Trajetórias log-quadráticas e algoritmos de path-following para o Problema de Complementaridade Monótono

Mauricio Romero Sicre
Orientador: Benar Fux Saviter

10 de Julho de 2003

Conteúdo

Introdução

0.1 Motivação

Muitos problemas práticos importantes são instâncias particulares do *Problema de Complementaridade Monótono*, que é definido como: Dado $T : \mathbf{R}^n \rightrightarrows \mathbf{R}^n$ um operador monótono maximal, encontrar

$$x^* \in \mathbf{R}^n_+ \text{ tal que } \exists\, y^* \in T(x^*), \quad y^* \in \mathbf{R}^n_+, \quad x_i^* y_i^* = 0,\ i = 1, \cdots, n.$$

O *Problema de Programção Linear* e o *Problema de Programação Quadrática* são casos particulares do *Problema de Complementaridade Monótono.*

Para a resolução do problema de complementaridade monótono, os métodos de pontos interiores constituem uma ferramente de excelência, tanto teórica quanto prática.

Em 1979 Khachian [27], apresentou o primeiro algoritmo de complexidade polinomial para a resolução do Problema de Programação Linear. Entretanto, este algoritmo era pouco eficiente em problemas práticos, comparado com o Método Simplex de Dantzig [16]. Em 1984 Karmarkar [26] apresentou o primeiro algoritmo para programacão linear com complexidade polinomial e com desempenho computacional competitivo com o Simplex em problemas de grande porte. Este trabalho se tornou célebre e gerou uma grande atividade de pesquisa no campo dos algoritmos de pontos interiores. A bibliografia desta nova area é muito extensa, e inclui os trabalhos [18], [19],

. Muitos resultados na teoría de algoritmos de pontos interiores para o Problema de Programação Linear foram estendidos ao Problema de Programação Quadrática e também ao Problema de Complementaridade Monótono, linear e não-linear, [20], [21], [32], [28], [54],[23], [4], [5], [54], [47], [36], [53], [51], [50].

Sob condições de regularidade o Problema de Complementaridade Monótono é um caso particular do problema de achar um zero de um operador monótono maximal. Um método clássico para achar um zero de um operador monótono maximal é o *Método de Ponto Proximal*, proposto por Rockafellar em [40]. Aplicado ao problema de minimização irrestrita de uma função convexa f, este método minimiza em cada iteração a função $f(x)+\mu_k\|x-x^k\|^2$. Para garantir a convergência, o parâmetro μ_k não precisa convergir a 0 e os erros associados à resolução aproximada dos sub-problemas de minimizaçã em cada iteração devem ser somáveis. No caso de problemas com restrições, os sub-problemas restritos são tão difíceis (ou quase tão difíceis) quanto o problema original. Para contornar esta dificuldade foram desenvolvidos os *Métodos de Ponto Proximal Generalizado*, nos quais o termo quadrático $\|.\|^2/2$ é substituido por um funcional $\rho(x_{k+1}, x_k)$ que incorpora as restrições impostas pelo conjunto viável, restringindo os iterandos ao interior do conjunto. Os principais funcionais de regularização/penalização empregados nestes métodos foram as distâncias de Bregman [7], [45] e as ϕ-divergências [48], [3]. Quando aplicados a problemas variacionais, os métodos de Ponto Proximal Generalizado requerem hipóteses restritivas sobre o operador T, como pseudo-monotonia ou para-monotonia.

Em trabalhos recentes [1, 2], Auslander, Teboulle e Ben-Tiba, propõem um novo método proximal generalizado, no contexto de optimização convexa e de forma mais geral para o Problema de Complementaridade Monótono. Nestes trabalhos os autores definem uma nova família de funcionais regularizadores, que tem a grande vantagem de só precissar que o conjunto de soluções seja não vázio, para obter os resultados de convergência. A chamada função *log-quadrática* pertence à familia em questão e tem a propriedade de ser uma função auto-concordante (ver [37]), o que poderia facilitar a resolução de maneira eficiente dos problemas proximais pelo método de Newton. Posteriormente, Burachik e Svaiter [11], estenderam os resultados usando a mesma família de funcionais regularizadores, mas considerando um método proximal regularizado com critério de erro híbrido e o conceito de ϵ-extensão de um operador monótono.

Motivados pelos resultados, até aqui mencionados, nosso propósito neste trabalho é a apresentação de um algoritmo de pontos interiores polinomialmente convergente, após um número finito de pasos de um algoritmo tipo-proximal generalizado. Para isto, introduziremos uma trajetória central, associada a uma função barreira tipo log-quadrática e estudaremos questões de interesse, e.g. boa definição, contínuadade e convergência ao conjunto solução. Finalmente, no caso do problema de complementaridade linear monótono, apresentaremos dois algoritmos *path-following* tipo *short-step*.

Este trabalho está estruturado da seguinte forma:

No Capítulo 1 apresentamos algumas definições e resultados preliminares relacionadas aos conceitos de operador monótono maximal e ϵ-extensão de um operador monótono maximal. Consideramos vários problemas envolvendo operadores monótonos maximais. Também apresentamos o Método do Ponto Proximal clássico, com o critério de erro somável e o método de ponto proximal híbrido de Solodov-Svaiter [44], com seu critério de erro relativo. No Capítulo 2 introduzimos as *trajetórias log-quadráticas* e estudamos suas caraterísticas de maior interesse, para a formulação de algoritmos tipo *path-following*, globalmente convergentes. Provaremos que a trajetória está bem definida, é contínua e, sob hipóteses de linearidade do operador ou complementaridade estrita, converge ao conjunto solução. Queremos enfatizar que para a definição de trajetória e o estudo de suas propriedades, não precissaremos da hipótese de factibilidade estrita, sempre presente na literatura relacionada com o estudo de algoritmos de pontos interiores. No Capítulo 3 apresentamos dois algoritmos de *path-following*, basicamente tipo *short-step*, e que correspondem às duas trajetórias definidas e estudadas no Capítulo 2. Provaremos que os algoritmos são globalmente convergentes e apresentaremos resultados de complexidade.

0.2 Notações

Ao longo deste trabalho usaremos as seguintes notações:

•$e = (1, 1, \ldots, 1)^t$.

Dado $x \in \mathbf{R}^n$:

- $x \geq 0,$ denota $x_i \geq 0$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
- $x^\alpha = (x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha)$ onde $\alpha \in \mathbf{R}$.
- Dado um conjunto $I = \{i_1, i_2, ..., i_p\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, denotamos $x_I = (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_p})$.
- $X^\alpha = diag(x_1^\alpha, x_2^\alpha, \ldots, x_n^\alpha)$, onde $\alpha \in \mathbf{R}$.

Dado uma matriz definida positiva A:

- $\|d\|_A = (d^t A d)^{1/2}$

$T : \mathbf{R}^n \rightrightarrows \mathbf{R}^n$ denota que o operador T é multivaluado. Diremos também que o operador é ponto-conjunto, caso contrario diremos que o operador é ponto-ponto. O *domínio*, a *imagem* e o *gráfico* de T são, respectivamente:

$$\begin{aligned} D(T) &= \{x \in \mathbf{R}^n \mid T(x) \neq \emptyset\}, \\ R(T) &= \{v \in \mathbf{R}^n \mid \exists\, x, v \in T(x)\}, \\ G(T) &= \{(x, v) \mid v \in T(x)\}. \end{aligned}$$

Dado um conjunto $C \subseteq \mathbf{R}^n$ convexo e fechado:

- C^0, denota o interior de C.
- $d(x, C) = \min_{y \in C} \|x - y\|$.
- $P_C =$ projeção ortogonao sobre C.

A notação $\|.\|$, sem maiores especificações, denota a norma euclideana, i.e. $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$.

- I_d denota o operador identidade.
- $\bar{\mathbf{R}} := \mathbf{R} \cup -\infty \cup +\infty$.

Capítulo 1

Definições e resultados preliminares

Neste capítulo apresentaremos de forma resumida algumas definições básicas e resultados úteis para nosso trabalho. O capítulo está estruturado da seguinte forma: na Seção 1.1 apresentaremos resultados relacionados ao conceito de operador monótono maximal, bem como resultados conhecidos sobre a estrutura da imagem e a maximalidade da soma de operadores monótonos maximais. Também apresentaremos o conceito de ϵ-extensão de um operador monótono maximal, introduzido em [8]. Na Seção 1.2 definiremos o Problema de Complementaridade Monótono e o Problema de Desigualdade Variacional. Apresentaremos o Método do Ponto Proximal Clássico e os critérios de erro nas variantes inexatas do método, com ênfase no método híbrido e a teoria de erro relativo de Solodov-Svaiter. Também apresentaremos, de forma resumida, os resultados principais de dois trabalhos relacionados ao estudo de trajetórias centrais, [22], [25]. Finalizaremos na Seção 1.4 com alguns resultados técnicos que usaremos posteriormente.

1.1 Operadores monótonos maximais

1.1.1 Definições e exemplo

A seguir apresentamos algumas definições e resultados básicos de análise convexa e da teoria de operadores monótonos. Embora muitos destes sejam válidos em espaços de Hilbert e mesmo em espaços de Banach, vamos nos restringir a espaços de dimensão finita.

Seja $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow (-\infty, +\infty]$. A função f é *convexa* se

$$f\big(\alpha x + (1-\alpha)y\big) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y), \ \forall x, y \in \mathbf{R}^n, \ \forall \alpha \in [0,1].$$

Se, além disto, f não for identicamente $+\infty$, então ela é é convexa *própria.* Uma condição mais restritiva que a convexidade é a convexidade forte. A função f é *fortemente convexa*, com *parâmetro de convexidade forte* $\gamma > 0$ se

$$f\big(\alpha x + (1-\alpha)y\big) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) - (\gamma/2)\alpha(1-\alpha)\|x-y\|^2, \\ \forall x, y \in \mathbf{R}^n, \ \forall \alpha \in [0,1].$$

O *subdiferencial* de uma função convexa própria $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ é a aplicação $\partial f : \mathbf{R}^n \rightrightarrows \mathbf{R}^n$ definida por

$$\partial f(x) = \{v \in \mathbf{R}^n \mid f(y) \geq f(x) + \langle v, y - x\rangle, \ \forall y \in \mathbf{R}^n\}.$$

Proposição 1.1.1. *Seja $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ uma função fortemente convexa, própria, com parâmetro de convexidade γ. Então, para todo $x, y \in \mathbf{R}^n$ e $v \in \partial f(x)$,*

$$f(y) \geq f(x) + \langle v, x' - x\rangle + (\gamma/2)\|x' - x\|^2.$$

Seja $T : \mathbf{R}^n \rightrightarrows \mathbf{R}^n$. O operador T é *monótono* se

$$\forall (x, v), \ (x', v') \in G(T) \Rightarrow \langle v - v', x - x'\rangle \geq 0.$$

Como veremos a seguir, convexidade e monotonia estão fortemente relacionadas. O operador T é *fortemente monótono*, com *parâmetro de monotonía forte* $\gamma > 0$, se :

$$\forall (x, v),\ (x', v') \in G(T) \text{ temos } \langle v - v', x - x' \rangle \geq \gamma \|x - x'\|^2.$$

Observemos que se f é uma função convexa em $\mathbf{R}^n$, então ∂f e monótono. Se f é fortemente convexa, com parâmetro γ, então ∂f e fortemente monótono com o mesmo parâmetro γ.

Um operador $T : \mathbf{R}^n \rightrightarrows \mathbf{R}^n$ é *monótono maximal* se é monótono e seua gráfica não está estritamente contida na gráfica de qualquer outro operador monótono, isto é,

$$\begin{aligned} &T \text{ monótono e} \\ &\hat{T} \text{ monótono}, G(T) \subseteq G(\hat{T}) \Rightarrow \hat{T} = T. \end{aligned}$$

O próximo resultado foi provado por Rockafellar, no contexto de espaços de Banach [38].

Teorema 1.1.2. *Seja* $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ *uma função convexa própria, semicontinua inferiormente, então* ∂f *é monótono maximal.*

Os operadores monótonos maximais têm muitas propriedades interessantes, a seguir veremos algumas.

Proposição 1.1.3. *Se* $T : \mathbf{R}^n \rightrightarrows \mathbf{R}^n$*, é monótono maximal, então*

- *o operador* $T^{-1} : \mathbf{R}^n \rightrightarrows \mathbf{R}^n$ *definido por*

$$T^{-1}(w) = \{x \mid w \in T(x)\},$$

também é monótono maximal,

- *para todo* $x \in \mathbf{R}^n$, $T(x)$ *é um conjunto convexo e fechado,*

- *para todo $w \in \mathbf{R}^n$, $T^{-1}(w)$ é um conjunto convexo e fechado,*

- *$G(T)$ é fechado.*

Demonstração. Ver [17, Proposição 2.9], [6, Corolário 2.5]. $\square$

Seja $C \subseteq \mathbf{R}^n$ um conjunto convexo e fechado. O *operador normalizador* do conjunto C é o operador $N_C : \mathbf{R}^n \rightrightarrows \mathbf{R}^n$

$$N_C(x) = \begin{cases} \{w \in \mathbf{R}^n \mid \langle w, y - x\rangle \leq 0, \ \forall y \in C\}, & \text{se } x \in C \\ \emptyset, & \text{em outro caso.} \end{cases}$$

A *função indicadora* de $C \subseteq \mathbf{R}^n$ é definida como $\delta_C : \mathbf{R}^n \longrightarrow R \cup \{+\infty\}$,

$$\delta_C = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in C \\ +\infty, & \text{em outro caso.} \end{cases}$$

Observemos que se o conjunto $C \subset \mathbf{R}^n$ é convexo, fechado e não-vazio, então δ_C é convexa, própria semicontinua inferiormente e

$$N_C = \partial \delta_C \, .$$

Portanto, neste caso, N_C é monótono maximal.

1.1.2 Soma e imagem de operadores monótonos maximais.

Da definição de monotonia, segue-se imediatamente que a soma de operadores monótonos dá como resultado um novo operador monótono, mas em geral a maximalidade não é preservada da mesma forma. O problema da maximalidade da soma de operadores monótonos maximais é um problema de grande interesse. A continuação apresentamos um conhecido resultado de Rockafellar, que foi provado em espaços de Banach reflexivos [39, Teorema 1].

Teorema 1.1.4. *Sejam $T_1 : \mathbf{R}^n \rightrightarrows \mathbf{R}^n$ e $T_2 : \mathbf{R}^n \rightrightarrows \mathbf{R}^n$ monótonos maximais tais que $D(T_1) \cap D(T_2)^0 \neq \emptyset$. Então $T_1 + T_2$ é monótono maximal.*

O estudo da imagem de operadores monótonos maximais também é um problema de grande interesse. A seguir apresentamos alguns resultados. O seguinte resultado foi obtido por Minty, em espaços de Hilbert [33].

Teorema 1.1.5. *Seja $T : \mathbf{R}^n \rightrightarrows \mathbf{R}^n$ monótono maximal, então $R(T+I_d) = \mathbf{R}^n$.*

Teorema 1.1.6. *Seja $T : \mathbf{R}^n \rightrightarrows \mathbf{R}^n$ monótono maximal. Se T é fortemente monótono, então $R(T) = \mathbf{R}^n$.*

Demonstração. Ver [6] Corolario 2.4. □

1.1.3 ϵ-Extensão de um operador monótono maximal

Em [8] foi introduzido o conceito de *ϵ-extensão* de um operador; vamos lembrar sua definição.

Dado $\epsilon \geq 0$, a *ϵ-extensão* de $T : \mathbf{R}^n \rightrightarrows \mathbf{R}^n$ é o operador $T^{[\epsilon]} : \mathbf{R}^n \rightrightarrows \mathbf{R}^n$,

$$T^{[\epsilon]}(x) = \left\{ v \mid \langle v - v', x - x' \rangle \geq -\epsilon, \text{ para todo } x' \in \mathbf{R}^n, \, v' \in T(x') \right\}.$$

É fácil verificar que:

$$\begin{aligned} &\text{Para } \epsilon^{'} \geq \epsilon, \text{ temos } T^{[\epsilon]}(x) \subset T^{[\epsilon']}(x). \\ &\text{Se } T \text{ é monótono maximal, } T^{[0]}(x) = T(x). \end{aligned}$$

O conceito de ϵ-extensão e suas propriedades foram generalizadas a espaços de Hilbert e a espaços de Banach [9, 10]. Aplicações da ϵ-extensão de um operador monótono podem ser encontradas em [41]. De forma geral, a ϵ-extensão é usada para relaxar relações de inclusão nos sistemas proximais a serem resolvidos em cada iteração de algoritmos de tipo ponto proximal.

O resultado que enunciaremos a seguir foi provado em [11, Lema 2.2]

Lema 1.1.7. *Seja $T : \mathbf{R}^m \rightrightarrows \mathbf{R}^m$, monótono maximal tal que $D(T) \subseteq \mathbf{R}^m_+$. Se $v \in T(x)$ e $u \in R^n_+$, então*

$$v - u \in T^{[\varepsilon]}(x),$$

com $\varepsilon = \langle x, u \rangle$.

Iremos necessitar a seguinte extensão trivial do lema anterior.

Lema 1.1.8. *Seja* $T : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \rightrightarrows \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ *monótono maximal, tal que* $D(T) \subseteq \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m_+$. *Se* $(v, w) \in T(x, y)$ *e* $u \in \mathbf{R}^m_+$, *então*

$$(v, w - u) \in T^{[\varepsilon]}(x, y),$$

com $\varepsilon = \langle u, y \rangle$.

Demonstração. Tome $(v', w') \in T(x', y')$. Temos

$$\begin{aligned}
&\Big\langle (v', w') - (v, w - u), (x', y') - (x, y) \Big\rangle \\
&\qquad = \Big\langle (v', w') - (v, w), (x', y') - (x, y) \Big\rangle + \Big\langle (0, u), (x', y') - (x, y) \Big\rangle \\
&\qquad \geq \Big\langle (0, u), (x', y') - (x, y) \Big\rangle = \langle u, y' \rangle - \langle u, y \rangle \geq -\langle u, y \rangle,
\end{aligned}$$

onde a primeira desigualdade segue da monotonia do operador T, e a segunda desigualdade segue da não-negatividade de u e y'. □

1.2 Problemas envolvendo operadores monótonos maximais

1.2.1 O Problema de Complementaridade Monótono

Vamos recordar a definição formal do *Problema da Complementaridade Monótono*: Dado $T : \mathbf{R}^n \rightrightarrows \mathbf{R}^n$ um operador monótono maximal, encontrar

$$x^* \geq 0 \text{ tal que } \exists\ w^* \in T(x^*);\ w^* \geq 0,\ x_i^* w_i^* = 0,\ i = 1, \cdots, n. \qquad (1.1)$$

A notação para este problema será $MCP(T)$. No caso em que o operador monótono maximal T for linear, denotaremos o problema por $LMCP(T)$.

Diremos que o problema $MCP(T)$ satisfaz a *condição de factibilidade estrita* se

$$\text{Existem } x, y \in \mathbf{R}^n \text{ tais que } y \in T(x) \text{ e } x, y > 0.$$

Vamos denotar o conjunto de soluções do $MCP(T)$, por $S_{MC}(T)$. Diremos que (x^*, y^*) satisfazendo (1.1) são *soluções complementares* do problema $MCP(T)$. Usaremos a notação

$$S^*_{MC}(T) = \{(x^*, y^*) \mid (x^*, y^*) \text{ satisfazem } (1.1)\}. \tag{1.2}$$

As soluções complementares $(x^*, y^*) \in S^*_{MC}(T)$ são *estritamente complementares* se

$$x^*_i > 0 \text{ ou } y^*_i > 0, \quad i = 1, \cdots, n.$$

Alternativamente, dizemos que (x^*, y^*) satisfazem a *condição de complementaridade estrita*. Vamos denotar o conjunto destes pontos por $S^*_{EMC}(T)$. O $MCP(T)$ é *não degenerado* se existirem soluções estritamente complementares, caso contrario o $MCP(T)$ é *degenerado*.

Associados a $MCP(T)$, definiremos os conjuntos

$$\begin{aligned} I &:= \{i \in \{1, \dots, n\} \mid \text{ existe } (x^*, y^*) \in S^*_{MC}(T), \text{ com } x^*_i > 0\}, \\ J &:= \Big\{j \in 1, \dots, n \mid \text{ existe } (x^*, y^*) \in S^*_{MC}(T), \text{ com } y^*_j > 0\Big\}, \\ K &:= \{1, \dots, n\} \setminus \{I \cup J\}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

O conjunto de soluções complementares $S^*_{MC}(T)$ é convexo e fechado (ver [22, Lema 2.3]). No caso em que o $MCP(T)$ é não degenerado, prova-se que a estrutura dos zeros das soluções estritamente complementares é invariante; ou seja, para toda solução estritamente complementar, (x^*, y^*), vale que $x^*_j = 0$ para todo $j \in J$ e $y^*_i = 0$ para todo $i \in I$.

Seguindo a notação de McLinden [31], para $v \in \mathbf{R}^n$ definiremos o *suporte* de v:

$$\sigma(v) = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid v_i > 0\},$$

e consideraremos a ordem parcial em $\mathbf{R}^n$ definida por:

$$v \preceq u \text{ se } \sigma(v) \subseteq \sigma(u).$$

Dois vetores são ditos equivalentes, denotando-se $u \sim v$, se $u \preceq v$ e $v \preceq u$, isto é $\sigma(u) = \sigma(v)$. Um elemento $u \in U \subset \mathbf{R}^n$ é dito $\preceq$-*maximal* de U, se

$$v \in U \text{ e } u \preceq v \Longrightarrow v \sim u.$$

É obvio que todo conjunto $U \subseteq \mathbf{R}^n$, tem pelo menos um elemento maximal. Guler e Ye [23], fizeram a seguinte observação:

> "Seja $U \subset \mathbf{R}^n$ um conjunto convexo. Então todos os elementos maximais de U são equivalentes."

Note-se que, em particular, a observação anterior implica em que no caso $U \subseteq \mathbf{R}^n_+$, a estrutura dos zeros dos elementos maximais do conjunto U é invariante; ou seja, se $z^*_i = 0$ para algum z^*, elemento maximal de U, então $z_i = 0$ para todo $z \in U$.

Observação 1.2.1.

1. *Os comentarios anteriores, aplicados ao conjunto $S^*_{MC}(T)$, implicam em que para todo (x^*, y^*), elemento maximal de $S^*_{MC}(T)$, vale que $x^*_i > 0$ para todo $i \in I$, $y^*_j > 0$ para todo $j \in J$ e $x^*_k = y^*_k = 0$ para todo $k \in K$.*

2. *Sob hipótese de complementaridade estrita, $S^*_{EMC}(T)$ é o conjunto de elementos maximais de $S^*_{MC}(T)$. Logo, considerando $(x^*, y^*) \in S^*_{EMC}(T)$, segue do item 1) e da condição de complementaridade, $\langle x^*, y^* \rangle = 0$, que $x^*_j = 0$ para todo $j \in J$ e $y^*_i = 0$ para todo $i \in I$.*

Para um resumo detalhado de vários dos principais resultados relacionados com o Problema de Complementaridade no caso finito-dimensional pode ser consultado [24].

1.2.2 O Problema da Desigualdade Variacional

O *Problema da Desigualdade Variacional* em $\mathbf{R}^n$ consiste em, dados $T : \mathbf{R}^n \rightrightarrows \mathbf{R}^n$ e $C \subseteq \mathbf{R}^n$ convexo e fechado, encontrar

$$x^* \in C \text{ tal que } \exists\, w^* \in T(x^*) \text{ com } \langle w^*, x - x^* \rangle \geq 0, \text{ para todo } \forall\, x \in C. \tag{1.4}$$

Vamos empregar a notação $VIP(T, C)$ para este problema. Denotaremos o conjunto de soluções do $VIP(T, C)$ por $S(T, C)$.

O Problema de Complementaridade Monótono, $MCP(T)$, é um caso particular do Problema da Desigualdade Variacional $VIP(T, C)$, considerando $C = \mathbf{R}^n_+$.

Consideremos o Problema de Otimização Convexa:

$$(P) \qquad \begin{cases} \min & f(x) \\ \text{s.a.} & g_i(x) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m. \end{cases} \tag{1.5}$$

onde $f,\ g_i : \mathbf{R}^n \longrightarrow \hat{\mathbf{R}}$ são funções convexas, próprias e fechadas e diferenciáveis. Este problema também é equivalente a um problema variacional:

$$\begin{aligned} & VIP(\nabla f, C), \\ & \text{onde } C = \{z \,|\, g_i(x) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m\}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

1.2.3 Um problema de desigualdade variacional particular

Estamos interessados em um Problema da Desigualdade Variacional particular:

$$VIP(T, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m_+) \tag{1.7}$$

onde $T : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \rightrightarrows \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ é monótono maximal. Como veremos adiante, problemas nesta forma serão tratáveis pelo método da bareira log-quadrática.

O problema (1.7) é equivalente ao seguinte problema: Encontrar $(x^*, y^*) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ tal que

$$y^* \geq 0, \text{ existe } w^* \geq 0, \ (0, w^*) \in T(x^*, y^*), w_i^* y_i^* = 0, \ i = 1, \dots, m. \quad (1.8)$$

Este problema problema acima é formalmente similar ao problema de complementaridade não linear, como formulado em (1.1).

Observemos que o problema de complementaridade monótono pode ser visto como um caso particular do problema (1.7), quando $n = 0$. Extenderemos os conceitos de soluções complementares e complementaridade estrita ao problema (1.7).

Definição 1.2.2. *Dizemos que (x^*, y^*, w^*) são soluções complementares do problema (1.7) se x^*, y^*, w^* satisfizerem (1.8). O conjunto de soluções complementares será denotado por*

$$S_{n,m}^*(T) = \{(x^*, y^*, w^*) \mid \ \textit{satisfazem } (1.8)\}. \quad (1.9)$$

As soluções complementares $(x^*, y^*, w^*) \in S_{n,m}^*(T)$ são estritamente complementares *se*

$$\Big(y_i^* > 0 \ \textit{ou} \ w_i^* > 0\Big), \ \ i = 1, \cdots, m.$$

Alternativamente, dizemos que (x^*, y^*, w^*) satisfazem a condição de complementaridade estrita.

O problema (1.7) é *não degenerado* se existirem soluções estritamente complementares, caso contrario é *degenerado*.

Associado ao $VIP(T, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+^m)$ introduziremos os seguintes conjuntos

$$\begin{aligned}
\bar{I} &:= \big\{i \in \{1, \dots, m\} \mid \text{ existe } (x^*, y^*, w^*) \in S_{n,m}^*(T), \text{ com } y_i^* > 0\big\}, \\
\bar{J} &:= \big\{j \in \{1, \dots, m\} \mid \text{ existe } (x^*, y^*, w^*) \in S_{n,m}^*(T), \text{ com } w_j^* > 0\big\}, \\
\bar{K} &:= \{1, \dots, m\} \setminus \big\{\bar{I} \cup \bar{J}\big\}.
\end{aligned}$$

Neste caso, estendendo a análise feita para o Problema de Complementaridade Monótono, também podemos provar que para toda solução estritamente complementar (x^*, y^*, w^*), vale que

$$y^*_{\bar{I}} > 0, w^*_{\bar{J}} > 0, \tag{1.10}$$

e isto implica, pela condição de complementaridade $\langle y^*, w^* \rangle = 0$, em que $y^*_{\bar{J}} = 0$ e $w^*_{\bar{I}} = 0$.

Lema 1.2.3. *Seja T monótono maximal e $S^*_{n,m}(T)$ o conjunto de soluçoẽs complementares do $VIP(T, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m_+)$, então $S^*_{n,m}(T)$ é um conjunto convexo e fechado*

Demonstração. Observemos que $VIP(T, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m_+)$ é equivalente ao problema:
Encontrar (x^*, y^*) tal que

$$0 \in [T + N_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m_+}](x^*, y^*),$$

ou, encontrar x^*, y^*, u^* e w^* tais que

$$(u^*, w^*) \in T(x^*, y^*), \ -(u^*, w^*) \in N_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m_+}(x^*, y^*).$$

Definindo $\hat{T} : \mathbf{R}^{n+m} \times \mathbf{R}^{n+m} \rightrightarrows \mathbf{R}^{n+m} \times \mathbf{R}^{n+m}$

$$\hat{T}(x^*, y^*, u^*, w^*) := \begin{bmatrix} N_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m_+}(x^*, y^*) + (u^*, w^*) \\ T^{-1}((u^*, w^*)) - (x^*, y^*) \end{bmatrix}.$$

Podemos reformular o sistema de inclusões anterior como:
Encontrar (x^*, y^*, u^*, w^*) tal que

$$0 \in \hat{T}(x^*, y^*, u^*, w^*).$$

É fácil verificar, aplicando o Teorema 1.1.4 aos operadores monótonos maximais $T_1 : \mathbf{R}^{n+m} \times \mathbf{R}^{n+m} \rightrightarrows \mathbf{R}^{n+m} \times \mathbf{R}^{n+m}$ e $T_2 : \mathbf{R}^{n+m} \times \mathbf{R}^{n+m} \rightrightarrows$

$\mathbf{R}^{n+m} \times \mathbf{R}^{n+m}$ definidos por:

$$\begin{aligned} T_1((x,y,u,v)) &:= \left(N_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m_+}(x,y), T^{-1}(u,v)\right) \text{ com } D(T_1) = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m_+ \times R(T), \\ T_2(x,y,u,w)) &:= ((u,w), -(x,y)) \text{ com } D(T_2) = \mathbf{R}^{n+m} \times \mathbf{R}^{n+m}, \end{aligned}$$

que o operador $\hat{T} = T_1 + T_2$ é monótono maximal. Portanto, pelo Proposição 1.1.3, segue-se que o conjunto

$$S(\hat{T}) := \left\{(x^*, y^*, u^*, w^*) \mid 0 \in \hat{T}(x^*, y^*, u^*, w^*)\right\}$$

é convexo e fechado. Para concluir, Observemos que

$$S^*_{n,m}(T) = \{(x^*, y^*, w^*) \mid (x^*, y^*, 0, w^*) \in S(\hat{T}).$$

□

Definiremos o *suporte* de $(x, y, w) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m$:

$$\sigma(x,y,w) = \{i \in \{1, 2, \ldots, m\} \mid y_i > 0 \text{ ou } w_i > 0\},$$

e consideraremos a ordem parcial em $\mathbf{R}^n$ definida por:

$$(x', y', w') \preceq (x, y, u) \text{ se } \sigma(x', y', w') \subseteq \sigma(x, y, u).$$

Dois vetores são ditos equivalentes, denotando-se $(x', y', w') \sim (x, y, w)$, se $(x', y', w') \preceq (x, y, w)$ e $(x, y, w) \preceq (x', y', w')$, isto é $\sigma(x', y', w') = \sigma(x, y, w)$. Um elemento $(x, y, w) \in U \subset \mathbf{R}^n$ é dito $\preceq$-*maximal* de U, se

$$(x, y, w) \in U \text{ e } (x, y, w) \preceq (x', y', w') \Longrightarrow (x', y', w') \sim (x, y, w).$$

Pela convexidade de $S^*_{n,m}(T)$, temos que seus elementos maximais são equivalentes. Observemos que a ordem parcial, $\preceq$, está definida nas componentes não negativas, (y, w), das soluções complementares. Portanto, segue-se que a estrutura dos zeros das componentes (y, w) dos elementos maximais de $S^*_{n,m}(T)$ é invariante. Isto implica em que para todo elemento maximal, (x^*, y^*, w^*), de $S^*_{n,m}(T)$, vale que $y^*_i > 0$, para todo $i \in \bar{I}$ e $w^*_j > 0$, para todo $j \in \bar{J}$ e $y^*_k = w^*_k = 0$ para todo $k \in \bar{K}$.

Observação 1.2.4.

1. *Sob hipótese de complementaridade estrita, o conjunto de soluções estritamente complementares é o conjunto de elementos maximais de* $S^*_{n,m}(T)$*. Logo, considerando uma solução estritamente complementar,* (x^*, y^*, w^*)*, segue da observação anterior e da condição de complementaridade* $\langle y^*, w^* \rangle = 0$*, que para* $y^*_j = 0$ *para todo* $j \in J$ *e* $w^*_i = 0$ *para todo* $i \in I$ *e* $y^*_k = w^*_k = 0$ *para todo* $k \in \bar{K}$*.*

Como motivação para o estudo do problema (1.7) consideremos um problema variacional na forma

$$\begin{aligned} & VIP(T, C), \\ & \text{com } C = \{z \,|\, g_i(x) \le 0,\ i = 1, \ldots, m\}, \end{aligned} \tag{1.11}$$

onde $T : \mathbf{R}^n \rightrightarrows \mathbf{R}^n$ é monótono maximal e $g_i : \mathbf{R}^n \longrightarrow \hat{\mathbf{R}}$ são funções convexas, próprias, fechadas e diferenciáveis. Uma grande variedade de problemas variacionais vêm dados na forma acima. O problema (1.6) é um caso particular do problema acima. Portanto, o problema de otimização convexa (1.5) tambem é um caso particular de (1.11). Definindo outra vez $G(x) := (g_1(x), \ldots, g_m(x))$ e

$$\hat{T}(x, y) := \begin{bmatrix} T(x) + \sum_{j=1}^m y_j \nabla g(x)_j \\ G(x) \end{bmatrix},$$

temos que $\hat{T}$ é monótono em $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m_+$ e sob condições de regularidade, (1.11) é equivalente a $VIP(T, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m_+)$.

1.2.4 O problema de achar um zero de um operador monótono maximal

Nesta seção consideraremos o problema de achar um zero de um operador monótono maximal $T : \mathbf{R}^n \rightrightarrows \mathbf{R}^n$: encontrar

$$x^* \in \mathbf{R}^n \text{ tal que } 0 \in T(x^*). \tag{1.12}$$

Entre os mais importantes procedimentos para resolver este problema temos o *método de ponto-proximal PPA*, que consiste em:
Escolher $x_0 \in \mathbf{R}^n$.
Para $k = 0, 1, 2 \ldots$.
Escolher $\lambda_k > 0$ e obter x_{k+1} como uma solução *aproximada* do problema:
Encontrar

$$x \in \mathbf{R}^n \text{ tal que } 0 \in \lambda_k T(x) + x - x_k, \tag{1.13}$$

isto é

$$x_{k+1} \approx (\lambda_k T + I)^{-1}(x_k).$$

Este método foi estudado por Rockafellar [40] e está baseado num resultado de Minty [33]: Se T é monótono maximal e $\lambda > 0$, então o operador $J_\lambda^T = (\lambda T + I)^{-1}$ é não expansivo, ponto-a-ponto e com domínio o espaço todo.

Entre os mais importantes resultados ligados ao Método do Ponto Proximal, destacamos o seguinte, devido a Rockafellar (vide [40]).

Se o problema (1.12) tem soluçõao, e a sequência λ_k é limitada inferiormente por um número positivo, então a sequência $\{x_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ gerada pelo método PPA converge fracamente a uma solução do problema (1.12).

Certamente para um operador geral não linear a resolução exata de (1.13) é um problema extremamente complexo, portanto é natural considerar critérios de resolução aproximada. Para admitir soluções inexatas de (1.13), introduziram-se diversas noções de erro. Por exemplo, Rockafellar [40], considera $x_{k+1} = J_{\lambda_k}^T(x_k) + e_k$, com erros, $\{e_k\}_{k \in \mathbf{N}}$, satisfazendo

- $\sum_{k=1}^{+\infty} e_k < +\infty$,
- $\|e_k\| \le \delta_k \|x_k - x_{k-1}\|$, com $\sum_{k=1}^{+\infty} \delta_k < +\infty$.

Tossings [49] considera o esquema proximal $x_{k+1} = J_{\lambda_k}^{T^k}(x_k) + e_k$, onde T^k é uma sequência de operadores monótonos maximais convergindo a T em uma certa métrica e a sequência de erros $\{e_k\}_{k\in N}$ é somável em norma, obtendo-se convergência fraca a uma solução. Lehdili e Moudafi [30] consideram o esquema proximal de Tossings, com os operadores regularização de Tikhonov do operador T, $T^k = T + \mu_k I$. Com uma escolha adequada das sequências de parâmetros λ_k e μ_k, eles obtêm convergência forte a uma solução do problema (1.12).

Iremos empregar os métodos híbridos e a teoria de condições de erro relativo, introduzida e estudada por Solodov-Svaiter [42, 41], na qual é deixado de lado o requerimento de somabilidade dos erros. Os autores combinam o passo proximal com uma projeção ou passo extragradiente, sem acrescentar complexidade ao algoritmo. Desta forma eles garantem a convergência da sequência ao conjunto solução. A seguir, descrevemos este método.

O problema proximal (1.13), resolvido para um dado k, pode ser genericamente descrito como o problema:
Encontrar

$$x \in \mathbf{R}^n \text{ tal que } 0 \in \lambda T(x) + x - \bar{x}, \tag{1.14}$$

com $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$ e $\lambda > 0$ dados. De fato, tomando-se $\bar{x} = x^k$ e $\lambda = \lambda_k$, o problema (1.14) se transforma em (1.13). O problema proximal genérico (1.14) é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} v \in T(x), \\ 0 = \lambda v + x - \bar{x}. \end{cases} \tag{1.15}$$

A inclusão acima pode ser relaxada para $v \in T^{[\epsilon]}(x)$, e o erro neste relaxamento, será quantificado por

$$\varepsilon_T(x, v) = \inf\left\{\epsilon \geq 0 \mid v \in T^{[\epsilon]}(x)\right\},$$

com $\varepsilon_T(x, v) := +\infty$ se o conjunto $\{\epsilon > 0 \mid v \in T^{[\epsilon]}(x)\}$ for vazio. A igualdade em (1.15) é relaxada como $0 \approx \lambda v + x - \bar{x}$, e o erro nesta aproximação é $\|\lambda v + x - \bar{x}\|$. Em [44] foi introduzida a função $S_{T,\lambda,\bar{x}} : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \longrightarrow \bar{\mathbf{R}}$

$$S_{T,\lambda,\bar{x}}(x,v) := \|\lambda v + x - \bar{x}\|^2 + 2\lambda\varepsilon_T(x,v). \tag{1.16}$$

Ao longo deste trabalho denominaremos $S_{T,\lambda,\bar{x}}$ de *função de mérito de Solodov-Svaiter.*

Apresentamos a continuação alguns dos resultados de [44, 43], em forma resumida.

Teorema 1.2.5. *Sejam $T : \mathbf{R}^n \rightrightarrows \mathbf{R}^n$ monótono maximal, $\lambda > 0$, $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$ e $S_{T,\lambda,\bar{x}}$ a função de mérito de Solodov-Svaiter. Então:*

i) $S_{T,\lambda,\bar{x}}$ é uma função de mérito para o sistema proximal (1.15), ou seja $S_{T,\lambda,\bar{x}} \geq 0$ e $S_{T,\lambda,\bar{x}}(x,v) = 0$ se e somente se (x,v) é solução do sistema proximal (1.15).

ii) $S_{T,\lambda,\bar{x}}$ é fortemente convexa com parâmetro de convexidade forte $(2, 2\lambda^2)$.

iii) Sejam $x^* \in \mathbf{R}^n$ uma solução do problema (1.12) e $(x,v) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ e definamos $\bar{x}_+ = \bar{x} - \lambda v$. Então:

$$\|x^* - \bar{x}_+\|^2 \leq \|x^* - \bar{x}\|^2 + S_{T,\lambda,\bar{x}}(x,v) - \|x - \bar{x}\|^2.$$

iv) Seja $(\hat{x}, \hat{v}) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ uma solução do problema (1.15). Então temos:

$$\|\hat{x} - x\|^2 + \lambda^2\|\hat{v} - v\|^2 \leq S_{[T,\lambda]}(x,v),\ \forall\,(x,v) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n.$$

Demonstração. Ver [43, Teorema 1, Corolário 1 e Lema 3]. □

Corolário 1.2.6. *Seja $(\hat{x}, \hat{v})$ é solução do sistema proximal (1.15) . Então*

$$\|\hat{x} - x\|^2 \leq S_{T,\lambda,\bar{x}}(x,v),\ \forall (x,v) \in \mathbf{R}^{2n}.$$

Demonstração. Ver [44] Corolario 1. □

Observação 1.2.7.

1. *Note-se que iii) garante que se vale a seguinte condição*

$$S_{T,\lambda,\bar{x}}(x,v) \leq \sigma\|x-\bar{x}\|^2, \tag{1.17}$$

onde $\sigma \in (0,1)$*, obtemos que* $\|x^*-\bar{x}_+\|^2 \leq \|x^*-\bar{x}\|^2-(1-\sigma)\|x-\bar{x}\|^2$*. Ou seja, temos um decréscimo no quadrado da distância ao conjunto solução do problema. Basicamente, isto é o que garante a convergência do método híbrido descrito em [43], a uma solução do problema (1.12).*

Segue do Teorema 1.2.5 iii) o seguinte corolário, para o caso de definir passos híbridos relaxados.

Corolário 1.2.8. *Sejam* $x^* \in \mathbf{R}^n$ *uma solução do problema (1.12) e* $(\bar{x},\bar{v}) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$*. Definamos* $\bar{x}(\theta) = \bar{x} - \theta\lambda v$*, então:*

$$\|x^* - \bar{x}(\theta)\|^2 \leq \|x^* - \bar{x}\|^2 + \theta\left[S_{T,\lambda,\bar{x}}(x,v) - \|x-\bar{x}\|^2\right].$$

Demonstração. Definindo $\bar{x}_+ = \bar{x} - \lambda x$, segue-se que

$$\bar{x}(\theta) = \bar{x} - \theta\lambda v = \theta(\bar{x}-\lambda v) + (1-\theta)\bar{x} = \theta\bar{x}_+ + (1-\theta)\bar{x}.$$

Logo, por iii) de lema anterior, obtemos que

$$\begin{aligned}
\|x^* - \bar{x}(\theta)\|^2 &= \|x^* - \theta\bar{x}_+ - (1-\theta)\bar{x}\|^2 \leq \theta\|x^*-\bar{x}_+\|^2 + (1-\theta)\|x^*-\bar{x}\|^2 \\
&\leq \theta\left[\|x^*-\bar{x}\|^2 + S_{T,\lambda,\bar{x}}(x,v) - \|x-\bar{x}\|^2\right] + (1-\theta)\|x^*-\bar{x}\|^2 \\
&\leq \|x^*-\bar{x}\|^2 + \theta\left[S_{T,\lambda,\bar{x}}(x,v) - \|x-\bar{x}\|^2\right].
\end{aligned}$$

□

1.3 Trajetórias centrais

Nesta seção apresentaremos resultados relacionados com o conceito de trajetória central. Estes resultados não serão usados ao longo do nosso trabalho e os apresentamos com o intuito de que possam ser comparados aos nossos.

No contexto do Problema de Complementaridade Monótono $MCP(T)$, Guler [22] estuda a existência de trajetórias centrais para operadores monótonos maximais. A seguir apresentaremos de forma resumida seus resultados.

Seja $T : \mathbf{R}^n \rightrightarrows \mathbf{R}^n$ monótono maximal, consideremos as hipóteses

1. *Existem $(x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ tais que $x \in D(T) \cap \mathbf{R}^n_{++}$ e $y \in T(x) \cap \mathbf{R}^n_{++}$.*

2. *$D(T) \cap \mathbf{R}^n_{++} \neq \emptyset$ e $G(T) \cap \left(\mathbf{R}^n_{+} \times \mathbf{R}^n_{++}\right) \neq \emptyset$.*

3. *Vale 1 e o operador T satisfaz a propriedade-L, isto é:*

$$\begin{cases} \forall\, v \in R(T),\ \forall\, y \in D(T),\ \exists\, c = c(y, v) \in \mathbf{R} \text{ tal que} \\ \inf_{(x,u)\in G(T)} \langle u - v, x - y \rangle \geq c(y, v). \end{cases}$$

Exemplos de operadores monótonos maximais que satisfazem a propriedade-L são, o subdiferencial de uma função própria, convexa e fechada, os operadores monótonos maximais coercivos, os operadores com domínio ou imagem limitados.

Por meio de uma formulação primal-dual, define-se a trajetória central como o conjunto:

$$\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^n_{++} \times \mathbf{R}^n_{++} \,|\, y \in T(x),\, XYe = \mu e,\, \mu > 0\right\}.$$

Prova-se que as hipóteses 1 e 2 são equivalentes. Definindo-se o operador $V : \mathbf{R}^n \rightrightarrows \mathbf{R}^n$ com $D(V) = \mathbf{R}^n_{+}$:

$$V(z) = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^n_{+} \times \mathbf{R}^n_{+} |\, y \in T(x),\, XYe = z\right\}.$$

Prova-se que V é um operador semicontinuo superiormente, ou seja

$$\forall x^0 \in D(V) \text{ e } \forall\, \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tal que } x \in B_\delta(x^0) \Longrightarrow T(x) \subset T(x^0) + B_\epsilon(0),$$

e quando restrito a $\mathbf{R}^n_{++}$, é ponto-a-ponto e contínuo. Notando que a trajetória central corresponde a tomar $(x(\mu), y(\mu)) \in V(\mu e)$, os resultados anteriores implicam que ela está bem definida e contínua e os pontos de acumulação, quando μ converge a zero, são soluções do problema $MCP(T)$.

Sob as mesmas hipóteses, provam-se também resultados análogos para o caso mais geral de trajetórias centrais, $\left\{(x(t),y(t))\right\}_{t\in\mathbf{R}_{++}}$*, definidas como solução do sistema:*

$$\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^n_+\times\mathbf{R}^n_+\,|\,F(x,y)=w(t)\right\},$$

onde $F(x,y)=(XYe,T(x)-y):\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\rightrightarrows\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n_+$ *com* $D(F)=\left(D(T)\cap\mathbf{R}^n_+\right)\times\mathbf{R}^n_+$ *e* $w:(0,1]\to\mathbf{R}^n_{++}\times\mathbf{R}^n_{++}$ *é uma função contínua satisfazendo w(0)=0. Desta forma, Guler generaliza os resultados de Kojima, Mizuno e Noma [29], que consideram a mesma formulação, no caso em que* $T:\mathbf{R}^n\longrightarrow\mathbf{R}^n$ *é um operador ponto-ponto, contínuo, tal que o interior do seu domínio contém o ortante positivo. Sob esta hipótese, os autores provam a existência e continuidade da trajetória central e a otimalidade do ponto limite, quando o parâmetro t converge a zero (vide [29]).*

No contexto do Problema da Desigualdade Variacional $VIP(T,C)$*, Iusem et al. [25] supõem que* $C^o\neq\emptyset$ *e consideram uma função* $h:C^o\longrightarrow R$ *estritamente convexa e diferenciável, tal que* ∇h *diverge na fronteira do conjunto* C*. Os autores definem a trajetória central para o problema* $VIP(T,C)$ *com barreira h, como o conjunto* $\{x(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbf{R}_{++}}$ *de soluções do sistema parametrizado em* λ*:*

$$0\in\lambda T(x)+\nabla h(x). \tag{1.18}$$

Neste trabalho eles analisam condições sobre T*,* C *e* h *que garantem a existência e limitação desta trajetória, bem como condições para a existência de* $x^*=\lim_{\lambda\to+\infty}x(\lambda)$ *e sua otimalidade.*

Apresentaremos a seguir alguns dos resultados principais de [25]. Vários conjuntos das seguintes hipóteses serão usadas.

A1) $h:\mathbf{R}^n\longrightarrow R\cup\{\infty\}$ *é uma função estritamente convexa, fechada, e continuamente diferenciável em* C^0*.*

A2) h é coerciva na fronteira, isto é, para todo $y\in C^0$ *se* $\{x_k\}$ *é uma* *sequência contida em C^0 que converge a um ponto $\bar{x}$ na fronteira ∂C de C, então $\lim_{k\to+\infty}\langle\nabla h(x_k), y - x_k\rangle = -\infty$.*

A3) h é finita na fronteira, isto é, $h : \mathbf{R}^n \longrightarrow R\cup\{\infty\}$ é uma função finita, estritamente convexa, e contínua em C.

A4) h é coerciva na zona, isto é, para todo $y \in \mathbf{R}^n$ existe $x \in C^0$ tal que $\nabla h(x) = y$.

A5) h é separável, isto é, $h(x) = \sum_{i=1}^{n} h_j(x_j)$ com $h_j : (\alpha_j, \beta_j) \longrightarrow R$.

A6) $D(T) \cap C^0 \neq \emptyset$.

A7) T é da forma $T = \hat{T} + N_V$, onde V é um conjunto não vazio, convexo e fechado e $\hat{T} : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ é ponto-a-ponto contínuo e paramonótono, ou seja, é monótono maximal e se $\langle u - v, x - y\rangle = 0$ com $u \in \hat{T}(x)$ e $v \in \hat{T}(y)$, então, $v \in \hat{T}(x), u \in \hat{T}(y)$.

A8) As hipóteses de A7) são válidas, sendo que neste caso V é uma variedade linear, $\hat{T}$ é continuamente diferenciável e existe um subespaço W tal que $Ker(J_{\hat{T}})(x) = W$.

A10) $S(T, C) \neq \emptyset$.

A11) h atinge seu mínimo em $D(T) \cap C^0$ em algum ponto $\tilde{x}$.

A12) A função gap do problema $VIP(T, C)$, que é definida por:

$$q_T, C(x) = \sup_{\substack{y \in C \\ v \in T(y)}} \langle v, x - y\rangle,\ \forall x \in \mathbf{R}^n$$

é finita em todo ponto.

A13) Uma das seguintes condições é válida:

1. *$S(T, C)$ é limitado e $T = \partial f$ para alguma função $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow R \cup \{+\infty\}$.*

2. *Existe $y \in C^0 \cap D(T)$ tal que $\lim_{k\to+\infty}\langle u^k, x^k - y\rangle = \infty$ para toda $\{x^k\}$ tal que $\lim_{k\to+\infty}\|x^k\| = \infty$ e para toda $\{u^k\} \in T(x^k)$.*

3. $D(T) \cap C$ é limitado.

O seguinte resultado mostra que a trajetória dada em (1.18) está bem definida.

Proposição 1.3.1. *Seja $T : \mathbf{R}^n \rightrightarrows \mathbf{R}^n$ monótono maximal tal que satisfaz A10). Se umas das seguintes hipótese for válida:*

i) h satisfaz A4,

ii) h satifaz A2 e A11, T satisfaz A8 e A12 é satisfeita,

então o operador $T_\lambda = \lambda T + \nabla h$ tem um único zero $x(\lambda) \in D(T) \cup C^0$.

Demonstração. Ver [25, Proposição 2]. □

O seguinte resultado mostra que a trajetória é contínua e que o valor da função barreira cresce ao longo dela.

Proposição 1.3.2. *Suponhamos que as as hipótese da Proposição 1.3.1 são válidas, então:*
i) $h(x(\lambda))$ é não decrescente em λ.
ii) $x(\lambda)$ é contínua em todo $\lambda > 0$.

Demonstração. Ver [25, Proposição 3]. □

O resultado a continuação mostra que a trajetória tem pontos de acumulação.

Proposição 1.3.3. *Vamos supor que $T : D(T) \rightrightarrows \mathbf{R}^n$ é monótono maximal e satisfaz A7), que $S(T, C) \neq \emptyset$, que h satisfaz A11), e que todas as hipóteses da Proposição 1.3.2, são válidas. Se uma das seguintes condições for válida:*
i) h satisfaz A3),
ii) A13) é satisfeita,
então $x(\lambda)$ tem pontos de acumulação.

Demonstração. Ver [25, Proposição 4]. □

O seguinte resultado mostra que os pontos de acumulação da trajetória são soluções do $VIP(T,C)$.

Proposição 1.3.4. *Se as hipóteses da Proposição 1.3.3 são válidas, então todos os pontos de acumulação da trajetória $x(\lambda)$ são soluções do problema $VIP(T,C)$.*

Demonstração. Ver [25, Proposição 5]. □

A seguinte proposição mostra que se a função barreira é finita na fronteira, então a trajetória é convergente e o limite pode ser caraterizado.

Proposição 1.3.5. *Suponhamos que as hipóteses da Proposição 1.3.3 são válidas e que h satisfaz A2) então, existe* $\lim_{\lambda\to 0} x(\lambda)$ *e este limite é solução do problema:*

$$\begin{gathered} min\, h(x) \\ s.a\, x \in S(T,C) \end{gathered}$$

Demonstração. Ver [25, Proposição 6]. □

No caso em que a função barreira h não é finita na fronteira, os autores também apresentam um resultado de convergência da trajetória ao centro analítico de $S(T.C)$.

Definindo o conjunto $J = \{j \in \{1,\dots,n\} \mid \exists\ z \in S(T,C) \text{ com } z_j > 0\}$ *e considerando que h é separável, é definida a função:* $\hat{h} : \mathbf{R}^n_{++} \longrightarrow R$

$$\tilde{h}(x) = \sum_{j\in J} h_j(x_j),$$

e prova-se o seguinte resultado.

Teorema 1.3.6. *Suponhamos que $C = \mathbf{R}^n_+$ e que as hipóteses A5, A2, A1, e A11 A13 são válidas e que o operador T satisfaz A6, A7, A8 e A10, então,* *a trajetória central $\{x(\lambda)\}$ converge quando $\lambda \to 0 + \infty$ a x^*, solução do problema:*

$$min\, \tilde{h}(x)$$
$$s.a\, x \in S(T, C).$$

Demonstração. Ver [25, Teorema 2]. □

Resultados adicionais sobre diferenciabilidade e analiticidade da trajetória central para o Problema de Complementaridade Linear Monótono, podem ser encontradas em [35] e [46]. Outros trabalhos relevantes em que se estudam trajetórias centrais não relacionadas à barreira logarítmica, bem como algoritmos de tipo path-following ao longo destas trajetórias, são [56], [12], [14], [13], [55], [15],

1.4 Resultados Auxiliares

Concluímos este capítulo apresentando vários resultados técnicos, encontrados na literatura e que usaremos ao longo do trabalho. Por razões de completeza incluímos as demostrações. O primeiro é uma conhecida propriedade da regularização de Tikhonov de um operador monótono maximal.

Lema 1.4.1. *Sejam $T : \mathbf{R}^n \rightrightarrows \mathbf{R}^n$ monótono maximal, $\lambda > 0$ e $x(\lambda)$ a solução do problema: Encontrar*

$$x \in \mathbf{R}^n \text{ tal que } 0 \in \lambda T(x) + x.$$

Se $T^{-1}(0) \neq \emptyset$, então

$$i)\ \|x(\lambda) - \bar{x}\| \leq \|x^* - \bar{x}\|,\ \forall x^* \in T^{-1}(0).$$
$$ii)\ \lim_{\lambda \to +\infty} x(lambda) = P_{T^{-1}(0)}(\bar{x})$$

Demonstração. Pelo Teorema de Minty (Teorema 1.1.5), temos que $x(\lambda)$ está bem definido para todo $\lambda > 0$.

i) Temos que $\bar{x} - x(\lambda) \in \lambda T\big(x(\lambda)\big)$, logo pela monotonia de T, segue-se que para todo x^* tal que $0 \in T(x^*)$

$$\langle \bar{x} - x(\lambda), x(\lambda) - x^* \rangle \geq 0,$$

donde obtemos

$$\langle x(\lambda) - \bar{x}, x^* - \bar{x} \rangle \geq \|x(\lambda) - \bar{x}\|^2.$$

Aplicandoe a desigualdade de Cauchy-Schwartz ao lado esquerdo da expressão anterior, segue o resultado.

ii) Definamos $v(\lambda) = (1/\lambda)\big(\bar{x} - x(\lambda)\big)$. Observemos que pelo item i) segue-se que $\{x(\lambda),\ \lambda >\}$ é limitado, portanto

$$\lim_{\lambda \to +\infty} v(\lambda) = 0.$$

Consideremos uma sequência convergente $\{x(\lambda_k)\}_{k \in \mathbf{N}}$ arbitrária e denotemos por $\hat{x}$ o seu limite. Usando que a gráfica de T é fechado, segue-se que $0 \in T(\hat{x})$. Passando ao limite no item i) obtemos

$$\|\bar{x} - \hat{x}\| \leq \|\bar{x} - x^*\|, \text{ para todo } x^* \in T^{-1}(0)$$

e isto implica no resultado. $\square$

Apresentamos a seguir dois resultados técnicos, muito usados no estudo de algoritmos do tipo path-following.

Lema 1.4.2. *Sejam $\beta \in (0,1)$, $a \in \mathbf{R}^n$ tais que $\|a - e\| \leq \beta$, então*

i) $0 < 1 - \beta \leq a_i \leq 1 + \beta$, *para* $i = 1, 2, \ldots, n$,

ii) $A = diag(a)$ *é não singular e* $\|A^{-1/2} b\| \leq \|b\|/(1-\beta)^{1/2}$.

Demonstração. Observemos que, da relação $\|a - e\| \leq \beta$, segue-se que

$$|a_i - 1| \leq \beta, \text{ para } i = 1, \ldots, n.$$

Portanto, vale que

$$0 < 1 - \beta \leq a_i \leq 1 + \beta, \ i = 1, \ldots, n.$$

Destas inequações seguem imediatamente os itens i) e ii). $\square$

Corolário 1.4.3. *Sejam* $x \in \mathbf{R}^n_{++}$, $X = diag(x)$, *e* $d \in \mathbf{R}^n$ *tais que* $\|X^{-1}d\| < 1$. *Então* $x + d \in \mathbf{R}^n_{++}$

Demonstração. Notemos que $\|X^{-1}d + e - e\| = \|X^{-1}d\| < 1$. Logo segue de i) do Lema 1.4.2 que

$$X^{-1}d + e \in \mathbf{R}^n_{++}.$$

Temos que $x \in \mathbf{R}^n_{++}$, portanto multiplicando $X^{-1}d + e$ à esquerda por X, segue que $x + d \in \mathbf{R}^n_{++}$. $\square$

Capítulo 2

As trajetórias log-quadráticas.

Neste capítulo, vamos definir e estudar as trajetórias log-quadráticas para o Problema de Complementaridade Monótono e um Problema da Desigualdade Variacional. Estas trajetórias estão associadas a barreiras log-quadráticas. Embora as trajetórias associadas a barreiras logarítimicas necessitem da condição de factibilidade estrita, as trajetórias log-quadráticas não requerem esta hipótese. Nossos resultados não se deduzem dos resultados apresentados no capítu-lo anterior, na Seção 1.3, embora nas provas de alguns resultados, sejam usadas as técnicas de [29].

Para a definição e estudo da trajetória log-quadrática, consideramos uma função de barriera com estrutura de regularização-penalização, isto é, ela é a soma de um termo regularizador, associado à componente quadrática e um outro termo penalizador, associado à barreira logarítmica, ambos os termos multiplicados por parâmetros diferentes. O caso em que os parâmetros são iguais corresponde aos algoritmos apresentados no Capítulo III. Neste caso, dos resultados de [25], só podemos deduzir a existencia e continuidade da *trajetoria log-quadrática, mas não os resultados de convergência da trajetória ao conjunto solução.*

2.1 Trajetória log-quadrática para o $MCP(F)$

Seja $F : \mathbf{R}^n \rightrightarrows \mathbf{R}^n$ *monótono maximal. Estamos interessados no Problema de Complementaridade Monótono definido por* F*,*

$$MCP(F). \tag{2.1}$$

Nossa primeira hipótese é a existência de pontos interiores (ao ortante positivo) no domínio de F*, isto é*

H1) $D(F) \cap \mathbf{R}^n_{++} \neq \emptyset$.

Seguindo os trabalhos de Auslander, Teboulle e Ben-Tiba [1, 2], vamos trabalhar com uma barreira log-quadrática. Dado $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$ *e* $\mu, \nu > 0$*, definimos a barreira log-quadrática para* $\mathbf{R}^n_+$*, com parámetro proximal* $\bar{x}$*, como* $\varphi_{\mu,\nu;\bar{x}} : \mathbf{R}^n \to \bar{\mathbf{R}}$*,*

$$\varphi_{\mu,\nu;\bar{x}}(x) = \begin{cases} (\nu/2)\|x - \bar{x}\|^2 - \mu \sum_{j=1}^n \log x_j, & \textit{se } x > 0, \\ +\infty, & \textit{caso contrário.} \end{cases} \tag{2.2}$$

Definição 2.1.1. *A trajetória log-quadrática para o* $MCP(F)$ *é a aplição que associa aos parâmetros* $(\mu, \nu) \in \mathbf{R}_{++} \times \mathbf{R}_{++}$ *o ponto* $x(\mu, \nu; \bar{x})$ *solução de*

$$0 \in F(x) + \nabla \varphi_{\mu,\nu;\bar{x}}(x), \ x > 0. \tag{2.3}$$

Equivalentemente, $x(\mu, \nu; \bar{x})$ *é a solução de*

$$0 \in F(x) + \nu(x - \bar{x}) - \mu x^{-1}, \ x > 0. \tag{2.4}$$

Vamos mostrar que a trajetória log-quadrática está bem definida sob a hipótese H1), mesmo quando $MCP(F)$ *não tem soluções.*

Se $\mu, \nu > 0$*, então* $\partial\varphi_{\mu,\nu;\bar{x}}$ *é monótono maximal e*

$$\partial\varphi_{\mu,\nu;\bar{x}}(x) = \begin{cases} \{\nabla \varphi_{\mu,\nu;\bar{x}}(x)\}, & \textit{se } x > 0, \\ \emptyset, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Como $D(\partial\varphi_{\mu.\nu;\bar{x}}) = \mathbf{R}^n_{++}$, (2.3) é equivalente ao problema

$$0 \in F(x) + \partial\varphi_{y,\nu;\bar{x}}(x). \tag{2.5}$$

Além disto, pelo Teorema 1.1.4, a Hipótese H1) garante que $F + \partial\varphi_{\mu,\nu;\bar{x}}$ é monótono maximal.

Proposição 2.1.2. *A trajetória log-quadrática $(\mu,\nu) \mapsto x(\mu,\nu;\bar{x})$ está bem definida e $x(\mu,\nu;\bar{x})$ é estritamente positiva para todo $(\mu,\nu) \in \mathbf{R}^2_{++}$.*

Demonstração. Já sabemos que (para $\mu,\nu > 0$) o operador $F + \partial\varphi_{\mu,\nu;\bar{x}}$ é monótono maximal. Como $\partial\varphi_{\mu,\nu;\bar{x}}$ é fortemente monótono, concluímos que $F + \partial\varphi_{\mu,\nu;\bar{x}}$ também é fortemento monótono, e portanto (2.3) tem uma e somente uma solução [52, Teorema 18.5]. Além disso esta solução é estritamente positiva, pois o domínio de $F + \partial\varphi_{\mu,\nu;\bar{x}}$ está contido em $\mathbf{R}^n_{++}$. $\square$

Proposição 2.1.3. *A trajetória log-quadrática $(\mu,\nu) \mapsto x(\mu,\nu;\bar{x})$ é continua em $(\mu,\nu) \in \mathbf{R}^2_{++}$.*

Demonstração. Basta provar a continuidade da trajetória em um ponto $(\mu_0,\nu_0) \in \mathbf{R}^2_{++}$ fixo.

Para simplificar a notação, dados $\mu,\nu > 0$ sejam $x_{\mu,\nu}$ e $F_{\mu,\nu} : \mathbf{R}^n_{++} \rightrightarrows \mathbf{R}^n$ definidos por

$$\begin{aligned} x_{\mu,\nu} &= x(\mu,\nu;\bar{x}), \\ F_{\mu,\nu}(x) &:= F(x) + \nabla\varphi_{\mu,\nu;\bar{x}}(x) \\ &= F(x) + \nu(x-\bar{x}) - \mu x^{-1}. \end{aligned}$$

Como $x_{\mu_0,\nu_0} > 0$ e $0 \in F(x_{\mu_0,\nu_0}) + \nu_0(x_{\mu_0,\nu_0} - \bar{x}) - \mu_0(x_{\mu_0,\nu_0})^{-1}$, temos que, para quaisquer $\mu,\nu > 0$

$$(\nu - \nu_0)(x_{\mu_0,\nu_0} - \bar{x}) - (\mu - \mu_0)(x_{\mu_0,\nu_0})^{-1} \in F_{\mu,\nu}(x_{\mu_0,\nu_0}).$$

Definamos

$$w_{\nu,\mu} = (\nu - \nu_0)(x_{\mu_0,\nu_0} - \bar{x}) - (\mu - \mu_0)(x_{\mu_0,\nu_0})^{-1}.$$

Então $w_{\nu,\mu} \in F_{\mu,\nu}(x_{\mu_0,\nu_0})$. Observemos que $0 \in F_{\mu,\nu}(x_{\mu,\nu})$ e $F_{\mu,\nu}$ é fortemente monótono com parâmetro 2ν, portanto segue-se que

$$\langle w_{\mu,\nu}, x_{\mu_0,\nu_0} - x_{\mu,\nu} \rangle \geq \nu \|x_{\mu_0,\nu_0} - x_{\mu,\nu}\|^2.$$

Usando-se também a desigualdade de Cauchy-Schwartz, temos

$$\|w_{\mu,\nu}\| \, \|x_{\mu_0,\nu_0} - x_{\mu,\nu}\| \geq \nu \|x_{\mu_0,\nu_0} - x_{\mu,\nu}\|^2.$$

Logo

$$(1/\nu) \, \|w_{\mu,\nu}\| \geq \|x_{\mu_0,\nu_0} - x(\mu, \nu; \bar{x})\|.$$

Da definição de $w_{\nu,\mu}$ segue-se trivialmente que

$$\lim_{(\mu,\nu)\to(\mu_0,\nu_0)} w_{\mu,\nu} = 0.$$

Combinando-se este resultado com a desigualdade acima (e com o fato de que $\nu_0 > 0$), concluímos que a trajetória log-quadrática é contínua em (μ_0, ν_0).

$\square$

Vamos agora investigar a questão da limitação da trajetória log-quadrática. Definamos $T : \mathbf{R}^n \rightrightarrows \mathbf{R}^n$,

$$T := F + N_{\mathbf{R}^n_+}. \tag{2.6}$$

Outra vez, a hipótese H1) garante que T *é monótono maximal, via o Teorema 1.1.4. O* $MCP(F)$ *é equivalente ao problema de encontrar um zero de* T*:*

$$\textit{Achar } x \textit{ tal que } 0 \in T(x). \tag{2.7}$$

Lema 2.1.4. *Se* x^* *é solução de* $MCP(F)$, $(\mu, \nu) \in \mathbf{R}^2_{++}$ *e* $x = x(\mu, \nu; \bar{x})$, *então*

$$\|x^* - x\|^2 + \|x - \bar{x}\|^2 \leq \|x^* - \bar{x}\|^2 + 2n \, (\mu/\nu).$$

Demonstração. Por hipótese, $x > 0$ e existe $v \in F(x)$ tal que

$$0 = v + \nu(x - \bar{x}) - \mu x^{-1}. \tag{2.8}$$

Observemos que $D(T) \subseteq \mathbf{R}^n_+$. Temos também que $v \in T(x)$, pois $x > 0$. Portanto, definindo $\tilde{v} := v - \mu x^{-1}$ e aplicando o Lema 1.1.7 concluímos que

$$\tilde{v} \in T^{[\varepsilon]}(x),$$

com $\varepsilon = \langle x, \mu x^{-1} \rangle = \mu n$. Pela definição de $\tilde{v}$

$$\tilde{v} + \nu(x - \bar{x}) = 0.$$

Logo, usando-se a definição da função de mérito de Solodov-Svaiter (1.16), segue-se que

$$S_{T,1/\nu,\bar{x}}(x, \tilde{v}) \leq 2n\,(\mu/\nu). \tag{2.9}$$

Definindo $\bar{x}_+ := \bar{x} - (1/\nu)\tilde{v}$, temos, em vista de (2.8)

$$x_+ = \bar{x} - (\bar{x} - x) = x$$

e aplicando iii) do Teorema 1.2.5, concluímos que

$$\|x^* - x\|^2 \leq \|x^* - \bar{x}\|^2 + \Big[S_{T,1/\mu,\bar{x}}\big(x(\mu,\nu;\bar{x}), \tilde{v}\big) - \|x - \bar{x}\|^2\Big]. \tag{2.10}$$

De (2.9) e (2.10) segue o resultado. $\square$

O lema que acabamos de provar vai garantir a limitação da trajetória quando μ/ν estiver limitado (e existirem soluções do problema). Em vista disto, vamos definir para $\tau > 0$

$$A(\tau) := \left\{(\mu, \nu) \in \mathbf{R}^2_{++} \mid \ (\mu/\nu) \leq \tau\right\}. \tag{2.11}$$

Proposição 2.1.5. *Seja $\tau > 0$. Se $MCP(F)$ tem solução, então para qualquer $(\mu, \nu) \in A(\tau)$*

$$\|x(\mu, \nu; \bar{x})\| \leq \|\bar{x}\| + \sqrt{L^2 + 2n\tau},$$

onde $L = d\big(\bar{x}, S_{MC}(F)\big)$.

Demonstração. Do Lema 2.1.4 segue para todo $x^* \in S_{MC}(F)$

$$\|x(\mu,\nu;\bar{x}) - \bar{x}\|^2 \leq \|x^* - \bar{x}\|^2 + 2n(\mu/\nu).$$

Logo, para qualquer $(\mu,\nu) \in A(\tau)$,

$$\|x(\mu,\nu;\bar{x}) - \bar{x}\|^2 \leq \|x^* - \bar{x}\|^2 + 2n\tau.$$

Extraindo-se a raiz quadrada nos dois lados desta desigualdade e usando-se a desigualdade triangular obtemos o resultado desejado. □

A proposição acima estabelece a limitação da trajetória log-quadrática para parâmetros (μ,ν) no conjunto $A(\tau)$. No Apéndice mostraremos (através de um exemplo) que a condição $\mu/\nu \leq \tau$ é necessária para a limitação da trajetória log-quadrática no caso geral de um MCP satisfazendo H1) e com soluções.

Para estudar o comportamento da trajetória log-quadrática quando os parâmetros de regularização tendem a zero, será conveniente estudar também a trajetória log-quadratica dual, que definimos a seguir.

Definição 2.1.6. *A* trajetória log-quadrática dual *para o $MCP(F)$ é a aplicação que associa aos parâmetros $(\mu,\nu) \in \mathbf{R}_{++} \times \mathbf{R}_{++}$ o ponto $y(\mu,\nu;\bar{x})$,*

$$y(\mu,\nu;\bar{x}) := \mu x(\mu,\nu;\bar{x})^{-1}.$$

A trajetória log-quadrática primal-dual *para o $MCP(F)$ é a aplição que associa aos parâmetros $(\mu,\nu) \in \mathbf{R}_{++} \times \mathbf{R}_{++}$ o ponto $\big(x(\mu,\nu;\bar{x}), y(\mu,\nu;\bar{x})\big)$.*

Equivalentemente, $\big(x(\mu,\nu;\bar{x}), y(\mu,\nu;\bar{x})\big)$ é solução de

$$\begin{cases} 0 \in F(x) - y + \nu(x - \bar{x}), \\ 0 = y - \mu x^{-1}, \\ (x,y) \in \mathbf{R}^n_{++} \times \mathbf{R}^n_{++}. \end{cases} \tag{2.12}$$

Temos então o seguinte resultado.

Proposição 2.1.7. *A trajetória log-quadrática dual* $(\mu,\nu) \mapsto y(\mu,\nu;\bar{x})$ *está bem definida e é continua em* $(\mu,\nu) \in \mathbf{R}^2_{++}$.

Demonstração. Da existência, continuidade e positividade estrita de $x(\mu,\nu;\bar{x})$, para todo $(\mu,\nu) \in \mathbf{R}^2_{++}$, segue-se a existência, positividade e continuidade de $y(\mu,\nu;\bar{y})$, para todo $(\mu,\nu) \in \mathbf{R}^2_{++}$. □

Dizemos que x^* *é um* ponto de acumulação da trajetória log-quadrática quando $(\mu,\nu) \longrightarrow 0$, *se existir uma sequência* $\{(\mu_k,\nu_k)\}_{k\in\mathbf{N}}$ *em* $\mathbf{R}^2_{++}$, *convergindo a* $(0,0)$, *tal que* $x^* = \lim_{k\to\infty} x(\mu_k,\nu_k;\bar{x})$. *A mesma definição se estende naturalmente para as trajetórias log-quadráticas dual e primal-dual. Como era de esperarse, vale que esses pontos de acumulação são soluções do* $MCP(T)$.

Lema 2.1.8. *Se* (x^*,y^*) *é um ponto de acumulação da trajetória log-quadrática primal-dual, quando* $(\mu,\nu) \to 0$, *então* (x^*,y^*) *é um par de soluções complementares do* $MCP(F)$.

Demonstração. Seja (x^*,y^*) um ponto de acumulação da trajetória log-quadrática primal-dual. Por hipótese existe uma sequência $\{(\mu_k,\nu_k)\}_{k\in\mathbf{N}}$ em $\mathbf{R}^2_{++}$ convergindo a $(0,0)$ tal que

$$(x^*,y^*) = \lim_{k\to\infty} \big(x(\mu_k,\nu_k;\bar{x}), y(\mu_k,\nu_k;\bar{x})\big).$$

Para simplificar a notação, definamos

$$x^k := x(\mu_k,\nu_k;\bar{x}), \quad y^k := y(\mu_k,\nu_k;\bar{x}).$$

Então

$$y^k - \nu_k(x^k - \bar{x}) \in F(x^k), \tag{2.13}$$

Como F é monótono maximal, o gráfico de F é fechado. Além disso,

$$\lim_{k\to+\infty} y^k - \nu_k(x^k - \bar{x}) = y^*, \quad \lim_{k\to+\infty} x^k = x^*.$$

Portanto, podemos tomar os limites em (2.13) e concluímos que

$$y^* \in F(x^*).$$

Das definições de x^k e y^k temos que $x^k > 0,\ y^k > 0$. Logo, segue-se que

$$x^* \geq 0,\ y^* \geq 0.$$

Além disso,

$$\langle x^*, y^* \rangle = \lim_{k\to\infty} \langle x^k, y^k \rangle = \lim_{k\to\infty} n\mu_k = 0.$$

Combinando-se os resutados acima, concluímos que (x^*, y^*) é um par de soluções complementares de $MCP(F)$. □

Lema 2.1.9. *Seja* $\{(\mu_k, \nu_k)\}_{k\in\mathbf{N}}$ *uma sequência em* $\mathbf{R}^2_{++}$ *convergindo a* $(0,0)$. *Se a sequência* $\left\{x(\mu_k, \nu_k; \bar{x})\right\}_{k\in\mathbf{N}}$ *é limitada, então a sequeñcia* $\left\{y(\mu_k, \nu_k; \bar{x})\right\}_{k\in\mathbf{N}}$ *também é limitada.*

Demonstração. Para simplificar a notação, definamos

$$x^k := x(\mu_k, \nu_k; \bar{x}), \quad y^k := y(\mu_k, \nu_k; \bar{x}).$$

Por H1) existe $(\hat{x}, \hat{y})$ tal que

$$\hat{y} \in F(\hat{x}),\ \hat{x} > 0.$$

Pelas definições de x^k e y^k, temos que

$$y^k - \nu_k(x^k - \bar{x}) \in F(x^k).$$

Usando-se a montonía de F, segue-se que

$$\left\langle \left[y^k - \nu_k(x^k - \bar{x})\right] - \hat{y}, x^k - \hat{x} \right\rangle \geq 0.$$

Reescrevendo esta desigualdade obtemos

$$\langle \hat{y}, \hat{x} \rangle + \langle y^k, x^k \rangle - \langle \hat{y}, x^k \rangle - \nu_k \langle x^k - \bar{x}, x^k - \hat{x} \rangle \geq \langle \hat{x}, y^k \rangle.$$

Outra vez, pelas definições de x^k e y^k, temos que $\langle y^k, x^k \rangle = n\mu_k$. Usando-se também a desigualdade de Cauchy-Schwartz, e a positividade de $\hat{x}$ e y^k concluímos que

$$\langle \hat{y}, \hat{x} \rangle + n\mu_k + \|\hat{y}\|\|x^k\| + \nu_k \|x^k - \bar{x}\|\|x^k - \hat{x}\| \geq \langle \hat{x}, y^k \rangle \geq 0. \qquad (2.14)$$

Como as sequências $\{x^k\}_{k\in\mathbf{N}}$, $\{\mu_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ e $\{\nu_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ são limitadas, segue-se que a sequência $\{\langle \hat{x}, y^k \rangle\}_{k\in\mathbf{N}}$ também é limitada. Uma vez que $y^k \geq 0$ e $\hat{x} > 0$, a limitação de $\{\langle \hat{x}, y^k \rangle\}_{k\in\mathbf{N}}$ implica na limitação de $\{y^k\}_{k\in\mathbf{N}}$. □

Corolário 2.1.10. *Todo ponto de acumulação da trajetória log-quadrática $(\mu, \nu) \mapsto x(\mu, \nu; \bar{x})$ é solução do $MCP(F)$.*

Demonstração. Seja x^* um ponto de acumulação da trajetória log-quadrática. Por hipótese existe uma sequencia $\{(\mu_k, \nu_k)\}_{k\in\mathbf{N}}$ em $\mathbf{R}^2_{++}$ convergindo a $(0,0)$ tal que

$$x^* = \lim_{k\to\infty} x(\mu_k, \nu_k; \bar{x}).$$

Em particular, $\{(\mu_k, \nu_k)\}_{k\in\mathbf{N}}$ é limitada. Logo, segue-se, pelo Lema 2.1.9, que a sequência $\{y(\mu_k, \nu_k; \bar{x})\}_{k\in\mathbf{N}}$ também é limitada. Portanto, existe y^* tal que (x^*, y^*) é um ponto de acumulação da sequência $\big\{x(\mu_k, \nu_k; \bar{x}), y(\mu_k, \nu_k; \bar{x})\big\}_{k\in\mathbf{N}}$. Agora, pelo Lema 2.1.8, segue-se que (x^*, y^*) é um par de soluções complementares do $MCP(F)$, donde, concluímos que x^* é uma solução do $MCP(F)$. □

A seguir estudaremos a convergência da trajetória log-quadrática a um ponto do conjunto solução de $MCP(F)$, no caso em que os parâmetros convergem a 0 de forma "controlada". Para isto, vamos considerar a trajetória log-quadrática primal-dual definida anteriormente. Estudaremos dois casos. No primeiro vamos supor que $MCP(F)$ é não degenerado, isto é, vamos supor que existe um par de soluções estritamente complementares. No segundo, vamos supor que F é linear. Neste'ultimo caso, usaremos as técnicas de [29], *originalmente desenvolvidas para o estudo da trajetória central clássica. Vamos supor que o $MCP(F)$ tem solução.*

Lembremos que, no Capítulo 1, introduzimos os seguintes conjuntos, associados ao $MCP(F)$

$$\begin{aligned}
&I := \{i \in \{1,\ldots,n\} \mid \ \textit{existe}\ (x^*,y^*) \in S^*_{MC}(F),\ \textit{com}\ x^*_i > 0\}\,,\\
&J := \Big\{j \in 1,\ldots,n \mid \ \textit{existe}\ (x^*,y^*) \in S^*_{MC}(F),\ \textit{com}\ y^*_j > 0\Big\}\,,\\
&K := \{1,\ldots,n\} \setminus \{I \cup J\}\,.
\end{aligned}$$

Vamos definir também o seguinte conjunto:

$$\hat{S}(F) := \{(x,y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \mid y \in F(x),\ x_J = 0,\ y_I = 0,\ x_K = 0,\ y_K = 0\}\,.$$

Note-se que quando o operador F é linear, o conjunto $\hat{S}(F)$ é uma variedade linear, porque fica determinado por equações lineares. Observemos-se também que todo ponto $(\hat{x},\hat{y}) \in \hat{S}(F)$ satisfaz $\langle \hat{x},\hat{y}\rangle = 0$. Se o $MCP(T)$ é não degenerado, então as soluções estritamente complementares, $(x^*,y^*) \in S^*_{EMC}(F)$, satisfazem $x^*_I > 0$ e $y^*_J > 0$; neste caso é fácil verificar que $S^*_{EMC}(F) \subset \hat{S}(F)$.

No seguinte teorema analisamos os casos acima enunciados.

Teorema 2.1.11. *Seja $\{(\mu_k,\nu_k)\}_{k\in\mathbf{N}}$ uma sequência em $\mathbf{R}^2_{++}$ convergindo a zero, tal que $\lim_{k\to\infty} \mu_k/\nu_k = a > 0$.*

Suponhamos que uma das seguintes condições é válida:

1. *O $MCP(F)$ é não degenerado.*

2. *O operador F é linear (afim).*

Então a sequência

$$\Big\{\big(x(\mu_k,\nu_k,\bar{x}),y(\mu_k,\nu_k,\bar{x})\big)\Big\}_{k\in\mathbf{N}}$$

converge um par de soluções complementares do $MCP(F)$ em $\hat{S}(F)$.

Demonstração. Para simplificar as notações, defina

$$x^k := x\big(\mu_k, \nu_k; \bar{x}\big), \; y^k := y\big(\mu_k, \nu_k; \bar{x}\big).$$

Como (μ_k/ν_k) converge, quando $k \to +\infty$, segue-se que existe $a' > 0$ tal que

$$\mu_k/\nu_k \leq a' \text{ para todo } k \in \mathbf{N}.$$

Temos que μ_k e ν_k são positivos, para todo $k \in \mathbf{N}$, logo da Proposição 2.1.5 e dos Lemas 2.1.9 e 2.1.8, segue-se que a sequência $\{(x_k, y_k)\}_{k\in\mathbf{N}}$ é limitada e todos os seus pontos de acumulação são soluções complementares. Precisamos então provar a unicidade do ponto de acumulação e sua inclusão em $\hat{S}(F)$.

Seja (x^*, y^*) um ponto de acumulação da sequência $\{(x^k, y^k)\}_{k\in\mathbf{N}}$, isto é, existe uma sub-sequência $\{(x^{k_l}, y^{k_l})\}$ tal que

$$(x^*, y^*) = \lim_{l\to\infty}(x^{k_l}, y^{k_l}).$$

Tome

$$(\hat{x}, \hat{y}) \in \hat{S}(F).$$

Pela definição de x^k e y^k, temos que $y^k - \nu_k(x^k - \bar{x}) \in F(x^k)$. Pela monotonía do operador F segue-se que

$$\left\langle \Big[y^k - \nu_k(x^k - \bar{x})\Big] - \hat{y}, x^k - \hat{x} \right\rangle \geq 0.$$

Reescrevendo esta desigualdade obtemos

$$\langle x^k, y^k\rangle + \langle \hat{x}, \hat{y}\rangle \geq \langle y^k, \hat{x}\rangle + \langle \hat{y}, x^k\rangle + \nu_k\langle x^k - \bar{x}, x^k - \hat{x}\rangle.$$

Observemos que $\langle x^k, y^k\rangle = n\mu_k$ e $\langle \hat{x}, \hat{y}\rangle = 0$, logo segue-se que

$$n\mu_k \geq \langle \hat{x}, y^k\rangle + \langle \hat{y}, x^k\rangle + \nu_k\langle x^k - \bar{x}, x^k - \hat{x}\rangle.$$

Substituindo y^k e x^k por $\mu_k(x^k)^{-1}$ e $\mu_k(y^k)^{-1}$ respectivamente e usando que $\hat{x}_J = 0$, $\hat{y}_I = 0$, obtemos

$$n\mu_k \geq \mu_k \left[\sum_{i\in I} (\hat{x}_i/x_i^k) + \sum_{j\in J} (\hat{y}_i/y_i^k) \right] + \nu_k \langle x^k - \bar{x}, x^k - \hat{x} \rangle.$$

Logo, dividindo por ν_k e passando ao limite em k_l, quando $l \to +\infty$, segue-se que

$$\begin{aligned} &\bullet\ x_i^* > 0, \text{ se } \hat{x}_i > 0, \\ &\bullet\ y_j^* > 0, \text{ se } \hat{y}_j > 0, \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$an \geq a \left[\sum_{i\in I} (\hat{x}_i/x_i^*) + \sum_{j\in J} (\hat{y}_i/y_i^*) \right] + \langle x^* - \bar{x}, x^* - \hat{x} \rangle. \tag{2.16}$$

Pela Observação 1.2.1 do Capítulo 1, temos que existe $(\hat{x}, \hat{y}) \in S(F)$ tal que $\hat{x}_I > 0$, $\hat{y}_J > 0$, de fato, podemos considerar um elemento σ-maximal de $S^*_{MC}(F)$, portanto, segue de (2.15), que $x_i^* > 0$ para todo $i \in I$ e $y_j^* > 0$ para todo $j \in J$. Desta forma, a condição de complementaridade $\langle x^*, y^* \rangle = 0$, somado a positividade de x^* e y^* implicam em que

$$x_j^* = 0, \text{ para todo } j \in J \text{ e } y_i^* = 0, \text{ para todo } i \in I. \tag{2.17}$$

Observemos que $(x^*, y^*) \in S^*_{MC}(T)$, logo segue-se que

$$x_k^* = y_k^* = 0, \text{ para todo } k \in K. \tag{2.18}$$

De (2.17) e (2.18), concluímos que

$$(x^*, y^*) \in \hat{S}(F).$$

Vamos considerar inicialmente o caso i), quando $MCP(F)$ é não degenerado, ou seja $I \cup J = \{1, 2, \ldots, n\}$. Suponhamos que $(\check{x}, \check{y})$ é um outro ponto de acumulação de $\{(x^k, y^k)\}_{k\in\mathbf{N}}$. Como $(\check{x}, \check{y}) \in \hat{S}(F)$, (2.16) vale substitindo-se $\hat{x}$ e $\hat{y}$ por $\check{x}$ e $\check{y}$, respectivamente:

$$an \geq a \left[\sum_{i\in I} (\check{x}_i/x_i^*) + \sum_{j\in J} (\check{y}_i/y_i^*) \right] + \langle x^* - \bar{x}, x^* - \check{x} \rangle.$$

Como (x^*, y^*), $(\check{x}, \check{y})$ são pontos de acumulação arbitrários de $\{(x^k, y^k)\}_{k\in\mathbf{N}}$, esta desigualdade continua válida se trocarmos x^* por $\check{x}$ e y^* por $\check{y}$:

$$a\left[\sum_{i\in I}(x_i^*/\check{x}_i) + \sum_{j\in J}(y_i^*/\check{y}_i)\right] + \langle \check{x} - \bar{x}, \check{x} - x^*\rangle \leq an.$$

Somando-se as duas ultimas desigualdades obtemos

$$0 \geq a\sum_{i\in I}\left[(\check{x}_i/x_i^*) + (x_i^*/\check{x}_i) - 2\right] + a\sum_{j\in J}\left[(\check{y}_i/y_i^*) + (y_i^*/\check{y}_i) - 2\right] + \|\check{x} - x^*\|^2.$$

Como $t + 1/t \geq 2$ para qualquer $t > 0$, com igualdade somente quando $t = 1$, usando a desigualdade acima concluímos que

$$\check{x} = x^*, \quad \check{y}_J = y_J^*.$$

Para finalizar a prova do item i), Observemos que $(x^*, y^*), (\check{x}, \check{y}) \in \hat{S}(F)$, e portanto $\check{y}_I = y_I^* = 0$.

Agora vamos considerar o caso ii), ou seja quando F é um operador linear. Neste caso, $\hat{S}(F)$ é uma variedade linear e o conjunto

$$\hat{H}(S) = \hat{S}(F) - (x^*, y^*)$$

é um subespaço linear de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$. Da desigualdade (2.16) segue-se que para todo $(\hat{x}, \hat{y}) \in \hat{S}(F)$

$$a\sum_{l\in K} 1 \geq a\left[\sum_{i\in I}\left((\hat{x}_i - x_i^*)/x_i^*\right) + \sum_{j\in J}\left((\hat{y}_i - y_i^*)/y_i^*\right)\right] + \langle x^* - \bar{x}, x^* - \hat{x}\rangle. \tag{2.19}$$

Definindo $\phi : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}$,

$$\phi(d^1, d^2) := a\left[\sum_{i\in I}(d_i^1/x_i^*) + \sum_{j\in J}(d_i^2/y_i^*)\right] + \langle \bar{x} - x^*, d^1\rangle,$$

podemos reescrever (2.19) da seguinte forma

$$a\sum_{l\in K} 1 \geq \phi(d^1, d^2), \text{ para todo } (d^1, d^2) \in \hat{H}(F). \tag{2.20}$$

Temos uma função afim limitada em um subespaço linear, portanto constante e igual a 0 nesse subespaço. Logo, para todo $(\hat{x}, \hat{y}) \in \hat{S}(F)$, vale que

$$a\left[\sum_{i\in I}\big((\hat{x}_i - x_i^*)/x_i^*\big) + \sum_{j\in J}\big((\hat{y}_i - y_i^*)/y_i^*\big)\right] + \langle \bar{x} - x^*, \hat{x} - x^*\rangle = 0. \quad (2.21)$$

Novamente, temos que $(x^*, y^*) \in \hat{S}(F)$ e podemos considerar $(\hat{x}, \hat{y})$ como sendo um ponto de acumulação da sequência $\big\{(x(\mu_k, \nu_k; \bar{x}), y(\mu_k, \nu_k; \bar{x})\big\}_{k\in\mathbf{N}}$. Então, podemos trocar x^* com $\hat{x}$ e y^* com $\hat{y}$ em (2.21) e vale que

$$a\left[\sum_{i\in I}\big((x_i^* - \hat{x}_i)/\hat{x}_i\big) + \sum_{j\in J}\big((y^* - \hat{y}_j)/\hat{y}_j\big)\right] + \langle \bar{x} - \hat{x}, x^* - \hat{x}\rangle = 0. \quad (2.22)$$

Somando (2.21) e (2.22), obtemos

$$a\left[\sum_{i\in I}(\hat{x}_i/x_i^*) + (x_i^*/\hat{x}_i) - 2\right] + a\left[\sum_{j\in J}(\hat{y}_j/y_j^*) + (y_j^*/\hat{y}_j) - 2\right] + \|\hat{x} - x^*\|^2 = 0,$$

Usando-se de novo a desigualdade $t + 1/t \geq 2,$ para todo $t > 0$, segue-se que

$$\hat{x} = x^*.$$

Para concluir basta notar que $y^* = F(x^*) = F(\hat{x}) = \hat{y}$. Desta forma, obtemos a unicidade de (x^*, y^*). $\square$

Corolário 2.1.12. *Sejam $t \mapsto \mu(t)$ e $t \mapsto \nu(t)$ aplicaçoẽs de $\mathbf{R}_+$ em $\mathbf{R}_+$ tais que*

$$\lim_{t\to 0^+}\mu(t) = \lim_{t\to 0^+}\nu(t) = 0.$$

e $\lim_{t\to 0}\mu(t)/\nu(t) = a > 0$.

Suponha que uma das seguintes condições é válida:

1. *O problema $MCP(F)$ é não degenerado.*

2. *O operador F é linear (afim).*

Então a curva $t \mapsto \big(x(\mu(t), \nu(t); \bar{x}), y(\mu(t), \nu(t); \bar{x})\big)$ *converge a par de soluções complementares do* $MCP(F)$ *quando* $t \to 0$.

No Apêndice consideraremos um exemplo de um MCP *satisfazendo H1 e com soluções, mas degenerado e não linear. Mostraremos que para este problema, mesmo tomando* $\mu(t) = \nu(t) = t$, *a curva* $t \mapsto (x(\mu(t), \nu(t); \bar{x}), y(\mu(t), \nu(t); \bar{x}))$ *não é convergente.*

2.2 Trajetória log-quadrática para o $VIP(F, \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n_+)$

Os resultados que obteremos nesta seção serão muito similares aos resultados obtidos na seção anterior. As técnicas para suas demostrações serão quase idênticas às empregadas na seção anterior. Optamos por incluir as provas por uma questão de completeza, a pesar de sua similaridade. Nesta seção $F : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \rightrightarrows \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ *é um operador monótono maximal. Agora estamos interessados no Problema da Desigualdade Variacional:*

$$VIP(F, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m_+) \tag{2.23}$$

Vamos considera a seguinte hipótese:
H2) $D(F) \cap \left(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m_{++}\right) \neq \emptyset$

Estudaremos as trajetórias que resultam da introdução de uma barreira logarítmica-quadrática para o problema $VIP(T, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m_+)$. *Neste caso o termo log-quadrático só vai penalizar as componentes sujeitas a restrições de positividade. As variáveis irrestritas serão regularizadas com um termo quadrático.*

Dado $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ *e* μ, $\nu > 0$, *definimos a* barreira log-quadrática para $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m_+$, com parámetro proximal $(\bar{x}, \bar{y})$, *como* $\varphi_{\mu,\nu;\bar{x},\bar{y}} : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \longrightarrow$

$\bar{\mathbf{R}}$:

$$\varphi_{\mu,\nu;\bar{x},\bar{y}}(x,y) := \begin{cases} (\nu/2)\left[\|x-\bar{x}\|^2 + \|y-\bar{y}\|^2\right] - \mu\sum_{j=1}^m \log y_j, & y > 0, \\ +\infty, & \textit{caso contrario.} \end{cases}$$

Definição 2.2.1. *A trajetória log-quadrática para o* $VIP(F, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m_+)$ *é a aplicação que associa aos parâmetros* $(\mu,\nu) \in \mathbf{R}_{++} \times \mathbf{R}_{++}$ *o ponto* $\big(x(\mu,\nu;\bar{x},\bar{y}), y(\mu,\nu;\bar{x},\bar{y})\big)$ *solução de:*

$$0 \in F(x,y) + \nabla\varphi_{\mu,\nu;\bar{x},\bar{y}}(x,y),\ y > 0. \tag{2.24}$$

Equivalentemente, $(x(\mu,\nu;\bar{x},\bar{y}), y(\mu,\nu;\bar{x},\bar{y}))$ *é a solução de*

$$0 \in F(x,y) + \nu(x-\bar{x}, y-\bar{y}) - (0, \mu y^{-1}),\ y > 0. \tag{2.25}$$

Nos resultados a seguir provamos que a trajetória log-quadrática está bem definida e é contínua em todo $(\mu,\nu) \in \mathbf{R}^2_{++}$ *sob a hipótese H2, mesmo quando o* $VIP(F, \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n_+)$ *não tem soluções.*

Observemos que (para $\mu,\nu > 0$*)* $\partial\varphi_{\mu,\nu;\bar{x}}$ *é monótono maximal e*

$$\partial\varphi_{\mu,\nu;\bar{x},\bar{y}}(x,y) = \begin{cases} \{\nabla\varphi_{\mu,\nu;\bar{x},\bar{y}}(x,y)\}, & y > 0, \\ \emptyset, & \textit{caso contrario.} \end{cases}$$

Como $D(\partial\varphi_{\mu,\nu;\bar{x},\bar{y}}) = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m_{++}$*, (2.24) é equivalente ao problema*

$$0 \in (F + \partial\varphi_{\mu,\nu;\bar{x},\bar{y}})(x,y). \tag{2.26}$$

Agora, a Hipótese H2) junto com o Teorema 1.1.4 garante que $F + \partial\varphi_{\mu,\nu;\bar{x},\bar{y}}$ *é monótono maximal. Veremos a seguir a boa definição da trajetória.*

Proposição 2.2.2. *A trajetória log-quadrática para o* $VIP(F, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m_+)$*,*

$$(\mu,\nu) \mapsto \big(x(\mu,\nu;\bar{x};\bar{y}), y(\mu,\nu;\bar{x},\bar{y})\big),$$

está bem definida e $y(\mu,\nu;\bar{x},\bar{y}) > 0$ *para todo* $(\mu,\nu) \in \mathbf{R}^2_{++}$.

Demonstração. Esta prova é analoga à prova da Proposição 2.1.2.

Já sabemos que (para $\mu, \nu > 0$) o operador $F+\partial\varphi_{\mu,\nu;\bar{x},\bar{y}}$ é monótono maximal. Como $\partial\varphi_{\mu,\nu;\bar{x},\bar{y}}$ é fortemente monótono, concluímos que $F + \partial\varphi_{\mu,\nu;\bar{x},\bar{y}}$ também é fortemente monótono. Portanto (2.26) tem uma e somente uma solução [52, Teorema 18.5], que pertence a $D\big(F+\partial\varphi_{\mu,\nu;\bar{x},\bar{y}}\big) \subseteq \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m_{++}$. $\square$

Proposição 2.2.3. *A trajetória log-quadrática para o* $VIP(F, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m_+)$,

$$(\mu, \nu) \mapsto \big(x(\mu, \nu; \bar{x}; \bar{y}), y(\mu, \nu; \bar{x}, \bar{y})\big),$$

é continua em $(\mu, \nu) \in \mathbf{R}^2_{++}$

Demonstração. A prova desta proposição é analoga à prova da Proposição 2.1.3.

Tome $(\mu_0, \nu_0) \in \mathbf{R}^2_{++}$ fixo. Para simplificar a notação, dado $(\mu, \nu) \in \mathbf{R}^2_{++}$,sejam $x_{\mu,\nu}$, $y_{\mu,\nu}$ e $F_{\mu,\nu} : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m_{++} \rightrightarrows \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$, dados por

$$\begin{aligned}
x_{\mu,\nu} &:= x(\mu, \nu; \bar{x}, \bar{y}), \\
y_{\mu,\nu} &:= y(\mu, \nu; \bar{x}, \bar{y}), \\
F_{\mu,\nu}(x, y) &:= F(x, y) + \nabla\varphi_{\mu,\nu;\bar{x};\bar{y}}(x, y) \\
&= F(x, y) + \nu \begin{bmatrix} x - \bar{x} \\ y - \bar{y} \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ -y^{-1} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Como $0 \in F_{\mu_0,\nu_0}(x_{\mu_0,\nu_0}, y_{\mu_0,\nu_0})$, temos

$$(\nu - \nu_0) \begin{bmatrix} x_{\mu_0,\nu_0} - \bar{x} \\ y_{\mu_0,\nu_0} - \bar{y} \end{bmatrix} + (\mu - \mu_0) \begin{bmatrix} 0 \\ -(y_{\mu_0,\nu_0})^{-1} \end{bmatrix} \in F_{\mu,\nu}(x_{\mu_0,\nu_0}, y_{\mu_0,\nu_0}).$$

Definamos

$$w_{\mu,\nu} := (\nu - \nu_0) \begin{bmatrix} x_{\mu_0,\nu_0} - \bar{x} \\ y_{\mu_0,\nu_0} - \bar{y} \end{bmatrix} + (\mu - \mu_0) \begin{bmatrix} 0 \\ -(y_{\mu_0,\nu_0})^{-1} \end{bmatrix}.$$

Então $w_{\mu,\nu} \in F_{\mu,\nu}(x_{\mu_0,\nu_0}, y_{\mu_0,\nu_0})$. Como $0 \in F_{\mu,\nu}(x_{\mu,\nu}, y_{\mu,\nu})$ e $F_{\mu,\nu}$ é fortemente monótono com parâmetro 2ν, segue-se que

$$\left\langle w_{\mu,\nu}\, , \, (x_{\mu_0,\nu_0}, y_{\mu_0,\nu_0}) - (x_{\mu,\nu}, y_{\mu,\nu}) \right\rangle \geq \nu \|(x_{\mu,\nu}, y_{\mu,\nu}) - (x_{\mu_0,\nu_0}, y_{\mu_0,\nu_0})\|^2.$$

Usando agora a desigualdade de Cauchy-Schwartz, obtemos que

$$\|w_{\mu,\nu}\| \geq \nu \|(x_{\mu,\nu}, y_{\mu,\nu}) - (x_{\mu_0,\nu_0}, y_{\mu_0,\nu_0}))\|. \tag{2.27}$$

Da definição de $w_{\mu,\nu}$, segue que

$$\lim_{(\mu,\nu)\to(\mu_0,\nu_0)} w_{\mu,\nu} = 0$$

Combinando-se este resultado com (2.27) (e com o fato de que $\nu_0 > 0$), concluímos que a trajetória log-quadrática é contínua em (μ_0, ν_0) . $\square$

Para estudar a questão da limitação da trajetória log-quadrática definamos $T : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \rightrightarrows \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$, *como*

$$T := F + N_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m_+}. \tag{2.28}$$

A Hipótese H2) garante que T *é monótono maximal via o Terorema 1.1.4. Como já dissemos,* $VIP(F, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m_+)$ *é equivalente ao problema de encontrar um zero de* T*:*

$$0 \in T(x, y). \tag{2.29}$$

Lema 2.2.4. *Se* (x^*, y^*) *é uma solução de* $VIP(F, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m_+)$, $(\mu, \nu) \in \mathbf{R}^2_{++}$ *e* $(x, y) = \big(x(\mu, \nu; \bar{x}, \bar{y}), y(\mu, \nu; \bar{x}, \bar{y})\big)$, *então*

$$\|(x^*, y^*) - (x, y)\|^2 + \|(x, y) - (\bar{x}, \bar{y})\|^2 \leq \|(x^*, y^*) - (\bar{x}, \bar{y})\|^2 + 2n(\mu/\nu).$$

Demonstração. A prova deste lema é análoga à prova do Lema 2.1.4.

Por hipótese, $(x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m_{++}$ e existe $v \in F(x, y)$, tal que

$$0 = v + \nu \begin{bmatrix} x - \bar{x} \\ y - \bar{y} \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ -y^{-1} \end{bmatrix}.$$

Observemos que $D(T) \subseteq \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m_+$. Temos também que $v \in T(x,y)$, pois $y > 0$. Portanto, definindo $\tilde{v} := v + (0, -\mu y^{-1})$ e usando o Lema 1.1.8, conluimos que

$$\tilde{v} \in T^{[\varepsilon]}(x,y),$$

com $\varepsilon = \langle y, \mu y^{-1} \rangle = \mu m$. Também temos que

$$\tilde{v} + \nu \begin{bmatrix} x - \bar{x} \\ y - \bar{y} \end{bmatrix} = 0.$$

Logo, da definição da função de mérito de Solodov-Svaiter (1.16), segue-se que

$$S_{T,1/\nu,(\bar{x},\bar{y})}(x,y,\tilde{v}) \leq (2n\mu/\nu). \tag{2.30}$$

Definindo

$$\begin{aligned} (\bar{x}_+, \bar{y}_+) &:= (\bar{x},\bar{y}) - (1/\nu)\tilde{v} \\ &= (\bar{x},\bar{y}) - \big[(\bar{x},\bar{y}) - (x,y)\big] \quad = \quad (x,y). \end{aligned}$$

De ii) do Teorema 1.2.5 segue que

$$\|(x^*,y^*) - (x,y)\|^2 \leq \|(x^*,y^*) - (\bar{x},\bar{y})\|^2 + \Big[S_{T,1/\nu,(\bar{x},\bar{y})}(x,y,\tilde{v}) - \|(x,y) - (\bar{x},\bar{y})\|^2\Big]$$

Da desigualdade anterior e (2.30) segue o resultado. □

A seguir enunciamos e provamos a versão variacional da Proposição 2.1.5.

Proposição 2.2.5. *Seja $\tau > 0$ e $A(\tau)$ o conjunto definido em (2.11). Se $VIP(F, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m_+)$ tem solução, então para qualquer $(\mu,\nu) \in A(\tau)$*

$$\|\big(x(\mu,\nu;\bar{x},\bar{y}), y(\mu,\nu;\bar{x};\bar{y})\big)\| \leq \|(\bar{x},\bar{y})\| + \sqrt{L^2 + 2\tau},$$

onde $L = d\big((\bar{x},\bar{y}), S(F, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m_+)\big)$.

Demonstração. A prova desta proposição é análoga à prova da Proposição 2.1.5.

Do Lema 2.2.4, segue-se que para todo $(x^*, y^*) \in S(F, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m_+)$

$$\|\big(x(\mu, \nu; \bar{x}, \bar{y}), y(\mu, \nu; \bar{x}, \bar{y})\big) - (\bar{x}, \bar{y})\|^2 \leq \|(x^*, y^*) - (\bar{x}, \bar{y})\|^2 + 2n(\mu/\nu).$$

Logo

$$\|\big(x(\mu, \nu; \bar{x}, \bar{y}), y(\mu, \nu; \bar{x}, \bar{y})\big) - (\bar{x}, \bar{y})\|^2 \leq \|(x^*, y^*) - (\bar{x}, \bar{y})\|^2 + 2n\tau$$

Extraindo a raiz quadrada em ambos lados e usando a desigualdade triangular segue o resultado. □

A proposição acima estabelece a limitação da trajetória log-quadrática para parâmetros μ, ν no conjunto $A(\tau)$.

A definição de pontos de acumulação das trajetórias log-quadráticas para MCP se estende naturalmente para a trajetórias log-quadráticas associadas ao $VIP(F, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m_+)$. Assim, (x^*, y^*) é um ponto de acumulação da trajetória log-quadrática para $VIP(F, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m_+)$, quando $(\mu, \nu) \longrightarrow 0$, se existir uma sequência $\{(\mu_k, \nu_k)\}_{k \in \mathbf{N}}$ em $\mathbf{R}^2_{++}$ convergindo a zero e tal que

$$(x^*, y^*) = \lim_{k \to +\infty} \big(x(\mu_k, \nu_k; \bar{x}; \bar{y}), y(\mu_k, \nu_k; \bar{x}, \bar{y})\big).$$

Como no caso de MCP temos o seguinte resultado sobre complementaridade e pontos de acumulaç ão da trajetória log-quadrática.

Lema 2.2.6. *Se a sequência $\{(\mu_k, \nu_k)\}_{k \in \mathbf{N}}$ em $\mathbf{R}^2_{++}$ converge a zero e a sequência*

$$\left\{\big(x(\mu_k, \nu_k; \bar{x}, \bar{y}), y(\mu_k, \nu_k; \bar{x}, \bar{y}), \mu_k y(\mu_k, \nu_k; \bar{x}, \bar{y})^{-1}\big)\right\}_{k \in \mathbf{N}}$$

é convergente, então seu limite é uma solução complementar do $VIP(T, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m_+)$.

Demonstração. A prova deste lema é análoga à prova do Lema 2.1.8.

Para simplificar a notação definamos

$$x^k := x(\mu_k, \nu_k; \bar{x}, \bar{y}), \quad y^k := y(\mu_k, \nu_k; \bar{x}, \bar{y}), \quad w^k := \mu_k (y^k)^{-1}.$$

Sejam

$$x^* = \lim_{k\to\infty} x^k, \;\; y^* = \lim_{k\to\infty} y^k, \;\; w^* = \lim_{k\to\infty} w^k.$$

Observemos que

$$(-\nu_k(x^k - \bar{x}), w^k - \nu_k(y^k - \bar{y})) \in F(x^k, y^k).$$

$$\begin{array}{rcl} (0, w^*) & = & \lim_{k\to+\infty}(-\nu_k(x^k - \bar{x}), w^k - \nu_k(y^k - \bar{y})), \\ (x^*, y^*) & = & \lim_{k\to+\infty}(x^k, y^k), \end{array}$$

obtemos que

$$(0, w^*) \in F(x^*, y^*).$$

Das definições temos que $y^k, w^k > 0$. Portanto, segue-se que

$$y^* \geq 0, \quad w^* \geq 0.$$

Além disto

$$\langle y^*, w^* \rangle = \lim_{k\to+\infty} \langle y^k, w^k \rangle = 0.$$

Combinando os resultados acima, conluimos que (x^*, y^*, w^*) é uma solução complementar do $VIP(F, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m_+)$, no sentido da Definição 1.9. $\square$

Lema 2.2.7. *Seja* $\{(\mu_k, \nu_k)\}_{k\in\mathbf{N}}$ *uma sequência em* $\mathbf{R}^2_{++}$ *convergindo a zero. Se a sequência* $\left\{ \big(x(\mu_k, \nu_k; \bar{x}; \bar{y}), y(\mu_k, \nu_k; \bar{x}, \bar{y})\big) \right\}_{k\in\mathbf{N}}$ *é limitada, então a sequência* $\left\{\mu_k y(\mu_k, \nu_k; \bar{x}; \bar{y})^{-1}\right\}_{k\in\mathbf{N}}$ *também é limitada.*

Demonstração. A prova deste lema é análoga à prova do Lema 2.1.9.

Para simplificar a notação defina

$$x^k := x(\mu_k, \nu_k; \bar{x}, \bar{y}), \quad y^k := y(\mu_k, \nu_k; \bar{x}, \bar{y}), \quad w^k := \mu_k (y^k)^{-1},$$

e também

$$u^k := -\nu_k(x^k - \bar{x}), \quad v^k := -\nu_k(y^k - \bar{y}).$$

Observemos que $\lim_{k\to+\infty} u^k = 0$, $\lim_{k\to+\infty} v^k = 0$. Por H2) existem $(\hat{x},\hat{y}) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ e $(\hat{u},\hat{w}) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$, tais que

$$(\hat{u},\hat{w}) \in T(\hat{x},\hat{y}), \quad \hat{y} > 0$$

Pelas definições acima temos

$$(u^k, w^k + v^k) \in T(x^k, y^k).$$

Usando-se a monotonia de T, segue-se que

$$\Big\langle \big(u_k\ ,\ w^k + v^k\big) - (\hat{u},\hat{w}), (x^k, y^k) - (\hat{x},\hat{y}) \Big\rangle \geq 0.$$

Reescrevendo esta desigualdade temos

$$\langle u^k - \hat{u}, x^k - \hat{x}\rangle + \langle w^k - \hat{w}, y^k\rangle + \langle \hat{w}, \hat{y}\rangle + \langle v^k, y^k - \hat{y}\rangle \geq \langle w^k, \hat{y}\rangle.$$

Novamente pelas definições acima temos que $\langle w^k, y^k\rangle = m\mu_k$. Usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz e a positividade de w^k e $\hat{y}$ obtemos

$$\begin{aligned} &\|u^k - \hat{u}\|\|x^k - \hat{x}\| + m\mu_k + \|\hat{w}\|\|y^k\| + \|\hat{w}\|\|\hat{y}\| + \|v^k\|\|y^k - \hat{y}\| \\ &\quad \geq \langle w^k, \hat{y}\rangle \geq 0. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Como as sequências $\{x^k\}_{k\in\mathbf{N}}$, $\{y^k\}_{k\in\mathbf{N}}$, $\{u^k\}_{k\in\mathbf{N}}$, $\{v^k\}_{k\in\mathbf{N}}$, $\{\mu_k\}_{k\in\mathbf{N}}$, $\{\mu_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ e $\{\nu_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ são limitadas, concluímos que a sequência $\big\{\langle w^k, \hat{y}\rangle\big\}_{k\in\mathbf{N}}$ é limitada. Uma vez que $w^k \geq 0$ e $\hat{x} > 0$, a limitação de $\{\langle w^k, \hat{y}\rangle\}_{k\in\mathbf{N}}$ implica na limitação de $\{w^k\}_{k\in\mathbf{N}}$. $\square$

Corolário 2.2.8. *Os pontos de acumulação da trajetória log-quadrática* $(\mu,\nu) \mapsto \big(x(\mu,\nu;\bar{x},bary), y(\mu,\nu;\bar{x},\bar{y})\big)$, *quando* $(\mu,\nu) \to 0$, *são soluções do* $VIP(F, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m_+)$.

Demonstração. Seja (x^*, y^*) um ponto de acumulação da trajetória log-quadrática. Por hipótese existe uma sequência $\{(\mu_k, \nu_k)\}_{k\in\mathbf{N}}$ em $\mathbf{R}^2_{++}$ convergindo a $(0,0)$ tal que

$$(x^*, y^*) = \lim_{k\to\infty} \big(x(\mu_k, \nu_k; \bar{x}, bary), y(\mu_k, \nu_k; \bar{x}, bary)\big).$$

Em particular, a sequência $\{x(\mu_k, \nu_k; \bar{x}, bary), y(\mu_k, \nu_k; \bar{x}, bary))\}_{k\in\mathbf{N}}$ é limitada, logo pelo Lema 2.2.7, segue-se que a sequência $\{\mu_k y(\mu_k, \nu_k; \bar{x})^{-1}\}_{k\in\mathbf{N}}$ também é limitada. Portanto, existe w^* tal que (x^*, y^*, w^*) é um ponto de acumulação da sequência $\big\{x(\mu_k, \nu_k; \bar{x}, \bar{y}), y(\mu_k, \nu_k; \bar{x}, \bar{y}), \mu_k y(\mu_k, \nu_k; \bar{x}, \bar{y})^{-1})\big\}_{k\in\mathbf{N}}$. Agora, pelo Lema 2.2.6, segue-se que (x^*, y^*, w^*) é uma solução complementar do $VIP(T, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m_+)$, donde, concluí mos que (x^*, y^*) é uma solução do $VIP(T, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m_+)$. $\square$

A continuação vamos estudar a convergência da trajetória log-quadrática a um ponto do conjunto solução, quando os parâmetros convergem a 0 *de forma "controlada". No primeiro caso vamos supor que* $VIP(F, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m_+)$ *é não degenerado, ou seja existe uma solução que satisfaz a condição de complementaridade estrita; no segundo caso vamos supor que* T *é linear. Neste caso, novamante usaremos as técnicas de [29], para o estudo da trajetoria central clássica. Para obter os resultados que seguem, vamos supor que o* $VIP(F, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m_+)$ *tem solução.*

Lembremos que associado ao $VIP(F, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m_+)$ *definimos os conjuntos.*

$$\begin{aligned}
\bar{I} &:= \big\{i \in \{1, \ldots, m\} \mid \text{ existe } (x^*, y^*, w^*) \in S^*_{n,m}(F), \text{ com } y^*_i > 0\big\},\\
\bar{J} &:= \big\{j \in \{1, \ldots, m\} \mid \text{ existe } (x^*, y^*, w^*) \in S^*_{n,m}(F), \text{ com } w^*_j > 0\big\},\\
\bar{K} &:= \{1, \ldots, m\} \setminus \big\{\bar{I} \cup \bar{J}\big\}.
\end{aligned}$$

Também introduziremos o seguinte conjunto

$$\check{S}(F) := \{(x, y, v) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \mid (0, v) \in F(x, y),\ y_{\bar{J}} = 0,\ v_{\bar{I}} = 0,\ y_{\bar{K}} = 0, v_{\bar{K}} = 0\}.$$

Notemos que quando o operador F é linear, o conjunto $\check{S}(F)$ é uma variedade linear, porque fica determinado por equações lineares. Observemos que, para todo $(x, y, v) \in \check{S}(F)$, vale que $\langle y, w \rangle = 0$.

Teorema 2.2.9. *Seja $\{(\mu_k, \nu_k)\}_{k\in\mathbf{N}}$ uma sequência em $\mathbf{R}^2_{++}$ convergindo a zero, tal que $\lim_{k\to\infty} \mu_k/\nu_k = a > 0$. Suponhamos que uma das seguintes condições é válida:*

1. *O $VIP(T, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m_+)$ é não degenerado.*

2. *O operador F é linear (afim).*

Então a sequência

$$\left\{\left(x(\mu_k, \nu_k; \bar{x}, \bar{y}), y(\mu_k, \nu_k; \bar{x}, \bar{y}), \mu_k y(\mu_k, \nu_k; \bar{x}, \bar{y})^{-1}\right)\right\}_{k\in\mathbf{N}}$$

converge à uma solução complementar do $VIP(T, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m_+)$ em $\check{S}(F)$.

Demonstração. A prova deste teorema é análoga à prova do Teorema 2.1.11.

Para simplificar a notação definiremos

$$x^k := x(\mu_k, \nu_k; \bar{x}, \bar{y}), \quad y^k := y(\mu_k, \nu_k; \bar{x}, \bar{y}), \quad w^k := \mu_k (y^k)^{-1}.$$

Como μ_k/ν_k converge para $a > 0$, existe $a' > 0$ tal que

$$\mu_k/\nu_k \leq a'.$$

Portanto, da Proposição 2.2.5 e ds Lemas 2.2.7 e 2.2.6, segue-se que $\{(x_k, y_k, w_k)\}_{k\in\mathbf{N}}$ é limitada e todos os seus pontos de acumulação são soluções complementares. Precisamos provar a unicidade do ponto de acumulação e sua inclusão em $\check{S}(F)$.

Seja (x^*, y^*, w^*) um ponto de acumulação da sequência $\left\{(x^k, y^k, w^k)\right\}_{k\in\mathbf{N}}$, isto é existe uma sub-sequência $\left\{(x^{k_l}, y^{k_l}, w^{k_l})\right\}_{l\in\mathbf{N}}$, tal que

$$(x^*, y^*, w^*) = \lim_{l\to+\infty} (x^{k_l}, y^{k_l}, w^{k_l}).$$

Tome

$$(\hat{x}, \hat{y}, \hat{w}) \in \check{S}(F).$$

Pelas definições acima,

$$\big(-\nu_k(x_k - \bar{x}), w^k - \nu_k(y_k - \bar{y})\big) \in F(x^k, y^k).$$

Como F é monótono, temos

$$\left\langle \big(-\nu_k(x^k - \bar{x}), w^k - \nu_k(y^k - \bar{y})\big) - (0, \hat{w}), (x^k, y^k) - (\hat{x}, \hat{y}) \right\rangle \geq 0.$$

Reesecrevendo esta desigualdade obtemos

$$\langle w^k, y^k \rangle + \langle \hat{w}, \hat{y} \rangle \geq \langle \hat{w}, y^k \rangle + \langle w^k, \hat{y} \rangle + \nu_k \langle y^k - \bar{y}, y^k - \hat{y} \rangle + \nu_k \langle x^k - \bar{x}, x^k - \hat{x} \rangle.$$

Lembrando que $\langle w^k, y^k \rangle = m\mu_k$ e $\langle \hat{y}, \hat{w} \rangle = 0$, segue-se que

$$m\mu_k \geq \langle \hat{w}, y^k \rangle + \langle w^k, \hat{y} \rangle + \nu_k \langle y^k - \bar{y}, y^k - \hat{y} \rangle + \nu_k \langle x^k - \bar{x}, x^k - \hat{x} \rangle.$$

Substituindo w^k e y^k por $\mu_k(y^k)^{-1}$ e $\mu_k(w^k)^{-1}$ respectivamente, obtemos

$$m\mu_k \geq \mu_k \left[\sum_{j \in \bar{J}} \hat{w}_j / w_j^k + \sum_{i \in \bar{I}} (\hat{y}_i / y_i^k) \right] + \nu_k \langle y^k - \bar{y}, y^k - \hat{y} \rangle + \nu_k \langle x^k - \bar{x}, x^k - \hat{x} \rangle.$$

Logo, dividindo por μ_k e passando ao limite em k_l, quando $l \to +\infty$, segue-se que

$$y_i^* > 0, \text{ se } \hat{y}_i > 0, w_j^* > 0, \text{ se } \hat{w}_j > 0, \tag{2.32}$$

$$m \geq \sum_{j \in \bar{J}} \hat{w}_j / w_j^* + \sum_{i \in \bar{I}} \hat{y}_i / y_i^* + (1/a) \Big[\langle y^* - \bar{y}, y^* - \hat{y} \rangle + \langle x^* - \bar{x}, x^* - \hat{x} \rangle \Big]. \tag{2.33}$$

Pela Observação 1.2.4 do Capítulo 1, temos que existe $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{w}) \in S_{n,m}^*(F)$ tal que $\hat{y}_{\bar{I}} > 0$, $\hat{w}_{\bar{J}} > 0$; de fato, podemos considerar $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{w})$ como sendo um elemento σ-maximal de $S_{n,m}^*(F)$. Portanto, segue de (2.32), que $y_i^* > 0$

para todo $i \in \bar{I}$ e $w_j^* > 0$ para todo $j \in \bar{J}$. Desta forma, a condição de complementaridade $\langle y^*, w^* \rangle = 0$, somada a positividade de y^* e w^* implicam em que

$$y_j^* = 0, \text{ para todo } j \in \bar{J} \text{ e } w_i^* = 0, \text{ para todo } i \in \bar{I}. \tag{2.34}$$

Observemos que $(x^*, y^*, y^*) \in S_{n,m}^*(F)$, logo novamente pela Observação 1.2.4, segue-se que

$$y_k^* = w_k^* = 0, \text{ para todo } k \in \bar{K}. \tag{2.35}$$

De (2.34) e (2.35), concluímos que

$$(x^*, y^*, w^*) \in \check{S}(F).$$

Agora vamos considerar o caso i), ou seja quando $VIP(F, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+^m)$ é não degenerado, neste caso $I \cup J = \{1, 2, \ldots, m\}$. Observemos que podemos considerar que $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{w})$ é um outro ponto de acumulação da sequência $\{(x^k, y^k, w^k)\}_{k \in \mathbf{N}}$, pois provamos que os pontos de acumulação da sequência pertencem a $\check{S}(F)$. Desta forma, podemos trocar $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{w}$ por x^*, y^* e w^* respectivamente e de forma análoga à prova de (2.33) obtemos que

$$m \geq \sum_{i \in \bar{J}} (w_j^* / \hat{w}_j) + \sum_{i \in \bar{I}} (y_i^* / \hat{y}_i) + (1/a) \Big[\langle \hat{y} - \bar{y}, \hat{y} - y^* \rangle + \langle \hat{x} - \bar{x}, \hat{x} - x^* \rangle \Big].$$

Segue agora, somando a desigualdade acima e (2.33)

$$\begin{aligned} 2m \geq & \textstyle\sum_{j \in \bar{J}} \Big[(\hat{w}_j / w_j^*) + (w_j^* / \hat{w}_j) \Big] + \sum_{i \in \bar{I}} \Big[(\hat{y}_i / y_i^*) + (y_i^* / \hat{y}_i) \Big] \\ & + (1/a) \Big[\|\hat{y} - y^*\|^2 + \|\hat{x} - \hat{x}\|^2 \Big] \end{aligned}$$

e, portanto, obtemos

$$\begin{aligned} 0 \geq & \textstyle\sum_{j \in \bar{J}} \Big[(\hat{w}_j / w_j^*) + (w_j^* / \hat{w}_j) - 2 \Big] + \sum_{i \in \bar{I}} \Big[(\hat{y}_i / y_i^*) + (y_i^* / \hat{y}_i) - 2 \Big] \\ & + (1/a) \Big[\|\hat{y} - y^*\|^2 + \|\hat{x} - \hat{x}\|^2 \Big]. \end{aligned}$$

Como $t+1/t \geq 2$ para qualquer $t > 0$, com igualdade somente quando $t = 1$, usando-se a desigualdade acima concluímos que

$$x^* = \hat{x}, \;\; y^* = \hat{y}, w_j^* = \hat{w}_j, \;\text{para todo } j \in \bar{J}.$$

Lembremos que já foi provado que $w_{\bar{I}}^* = \hat{w}_{\bar{I}} = 0$, isto somado às igualdades acima implica na unicidade do ponto de acumulação. Desta forma segue o resultado.

Agora vamos considerar o caso ii), ou seja quando F é um operador linear. Neste caso, $\check{S}(F)$ é uma variedade linear e o conjunto

$$\check{H}(S) = \check{S}(F) - (\hat{x}, \hat{y}, \hat{w})$$

é um subespaço linear de $\mathbf{R}^{(n+2m)}$. Da desigualdade (2.33) segue-se que para todo $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{w}) \in \check{S}(F)$

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{l\in\bar{K}} 1 \geq \textstyle\sum_{j\in\bar{J}} \left[(\hat{w}_j/w_j^*) - 1\right] + \textstyle\sum_{i\in\bar{I}} \left[(\hat{y}_i/y_i^*) - 1\right] \\ +(1/a)\left[\langle x^* - \bar{x}, x^* - \hat{x}\rangle + \langle y^* - \bar{y}, y^* - \hat{y}\rangle\right]. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Definindo $\phi : \mathbf{R}^{n+2m} \mapsto \mathbf{R}$

$$\phi(d^1, d^2, d^3) := \sum_{i\in\bar{I}} (d_i^2/\hat{y}_i) + \sum_{j\in\bar{J}} (d_j^3/w_j^*) - (1/a)\left[\langle d^2, y^* - \bar{y}\rangle + \langle d^1, x^* - \bar{x}\rangle\right],$$

podemos reescrever (2.36) da seguinte forma

$$\sum_{l\in\bar{K}} 1 \geq \phi(d^1, d^2, d^3), \;\text{para todo } (d^1, d^2, d^3) \in \check{H}(F)$$

Temos uma função afim limitada em um subespaço linear, portanto ela é constantemente igual a zero nesse subespaço. Logo, para todo $(\hat{x}, \hat{y}, 0, \hat{w}) \in \check{S}(F)$, vale que

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{i\in\bar{I}} \left[(\hat{w}_i/w_i^*) - 1\right] + \textstyle\sum_{j\in\bar{J}} \left[(\hat{y}_j/y_j^*) - 1\right] \\ +(1/a)\left[\langle y^* - \bar{y}, y^* - \hat{y}\rangle + \langle x^* - \bar{x}, \hat{x} - \hat{x}\rangle\right] = 0. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Novamente podemos considerar (x^*, y^*, w^*) como sendo um outro ponto de acumulação da sequência. Logo, podemos trocar em (2.37) x^*, y^*, w^* por $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{w}$, respectivamente e vale que

$$\sum_{j\in\bar{J}}\Big[(w_j^*/\hat{w}_j)-1\Big]+\sum_{i\in\bar{I}}\Big[(y_i^*/\hat{y}_i)-1\Big]+(1/a)\Big[\langle\hat{y}-\bar{y},\hat{y}-y^*\rangle+\langle\hat{x}-\bar{x},\hat{x}-x^*\rangle\Big]=0. \tag{2.38}$$

Somando (2.37) e (2.38), obtemos

$$\sum_{j\in\bar{J}}\Big[(\hat{w}_j/w_j^*)+(w_j^*/\hat{w}_j)-2\Big]+\sum_{i\in\bar{I}}\Big[(\hat{y}_i/y_i^*)+(y_i^*/\hat{y}_i)-2\Big]+(1/a)\Big[\|\hat{y}-y^*\|^2+\|\hat{x}-x^*\|^2\Big]=0.$$

Usando de novo a desigualdade $t+1/t\geq 2,$ para todo $t>0$ segue-se que

$$x^*=\hat{x},\ y^*=\hat{y}.$$

Para concluir basta notar que $(0,\hat{w})=F(\hat{x},\hat{y})=F(x^*,y^*)=(0,w^*)$. $\square$

No seguinte teorema caraterizamos os pontos de acumulação da trajetória log-quadr ática, quando a razão entre os parámetros μ_k e ν converge a zero.

Teorema 2.2.10. *Seja $\{(\mu_k,\nu_k)\}_{k\in\mathbf{N}}$ uma sequência em $\mathbf{R}^2_{++}$ convergindo a zero, tal que $\lim_{k\to\infty}\mu_k/\nu_k=0$. Então a sequência*

$$\Big\{\big(x(\mu_k,\nu_k;\bar{x},\bar{y}),y(\mu_k,\nu_k;\bar{x},\bar{y})\big)\Big\}_{k\in\mathbf{N}},$$

converge à solução do $VIP(T,\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^n_+)$ mais próxima a $(\bar{x},\bar{y})$.

Demonstração. Para simplificar a notação defina

$$x^k:=x(\mu_k,\nu_k;\bar{x},\bar{y}),\quad y^k:=y(\mu_k,\nu_k;\bar{x},\bar{y}).$$

Das definições acima, temos que existe $v^k\in F(x^k,y^k)$ tal que

$$0=v^k+\nu_k\begin{bmatrix}x_k-\bar{x}\\ y_k-\bar{y}\end{bmatrix}+\mu_k\begin{bmatrix}0\\ -y_k^{-1}\end{bmatrix}.$$

Observemos que $D(T) \subseteq \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m_+$. Temos também que $v^k \in T(x^k, y^k)$ pois $y^k > 0$. Portanto, definindo $\tilde{v}^k := v^k + (0, -\mu(y^k)^{-1})$ e usando o Lema 1.1.8, conluímos que

$$\tilde{v}^k \in T^{[\varepsilon_k]}(x^k, y^k),$$

com $\varepsilon_k = \left\langle y^k, \mu_k (y^k)^{-1} \right\rangle = m\mu_k$. Também temos que

$$0 = \tilde{v}^k + \nu_k \begin{bmatrix} x^k - \bar{x} \\ y^k - \bar{y} \end{bmatrix}.$$

Usando a definição da função de mérito (1.16), temos

$$S_{T,1/\mu_k,(\bar{x},\bar{y})}\big((x^k, y^k), w^k\big) \leq 2m(\mu_k/\nu_k).$$

Definindo $(\tilde{x}^k, \tilde{y}^k)$ como a solução do problema

$$0 \in (1/\nu_k)T(x,y) + \begin{bmatrix} x - \bar{x} \\ y - \bar{y} \end{bmatrix},$$

e aplicando o Corolario 1.2.6, concluímos que

$$\|(\tilde{x}^k, \tilde{y}^k) - (x^k, y^k)\|^2 \leq 2m(\mu_k/\nu_k). \tag{2.39}$$

Portanto,

$$\lim_{k \to +\infty} \|(\tilde{x}^k, \tilde{y}^k) - (x^k, y^k)\|^2 = 0.$$

Observemos que $(\tilde{x}^k, \tilde{y}^k) = \big((1/\nu_k)T + I\big)^{-1}(\bar{x}, \bar{y})$. Das propiedades da regularização de Tikhonov do operador T (Lema 1.4.1), segue-se que

$$\lim_{k \to +\infty} (\tilde{x}^k, \tilde{y}^k) = P_{T^{-1}(0)}(\bar{x}, \bar{y}),$$

onde P_C denota a projeção ortogonal sobre C. Combinando-se os dois resultados, chegamos à conclusão desejada. $\square$

Capítulo 3

Algoritmos de path-following ao longo das trajetórias log-quadráticas.

Neste capítulo apresentaremos dois algoritmos de tipo path-following, *para a resolução do Problema de Complementaridade Linear Monótono, $LMCP$. Estes algoritmos, de forma geral, efetuam uma iteração de método de Newton para o sistema de equações que caraterizam as trajetórias log-quadr áticas, estudadas no capítulo anterior. Cada um dos dois algoritmos que serão apresentados, corresponde a formulações diferentes das trajetórias log-quadráticas. Chamaremos estas formulações, de caso escalado e caso não-escalado. Provaremos que os algoritmos são globalmente convergentes, isto é, as sequências geradas são limitadas e os pontos de acumulação são soluções do $LMCP$. Também obteremos convergência R-linear a zero da medida de dualidade dos iterandos das duas sequências geradas pelos algoritmos.*

Neste capítulo estamos interessados na resolução do $MCP(F)$, onde $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ é um operador linear (afim) e monótono, dado por

$$F(x) = Mx + b.$$

Portanto, M é uma matriz $n \times n$ semi-definida positiva e $b \in \mathbf{R}^n$.

3.1 Formulação escalada da trajetória log-quadrática

Vamos considerar a trajetória log-quadrática para o $LMCP(F)$. Para simplificar a abordagem, vamos trabalhar com a curva obtida da trajetória log-quadrática para $MCP(F)$, tomando $\mu = \nu = 1/\lambda$. Dado $\bar{x}$ definimos a curva log-quadrática como a aplicação $\lambda \in \mathbf{R}_{++} \mapsto \big(x(\lambda), y(\lambda)\big)$,

$$\big(x(\lambda), y(\lambda)\big) := \big(x(1/\lambda, 1/\lambda; \bar{x}), y(1/\lambda, 1/\lambda; \bar{x})\big), \tag{3.1}$$

onde $(\mu, \nu) \mapsto \big(x(\mu, \nu; \bar{x}), y(\mu, \nu; \bar{x})\big)$ é a trajetória log-quadrática para o $MCP(F)$ (ver Definição 2.1.1). Observemos que o problema $MCP(F)$ satisfaz a hipótese H1). Portanto, a trajetória log-quadrática está bem definida.

Usando (2.12) concluímos que o par $\big(x(\lambda), y(\lambda)\big)$, $\lambda \in \mathbf{R}_{++}$ é a solução de

$$\begin{cases} 0 = \lambda(F(x) - y) + x - \bar{x} \\ 0 = \lambda X y - e. \\ (x, y) \in \mathbf{R}^n_{++} \times \mathbf{R}^n_{++}. \end{cases} \tag{3.2}$$

Chamaremos o sistema acima de formulação escalada *para a curva log-quadrática.*

Usando-se o Corolario 2.1.12, conluímos que se $MCP(F)$ tem solução então existe $\lim_{\lambda \to +\infty}(x(\lambda), y(\lambda))$ e este limite é um par de soluções complementares do problema.

3.1.1 Medida de proximidade à trajetória log-quadrática.

Os algoritmos de path-following *do tipo* short-step *funcionam, de forma geral, dando pasos de Newton para o sistema de equações que definem a trajetória e aumentando o parámetro λ. Isto deve ser feito de maneira a manter os iterados no interior de vizinhanças pequenas da trajetória.*

Para avaliar a distância de um ponto à curva log-quadrática, introduziremos uma medida de proximidade. Dados $\lambda > 0$, e $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$, definimos $(R_1(x, y; \lambda; \bar{x}), R_2(x, y; \lambda))$ como o resíduo em (3.2), isto é

$$\begin{aligned} R_1(x, y; \lambda; \bar{x}) &:= \lambda(F(x) - y) + x - \bar{x}, \\ R_2(x, y; \lambda) &:= \lambda X y - e \end{aligned} \tag{3.3}$$

Chamamos de Medida de proximidade do par (x, y) à trajetória log-quadrática *à seguinte magnitude.*

$$\delta(x, y; \lambda; \bar{x}) := \|R_1(x, y; \lambda; \bar{x})\|^2 + \|R_2(x, y; \lambda)\|^2. \tag{3.4}$$

*Associada a esta medida de proximidade definiremos uma vizinhança da trajetória log-quadrática, na qual, como veremos depois, ficarão restritas as sequências de pontos geradas pelo algoritmo que será apresentado nesta seção. Dados $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$ fixo e $\beta \in (0, 1)$, chamaremos de β-*vizinhnça da curva log-quadrática *ao conjunto*

$$N_\beta = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^n_{++} \times \mathbf{R}^n_{++} \mid \ \textit{existe } \lambda > 0, \ \textit{com } \delta(x, y; \lambda; \bar{x}) \leq \beta^2\right\}. \tag{3.5}$$

3.1.2 Método de Newton para a formulação escalada

Para obtermos uma boa aproximação de $(x(\lambda), y(\lambda))$ vamos empregar o método de Newton para o sistema (3.2).

Fazendo $R_{\lambda,\bar{x}} : \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$,

$$R_{\lambda,\bar{x}}(x, y) := \begin{bmatrix} \lambda(F(x) - y) + x - \bar{x} \\ \lambda X y - e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1(x, y; \lambda; \bar{x}) \\ R_2(x, y; \lambda) \end{bmatrix},$$

temos que o sistema (3.2) pode ser escrito como $R_{\lambda,\bar{x}}(x,y) = 0$. *O método de Newton aplicado a (3.2) deve resolver em cada interação um sistema linear que chamaremos de sistema de Newton:*

$$\begin{bmatrix} R_1(x,y;\lambda;\bar{x}) \\ R_2(x,y;\lambda) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nabla_{x,y} R_1(x,y;\lambda;\bar{x}) \\ \nabla_{x,y} R_2(x,y;\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d^x \\ d^y \end{bmatrix} = 0.$$

No nosso caso $F(x) = Mx + b$, *onde* M *é uma matriz semi-definida positiva, logo o sistema pode-se reescrever como*

$$\begin{bmatrix} \lambda M + I & -\lambda I \\ \lambda Y & \lambda X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d^x \\ d^y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_1(x,y;\lambda;\bar{x}) \\ R_2(x,y;\lambda) \end{bmatrix}. \tag{3.6}$$

A seguir vamos provar que este sistema tem uma única solução.

Lema 3.1.1. *Sejam* C *uma matriz semidefinida positiva,* $A = diag(a)$ *e* $B = diag(b)$, *matrizes diagonais definidas positivas, então a matriz*

$$\begin{bmatrix} C & -I \\ A & B \end{bmatrix},$$

é não singular.

Demonstração. Seja (d^1, d^2) uma solução do sistema

$$\begin{bmatrix} C & -I \\ A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d^1 \\ d^2 \end{bmatrix} = 0.$$

Segue-se que d^1 é solução de $(C + B^{-1}A)d^1 = 0$. Pelas hipóteses, a matriz $(C + B^{-1}A)$ é definida positiva, logo concluímos que $d^1 = 0$. Substituindo o valor de d^1 em qualquer uma das equações do sistema acima, obtemos que $d^2 = 0$, donde segue o resultado. $\square$

Corolário 3.1.2. *Sejam* $(x,y) \in \mathbf{R}^n_{++} \times \mathbf{R}^n_{++}$ *e* $\lambda > 0$, *então o sistema de Newton (3.6) tem uma única solução.*

Demonstração. Como M é semi-definida positiva, a matriz $M+\lambda I$ é positiva definida. Aplicando agora o lema anterior, concluímos que a matriz $2n \times 2n$ que aparece no lado esquerdo do sistema (3.6) é não singular. $\square$

Portanto o método de Newton pode ser aplicado enquanto os iterados se mantiverem no ortante positivo. Agora estudaremos o comportamento do resíduo após um paso de Newton.

Lema 3.1.3. *Dados* $(x, y) \in \mathbf{R}^n_{++} \times \mathbf{R}^n_{++}$ *e* $\lambda > 0$*, seja*

$$(x_+, y_+) := (x + d^x, y + d^y),$$

onde (d^x, d^y) *é a solução do sistema de Newton (3.6). Então*

$$\begin{aligned} R_1(x_+, y_+; \lambda; \bar{x}) &= 0, \\ R_2(x_+, y_+; \lambda) &= \lambda D^x d^y, \end{aligned}$$

onde $D^x = diag(d^x_1, \cdots, d^x_n)$.

Demonstração. Como $(x, y) \mapsto R_1(x, y; \lambda; \bar{x})$ é linear, esse termo se anula após um paso de Newton. De fato, calculando este resíduo após o passo de Newton, temos

$$\begin{aligned} R_1(x_+, y_+; \lambda; \bar{x}) &= \lambda(Mx_+ + b - y_+) + x_+ - \bar{x} \\ &= \lambda(Mx + b - y) + x - \bar{x} + \lambda(Md^x - d^y+) + d^x \\ &= R_1(x, y; \lambda; \bar{x}) + \big[(\lambda M + I)d^x - \lambda d^y\big] = 0, \end{aligned}$$

onde, para a última igualdade, empregamos (3.6). O cálculo de R_2 dá

$$\begin{aligned} R_2(x_+, y_+; \lambda) &= \lambda X_+ y_+ - e = \lambda(X + D^x)(y + d^y) - e \\ &= \lambda Xy - e + \lambda(Xd^y + Yd^x) + \lambda D^x d^y \\ &= R_2(x, y; \lambda) + \big[\lambda Y d^x + \lambda X d^y\big] + \lambda D^x d^y = \lambda D^x d^y, \end{aligned} \tag{3.7}$$

onde, para a última igualdade empregamos novamente (3.6). $\square$

Para completar o estudo de resíduo, vamos estimar a norma de $\lambda D^x d^y$. Isto vai requerer alguns resultados técnicos.

Lema 3.1.4. *Sejam $u, v \in \mathbf{R}^n$ e $a \in \mathbf{R}^n$ tal que $a_i \neq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Então,*

$$\|Uv\| \leq (1/2)\Big(\|Au\|^2 + \|A^{-1}v\|^2\Big),$$

onde $A = diag(a)$ e $U = diag(u)$.

Demonstração. Observemos que

$$\begin{aligned}
\|Uv\| &= \textstyle\sum_{i=1}^n u_i v_i = \sum_{i=1}^n (a_i u_i)(v_i/a_i) \\
&\leq \Big(\textstyle\sum_{i=1}^n (a_i u_i)^2\Big)^{(1/2)} \Big(\textstyle\sum_{i=1}^n (v_i/a_i)^2\Big)^{(1/2)} \\
&= \|Au\|\|A^{-1}v\| \leq (1/2)\Big(\|Au\|^2 + \|A^{-1}v\|^2\Big),
\end{aligned}$$

onde para a primeira desigualdade aaplicamos Cauchy-Schwartz e para a segunda usamos a relação $st \leq (1/2)\big(s^2 + t^2\big)$ para todo $s, t \in \mathbf{R}$. $\square$

Empregando este lema, para $u = d^x$, $v = d^y$ e $a_i = (y_i/x_i)^{1/2}$, $i = 1, \cdots, n$, concluímos que para λ, (x, y), (d^x, d^y) como no Lema 3.1.3,

$$\|\lambda D^x d^y\| \leq (\lambda/2)\big(\|(X^{-1}Y)^{(1/2)} d^x\|^2 + \|(X^{-1}Y)^{(-1/2)} d^y\|^2\big).$$

Vamos estimar agora o lado direito desta desigualdade.

Lema 3.1.5. *Sejam $(x, y) \in \mathbf{R}^n_{++} \times \mathbf{R}^n_{++}$, $\lambda > 0$ e $\beta \in (0, 1)$ tais que, $\|\lambda Xy - e\| \leq \beta$. Se (d^x, d^y) é a solução do sistema de Newton (3.6), então*

$$\begin{aligned}
\lambda\big(\|(X^{-1}Y)^{(1/2)} d^x\|^2 + \|(X^{-1}Y)^{(-1/2)} d^y\|^2\big) \quad &\leq \quad 2\|R_1(x, y; \lambda; \bar{x})\|^2 + \\
&+ \|R_2(x, y; \lambda)\|^2/(1 - \beta).
\end{aligned}$$

Demonstração. Multiplicando a segunda equação do sistema de Newton (3.6) por $(XY)^{-(1/2)}$, temos

$$\lambda\left((X^{-1}Y)^{(1/2)} d^x + (X^{-1}Y)^{-(1/2)} d^y\right) = -(XY)^{-(1/2)} R_2(x, y; \lambda).$$

Logo, tomando norma ao quadrado em ambos lados e dividindo por λ, segue-se que

$$\begin{aligned}&\lambda\bigg(\|(X^{-1}Y)^{(1/2)}d^x\|^2 + \|(X^{-1}Y)^{-(1/2)}d^y\|^2\bigg) + 2\lambda\langle d^x, d^y\rangle \\ &\quad = (1/\lambda)\|(XY)^{-(1/2)}R_2(x,y;\lambda)\|^2 = \|(\lambda XY)^{-(1/2)}R_2(x,y;\lambda)\|^2\end{aligned}$$

Agora empregando ii) do Lema 1.4.2, segue-se que

$$\begin{aligned}&\lambda\bigg(\|(X^{-1}Y)^{(1/2)}d^x\|^2 + \|(X^{-1}Y)^{-(1/2)}d^y\|^2\bigg) + 2\lambda\langle d^x, d^y\rangle \\ &\quad \leq \|R_2(x,y;\lambda)\|^2/(1-\beta).\end{aligned} \tag{3.8}$$

Se $\langle d^x, d^y\rangle \geq 0$, (3.8) implica no resultado desejado.

Para concluir a prova resta agora supor

$$\langle d^x, d^y\rangle < 0. \tag{3.9}$$

Multiplicando escalarmente a primeira equação do sistema (3.6) por d^x, obtemos

$$\langle d^x, (\lambda M + I)d^x\rangle - \lambda\langle d^x, d^y\rangle = -\langle d^x, R_1(x,y;\lambda;\bar{x})\rangle.$$

Como $\lambda > 0$ e M é positiva semi-definida, concluímos que

$$\|d^x\|^2 - \lambda\langle d^x, d^y\rangle \leq \|d^x\|\|R_1(x,y;\lambda;\bar{x})\|. \tag{3.10}$$

Segue-se de (3.9) que $\|d^x\|^2 \leq \|d^x\|\|R_1(x,y;\lambda;\bar{x})\|$, portanto

$$\|d^x\| \leq \|R_1(x,y;\lambda;\bar{x})\|. \tag{3.11}$$

Agora multiplicando (3.10) por 2, somando-se a isto a (3.8) e empregando (]3.11), segue-se que

$$\begin{aligned}&2\|d^x\|^2 + \lambda\bigg(\|(X^{-1}Y)^{(1/2)}d^x\|^2 + \|(X^{-1}Y)^{-(1/2)}d^y\|^2\bigg) \\ &\quad \leq 2\|d^x\|\|R_1(x,y;\lambda;\bar{x})\| + \|R_2(x,y;\lambda)\|^2/(1-\beta) \\ &\quad \leq 2\|R_1(x,y;\lambda;\bar{x})\|^2 + \|R_2(x,y;\lambda)\|^2/(1-\beta),\end{aligned} \tag{3.12}$$

Esta desigualdade implica trivialmente o resultado desejado. $\square$

Vamos agora obter uma estimativa do resíduo após um paso de Newton. Isto vai nos permitir determinar uma região de convergência quadrática de Método de Newton.

Teorema 3.1.6. *Sejam* $(x, y) \in \mathbf{R}^n_{++} \times \mathbf{R}^n_{++}$, $\lambda > 0$ *e*

$$(x_+, y_+) := (x, y) + (d^x, d^y),$$

onde (d^x, d^y) *a solução do sistema de Newton (3.6).*

Se $\delta(x, y; \lambda; \bar{x}) \leq \beta^2$ *com* $\beta \in \big(0, 1/2]\big)$, *então*

i) $\delta(x_+, y_+; \lambda; \bar{x}) \leq \delta(x, y; \lambda; \bar{x})^2 \leq \beta^4$.

ii) $(x_+, y_+) \in \mathbf{R}^n_{++} \times \mathbf{R}^n_{++}$.

Demonstração. i) Como $\delta(x, y; \lambda; \bar{x}) \leq \beta^2$, temos $\|\lambda X y - e\| \leq \beta$. Aplicando-se o Lema 3.1.3, o Lema 3.1.4 e o Lema 3.1.5 obtemos

$$\begin{array}{rcl} \delta(x_+, y_+; \lambda; \bar{x}) & = & \|\lambda D^x d^y\|^2 \\ & \leq & \left[(\lambda/2)\left(\|(X^{-1}Y)^{(1/2)} d^x\|^2 + \|(X^{-1}Y)^{-(1/2)} d^y\|^2\right)\right]^2 \\ & \leq & \left[\|R_1(x, y; \lambda; \bar{x})\|^2 + \|R_2(x, y; \lambda)\|^2 / \big(2(1-\beta)\big)\right]^2. \end{array}$$

Por hipótese, $\beta \leq 1/2$, portanto $\big(1/2(1-\beta)\big) \leq 1$ e

$$\delta(x_+, y_+; \lambda; \bar{x}) \leq \left[\|R_1(x, y; \lambda; \bar{x})\|^2 + \|R_2(x, y; \lambda)\|^2\right]^2 = \delta(x, y; \lambda; \bar{x})^2.$$

Isto prova a primeira desigualdade em i). A segunda desigualdade vale trivialmente.

ii) Para provar a positividade estrita de (x_+, y_+), basta repetir os argumentos de [34, Lema 2]. Para $\theta \in [0, 1]$, temos que

$$(x_i + \theta d_i^x)(y_i + \theta d_i^y) = x_i y_i + \theta(x_i d_i^y + y_i d_i^x) + \theta^2 d_i^x d_i^y.$$

Usando-se (3.3), (3.6) e o Lema 3.1.3, temos que

$$\begin{array}{rcl} x_i d_i^y + y_i d_i^x & = & 1/\lambda - x_i y_i, \\ d_i^x d_i^y & = & (x_+)_i (y_+)_i - 1/\lambda. \end{array}$$

Combinando os resultados acima, obtemos

$$(x_i + \theta d_i^x)(y_i + \theta d_i^y) = (1-\theta)x_i y_i + \theta(1-\theta)/\lambda + \theta^2 (x_+)_i (y_+)_i$$

Pelo item i), temos que $\|\lambda X_+ y_+ - e\| = \sqrt{\delta(x_+, y_+; \lambda; \bar{x})} \leq \beta^2$. Logo, por i) do Lema 1.4.2, segue-se que

$$(x_+)_i (y_+)_i > (1-\beta^2)/\lambda > 0, \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n$$

Combinando os resultados acima, concluímos que para $\theta \in [0, 1]$

$$(x_i + \theta d_i^x)(y_i + \theta d_i^y) > 0.$$

Vamos supor que para algum $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$, vale que $(x_+)_{i_0} < 0$ ou $(y_+)_{i_0} < 0$. Então, usando que $x_{i_0} > 0$ e $y_{i_0} > 0$, concluímos que existe $\bar{\theta} \in (0, 1)$ tal que $x_{i_0} + \bar{\theta} d^x{}_{i_0} = 0$ ou $y_{i_0} + \bar{\theta} d^y{}_{i_0} = 0$, e isto contradiz a desigualdade acima. $\square$

Se (x, y) e λ satisfazem as condições do Teorema 3.1.6, então tomando o ponto (x, y) como iterado inicial, o método de Newton para resolver (3.2) gera uma sequência infinita que permanece no ortante positivo. Além disso, os resíduos convergem quadráticamente para zero. Para garantir a convergência da sequência e estimar a distância euclideana de um ponto da β-vizinhança à trajetória log-quadrática, vamos obter uma cota superior da norma da componente d^x do passo de Newton, em função da medida de proximidade do par (x, y) à trajetória log-quadrática.

Começaremos com um lema técnico que nos permitirá estimar o residuo após um passo de Newton para sistema (3.6).

Lema 3.1.7. *Dados uma matriz semidefinida positiva M, uma matriz definida positiva B, uma matriz simétrica C e $(r_1, r_2) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, seja $(d^1, d^2) \in \mathbf{R}^{2n}$ a solução do sistema linear*

$$\begin{bmatrix} M+I & -C \\ C & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d^1 \\ d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix},$$

então

$$\|d^1\|^2 + \|d^2\|_B^2 \leq \|r_1\|^2 + \|r_2\|_{B^{-1}}^2. \tag{3.13}$$

Demonstração. Multiplicando escalarmente as equações do primeiro e segundo bloco do sistema de Newton (3.31) por d^1 e d^2 respetivamente, obtemos

$$\begin{array}{rcccl} \langle d^1, (M+I)d^1\rangle - \langle d^1, Cd^2\rangle & = & \langle d^1, r_1\rangle & \leq & \|d^1\|\|r_1\|, \\ \langle d^2, Cd^1\rangle + \langle d^2, Bd^2\rangle & = & \langle d^2, r_2\rangle & \leq & \|B^{(1/2)}d^2\|\|B^{-(1/2)}r_2\|. \end{array}$$

Usando as desigualdades anteriores e somado ao fato de que a matriz M é semi- em $\mathbf{R}^2$ definida positiva e a matriz C é simétrica, segue-se que

$$\begin{array}{rcl} \|d^1\|^2 + \|d^2\|_B & \leq & \|d^1\|\|r_1\| + \|B^{(1/2)}d^2\|\|B^{-(1/2)}r_2\| \\ & \leq & \left[\|d^1\|^2 + \|d^2\|_B^2\right]^{(1/2)} \left[\|r_1\|^2 + \|r_2\|_{B^{-1}}^2\right]^{(1/2)}, \end{array}$$

onde para a última desigualdade empregamos a desigualdade de Cauchy-Schwartz. Da relação anterior segue o resultado. □

Lema 3.1.8. *Sejam* $(x, y) \in \mathbf{R}^n_{++} \times \mathbf{R}^n_{++}$*,* $\lambda > 0$*, e* $\beta \in (0, 1)$ *tais que* $\|\lambda Xy - e\| \leq \beta$*. Então*

$$\|d^x\|^2 \leq \delta(x, y; \lambda; \bar{x})/(1-\beta),$$

onde (d^x, d^y) *é a solução do sistema de Newton (3.6).*

Demonstração. Multiplicando o bloco inferior do sistema (3.6) por Y^{-1}, obtemos

$$\begin{bmatrix} \lambda M + I & -\lambda I \\ \lambda I & \lambda Y^{-1}X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d^x \\ d^y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_1(x, y; \lambda; \bar{x}) \\ Y^{-1}R_2(x, y; \lambda) \end{bmatrix}.$$

Aplicando o Lema 3.1.7, obtemos

$$\|d^x\|^2 + \|d^y\|_{\lambda Y^{-1}X}^2 \leq \|R_1(x, y; \lambda; \bar{x})\|^2 + \|Y^{-1}R_2(x, y; \lambda)\|_{(\lambda Y^{-1}X)^{-1}}^2.$$

Simplificando o último termo e aplicando ii) do Lema 1.4.2 obtemos

$$\|Y^{-1}R_2(x,y;\lambda)\|^2_{(\lambda Y^{-1}X)^{-1}} = \|(\lambda XY)^{-1/2}R_2(x,y;\lambda)\|^2 \le \|R_2(x,y;\lambda)\|^2/(1-\beta).$$

Combinando as duas desigualdades acima e levando em conta que $0 < 1-\beta < 1$ obtemos, em vista do Lema 3.1.3

$$\begin{aligned}\|d^x\|^2 + \|d^y\|^2_{\lambda Y^{-1}X} &\le \|R_1(x,y;\lambda;\bar{x})\|^2 + \|R_2(x,y;\lambda)\|^2/(1-\beta)\\ &\le \delta(x,y;\lambda;\bar{x})/(1-\beta).\end{aligned}$$

Esta desigualdade trivialmente implica o resultado desejado. □

No seguinte resultado obtemos uma cota superior da distância euclideana dos pontos da β-vizinhaça à trajetória log-quadrática.

Teorema 3.1.9. *Sejam $(x,y) \in \mathbf{R}^n_{++} \times \mathbf{R}^n_{++}$, $\lambda > 0$ e $\beta \in (0, 1/2]$ tais que, $\delta(x,y;\lambda;\bar{x}) \le \beta^2$, então*

$$\begin{aligned}&\|x - x(\lambda)\| \le \big(\beta/(1-\beta)\big)^{(3/2)},\\ &\|y - y(\lambda)\| \le [\|M\| + (1/\lambda)]\big(\beta/(1-\beta)\big)^{(3/2)} + \beta/\lambda,\end{aligned}$$

onde $x(\lambda)$ e $y(\lambda)$ foram definidos em (3.1)

Demonstração. i) Faça $(x^0, y^0) := (x, y)$ e considere a sequência

$$(x^{k+1}, y^{k+1}) = (x^k, y^k) + (d^x_k, d^y_k),\ k = 0, 1, 2\dots,$$

onde (d^x_k, d^y_k) é a solução do sistema de Newton (3.6) para o par (x^k, y^k) e o parâmetro λ fixo. Vamos provar que a sequência está bem definida. Suponha que para algum $k \in \mathbf{N}$, vale que (x^k, y^k) está bem definido,

$$(x^k, y^k) \in \mathbf{R}^n_{++} \times \mathbf{R}^n_{++} \text{ e } \delta(x^k, y^k; \lambda; \bar{x}) \le \beta^{2^{k+1}}. \tag{3.14}$$

Note-se que isto vale para $k = 0$. Segue do Teorema 3.1.6 que (x^{k+1}, y^{k+1}) está bem definido, pertence a $\in \mathbf{R}^n_{++} \times \mathbf{R}^n_{++}$ e

$$\delta(x^{k+1}, y^{k+1}; \lambda; \bar{x}) \le \delta(x^k, y^k; \lambda; \bar{x})^2 \le \beta^{2^{k+2}}.$$

Por indução completa, segue-se que a sequência $\{(x^k, y^k)\}_{k\in\mathbf{M}}$ está bem definida e satisfaz (3.14), para todo $k \in \mathbf{R}^n$.

Vamos agora provar que a sequência $\{(x^k, y^k)\}_{k\in\mathbf{R}^n}$ é convergente. Pelo Lema 3.1.8 e (3.14), temos

$$\|d_k^x\| \leq \big(\delta(x^k, y^k; \lambda; \bar{x})/(1-\beta)\big)^{(1/2)} \leq \big(\beta^{2^{k+1}}/(1-\beta)\big)^{(1/2)}. \tag{3.15}$$

Portanto, a sequência $\{d_k^x\}_{k\in\mathbf{N}}$ é somável. Como $d_k^x = x^{k+1} - x^k$, concluímos que $\{x^k\}_{k\in\mathbf{R}^n}$é uma sequência de Cauchy e converge a um certo $\hat{x}$. Usando a desigualdade triangular e (3.15) concluímos que para qualquer $K \in \mathbf{N}$,

$$\|x^{K+1} - x^0\| \leq \sum_{k=0}^{K} \|d_k^x\| \leq \sum_{k=0}^{K} \beta^{2^k}/(1-\beta)^{1/2}.$$

Como $0 < \beta < 1$, temos $\beta^{2^k} \leq \beta^{k+1}$ e

$$\sum_{k=0}^{K} \beta^{2^k}/(1-\beta)^{1/2} \leq \sum_{k=0}^{K} \beta^{k+1}/(1-\beta)^{1/2} < \beta/(1-\beta)^{3/2}.$$

Portanto $\|x^{K+1} - x^0\| \leq \beta/(1-\beta)^{3/2}$. Tomando o limite $k \to +\infty$, obtemos

$$\|\hat{x} - x^0\| \leq \beta/(1-\beta)^{3/2}. \tag{3.16}$$

Pelo Lema 3.1.3, temos que para $k \geq 1$,

$$R_1(x^k, y^k; \lambda; \bar{x}) = \lambda(Mx^k + b - y^k) + x^k - \bar{x} = 0,$$

Como $\{x^k\}_{k\in\mathbf{N}}$ é convergente, concluímos que $\{y^k\}_{k\in\mathbf{N}}$ também converge para algum $\hat{y}$, i. e.

$$\hat{y} := \lim_{k\to 0} y^k.$$

Além disso, vale que

$$\lambda(M\hat{x} + b - \hat{y}) + \hat{x} - \bar{x} = 0. \tag{3.17}$$

Observemos que $(x^k, y^k) \in \mathbf{R}^n_{++} \times \mathbf{R}^n_{++}$ para todo $k \in \mathbf{N}$, logo passando ao limite quando $k \to +\infty$, obtemos

$$(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbf{R}^n_{+} \times \mathbf{R}^n_{+}.$$

Vamos agora provar que $(\hat{x}, \hat{y})$, o limite de (x^k, y^k), é o ponto $(x(\lambda), y(\lambda))$. De (3.14) segue-se que $\|\lambda X^k y^k - e\| \leq \beta^{2^{k+1}}$. Tomando o limite quando $k \to +\infty$, obtemos

$$\lambda \hat{X} \hat{y} = e.$$

Como $\hat{x}, \hat{y} \geq 0$, concluímos que $\hat{x}, \hat{y} > 0$. Usando outra vez a igualdade acima e (3.17), concluímos que $\hat{x} = x(\lambda)$, $\hat{y} = y(\lambda)$.

Para concluir, vamos estimar a distância de (x, y) a $\big(x(\lambda), y(\lambda)\big)$. Como $x^0 = x$ e $\hat{x} = x(\lambda)$, (3.16) se transforma em

$$\|x(\lambda) - x\| \leq \beta/(1-\beta)^{3/2}.$$

Da definição da trajetória log-quadrática, segue-se que

$$\big(M + \frac{1}{\lambda} I\big)(x - x(\lambda)) - (y - y(\lambda)) = (1/\lambda) R_1(x, y; \lambda; \hat{x}),$$

e, portanto, obtemos

$$\begin{aligned} \|y - y(\lambda)\| &\leq \|M + (1/\lambda) I\| \|x - x(\lambda)\| + (1/\lambda) \|R_1(x, y; \lambda; \hat{x})\| \\ &\leq \Big[\|M\| + 1/\lambda\Big]\big(\beta/(1-\beta)^{(3/2)}\big) + (\beta/\lambda). \end{aligned} \tag{3.18}$$

□

Observação 3.1.10. *Observemos que, se o $MCP(F)$ tem solução, pelo Corolario 2.1.12, o conjunto $\{\big(x(\lambda), y(\lambda)\big),\ \lambda \geq \lambda_0 > 0\}$ é limitado. Portanto, segue-se do resultado anterior, que dados $\lambda_0 > 0$, $\beta \in [0, 1/2]$ e $\bar{x}$, o conjunto dos pontos (x, y) tais que para algum $\lambda \geq \lambda_0 > 0$ vale que $\delta(x, y; \lambda; \bar{x}) < \beta^2$, é limitado.*

A seguir mostraremos que após um passo de Newton para o sistema (3.2), podemos atualizar linearmente o parâmetro λ, mantendo o novo ponto na β-vizinhançã da curva log-quadrática.

Proposição 3.1.11. *Sejam $(x, y) \in \mathbf{R}^n_{++} \times \mathbf{R}^n_{++}$, $\lambda > 0$ e $\beta \in (0, 1/2]$ tais que $\delta(x, y; \lambda; \bar{x}) \leq \beta^2$. Defina*

$$\begin{array}{rcl} (x_+, y_+) & := & (x, y) + (d^x, d^y) \\ \hat{\theta} & := & \dfrac{\beta - \beta^2}{\|x_+ - \bar{x}\| + n^{(1/2)} + \beta^2}, \end{array}$$

onde (d^x, d^y) é a solução do sistema de Newton (3.6). Então

$$\delta(x_+, y_+, (1+\theta)\lambda, \bar{x}) \leq \beta^2, \text{ para todo } \theta \in (0, \hat{\theta}].$$

Demonstração. Pelo Lema 3.1.3, temos que

$$R_1(x_+, y_+; \lambda; \bar{x}) = \lambda(Mx_+ + b - y_+) + x_+ - \bar{x} = 0.$$

Portanto,

$$\begin{array}{rcl} R_1(x_+, y_+; (1+\theta)\lambda; \bar{x}) & = & \lambda(Mx_+ + b - y_+) + x_+ - \bar{x} + \theta\lambda(Mx_+ + b - y_+) \\ & = & -\theta(x_+ - \bar{x}) \end{array}$$

e

$$\|R_1(x_+, y_+; (1+\theta)\lambda; \bar{x})\| \leq \theta\|x_+ - \bar{x}\|. \tag{3.19}$$

Pelo Teorema 3.1.6, temos que

$$\|R_2(x_+, y_+; \lambda)\| \leq \delta(x_+, y_+; \lambda; \bar{x})^{(1/2)} \leq \delta(x, y; \lambda; \bar{x}) \leq \beta^2.$$

Portanto

$$\begin{array}{rcl} R_2(x_+, y_+; (1+\theta)\lambda) & = & (1+\theta)\lambda X_+ y_+ - e \\ & = & (1+\theta)\big(\lambda X_+ y_+ - e\big) - \theta e \\ & = & (1+\theta) R_2(x_+, y_+; \lambda) - \theta e \end{array}$$

e

$$\|R_2(x_+, y_+; (1+\theta)\lambda)\| \leq (1+\theta)\beta^2 + \theta n^{1/2}. \tag{3.20}$$

Desta forma, de (3.19) e (3.20), segue que

$$\begin{aligned}
\delta(x_+, y_+; (1+\theta)\lambda; \bar{x}) &= \|R_1(x_+, y_+; (1+\theta)\lambda; \bar{x})\|^2 + \|R_2(x_+, y_+; (1+\theta)\lambda)\|^2 \\
&\leq \theta^2\|x_+ - \bar{x}\|^2 + \left[(1+\theta)\beta^2 + \theta n^{1/2}\right]^2 \\
&\leq \left[\theta\big(\|x_+ - \bar{x}\| + \beta^2 + n^{(1/2)}\big) + \beta^2\right]^2,
\end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue de uma simples manipulação algébrica. Da definição de $\hat{\theta}$ segue o resultado. □

Observemos que, pela proposição anterior, na medida que $\|x_+ - \bar{x}\|$ *cresce, a taxa de atualização linear se deteriora. Para tentar contornar este problema, teremos que atualizar* $\bar{x}$ *usando um esquema híbrido proximal-extragradiente relaxado. Isto vai nos permitir mover* $\bar{x}$ *na direção de* x_+ *e simultaneamente, aproximá-lo do conjunto de soluções. Para tanto faremos uso da teoria de Solodov-Svaiter [43] de erros relativos e o método híbrido, para a resolução do problema de encontrar um zero de um operador monótono maximal.*

Consideremos $T : \mathbf{R}^n \rightrightarrows \mathbf{R}^n$*, definido por*

$$T = F + N_{\mathbf{R}^n_+}, \ \textit{i. e.}, \ T(x) = Mx + b + N_{\mathbf{R}^n_+}(x)$$

Como a hipótese H1) vale, T *é monótono maximal. Lembremos que* $S_{T,\lambda,\bar{x}}$ *denota a função de mérito de Solodov-Svaiter.*

Lema 3.1.12. *Sejam* $(x, y) \in \mathbf{R}^n_{++} \times \mathbf{R}^n_{++}$*,* $\lambda > 0$ *e* $\beta \in (0, 1/2]$ *tais que* $\delta(x, y; \lambda; \bar{x}) \leq \beta^2$*. Defina*

$$\begin{aligned}
(x_+, y_+) &:= (x, y) + (d^x, d^y), \\
v_+ &:= Mx_+ + b - y_+,
\end{aligned}$$

onde (d^x, d^y) é a solução do sistema de Newton (3.6), . Então

$$S_{T,\lambda,\bar{x}}(x_+, v_+) \leq 2(1+\beta^2)n.$$

Demonstração. Observemos que $x_+ > 0$, logo $v_+ \in T(x_+)$. Temos que $D(T) \in \mathbf{R}^n_+$ e $y_+ > 0$, logo pelo Lema 1.1.7, segue-se que

$$v_+ \in T^{[\epsilon]}(x_+),$$

onde $\epsilon = \langle x_+, y_+ \rangle$. Após um paso de Newton para o sistema (3.6), temos, pelo Teorema 3.1.6, que

$$\|\lambda X_+ y_+ - e\| \leq \beta^2 < 1.$$

Logo, por i) do Lema 1.4.2, vale que $0 < \lambda(x_+)_i(y_+)_i \leq 1 + \beta^2$, para $i = 1, 2, \ldots, n$, e, logo

$$\langle x_+, y_+ \rangle \leq (1+\beta^2)n/\lambda,$$

portanto

$$v_+ \in T^{\left[(1+\beta^2)n/\lambda\right]}(x_+).$$

Observemos que, pelo Lema 3.1.3, temos que $\lambda(Mx_+ + b - y_+) + x_+ - \bar{x} = 0$, donde segue-se que

$$\lambda v_+ + x_+ - \bar{x} = 0.$$

Desta forma, usando-se a definição da função de mérito $S_{T,\lambda,\bar{x}}$, obtemos

$$S_{T,\lambda,\bar{x}}(x_+, v_+) \leq 2(1+\beta^2)n.$$

□

Observação 3.1.13. *Do lema anterior, segue-se que, dado $\sigma \in (0,1)$, se*

$$2(1+\beta^2)n \leq \sigma\|x_+ - \bar{x}\|^2,$$

então o critério (1.17), para dar um passo do algoritmo híbrido de Solodov-Svaiter, é satisfeito. Em particular consideraremos $\sigma := (1+\beta^2)/(1+\beta)$.

No resultado a seguir provaremos que se $\|x_+ - \bar{x}\|^2$ for "grande"*, então podemos dar um passo relaxado do algoritmo híbrido de Solodov-Svaiter (1.16), e ainda permanecermos na vizinhançã de uma curva log-quadrática. Vamos estimar também o decrescimento da distância dos iterandos do algoritmo híbrido ao conjunto solução.*

Proposição 3.1.14. *Sejam $(x, y) \in \mathbf{R}^n_{++} \times \mathbf{R}^n_{++}$, $\lambda > 0$ e $\beta \in (0, 1/2]$ tais que, $\delta(x, y; \lambda; \bar{x}) \leq \beta^2$. Defina*

$$\begin{aligned} (x_+, y_+) &:= (x, y) + (d^x, d^y), \\ \hat{\rho} &:= (\beta^2 - \beta^4)^{(1/2)} / \|x_+ - \bar{x}\|, \\ \bar{x}_+ &:= \bar{x} + \hat{\rho}(x_+ - x), \end{aligned}$$

onde (d^x, d^y) é a solução do sistema de Newton (3.6). Então

i) $\delta(x_+, y_+; \lambda; \bar{x}_+) \leq \beta^2$.

ii) Se $\|x_+ - \bar{x}\|^2 > 2(1 + \beta)n$, *temos que*

$$d(\bar{x}_+, S_{MC}(F))^2 \leq d(\bar{x}, S_{MC}(F))^2 - (2n)^{(1/2)} \beta^2 (1 - \beta)^{(3/2)}.$$

Demonstração. i) Pelo Lema 3.1.3, temos que

$$\lambda(Mx_+ + b - y_+) + x_+ - \bar{x} = 0.$$

Portanto

$$\begin{aligned} R_1(x_+, y_+; \lambda; \bar{x}_+) &= \lambda(Mx_+ + b - y_+) + x_+ - \bar{x}_+ \\ &= \lambda(Mx_+ + b - y_+) + x_+ - \bar{x} - \hat{\rho}(x_+ - \bar{x}) \\ &= - \hat{\rho}(x_+ - \bar{x}) \end{aligned}$$

e

$$\|R_1(x_+, y_+; \lambda; \bar{x}_+)\| \leq \hat{\rho} \|x_+ - \bar{x}\|. \tag{3.21}$$

Pelo Teorema 3.1.6, temos que

$$\|\lambda X_+ y_+ - e\| \leq \delta(x_+, y_+; \lambda; \bar{x})^{(1/2)} \leq \beta^2. \tag{3.22}$$

Desta forma, de (3.21) e (3.22), segue-se que

$$\begin{aligned}
\delta(x_+, y_+; \lambda; \bar{x}_+) &= \|\lambda(Mx_+ + b - y_+) + x_+ - \bar{x}_+\|^2 + \|\lambda X_+ y_+ - e\|^2 \\
&= \|\hat{\rho}(x_+ - \bar{x})\|^2 + \|\lambda X_+ y_+ - e\|^2 \\
&\leq \hat{\rho}^2 \|x_+ - \bar{x}\|^2 + \beta^4.
\end{aligned}$$

Da definição de $\hat{\rho}$, segue o resultado.

ii) Definamos $v_+ := Mx_+ + b - y_+$. Pelo Corolário 1.2.8, segue-se que

$$\begin{aligned}
d(\bar{x}_+, S(F))^2 &\leq d(\bar{x}, S(F))^2 + \hat{\rho}\left[S_{T,\lambda,\bar{x}}(x_+, v_+) - \|x_+ - \bar{x}_+\|^2\right] \\
&\leq d(\bar{x}, S(F))^2 \\
&\quad + \hat{\rho}\|x_+ - \bar{x}\| \left[\left(S_{T,\lambda,\bar{x}}(x_+, v_+)/\|x_+ - \bar{x}\|\right) - \|x_+ - \bar{x}\|\right] \\
&= d(\bar{x}, S(F))^2 \\
&\quad + (\beta^2 - \beta^4)^{(1/2)} \left[\left(S_{T,\lambda,\bar{x}}(x_+, v_+)/\|x_+ - \bar{x}\|\right) - \|x_+ - \bar{x}\|\right],
\end{aligned} \tag{3.23}$$

onde a segunda desigualdade decorre de uma manipulação algébrica da primeira e para a última igualdade empregamos a definição de $\hat{\rho}$. Observemos que, pelo Lema 3.1.12, temos que $S_{T,\lambda,\bar{x}}(x_+, v_+) \leq 2(1+\beta^2)n$ e, por hipótese, temos que $\|x_+ - \bar{x}\|^2 > 2(1+\beta)n$. Logo, segue-se que

$$\left(S_{T,\lambda,\bar{x}}(x_+, v_+)/\|x_+ - \bar{x}\|\right) \leq 2(1+\beta^2)n/\left(2(1+\beta)n\right)^{(1/2)}.$$

Portanto, segue-se de (3.23), que

$$\begin{aligned}
&d(\bar{x}_+, S(F))^2 \leq d(\bar{x}, S(F))^2 \\
&\quad + (\beta^2 - \beta^4)^{(1/2)} \left[\left(2(1+\beta^2)n/\left(2(1+\beta)n\right)^{(1/2)}\right) - (2(1+\beta)n)^{(1/2)}\right].
\end{aligned}$$

Para concluir, basta notar que

$$\begin{aligned}
&(\beta^2 - \beta^4)^{(1/2)} \left[2(1+\beta^2)n/\left(2(1+\beta)n\right)^{(1/2)} - (2(1+\beta)n)^{(1/2)}\right] \\
&= -(2n)^{(1/2)} \beta^2 (1-\beta)^{(3/2)}.
\end{aligned}$$

□

3.1.3 Algoritmo, apresentação, análise de convergência e complexidade

Apresentaremos a seguir um algoritmo de tipo path-following *para o Problema de Complementaridade Linear Monótono. Estudaremos suas caraterísticas principais, no que diz respeito a estar bem definido e ser globalmente convergente. Apresentaremos também resultados de complexidade. O nosso objetivo e desenvolver um algoritmo de path-following, tipo "short-step", ao longo de uma trajetória log-quadrática e com atualização linear do parâmetro λ; de fato estamos interessados em conseguir que a taxa de atualização seja da ordem de $O\big(1+\frac{1}{n^{(1/2)}}\big)$, o que produz os melhores resultados de ordem de complexidade em algoritmos de pontos interiores achados na literatura.*

Algoritmo A1

Faça $k=0$ e sejam $\beta \in (0,1/2]$, $\bar{x}^0 \in \mathbf{R}^n$, $(x^0, y^0) \in \mathbf{R}^n_{++} \times \mathbf{R}^n_{++}$ tais que $\delta(x^0, y^0; \lambda_0; \bar{x}^0) \leq \beta^2$.

Para $k = 0, 1, 2, \dots,$

1. *Calcular (d_k^x, d_k^y) a solução do sistema de Newton*

$$\begin{bmatrix} \lambda_k M + I & -\lambda_k I \\ \lambda I_k & \lambda X^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_k^x \\ d_k^y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \lambda_k(Mx^k + b - y) + x^k - \bar{x}^k \\ \lambda_k X^k y^k - e \end{bmatrix}.$$

2. *Definir $(x^{k+1}, y^{k+1}) := (x^k, y^k) + (d_k^x, d_k^y)$.*

3. *a) Se $\|x^{k+1} - \bar{x}^k\|^2 \leq 2(1+\beta)n$. (Passo Ponto Interior).*
   Definir $\bar{x}^{k+1} := \bar{x}^k$, $\lambda_{k+1} := (1+\check{\theta}_k)\lambda_k$, onde $\check{\theta}_k$ é a maior solução positiva de $\theta^2\|x^{k+1} - \bar{x}^k\|^2 + \|(1+\theta)\lambda_k X^{k+1} y^{k+1} - e\|^2 = \beta^2$.

   b) Caso contrário, i.e., se $\|x^{k+1} - \bar{x}^k\|^2 > 2(1+\beta)n$. (Passo Híbrido).
   Definir $\lambda_{k+1} := \lambda_k$, $\bar{x}^{k+1} := \bar{x}^k + \hat{\rho}_k(x^{k+1} - \bar{x}^k)$, onde
   $\hat{\rho}_k = \dfrac{(\beta^2 - \beta^4)^{(1/2)}}{\|x^{k+1} - \bar{x}^k\|}.$

4. $k = k + 1$.

Observação 3.1.15.

1. *Para a inicialização do algoritmo podemos considerar o seguinte caso simples. Escolher* $\bar{x}^0 \in \mathbf{R}^n$, $x^0 \in \mathbf{R}^n_{++}$ *solução de* $x^0 - (x^0)^{-1} = \bar{x}^0$, $\lambda_0 = \frac{\beta}{\|Mx^0+b\|}$, $y^0 = (x^0)^{-1}/\lambda_0$. *Observemos que*

$$R_1(x^0, y^0; \lambda_0; \bar{x}^0) = \lambda_0(Mx^0 + b - y^0) + (x^0 - \bar{x}^0) = \lambda_0(Mx^0 + b),$$
$$R_2(x^0, y^0; \lambda_0) = \lambda X^0 y^0 - e = 0,$$

logo, $\delta(x^0, y^0; \lambda_0; \bar{x}^0) = \|\lambda_0(Mx^0 + b)\|^2 = \beta^2$, *ou seja estamos na* β*-vizinhança de uma curva log-quadrática.*

2. *Calcular o valor de* $\check{\theta}_k$ *definido no passo 3a), se reduz à resolução de uma equação quadrática, portanto não acrescenta complexidade alguma ao algoritmo.*

No seguinte teorema apresentamos as propriedades básicas do algoritmo A1.

Teorema 3.1.16.

i) O algoritmo A1 está bem definido.

ii) Se o $LMCP(F)$ *tem solução, então existe* $K_1 > 0$ *tal que* $\|x^k - \bar{x}^k\|^2 \leq 2(1+\beta)n$, *para todo* $k \geq K_1$*; portanto, o número de passos híbridos do algoritmo é finito.*

iii) Se o $LMCP(F)$ *tem solução, então existem* $\bar{\theta} \in (0,1)$ *e* $K_2 > 0$, *tal que* $\lambda_{k+1} \geq (1+\bar{\theta})\lambda_k$, *para todo* $k \geq K_2$*; portanto, temos convergência Q-linear da sequência* $\{(1/\lambda_k)\}_{k\in\mathbf{N}}$ *a 0 quando* $k \to +\infty$.

iv) Se o $LMCP(F)$ *tem solução, então a sequência gerada pelo algoritmo é limitada e seus pontos de acumulação são soluções complementares do* $MCP(F)$.

Demonstração. i) Suponhamos que para um certo $k \in \mathbf{N}$, vale que

$$(x^k, y^k) \in \mathbf{R}^n_{++} \times \mathbf{R}^n_{++},\ \lambda_k > 0 \text{ e } \delta(x^k, y^k; \lambda_k; \bar{x}^{\hat{k}}) \leq \beta^2. \tag{3.24}$$

Pelo Pelo Corolario 3.1.2 e pelo Teorema 3.1.6, segue-se que (x^{k+1}, y^{k+1}) está bém definido e vale que

$$(x^{k+1}, y^{k+1}) \in \mathbf{R}^n_{++} \times \mathbf{R}^n_{++},\ \delta(x^{k+1}, y^{k+1}; \lambda_k; \bar{x}^k) \leq \beta^4.$$

Vamos verifivar que após o passo 3) do algoritmo A1, x^{k+1} , y^{k+1}, λ_{k+1}, $\bar{x}^{k+1}$ satisfazem (3.24). No passo 3 a), pelo Teorema 3.1.6 e pelo Lema 3.1.3, respectivamente, temos que

$$R_1(x^{k+1}, y^{k+1}; \lambda_k; \bar{x}^k) = \lambda_k(Mx^{k+1} + b - y^{k+1}) + x^{k+1} - \bar{x}^k = 0,$$
$$\|\lambda_k X^{k+1} y^{k+1} - e\| \leq \delta(x^{k+1}, y^{k+1}; \lambda_k; \bar{x}^k)^{(1/2)} \leq \beta^2.$$

Desta forma, segue-se que

$$\begin{aligned}
&\delta(x^{k+1}, y^{k+1}; (1+\theta)\lambda_k; \bar{x}^k) = \\
&\quad = \|R_1(x^{k+1}, y^{k+1}; (1+\theta)\lambda_k; \bar{x}^k)\|^2 + \|R_2(x^{k+1}, y^{k+1}; (1+\theta)\lambda_k)\|^2 \\
&\quad = \|\lambda_k(Mx^{k+1} + b - y^{k+1}) + x^{k+1} - \bar{x}^k + \theta\lambda_k(Mx^{k+1} + b - y^{k+1})\|^2 \\
&\qquad + \|(1+\theta)\lambda_k X^{k+1} y^{k+1} - e\|^2 \\
&\quad = \| - \theta(x^{k+1} - \bar{x}^k)\|^2 + \|(1+\theta)\lambda_k X^{k+1} y^{k+1} - e\|^2,
\end{aligned}$$

Observemos que a função quadrática:
$p(\theta) := \| - \theta(x^{k+1} - \bar{x}^k)\|^2 + \|(1+\theta)\lambda_k X^{k+1} y^{k+1} - e\|^2$, satisfaz

$$\lim_{\theta \to +\infty} p(\theta) = +\infty,\ p(0) = \|\lambda_k X^{k+1} y^{k+1} - e\|^2 \leq \beta^4 < \beta^2.$$

Logo, existe $\check{\theta}_k$ a maior solução positiva de:

$$\theta^2\|x^{k+1} - \bar{x}^k\|^2 + \|(1+\theta)\lambda_k X^{k+1} y^{k+1} - e\|^2 = \beta^2$$

e segue-se que

$$\delta(x^{k+1}, y^{k+1}; \lambda_{k+1}; \bar{x}^{k+1}) \leq \beta^2. \tag{3.25}$$

No passo 3 b), por i) da Proposição 3.1.14, segue diretamente (3.25).

Em ambos casos, a positividade estrita de λ_{k+1} segue trivialmente. Observemos que a (3.24) vale para $k = 0$, logo, por indução completa segue-se que algoritmo está bem definido.

ii) Após $\bar{K}$ passos do algoritmo híbrido, segue de ii) da Proposição 3.1.14, que

$$d(\bar{x}^{k_{j+1}}, S_{MC}(F)^2 \leq d(\bar{x}^{k_j}, S_{MC}(F)^2 - (2n)^{(1/2)}\beta^2(1-\beta)^{(3/2)}, \; j = 1, \ldots, \bar{K},$$

logo, somando as desigualdades para $j = 1, 2, \ldots, \bar{K}$, concluímos que

$$\begin{aligned} \bar{K}(2n)^{(1/2)}\beta^2(1-\beta)^{(3/2)} &\leq d(\bar{x}^0, Sol(T,C))^2 - d(\bar{x}^{k_{\bar{K}}}, Sol(T,C))^2 \\ &\leq d(\bar{x}^0, Sol(T,C))^2, \end{aligned}$$

e portanto o número de passos híbridos no algoritmo está limitado por

$$\bar{K} \leq K_1 := \frac{d(\bar{x}^0, S_{MC}(F))^2}{\sqrt{2}\beta^2(1-\beta)^{\frac{3}{2}} n^{(1/2)}}$$

iii) Para $k \geq K_1$, onde K_1 é a constante definida no item ii), segue-se que $\|x^k - \bar{x}^k\| \leq (2(1+\beta)n)^{(1/2)}$. Pela proposição 3.1.11 e a definição de $\check{\theta}_k$ no paso 3 a), temos que $\lambda_{k+1} = (1 + \check{\theta}_k)\lambda_k$ e vale que

$$\check{\theta}_k \geq \frac{1}{\|x^k - \bar{x}^k\| + \beta^2 + n^{(1/2)}}.$$

Logo, definindo

$$\bar{\theta} := \frac{1}{(2(1+\beta))n^{(1/2)} + \beta^2 + n^{(1/2)}},$$

segue o resultado.

iv) Observemos que, para todo $k \geq K_1$, onde K_1 é a constante do item ii), o algoritmo só faz iterações de ponto interior, portanto vale que

$$\delta(x^k, y^k; \lambda_k; \bar{x}^{K_1}) \leq \beta^2 < 1, \text{ para todo } k \geq K_1.$$

Usando que $\lambda_k \geq \lambda_0 > 0$, para todo $k \in \mathbf{N}$, segue, pela Observação 3.1.10, a limitação da sequência $\left\{(x^k, y^k)\right\}_{k\in\mathbf{N}}$. A continuação vamos provar que os pontos de acumulação são soluções do $LMCP(F)$. Suponhamos que $(\hat{x}, \hat{y})$ é um ponto de acumulação da sequência $\{(x_k, y_k)\}_{k\in\mathbf{N}}$. Pelo Lema 3.1.3 e a defini¸cão (3.3), segue-se que

$$\lambda_k(Mx^{k+1} + b - y^{k+1}) + x^{k+1} - \bar{x}^k = 0.$$

Pelo item iii), $\lim_{k\to+\infty} \lambda_k = +\infty$, logo fazendo $l \to +\infty$ na subsequência $\{(x^{k_l}, y^{k_l})\}_{l\in\mathbf{N}}$ convergindo a $(\hat{x}, \hat{y})$ e usando a limitação das sequências $\{(x^k, y^k)\}_{k\in\mathbf{N}}$ e $\{\bar{x}^k\}_{k\in\mathbf{N}}$, obtemos que

$$M\hat{x} + b = \hat{y}.$$

Observemos que $(x^k, y^k) \in \mathbf{R}^n_{++} \times \mathbf{R}^n_{++},$ para todo $k \in N$, portanto, segue-se que

$$(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbf{R}^n_{+} \times \mathbf{R}^n_{+}.$$

Da condição $\|X^k y^k - (1/\lambda_k)e\| \leq (\beta/\lambda_k)$, para todo $k \in \mathbf{N}$, fazendo $k \to +\infty$, obtemos

$$\hat{x}^i \hat{y}^i = 0, \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

ou seja $(\hat{x}, \hat{y})$ é solução do $LMCP(T)$. $\square$

Para concluir apresentamos um resultado de complexidade do algoritmo A1. Dado $\epsilon > 0$, diremos que $(x, y) \in \mathbf{R}^n_{++} \times \mathbf{R}^n_{++}$ é uma ϵ-solução *do problema $LMCP(F)$, se*

$$\|Mx + b - y\| \leq \epsilon, \ 0 \leq \frac{\langle x, y\rangle}{n} \leq \epsilon.$$

Teorema 3.1.17. *Sejam $(x^0, y^0) \in \mathbf{R}^n_{++} \times \mathbf{R}^n_{++},\ \bar{x}^0 \in \mathbf{R}^n,\ \lambda_0 > 0,\ \beta \in (0, 1/2]$ tais que, $\delta(x^0, y^0; \lambda_0; \bar{x}^0) \leq \beta^2$. Dado $\epsilon > 0$, então o algoritmo A1 atinge uma ϵ-solução do $LMCP(F)$, após*

$$\left[\frac{1}{\bar{\theta}} \log \frac{K}{\epsilon} + \frac{d(\bar{x}^0, S(F))^2}{(2n)^{(1/2)}\beta(1-\beta)^{(3/2)}}\right]$$

iterações, onde $K = \left(\big(2(1+\beta)n\big)^{(1/2)}/\lambda_0\right)$ e $\bar{\theta} = 1/\big(2(1+\beta)n^{(1/2)} + \beta^2 + n^{(1/2)}\big)$.

Demonstração. Após $\bar{K}$ pasos do algoritmo de ponto interior (Passo 3a no algoritmo A1) e K_1 pasos do algoritmo híbrido (Passo 3b no algoritmo A1), onde K_1 é a constante definida na prova do item ii) do Teorema 3.1.16, temos, pelo Lema 3.1.3, por (3.3) e por i) do Teorema 3.1.6, que

$$Mx^{k+1} + b - y^{k+1} + \frac{1}{\lambda_k}(x^{k+1} - \bar{x}^k) = 0, \tag{3.26}$$

$$\|\lambda_k X^{k+1} y^{k+1} - e\| \leq \beta^2. \tag{3.27}$$

De (3.26) e da própria definição do algoritmo segue-se que

$$\begin{aligned} \|Mx^{k+1} + b - y^{k+1}\| &= \tfrac{1}{\lambda_k}\|x^{k+1} - \bar{x}^k\| \\ &\leq \tfrac{1}{\lambda_k}(2(1+\beta)n)^{(1/2)} \\ &\leq \tfrac{1}{\lambda_0(1+\bar{\theta})^k}(2(1+\beta)n)^{(1/2)}. \end{aligned}$$

De (3.27) e i) do Lema 1.4.2, temos que $0 < x_i^{k+1} y_i^{k+1} \leq (1 + \beta^2)$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, portanto segue-se que

$$0 \leq \frac{\langle x^{k+1}, y^{k+1} \rangle}{n} \leq \frac{1+\beta^2}{\lambda_k} \leq \frac{1+\beta^2}{\lambda_0(1+\bar{\theta})^k} \; ,$$

onde $\bar{\theta}$ é a constante definida na prova do item iii) do Teorema 3.1.16. Observemos que para todo $n \in \mathbf{N}$ e $\beta \in [0,1]$, vale que $1 + \beta^2 \leq \big(2(1 + \beta)n\big)^{1/2}$. Portanto, para $\bar{K}$ tal que

$$\frac{(2(1+\beta)n)^{(1/2)}}{\lambda_0(1+\bar{\theta})^{\bar{K}}} \leq \epsilon, \tag{3.28}$$

segue-se que, para todo $k \geq \bar{K}$,

$$\begin{aligned} &\tfrac{\langle x^k, y^k \rangle}{n} \leq \tfrac{1+\beta^2}{\lambda_0(1+\bar{\theta})^k} \leq \tfrac{(2(1+\beta)n)^{(1/2)}}{\lambda_0(1+\bar{\theta})^k} \leq \tfrac{(2(1+\beta)n)^{(1/2)}}{\lambda_0(1+\bar{\theta})^{\bar{K}}} \leq \epsilon, \\ &\|Mx^{k+1} + b - y^{k+1}\| \leq \tfrac{(2(1+\beta)n)^{(1/2)}}{\lambda_0(1+\bar{\theta})^k} \leq \tfrac{(2(1+\beta)n)^{(1/2)}}{\lambda_0(1+\bar{\theta})^{\bar{K}}} \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Definindo $K := \frac{(2(1+\beta)n)^{(1/2)}}{\lambda_0}$, temos que (3.28) é equivalente a

$$\bar{K} \log(1 + \bar{\theta}) \geq \log \frac{K}{\epsilon}. \tag{3.29}$$

Usando-se a desigualdade $\log(1+s) \leq s$, para $s \geq 0$, segue-se que para satisfazer (3.29), basta tomar $\bar{K}$ tal que

$$\bar{K} \geq \frac{1}{\bar{\theta}} \log \frac{K}{\epsilon}.$$

Lembrando que o número de pasos híbridos do algoritmo A1 está limitado por $\frac{d(\bar{x}^0, S_{MC}(F)^2)}{\sqrt{2}\beta^2(1-\beta)^{\frac{3}{2}} n^{(1/2)}}$ (vide Teorema 3.1.16ii)), a nossa estimativa final do número de passos do algoritmo A1, necessários para atingir uma ϵ-solução, vem dada por

$$\left\lceil \frac{1}{\bar{\theta}} \log \frac{K}{\epsilon} + \frac{d(\bar{x}^0, S_{MC}(F))^2}{\sqrt{2}\beta^2(1-\beta)^{\frac{3}{2}} n^{(1/2)}} \right\rceil$$

$\square$

3.2 Formulação nao-escalada da trajetória log-quadrática para o problema $LMCP(T)$

Seja $\tilde{F} : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$,

$$\tilde{F}(x,y) = (F(x) - y, x).$$

Sabemos que $LMCP(F)$ *é equivalente a* $VIP(\tilde{F}, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n_+)$, *onde novamente* $F(x) = Mx + b$.

Vamos considerar a trajetória log-quadrática para $VIP(\tilde{F}, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n_+)$. *Para simplificar a abordagem, vamos trabalhar com a curva obtida da trajetória log-quadrática, tomando* $\mu = \nu = 1/\lambda$. *Dado* $\bar{x}, \bar{y}$, *definimos a curva log-quadrática não escalada para* $LMCP(F)$ *como a aplicação* $\lambda \in \mathbf{R}_{++} \mapsto \big(x(\lambda), y(\lambda)\big)$,

$$\big(x(\lambda), y(\lambda)\big) := \big(x(1/\lambda, 1/\lambda; \bar{x}, \bar{y}), y(1/\lambda, 1/\lambda; \bar{x}, \bar{y})\big),$$

onde $(\mu, \nu) \mapsto \big(x(\mu, \nu; \bar{x}, \bar{y}), y(\mu, \nu; \bar{x}, \bar{y})\big)$ *é a trajetória log-quadrática para o* $VIP(\tilde{F}, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n_+)$ *(ver Definição 2.2.1). Usando (2.25) temos que* $(x(\lambda), y(\lambda)$

é a solução de

$$0 = \tilde{F}(x,y) + (1/\lambda)(x-\bar{x}, y-\bar{y}) - (0, (1/\lambda)y^{-1}), \quad y > 0.$$

Empregando-se a definição de $\tilde{F}$ na expressão acima obtemos a formulação não escalada*: Dado $\lambda > 0$, $\big(x(\lambda), y(\lambda)\big)$ é a solução de*

$$\begin{cases} 0 = \lambda(F(x) - y) + x - \bar{x}, \\ 0 = \lambda x + (y - \bar{y}) - y^{-1}, \\ (x,y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n_{++} \end{cases} \tag{3.30}$$

3.2.1 Medida de proximidade à trajetória log-quadrática

Como já foi mencionado, os algoritmos de path-following *do tipo* short-step *funcionam, de forma geral, dando passos de Newton para o sistema de equações que define a trajetória, mantendo os iterandos no interior de vizinhanças pequenas da mesma.*

Para avaliar a distância de um ponto à curva log-quadrática, introduziremos uma medida de proximidade. Dados $\lambda > 0$ e $(\bar{x}\,\bar{y}) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, definimos $(R_1(x,y;\lambda;\bar{x}), \check{R}_2(x,y;\lambda;\bar{y}))$ como o resíduo de (3.30), isto é

$$\begin{aligned} \check{R}_1(x,y;\lambda;\bar{x}) &:= \lambda(F(x) - y) + x - \bar{x}, \\ \check{R}_2(x,y;\lambda;\bar{y}) &:= \lambda x + (y - \bar{y}) - y^{-1}. \end{aligned}$$

Chamamos de Medida de proximidade do par (x,y) à trajetória log-quadrática *à seguinte magnitude*

$$\check{\delta}(x,y;\lambda;\bar{x},\bar{y}) := \|\check{R}_1(x,y;\lambda;\bar{x})\|^2 + \|\check{R}_2(x,y;\lambda;\bar{y}))\|^2_{(Y^{-2}+I)^{-1}}.$$

Associada a esta medida de proximidade definiremos uma vizinhança da trajetória log-quadrática, na qual, como veremos depois, ficarão restritas as sequências de pontos geradas pelo algoritmo, que será apresentado nesta seção. Dados o par $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ fixo e $\beta \in (0,1)$, chamaremos de β-vizinhança da curva log-quadrática *ao conjunto*

$$N_{\beta,\bar{x},\bar{y}} := \left\{ (x,y) \in \mathbf{R}^n_{++} \times \mathbf{R}^n_{++} \mid \exists\, \lambda > 0, \ com\ \check{\delta}(x,y;\lambda;\bar{x},\bar{y}) \le \beta^2 \right\}.$$

3.2.2 Método de Newton para a formulação não escalada

Para obtermos uma boa aproximação de $(x(\lambda), y(\lambda))$ *vamos empregar o método de Newton para o sistema (3.30)*

Definindo $R_{\lambda,\bar{x}} : \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$,

$$R_{\lambda,\bar{x}}(x,y) := \begin{bmatrix} \lambda(Fx + b - y) + x - \bar{x} \\ \lambda x + y - \bar{y} - y^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \check{R}_1(x,y;\lambda;\bar{x}) \\ \check{R}_2(x,y;\lambda) \end{bmatrix}$$

temos que o sistema (3.2) pode ser escrito como $R_{\lambda,\bar{x}}(x,y) = 0$. *O método de Newton aplicado a (3.30) deve resolver em cada interação o seguinte sistema linear que chamaremos de sistema de Newton:*

$$\begin{bmatrix} \check{R}_1(x,y;\lambda;\bar{x}) \\ \check{R}_2(x,y;\lambda) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nabla_{x,y}\check{R}_1(x,y;\lambda;\bar{x}) \\ \nabla_{x,y}\check{R}_2(x,y;\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d^x \\ d^y \end{bmatrix} = 0.$$

Como $F(x) = Mx + b$ *(com* M *semi-definida positiva), o sistema pode-se reescrever como*

$$\begin{bmatrix} \lambda M + I & -\lambda I \\ \lambda I & Y^{-2} + I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d^x \\ d^y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \check{R}_1(x,y;\lambda;\bar{x}) \\ \check{R}_2(x,y;\lambda;\bar{y}) \end{bmatrix}. \tag{3.31}$$

Vamos provar que este sistema tem uma única solução.

Lema 3.2.1. *Sejam* $(x,y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n_{++}$ *e* $\lambda > 0$, *então o sistema de Newton (3.31) tem uma única solução.*

Demonstração. Observemos que, pelo Lema 3.1.1, a matriz do lado esquerdo de (3.31) é não singular. □

Portanto o método de Newton pode ser aplicado enquanto os iterados se mantiverem em $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n_{++}$. *A seguir veremos alguns resultados relacionados com a boa definição do método e o comportamento do resíduo após um paso de Newton. Para isto começaremos com um lema técnico.*

Lema 3.2.2. *Dados* $(x,y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n_{++}$, $(\bar{x},\bar{y}) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, $\lambda > 0$. *Seja* (d^x, d^y) *a solução do sistema de Newton (3.31), então*

$$
\begin{aligned}
&i)\ \|d^x\| \leq \check{\delta}(x,y;\lambda;\bar{x},\bar{y})^{1/2}\\
&ii)\ \|d^y\| \leq \check{\delta}(x,y;\lambda;\bar{x},\bar{y})^{1/2}\\
&iii)\ \|Y^{-1}d^y\| \leq \check{\delta}(x,y;\lambda;\bar{x},\bar{y})^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Demonstração. Pelo Lema 3.1.7, temos que

$$\|d^x\|^2 + \|d^y\|^2_{(Y^{-2}+I)} \leq \|\check{R}_1(x,y;\lambda;\bar{x})\|^2 + \|\check{R}_2(x,y;\lambda;\bar{y})\|^2_{(Y^{-2}+I)^{-1}},$$

Da desigualdade anterior seguem i) e ii) diretamente. Para iii), Observemos que

$$\|Y^{-1}d^y\|^2 \leq \|d^y\|^2_{(Y^{-2}+I)} \leq \check{\delta}(x,y;\lambda;\bar{x},\bar{y}).$$

$\square$

A seguir provaremos que se a medida de proximidade de um ponto à trajetória log-quadrática é "pequena"(estritamente menor do que 1), o ponto obtido após uma iteração do método de Newton para o sistema 3.31), pertence a $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n_{++}$. *Lembremos que esta condição garante que podemos continuar a usar o método.*

Lema 3.2.3. *Dados* $(x,y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n_{++}$, $(\bar{x},\bar{y}) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, $\lambda > 0$ *e* $\beta \in [0,1)$ *tais que* $\check{\delta}(x,y;\lambda;\bar{x},\bar{y}) \leq \beta^2$. *Defina*

$$(x_+, y_+) := (x,y) + (d^x, d^y),$$

onde (d^x, d^y) *é a solução do sistema de Newton (3.31), então*

$$y_+ \in \mathbf{R}^n_{++}.$$

Demonstração. ii) Pelo Lema 3.2.2, aplicado ao sistema de Newton (3.31), segue-se que $\|Y^{-1}d^y\| < 1$. Portanto, pelo Corolário 1.4.3, obtemos

$$y_+ \in \mathbf{R}^n_{++}. \tag{3.32}$$

$\square$

Lema 3.2.4. *Dados* $(x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n_{++}$, $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, $\lambda > 0$ *e* $\beta \in [0, 1)$ *tais que* $\check{\delta}(x, y; \lambda; \bar{x}, \bar{y}) \leq \beta^2$. *Defina*

$$(x_+, y_+) := (x, y) + (d^x, d^y),$$

onde (d^x, d^y) *é a solução do sistema de Newton (3.31). Então*

$$\begin{aligned} \check{R}_1(x_+, y_+; \lambda; \bar{x}) &= 0, \\ \check{R}_2(x_+, y_+; \lambda; \bar{y}) &= -Y_+^{-1}(Y^{-1}d^y)^2. \end{aligned}$$

Demonstração. Como $\check{R}_1(\cdot, \cdot; \lambda; \bar{x})$ é linear, este resíduo se anula após um passo de Newton. De fato, calculando este resíduo após o passo de Newton, temos

$$\begin{aligned} \check{R}_1(x_+, y_+; \lambda; \bar{x}) &= \lambda(Mx_+ + b - y_+) + x_+ - \bar{x} \\ &= \lambda(Mx + b - y) + x - \bar{x} + \lambda(Md^x - d^y) + d^x \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde para a última igualdade empregamos (3.31). O cálculo de $\check{R}_2$ dá

$$\begin{aligned} \check{R}_2(x_+, y_+; \lambda; \bar{y}) &= \lambda x_+ + (y_+ - \bar{y}) - y_+^{-1} \\ &= \lambda x + (y - \bar{y}) + \lambda d^x + d^y - (y + d^y)^{-1} \\ &= \lambda x + (y - \bar{y}) + \lambda d^x - y^{-1} + (Y^{-2} + I)d^y - (y + d^y)^{-1} \\ &\quad + y^{-1} - Y^{-2}d^y \\ &= -(y + d^y)^{-1} + y^{-1} - Y^{-2}d^y \\ &= -Y_+^{-1}(Y^{-1}d^y)^2, \end{aligned}$$

onde para a penúltima igualdade empregamos (3.31) e para a última usamos a relação

$$-(s+t)^{-1} + s^{-1} - s^{-2}t = -(s+t)^{-1}(t/s)^2, \text{ para todo } s \neq 0 \text{ e } t \neq -s, \quad (3.33)$$

em cada componente do vetor $-(y + d^y)^{-1} + y^{-1} - Y^{-2}d^y$ □

Observação 3.2.5.

1. *A essencial relação (3.33) pode ser encontrada em [18].*

2. *Observemos que* $\|Y_+^{-1}(Y^{-1}d^y)^2\|_{(Y_+^{-2}+I)^{-1}} \leq \|(Y^{-1}d^y)^2\| \leq \|Y^{-1}d^y\|^2$ *e o Lema 3.2.2 oferece uma estimativa deste último termo em função da proximidade à trajetória log-quadrática.*

Vamos agora obter uma estimativa do resíduo após um paso de Newton. Isto vai nos permitir determinar uma região de convergência quadrática do Método de Newton.

Teorema 3.2.6. *Dados* $(x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n_{++}$, $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ *e* $\lambda > 0$. *Defina*

$$(x_+, y_+) := (x, y) + (d^x, d^y),$$

onde (d^x, d^y) *é a solução do sistema de Newton (3.31), então*

$$\check{\delta}(x_+, y_+; \lambda; \bar{x}, \bar{y}) \leq \check{\delta}(x, y; \lambda; \bar{x}, \bar{y})^2.$$

Demonstração. Observemos que, pelo Lema 3.2.4

$$\check{R}_1(x_+, y_+; \lambda; \bar{x}) = 0, \quad \check{R}_2(x_+, y_+; \lambda; \bar{y}) = -Y_+^{-1}(Y^{-1}d^y)^2. \tag{3.34}$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned} \check{\delta}(x_+, y_+; \lambda; \bar{x}, \bar{y}) &= \| - (Y_+^{-2} + I)^{-(1/2)} Y_+^{-1}(Y^{-1}d^y)^2\|^2 \\ &\leq \|Y_+ Y_+^{-1}(Y^{-1}d^y)^2\|^2 = \|(Y^{-1}d^y)^2\|^2 \\ &\leq \|Y^{-1}d^y\|^4 \\ &\leq \check{\delta}(x, y; \lambda; \bar{x}, \bar{y})^2. \end{aligned} \tag{3.35}$$

onde para a penúltima desigualdade empregamos o Lema 3.2.2. □

Se (x, y) *e* λ *satisfazem as condições do Teorema 3.1.6 e, adicionalmente* $\check{\delta}(x, y; \lambda; \bar{x}, \bar{y}) < 1$, *então, tomando o ponto* (x, y) *como iterado inicial, o método de Newton para resolver (3.2) gera uma sequência infinita que permanece em* $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n_{++}$. *Além disso, os resíduos convergem quadráticamente* *para zero. Isto vai nos permitir estimar a distância euclideana dos pontos da β-vizinhança à trajetória log-quadrática.*

Proposição 3.2.7. *Dados* $(x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n_{++}$, $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, $\lambda > 0$ *e* $\beta \in [0, 1)$ *tais que* $\check{\delta}(x, y; \lambda; \bar{x}, \bar{y}) \leq \beta^2$, *então*

$$\|x - x(\lambda)\| \leq \beta/(1 - \beta), \ \|y - y(\lambda)\| \leq (\beta/1 - \beta)$$

Demonstração. Faça $(x^0, y^0) := (x, y)$ e considere a sequência.

$$(x^{k+1}, y^{k+1}) = (x^k, y^k) + (d^x_k, d^y_k), \ k = 0, 1, \dots,$$

e Newton onde (d^x_k, d^y_k) é a solução do sistema de Newton (3.31) para $x = x^k$, $y = y^k$, $\lambda > 0$e $(\bar{x}, \bar{y})$ fixos. Vamos provar que a sequência está bem definida.

Suponha que para algum $k \geq 0$ vale que

$$(x^k, y^k) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n_+ \text{ e } \check{\delta}(x^k, y^k, \lambda; \bar{x}, \bar{y}) \leq \beta^{2^{k+1}}. \tag{3.36}$$

Note-se que a desigualdade anterior vale para $k = 0$. Pelo Teorema 3.2.6, segue-se que (x^{k+1}, y^{k+1}) está bem definido e vale que

$$(x^{k+1}, y^{k+1}) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n_{++}, \ \delta(x^{k+1}, y^{k+1}, \lambda; \bar{x}, \bar{y}) \leq \delta(x^k, y^k, \lambda; \bar{x}, \bar{y})^2 \leq \beta^{2^{k+2}}.$$

Por indução segue-se que a sequência está bem definida e satisfaz 3.36, para todo $k \in \mathbf{N}$.

Vamos provar agora que a sequência é convergente. Pelo Lema 3.2.2, temos que

$$\|d^x_k\| \leq \check{\delta}(x^k, y^k; \lambda; \bar{x}; \bar{y})^{(1/2)} \leq \beta^{2^k}, \tag{3.37}$$

$$\|d^y_k\| \leq \check{\delta}(x^k, y^k; \lambda; \bar{x}, \bar{y})^{(1/2)} \leq \beta^{2^k}. \tag{3.38}$$

Portanto, a sequência $\{(d^x_k, d^y_k)\}_{k \in \mathbf{N}}$ é somável. Como $(d^x_k, d^y_k) = (x^{k+1} - x^k, y^{k+1} - y^k)$, concluímos que $\{(x^k, y^k)\}_{k \in \mathbf{N}}$é uma sequência de Cauchy e converge a um certo $(\hat{x}, \hat{y})$. Usando a desigualdade triangular e (3.37) concluímos que para qualquer $K \in \mathbf{N}$,

$$\|x^{K+1} - x^0\| \leq \sum_{k=0}^{K} \|d_k^x\| \leq \sum_{k=0}^{K} \beta^{2^k}.$$

Como $0 < \beta < 1$, temos $\beta^{2^k} \leq \beta^{k+1}$ e

$$\sum_{k=0}^{K} \beta^{2^k} \leq \sum_{k=0}^{K} \beta^{k+1} < \beta/(1-\beta).$$

Portanto $\|x^{K+1} - x^0\| \leq \beta/(1-\beta)$. Tomando-se o limite $K \to +\infty$, obtemos

$$\|\hat{x} - x^0\| \leq \beta/(1-\beta). \tag{3.39}$$

Análogamente obtemos que

$$\|\hat{y} - y^0\| \leq \beta/(1-\beta). \tag{3.40}$$

Pelo Lema 3.2.4, temos que para $k \geq 1$,

$$\lambda(Mx^k + b - y^k) + x^k - \bar{x} = 0,$$

Logo, tomando-se $k \to +\infty$, segue-se que

$$\lambda(M\hat{x} + b - \hat{y}) + \hat{x} - \bar{x} = 0. \tag{3.41}$$

Observemos que $(x^k, y^k) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n_{++}$ para todo $k \in \mathbf{N}$, logo passando ao limite quando $k \to +\infty$, obtemos

$$(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n_{+}.$$

Vamos agora provar que $(\hat{x}, \hat{y})$, o limite de (x^k, y^k), é o ponto $(x(\lambda), y(\lambda))$. Observemos que, da definição de $\check{\delta}(x^k, y^k; \lambda_k; \bar{x}, \bar{y})$ e (3.36), temos que

$$\|\lambda x^k + (y^k - \hat{y}) - (y^k)^{-1}\|_{\left((Y^k)^{-2} + I\right)^{-1}} \leq \beta^{2^k}.$$

Observemos que

$$
\begin{aligned}
&\|Y^k\big(\lambda x^k + y^k - \bar{y} - (y^k)^{-1}\big)\| \\
&\quad = \|\big((Y^k)^2 + I\big)^{1/2}\big((Y^k)^{-2} + I\big)^{-1/2}\big(\lambda x^k + y^k - \bar{y} - (y^k)^{-1}\big)\| \\
&\quad \leq \|\big((Y^k)^2 + I\big)^{1/2}\| \|\check{R}_2(x^k, y^k; \lambda; \bar{x})\|_{\left((Y^k)^{-2}+I\right)^{-1}} \\
&\quad \leq \|\big((Y^k)^2 + I\big)^{1/2}\| \beta^{2^k} \longrightarrow 0, \text{ quando } k \to +\infty,
\end{aligned}
$$

onde para a última relação empregamos a limitação da sequência $\{y^k\}_{k\in\mathbf{N}}$. Donde, obtemos

$$\hat{Y}(\lambda\hat{x} + \hat{y} - \bar{y}) - e = 0. \tag{3.42}$$

Como $\hat{y} \geq 0$ de (3.42), concluímos que $\hat{y} > 0$. Isto somado a (3.41) e (3.42) implica em que $\hat{x} = x(\lambda)$, $\hat{y} = y(\lambda)$.

Para estimar a distância do ponto (x, y) a $\big(x(\lambda), y(\lambda)\big)$, basta notar que, usando que $(\hat{x}, \hat{y}) = \big(x(\lambda), y(\lambda)\big)$ e $(x, y) = (x^0, y^0)$, (3.39) e (3.40) se transformam em

$$\|x(\lambda) - x\| \leq \frac{\beta}{1-\beta}, \quad \|y(\lambda) - x\| \leq \frac{\beta}{1-\beta}.$$

$\square$

Observação 3.2.8. *Notemos que, se o $MCP(F)$ tem solução, pela Proposição 2.2.5, segue que a curva log-quadrática $\lambda \mapsto \big(x(\lambda), y(\lambda)\big)$ é limitada. Portanto, segue do resultado anterior, que dados $\beta \in [0, 1)$ e $(\bar{x}, \bar{y})$, o conjunto dos pontos (x, y) tais que para algum $\lambda > 0$ vale que $\check{\delta}(x, y; \lambda; \bar{x}, \bar{y}) < \beta^2$, é limitado.*

O seguinte resultado mostra que após um passo de Newton para o sistema (3.31), podemos atualizar linearmente o parâmetro λ e o valor do parâmetro de atualização é da ordem de $1/(\|x - \bar{x}\| + \|y^k - \bar{y}^k\| + n^{(1/2)})$.

Proposição 3.2.9. *Dados* $(x,y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n_{++}$, $\lambda > 0$ *e* $\beta \in [0,1)$ *tais que* $\check{\delta}(x,y;\lambda;\bar{x},\bar{y}) \leq \beta^2$. *Defina*

$$\begin{aligned}
&(x_+,y_+) := (x,y) + (d^x,d^y),\\
&\hat{\theta} = (\beta-\beta^2)/(\|x_+-\bar{x}\| + \|y_+-\bar{y}\| + n^{(1/2)} + \beta^2).
\end{aligned}$$

onde (d^x,d^y) *solução do sistema de Newton (3.31). Então*

$$\check{\delta}(x_+,y_+,(1+\theta)\lambda;\bar{x};\bar{y}) \leq \beta^2, \text{ para todo } \theta \in (0,\hat{\theta}],$$

Demonstração. Pelo Lema 3.2.4, temos que

$$\lambda(Mx_+ + b - y_+) + x_+ - \bar{x} = 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\check{R}_1(x_+,y_+;(1+\theta)\lambda;\bar{x}) &= \lambda(Mx_+ + b - y_+) + x_+ - \bar{x} + \theta\lambda(Mx_+ + b - y_+)\\
&= -\theta(x_+ - \bar{x})
\end{aligned}$$

e

$$\|\check{R}_1(x_+,y_+;(1+\theta)\lambda;\bar{x})\| \leq \theta\|x_+ - \bar{x}\|. \tag{3.43}$$

Pelo Teorema 3.2.6, temos que

$$\|\check{R}_2(x_+,y_+;\lambda;\bar{y})\|_{(Y_+^{-2}+I)^{-1}} \leq \check{\delta}(x_+,y_+;\lambda;\bar{x},\bar{y}) \leq \beta^2.$$

Portanto, como

$$\begin{aligned}
\check{R}_2(x_+,y_+;(1+\theta)\lambda;\bar{y}) &= (1+\theta)\lambda x_+ + (y_+ - \bar{y}) - y_+^{-1}\\
&= (1+\theta)\big(\lambda x_+ + (y_+ - \bar{y}) - {y_+}^{-1}\big)\\
&\quad -\theta(y_+ - \bar{y} - {y_+}^{-1})\\
&= (1+\theta)\check{R}_2(x_+,y_+;\lambda;\bar{y}) - \theta(y_+ - \bar{y} - {y_+}^{-1})
\end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned}
\|\check{R}_2(x_+,y_+;(1+\theta)\lambda;\bar{y})\|_{(Y_+^{-2}+I)^{-1}} &\leq (1+\theta)\beta^2 + \theta\|y_+ - \bar{y}\|_{(Y_+^{-2}+I)^{-1}} + \theta\|y_+^{-1}\|_{(Y_+^{-2}+I)^{-1}}\\
&\leq (1+\theta)\beta^2 + \theta\|y_+ - \bar{y}\| + \theta\|y_+^{-1}\|_{Y_+^2}\\
&\leq (1+\theta)\beta^2 + \theta\|y_+ - \bar{y}\| + \theta n^{1/2}
\end{aligned}$$

Desta forma, segue de (3.43) que

$$\begin{aligned}
\check{\delta}(x_+, y_+; (1+\theta)\lambda; \bar{x}, \bar{y}) &= \|\check{R}_1(x_+, y_+; (1+\theta)\lambda; \bar{x})\|^2 \\
&\quad + \|\check{R}_2(x_+, y_+; (1+\theta)\lambda; \bar{y})\|^2_{(Y_+^{-2}+I)^{-1}} \\
&\leq \theta^2 \|x_+ - \bar{x}\|^2 \\
&\quad + \left[(1+\theta)\beta^2 + \theta\|y_+ - \bar{y}\| + \theta n^{1/2}\right]^2 \\
&\leq \left[\theta\|x_+ - \bar{x}\| + (1+\theta)\beta^2 + \theta\|y_+ - \bar{y}\| + \theta n^{1/2}\right]^2
\end{aligned}$$

Da definição de $\hat{\theta}$ segue o resultado. □

Observemos que, pela proposição anterior, na medida em que $\|x_+ - \bar{x}\| + \|y_+ - \bar{y}\|$ *cresce, a taxa de atualização linear se deteriora. Para tentar contornar este problema, teremos que atualizar* $(\bar{x}, \bar{y})$ *usando um esquema híbrido proximal-extragradiente relaxado. Isto vai nos permitir mover* $(\bar{x}, \bar{y})$ *na direção de* (x_+, y_+) *e simultaneamente, aproximá-lo do conjunto de soluções. Para tanto faremos uso da teoria de Solodov-Svaiter [43] de erros relativos e o método híbrido, para a resolução do problema de encontrar um zero de um operador monótono maximal.*

Consideremos $T : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightrightarrows \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$

$$T(x, y) := \begin{bmatrix} F(x) - y \\ x + N_{\mathbf{R}^n_+}(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Mx + b - y \\ x + N_{\mathbf{R}^n_+}(y) \end{bmatrix}.$$

Observemos que T *é monótono maximal e* $MCP(F)$ *é equivalente ao problema de achar um zero de* T*. Lembremos que* $S_{T,\lambda,(\bar{x},\bar{y})}$ *denota a função de mérito de Solodov-Svaiter introduzida em 1.16.*

Lema 3.2.10. *Sejam* $(x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n_{++}$*,* $\lambda > 0$ *e* $\beta \in [0, 1)$ *tais que* $\check{\delta}(x, y; \lambda; \bar{x}, \bar{y}) \leq \beta^2$*. Defina*

$$\begin{aligned}
(x_+, y_+) &:= (x + d^x, y + d^y), \\
v_+ &:= Mx_+ + b - y_+, \\
w_+ &:= x_+ - (1/\lambda)\big({y_+}^{-1} + \check{R}_2(x_+, y_+; \lambda; \bar{x}; \bar{y})\big),
\end{aligned}$$

onde (d^x, d^y) é a solução do sistema de Newton (3.31). Então

$$S_{T,\lambda,\bar{x},\bar{y}}(x_+, y_+, v_+, w_+) \leq 2n.$$

Demonstração. Observemos que, pelo Lema 3.2.3, temos que $y_+ > 0$, logo

$$\begin{bmatrix} v_+ \\ x_+ \end{bmatrix} \in T(x_+, y_+). \tag{3.44}$$

Pelo Lema 3.2.4, temos que

$$\begin{aligned} {y_+}^{-1} + \check{R}_2(x_+, y_+; \lambda; \bar{x}; \bar{y}) &= y_+^{-1} - Y_+^{-1}(Y^{-1}d^y)^2 \\ &= Y_+^{-1}\big(e - (Y^{-1}d^y)^2\big). \end{aligned} \tag{3.45}$$

Pelo Lema 3.2.2, vale que $\|(Y^{-1}d^y\| < \beta < 1$, portanto, pelo Corolário 1.4.3, segue-se que

$$e - (Y^{-1}d^y)^2 \geq 0 \tag{3.46}$$

Usando-se que $y_+ > 0$ e (3.45), concluímos que

$${y_+}^{-1} + \check{R}_2(x_+, y_+; \lambda; \bar{x}; \bar{y}) \geq 0.$$

Além disso $D(T) \subseteq \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n_+$. Isto somado a (3.44) e (3.46), implica, pelo Lema 1.1.8, em que

$$\begin{bmatrix} v_+ \\ w_+ \end{bmatrix} \in T^{[\epsilon]}(x_+, y_+),$$

com $\epsilon = \big\langle y_+, \frac{1}{\lambda}\big({y_+}^{-1} + \check{R}_2(x_+, y_+; \lambda; \bar{x}; \bar{y})\big)\big\rangle$. De (3.45), temos que

$$\begin{aligned} (1/\lambda)\langle y_+, {y_+}^{-1} + \check{R}_2(x_+, y_+; \lambda; \bar{y})\rangle &= (1/\lambda)\langle y_+, (Y_+)^{-1}\big(e - (Y^{-1}d^y)^2\big)\rangle \\ &= (1/\lambda)(n - \|Y^{-1}d^y\|^2) \\ &\leq (1/\lambda)n \end{aligned}$$

Observemos que, após um passo de Newton, temos

$$\lambda \begin{bmatrix} Mx_+ + b - y_+ \\ x_+ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_+ - \bar{x} \\ y_+ - \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \check{R}_2(x_+, y_+; \lambda; \bar{y}) + {y_+}^{-1}. \end{bmatrix},$$

Portanto, $(x_+ y_+)$, (v_+, w_+) satisfazem

$$\lambda \begin{bmatrix} v_+ \\ w_+ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_+ - \bar{x} \\ y_+ - \bar{y} \end{bmatrix} = 0,$$

$$\begin{bmatrix} v_+ \\ w_+ \end{bmatrix} \in T^{[n/\lambda]}(x_+, y_+).$$

O resultado segue agora, da definição de $S_{T,\lambda,\bar{x},\bar{y}}$. $\square$

Observação 3.2.11.

1. *Do lema anterior segue-se que, dado $\sigma \in (0,1)$, se*

$$2n \leq \sigma\big(\|x_+ - \bar{x}\|^2 + \|y_+ - \bar{y}\|^2\big), \ \textit{onde } \sigma \in (0,1),$$

é válida, então o critério (1.17) para dar um passo do algoritmo híbrido de Solodov-Svaiter é satisfeito. Em particular cosideraremos $\sigma = 1/(1+\beta)$.

No seguinte resultado, análogo ão da Proposição 3.1.14, provaremos que, após um passo de Newton para o sistema de Newton (3.31), na vizinhança da trajetória log-quadrática, se $\|x_+ - \bar{x}\|^2 + \|y_+ - \bar{y}\|^2$ é "grande", podemos dar um passo relaxado do algoritmo híbrido de Solodov-Svaiter [43], conseguindo nos manter numa vizinhançã de uma trajetória log-quadrática. Obteremos também uma estimativa do decrescimento da distância entre os iterandos $(\bar{x}, \bar{y})$ e $(\bar{x}_+, \bar{x}_+)$ do algoritmo híbrido e isto permitirá novamente estimar o número de passos híbridos no algoritmo que será proposto.

Proposição 3.2.12. *Dados $(x,y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n_{++}$, $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, $\lambda > 0$ e $\beta \in [0,1)$ tais que, $\check{\delta}(x, y; \lambda; \bar{x}, \bar{y}) \leq \beta^2$. Defina*

$$\begin{aligned} (x_+, y_+) &:= (x,y) + (d^x, d^y), \\ \hat{\rho} &:= \frac{(\beta - \beta^2)}{\|x_+ - \bar{x}\| + \|y_+ - \bar{y}\|} \\ (\bar{x}_+, \bar{y}_+) &=: (\bar{x}, \bar{y}) + \rho\big((x_+, y_+) - (\bar{x}, \bar{y})\big), \end{aligned}$$

onde (d^x, d^y) é a solução do sistema de Newton (3.31). Então

i) $\check{\delta}(x_+, y_+; \lambda; \bar{x}_+, \bar{y}_+) \leq \beta^2$.

ii) Se $\|x_+ - \bar{x}\|^2 + \|y_+ - \bar{y}\|^2 > 2(1+\beta)n,$ *temos que*

$$d\big((\bar{x}_+, \bar{y}_+), S^*_{MC}(F)\big)^2 \leq d\big((\bar{x}, \bar{y}), S^*_{MC}(F)\big)^2 - \beta^2(1-\beta)^{1/2}n^{1/2}.$$

Demonstração. i) Pelo Lema 3.2.4, temos que

$$\lambda(Mx_+ + b - y_+) + x_+ - \bar{x} = 0.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \check{R}_1(x_+, y_+; \lambda; \bar{x}_+) &= \lambda(Mx_+ + b - y_+) + x_+ - \bar{x}_+ \\ &= \lambda(Mx_+ + b - y_+) + x_+ - \bar{x} - \hat{\rho}(x_+ - \bar{x}) \\ &= -\hat{\rho}(x_+ - \bar{x}) \end{aligned}$$

e

$$\|\check{R}_1(x_+, y_+; \lambda; \bar{x}_+)\| \leq \hat{\rho}\|x_+ - \bar{x}\|. \tag{3.47}$$

Pelo Teorema 3.2.6, temos que

$$\|\check{R}_2(x_+, y_+; \lambda; \bar{y}_+)\|_{(Y_+^{-2}+I)^{-1}} \leq \check{\delta}(x_+, y_+; \lambda; \bar{x}_+, \bar{y}_+)^{1/2} \leq \beta^2$$

Portanto, como

$$\begin{aligned} \check{R}_2(x_+, y_+; \lambda; \bar{y}_+) &= \lambda x_+ + (y_+ - \bar{y}_+) - {y_+}^{-1} \\ &= \lambda x_+ + (y_+ - \bar{y}) - {y_+}^{-1} - \hat{\rho}(y_+ - \bar{y}) \\ &= \check{R}_2(x_+, y_+; \lambda; \bar{y}) - \hat{\rho}(y_+ - \bar{y}) \end{aligned}$$

temos que

$$\|\check{R}_2(x_+, y_+; \lambda, \bar{y}_+)\|_{(Y_+^{-2}+I)^{-1}} \leq \beta^2 + \hat{\rho}\|y_+ - \bar{y}\| \tag{3.48}$$

Desta forma, de (3.47) e (3.48), segue-se que

$$\begin{aligned} \check{\delta}(x_+, y_+; \lambda; \bar{x}_+, \bar{y}_+) &= \|\check{R}_1(x_+, y_+; \lambda; \bar{x}_+)\|^2 + \|\check{R}_2(x_+, y_+; \lambda; \bar{y}_+)\|^2_{(Y_+^{-2}+I)^{-1}} \\ &\leq \hat{\rho}^2\|x_+ - \bar{x}\|^2 + \Big[\beta^2 + \hat{\rho}\|y_+ - \bar{y}\|\Big]^2 \\ &\leq \Big[\hat{\rho}\big(\|x_+ - \bar{x}\| + \|y_+ - \bar{y}\|\big) + \beta^2\Big]^2. \end{aligned}$$

Da definição de $\hat{\rho}$, segue o resultado.

ii) Defina

$$\begin{aligned} v_+ &:= Mx_+ + b - y_+, \\ w_+ &:= x_+ - (1/\lambda)\big(y_+{}^{-1} + \check{R}_2(x_+, y_+; \lambda; \bar{x}; \bar{y})\big). \end{aligned}$$

Pelo Corolário 1.2.8, segue-se que

$$\begin{aligned} & d\big((\bar{x}_+, \bar{y}_+), S^*_{MC}(F)\big)^2 \\ & \quad \leq d\big((\bar{x}, \bar{y}), S^*_{MC}(F)\big)^2 \\ & \quad\quad + \hat{\rho}\left[S_{T,\lambda,\bar{x},\bar{y}}(x_+, y_+, v_+, w_+) - \|x_+ - \bar{x}_+\|^2 - \|y_+ - \bar{y}\|^2\right] \\ & \quad \leq d\big((\bar{x}, \bar{y}), S^*_{MC}(F)\big)^2 + \hat{\rho}\Bigg(\|x_+ - \bar{x}\| \\ & \quad\quad + \|\bar{y}_+ - \bar{y}\|\big)\left[\frac{S_{T,\lambda,\bar{x},\bar{y}}(x_+, y_+, v_+, w_+) - \|x_+ - \bar{x}\|^2 + \|y_+ - \bar{y}\|^2}{\|x_+ - \bar{x}\| + \|y_+ - \bar{y}\|}\right]\Bigg) \\ & \quad \leq d\big((\bar{x}, \bar{y}), S^*_{MC}(F)\big)^2 + \\ & \quad\quad + (\beta^2 - \beta^4)^{(1/2)}\left[\frac{S_{T,\lambda,\bar{x},\bar{y}}(x_+, y_+, v_+, w_+) - \|x_+ - \bar{x}\|^2 + \|y_+ - \bar{y}\|^2}{\|x_+ - \bar{x}\| + \|y_+ - \bar{y}\|}\right], \end{aligned}$$

onde, para a última desigualdade, empregamos a definição de $\hat{\rho}$. Pelo Lema 3.2.10, temos que $S_{T,\lambda,(\bar{x},\bar{y})} \leq 2n$ e por hipótese temos que $\|x_+ - \bar{x}\|^2 + \|y_+ - \bar{y}\|^2 > 2(1+\beta)n$, logo segue-se que

$$\begin{aligned} & d\big((\bar{x}_+, \bar{y}_+), S(F)\big)^2 \leq d\big((\bar{x}, \bar{y}), S(F)\big)^2 + \\ & \quad + (\beta^2 - \beta^4)^{(1/2)}\left[\frac{S_{T,\lambda,\bar{x},\bar{y}}(x_+, y_\cdot v_+, w_+) - \|x_+ - \bar{x}\|^2 - \|y_+ - \bar{y}\|^2}{\big(\big(\|x_+ - \bar{x}\|^2 + \|y_+ - \bar{y}\|^2\big)^{1/2}}\right] \cdot \\ & \quad\quad \left[\frac{\big(\|x_+ - \bar{x}\|^2 + \|y_+ - \bar{y}\|^2\big)^{(1/2)}}{\|x_+ - \bar{x}\| + \|y_+ - \bar{y}\|}\right] \\ & \leq d\big((\bar{x}, \bar{y}), S(F)\big)^2 + \\ & \quad + (\beta^2 - \beta^4)^{(1/2)}\left[\frac{2n - 2(1+\beta)n}{(2(1+\beta)n)^{(1/2)}}\right] \cdot \left[\frac{\big(\|x_+ - \bar{x}\|^2 + \|y_+ - \bar{y}\|^2\big)^{(1/2)}}{\|x_+ - \bar{x}\| + \|y_+ - \bar{y}\|}\right] \\ & \leq d\big((\bar{x}, \bar{y}), S(F)\big)^2 + (\beta^2 - \beta^4)^{1/2}\left[\frac{2n - 2(1+\beta)n}{(2(1+\beta)n)^{(1/2)}}\right](1/\sqrt{2}) \end{aligned}$$

onde, para a penúltima desigualdade empregamos a relação $(a^2 + b^2)^{(1/2)} \geq \dfrac{a+b}{\sqrt{2}}$, aplicada ao termo $\left[\dfrac{\big(\|x_+ - \bar{x}\|^2 + \|y_+ - \bar{y}\|^2\big)^{(1/2)}}{\|x_+ - \bar{x}\| + \|y_+ - \bar{y}\|}\right]$, usando que $\big((\beta^2 -$

$\beta^4)^{1/2}(2n-2(1+\beta)n)\big)/\big((2(1+\beta)n)^{(1/2)}2^{1/2}\big) < 0$. Para concluir, basta notar que

$$\big((\beta^2-\beta^4)^{1/2}(2n-2(1+\beta)n)\big)/\big((2(1+\beta)n)^{(1/2)}2^{1/2}\big) = -\beta^2(1-\beta)^{1/2}n^{1/2}.$$

$\square$

3.2.3 Algoritmo, apresentação e análise de convergência e complexidade

Apresentaremos seguidamente um algoritmo tipo path-following para o Problema de Complementaridade Linear Monótono. Estudaremos suas características principais, no que diz respeito a estar bem definido, à convergência global e aos resultados de complexidade.

Algoritmo A2

Faça k=0 e sejam $\beta \in [0,1)$, $(\bar{x}^0, \bar{y}^0) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, $(x^0, y^0) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n_{++}$ *tais que* $\check{\delta}(x^0, y^0; \delta_0; \bar{x}^0, \bar{y}^0) \leq \beta^2$.

Para k=1,2,...

1. *Calcular* (d_k^x, d_k^y) *a solução do sistema de Newton*

$$\begin{bmatrix} \lambda_k M + I & -\lambda_k I \\ \lambda_k I & \lambda Y^{k-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_k^x \\ d_k^y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \lambda_k(Mx^k + b - y) + x^k - \bar{x}^k \\ \lambda_k x^k + (y^k - \bar{y}^k) - y^{k-1} \end{bmatrix},$$

2. *Definir* $(x^{k+1}, y^{k+1}) = (x^k, y^k) + (d_k^x, d_k^y)$

3. *a) Se* $\|x^{k+1} - \bar{x}^k\|^2 + \|y^{k+1} - \bar{y}^k\|^2 \leq 2(1+\beta)n$ *(Passo de Ponto interior).*
   Definir $(\bar{x}^{k+1}, \bar{y}^{k+1}) = (\bar{x}^k, \bar{y}^k)$, $\lambda_{k+1} = \lambda_k(1+\theta_k)$ *onde* $\theta_k = (\beta - \beta^2)/(\|x^{k+1} - \bar{x}^k\| + \|y^{k+1} - \bar{y}^k\| + n^{(1/2)} + \beta^2)$
   b) Se $\|x^{k+1} - \bar{x}^k\|^2 + \|y^{k+1} - \bar{y}^k\|^2 > 2(1+\beta)n$ *(Passo híbrido).*

Definir $\lambda_{k+1} = \lambda_k,\ (\bar{x}^{k+1}, \bar{y}^{k+1}) = (\bar{x}^k, \bar{y}^k) + \rho_k \big[(x^{k+1}, y^{k+1}) - (\bar{x}^k, \bar{y}^k)\big]$
onde $\rho_k = \dfrac{(\beta - \beta^2)}{\|x^{k+1} - \bar{x}^k\| + \|y^{k+1} - \bar{y}^k\|}$

Vamos comentar algumas questões de interesse sobre o algoritmo.

Observação 3.2.13.

1. *Para a inicialização do algoritmo podemos considerar, por exemplo, o seguinte caso simples,:*
   $\bar{x}^0 \in \mathbf{R}^n,\ x^0 \in \mathbf{R}^n{++}$ *solução de* $x^0 - (x^0)^{-1} = \bar{x}^0,\ \lambda_0 = \frac{\beta}{\|Mx^0+b\|},\ y^0 = (\lambda_0 x^0)^{-1}$ *e* $\bar{y}^0 = y^0$.
   É fácil ver que

   $$\check{R}_1(x^0, y^0; \lambda_0; \bar{x}^0) = \lambda_0(Mx^0 + b - y^0) + (x^0 - \bar{x}^0) = \lambda_0(Mx^0 + b)$$
   $$\check{R}_2(x^0, y^0; \lambda_0; \bar{y}^0) = \lambda_0 x^0 + (y^0 - \bar{y}^0) - (y^0)^{-1} = 0.$$

   Portanto, $\delta(x^0, y^0; \lambda_0; \bar{x}^0) = \|\lambda_0(Mx^0 + b)\|^2 = \beta^2$ *e estamos na vizinhança de uma curva log-quadrática.*

2. *Observemos que calcular o valor de* θ_k*, definido no passo 1), se reduz a achar a solução de uma equação quadrática, logo seu cálculo não acrescenta complexidade alguma ao algoritmo.*

No seguinte teorema temos as propiedades fundamentais do algoritmo A2.

Teorema 3.2.14.

i) O algoritmo A2 está bem definido.

ii) Se o $LMCP(F)$ *tem solução, então existe* $\bar{K}_1 > 0$ *tal que* $\forall\, k \geq \bar{K}_1,\ \|x^k - \bar{x}^k\|^2 + \|y^k - \bar{y}^k\|^2 \leq 2(1+\beta)n$*, isto é, o número de passos híbridos do algoritmo é finito.*

iii) Se o $LMCP(F)$ tem solução , então existem $\bar{\theta} \in (0,1)$ e $\bar{K}_2 > 0$ tal que $\forall\, k \geq \bar{K}_2,\ \lambda_{k+1} \geq (1+\bar{\theta})\lambda_k$, isto é, temos convergência Q-linear da sequência $\left\{\frac{1}{\lambda_k}\right\}_{k\in\mathbf{N}}$ a 0 quando $k \to +\infty$.

iv) Se o $LMCP(F)$ tem solução, então a sequência gerada pelo algoritmo é limitada e seus pontos de acumulação são soluções.

Demonstração. i) Vamos supor que para um certo $k \in \mathbf{N}$, temos $(\bar{x}^k, \bar{y}^k) \in \mathbf{R}^n, \times\mathbf{R}^n$, $(x^k, y^k) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, $\lambda_k > 0$, que satisfazem

$$y^k > 0, \quad \check{\delta}(x^k, y^k; \lambda_k; \bar{x}^k, \bar{y}^k) \leq \beta^2. \tag{3.49}$$

Então, pelos Lemas 3.2.1, 3.2.3 e o Teorema 3.2.6, segue-se que os passos 1 e 2 do algoritmo estão bem definidos, e o novo iterado (x^{k+1}, y^{k+1}) satisfaz

$$y^{k+1} > 0, \quad \check{\delta}(x^{k+1}, y^{k+1}; \lambda_k; \bar{x}^k; \bar{y}^k) \leq \beta^4.$$

No passo 3, no caso a) pela Proposição 3.2.9 e no caso b) por i) da Proposição 3.2.12 i), segue-se que $(\bar{x}^{k+1}, \bar{y}^{k+1}) \in \mathbf{R}^n, \times\mathbf{R}^n$, $(x^{k+1}, y^{k+1}) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n_{++}$, $\lambda_{k+1} > 0$, satisfazem

$$\check{\delta}(x^{k+1}, y^{k+1}; \delta_{k+1}; \bar{x}^{k+1}; \bar{y}^{k+1}) \leq \beta^2.$$

Observemos que a positividade estrita de λ_{k+1} segue trivialmente. Desta forma, notando-se que para $k = 0$ (3.49) é satisfeita, segue por indução completa que o o algoritmo está bem definido.

ii) Após $\bar{K}_1$ passos de Newton, por ii) da Proposição 3.2.12, temos que

$$d\big((\bar{x}^{k_{j+1}}, \bar{y}^{k_{j+1}}), S^*_{MC}(F)\big)^2 \leq d\big((\bar{x}^{k_j}, \bar{y}^{k_j}), S^*_{MC}(F)\big)^2 - \left[\frac{\beta^2(1-\beta)n^{(1/2)}}{(1+\beta)^{(1/2)}}\right]$$

$j = 1, \ldots, \bar{K}_1$,

logo, somando as desigualdades

$$\begin{aligned} \bar{K}_1 \left[\frac{\beta^2(1-\beta)n^{(1/2)}}{(1+\beta)^{(1/2)}}\right] &\leq d\big((\bar{x}^0, \bar{y}^{)}, S^*_{MC}(F)\big)^2 - d\big((\bar{x}^{k_{\bar{K}_1}}, \bar{y}^{\bar{K}_1}), S^*_{MC}(F)\big)^2 \\ &\leq d\big((\bar{x}^0, \bar{y}^0), S(F)\big)^2. \end{aligned}$$

Portanto, o número de passos híbridos no algoritmo fica limitado por

$$K_1 \leq d(\bar{x}^0, S(F))^2 / \big(\beta^2(1-\beta)^{1/2} n^{1/2}\big)$$

e segue o resultado.

iii) Para $k \geq \bar{K}_1$, onde $\bar{K}_1$ é a constante definida no item ii), temos que $\|x^k - \bar{x}^k\|^2 + \|y^k - \bar{y}^k\|^2 \leq 2(1+\beta)n$, logo o algoritmo só executa passos de ponto interior (Passo 3 a). Da definição do passo 3 a) no algoritmo, temos que

$$\lambda_{k+1} = (1+\theta_k)\lambda_k,$$

onde

$$\theta_k = (\beta - \beta^2)/(\|x^{k+1} - \bar{x}^k\| + \|y^{k+1} - \bar{y}^k\| + n^{(1/2)} + \beta^2).$$

Observemos que, definindo $\bar{\theta} = (\beta-\beta^2)/\big(2(2(1+\beta)n)^{(1/2)} + n^{1/2} + \beta$, segue-se que

$$\theta_k \geq \bar{\theta} > 0, \text{ para todo } k \geq K_1.$$

Desta forma obtemos o resultado.

iv) Observemos que, para todo $k \geq \bar{K}_1$, onde $\bar{K}_1$ é a constante do item ii), o algoritmo só faz iterações de ponto interior, portanto vale que

$$\check{\delta}(x^k, y^k; \lambda_k; \bar{x}^{K_1}; y^{K_1}) \leq \beta^2 < 1, \quad \forall k \geq \bar{K}_1.$$

Logo, pela Observação 3.2.8, segue-se a limitação da sequência $\big\{(x^k, y^k)\big\}_{k \in \mathbf{N}}$. Vejamos agora que os pontos de acumulação são soluções. Vamos supor que $(\hat{x}, \hat{y})$ é um ponto de acumulação da sequência. Da linearidade do primeiro grupo de equações do sistema de Newton (3.31), segue-se que

$$\lambda_{k-1}(Mx^k + b - y^k) + x^k - \bar{x}^{k-1} = 0$$

Passando ao limite na subsequência convergente a $(\hat{x}, \hat{y})$ e usando-se a limitação da sequência $\{(x^k, y^x, \bar{x}^k, \bar{y}^k)\}_{k \in \mathbf{N}}$, obtemos

$$M\hat{x} + b = \hat{y}. \tag{3.50}$$

Temos que $(x^k, y^k) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n_{++},$ para todo $k \in N$, logo, segue-se que

$$(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n_{+}. \tag{3.51}$$

Agora, da condição $\|\lambda_k x^k + (y^k - \bar{y}^k) - (y^k)^{-1}\|_{\left((Y^k)^{-2}+I\right)^{-1}} \leq \beta$, segue-se que

$$\frac{1}{(y^k)_i^2 + 1)} \Big[\lambda_k (y^k)_i (x^k)_i + (y^k)_i \big[(y^k)_i - (\bar{y}^k)_i\big] - 1\Big]^2 \leq \beta^2, \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n,$$

donde obtemos

$$\begin{aligned} 1 - ((y^k)_i^2 + 1)^{(1/2)}\beta &\leq \lambda_k (y^k)_i (x^k)_i + (y^k)_i \big[(y^k)_i - (\bar{y}^k)_i\big] \\ &\leq 1 + ((y^k)_i{}^2 + 1)^{(1/2)}\beta, \end{aligned} \tag{3.52}$$

para $i = 1, 2, \ldots, n.$

Dividindo por λ_k e passando ao limite quando $k \to +\infty$ na subsequência, segue-se que

$$\hat{x}^i \hat{y}^i = 0, \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, n\}\,. \tag{3.53}$$

Definindo os conjuntos $J := \{j \in \{1, \ldots, n\} \mid \hat{y}_j > 0\}$ e $I := \{1, \ldots, n\} \setminus J = \{j \in \{1, \ldots, n\} \mid \hat{y}_j = 0\}$, segue de (3.53) que

$$\hat{x}^j = 0 \text{ para todo } j \in J. \tag{3.54}$$

Para $i \in I$ e k suficientemente grande, vale que $\frac{1}{\beta} > ((y^k)_i + 1)^{(1/2)}$, logo, de (3.52), temos que

$$0 < (y^k)_i \Big[\lambda_k (x^k)_i + (y^k)_i - (\bar{y}^k)_i\Big], \text{ para todo } i \in I.$$

Portanto, usando que $y^k \in \mathbf{R}^n_{++},$ para todo $k \in \mathbf{N}$, obtemos

$$-\left[\frac{(y^k)_i - (\bar{y}^k)_i}{\lambda_k}\right] \leq (x^k)_i, \text{ para todo } i \in I,$$

Observemos que do item iii), segue-se que $\lim_{k\to+\infty} \lambda_k = +\infty$, logo fazendo $k \to +\infty$, segue-se que

$$0 \leq \hat{x}^i \text{ para todo } i \in I$$

Isto, combinado com (3.54), implica em

$$\hat{x} \in \mathbf{R}^n_+. \tag{3.55}$$

Desta forma, de (3.50), (3.51), (3.53) e (3.55), segue-se que $(\hat{x}, \hat{y})$ é solução do $LMCP(F)$. $\square$

Finalmente apresentamos um resultado de complexidade do algoritmo A2.

Dado $\epsilon > 0$, dizemos que $(x, y) \in \mathbf{R}^n_+ \times \mathbf{R}^n_+$ é uma ϵ-solução *do $LMCP(F)$, se*

$$\|Mx + b - y\| \leq \epsilon,\ 0 \leq \frac{\langle x, y\rangle}{n} \leq \epsilon.$$

Teorema 3.2.15. *Sejam $(x^0, y^0) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n_{++}$, $(\bar{x}^0, \bar{y}^0) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ $\lambda_0 > 0$, $\beta \in [0, 1/2]$ tais que, $\check{\delta}(x^0, y^0; \lambda_0; \bar{x}^0; \bar{y}^0) \leq \beta^2$. Dado $\epsilon > 0$, o algoritmo A2 atinge uma ϵ-solução do $MLCP(F)$, após*

$$\left[\frac{1}{\bar{\theta}} \log \frac{\check{K}}{\epsilon} + \frac{d(\bar{x}^0, S^*_{MC}(F))^2}{\big(\beta^2(1-\beta)^{1/2} n^{1/2}\big)}\right]$$

iterações, onde

$$\check{K} = \max\{\|M\|(2(1+\beta)n)^{(1/2)}, 1\} \text{ e } \bar{\theta} = 1/\big(2(1+\beta)n^{(1/2)} + \beta^2 + n^{(1/2)}\big).$$

Demonstração. Após um passo de Newton, temos, pelo Lema 3.2.4 e por iii) do Lema 3.2.2, que

$$\lambda_k x^{k+1} + y^{k+1} - \bar{y}^k - (y^{k+1})^{-1} = -(Y^{k+1})^{-1}\big((Y^k)^{-1} d^y_k\big)^2$$

e

$$\|(Y^k)^{-1} d^y_k\| \leq \check{\delta}(x^k, y^k; \lambda_k; \bar{y}^k)^{1/2} \leq \beta.$$

Logo, definindo $\hat{y}^{k+1} = y^{k+1}$ e $\hat{x}^{k+1} = x^{k+1} + \dfrac{y^{k+1} - \bar{y}^k}{\lambda_k}$, segue-se que

$$0 < 1/\lambda_k - \beta^2/(n\lambda_k) \leq \frac{\langle \hat{x}^{k+1}, \hat{y}^{k+1}\rangle}{n} = 1/\lambda_k - \|Y_k^{-1} d^y_k\|^2/(n\lambda_k),$$

donde, obtemos

$$0 < \frac{\langle \hat{x}^{k+1}, \hat{y}^{k+1} \rangle}{n} \leq 1/\lambda_k.$$

Pelo Lema 3.2.4, temos que, após o passo de Newton

$$\lambda_k(Mx^{k+1} + b - y^{k+1}) + x^{k+1} - \bar{x}^k = 0,$$

portanto, vale que

$$\begin{aligned} \lambda_k(M\hat{x}^{k+1} + b - \hat{y}^{k+1}) + x^{k+1} - \bar{x}^k &= \lambda_k(Mx^{k+1} + b - y^{k+1}) + x^{k+1} - \bar{x}^k \\ &\quad + M(y^{k+1} - \bar{y}^k) \\ &= M(y^{k+1} - \bar{y}^k). \end{aligned}$$

Desta forma, segue-se que após K passos de Ponto interior(Passo 2a no algoritmo A2) e $\bar{K}_1$ passos híbridos (Passo 2b no algoritmo A2), onde $\bar{K}_1$ é a constante definida em ii) do Teorema 3.2.14, que limita superiormente o número de passos híbridos, vale que

$$\begin{aligned} \|M\hat{x}^{k+1} + b - \hat{y}^{k+1}\| &\leq \|M\| \, \|y^{k+1} - \bar{y}^k\|/\lambda_k \\ &\leq \|M\| \, (2(1+\beta)n)^{1/2}/\lambda_k \\ &\leq \|M\| \, (2(1+\beta)n)^{1/2}/(1+\hat{\theta})^K \lambda_0, \end{aligned} \tag{3.56}$$

e

$$0 < \frac{\langle \hat{x}^{k+1}, \hat{y}^{k+1} \rangle}{n} \leq 1/\lambda_k \leq 1/(1+\hat{\theta})^K \lambda_0, \tag{3.57}$$

onde $\bar{\theta}$ é a constante definida no item ii) do Teorema 3.2.14. Logo, para K tal que

$$\|M\|(2(1+\beta)n)^{(1/2)}/(1+\hat{\theta})^K \lambda_0 \leq \epsilon, \quad 1/\lambda_k \leq 1/(1+\hat{\theta})^K \lambda_0 \leq \epsilon,$$

obtemos uma ϵ-solução do problema. Logo podemos considerar K tal que

$$K \log(1+\bar{\theta}) \geq \log \frac{\check{K}}{\epsilon},$$

onde $\check{K} = \max\{\|M\|(2(1+\beta)n)^{(1/2)}, 1\}$. Fazendo uso da desigualdade $\log(1+z) \leq z$, para todo $z \in \mathbf{R}_{++}$, segue-se que basta tomar K tal que

$$K \geq \frac{1}{\bar{\theta}} \log \frac{\check{K}}{\epsilon}.$$

Portanto, lembrando que o número de pasos híbridos do algoritmo está limitado por $d(\bar{x}^0, S^*_{MC}(F))^2/\left(\beta^2(1-\beta)^{1/2}n^{1/2}\right)$, a nossa estimativa final do número de passos, necessários para atingir uma ϵ-solução, vem dada por

$$\left[\frac{1}{\bar{\bar{\theta}}}\log\frac{\check{K}}{\epsilon} + \frac{d(\bar{x}^0, S^*_{MC}(F))^2}{\left(\beta^2(1-\beta)^{1/2}n^{1/2}\right)}\right]$$

□

Apêndice A

No seguinte resultado, vamos deixar de lado a convergência controlada dos parâmetros a zero, e mostrar um exemplo da não limitação da trajetória log-quadr tica para o problema de complementaridade monótono.

Proposição A.0.16. *Sejam* $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0,0)$ *e* $T : \mathbf{R}^2 \rightrightarrows \mathbf{R}^2$ *o operador linear monótono definido por*

$$T(x_1, x_2) = (x_2, -x_1).$$

Então, a trajetória log-quadrática $(\mu, \nu) \longrightarrow \big(x_1(\mu,\nu;\bar{x}), x_2(\mu,\nu;\bar{x})\big)$, $(\mu,\nu) \in \mathbf{R}^2_{++}$ *está bem definida e para toda sequência* $\{(\mu_k, \nu_k)\}_{k\in\mathbf{N}}$ *convergindo a* $(0,0)$ *e tal que* $\lim_{k\to+\infty}(\mu_k/\nu_k) = +\infty$*, a sequência* $\{(x_1^k x_2^k)\}_{k\in\mathbf{N}}$ *é não limitada.*

Demonstração. T é monótono maximal e satisfaz H1), portanto a trajetória log-quadrática está bem definida e temos que ela é a solução de

$$0 = (x_2, -x_1) + \nu(x_2, x_1) - \mu(1/x_1, 1/x_2),\ (x_1, x_2) > 0.$$

Reescrevendo o sistema anterior, segue-se que

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_2 + \nu x_1 - (\mu/x_1) & = & 0, \\ -x_1 + \nu x_2 - (\mu/x_2) & = & 0, \\ (x_1, x_2) > 0, & & \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x_2 x_1 + \nu x_1^2 - \mu & = & 0, \\ -x_1 x_2 + \nu x_2^2 - \mu & = & 0, \\ (x_1, x_2) > 0, & & \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \nu(x_1^2 + x_2^2) = 2\mu.$$

Desta forma

$$\|x(\mu,\nu;\bar{x},\bar{y})\|^2 = 2(\mu/\nu).$$

Da desigualdade anterior segue o resultado. $\square$

No resultado a seguir vamos construir um operador monótono maximal não linear T satisfazendo H1 e tal que o correspondente $MCP(T)$ é degenerado; vamos provar que mesmo tomando $\mu(t) = \nu(t) = t$ a curva $t \mapsto x(\mu(t),\nu(t);\bar{x})$ não é convergente.

Proposição A.0.17. *Sejam as aplicações continuas $\mu(t) = \nu(t) = t$. Então existe um operador monótono maximal $\bar{T} : \mathbf{R}^2 \rightrightarrows \mathbf{R}^2$, tal que a curva $t \mapsto (x(\mu(t),\nu(t);\bar{x})$ não é convergente.*

Demonstração. Consideremos a função $\phi : \mathbf{R}^2_{++} \longrightarrow \mathbf{R}^2$

$$\phi(x_1,x_2) := (x_1^2 + x_2^2)/2 - \ln x_1 - \ln x_2,$$

e definamos as sequências

$$\begin{cases} x^{2k} & := & (1, 1/2^{2k}), \\ x^{2k+1} & := & (5/6, 1/2^{2k+1}), \\ v^k & := & \nabla\phi(x_1^k, x_2^k) = (x_1^k - 1/x_1^k, x_2^k - 1/x_2^k), \;\; k = 0,1,\ldots. \end{cases}$$

Vamos considerar, sem perda de generalidade, $n > m \geq 1$, temos que

$$\langle \nabla\phi(x^m), x^n - x^m \rangle = \langle v^m, x^n - x^m \rangle$$
$$= \left\langle (x_1^m - 1/x_1^m, x_2^m - 1/x_2^m), (x_n^1 - x_1^m, x_n^2 - x_2^m) \right\rangle$$
$$= (x_1^m - 1/x_1^m)(x_1^n - x_1^m) + (x_2^m - 1/x_2^m)(x_2^n - x_2^m)$$
$$= \begin{cases} (1/2^m - 2^m)(1/2^n - 1/2^m), & \text{se m é par,} \\ (5/6 - 6/5)(1/2^n - 5/6)) + (1/2^m - 2^m)(1/2^n - 1/2^m), & \text{se m é impar.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (1/2^m - 2^m)(1/2^n - 1/2^m), & \text{se m é par,} \\ (5/6 - 6/5)(5/6 - 5/6) + (1/2^m - 2^m)(1/2^n - 1/2^m), & \text{se m é impar e n é impar,} \\ (5/6 - 6/5)(1 - 5/6) + (1/2^m - 2^m)(1/2_2^n - 1/2^m), & \text{se m é impar e n é par.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (2^m - 1/2^m)(1/2^m - 1/2^n), & \text{se m é par ,} \\ (1/2^m - 2^m)(1/2^n - 1/2^m), & \text{se m é impar e n é impar,} \\ -(11/180) + (2^m - 1/2^m)(1/2^m - 1/2^n), & \text{se m é impar e n é par.} \end{cases}$$

$$\geq -(11/180) + (2^m - 1/2^m)(1/2^m - 1/2^n). \tag{A.1}$$

Note-se que $(2^m - 1/2^m)(1/2^m - 1/2^n) = (1 - 1/4^m)(1 - 1/2^{n-m})$ e da hipótese sobre n e m, segue-se que $(1 - 1/2^{n-m}) \geq (1 - 1/2)$ e $(1 - 1/4^m) \geq (1 - 1/4)$. Logo, da ultima desigualdade de (A.1) obtemos que

$$\langle \nabla\phi(x^m), x^n - x^m \rangle \geq -(11/180) + (1/4)(1/2) = (113/130) > 0. \tag{A.2}$$

Agora, definamos a sequência

$\lambda_1 = 1,$

Para $k = 1, 2 \ldots,$

$\lambda_{k+1} = \max_{j=1\ldots,k} \left[\lambda_k \big(\langle \nabla\phi(x^{k+1}), x^{k+1} - x^j \rangle / \langle \nabla\phi(x^j), x^{k+1} - x^j \rangle \big) \right].$

Note-se que de (A.2), segue-se que o denominador é estritamente positivo, logo a sequência está bem definida. Pela monotonia da função ϕ, segue-se que

$$\langle \nabla\phi(x^{k+1}), x^{k+1} - x^j \rangle \geq \langle \nabla\phi(x^j), x^{k+1} - x^j) \rangle.$$

Logo, da definição segue-se que $\lambda_{k+1} \geq \lambda_k$, e sendo $\lambda_1 = 1 > 0$, obtemos por indução completa

$$\lambda_k > 0, \text{ para todo } k \in N.$$

Consideremos o caso em que $k+1$ é um número par. Segue da definição de ϕ (ver A.1) que

$$\begin{aligned} &\langle \nabla\phi(x^{k+1}), x^{k+1} - x^k \rangle / \langle \nabla\phi(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle = \\ &= \big((1/2^{k+1} - 2^{k+1})(1/2^{k+1} - 1/2^k)\big) / \big((2^k - 1/2^k)(1/2^k - 1/2^{k+1}) - (11/180)\big) \\ &= (1 - 1/4^{k+1}) / \big((1 - 1/4^k)(1/2) - (11/180)\big) \to 180/79 > 1, \text{ quando } k \to +\infty. \end{aligned}$$

Logo, da desigualdade

$$\lambda_{k+1} \geq \lambda_j \left[\langle \nabla\phi(x^{k+1}), x^{k+1} - x^j \rangle / \langle \nabla\phi(x^k), x^{k+1} - x^j \rangle \right], \text{ para } j = 0, 1, \ldots, k \tag{A.3}$$

segue, por indução completa, $\lim_{k \to +\infty} \lambda_k = +\infty$. Agora, novamente de (A.3), temos que

$$\langle (\nabla\phi(x^j)/\lambda_j), x^{k+1} - x^j \rangle \geq \langle (\nabla\phi(x^{k+1})/\lambda_{k+1}), x^{k+1} - x^j \rangle, \text{ para } j = 1, 2, \ldots, k,$$

ou seja

$$\langle \Big[-\big(\nabla\phi(x^{k+1})/\lambda_{k+1}\big) \Big] - \big[-\big(\nabla\phi(x^j)/\lambda_j\big) \big], x^{k+1} - x^j \rangle \geq 0, \text{ para } j = 1, 2, \ldots, k. \tag{A.4}$$

Por tanto, definindo $T(x^k) := -\big(\nabla\phi(x^k)/\lambda_k\big) : \mathbf{R}^2 \rightrightarrows \mathbf{R}^2$ com $D(T) := \{x^k\}_{k \in \mathbf{N}}$ segue de (A.4) que T é monótono. Considerando agora sua extensão monótona maximal $\bar{T} : \mathbf{R}^2 \rightrightarrows \mathbf{R}^2$, segue-se que

$$0 \in \bar{T}(x^k) + (\nabla\phi(x^k)/\lambda_k), \text{ para todo } k \in N.$$

Da definição da sequência $\left\{x^k\right\}_{k\in\mathbf{N}}$, temos que $x_k = x(\mu(1/\lambda_k), \nu(1/\lambda_k); \bar{x})$, para todo $k \in \mathbf{N}$. Desta forma, obtemos que a curva $t \mapsto \big(x(\mu(t), \nu(t); \bar{x}\big)$ não é convergente. $\square$

Observação A.0.18.

1. *Observemos que no exemplo anterior, pelo Corolário 2.1.10, temos que os pontos de acumulação da trajetória log-quadrática são soluções do* $MCP(T)$.

Bibliografia

[1] *A. Auslender, M. Teboulle, and S. Ben-Tiba. Interior proximal and multiplier methods based on second order homogeneous kernels.* Math. Oper. Res.*, 24(3):645–668, 1999.*

[2] *A. Auslender, M. Teboulle, and S. Ben-Tiba. A logarithmic-quadratic proximal method for variational inequalities.* Comput. Optim. Appl.*, 12(1-3):31–40, 1999. Computational optimization—a tribute to Olvi Mangasarian, Part I.*

[3] *A. Ben-Tal and M. Zibulevsky. Penalty/barrier multiplier methods for convex programming problems.* SIAM J. Optim.*, 7(2):347–366, 1997.*

[4] *J. F. Bonnans and C. C. Gonzaga. Convergence of interior point algorithms for the monotone linear complementarity problem.* Math. Oper. Res.*, 21(1):1–25, 1996.*

[5] *J. F. Bonnans and F. A. Potra. On the convergence of the iteration sequence of infeasible path following algorithms for linear complementarity problems.* Math. Oper. Res.*, 22(2):378–407, 1997.*

[6] *H. Brezis.* Operateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*. Notas de matemática (Rio de Janeiro, Brazil), 50. Amsterdam, North-Holland Pub. Co., 1973.*

[7] *R. S. Burachik and A. N. Iusem. A generalized proximal point algorithm for the variational inequality problem in a Hilbert space.* SIAM J. Optim.*, 8(1):197–216 (electronic), 1998.*

[8] *R. S. Burachik, A. N. Iusem, and B. F. Svaiter. Enlargement of monotone operators with applications to variational inequalities.* Set-Valued Anal.*, 5(2):159–180, 1997.*

[9] *R. S. Burachik, C. A. Sagastizábal, and B. F. Svaiter. ϵ-enlargements of maximal monotone operators: theory and applications. In* Reformulation: nonsmooth, piecewise smooth, semismooth and smoothing methods (Lausanne, 1997)*, volume 22 of* Appl. Optim.*, pages 25–43. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.*

[10] *R. S. Burachik and B. F. Svaiter. ϵ-enlargements of maximal monotone operators in Banach spaces.* Set-Valued Anal.*, 7(2):117–132, 1999.*

[11] *R. S. Burachik and B. F. Svaiter. A relative error tolerance for a family of generalized proximal point methods.* Math. Oper. Res.*, 26(4):816–831, 2001.*

[12] *J. Burke and S. Xu. A non-interior predictor-corrector path following algorithm for the monotone linear complementarity problem.* Math. Program.*, 87(1, Ser. A):113–130, 2000.*

[13] *J. Burke and S. Xu. A non-interior predictor-corrector path following algorithm for the monotone linear complementarity problem.* Math. Program.*, 87(1, Ser. A):113–130, 2000.*

[14] *J. Burke and S. Xu. Complexity of a noninterior path-following method for the linear complementarity problem.* J. Optim. Theory Appl.*, 112(1):53–76, 2002.*

[15] *J. V. Burke and S. Xu. The global linear convergence of a noninterior path-following algorithm for linear complementarity problems.* Math. Oper. Res.*, 23(3):719–734, 1998.*

[16] *B. Dantzig.* Maximization of Linear Function of Variables subject to Linear Inequalities, in Activity Analysis of Production and Allocation*. John-Wiley & Sons, Inc., New York, 1951.*

[17] *V. Dolezal.* Monotone operators and applications in control and network theory*. Elsevier Scientific Pub. Co., 1979.*

[18] *C. C. Gonzaga. Large step path-following methods for linear programming. I. Barrier function method.* SIAM J. Optim.*, 1(2):268–279, 1991.*

[19] *C. C. Gonzaga. Large step path-following methods for linear programming. II. Potential reduction method.* SIAM J. Optim.*, 1(2):280–292, 1991.*

[20] *C. C. Gonzaga. The largest step path following algorithm for monotone linear complementarity problems.* Math. Programming*, 76(2, Ser. A):309–332, 1997.*

[21] *C. C. Gonzaga and J. F. Bonnans. Fast convergence of the simplified largest step path following algorithm.* Math. Programming*, 76(1, Ser. B):95–115, 1997. Interior point methods in theory and practice (Iowa City, IA, 1994).*

[22] *O. Güler. Generalized linear complementarity problems.* Math. Oper. Res.*, 20(2):441–448, 1995.*

[23] *O. Güler and Y. Ye. Convergence behavior of interior-point algorithms.* Math. Programming*, 60(2, Ser. A):215–228, 1993.*

[24] P. T. Harker and J. Pang. *Finite-dimensional variational inequality and nonlinear complementarity problems: a survey of theory, algorithms and applications.* Math. Programming*, 48(2, (Ser. B)):161–220, 1990.*

[25] A. N. Iusem, B. F. Svaiter, and J. X. Da Cruz Neto. *Central paths, generalized proximal point methods, and Cauchy trajectories in Riemannian manifolds.* SIAM J. Control Optim.*, 37(2):566–588 (electronic), 1999.*

[26] N. Karmarkar. *A new polynomial-time algorithm for linear programming.* Combinatorica*, 4(4):373–395, 1984.*

[27] L.G. Khachian. *A polynomial algorithm for linear programming.* Soviet Mathematic Doklady*, 1(20):191–194, 1979.*

[28] M. Kojima, Y. Kurita, and Sh. Mizuno. *Large-step interior point algorithms for linear complementarity problems.* SIAM J. Optim.*, 3(2):398–412, 1993.*

[29] M. Kojima, Sh. Mizuno, and T. Noma. *Limiting behavior of trajectories generated by a continuation method for monotone complementarity problems.* Math. Oper. Res.*, 15(4):662–675, 1990.*

[30] N. Lehdili and A. Moudafi. *Combining the proximal algorithm and Tikhonov regularization.* Optimization*, 37(3):239–252, 1996.*

[31] L. McLinden. *An analogue of Moreau's proximation theorem, with application to the nonlinear complementarity problem.* Pacific J. Math.*, 88(1):101–161, 1980.*

[32] *K. McShane. Superlinearly convergent $O(\sqrt{n}L)$-iteration interior-point algorithms for linear programming and the monotone linear complementarity problem.* SIAM J. Optim.*, 4(2):247–261, 1994.*

[33] *George J. Minty. Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space.* Duke Math. J.*, 29:341–346, 1962.*

[34] *Sh. Mizuno. A new polynomial time method for a linear complementarity problem.* Math. Programming*, 56(1, Ser. A):31–43, 1992.*

[35] *R. D. C. Monteiro and T. Tsuchiya. Limiting behavior of the derivatives of certain trajectories associated with a monotone horizontal linear complementarity problem.* Math. Oper. Res.*, 21(4):793–814, 1996.*

[36] *R. D. C. Monteiro and S. J. Wright. Local convergence of interior-point algorithms for degenerate monotone LCP.* Comput. Optim. Appl.*, 3(2):131–155, 1994.*

[37] *Yurii N. and Arkadii N.* Interior-point polynomial algorithms in convex programming. *SIAM studies in applied mathematics. 13. Philadelphia : Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.*

[38] *R. T. Rockafellar. On the maximal monotonicity of subdifferential mappings.* Pacific J. Math.*, 33:209–216, 1970.*

[39] *R. T. Rockafellar. On the maximality of sums of nonlinear monotone operators.* Trans. Amer. Math. Soc.*, 149:75–88, 1970.*

[40] *R. T. Rockafellar. Monotone operators and the proximal point algorithm.* SIAM J. Control Optimization*, 14(5):877–898, 1976.*

[41] *M. V. Solodov and B. F. Svaiter. A hybrid approximate extragradient-proximal point algorithm using the enlargement of a maximal monotone operator.* Set-Valued Anal.*, 7(4):323–345, 1999.*

[42] *M. V. Solodov and B. F. Svaiter. A hybrid projection-proximal point algorithm.* J. Convex Anal.*, 6(1):59–70, 1999.*

[43] *M. V. Solodov and B. F. Svaiter. A comparison of rates of convergence of two inexact proximal point algorithms. In* Nonlinear optimization and related topics (Erice, 1998)*, volume 36 of* Appl. Optim.*, pages 415–427. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.*

[44] *M. V. Solodov and B. F. Svaiter. Error bounds for proximal point subproblems and associated inexact proximal point algorithms.* Math. Program.*, 88(2, Ser. B):371–389, 2000. Error bounds in mathematical programming (Kowloon, 1998).*

[45] *M. V. Solodov and B. F. Svaiter. An inexact hybrid generalized proximal point algorithm and some new results on the theory of Bregman functions.* Math. Oper. Res.*, 25(2):214–230, 2000.*

[46] *J. Stoer and M. Wechs. On the analyticity properties of infeasible-interior-point paths for monotone linear complementarity problems.* Numer. Math.*, 81(4):631–645, 1999.*

[47] *J. F. Sturm. Superlinear convergence of an algorithm for monotone linear complementarity problems, when no strictly complementary solution exists.* Math. Oper. Res.*, 24(1):72–94, 1999.*

[48] *M. Teboulle. Entropic proximal mappings with applications to nonlinear programming.* Math. Oper. Res.*, 17(3):670–690, 1992.*

[49] *P. Tossings. The perturbed proximal point algorithm and some of its applications.* Appl. Math. Optim.*, 29(2):125–159, 1994.*

[50] *P. Tseng. Global linear convergence of a path-following algorithm for some monotone variational inequality problems.* J. Optim. Theory Appl., *75(2):265–279, 1992.*

[51] *P. Tseng. An infeasible path-following method for monotone complementarity problems.* SIAM J. Optim., *7(2):386–402, 1997.*

[52] *M. M. Vainberg.* Variational Methods and monotone operators in the theory of nonlinear equations. *Israel Program for Scientific Translations, 1973.*

[53] *S. Wright and D. Ralph. A superlinear infeasible-interior-point algorithm for monotone complementarity problems.* Math. Oper. Res., *21(4):815–838, 1996.*

[54] *J. H. Wu. Long-step primal path-following algorithm for monotone variational inequality problems.* J. Optim. Theory Appl., *99(2):509–531, 1998.*

[55] *S. Xu and J. V. Burke. A polynomial time interior-point path-following algorithm for LCP based on Chen-Harker-Kanzow smoothing techniques.* Math. Program., *86(1, Ser. A):91–103, 1999.*

[56] *Y. Zhao and D. Li. Locating the least 2-norm solution of linear programs via a path-following method.* SIAM J. Optim., *12(4):893–912 (electronic), 2002.*