura 4.21 e 4.22):

1. Grupo de Ondas-1:

- (a) À esquerda de U_L constrói-se naturalmente um 1-Choque até ao infinito, $S_1(U_L)$;
- (b) À direita constrói-se uma 1-Rarefação, $R_1(U_L)$, de U_L até \mathcal{C} ; passando por Γ_{5a} , \mathcal{E} , Γ_{5b} , \mathcal{R} , Γ_{5b} , $\mathcal{D}_{2e}\mathcal{C}$, Γ_{5c} , \mathcal{I}_2m , Γ_{5d} , $\mathcal{D}_{12}W$, Γ_{6d} e \mathcal{C} ;
- (c) Construção do segmento $R_1S_1(U_L)$:
 - i. Partindo dos estados $U_{M11} \in R_1(U_L) \cap R_{6d}$ constrói-se:
 - ii. Um 1-Choque Sónico à Esquerda entre U_{M11} e U_{M11}^{1S} (na Figura 4.21 há três sectas saindo de U_{M11} , deve ser acompanhada a secta do meio);
 - iii. Para estado $U_{M12} = R_1(U_L) \cap \mathcal{C}$ temos U_{M12}^{1S} colapsado com U_{M12}^{2T} resultando em $U_{M12}^{eS} \in \mathcal{E}$;
 - iv. No caso de $U_{M10} = R_1(U_L) \cap \mathcal{D}_{12}W$ em vez de um 1-Choque Sónico à Esquerda temos um Choque Duplamente Sónico de U_{M10} até $U_{M10}^{1C2} \in \mathcal{D}_{21}M$ - na bifurcação ocorre o colapso de U_{M10}^{S2} , U_{M10}^{1C} e U_{M10}^{1S} resultando em U_{M10}^{1C2} ;
 - v. Este segmento fica na região Γ_{12e} e os seus extremos são $U_{M12}^{eS} \in \mathcal{E}$ e $U_{M10}^{1C2} \in \mathcal{D}_{21}M$.

Nota 4.1 *Aqui temos um exemplo de uma Onda 1-Composta Rarefacção/Choque sem que Rarefacção intersecte a 1-Inflexão.*

2. Grupo de Cruzamento:

- (a) Partindo do ponto $U_{M4} = \mathcal{R} \cap R_1(U_L)$ é possível construir uma Rarefacção Transicional passando pelo ponto DRS e aceder a todos os estados descritos na secção anterior, inclusive o ponto DRS' , conforme a conclusão 4.1, ver Figura 4.22.
- (b) Construção do segmento $R_1R_2T(U_L)$:
 - i. Partindo dos estados U_{M5} de $R_1(U_L)$ entre \mathcal{R} e $\mathcal{D}_{2e}\mathcal{C}$ constrói-se o seguinte:
 - A. 2-Rarefação de U_{M5} até $U_{M51} \in \mathcal{I}_2$, $R_2(U_{M5})$;
 - B. Partindo dos estados U_{M52} de $R_2(U_{M5})$ em Γ_{5c} constrói-se uma composta com um 2-Choque Sónico à Esquerda de U_{M52} até U_{M52}^{2S} . Para o estado $U_{M53} = R_2(U_{M5}) \cap \mathcal{D}_{2e}\mathcal{C}$ temos um 2-Choque Uni-sesqui-sónico até $U_{M53}^{2Se} \in \mathcal{D}_{e2}M$;
 - C. Mais, partindo de U_{M53}^{2Se} efectua-se um 1-Choque Sesqui-sónico à Esquerda de U_{M53}^{2Se} até $(U_{M53}^{2Se})^{eS}$; de forma equivalente pode dizer-se que do estado U_{M53} construiu-se um Choque de Cruzamento Sónico à Esquerda entre U_{M53} e $U_{M53}^{2X} = (U_{M53}^{2Se})^{eS} \in R_1R_2T(U_L)$.
 - ii. O estado $U_{M6} = R_1(U_L) \cap \mathcal{D}_{2e}\mathcal{C}$ pode ser visto simultaneamente como um U_{M5} e como um U_{M53} , assim:
 - A. Partindo de U_{M6} constrói-se uma 2-Rarefação até $U_{M61} \in \mathcal{I}_2$;
 - B. Partindo dos estados U_{M62} de $R_2(U_{M6})$ em Γ_{5c} constrói-se uma composta com um 2-Choque Sónico à Esquerda de U_{M62} até U_{M62}^{2Se} . Para o estado U_{M6} temos $U_{M6}^{2Se} \in \mathcal{D}_{e2}M$;
 - C. Ainda na composta, partindo de U_{M6}^{2Se} efectua-se um 1-Choque Sesqui-sónico à Esquerda de U_{M6}^{2Se} até $(U_{M6}^{2Se})^{eS}$; de forma equivalente pode dizer-se que do estado U_{M6} construiu-se um Choque de Cruzamento Sónico à Esquerda entre U_{M6} e $U_{M6}^{2X} = (U_{M6}^{2Se})^{eS}$.
 - iii. Este segmento fica na região Γ_{12e} e os seus extremos são os pontos DRS' e U_{M6}^{2T} .
- (c) Construção do segmento $R_1T(U_L)$:
 - i. Para $U_{M7} \in \Gamma_{5c}$ constrói-se:
 - A. 2-Rarefação de U_{M7} até $U_{M71} \in \mathcal{I}_2$, $R_2(U_{M7})$;
 - B. Partindo dos estados $U_{M72} \in R_2(U_{M7})$ constrói-se uma composta com um 2-Choque Sónico à Esquerda de U_{M72} até U_{M72}^{2S} ;
 - C. Para o estado U_{M7} temos também um 2-Choque Sónico à Esquerda de U_{M7} até U_{M7}^{2S} ;

- D. Após U_{M7}^{2S} usa-se o sector $\mathcal{H}_{2S}(U_{M7})$ até U_{M7}^{Se} ;
- E. Continuando, partindo de U_{M7}^{Se} efectua-se um 1-Choque Sesqui-sónico à Esquerda de U_{M7}^{Se} até $(U_{M7}^{Se})^{eS}$; de forma equivalente pode dizer-se que do estado U_{M7} constrói-se um Choque de Cruzamento entre U_{M7} e $(U_{M7}^{Se})^{eS} = U_{M7}^X \in \mathcal{H}_X(U_{M7})$.
- ii. Para os estados $U_{M8} = R_1(U_L) \cap \mathcal{I}_2$, $U_{M9} \in R_1(U_L) \cap \Gamma_{5d}$, $U_{M10} = R_1(U_L) \cap \mathcal{D}_{12}W$ e $U_{M11} \in R_1(U_L) \cap \Gamma_{6d}$, doravante chamados genericamente de U_{Mi} :
 - A. Usa-se o sector $\mathcal{H}_{2S}(U_{Mi})$ até U_{Mi}^{Se} ;
 - B. Depois, partindo de U_{Mi}^{Se} efectua-se um 1-Choque Sesqui-sónico à Esquerda de U_{Mi}^{Se} até $(U_{Mi}^{Se})^{eS}$; de forma equivalente pode dizer-se que do estado U_{Mi} constrói-se um Choque de Cruzamento entre U_{Mi} e $(U_{Mi}^{Se})^{eS} = U_{Mi}^X \in \mathcal{H}_X(U_{Mi})$.
- iii. Para $U_{M12} = R_1(U_L) \cap \mathcal{C}$ faz-se simplesmente o 1-Choque Sesqui-sónico à Esquerda de U_{M12} ($= U_{M12}^{Se}$) até $U_{M12}^{eS} \in \mathcal{E}$ que resulta do colapso entre U_{M12}^{2T} e U_{M12}^{1S} ;
- iv. Este segmento tem por extremos os estados U_{M6}^{2T} e U_{M12}^{eS} e localiza-se na região Γ_{12e} .

3. Grupo de Ondas-2:

- (a) Para os estados $U_{M1} \in S_1(U_L)$ e também para os estados U_{M2} e U_{M3} em $R_1(U_L)$ até \mathcal{R} (referidos abaixo como U_{Mi}):
 - i. Partindo de U_{Mi} constrói-se uma 2-Rarefação para cima até o infinito;
 - ii. Para baixo usa-se o sector $\mathcal{H}_{2S}(U_{Mi})$ que termina em U_{Mi}^{S2} ;
 - iii. Após U_{Mi}^{S2} usa-se uma composta, 2-Choque entre U_{Mi} e U_{Mi}^{S2} seguido de uma 2-Rarefação de U_{Mi}^{S2} até o infinito.
- (b) Para os estados U_{M4} , U_{M5} , U_{M6} e U_{M8} em $R_1(U_L)$ entre \mathcal{R} e \mathcal{I}_2m (de forma análoga uso U_{Mi}):
 - i. Usa-se o sector $\mathcal{H}_{2S}(U_{Mi})$ que termina em U_{Mi}^{S2} ;
 - ii. Após U_{Mi}^{S2} usa-se uma composta, 2-Choque entre U_{Mi} e U_{Mi}^{S2} seguido de uma 2-Rarefação de U_{Mi}^{S2} até o infinito.
 - iii. Notar que o estado $U_{M8} \in R_1(U_L) \cap \mathcal{I}_2m$ é especial pois para baixo também se usa, à semelhança do que aconteceu no Grupo de Cruzamento, o sector $\mathcal{H}_{2S}(U_{M8})$; $\mathcal{H}(U_{M8})$, na vizinhança de U_{M8} , não tem a forma típica da Região Estritamente Hiperbólica, pois não temos nenhum ramo de 2-Expansivo na Bifurcação Primária.
- (c) Para os estados $U_{M9} \in R_1(U_L) \cap \Gamma_{5d}$:
 - i. Constrói-se para baixo uma 2-Rarefação até $U_{M91} \in \mathcal{I}_2$;
 - ii. Continua-se com uma composta até U_{M9}^{2S} ;
 - iii. Depois de U_{M9}^{2S} usa-se $\mathcal{H}_{2S}(U_{M9})$ até U_{M9}^{S2} ;
 - iv. Para baixo continua-se com uma 2-Rarefação de U_{M9}^{S2} até o infinito.
- (d) Partindo de um $U_{M10} \in R_1(U_L) \cap \mathcal{D}_{12}W$:
 - i. Constrói-se para baixo uma 2-Rarefação até $U_{M101} \in \mathcal{I}_2$;
 - ii. Continua-se com uma composta até U_{M10}^{2S} ;
 - iii. Depois de U_{M10}^{2S} usa-se $\mathcal{H}_{2S}(U_{M10})$ até U_{M10}^{1C2} - aqui ocorre o colapso de U_{M2}^{S2} , U_{M11}^{1C} e U_{M2}^{1S} resultando em U_{M2}^{1C2} ;
 - iv. Por fim faz-se uma 2-Rarefação de U_{M2}^{1C2} até o infinito;
- (e) Partindo de um $U_{M11} \in R_1(U_L) \cap \Gamma_{6d}$:
 - i. Constrói-se para baixo uma 2-Rarefação até $U_{M111} \in \mathcal{I}_2$;
 - ii. Continua-se com uma composta até U_{M11}^{2S} ;
 - iii. Depois de U_{M11}^{2S} usa-se $\mathcal{H}_{2S}(U_{M11})$ até U_{M11}^{1C} , aqui pára-se a construção pois $s(U_{M11}, U_{M11}^{1C}) = \lambda(U_{M11})$, isto é, estamos na presença de um Choque tipo ρ .
- (f) Partindo de um $U_{M12} \in R_1(U_L) \cap \mathcal{C}$;

- i. Constrói-se para baixo uma 2-Rarefaacção até $U_{M121} \in \mathcal{I}_2$;
 - ii. Continua-se com uma composta até U_{M12}^{eC} que resulta do colapso de U_{M12}^{2S} e U_{M12}^{1C} , aqui pára-se a construção pois estamos na presença de um Choque tipo ρ .
- (g) Partindo dos estados $U_{M11}^{1S} \in R_1S_1(U_L)$:
- i. Desce-se com uma 2-Rarefaacção de U_{M11}^{1S} até o infinito;
- Nota 4.2** *No extremo direito de $R_1S_1(U_L)$ está U_{M12}^{1S} . A generalização do Grupo de Ondas-2 referida antes da definição da Curva K (ver secção 3.4) basea-se na identificação do Grupo de Ondas-2 de U_{M12}^{1S} com o Grupo de Ondas-2 do próprio U_{M12} . Assim podemos dizer que o Grupo de Ondas-2 que parte U_{M12} passa à esquerda do ponto DRS' .*
- ii. Para cima usa-se o sector $\mathcal{H}_{2S}(U_{M11}^{1S})$ até se obter um Choque Triplo do tipo τ_e com o estado U_{M11}^{1C} .
- (h) Partindo dos estados $U_{Mi}^X \in R_1T(U_L)$ com $i \in \{7, 8, 9, 10, 11\}$:
- i. Desce-se com uma 2-Rarefaacção de U_{Mi}^X até o infinito;
 - ii. Para cima usa-se o sector $\mathcal{H}_{2S}(U_{Mi}^X)$ até se obter um Choque Triplo do tipo τ_e com o estado $(U_{Mi}^{Se})^{eC} \in \mathcal{H}_{2S}(U_{Mi})$; existe portanto um Choque Quádruplo entre U_{Mi} , U_{Mi}^{Se} , U_{Mi}^X e $(U_{Mi}^{Se})^{eC}$ (ou seja, a velocidade é a mesma nos seis choques entre cada par de estados) entre ver Figuras 4.20 e 4.22;
- (i) Partindo dos estados $U_{Mi}^{2T} \in R_1R_2T(U_L)$, com $i \in \{6, 53\}$:
- i. Desce-se com uma 2-Rarefaacção de U_{Mi}^{2T} até o infinito;
 - ii. Para cima usa-se o sector $\mathcal{H}_{2S}(U_{Mi}^{2T}) = \mathcal{H}_{2S}((U_{Mi}^{2Se})^{eS})$ até se obter um Choque Triplo do tipo τ_d (degenerado) com o estado $(U_{Mi}^{Se})^{eC2} = U_{Mi} \in \mathcal{D}_{2e}C$, ver Figura 4.22.

Para este caso específico de $U_L \in \mathcal{L}_2$ temos vinte R-regiões, P_i . Na Figura 4.23 temos essas vinte R-regiões esboçadas.

Há R-regiões com duas soluções distintas. Seguem as sequências de ondas para cada R-região, ver Figura 4.23.

1. P_1 : 1-Choque, 2-Rarefaacção;
2. P_2 : 1-Rarefaacção, 2-Rarefaacção;
3. P_3 :
 - (a) 1-Rarefaacção, 2-Rarefaacção;
 - (b) 1-Rarefaacção, 2-Composta (2-Rarefaacção, 2-Choque), 1-Choque Sesqui-sónico, 2-Choque;
4. P_4 :
 - (a) 1-Rarefaacção, 2-Composta (2-Rarefaacção, 2-Choque);
 - (b) 1-Rarefaacção, 2-Composta (2-Rarefaacção, 2-Choque), 1-Choque Sesqui-sónico, 2-Choque;
5. P_5 :
 - (a) 1-Rarefaacção, 2-Choque;
 - (b) 1-Rarefaacção, 2-Composta (2-Rarefaacção, 2-Choque), 1-Choque Sesqui-sónico, 2-Choque;
6. P_6 :
 - (a) 1-Rarefaacção, 2-Rarefaacção;
 - (b) 1-Rarefaacção, 2-Composta (2-Rarefaacção, 2-Choque), 1-Choque Sesqui-sónico, 2-Choque;
7. P_7 :

- (a) 1-Rarefação, 2-Composta (2-Rarefação, 2-Choque);
 - (b) 1-Rarefação, 2-Composta (2-Rarefação, 2-Choque), 1-Choque Sesqui-sônico, 2-Choque;
8. P_8 :
- (a) 1-Rarefação, 2-Choque;
 - (b) 1-Rarefação, 2-Composta (2-Rarefação, 2-Choque), 1-Choque Sesqui-sônico, 2-Choque;
9. P_9 : 1-Rarefação, 2-Choque;
10. P_{10} : 1-Choque, 2-Choque;
11. P_{11} : 1-Choque, 2-Composta (2-Choque, 2-Rarefação);
12. P_{12} : 1-Rarefação, 2-Composta (2-Choque, 2-Rarefação);
13. P_{13} : 1-Composta (1-Rarefação, 1-Choque), 2-Choque;
14. P_{14} : 1-Rarefação, 2-Composta (2-Rarefação, 2-Choque), 1-Choque Sesqui-sônico, 2-Choque;
15. P_{15} : 1-Composta (1-Rarefação, 1-Choque), 2-Rarefação;
16. P_{16} : 1-Rarefação, 2-Composta (2-Rarefação, 2-Choque), 1-Choque Sesqui-sônico, 2-Rarefação;
17. P_{17} : 1-Rarefação, 2-Rarefação, 1-Composta (1-Rarefação, 1-Choque), 2-Rarefação;
18. P_{18} : 1-Rarefação, 2-Rarefação, 1-Composta (1-Rarefação, 1-Choque), 2-Choque;
19. P_{19} : 1-Rarefação, 2-Rarefação, 1-Rarefação, 2-Choque;
20. P_{20} : 1-Rarefação, 2-Rarefação, 1-Rarefação, 2-Rarefação;

Os segmentos $R_1S_1(U_L)$, $R_1R_2T(U_L)$ e $R_1T(U_L)$ formam uma estrutura contínua com um extremo no ponto DRS' . Existe assim uma colagem com as soluções provenientes da Rarefação Transicional, obtendo-se uma solução completa para este $U_L \in \Gamma_{5a}$. A priori será lícito esperar a existência de Perfil Viscoso para os 1-Choques Sesqui-sônicos à Esquerda com os quais se construiu o segmento $R_1R_2T(U_L)$.

Comparando esta solução com dada na subsecção 4.1.5 fica notória a naturalidade da construção da 1-Composta para a qual a 1-Rarefação não chega à Inflexão. Mais, o Grupo de Ondas-1 é dividido em três partes quando U_L passa da L-região \mathcal{L}_1 para a L-região \mathcal{L}_2 , uma separação dá-se no ponto DRS e a outra no ponto DRS' .

4.2.2 Descrição geral das soluções em \mathcal{L}_2

Na L-região \mathcal{L}_2 , por definição, o Grupo de Ondas-1 de um estado U_L cruza a curva \mathcal{R} e portanto, como concluído em 4.1, chega-se ao ponto DRS via 2-Rarefação. Existem também 2-Rarefações que cruzam o Contacto Duplo Heterogéneo $\mathcal{D}_{2e}C$, estas encontram-se imeditamente à direita da Rarefação Transicional. É então possível repetir a construção feita na subsecção anterior com os 2-Choques Unisesqui-sônicos entrando dentro da Região Elíptica; seguidamente usar os 1-Choques Sesqui-sônicos à Esquerda obtendo-se o Grupo de Cruzamento que aparece na subsecção anterior.

Se U_L estiver acima da Curva K então existem R-regiões à esquerda do ponto DRS' para os quais a única solução advém da sucessão das ondas 2-Choques Unisesqui-sônicos e 1-Choques Sesqui-sônicos à Esquerda. Caso U_L se localize abaixo da Curva K então existe sobreposição de R-regiões.

4.3 Soluções em \mathcal{L}_3

As soluções em \mathcal{L}_3 são incompletas, ou seja, existem R-regiões sem solução encontrada. Como foi dito as soluções nesta L-região tem duas características fundamentais: o Grupo de Ondas-1 termina na Coincidência e não existe Rarefacção Transicional.

No exemplo dado nesta secção a 1-Rarefacção cruza o Contacto Duplo Hiperbólico no sector $\mathcal{D}_{11}M$. Na Figura 4.24 está esboçada a solução para um estado na Gama-região Γ_{12} .

Seguem as sequências de ondas para cada R-região, ver Figura 4.25.

1. P_1 : 1-Choque, 2-Composta (2-Choque, 2-Rarefacção);
2. P_2 : 1-Rarefacção, 2-Composta (2-Choque, 2-Rarefacção);
3. P_3 : **R-região sem solução;**
4. P_4 : 1-Composta (1-Rarefacção, 1-Choque, 1-Rarefacção), 2-Choque;
5. P_5 : 1-Choque, 2-Choque;
6. P_6 : 1-Rarefacção, 2-Choque;
7. P_7 : 1-Composta (1-Rarefacção, 1-Choque), 2-Choque;
8. P_8 : 1-Composta (1-Rarefacção, 1-Choque, 1-Rarefacção), 2-Rarefacção;
9. P_9 : 1-Composta (1-Rarefacção, 1-Choque), 2-Rarefacção;
10. P_{10} : 1-Choque, 2-Rarefacção;
11. P_{11} : 1-Rarefacção, 2-Rarefacção.

No capítulo 6 serão comentados os experimentos numéricos realizados para a R-região P_3 . Surpreendentemente, apesar da inexistência de solução de Riemann, foi observada uma solução que perdurou por longos períodos de tempo.

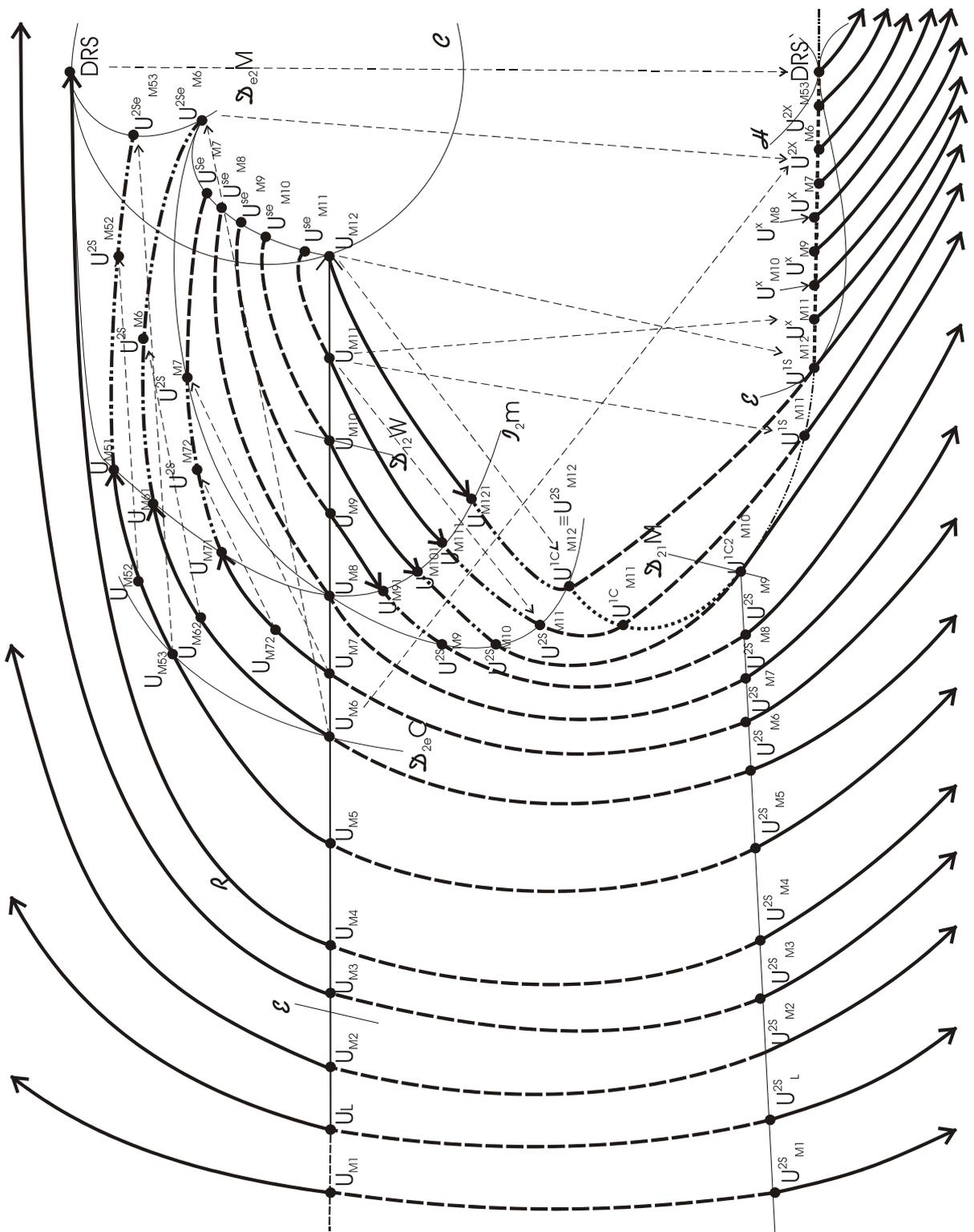


Figura 4.21: Solução Parcial (I) para $U_L \in \Gamma_{5a}$.

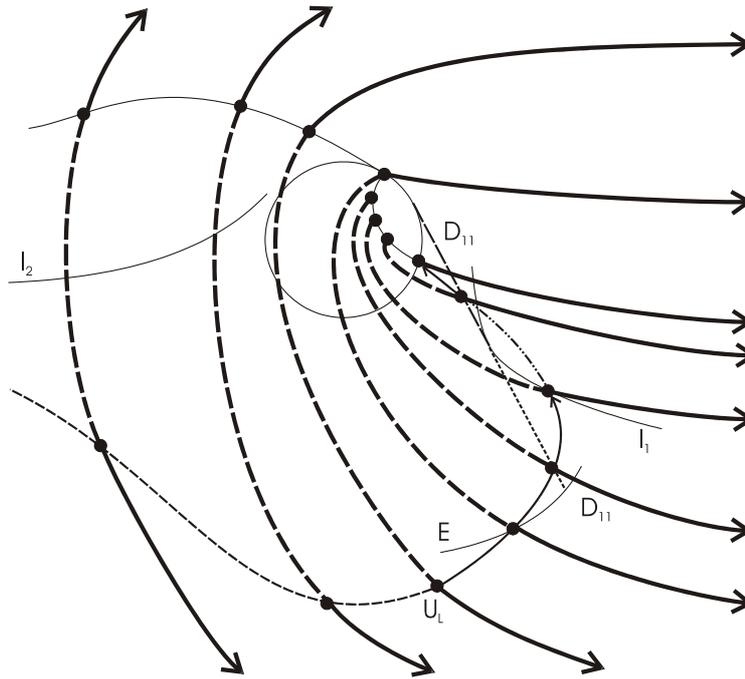


Figura 4.24: Solução Incompleta para $U_L \in \Gamma_{12} \cap \mathcal{L}_3$.

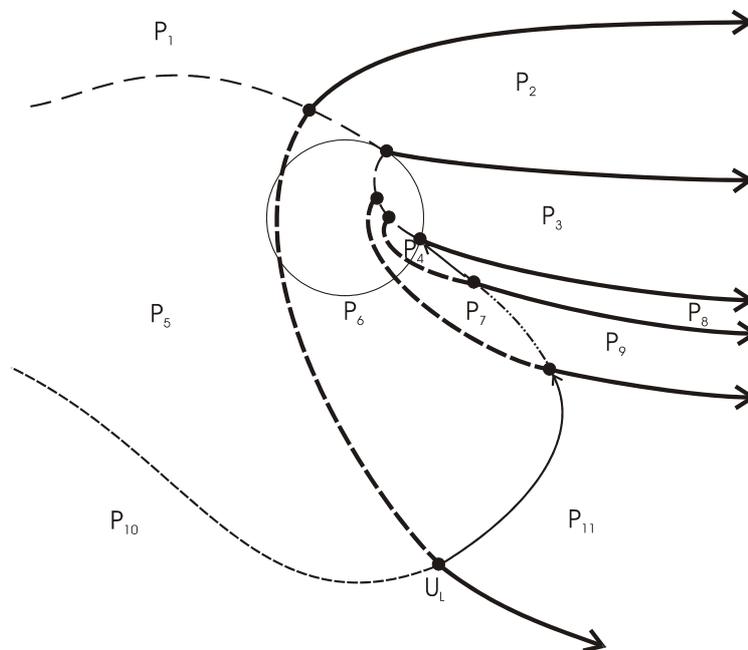


Figura 4.25: R-regiões para $U_L \in \Gamma_{12} \cap \mathcal{L}_3$ (não consideramos a Coincidência na divisão do plano).

Capítulo 5

Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias Associado ao Modelo Específico

Na primeira secção deste capítulo são estudados pontos de equilíbrio dos Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias Associados (sistema de equações (2.11)) aos Choques encontrados neste modelo.

Na segunda secção é estudada a bifurcação de Hopf que ocorre no Modelo Específico (ver fluxo (3.1)). No apêndice C estão enunciados os teoremas e definições necessárias para se obter o teorema 5.1, fundamental nesta tese e assunto deste capítulo.

Estabelecida a bifurcação de Hopf, são estudadas as implicações que esta tem na existência de Perfil Viscoso das soluções encontradas. Em especial, são estudados os Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias Associados ao 1-Choque Sesqui-sónico à Esquerda utilizado para construir a solução na L-região \mathcal{L}_2 acima da Curva K . Devido ao teorema 5.1 conclui-se a inexistência de Perfil Viscoso para este Choque, o que implica a inexistência de solução do problema de Riemann.

Os retratos de fase de diversos Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias Associados dados neste Capítulo foram obtidos pelo cruzamento de informações teóricas e numéricas, tendo sido estas últimas obtidas usando sobretudo o programa [14].

5.1 Pontos de Equilíbrio

O número de pontos de equilíbrio das Equações Diferenciais Associadas para fluxos quadráticos é menor ou igual a quatro, este é um resultado conhecido (ver, por exemplo, [2]).

De forma alternativa, utilizando as secções 2.7 e 3.3, conclui-se também que no máximo serão encontradas quatro pontos de equilíbrio neste modelo. Para obter esta conclusão basta observar que qualquer que seja o U_L escolhido temos que o seu conjunto de Rankine-Hugoniot contém, no máximo, quatro sectores da mesma Classe Esquerda (Definição 2.68). Mais, quando são encontrados quatro sectores da mesma Classe Esquerda uma das transições faz-se entre um sector de Classe Direita A (Definição 2.69) e outro de Classe Direita R , logo dentro da Região Elíptica. Assim todas as Classes têm Índice (Definição 2.70) igual ou inferior a três, o que faz com que o máximo de pontos de equilíbrio permaneça em quatro.

Contudo usando o método descrito na secção 2.7 é possível, por vezes, concluir um pouco mais. Tomemos, por exemplo, U_L na Gama região Γ_2 ; a sucessão de sectores é (1-Choque, U_L , 1-Expansivo, Expansivo, 2-Expansivo, Cruzado, 2-Choque, U_L , 2-Expansivo) que equivale à sucessão de Classes (RS , SR , AR , AS , SS , SA , AS). Podemos concluir que o Índice da Classe Esquerda R é 1, logo o número máximo de pontos de equilíbrio é 2, ou seja, tomando U_R no sector 1-Choque de U_L sabemos que temos apenas U_L e U_R como pontos de equilíbrio. Sabemos também que a U_L está associada um Repulsor e a U_R uma Sela.

Para exemplificar o caso da existência de quadro sectores com a mesma Classe Esquerda e mesmo assim apenas existem quatro equilíbrios tomemos U_L na Gama região Γ_{7b} . A sucessão de sectores é (1-Choque, Cruzado, 2-Expansivo, Expansivo, 1-Expansivo, U_L , 1-Choque, Transporte à Direita, Compressivo, 2-Choque, U_L , 2-Expansivo) que equivale à sucessão de Classes ($RS, SS, AS, AR, SR, RS, RR, RA, SA, AS$). Tomando U_R no sector 1-Choque, temos então um Choque da Classe Esquerda R . Calculemos o Índice $\omega(R)$: existem quadro sectores de Classe Esquerda R ; notamos que temos uma transição entre um sector de Classe Direita A e um de Classe Direita R , logo esta transição ocorre na Região Elíptica e portanto a velocidade do Choque não é crítica na transição. Resulta assim que $\omega(R) = 3$, então também aqui temos um máximo de quatro equilíbrios.

Tomemos s de tal forma que U_R esteja no sector 1-Choque de U_L . Escolhendo uma velocidade suficientemente baixa existirão apenas os pontos de equilíbrio associados a U_L , um Repulsor, e a U_R , uma Sela. Contudo para velocidades maiores de um 1-Choque podem aparecer pontos de equilíbrio nos outros sectores de Classe Esquerda R , nomeadamente, outra Sela para um equilíbrio no outro sector 1-Choque e um Atrator, ou uma Repulsor, para um equilíbrio, respectivamente, no sector Compressivo ou no sector Transporte à Direita.

Sabemos que o Contacto Duplo Heterogéneo é importante para esta tese. Tomemos então U_L sobre $\mathcal{D}_{2e}C$ (motivados pela construção da Secção 4.2.1 escrevemos $U_L = U_{M53}$), a sucessão de sectores é (1-Choque, U_L , 1-Expansivo, Transporte à Esquerda, 2-Expansivo, U_L , 2-Choque, Cruzado, 2-Expansivo) que equivale à sucessão de Classes ($RS, SR, AA, AS, SA, SS, AS$). Vamos centrar a nossa atenção em valores da velocidade próximos da velocidade do Contacto Duplo, isto é, $\lambda_2(U_L)$. Para $s = \lambda_2(U_L)$, ver Figura 5.1, existem apenas três pontos de equilíbrio, $U_L = U_{M53}$, U_{M53}^{2Se} e U_{M53}^{2X} . Os equilíbrios sobre o Contacto Duplo Heterogéneo são degenerados, $U_L = U_{M53}$ é uma Sela-atractor e U_{M53}^{2Se} um Atrator não hiperbólico; sobre o sector de Cruzamento temos uma Sela, U_{M53}^{2X} . Para s um pouco superior a $\lambda_2(U_L)$, ver Figura 5.2, existem quatro pontos de equilíbrio, o próprio $U_L = U_{M53}$ e outros três nos sectores de Classe Esquerda A , U_{R1} , U_{R2} e U_{R3} . Temos $U_L = U_{M53}$ um Atrator, os dois equilíbrios sobre o sector 2-Expansivo são Selas, U_{R2} e U_{R3} , e o equilíbrio no sector Transporte à Esquerda, dentro da Região Elíptica, que é também Atrator, U_{R1} . Para s um pouco inferior a $\lambda_2(U_L)$, ver Figura 5.3, existem também quatro pontos de equilíbrio, o próprio $U_L = U_{M53}$, e outros três nos sectores de Classe Esquerda S , U_{R4} , U_{R5} e U_{R6} . Temos $U_L = U_{R53}$ uma Sela, um Atrator sobre o sector 2-Choque, U_{R5} , uma Sela no sector de Cruzamento, U_{R6} , e dentro da Região Elíptica um Repulsor, U_{R4} , sobre o sector 1-Expansivo.

5.2 Bifurcação de Hopf do Modelo

Lema 5.1 *Considere um sistema de duas Leis de Conservação (2.1) com Região Elíptica e o problema de Riemann (2.2). Tomemos U_L na Região Elíptica, $s = \text{Re}(\lambda_e(U_L)) = s^*$ e o Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias Associado a (U_L, s^*) . Então os pontos de equilíbrio (que não o próprio U_L) situam-se, genericamente (a menos que U_L esteja sobre o Contacto Duplo Elíptico-hiperbólico), sobre as fronteiras entre os seguintes sectores de U_L :*

- Compressivo e Transporte à Esquerda, ou
- 1-Choque e 2-Expansivo, ou
- Expansivo e Transporte à Direita.

Prova. Tomemos um equilíbrio $U_R \in \mathcal{R}_H$ do Sistema Associado a (U_L, s^*) . Genericamente ($U_L \notin \mathcal{D}_{e1} \cup \mathcal{D}_{e2}$) a velocidade s^* é distinta dos autovalores de U_R , então, pelo Teorema de Bethe-Wendroff (2.1), s não é crítica em U_R . Assim próximo de U_R temos estados para os quais $s < s^*$, logo temos um sector de Classe Esquerda R , e estados para os quais $s > s^*$, logo temos um sector de Classe Esquerda A . Sabendo que não estamos sobre um contacto duplo nenhuma característica de U_R é sónica, logo basta usar as relações possíveis entre s e os autovalores de U_R para obter as fronteiras:

- se $\lambda_1(U_R) < \lambda_2(U_R) < s^*$ então a transição é $s < s^*, \mathcal{H}_C \leftrightarrow \mathcal{H}_{TE}, s > s^*$;
- se $\lambda_1(U_R) < s^* < \lambda_2(U_R)$ então a transição é $s < s^*, \mathcal{H}_{1S} \leftrightarrow \mathcal{H}_{2E}, s > s^*$;

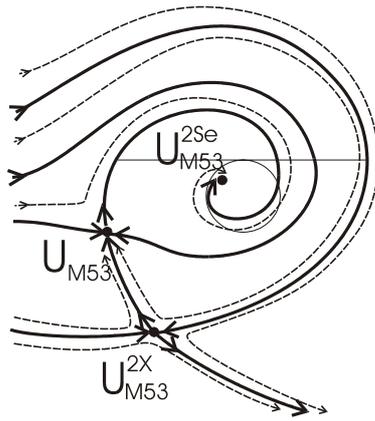


Figura 5.1: Sistema Dinâmico Associado a $U_L = U_{M53} \in \mathcal{D}_{2e}C$ com velocidade crítica $s = \lambda_2(U_L)$.

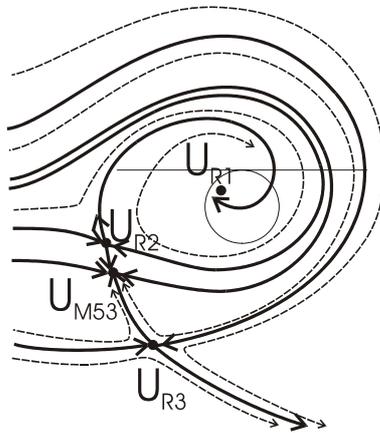


Figura 5.2: Sistema Dinâmico Associado a $U_L = U_{M53} \in \mathcal{D}_{2e}C$ com uma velocidade sobrecrítica $s > \lambda_2(U_L)$.

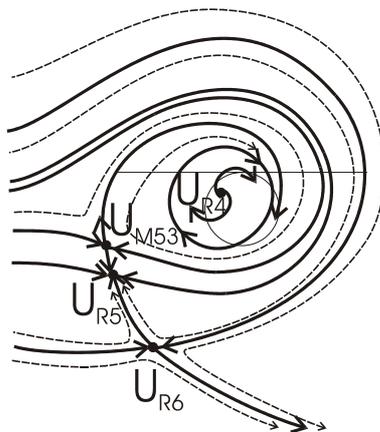


Figura 5.3: Sistema Dinâmico Associado a $U_L = U_{M53} \in \mathcal{D}_{2e}C$ com uma velocidade subcrítica $s < \lambda_2(U_L)$.

- se $s^* < \lambda_1(U_R) < \lambda_2(U_R)$ então a transição é $s < s^*, \mathcal{H}_{TD} \leftrightarrow \mathcal{H}_E, s > s^*$.

■

Teorema 5.1 *Considere o sistema de duas Leis de Conservação (2.1), o problema de Riemann (2.2), o fluxo (3.1) e um estado $U_L = (u_L, v_L)$ na Região Elíptica. Tomemos a família a um parâmetro, s , dos Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias Associados a U_L . Nesta família ocorre, genericamente ($u_L \neq 0$), uma bifurcação de Hopf para $s = \text{Re}(\lambda_e(U_L)) = s^*$. Temos ainda:*

- se $u_L < 0$ então a bifurcação é subcrítica e para $s = s^*$ o equilíbrio U_L é um Atractor;
- se $u_L > 0$ então a bifurcação é supercrítica e para $s = s^*$ o equilíbrio U_L é um Repulsor.

Prova. Para provar este teorema usaremos essencialmente o teorema C.1 do apêndice C. Usaremos também uma notação semelhante.

Tomemos $U_L = (r, t) \in \mathcal{R}_E$. Transladando a origem para $U_L = (r, t)$, ou seja, fazendo $x = u - r$ e $y = v - t$ obtemos

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{3}{2}x^2 + (3r - s)x + \frac{1}{2}y^2 + (t + 2)y \\ \dot{y} &= tx + yx + (r - s)y\end{aligned}$$

como o Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias a um parâmetro, s , associado ao par (U_L, s) . Reescrevemos este sistema com $(x, y) = \mathbf{x}$ e $\dot{\mathbf{x}} = X(\mathbf{x}; s)$. Claramente, após a translação, a origem é uma singularidade qualquer que seja o valor do parâmetro s ; existirão mais pontos de equilíbrio em número de 1 a 3. Diferenciando X obtem-se

$$DX(\mathbf{x}; s) = \begin{bmatrix} 3x + 3r - s & y + t + 2 \\ y + t & x + r - s \end{bmatrix}$$

e na origem

$$DX(0; s) = \begin{bmatrix} 3r - s & t + 2 \\ t & r - s \end{bmatrix}.$$

Seja $\beta = \sqrt{-r^2 - t^2 - 2t}$ então os autovalores de $DX(0; s)$ são $\lambda_1(s) = 2r - s - i\beta$ e $\lambda_2(s) = 2r - s + i\beta$. Estes autovalores são imaginários dado que $(r, t) \in \mathcal{R}_E$, e imaginários puros para $s = 2r$. Assim a velocidade crítica, s^* , é igual a $2r$ e claramente temos $\frac{d}{ds}[\text{Re}(\lambda_e(s))] |_{s=s^*} = -1 < 0$, como pedido na equação (C.3) do Teorema C.1.

Para estudar a estabilidade da origem em $X(\mathbf{x}; s^*)$ usaremos os Lemas C.2 e C.3. Os autovectores de $DX(0; s)$ são $r_1 = (r - i\beta, t)$ e $r_2 = (r + i\beta, t)$; façamos a mudança de coordenadas

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{t} & \frac{r}{t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Com esta mudança de variáveis temos, omitindo as barras,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{3\beta}{2t}x^2 + \frac{2r}{t}xy + \left(\frac{1}{2}\frac{r^2}{\beta t} + \frac{1}{2}\frac{t}{\beta}\right)y^2 + (2r - s)x + \left(\frac{r^2 + t^2 + 2t}{\beta}\right)y \\ \dot{y} &= \frac{\beta}{t}xy + \frac{r}{t}y^2 + \beta x + (2r - s)y.\end{aligned}$$

Atendendo ao facto que $r^2 + t^2 + 2t = -\beta^2$ e tomando $s = s^* = 2r$ obtemos, usando a notação da equação (C.4) do Lema C.3,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\beta y + f(\mathbf{x}) \\ \dot{y} &= \beta x + g(\mathbf{x})\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \frac{3\beta}{2t}x^2 + \frac{2r}{t}xy + \left(\frac{1}{2}\frac{r^2}{\beta t} + \frac{1}{2}\frac{t}{\beta}\right)y^2 \\ g(\mathbf{x}) &= \frac{\beta}{t}xy + \frac{r}{t}y^2. \end{aligned}$$

Pela equação (C.5) isto resulta em

$$a_1 = -\frac{r}{2t\beta^2}.$$

Como na Região Elíptica temos $t < 0$ concluímos que:

- se $r < 0$ então $a_1 < 0$, logo a origem é equilíbrio estável e a bifurcação é subcrítica;
- se $r > 0$ então $a_1 > 0$, logo a origem é equilíbrio instável e a bifurcação é supercrítica;
- se $r = 0$ então $a_1 = 0$, logo a bifurcação é degenerada.

■

Corolário 5.1 *Considere o sistema de duas Leis de Conservação (2.1), o problema de Riemann (2.2) e o fluxo (3.1).*

Seja $U_L = (u_L, v_L) \in \mathcal{R}_E$ e $u_L < 0$ então existe um conjunto de medida não nula de estados $U_R \in \mathcal{H}_{1S}(U_L)$ para os quais não existe, no Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias Associado, trajectória ligando U_L a U_R .

Seja $U_R = (u_R, v_R) \in \mathcal{R}_E$ e $u_R > 0$ então existe um conjunto de medida não nula de estados $U_L \in \mathcal{H}_{2E}(U_R)$, ou seja, existem U_L e $U_R \in \mathcal{H}_{2S}(U_L)$, para os quais não existe, no Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias Associado, trajectória ligando U_L a U_R .

A razão é que em ambos os casos o estado na Região Elíptica está rodeado por um ciclo limite.

Este Corolário resulta do Lema 5.1, do Teorema 5.1 e do facto de, neste modelo, o conjunto de Rankine-Hugoniot de todos os estados da Região Elíptica conter uma fronteira entre os sectores 1-Choque e 2-Expansivo. Uma análise mais detalhada das curvas de Rankine-Hugoniot nas diversas Gama-regiões permite ainda concluir:

Para qualquer $U_L \in A$ existem $U_R \in B$ (ver Figura 5.4) que pertencem ao sector 1-Choque de U_L (próximo à fronteira entre os sectores 1-Choque e 2-Expansivo) sem que exista trajectória conectando U_L a U_R ; apesar da singularidade U_L ser um Repulsor e U_R uma Sela. Notar que aqui necessariamente a velocidade do choque entre U_L e U_R é inferior à velocidade crítica a que se dá a bifurcação de Hopf, isto é $s(U_L, U_R) < s^*$.

Para qualquer $U_L \in (\Gamma_{9d} \cup \Gamma_{9ds}) = A^* \subset A$ (ver Figura 5.5) existem também $U_R \in B^*$, onde B^* é a reunião das Gama-regiões Γ_{5b} , Γ_{5bi} e Γ_{6b} , que pertencem ao sector Compressivo de U_L (próximo à fronteira entre os sectores Compressivo e Transporte à Esquerda) sem que exista trajectória conectando U_L a U_R ; apesar da singularidade U_L ser um Repulsor e U_R uma Atractor.

Por simetria temos também:

Para qualquer $U_L \in D$ (ver Figura 5.4) existem $U_R \in C$ que pertencem ao sector 2-Choque de U_L (próximo à fronteira entre os sectores 2-Choque e 1-Expansivo) sem que exista trajectória conectando U_L a U_R ; apesar da singularidade U_L ser uma Sela e U_R um Atractor. Mais uma vez temos $s(U_L, U_R) > s^*$ (deste lado a bifurcação é supercrítica).

Para qualquer $U_L \in (\Gamma_{8b} \cup \Gamma_{8bi} \cup \Gamma_{7b}) = D^*$ (ver Figura 5.5) existem também $U_R \in C^* = (\Gamma_{9e} \cup \Gamma_{9es}) \subset C$ que pertencem ao sector Compressivo de U_L (próximo à fronteira entre os sectores Compressivo e Transporte à Direita) sem que exista trajectória conectando U_L a U_R ; apesar da singularidade U_L ser um Repulsor e U_R um Atractor.

Identificamos no nosso modelo onde ocorre uma bifurcação de Hopf. Cabe agora avaliar a relevância desta para a existência de Perfil Viscoso das ondas usadas nas soluções encontradas no Capítulo 4.

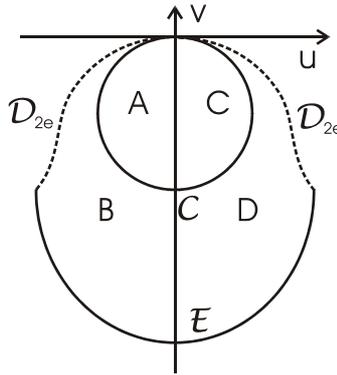


Figura 5.4: Áreas de Bifurcação de Hopf sobre a Fronteira entre \mathcal{H}_{1S} e \mathcal{H}_{2E} .

5.3 Relevância da Bifurcação de Hopf para as Soluções

5.3.1 L-região 1

Na subsecção 4.1 descrevemos as soluções para a L-região \mathcal{L}_1 . A maior parte destas soluções têm o Grupo de Ondas-1 fora das regiões onde ocorre a bifurcação, contudo existem alguns U_L para os quais isto não acontece. Todavia mesmo para esses casos não são usadas ondas com velocidades próximas das críticas, o que nos leva a pensar que provavelmente a bifurcação de Hopf não causa perda de Perfil Viscoso das soluções encontradas. Dizemos que não são usadas ondas com velocidades próximas das críticas no sentido seguinte: os sectores usados não são adjacentes à fronteira entre sectores onde ocorre a velocidade crítica. Por exemplo, partindo de alguns pontos da Gama-região Γ_{12} é possível que a 1-Rarefação cruze a Gama-região Γ_{8bi} , dentro da região onde ocorre a bifurcação. Contudo partindo de estados U_M em Γ_{8bi} só é geometricamente compatível utilizar o sector 2-Choque de U_M , não se pode usar o sector Compressivo; a bifurcação ocorre na fronteira entre os sectores Compressivo e Transporte à Direita, neste sentido, longe do sector 2-Choque.

5.3.2 L-região 2

Na subsecção 4.2.1 utilizou-se choques do tipo 1-Choque Sesqui-sónico à Esquerda para se obter uma solução completa para aquele estado na L-região \mathcal{L}_2 . Estes choques aparecem nas soluções de uma forma persistente, mesmo após perturbações do Estado à Esquerda e do Estado à Direita estes choques são fundamentais para a existência de solução. Este 1-Choque Sesqui-sónico à Esquerda sai da Região Elíptica, à esquerda do eixo vertical (Região A na figura 5.4), logo podemos utilizar o teorema 5.1 para concluir que o Estado à Esquerda é um Atrator. Então claramente este choque não possui Perfil Viscoso.

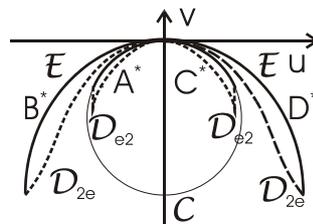


Figura 5.5: Áreas de Bifurcação de Hopf sobre as Fronteiras entre \mathcal{H}_C e \mathcal{H}_{TE} e entre \mathcal{H}_E e \mathcal{H}_{TD} .

Recordemos, de forma a analisar com mais pormenor este assunto, a construção feita na subsecção 4.2.1 partindo do estado U_{M5} de $R_1(U_L)$ entre \mathcal{R} e $\mathcal{D}_{2e}C$:

1. (a) 2-Rarefação de U_{M5} até $U_{M51} \in \mathcal{I}_2, R_2(U_{M5})$;
- (b) Partindo dos estados U_{M52} de $R_2(U_{M5})$ em Γ_{5c} constrói-se uma composta com um 2-Choque Sónico à Esquerda de U_{M52} até U_{M52}^{2S} . Para o estado $U_{M53} = R_2(U_{M5}) \cap \mathcal{D}_{2e}C$ temos um 2-Choque Uni-sesqui-sónico até $U_{M53}^{2Se} \in \mathcal{D}_{e2}M$;
- (c) Mais, partindo de U_{M53}^{2Se} efectua-se um 1-Choque Sesqui-sónico à Esquerda de U_{M53}^{2Se} até $(U_{M53}^{2Se})^{eS} = U_{M53}^{2X}$; de forma equivalente pode dizer-se que do estado U_{M53} construiu-se um Choque de Cruzamento Sónico à Esquerda entre U_{M53} e $U_{M53}^{2X} = (U_{M53}^{2Se})^{eS} \in R_1R_2T(U_L)$.

Nesta construção aparece naturalmente um Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias Associado não hiperbólico, com duas singularidades colapsadas em U_{M53} ; de forma que existem apenas três equilíbrios, U_{M53} uma Sela-atractor, U_{M53}^{2Se} um Atractor, dado estar na parte direita da Região Elíptica, e U_{M53}^{2X} uma Sela. Apesar de degenerado este Sistema é recorrente nas soluções de \mathcal{L}_2 .

A fim de observar melhor este Sistema degenerado apresentamos da Figuras 5.6 à Figura 5.8 o sistema e duas perturbações do mesmo mantendo, fixo o estado da Região Elíptica, U_{M53}^{2Se} .

Na Figura 5.6 (idêntica à Figura 5.1) está esboçado o retrato de fase do Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias para a velocidade crítica onde os pontos de equilíbrio são U_{M53} , U_{M53}^{2Se} e U_{M53}^{2X} . Como se viu, pelo Teorema 5.1 U_{M53}^{2Se} é um atractor.

Na Figura 5.7 está esboçado o retrato de fase do Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias Associado a U_{M53}^{2Se} com uma velocidade ligeiramente inferior à crítica. Aqui temos um ciclo limite que impede a existência de Perfil Viscoso entre U_{M53}^{2Se} e qualquer um dos outros pontos de equilíbrio, sendo que U_{R1} e U_{R3} estão em sectores de 1-Choque e U_{R2} está no sector Compressivo.

Na Figura 5.8 está esboçado o retrato de fase do Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias Associado a U_{M53}^{2Se} com uma velocidade ligeiramente superior à crítica. Os únicos equilíbrios que permanecem são U_{M53}^{2Se} e U_{R4} , este último localiza-se no sector 2-Espansivo.

É de notar que aqui foi fixado $U_{M53}^{2Se} \in \mathcal{D}_{e2}M$ (Figuras 5.6 a 5.8) e na secção anterior (rever Figuras 5.1 e 5.3) o estado fixo estava sobre $\mathcal{D}_{2e}C$. Daí a diferença no número de equilíbrios.

Conclusão 5.1 *A solução construída na secção 4.2 utiliza um 2-Choque Uni-sesqui-sónico de U_{M53} até U_{M53}^{2Se} seguido de 1-Choque Sesqui-sónico à Esquerda de U_{M53}^{2Se} até U_{M53}^{2X} , estes último não possui Perfil Viscoso (ver Figura 5.6). Todavia existe uma solução alternativa, a utilização directa de um Choque de Cruzamento Sónico à Esquerda de U_{M53} até U_{M53}^{2X} . Neste caso concluímos numericamente que também não existe perfil para esta alternativa. Note-se que o facto da bifurcação de Hopf ser não degenerada e U_{M53} ser um equilíbrio não hiperbólico tipo Sela-atractor impede a existência simultânea de mais do que um choque com perfil viscoso de entre os três choques citados. No Capítulo 4 mostramos ser esta a única solução satisfazendo o critério de Lax, resulta então que não existe solução completa para o problema ao exigirmos Perfil Viscoso para os choques.*

Nota 5.1 *A inexistência deste Perfil Viscoso, para além de implicar na inexistência de solução completa para parte de \mathcal{L}_2 , garante a unicidade da solução quando ela existe.*

5.3.3 L-região 3

Na subsecção 4.3 descrevemos as soluções para a L-região \mathcal{L}_3 . Todas estas soluções têm o Grupo de Ondas-1 cruzando as regiões onde ocorre a bifurcação e são usadas ondas com velocidades próximas das críticas, o que nos garante que a bifurcação de Hopf causa perda de Perfil Viscoso de algumas soluções encontradas. Por exemplo, partindo de alguns pontos da Gama-região Γ_{12} a 1-Rarefação cruza a Gama-região Γ_{11} , dentro da região onde ocorre a bifurcação. Partindo de estados U_M em Γ_{11} é geometricamente compatível utilizar todo o sector 2-Choque de U_M , e este é adjacente ao sector 1-Expansivo; assim utilizamos 2-Choque tão pertos da fronteira entre os sectores 2-Choque e 1-Expansivo, onde ocorre a bifurcação, que necessariamente alguns deles não possuem Perfil Viscoso. Este facto agrava a inexistência de solução em \mathcal{L}_3 . Já sabíamos que não existia solução de Lax para todas as R-regiões, com a Bifurcação de Hopf sabemos que alguns dos 2-Choque utilizados na subsecção 4.3 não possuem Perfil Viscoso.

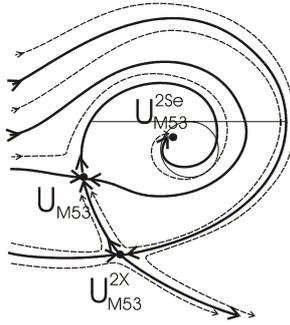


Figura 5.6: Sistema Dinâmico Associado a $U_{M53}^{2Se} \in \mathcal{D}_{e2}M$ com velocidade crítica $s = \text{Re}(\lambda(U_{M53}^{2Se}))$.

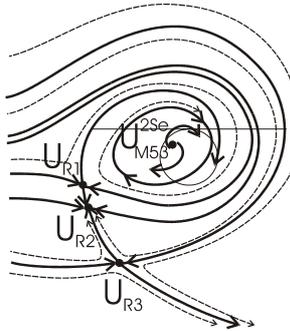


Figura 5.7: Sistema Dinâmico Associado a $U_{M53}^{2Se} \in \mathcal{D}_{e2}M$ com velocidade subcrítica $s < \text{Re}(\lambda_e(U_{M53}^{2Se}))$.

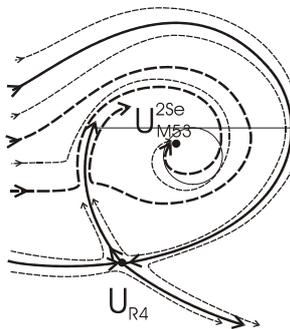


Figura 5.8: Sistema Dinâmico Associado a $U_{M53}^{2Se} \in \mathcal{D}_{e2}M$ com velocidade supercrítica $s > \text{Re}(\lambda_e(U_{M53}^{2Se}))$.

Capítulo 6

Soluções de Longa Duração

Nos dois capítulos anteriores, Capítulo 4 e Capítulo 5, foram encontrados pares de estados U_L e U_R para os quais não existe solução, ou seja, não foi encontrada solução satisfazendo os usuais critérios de Entropia. Os critérios de entropia tentam captar, de uma forma simplificada, todos os choques observáveis em equações com viscosidade (ver equação 2.6).

Para tentar identificar os choques que deveríamos admitir no nosso modelo realizamos simulações numéricas preliminares. As simulações numéricas foram feitas com o Programa Evolve, [13], usando o método de Crank-Nicolson não linear que permite introduzir termos viscosos ao modelo. É fundamental a utilização de um método numérico que inclua viscosidade pois o que queremos é exactamente observar choques em equações com viscosidade. Para matriz de viscosidade usamos a identidade multiplicada por um factor, chamado Factor Multiplicador da Viscosidade, representado por eps .

Como condição inicial foram usados Problemas de Riemann e condições iniciais lineares por partes. Em alguns casos a solução é sensível às condições iniciais, nomeadamente pelo aparecimento de ciclos, por vezes múltiplos ciclos. Em todos os casos as soluções persistiram por longos períodos de tempo, na realidade persistiram e resistiram em todas as simulações.

Foram realizados vários experimentos numéricos confirmando soluções descritas no Capítulo 4. Contudo os mais relevantes são os que tratam as situações para as quais não foram encontradas soluções teóricas ou aquelas onde se obtêm soluções distintas das previstas. Estas simulações dividem-se em três grupos, simulações com $U_L \in \mathcal{L}_2$, simulações com $U_L \in \mathcal{L}_3$ e simulações com ciclos; cada caso é tratado numa secção.

6.1 Simulações para $U_L \in \mathcal{L}_2$

Tomou-se U_L e U_R tais que a única solução encontrada utiliza a sucessão dos choques 2-Choque Uni-sesqui-sónico seguido de um 1-Choque Sesqui-sónico à Esquerda, ou seja, como na subsecção 4.2.1. Para este tipo de par foi provado que a única solução encontrada não possui Perfil Viscoso. Contudo, após um curto período observa-se que a solução numérica toma uma forma muito próxima da solução encontrada. Ou seja, apesar da inexistência de Perfil Viscoso a solução numérica parece utilizar esse Choque.

Como exemplo apresentamos o experimento cujos os estados são $U_L = (-1.5; -0.7)$ e $U_R = (0; -4.5)$. Foram usados 40001 nodos para um intervalo em x de 20000 unidades de comprimento, um factor $eps = 0.2$, o que resultou num Número de Reynolds de 14.5, e uma condição inicial variando linearmente de U_L a U_R num intervalo de largura 160.

Da Figura 6.1 à Figura 6.4 observamos a evolução da simulação tanto no plano de estados como nos gráficos das coordenadas, $u(x)$ e $v(x)$, correspondentes aos tempos 120, 220, 780 e 2400, respectivamente iterações 1740, 3190, 11310 e 34800. É possível observar, logo desde o tempo 120, o conjunto de ondas previsto na subsecção 4.2.1, uma 1-Rarefação, uma 2-Rarefação, um Choque (que corresponde ao Choque sem Perfil Viscoso) e finalmente uma 2-Rarefação. Com o evoluir da simulação observamos a

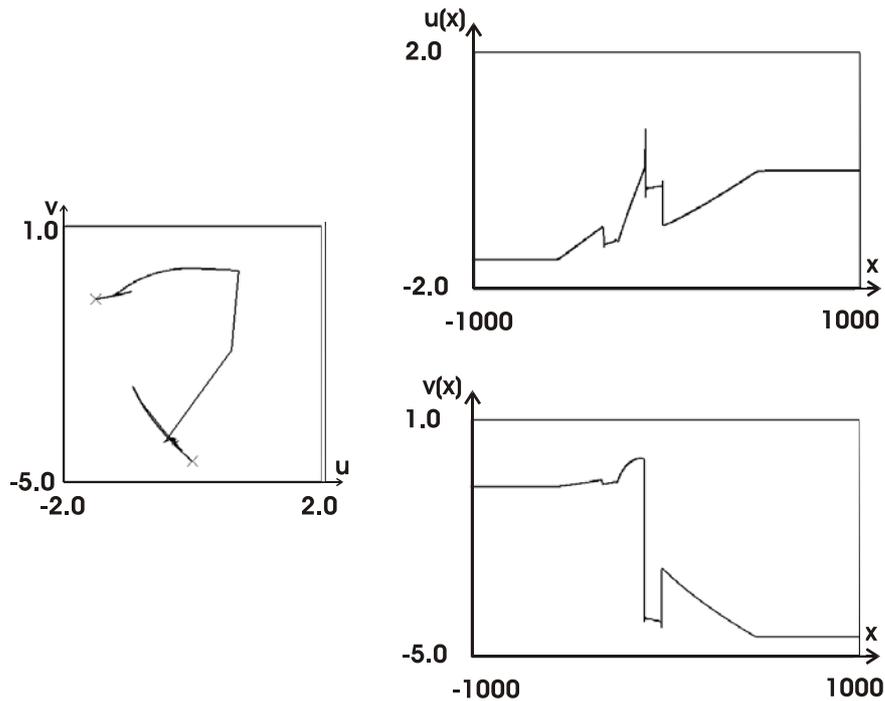


Figura 6.1: Solução numérica para $U_L = (-1.5; -0.7)$, $U_R = (0; -4.5)$ e tempo 120.

esperada diminuição das Ondas N . Nesta simulação o Choque sem Perfil Viscoso acontece numa região muito estreita (aproximadamente 4 nodos) apesar do elevado número total de nodos, 40001.

No intuito de observar o perfil de um Choque sem Perfil Viscoso tomamos $U_L \in \mathcal{D}_{2e}C$, nomeadamente $U_L = (-0.1142; -0.0060)$ e $U_R = U_L^{2X} = (U_L^{2Se})^{eS} = (-0.1956; -3.9830)$. Dado o carácter sónico deste choque esperamos um perfil bastante alongado, no espaço físico, do lado esquerdo, o que se veio a verificar. Efectuamos sucessivas simulações com densidade de nodos crescente. Primeiro utilizamos um factor multiplicativo $eps = 1.0$; assim esperamos que o choque apareça, aproximadamente, numa região 20 vezes mais larga (em termos de nodos) do que havia ocorrido no caso anterior. Na sucessão de simulações utilizamos o perfil iterado como condição inicial da simulação seguinte. Depois repetimos as iterações para um factor multiplicativo $eps = 2.0$.

Apresentamos, da Figura 6.5 à Figura 6.8, uma simulação que utilizou um perfil muito refinado como condição inicial, um intervalo de 250 unidades de comprimento, 8 nodos por unidade de comprimento, $eps = 1.0$, que resulta num Número de Reynolds igual a 0.52, e um referencial que se move à velocidade de -0.1957 , correspondente à velocidade do Choque. Na Figura 6.5 é mostrado todo o intervalo em x , de 0 a 250; nas restantes é apenas mostrado um pormenor da simulação onde o intervalo em x é de 25 unidades, logo 200 nodos. Observamos que o perfil mantém a sua forma.

Apresentamos também, da Figura 6.9 à Figura 6.12, uma simulação que utilizou um perfil muito refinado como condição inicial, um intervalo de 420 unidades de comprimento, um total de 2001 nodos (4.8 nodos por unidade de comprimento), $eps = 2.0$, que resulta num Número de Reynolds igual a 0.44, e um referencial que se move à velocidade de -0.1957 , correspondente à velocidade do Choque. Na Figura 6.9 é mostrado todo o intervalo em x , de 0 a 420; nas restantes é apenas mostrado um pormenor da simulação onde o intervalo em x é de 40 unidades, logo apenas 190 nodos. Observamos que o perfil mantém a sua forma no tempo e é idêntico ao perfil obtido com $eps = 1.0$. É de salientar que se observa o natural alongamento do Choque, isto é, a largura do Choque no espaço físico é proporcional ao eps .

Nestas simulações vimos aparecer um choque sem Perfil Viscoso. O número de nodos do perfil numérico parece proporcional ao eps e à densidade de nodos. O perfil no espaço de estados por sua vez parece independente deste dois factores, sugerindo que estes choques sem perfil são realizáveis.

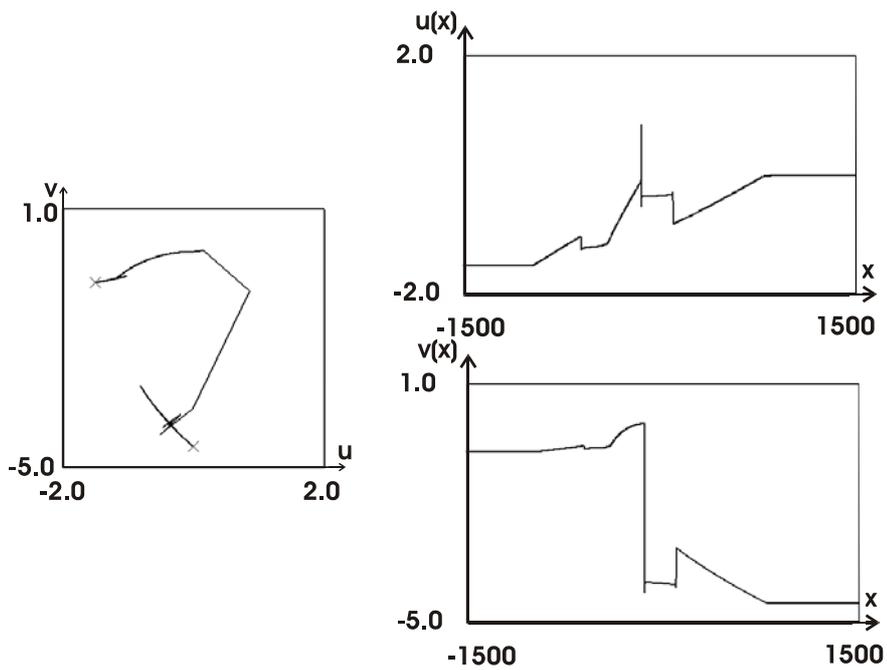


Figura 6.2: Solução numérica para $U_L = (-1.5; -0.7)$, $U_R = (0; -4.5)$ e tempo 220.

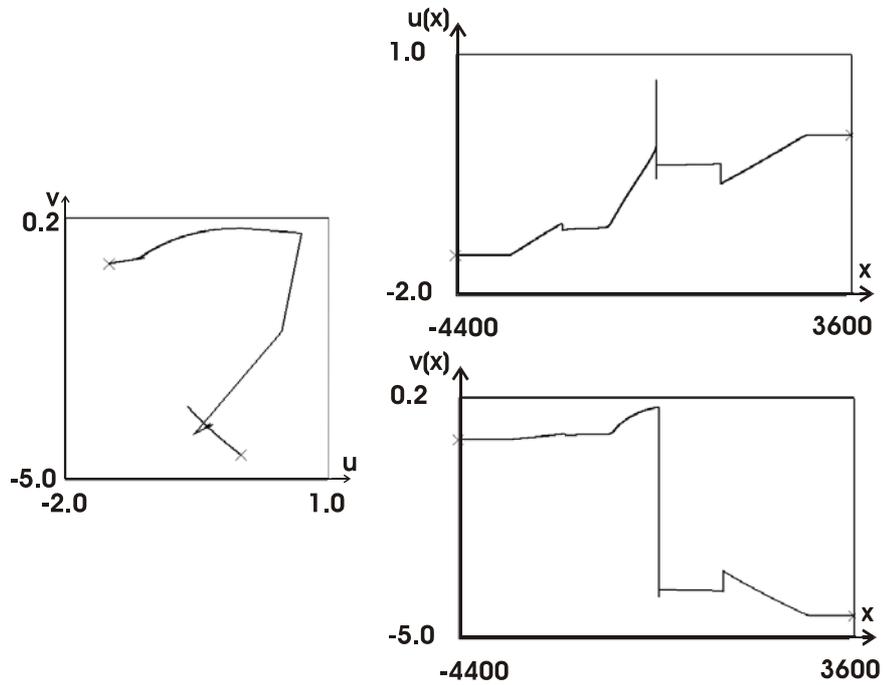


Figura 6.3: Solução numérica para $U_L = (-1.5; -0.7)$, $U_R = (0; -4.5)$ e tempo 780.

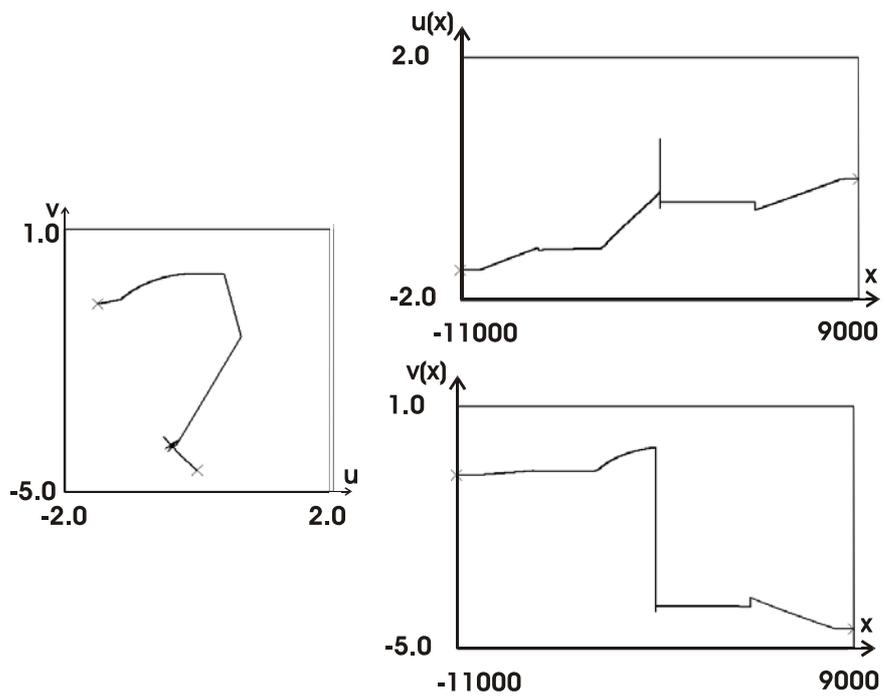


Figura 6.4: Solução numérica para $U_L = (-1.5; -0.7)$, $U_R = (0; -4.5)$ e tempo 2400.

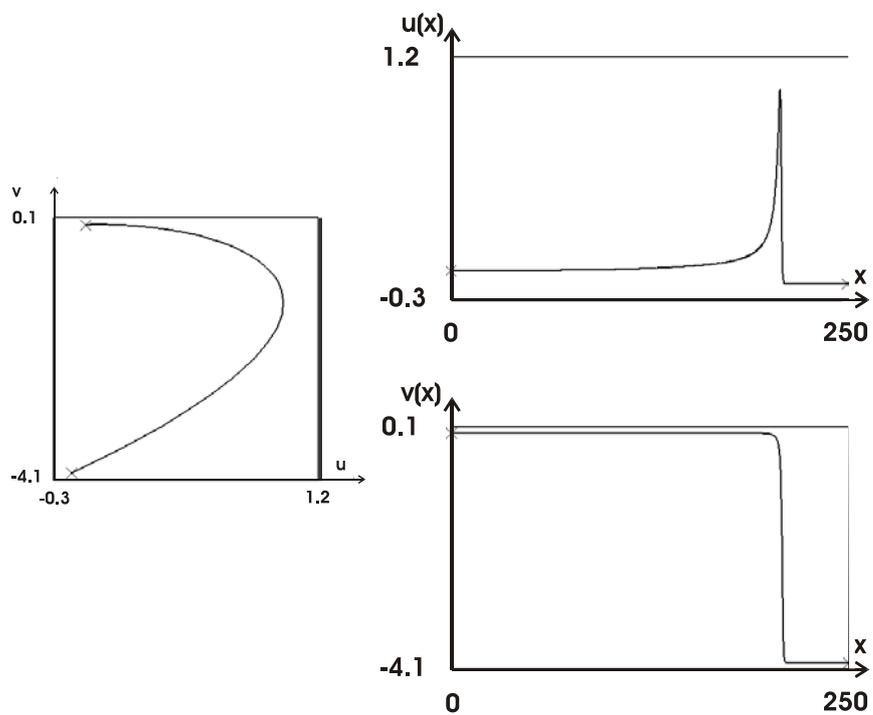


Figura 6.5: Simulação com o Choque sem Perfil Viscoso isolado: tempo 0 e $\epsilon = 1.0$.

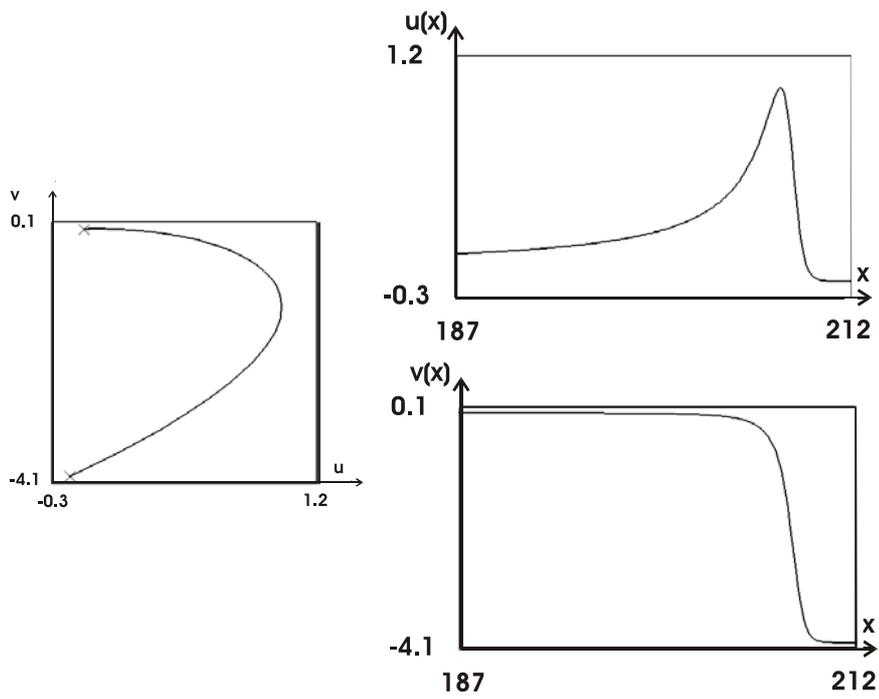


Figura 6.6: Pormenor do Choque sem Perfil Viscoso: tempo 0 e $\epsilon = 1.0$.

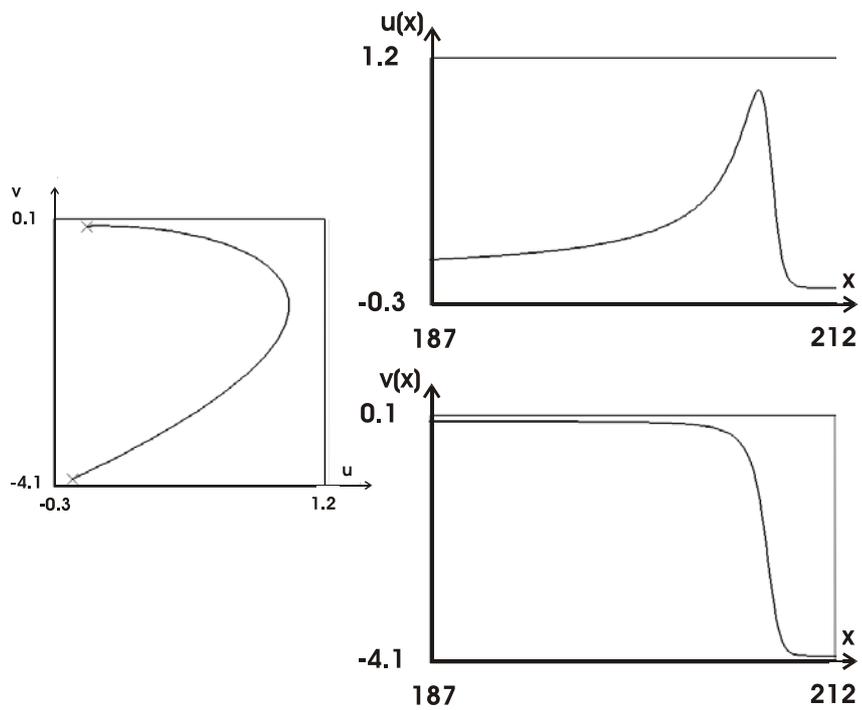


Figura 6.7: Pormenor do Choque sem Perfil Viscoso: tempo 500 (iteração 20900) e $\epsilon = 1.0$.

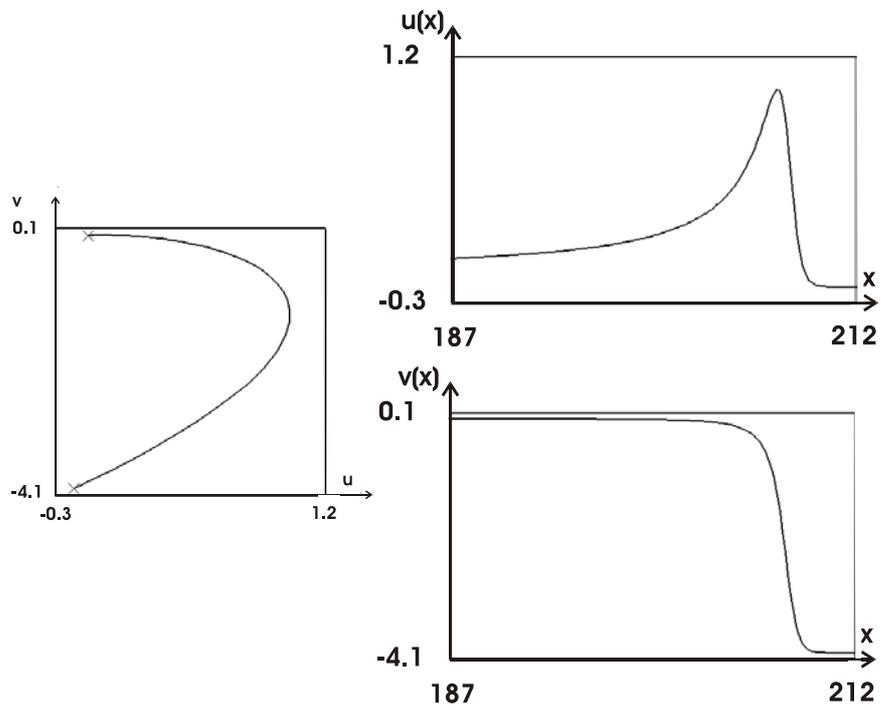


Figura 6.8: Pormenor do Choque sem Perfil Viscoso: tempo 1000 (iteração 41800) e $\epsilon = 1.0$.

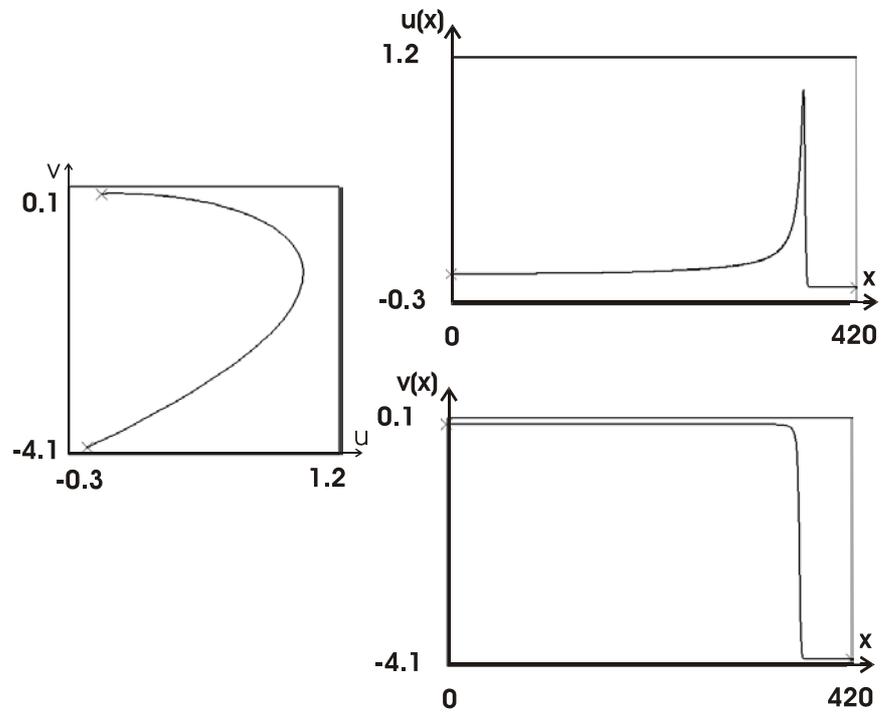


Figura 6.9: Simulação com Choque sem Perfil Viscoso isolado: tempo 0 e $\epsilon = 2.0$.

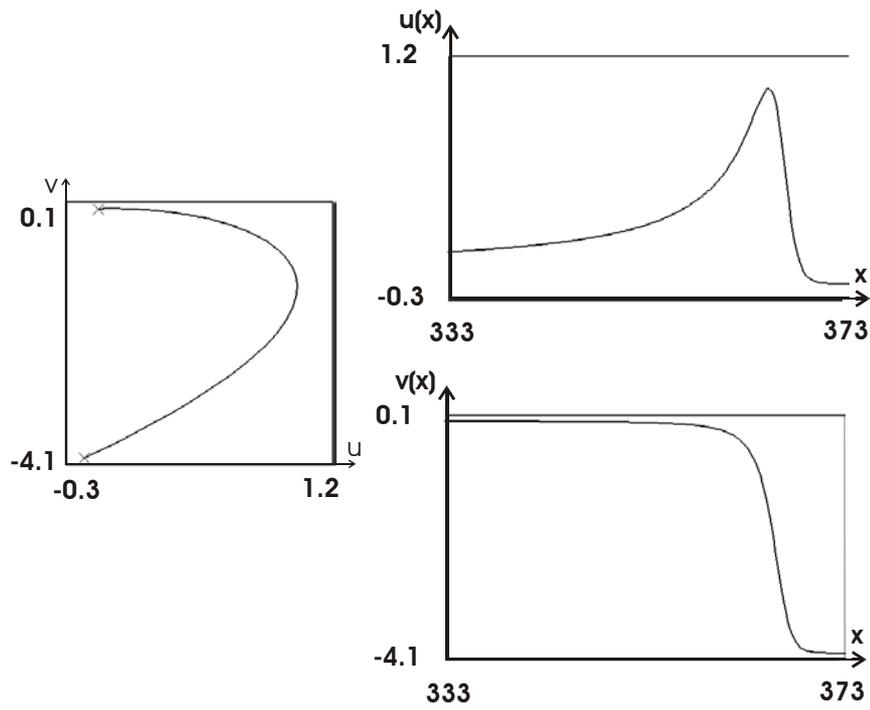


Figura 6.10: Pormenor do Choque sem Perfil Viscoso: tempo 0 e $\epsilon = 2.0$.

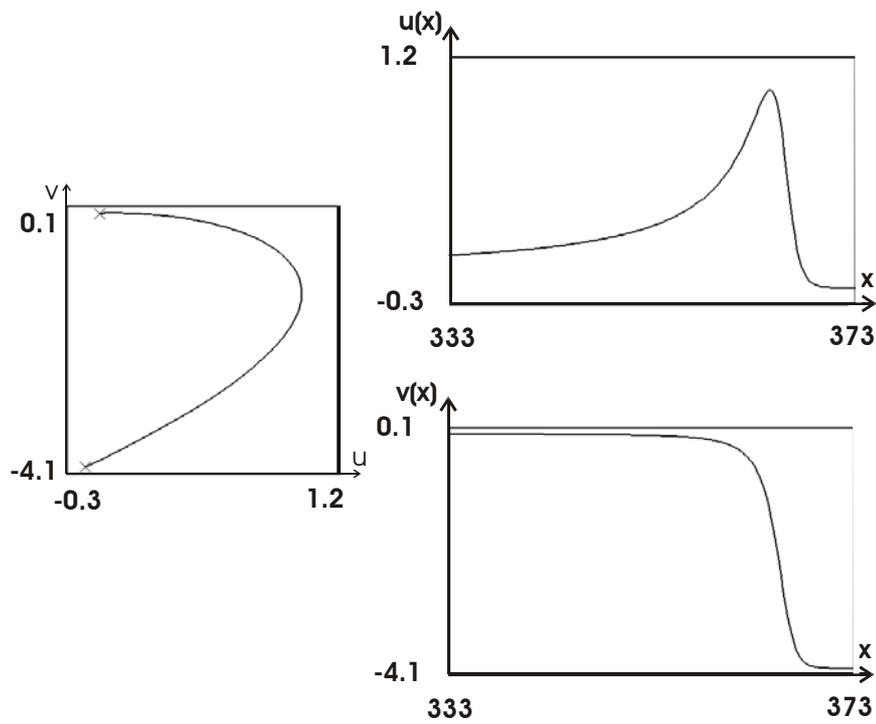


Figura 6.11: Pormenor do Choque sem Perfil Viscoso: tempo 500 (iteração 24900) e $\epsilon = 2.0$.

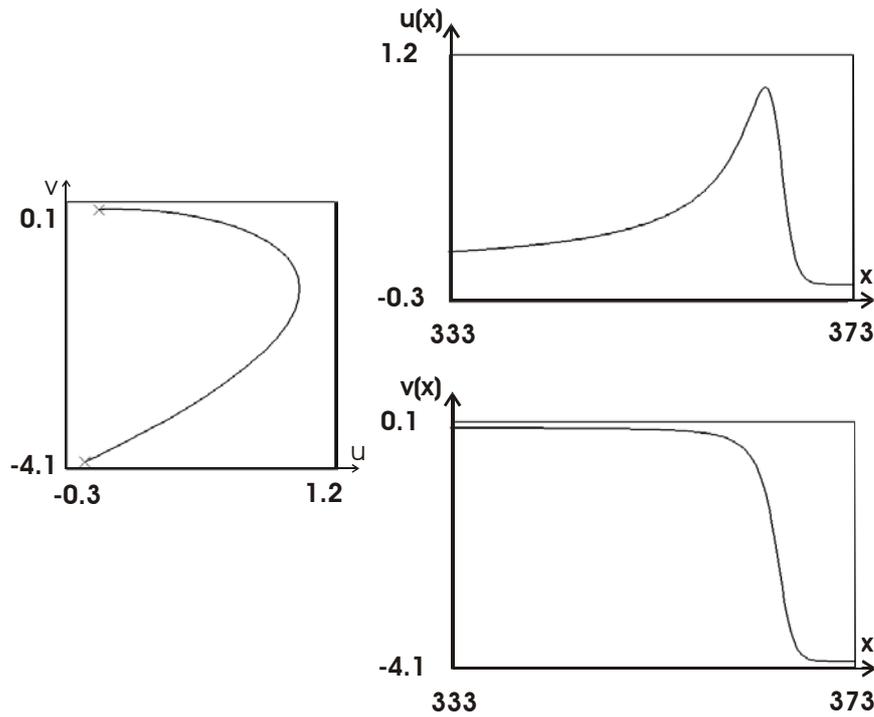


Figura 6.12: Pormenor do Choque sem Perfil Viscoso: tempo 1000 (iteração 49800) e $\epsilon = 2.0$.

Contudo acreditamos tratarem-se de artefactos numéricos, ou seja, de alguma forma a viscosidade física é dominada pela numérica. Isto porque o choque está isolado, sem ondas precedendo-o nem sucedendo-o, o que o torna muito sensível ao cumprimento das condições fronteira. Posto isto, estamos convictos que estas soluções que contemplam choques sem perfil não são realmente soluções assintóticas da Equação Diferencial Parcial.

Conclusão 6.1 *Supomos que os choques sem Perfil Viscoso que surgem nestas simulações resultam de erros numéricos.*

Estes artefactos aparecem em duas formas:

- *nos choques enquadrados entre duas ondas o perfil numérico contém muito poucos nodos, logo a viscosidade numérica é elevada;*
- *nos choques isolados as condições fronteira não são cumpridas de forma inequívoca.*

Não temos razões para acreditar que se tratem verdadeiras soluções assintóticas da Equação Diferencial Parcial.

Apesar desta convicção não temos dados analíticos que suportem estas interpretações, esperamos obte-los em trabalhos posteriores.

6.2 Simulações com $U_L \in \mathcal{L}_3$

Tomamos vários estados U_L na L-região \mathcal{L}_3 e U_R de tal forma que não tenha sido encontrada solução, como na secção 4.3, e observamos soluções numéricas semelhantes entre si nos vários experimentos.

Apresentamos então apenas uma simulação (ver a Figura 6.13 e a Figura 6.14) onde foram usados os estados $U_L = (1.1; -1.6)$ e $U_R = (1.1; -1.0)$, 10001 nodos, 0.5 nodos por unidade de comprimento, um

factor $eps = 5.0$, que resulta num Número de Reynolds de 2.0. Também aqui após um curto período de tempo a solução tendeu para um estado quase estático.

Na Figura 6.13 vemos a solução no espaço de estados, o gráfico $u(x)$ e o gráfico $v(x)$; todos para o tempo 1400 (iteração 4250). Na Figura 6.15 temos assinalados estados necessários à interpretação da solução obtida: de U_L a U_{M1} temos um 1-Choque, de U_{M1} a U_{M2} temos um Choque composto com uma Rarefacção de U_{M2} a U_{M3} , por fim temos um 2-Choque de U_{M3} a U_R . Na Figura 6.14 vemos em pormenor o choque entre U_{M1} e U_{M2} para o tempo 6000 (iteração 18200). Existe, contudo, um problema nesta interpretação pois na secção 4.3 havíamos verificado teoricamente que não existia onda ligando U_{M1} a U_{M3} . Para que o choque entre U_{M1} e U_{M2} seja admissível o estado U_{M2} terá que se localizar no sector 2-Choque de U_{M1} ; contudo, admitindo $U_{M1} = (0.343; -3.925) \in \mathcal{H}_{1S}(U_L)$, este sector termina em $U_{M2} = (0.172; -0.037)$, ou seja, dentro da Região Elíptica (como na Figura 4.24). Este 2-Choque Sesqui-sónico à direita tem velocidade $s = 0.345$.

Parece assim que a solução numérica faz uma ligação do choque entre U_{M1} e U_{M2} com uma 1-Rarefacção que termina em U_{M3} . Não sabemos exactamente porque encontramos esta sucessão de ondas, mas adiantamos alguns factos que poderão estar na base de uma possível explicação:

- primeiro de tudo, e mais importante, temos o facto de o choque que precede a 1-Rarefacção se dar numa região de apenas uma dezena de nodos, logo é perfeitamente possível estarmos perante um perfil numérico dominado pela viscosidade numérica;
- coadjuvando na obtenção desta solução poderão estar os seguintes factos:
 - o 2-Choque entre U_{M1} e U_{M2} é sónico, logo o seu perfil é naturalmente alargado. Podemos dizer, no contexto do Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias Associado, que a trajectória que une U_{M1} a U_{M2} é muito demorada pois o equilíbrio U_{M2} é não hiperbólico. Neste caso a solução numérica atinge o estado U_{M2} numa coordenada superior à esperada, logo também para uma velocidade superior à esperada por longos períodos de tempo;
 - o estado U_{M2} está muito próximo da Coincidência, logo muito próximo de 1-Rarefacções;
 - O 2-Choque entre U_{M1} e U_{M2} acontece numa região especial da curva de Rankine-Hugoniot de U_{M1} , no sentido que a coordenada u_R de um possível choque varia muito rapidamente com a velocidade do choque, s . Assim uma pequena variação na velocidade (localização do choque no espaço físico) permite grande variação na posição do estado. Na Figura 6.16 estão marcados pontos da curva de Rankine-Hugoniot do estado $U_{M1} = (0.343; -3.925)$, os pontos são os seguintes: $(-0.329; -0.205)$, $(-0.276; -0.164)$, $(-0.204; -0.118)$, $(-0.077; -0.064)$, $(0.172; -0.037)$, $(0.440; -0.118)$, $(0.577; -0.207)$, $(0.651; -0.273)$ e $(0.704; -0.328)$, associados, respectivamente, às velocidades 0.380, 0.370, 0.360, 0.350, 0.345, 0.340, 0.330, 0.320 e 0.310.

6.3 Simulações com Ciclos

As soluções numéricas por vezes dependem da condição inicial. Esta dependência manifesta-se apenas, tanto quanto podemos observar, pelo aparecimento de ciclos acoplados às soluções teóricas. Para ilustrar o aparecimento destes ciclos apresentamos uma par de simulações com $U_L = (-1; -1)$, $U_M = (-1; -2)$, $eps = 1$, 20001 nodos e 0.5 nodos por unidade de comprimento; resultando num Número de Reynolds de 2.0.

Da Figura 6.17 à Figura 6.19 vemos uma simulação com uma condição inicial linear por pedaços (condição inicial A) com os seguintes nodos: $(x = -5000, U = U_L)$, $(x = -80, U = U_L)$, $(x = -40, U = (0; 0))$, $(x = 0, U = (1; -1))$, $(x = 40, U = (0; -4))$, $(x = 80, U = U_R)$ e $(x = 5000, U = U_R)$. Esta condição inicial conduz à solução teórica.

Da Figura 6.20 à Figura 6.22 vemos uma simulação com uma condição inicial linear por pedaços (condição inicial B) com os seguintes nodos: $(x = -5000, U = U_L)$, $(x = -80, U = U_L)$, $(x = 0, U = (1; -0.5))$, $(x = 80, U = U_R)$ e $(x = 5000, U = U_R)$. Esta condição inicial conduz a uma solução teórica à excepção

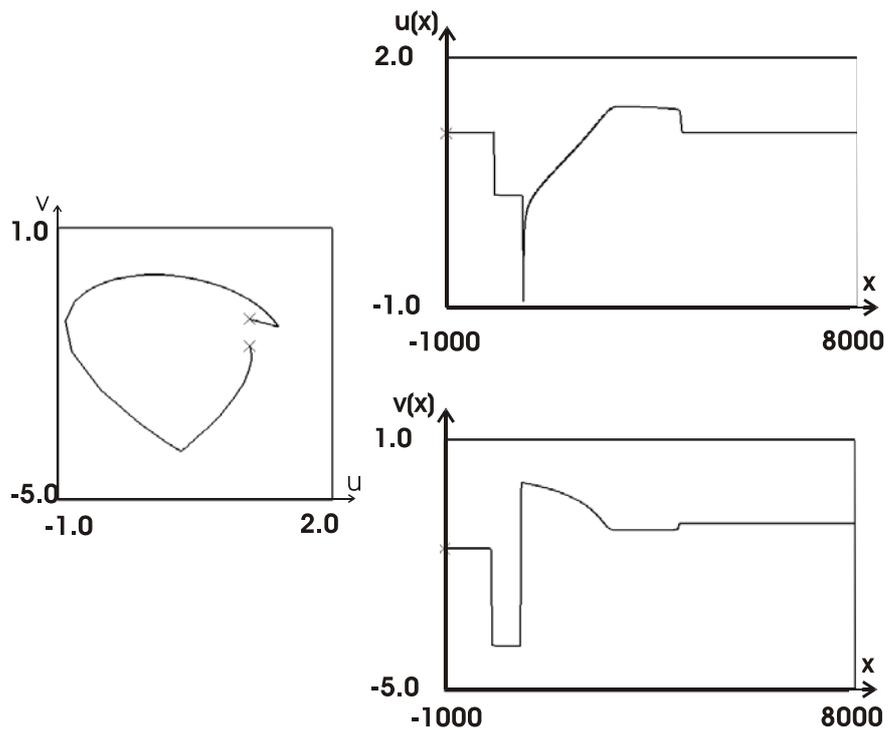


Figura 6.13: Solução numérica para $U_L = (1.1; -1.6)$, $U_R = (1.1; -1.0)$, tempo 1400.

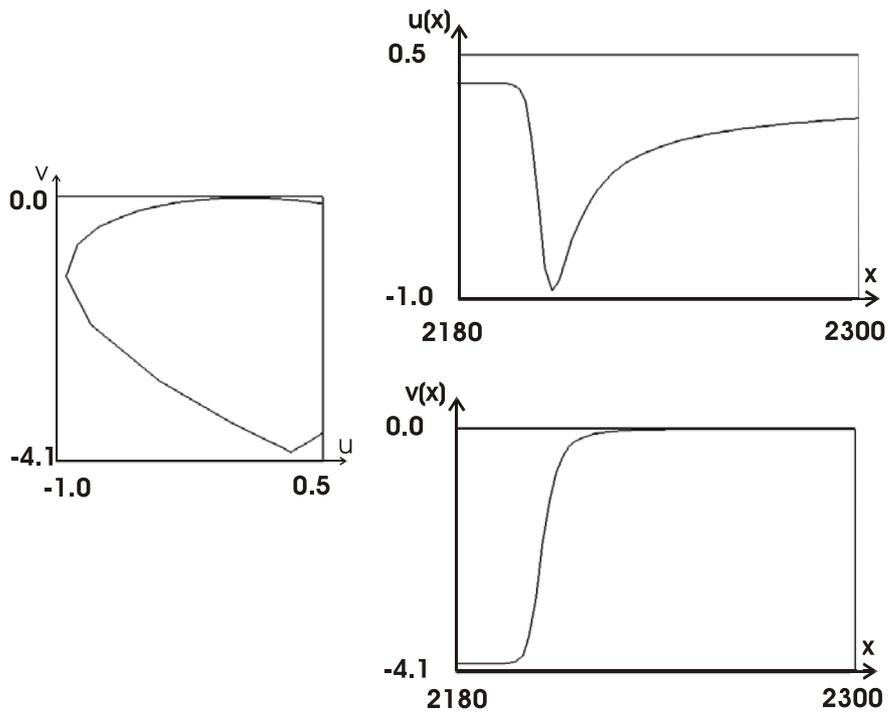


Figura 6.14: Pormenor da solução numérica para $U_L = (1.1; -1.6)$, $U_R = (1.1; -1.0)$, tempo 6000.

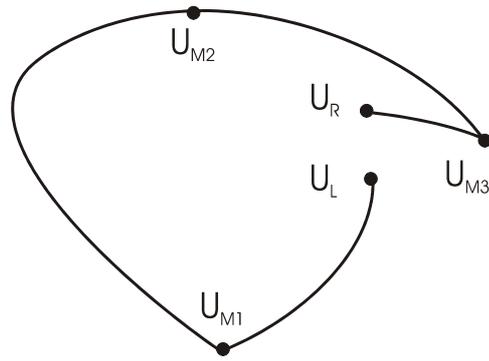


Figura 6.15: Esquema da solução numérica observada para $U_L = (1.1; -1.6)$ e $U_R = (1.1; -1.0)$.

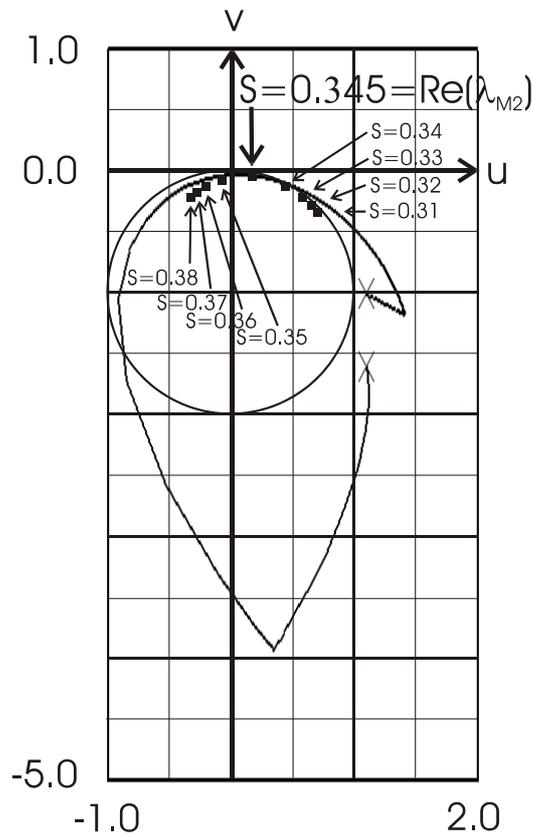


Figura 6.16: Solução numérica para $U_L = (1.1; -1.6)$, $U_R = (1.1; -1.0)$, tempo 6000 e nove pontos da curva de Rankine-Hugoniot de $U_{M1} = (0.343; -3.925)$ incluindo a velocidade sônica $s = 0.345$.

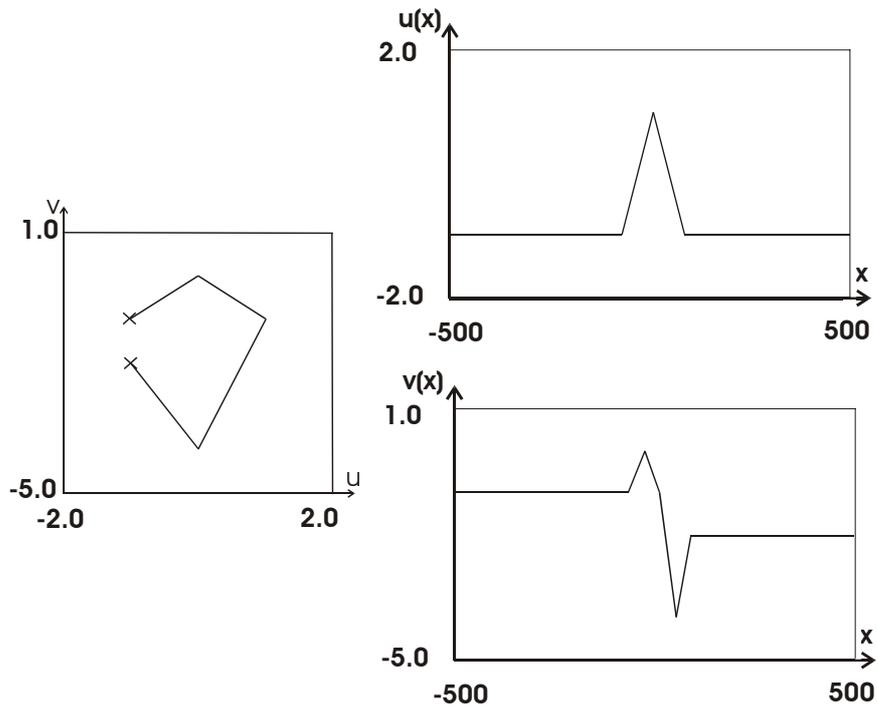


Figura 6.17: Condição inicial A para $U_L = (-1.0; -1.0)$, $U_R = (-1.0; -2.0)$.

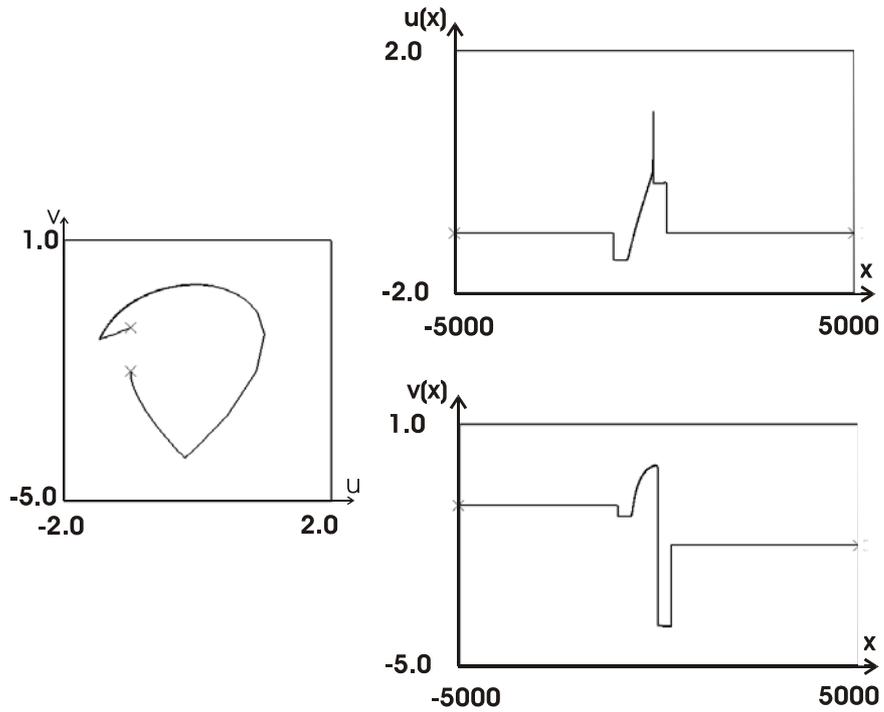


Figura 6.18: Solução numérica para $U_L = (-1.0; -1.0)$, $U_R = (-1.0; -2.0)$, tempo 324 (iteração 4050) e condição inicial A .

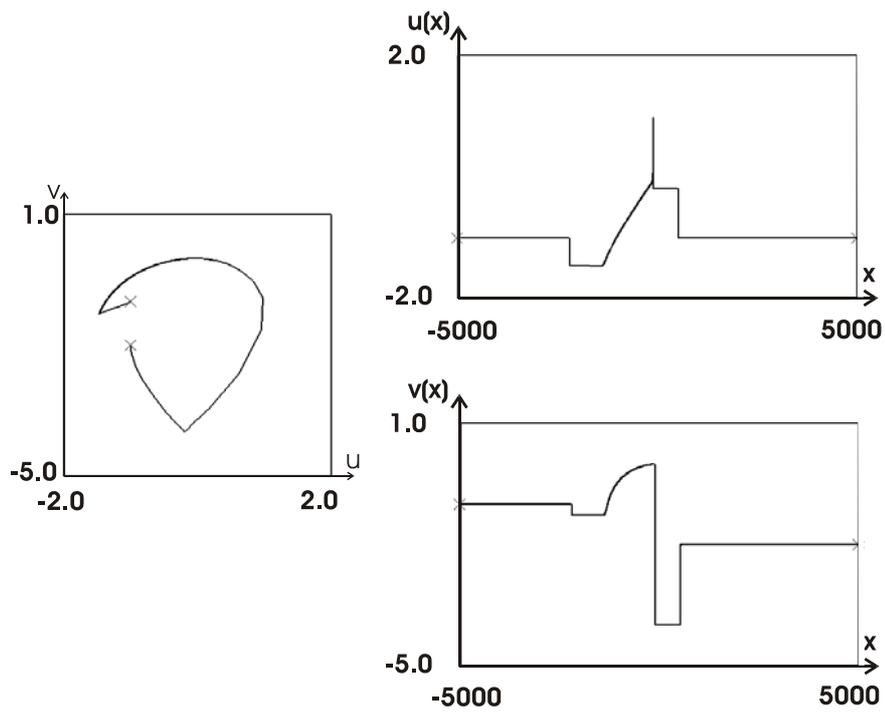


Figura 6.19: Solução numérica para $U_L = (-1.0; -1.0)$, $U_R = (-1.0; -2.0)$, tempo 688 (iteração 8725) e condição inicial A .

de um ciclo adicional. Este ciclo aproxima-se de uma órbita homoclínica, sendo esta a provável explicação para o seu aparecimento. Órbitas homoclínicas aparecem naturalmente neste modelo devido à Bifurcação de Bogdanov-Takens.

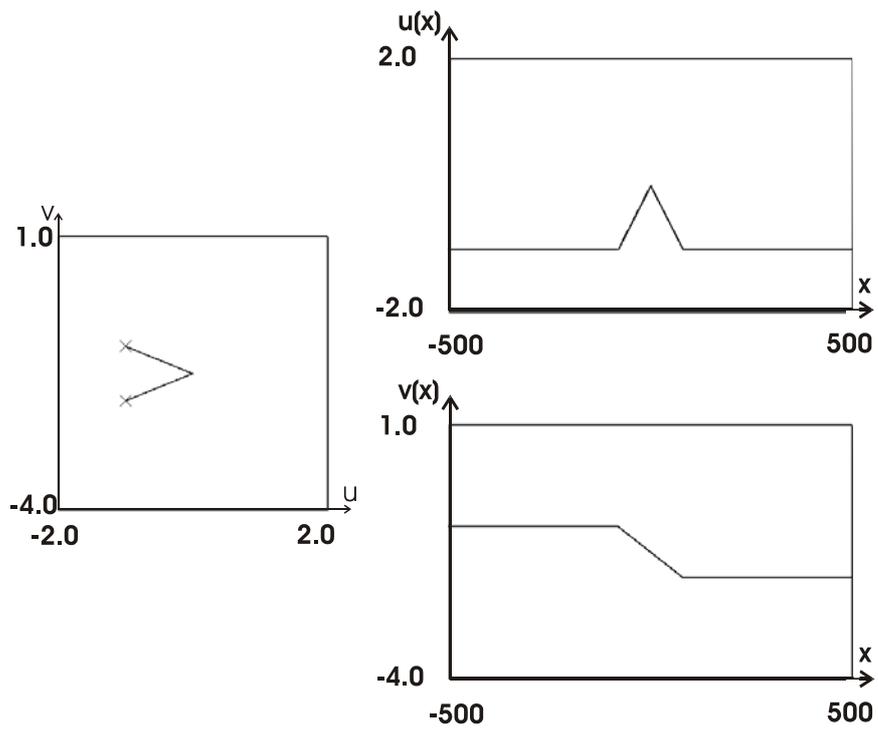


Figura 6.20: Condição inicial B para $U_L = (-1.0; -1.0)$, $U_R = (-1.0; -2.0)$.

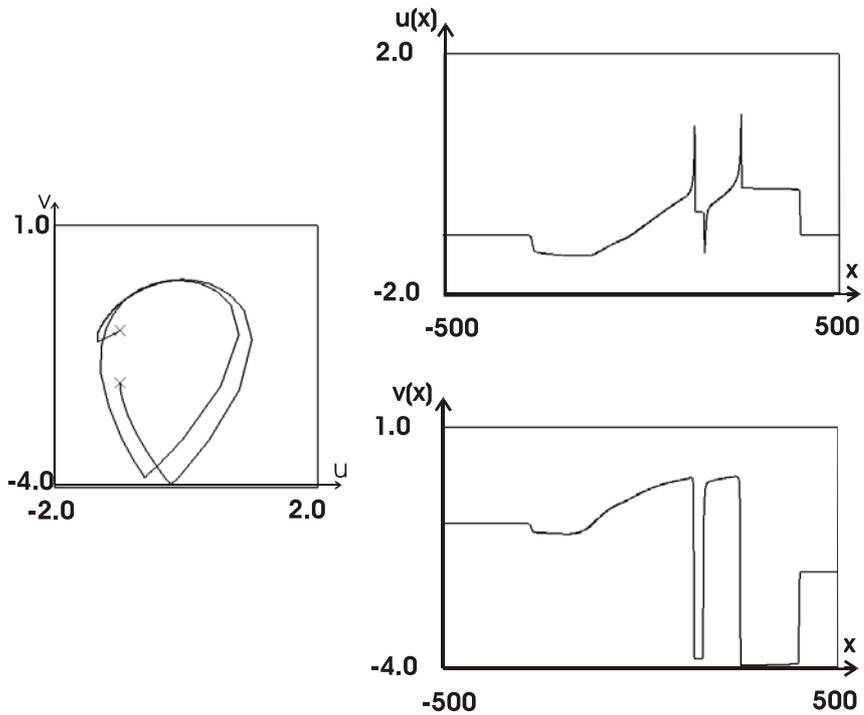


Figura 6.21: Solução numérica para $U_L = (-1.0; -1.0)$, $U_R = (-1.0; -2.0)$, tempo 213 (iteração 2450) e condição inicial B .

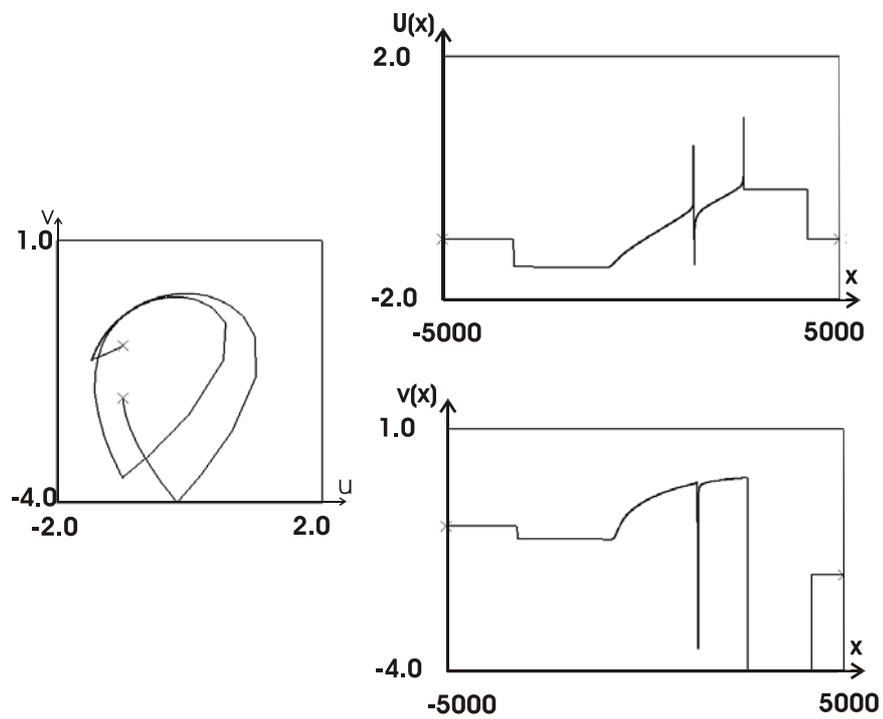


Figura 6.22: Solução numérica para $U_L = (-1.0; -1.0)$, $U_R = (-1.0; -2.0)$, tempo 2000 (iteração 25340) e condição inicial B .

Capítulo 7

Conclusão

Nesta tese apresentamos resultados gerais para Leis de Conservação. Contudo nem todos os resultados são padrão, como os diagramas de construção dos Grupos de Ondas, o Lema para Choques Triplos que determina incompatibilidades geométricas e tangências entre Grupos de Ondas e o Teorema complementar ao Teorema de Bethe-Wendroff que permitiu a identificação dos Contactos Duplos Heterogéneos assim como o estudo da bifurcação na classificação do conjunto de Rankine-Hugoniot quando o estado à esquerda cruza estes Contactos.

Estudámos em pormenor um Problema de Riemann para duas Leis de Conservação com um fluxo quadrático não homogéneo do tipo IV. Utilizamos o novo método na construção das soluções o que levou à definição de três L-regiões \mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_2 e \mathcal{L}_3 .

Na L-região \mathcal{L}_1 as soluções são muito semelhantes às encontradas no caso de uma singularidade isolada. Definimos R-regiões onde as soluções são únicas. Os choques Compressivos desempenham um papel singular, mas bem conhecido: a solução não é única se vista no espaço de estados, contudo no espaço físico essas duas soluções são idênticas. Acreditamos que todos os choques utilizados possuem Perfil Viscoso. Obtivemos a solução completa para o *DRS*, surpreendentemente semelhante às soluções para um ponto umbílico.

Na L-região \mathcal{L}_2 é possível construir soluções completas satisfazendo a compatibilidade geométrica e o critério de admissibilidade de Lax. Contudo em algumas R-regiões existem duas soluções distintas, tanto no espaço de estados quanto, e mais importante, no espaço físico. Este fenómeno é bem conhecido em problemas mistos hiperbólicos-elípticos. Todas as soluções nesta L-região possuem Rarefacções Transicionais cuja existência havia sido predita pela teoria e foram apontadas para nós por A. Azevedo. Após a Rarefacção Transicional aparece um conjunto recorrente de ondas positivas que permanece inalterado para todos os estados à esquerda. Para se obter soluções completas em \mathcal{L}_2 foi fundamental a identificação dos Contactos Duplos Heterogéneos. Partindo de um estado na Região Elíptica, pertencente ao contacto Duplo Eliptico-hiperbólico, existe um 1-Choque Sesqui-sónico à Esquerda fundamental para a existência de solução global, inclusive quando ambos os estados estão na Região Estritamente Hiperbólica. Contudo verificou-se não existir Perfil Viscoso para este tipo de choque, ficando então o problema sem solução completa em \mathcal{L}_2 ; desaparece também a multiplicidade de soluções. A inexistência de Perfil Viscoso está relacionada com a Bifurcação de Hopf inerente ao modelo.

Na L-região \mathcal{L}_3 não foram encontradas soluções completas satisfazendo o critério de Lax. Tal inexistência resulta, por um lado, do desaparecimento da Rarefacção Transicional e conseqüentemente de todo o conjunto de ondas positivas assim como, por outro lado, pelo facto do Grupo de Ondas-1 terminar com uma 1-Rarefacção que colide com a Coincidência.

Fizemos um estudo numérico preliminar das soluções do Problema de Riemann para pares de estados para os quais não haviam sido encontradas soluções ou, a terem sido encontradas, estas não possuíam Perfil Viscoso. Em todas as simulações foram encontradas soluções que permaneceram por longos períodos de tempo. Visualizamos perfis numéricos para choques sem Perfil Viscoso, contudo estes aparecem num número reduzido de nodos ou com condições fronteiras difíceis de verificar. Por este facto acreditamos que estes perfis são dominados pela viscosidade numérica, não sendo verdadeiras soluções assintóticas da Equação Diferencial Parcial.

Em trabalhos futuros pensamos fazer mais simulações assim como um estudo analítico destes perfis.

Apêndice A

Soluções Estruturalmente Estáveis

Este apêndice é baseado exclusivamente no artigo [20].

No artigo é estudada a estrutura das soluções de Riemann para n Leis de Conservação, que compreende uma sequência de ondas elementares, ou seja, rarefecções e choque de vários tipos, onde os choques têm perfil viscoso. Uma solução de Riemann é Estruturalmente Estável se o número e o tipo de ondas em cada componente da solução são preservados quando se perturba U_L , U_R e o Fluxo, $F(U)$. São então procuradas condições para se ter essa Estabilidade.

Nesse artigo é pressuposto que as rareficações e os estados U_L e U_R dos choques estão sempre na Região Estritamente Hiperbólica. As soluções Estruturalmente Estáveis serão em seguida caracterizadas, mas cabe já dizer que elas não compreendem Choques (Sobre-)Compressivos.

Nesta tese serão apresentados apenas os resultados finais, omitindo-se até algumas das ideias básicas utilizadas nas demonstrações e definições.

A solução de um Problema de Riemann para $U_L = U_0$ e $U_R = U_n$ é dada por uma sequência de grupos de ondas elementares; a cada onda elementar é associado um número, o Número de Riemann.

- **Definição A.1** São Ondas Elementares, w , as Rareficações Genuinamente não Lineares e os Choques entre dois estados para os quais exista Perfil Viscoso.

Escreve-se então $w : U_L \rightarrow U_R$ e diz-se que w conecta U_L a U_R , via Campo Integral ou Perfil Viscoso, respectivamente se w for uma Rareficação ou um Choque.

Definição A.2 Uma sucessão de n ondas elementares (w_1, w_2, \dots, w_n) é dita permitida se

1. w_i conecta U_{i-1} a U_i , isto é, $\forall_i w : U_{i-1} \rightarrow U_i$. Por outras palavras, o estado à direita de w_i é o mesmo que o estado à esquerda de w_{i+1} ;
2. a sucessão satisfaz a Compatibilidade Geométrica;
3. não existem duas rareficações da mesma família seguidas.

Escreve-se então $(w_1, w_2, \dots, w_n) : U_0 \rightarrow U_1 \rightarrow \dots \rightarrow U_n$ e diz-se que a sucessão conecta U_0 a U_n .

As Rareficações Genuinamente não Lineares serão representadas por R_1 , se associadas à primeira família, e R_2 , se associadas à segunda família.

Os Choques com Perfil Viscoso serão representados pelo tipo dos pontos de equilíbrio U_L e U_R do Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias Associado. Recordando, os pontos de equilíbrio podem ser Repulsores, R , Atractores, A , Selas, S , e Selas-Nó de dois tipos, as Repulsor-sela, RS , e Sela-Atractor, SA . Por exemplo, um 1-Choque de Lax é representado por $R \cdot S$ enquanto que um choque com $U_L \in \mathcal{D}_{12}$ e $U_R \in \mathcal{D}_{21}$ é representado por $RS \cdot SA$.

Definição A.3 O Número de Riemann de uma Onda Elementar, $\rho(w)$, é um para as Rareficações, ou seja, $\rho(R_1) = 1$, $\rho(R_2) = 1$, e para os choques com Perfil Viscoso varia de -2 a 1 da seguinte forma: $\rho(R \cdot RS) = 0$, $\rho(R \cdot S) = 1$, $\rho(R \cdot SA) = 0$, $\rho(R \cdot A) = 1$, $\rho(RS \cdot RS) = -1$, $\rho(RS \cdot S) = 0$, $\rho(RS \cdot SA) = -1$, $\rho(RS \cdot A) = 0$, $\rho(S \cdot RS) = -1$, $\rho(S \cdot S) = 0$, $\rho(S \cdot SA) = 0$, $\rho(S \cdot A) = 1$, $\rho(SA \cdot RS) = -2$, $\rho(SA \cdot S) = -1$, $\rho(SA \cdot SA) = -1$ e $\rho(SA \cdot A) = 0$.

Aqui apresento o Número de Riemann como uma simples definição, contudo ele deve ser calculado tendo em conta a dimensão da Onda Elementar no espaço $U_L \times U_R$ cuja dimensão é $2n$. Basicamente se pode dizer que $\rho(\text{Choque}) = 3 - nc$, onde nc é o número de condições a serem satisfeitas pelo choque; temos duas equações das condições de Rankine-Hugoniot, uma por cada igualdade $\lambda(U) = s$ (que dão origem às Selas-Nó) e mais uma quando a conexão entre U_L e U_R é feita por uma separatriz dupla (por exemplo $SA \cdot RS$).

Seguem as definições de vários Grupos de Onda onde é pressuposto que as sucessões são todas permitidas. Nas definições os termos entre parêntesis, que aparecem nas sequências, são opcionais, e se algum deles aparecer a onda é chamada de Composta.

Definição A.4 Grupo de Ondas-1 é simplesmente um 1-Choque de Lax ($R \cdot S$ ou S_1) ou uma sequência de ondas do tipo

$$(R \cdot RS)(R_1RS \cdot RS)\dots(R_1RS \cdot RS)R_1(RS \cdot S) \text{ ou de forma equivalente} \\ (S_1^*)(R_1 \text{ }^*S_1^*)\dots(R_1 \text{ }^*S_1^*)R_1(\text{ }^*S).$$

Definição A.5 Grupo de 2-Ondas é simplesmente um 2-Choque de Lax ($S \cdot A$ ou S_2) ou uma sequência de ondas do tipo

$$(S \cdot SA)(R_2SA \cdot SA)\dots(R_2SA \cdot SA)R_2(SA \cdot A) \text{ ou de forma equivalente} \\ (S_2^*)(R_2 \text{ }^*S_2^*)\dots(R_2 \text{ }^*S_2^*)R_2(\text{ }^*S).$$

Definição A.6 Grupo Transicional é simplesmente um choque de Cruzamento ($S \cdot S$ ou T) ou uma sequência de ondas

1. do tipo 1:

$$S \cdot RS(R_1RS \cdot RS)\dots(R_1RS \cdot RS)R_1(RS \cdot S) \text{ ou de forma equivalente} \\ T_1^*(R_1 \text{ }^*S_1^*)\dots(R_1 \text{ }^*S_1^*)R_1(\text{ }^*S);$$

2. do tipo 2:

$$(S \cdot SA)(R_2SA \cdot SA)\dots(R_2SA \cdot SA)R_2SA \cdot S \text{ ou de forma equivalente} \\ (S_2^*)(R_2 \text{ }^*S_2^*)\dots(R_2 \text{ }^*S_2^*)R_2 \text{ }^*T;$$

3. misto, ou seja Transicional Duplamente Sónico

$$(R_2)SA \cdot RS(R_1) \text{ ou de forma equivalente} \\ (R_2)_2^*T_1^*(R_1).$$

Definição A.7 Grupo Compressivo é simplesmente um choque Compressivo ($R \cdot A$ ou C) ou uma sequência de ondas

1. do tipo 1:

$$(R \cdot RS)(R_1RS \cdot RS)\dots(R_1RS \cdot RS)R_1RS \cdot A \text{ ou de forma equivalente} \\ (S_1^*)(R_1 \text{ }^*S_1^*)\dots(R_1 \text{ }^*S_1^*)R_1 \text{ }^*C;$$

2. do tipo 2:

$$R \cdot SA(R_2SA \cdot SA)\dots(R_2SA \cdot SA)R_2(SA \cdot S) \text{ ou de forma equivalente} \\ C_2^*(R_2 \text{ }^*S_2^*)\dots(R_2 \text{ }^*S_2^*)R_2(\text{ }^*S);$$

3. misto, ou seja Compressivo Duplamente Sónico:

$$(R_1)RS \cdot SA(R_2) \text{ ou de forma equivalente} \\ (R_1)_1^*C_2^*(R_2).$$

Teorema A.1 (Estrutura de Onda) Considere uma sucessão permitida de ondas elementares, $(w_1, w_2, \dots, w_n) : U_0 \rightarrow U_1 \rightarrow \dots \rightarrow U_n$, tal que $\sum_{i=1}^n \rho(w_i) = 2$.

1. Se a sucessão não inclui ondas $SA \cdot RS$ então ela consiste de: um Grupo de Ondas-1, seguido por um número arbitrário de Grupos Transicionais (em qualquer ordem), seguido finalmente por um Grupo 2-Ondas.
2. Se a sucessão contém $m \geq 1$ ondas do tipo $SA \cdot RS$, então estas ondas separam $m + 1$ sucessões de ondas elementares, g_0, \dots, g_m . Cada sucessão de ondas elementares g_i é exactamente uma sucessão como em (1) com as restrições:
 - (a) se $i < m$, a última onda da sucessão é uma 2-Rarefação;
 - (b) se $i > m$, a primeira onda da sucessão é uma 1-Rarefação.

Teorema A.2 (Estabilidade Estrutural) Considere uma sucessão permitida de ondas elementares, $(w_1, w_2, \dots, w_n) : U_0 \rightarrow U_1 \rightarrow \dots \rightarrow U_n$, tal que $\sum_{i=1}^n \rho(w_i) = 2$ (como no teorema A.1). Assumindo que:

1. cada onda satisfaz uma condição apropriada de não degenerescência;
2. é satisfeita a condição de interacção entre Grupos de Onda, relacionada com transversalidade na “colagem” de grupos;
3. se w_i é uma onda do tipo $* \cdot S$ e w_{i+1} é uma $S \cdot *$ então a velocidade do primeiro choque é estritamente menor que a velocidade do segundo.

Então a sucessão é Estruturalmente Estável.

Os Grupos de Onda, a Estrutura de Onda e a Estabilidade Estrutural nortearão todas as construções em busca das soluções do Problema de Riemann. Partindo de um certo U_L será construído o Grupo de Ondas-1; serão procurados os possíveis Grupos Transicionais e então construído o Grupo de 2-Ondas. Na ausência de ondas do tipo $SA \cdot RS$ a procura estará finalizada.

Apêndice B

Fluxo de Schaeffer e Shearer

B.1 Fluxo Homogêneo

Considere-se o fluxo quadrático homogêneo

$$F \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_{11}u^2 + 2a_{12}uv + a_{13}v^2 \\ a_{21}u^2 + 2a_{22}uv + a_{23}v^2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

e funções $A(u, v), \dots, D(u, v)$ tais que

$$DF \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D + A & C + B \\ C - B & D - A \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

isto é,

- $2A = f_u - g_v = (a_{11} - a_{22})u + (a_{12} - a_{23})v$;
- $2B = f_v - g_u = (a_{12} - a_{21})u + (a_{13} - a_{22})v$;
- $2C = f_v + g_u = (a_{12} + a_{21})u + (a_{13} + a_{22})v$;
- $2D = f_u + g_v = (a_{11} + a_{22})u + (a_{12} + a_{23})v$.

Então os autovalores de DF são

$$\lambda_{\pm} = D \pm \sqrt{A^2 + C^2 - B^2} \quad (\text{B.3})$$

e os respectivos campos de autovectores são

$$\Omega_{\pm} = \left(C + B, -A \pm \sqrt{A^2 + C^2 - B^2} \right) \quad (\text{B.4})$$

Em 1987 Schaeffer e Shearer, [19], estudaram fluxos quadráticos homogêneos com um ponto umbílico isolado, ou seja, F estritamente hiperbólica excepto num ponto onde os autovalores coincidem e DF é diagonalizável. Isto quer dizer que temos $A^2 + C^2 - B^2 \geq 0$ excepto para um ponto, a origem, onde $A^2 + C^2 - B^2 = 0$ trivialmente. Schaeffer e Shearer provaram que neste caso existe uma mudança linear de coordenadas no espaço de estados de forma a obter um fluxo F com $B \equiv 0$, o que garante também que existe um potencial para F , ou seja, existe uma função H tal que $F = \nabla H$.

Com $B = (a_{12} - a_{21})u + (a_{13} - a_{22})v \equiv 0$ o fluxo (B.1) pode ser reescrito apenas com quatro parâmetros,

$$F \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_{11}u^2 + 2a_{12}uv + a_{13}v^2 \\ a_{12}u^2 + 2a_{13}uv + a_{23}v^2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Mais, o maior autovalor, λ_+ , é estritamente maior que zero fora da origem se e só se D^2 é menor que $A^2 + C^2$ para todos os (u, v) que não a origem. Equivalentemente, o menor autovalor, λ_- , é estritamente

menor que zero nas mesmas condições. Por outro lado se existe um estado, que não a origem, onde D^2 é maior que $A^2 + C^2$ então existem duas rectas onde $\lambda_+ = 0$ e outras duas onde $\lambda_- = 0$. É fácil visualizar este facto atendendo que D é um plano e $\sqrt{A^2 + C^2}$ um cone (em casos não degenerados).

Como A e C são lineares em u e v em casos não degenerados,

$$(a_{11} - a_{22})(a_{13} + a_{22}) \neq (a_{12} - a_{23})(a_{12} + a_{21}), \quad (\text{B.6})$$

tem-se $A^2 + C^2 > 0$ qualquer que seja (u, v) diferente de zero. Então, os campos podem ser escritos como $\Omega_{\pm} = (\sin(\psi), -\cos(\psi) \pm 1)$ para $A^2 + C^2 \neq 0$ com $\cos(\psi) = A/\sqrt{A^2 + C^2}$ e $\sin(\psi) = C/\sqrt{A^2 + C^2}$; ou escritos como $\Omega_{\pm} = (\cos(\phi_{\pm}), \sin(\phi_{\pm}))$ onde

$$\tan(\phi_+) = \tan\left(\frac{\psi}{2}\right) \quad (\text{B.7a})$$

$$\tan(\phi_-) = -\cot\left(\frac{\psi}{2}\right) = \tan\left(\frac{\psi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{B.7b})$$

Pelas duas últimas expressões fica claro que os dois campos são ortogonais. Como só é importante a direcção do campo, e não o seu sentido, temos

$$\phi_+ = \frac{\psi}{2} \quad (\text{B.8a})$$

$$\phi_- = \frac{\psi}{2} - \frac{\pi}{2} \quad (\text{B.8b})$$

Define-se θ e r tais que $u = r \cos(\theta)$ e $v = r \sin(\theta)$. Tome-se a aplicação $(u, v) \rightarrow (A(u, v), C(u, v))$; fixando $r = 1$ obtemos como imagem uma elipse, da qual é fácil extrair ψ , ver Figura B.1.

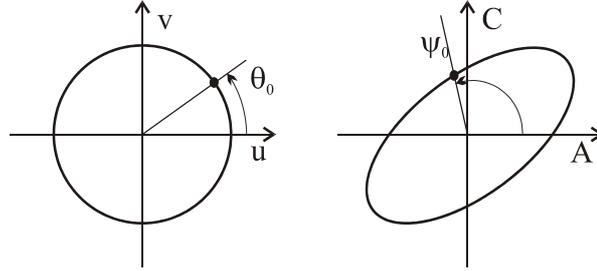


Figura B.1: Definição de θ e de ψ .

Pelas definições acima obtem-se $\psi(\theta)$ e $\phi_{\pm}(\psi(\theta)) = \phi_{\pm}(\theta)$ independentes de r e funções monótonas em θ . A rotação de ψ é inversa à de θ se e só se $\det \begin{bmatrix} A_u & A_v \\ C_u & C_v \end{bmatrix} < 0$, e directa caso contrário; como $\frac{d}{d\psi} \phi_{\pm}(\psi) = 1 > 0$ temos a mesma relação para a rotação directa e inversa de $\phi_{\pm}(\theta)$. Enquanto θ e ψ variam entre 0 e 2π , ϕ varia apenas de 0 a π ; mais, $\psi(\theta + \pi) = \psi(\theta) + \pi$, logo $\phi_{\pm}(\theta + \pi) = \phi_{\pm}(\theta) + \frac{\pi}{2}$, o que quer dizer que

$$\phi_{\pm}(\theta + \pi) = \phi_{\mp}(\theta) \quad (\text{B.9})$$

Dado $(u, v) \neq (0, 0)$ calcula-se θ e em seguida é possível calcular as direcções dos campos de autovectores, essas direcções são precisamente $\phi_{\pm}(\theta)$. Fica claro que os campos integrais dos autovectores não dependem de reescalonamento, logo podemos retirar um parâmetro do fluxo, fixando $a_{13} = 1$. Mais, uma rotação no espaço de estados também não altera as curvas integrais (nem B), logo o número de parâmetros de (B.5) é reduzido a dois, fixando $a_{23} = 0$ Schaeffer e Shearer obtiveram então a família de fluxos

$$F \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} au^2 + 2buv + v^2 \\ bu^2 + 2uv \end{pmatrix} \quad (\text{B.10})$$

para a qual provaram que existem apenas quatro configurações não degeneradas para as curvas integrais.

Existem três curvas no plano $a - b$, U , V e W , que separam, respectivamente, os fluxos de tipo I de II, II de III e III de IV, ver Figura B.2; são essas curvas

$$U = \left\{ a = \frac{3}{4}b^2 \right\} \quad (\text{B.11a})$$

$$V = \{ a = b^2 + 1 \} \quad (\text{B.11b})$$

$$W = \left\{ -32b^4 + (27 + 36 * (a - 2) - 4 * (a - 2)^2) b^2 + 4(a - 2)^3 = 0 \right\} \quad (\text{B.11c})$$

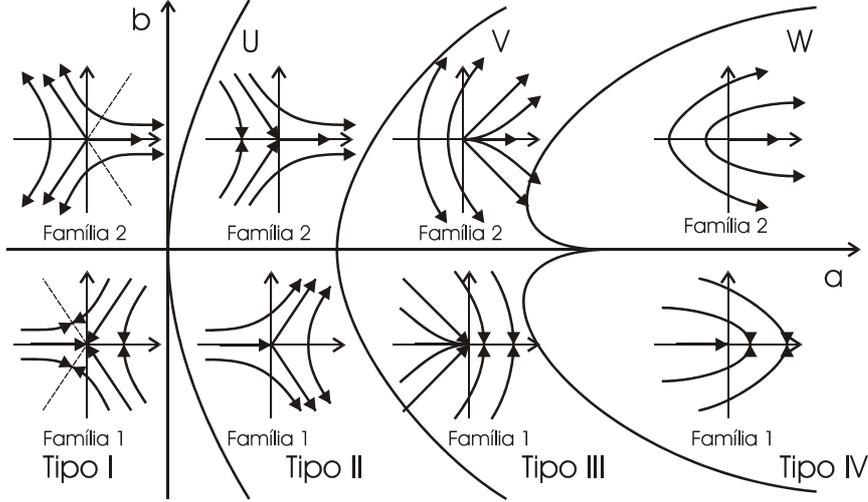


Figura B.2: Curvas U , V e W no plano $a - b$. Em cada região do plano estão esboçados exemplos dos campos para as duas famílias.

À esquerda da curva W temos fluxos que têm três direcções radiais, à direita temos apenas uma direcção radial. Ou seja, a curva W divide o plano em regiões onde cada uma das equações $\tan(\phi_{\pm}(\theta)) = \tan(\theta)$ tem uma e três raízes; cada direcção radial dá origem a uma rarefacção partindo do ponto umbílico.

À esquerda da curva V temos fluxos para os quais $\frac{d}{d\theta}\phi(\theta) < 0$, à direita temos $\frac{d}{d\theta}\phi(\theta) > 0$. Claramente, se $\frac{d}{d\theta}\phi(\theta) < 0$ existem três raízes para $\tan(\phi_{\pm}(\theta)) = \tan(\theta)$, por isso a curva V fica à esquerda de W .

À esquerda da curva U temos fluxos para os quais $\lambda_- < 0$ e $\lambda_+ > 0$ excepto na origem, enquanto que à direita de U existem duas rectas onde $\lambda_- = 0$ e outras duas onde $\lambda_+ = 0$. Esta curva não é importante para a forma das integrais dos campos de autovectores, mas torna-se importante quando se pensa em rarefacções, onde a crescimento do autovalor desempenha um papel relevante. O facto de os autovalores se tornarem zero não é relevante por si só; a importância advém de os autovalores serem cones com vertice na origem, e a existência, ou não, dessas rectas define o crescimento dos autovalores. Por exemplo, λ_+ é decrescente ao longo de semirectas que partem da origem se e só se existirem tais rectas onde $\lambda_+ = 0$, caso contrário λ_+ é crescente em todas as direcções.

Surpreendentemente o estudo dos choques é muito semelhante ao estudo das rarefacções pelo seguinte facto válido para fluxos quadráticos

$$F(U_R) - F(U_L) = DF(\bar{U})(U_R - U_L), \bar{U} = \frac{1}{2}(U_R + U_L) \quad (\text{B.12})$$

que permite escrever as condições de Rankine-Hugoniot

$$-(U_R - U_L)s + F(U_R) - F(U_L) = 0 \quad (\text{B.13})$$

da seguinte forma

$$(DF(\bar{U}) - s)(U_R - U_L) = 0 \quad (\text{B.14})$$

Resulta que s é autovalor de $DF(\bar{U})$ com autovector $(U_R - U_L)$.

Pensemos então do seguinte modo, fixando \bar{U} e calculamos θ tal que $\bar{u} = r \cos(\theta)$ e $\bar{v} = r \sin(\theta)$; é então possível calcular as duas autodirecções $\phi_{\pm}(\theta)$. Podemos concluir que $s = \lambda_{\pm}$ e qualquer par U_L e U_R sobre a recta que passa em \bar{U} com uma das direcções $\phi_{\pm}(\theta)$, e equidistantes do próprio \bar{U} , são solução das equações de Rankine-Hugoniot, ver Figura B.3. Todavia esta não é a forma mais usual de

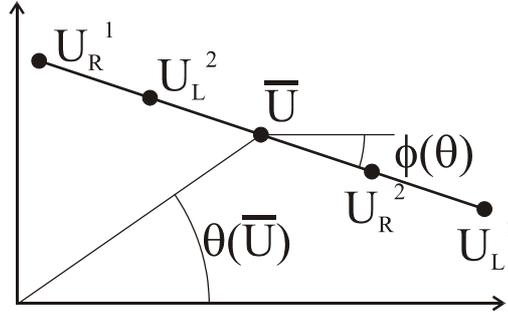


Figura B.3: Soluções das relações de Rankine-Hugoniot.

construir curvas de Rankine-Hugoniot; o mais natural é a construção de $\mathcal{H}(U_L)$, com U_L fixo, ver Figura B.4. Faz-se, de forma parecida, o seguinte: fixo U_L varia-se θ entre 0 e 2π calculando $\phi_{+}(\theta)$; o caso $\phi_{-}(\theta)$ será referido depois. Intersecta-se as rectas que passam em U_L com a direcções $\phi_{+}(\theta)$ com as que passam na origem com direcção θ ; esse ponto é \bar{U} . Toma-se então U_R sobre a recta que passa em U_L equidistante de \bar{U} .

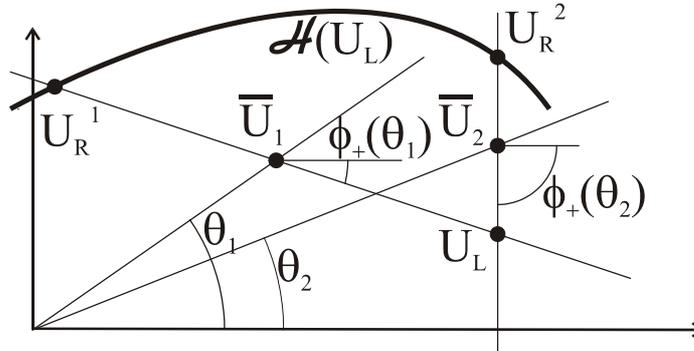


Figura B.4: Construção de $\mathcal{H}(U_L)$.

Atendendo à relação (B.9) temos que a construção com $\phi_{-}(\theta)$ resulta exactamente na mesma curva $\mathcal{H}(U_L)$, dado que as direcções θ e $\theta + \pi$ são a mesma.

B.2 Fluxo Não Homogéneo

Tomemos a família de Fluxos Quadráticos de Schaeffer e Shearer e adicionemos termos lineares,

obtemos

$$F \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} au^2 + 2buv + v^2 + d_1u + e_1v \\ bu^2 + 2uv + d_2u + e_2v \end{pmatrix} \quad (\text{B.15a})$$

$$DF \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} au + bv + d_1 & bu + v + e_1 \\ bu + v + d_2 & u + e_2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.15b})$$

De forma similar ao feito na secção anterior definimos A , B , C e D funções de u e v :

1. $2A = DF_{11} - DF_{22} = (a - 1)u + bv + d_1 - e_2$;
2. $2B = DF_{12} - DF_{21} = e_1 - d_2$;
3. $2C = DF_{12} + DF_{21} = 2bu + 2v + e_1 + d_2$;
4. $2D = DF_{11} + DF_{22} = (a + 1)u + bv + d_1 + e_2$.

Aqui apresenta-se útil realizar uma translação nas coordenadas (u, v) de forma a obtermos $d_1 = e_2$ e $d_2 = -e_1$. É de notar que uma translação não altera os parametros da parte homogénea. Ficamos então com o fluxo numa forma simplificada

$$F \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} au^2 + 2buv + v^2 + e_2u + e_1v \\ bu^2 + 2uv - e_1u + e_2v \end{pmatrix} \quad (\text{B.16})$$

e as funções

1. $2A = (a - 1)u + bv$;
2. $2B = 2e_1$;
3. $2C = 2bu + 2v$;
4. $2D = (a + 1)u + bv + 2e_2$.

Então os autovalores de DF são

$$\lambda_{\pm} = D \pm \sqrt{A^2 + C^2 - B^2} \quad (\text{B.17})$$

Queremos estudar problemas com Região Elíptica, logo temos que tomar $e_1 \neq 0$ ($B \neq 0$); pois assim origina-se uma Região Elíptica para $A^2 + C^2 < B^2 = e_1^2$. Por definição a Coincidência é $\mathcal{C} = \{(u, v) : A^2 + C^2 = B^2\}$ que, num caso genérico, é uma elipse no espaço de estados.

Os campos de autodirecções fora da Região Elíptica são

$$\Omega_{\pm} = \left(C + B, -A \pm \sqrt{A^2 + C^2 - B^2} \right) \quad (\text{B.18})$$

Sobre a Coincidência ambos os campos são paralelos a $(C + B, -A) = \vec{\omega}$ e genericamente transversais à Coincidência -paralelos apenas no ponto DRS (ver [6]). Na Região Elíptica temos $\text{Re}(\lambda) = D$, assim a derivada direccional de $\text{Re}(\lambda)$ na direcção do campo sobre a Coincidência é

$$D_{\vec{\Omega}}(\text{Re}(\lambda)) = \nabla D \cdot (C + B, -A) \quad (\text{B.19})$$

enquanto que as derivadas direccionais dos autovalores λ_{\pm} são

$$D_{\vec{\Omega}}(\lambda_{\pm}) = \nabla D \cdot (C + B, -A) \pm \nabla \left(\sqrt{A^2 + C^2 - B^2} \right) \cdot (C + B, -A) \quad (\text{B.20})$$

Podemos assim reescrever as derivadas como

$$D_{\vec{\Omega}}(\text{Re}(\lambda)) = K \quad (\text{B.21a})$$

$$D_{\vec{\Omega}}(\lambda_{\pm}) = K \pm |L| \quad (\text{B.21b})$$

Voltando aos campos $\Omega_{\pm} = (C + B, -A \pm \sqrt{A^2 + C^2 - B^2})$ definimos ψ tal que $\cos(\psi) = A/\sqrt{A^2 + C^2}$ e $\sin(\psi) = C/\sqrt{A^2 + C^2}$; β tal que $\cos(\beta) = \sqrt{A^2 + C^2 - B^2}/\sqrt{A^2 + C^2}$ e $\sin(\beta) = B/\sqrt{A^2 + C^2}$ com $\beta \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$ para $B < 0$ e $\beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ para $B > 0$. Assim podemos reescrever os campos como

$\Omega_{\pm} = (\sin(\psi) + \sin(\beta), -\cos(\psi) \pm \cos(\beta))$ ou como

$$\Omega_{\pm} = (\cos(\phi_{\pm}), \sin(\phi_{\pm})) \quad (\text{B.22a})$$

$$\phi_{+} = \frac{\psi}{2} - \frac{\beta}{2} \quad (\text{B.22b})$$

$$\phi_{-} = \frac{\psi}{2} + \frac{\beta}{2} - \frac{\pi}{2} \quad (\text{B.22c})$$

Os campos são ortogonais se e só se $\beta = 0$, ou seja, quando $B/\sqrt{A^2 + C^2} = 0$; isto nunca acontece pois definimos $B \neq 0$. Contudo $\beta \rightarrow 0$ quando $\sqrt{A^2 + C^2} \rightarrow \infty$. Os campos são paralelos se e só se $\beta = \pm\frac{\pi}{2}$, ou seja, para $B/\sqrt{A^2 + C^2} = \pm 1$, que é a condição para se estar em \mathcal{C} .

Como vimos o estudo dos choques para fluxos quadráticos é muito semelhante ao estudo dos campos de autovectores pelo seguinte facto

$$F(U_R) - F(U_L) = DF(\bar{U})(U_R - U_L), \bar{U} = \frac{1}{2}(U_R + U_L) \quad (\text{B.23})$$

que permite escrever as condições de Rankine-Hugoniot da seguinte forma

$$(DF(\bar{U}) - s)(U_R - U_L) = 0 \quad (\text{B.24})$$

Resulta que s é autovalor de $DF(\bar{U})$ com autovector $(U_R - U_L)$.

Conclusão B.1 *Nos modelos quadráticos qualquer choque (U_L, U_R, s) tem o ponto médio entre U_L e U_R fora da Região Elíptica. Se o modelo quadrático tiver como Região Elíptica uma elipse, então não existe nenhum choque com ambos os estados na Região Elíptica.*

É de notar que a Região Elíptica é sempre uma elipse quando se toma um fluxo da família de Schaeffer e Shearer. Contudo, apesar do nome, num caso geral a Região Elíptica pode ser definida por duas hipérbolas, ver [7]. Mais, com um fluxo geral, se a matrix de viscosidade for a identidade, nenhum choque entre dois estados na Região Elíptica possui Perfil Viscoso.

Apêndice C

Bifurcação de Hopf

Este apêndice foi retirado do Livro [1] com pequenas adaptações.

Definição C.1 *Seja $X(x) \in \mathbb{R}^2, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ um campo de vetores suave. Uma singularidade, X_* , satisfazendo $Tr(DX(X_*)) = 0$ e $Det(DX(X_*)) > 0$ é chamada de Singularidade de Hopf.*

Lema C.1 *Seja $X(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^2, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ um campo de vetores suave com uma singularidade de Hopf na origem. Então a forma normal de X é dada por*

$$\begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^N (y_1^2 + y_2^2)^k \left\{ \left[a_k \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + b_k \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} \right] \right\} + O(|y|^{2N+3}) \quad (\text{C.1})$$

onde $\beta = \sqrt{Det(DX(0))}$, $N \geq 1$ e $a_k, b_k \in \mathbb{R}$.

Definição C.2 (Singularidade de Hopf não degenerada) *Seja $X(x) \in \mathbb{R}^2, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ um campo de vetores suave com uma singularidade na origem satisfazendo*

$$Tr(DX(0)) = 0 \text{ e } Det(DX(0)) > 0 \quad (\text{C.2})$$

Se o parâmetro a_1 da forma normal (C.1) de $X(\mathbf{x})$ for diferente de zero então a origem é uma Singularidade de Hopf Não Degenerada.

Lema C.2 *Se o campo de vetores suave $X(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^2, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ tem uma Singularidade de Hopf Não Degenerada na origem, então em $\dot{\mathbf{x}} = X(\mathbf{x})$ a origem é um (onde a_1 é um parâmetro do sistema (C.1)):*

1. *foco estável se $a_1 < 0$;*
2. *foco instável se $a_1 > 0$.*

Teorema C.1 (Hopf) *Suponhamos que o sistema parametrizado $\dot{x} = X(\mu, \mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \mu \in \mathbb{R}$, tem um ponto fixo na origem para todos os valores do parâmetro real μ . Mais, suponhamos que os autovalores, $\lambda_1(\mu)$ e $\lambda_2(\mu)$, de $DX(\mu, 0)$ são imaginários puros para $\mu = \mu^*$. Se a parte real dos autovalores, $Re(\lambda_1(\mu)) = Re(\lambda_2(\mu))$, satisfaz*

$$\frac{d}{d\mu} [Re(\lambda_1(\mu))] |_{\mu=\mu^*} < 0 \quad (\text{C.3})$$

e a origem é um ponto fixo assintoticamente estável para $\mu = \mu^$, então:*

- $\mu = \mu^*$ é um ponto de bifurcação do sistema;
- para um μ inferior a μ^* numa vizinhança do próprio μ^* a origem é um foco instável rodeado por um ciclo limite estável cujo tamanho cresce com $\sqrt{\mu}$;
- para um μ superior a μ^* numa vizinhança do próprio μ^* a origem é um foco estável.

Lema C.3 *Seja $X(\mathbf{x}), \mathbf{x} = (x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ um campo de vectores suave. Se em algumas coordenadas temos*

$$X(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(\mathbf{x}) \\ g(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (\text{C.4})$$

então o parâmetro a_1 da forma normal (C.1) de $X(\mathbf{x})$ é dado por

$$16a_1 = \left\{ (f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy}) + \frac{1}{\beta} (f_{xy} [f_{xx} + f_{yy}] - g_{xy} [g_{xx} + g_{yy}] - f_{xx}g_{yy} + f_{yy}g_{yy}) \right\} \quad (\text{C.5})$$

Apêndice D

Bifurcações de Hopf e Bogdanov-Takens para Duas Leis de Conservação

Neste apêndice fazemos o estudo do Sistema de Duas de Equações Diferenciais Ordinárias Associado para um Fluxo qualquer e matriz de viscosidade igual à identidade. Para um estudo com matriz de viscosidade não múltiplo da identidade ver [4].

Começemos por enunciar dois resultados de Sistemas de Duas Equações Diferenciais Ordinárias (ver [1]):

1. Se tomarmos a família a um parâmetro, η , de Sistemas de Duas Equações Diferenciais Ordinárias $\dot{Y} = G(Y; \eta)$, então, genericamente, ocorre uma bifurcação de Hopf para o parâmetro η^* se:
 - (a) A origem é uma singularidade para todos os parâmetros, isto é, $\forall \eta G(0; \eta) = 0$ e
 - (b) Para o parâmetro η^* vale $Tr(DG(0; \eta^*)) = 0$ e $Det(DG(0; \eta^*)) > 0$.
2. Se tomarmos a família a dois parâmetros, η e ξ , de Sistemas de Duas Equações Diferenciais Ordinárias $\dot{Y} = G(Y; \eta, \xi)$, então, genericamente, ocorre uma bifurcação de Bogdanov-Takens para os parâmetros η^* e ξ^* se:
 - (a) A origem é uma singularidade para todos os parâmetros, isto é, $\forall \eta, \xi G(0; \eta, \xi) = 0$ e
 - (b) Para o parâmetro η^* vale $Tr(DG(0; \eta^*, \xi^*)) = 0$ e $Det(DG(0; \eta^*, \xi^*)) = 0$.

Teorema D.1 *Tomemos as duas Leis de Conservação (2.1) com um Fluxo qualquer e Matriz de Viscosidade igual à identidade. Suponhamos que existe Região Elíptica. Temos, genericamente, o seguinte:*

1. *Para todo o $U_L \in \mathcal{R}_E$ existe um s^* tal que a família, de parâmetro s , dos Sistemas de Duas de Equações Diferenciais Ordinárias Associados a (U_L, s) tem uma bifurcação de Hopf para s^* ;*
2. *Para toda a família de estados $U_L(\eta)$ tal que existe um η^* para o qual $U_L(\eta^*) \in \mathcal{C}$, existe então um s^* tal que a família, de parâmetros η e s , do Sistema de Duas de Equações Diferenciais Ordinárias Associados a $(U_L(\eta), s)$ tem uma bifurcação de Bogdanov-Takens para (η^*, s^*) .*

Prova. Tomemos então as Leis de Conservação (2.1). Os autovalores de $DF(U)$ são

$$2\lambda_{\pm}(U) = -Tr(DF(U)) \pm \sqrt{Tr(DF(U))^2 - 4Det(DF(U))} \quad (D.1)$$

logo a Região Elíptica é dada por

$$Tr(DF(U))^2 - 4Det(DF(U)) < 0 \quad (D.2)$$

e a Coincidência é dada por

$$Tr(DF(U))^2 - 4Det(DF(U)) = 0 \quad (D.3)$$

Façamos a translação $X = U - U_L$, obtemos

$$X_t + DF(X + U_L)X_x = 0 \quad (D.4)$$

e o Sistema de Duas Equações Diferenciais Ordinárias Associado

$$\dot{X}(X) = -sX + F(X + U_L) - F(U_L) \quad (D.5)$$

onde claramente $X = 0$ é uma singularidade quaisquer que sejam U_L e s ; esta foi a razão da translação. A diferencial do campo é

$$D\dot{X}(X) = -sI + DF(X + U_L) \quad (D.6)$$

Daqui tiram-se as seguintes relações

$$Tr(D\dot{X}(X)) = Tr(DF(X + U_L)) - 2s \quad (D.7a)$$

$$Det(D\dot{X}(X)) = Det(DF(X + U_L)) - sTr(DF(X + U_L)) + s^2 \quad (D.7b)$$

Voltemos ao nosso Sistema de Duas Equações Diferenciais Ordinárias (D.5) e fixemos U_L . Obtemos uma família a um parâmetro, s , onde claramente a origem é sempre uma singularidade. As condições necessárias para ocorrer uma bifurcação de Hopf são

$$Tr(D\dot{X}(0; s^*)) = 0 \quad (D.8a)$$

$$Det(D\dot{X}(0; s^*)) > 0 \quad (D.8b)$$

ou seja, pelas relações (D.7), as condições (D.8) ficam

$$Tr(DF(U_L)) = 2s^* \quad (D.9a)$$

$$Det(DF(U_L)) - s^*Tr(DF(U_L)) + s^{*2} > 0 \quad (D.9b)$$

É sempre possível tomar s^* tal que a primeira equação seja satisfeita, então eliminamos s^* e ficamos com

$$4Det(DF(U_L)) - Tr(DF(U_L)) > 0$$

que não é nada mais do que a equação (D.2) para $U = U_L$. Assim podemos concluir que genericamente ocorre uma bifurcação de Hopf para o Sistema de Duas Equações Diferenciais Ordinárias a (U_L, s) se e só se U_L está na Região Elítica e $2s^* = Tr(DF(U_L))$.

Voltemos novamente ao Sistema de Duas Equações Diferenciais Ordinárias (D.5) e tomemos uma família a um parâmetro, ξ , de estados à esquerda, $U_L(\xi)$. Obtemos uma família de Sistemas de Duas Equações Diferenciais Ordinárias a dois parâmetros, s e ξ , onde, mais uma vez, a origem é sempre uma singularidade. As condições necessárias para ocorrer uma bifurcação de Bogdanov-Takens são

$$Tr(D\dot{X}(0; s^*)) = 0 \quad (D.10a)$$

$$Det(D\dot{X}(0; s^*)) = 0 \quad (D.10b)$$

ou seja, pelas relações (D.7), as condições (D.10) ficam

$$Tr(DF(U_L(\xi^*))) = 2s^* \quad (D.11a)$$

$$Det(DF(U_L(\xi^*))) - s^*Tr(DF(U_L(\xi^*))) + s^{*2} = 0 \quad (D.11b)$$

É sempre possível tomar s^* tal que a primeira equação seja satisfeita, então eliminamos s^* e ficamos com

$$4Det(DF(U_L(\xi^*))) - Tr(DF(U_L(\xi^*))) = 0$$

que não é nada mais do que a equação (D.3) para $U = U_L(\xi^*)$. Assim podemos concluir que genericamente ocorre uma bifurcação de Bogdanov-Takens para o Sistema de Duas Equações Diferenciais Ordinárias Associado a (U_L, s) se e só se U_L está na Coincidência e $2s = Tr(DF(U_L))$. ■

Bibliografia

- [1] D. K. Arrowsmith e C. M. Place: *An Introduction to Dynamical Systems*, **Cambridge University Press**, 1990.
- [2] A. Azevedo: *Soluções Fundamentais Múltiplas em Sistemas de Leis de Conservação Hiperbólicas-elípticas*, **Pontifícia Universidade Católica RJ**, Tese de Doutorado, 1991.
- [3] S. Čanić: *Nonexistence of Riemann Solutions for a Quadratic Model Deriving from Petroleum Engineering*, **Nonlinear Anal.: Real World Appl.**, Vol. 4, pp 373-408, 2003.
- [4] S. Čanić e B. Plohr: *Shock Wave Admissibility for Quadratic Conservation Laws*, **J. Diff. Eq.**, Vol. 118, pp 293-335, 1995.
- [5] R. Courant e Friedrichs: *Supersonic Flow and Shock Wave*, **John Wiley & Sons**, New York, NY, 1948.
- [6] F. Dumortier, R. Roussarie, J. Sotomayor e H. Żoladek: *Bifurcations of Planar Vector Fields - Nilpotent Singularities and Abelian Integrals*, **Lecture Notes in Mathematics**, Vol. 1480, **Springer-Verlag**, 1991.
- [7] C. Eschenazi, **Pontifícia Universidade Católica RJ**, Tese de Doutorado, 1992.
- [8] H. Frid, I. Liu: *Oscillation waves in Riemann problems inside elliptic regions for conservation laws of mixed type*, **ZAMP: Z angew Math. Phys.**, Vol. 46, pp 913-930, 1995.
- [9] I. M. Gel'fand: *Some Problems in Theory of Quasilinear Equations*, **English Transl. in Amer. Mat. Soc. Transl.**, Ser. 2, N. 29, pp 295-381, 1963.
- [10] H. Holden: *On the Riemann Problem for a Prototype of a Mixed Type Conservation Law*, **Comm. Puer Appl. Math.**, Vol XL, pp 229-264, 1987.
- [11] E. Isaacson, D. Marchesin, C. F. Palmeira, B. Plohr: *A Global Formalism for Nonlinear Waves in Conservation Laws*, **Commun. Math. Phys.**, Vol. 146, pp 505-552, 1992.
- [12] E. Isaacson, D. Marchesin e B. Plohr: *Transitional Waves for Conservation Laws*, **SIAM J. Math. Anal.**, Vol. 21, N. 4, pp 837-866, July 1990.
- [13] B. Plohr, D. Marchesin: *Evolve*, programa de integração numérica.
- [14] E. Isaacson, D. Marchesin, B. Plohr, et al.: *Riemann Problem Solver Package*, programa para o cálculo de Problemas de Riemann, **www.ams.sunys.edu**.
- [15] E. Isaacson, D. Marchesin, B. Plohr e B. Temple: *The Riemann Problem near a Hyperbolic Singularity: The Classification of Solutions of Quadratic Riemann Problems I*, **SIAM J. Appl. Math.**, Vol. 48, N. 5, pp 1009-1032, October 1998.
- [16] P. D. Lax: *Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, **Commun. Pure Appl. Math.**, Vol. X, pp 537-566, 1957.
- [17] D. Marchesin e C. F. Palmeira: *Topology of Elementary Waves for Mixed-Type Systems of Conservation Laws*, **J. Dyn. Diff. Eq.**, Vol. 6, N. 3, 1994.

- [18] C. F. Palmeira: *Line Fields Defined by Eigenspaces of Derivatives of Maps from the Plane to Itself*, **Proceedings of the VI International Conference of Differential Geometry**, Santiago de Compostela, Espanha, pp 177-205, 1988.
- [19] D. Schaeffer e M. Shearer: *The Classification of 2×2 Systems of Non-strictly Hyperbolic Conservation Laws, with Application to Oil Recovery*, with Appendix by D. Marchesin, P. J. Paes-Leme, D. Schaeffer e M. Shearer, **Comm. Pure Appl. Math.**, Vol. 15, pp 141-178, 1987.
- [20] S. Schecter, D. Marchesin e B. Plohr: *Structurally Stable Riemann Solutions*, Journ. Diff. Eq., Vol. 126, pp 303-354, 1996.
- [21] J. Smoller: *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, **Springer-Verlag**, 1983.
- [22] A. Souza: *Stability of Singular Fundamental Solutions under Perturbations for Flow in Porous Media*, **Mat. Aplic. Comp.**, Vol. 11, N. 2, pp 73-115, 1992.
- [23] University of Waterloo's Symbolic Computation Group, et al: *Maple*, programa de computação simbólica, **www.maplesoft.com**.
- [24] B. Wendroff: *The Riemann Problem for Materials with Convex Equations of State II: General Flow*, **J. Math. Anal. Appl.**, Vol. 38, pp 640-658, 1972.