

Medidas Coerentes de Risco

Elsio Paiva Oliveira

Orientador: Roberto Imbuzeiro Oliveira

06 de Março de 2009

Resumo

A análise e gestão de riscos tem se tornado peça fundamental para qualquer empresa, seja para o efetivo controle do risco incorrido por uma carteira e controle das posições assumidas por um portfólio, seja em caráter informativo para outras áreas e instituições reguladoras.

Segundo a literatura recente, para a mensuração do risco, quatro características são exigidas de qualquer medida proposta: monotonicidade, invariância sobre translações, homogeneidade positiva e subaditividade (convexidade). Essas características, conhecidas como os axiomas básicos das medidas de risco, fornecem o que são conhecidas como medidas coerentes de risco. Além da mensuração do risco de um portfólio, um ponto importante é a otimização de portfólios, ou seja, encontrar a carteira que, dado o conjunto inicial de ativos, apresente o menor risco possível.

O objetivo deste trabalho é estudar as medidas coerentes de risco, com ênfase no Expected Shortfall e nas Medidas Espectrais de Risco. Em seguida deseja-se encontrar o portfólio ótimo, ou seja, encontrar a carteira que apresenta o menor risco possível considerando um conjunto de ativos iniciais.

Os resultados empíricos obtidos permitem concluir que as medidas estudadas são boas medidas para a estimação do risco de um portfólio. Ainda, as técnicas de minimização empregadas garantem uma carteira com o menor risco possível e com retorno esperado maior que aquele apresentado pelo portfólio inicial.

Palavras-Chave

Medidas Coerentes de Risco. Medidas Espectrais de Risco. Expected Shortfall.

1 – Introdução.....	4
1.1 – Estrutura da Dissertação.....	6
2 – Introdução às Medidas de Risco	8
2.1 – Axiomas Básicos das Medidas de Risco.....	9
2.2 – Preferências e Medidas Coerentes de Risco.....	13
3 – Value-at-Risk.....	18
3.1 – Falta de Coerência do VaR.....	19
3.2 – VaR de Carteira – Modelo Delta-Normal	22
4 – Medidas Coerentes de Risco.....	26
4.1 – Expected Shortfall.....	26
4.1.1 – Coerência do ES_λ	27
4.1.2 – ES_λ - Modelo Delta Normal	31
4.2 – Medidas Espectrais de Risco – Weighted-VaR.....	32
5 – Simulação de Monte Carlo.....	40
5.1 – Geração de Cenários	40
5.2 – Precificação do Portfólio	41
5.3 – Sumário	42
5.4 – Estimações das Medidas Coerentes de Risco.....	42
6 – Otimização de Portfólios	45
6.1 – Otimização do Expected Shortfall	47
6.2 – Otimização das Medidas Espectrais	50
6.3 – Otimização Risco-Retorno de um Portfólio	52
7 – Estimações Empíricas	53
7.1 – Minimização das Medidas Coerentes	55
7.2 – Análises Estatísticas das Medidas de Risco	57
7.3 – Backtesting das Medidas de Risco.....	64
8 – Conclusões	67
Apêndice I.....	70
Referências Bibliográficas	73

1 – Introdução

A análise e gestão de riscos tem se tornado peça fundamental para qualquer empresa, seja para o efetivo controle do risco incorrido por uma carteira e controle das posições assumidas por um portfólio, seja em caráter informativo para outras áreas e instituições reguladoras.

Desta forma, a correta mensuração do risco a que uma posição financeira está incorrendo tornou-se um dos problemas mais importantes, e mais estudados, no mundo financeiro atual.

Para a mensuração do risco, quatro características são exigidas de qualquer medida proposta: monotonicidade, invariância sobre translações, homogeneidade positiva e subaditividade (convexidade). Essas características, conhecidas como os axiomas básicos das medidas de risco, nos fornecem o que é conhecido como medidas coerentes de risco.

Os quatro axiomas surgiram através de observações do comportamento dos investidores, levando em consideração a teoria das preferências.

Com isso, diversas maneiras de mensurar o risco de uma carteira surgiram ao longo do tempo.

Dentre as metodologias propostas para a mensuração do risco de mercado a mais popular entre as instituições e a mais utilizada é a metodologia denominada VaR (Value at Risk). O VaR fornece uma medida da maior (ou pior) perda esperada em uma carteira ou ativo para um determinado período de tempo e um intervalo de confiança previamente especificado.

O Value-at-Risk é uma medida baseada em um determinado quantil da distribuição de uma posição financeira X em um espaço de probabilidade (Ω, F, P) . Assim, fixado um nível $\lambda \in (0,1)$, definimos matematicamente o VaR ao nível λ como:

$$\text{VaR}_\lambda(X) = -q_X^-(\lambda) = q_{-X}^-(1-\lambda) = \inf \{m \mid P[X + m < 0] \leq \lambda\}$$

Ou seja, o VaR é o menor montante de capital aplicado no ativo livre de risco de modo que a probabilidade de perda em $X+mI_\Omega$ seja \leq que λ .

Uma vantagem apresentada pelo VaR perante as outras técnicas de medida de riscos de mercado é que o mesmo consegue quantificar em um único número a exposição total de uma instituição, financeira ou não, a esses riscos.

Apesar da vantagem apresentada acima, o VaR apresenta duas falhas. A primeira é que o VaR controla a probabilidade de uma perda ocorrer, mas não captura a magnitude de tal perda se a mesma ocorrer. Obviamente que o tamanho da perda deve ser levado em consideração. A segunda falha é a falta de coerência do VaR, já que, como veremos, o VaR “pune” a diversificação em alguns casos.

Devido a essas críticas, surgiu a necessidade do estudo de medidas que as corrijam, de forma a obtermos melhores métricas para a mensuração do risco de mercado.

Com isso, o estudo das medidas coerentes de risco vem ganhando um espaço cada vez maior, tanto no mundo acadêmico, quanto no mundo profissional.

Dentre as medidas mais estudadas, destaca-se o Expected Shortfall (ES), que mede o valor esperado da perda quando a mesma supera o VaR.

Além de ser uma medida coerente de riscos, o ES também cobre uma outra falha do VaR, pois sabemos que VaR controla a probabilidade de uma perda ocorrer, mas não captura a magnitude de tal perda se a mesma ocorrer.

O Expected Shortfall de nível $\lambda \in (0,1]$ de uma posição financeira X é dado por:

$$ES_{\lambda}(X) = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} VaR_{\gamma}(X) d\gamma$$

Analisando a definição acima, podemos pensar no ES de nível $\lambda \in (0,1]$ como uma medida particular de probabilidade que faz a média ponderada das saídas da variável aleatória X que dá peso $d\gamma/\lambda$ aos $100\lambda\%$ piores casos e peso zero aos demais.

Podemos então pensar no ES como um caso particular de uma medida de probabilidade de médias ponderadas mais geral que utiliza uma função peso para cada observação de X . Chamando essa função peso de ϕ , podemos então definir:

$$M_{\phi}(X) = - \int_0^1 \phi(p) q_p(X) dp$$

Onde o funcional $\phi: [0,1] \rightarrow \Re$ nos permite dar diferentes pesos $\phi(p)dp$ para cada possível realização $q_p(X)$.

O funcional ϕ é conhecido como espectro de risco, ou função de aversão ao risco¹ de $M_{\phi}(X)$, no sentido que qualquer investidor racional² pode expressar sua

¹ A existência de aversão ao risco significa que, numa situação de incerteza, o mal-estar associado à perda de um determinado montante de rendimento é superior ao bem-estar proporcionado pelo ganho desse mesmo montante de rendimento.

aversão ao risco subjetiva escolhendo perfis diferentes para o funcional ϕ . Qualquer escolha para ϕ que atenda às propriedades necessárias para a coerência representará uma atitude legítima frente ao risco. Por este motivo, $M_\phi(X)$ é conhecido como medida espectral de risco.

Com o surgimento de medidas coerentes de risco aplicáveis na prática, surge a necessidade de, dado um conjunto de ativos, encontrar o portfólio que apresente o menor risco, ou seja, encontrar o portfólio ótimo para o conjunto inicial dos ativos.

Em um problema de otimização de portfólio, o objetivo é encontrar os pesos ótimos de cada ativo de uma carteira de modo que o risco associado a essa carteira seja mínimo. O risco pode ser estimado através da variância, do VaR, do Expected Shortfall ou da Medida Espectral.

Desta forma, queremos encontrar então o portfólio que apresente o menor Expected Shortfall possível e a menor Medida Espectral possível.

Portanto, o objetivo deste trabalho é estudar as medidas coerentes de risco e estimar corretamente o risco de um portfólio contendo ativos lineares e não lineares. Em seguida queremos encontrar o portfólio ótimo, ou seja, encontrar a carteira que apresenta o menor risco possível considerando os ativos iniciais.

1.1 – Estrutura da Dissertação

Este trabalho é apresentado em sete capítulos.

No segundo capítulo é apresentada uma introdução às medidas de risco. Essa introdução cobre os quatro axiomas básicos das medidas coerentes de risco e sua relação com a teoria das preferências.

No terceiro capítulo é apresentado o Value-at-Risk (VaR), sendo demonstrada a sua falta de coerência. Ainda, é apresentado o modelo delta normal, onde se supõe que o vetor de retornos de ativos é normalmente distribuído. Esse modelo é o mais utilizado na prática, de forma que sua apresentação é fundamental para o correto entendimento das medidas de risco utilizadas no mercado.

No capítulo quatro serão apresentadas duas medidas coerentes de risco para a solução dos problemas do VaR: Expected Shortfall (ES) e VaR Espectral. Essas

² Investidores racionais processam informações objetivamente, ou seja, quando diante de incertezas (risco), tomam sempre a decisão mais racional.

medidas são coerentes e aplicáveis na prática, o que estimula ainda mais o seu estudo e correto entendimento. Desta forma, é demonstrada a coerência para essas medidas. Ainda, para o ES, é também apresentado o modelo delta-normal.

No capítulo cinco é apresentada a Simulação de Monte Carlo, que é utilizada para a estimação das medidas de risco apresentadas nesta dissertação.

No sexto capítulo é apresentada a otimização de portfólio, ou seja, encontrar os pesos ótimos de cada ativo de uma carteira de modo que o risco associado a essa carteira seja mínimo. O objetivo é encontrar o portfólio que apresente o menor Expected Shortfall possível e a menor Medida Espectral possível.

Finalmente, no capítulo sete, são realizadas as estimações empíricas. Para uma carteira contendo diversas ações e opções, são estimadas as três medidas de risco apresentadas e encontrado o portfólio ótimo dados os ativos iniciais da carteira. Além disso são realizados testes estatísticos nas medidas de risco e realizados procedimentos de backtesting para a validação dos modelos de VaR e de Expected Shortfall.

2 – Introdução às Medidas de Risco

Os investidores e os participantes do mercado financeiro devem ter em mente três conceitos básicos: retorno, incerteza e risco.

O primeiro deles, retorno, é definido como o ganho ou a perda em um investimento em um dado intervalo de tempo; as incertezas³, sempre presentes em um investimento, devem ser mensuradas quando o investidor deseja estimar suas possíveis perdas em um determinado investimento; risco é o valor numérico que expressa essa determinada incerteza.

Pode-se dividir o risco global de qualquer operação financeira em quatro grupos principais. Esses grupos são classificados de acordo com os fatores que geram incerteza sobre cada um e são divididos de acordo com a seguinte nomenclatura: riscos de mercado, riscos operacionais, riscos de crédito e riscos legais.

Riscos de mercado são as medidas das potenciais perdas de um determinado fundo de investimento se alguns fatores específicos de mercado mudarem inesperadamente. Esses fatores incluem taxas de juros, taxas de câmbio, preços de ação, etc.

Como exemplo pode-se citar uma carteira de investimento com uma posição longa em contratos futuros de dólar. Caso o preço do dólar caia consideravelmente e inesperadamente, o investidor estará incorrendo em um grande risco de mercado.

O risco de mercado engloba uma série de outros riscos, dentre os quais se pode citar risco de taxas de juros, risco de hedge, risco de liquidez, entre outros.

Desta forma, um dos problemas mais básicos no mundo financeiro surge: a correta mensuração do risco a que uma posição financeira está incorrendo.

Um posição financeira é descrita pelo perfil dos payoffs correspondentes desta posição, ou seja, uma função que assume valores reais X em algum conjunto de possíveis cenários financeiros. Esses cenários são possíveis realizações que as variáveis financeiras atuantes sobre a posição financeira em questão podem assumir. Em um modelo probabilístico, especificado por uma medida probabilística dos cenários, podemos voltar as atenções para a distribuição resultante de X e tentar mensurar o risco em termos de momentos ou quantis.

³ A situação de incerteza corresponde ao caso em que as probabilidades não são objetivamente definidas.

As formas mais conhecidas e praticadas para a medida de riscos utilizam essa abordagem. São a análise da variância da distribuição e a medida conhecida como Value-at-Risk (VaR). Porém, ambas apresentam problemas.

A variância penaliza grandes ganhos da mesma forma que penaliza grandes perdas, ou seja, não captura a assimetria na interpretação financeira de X : o que importa, neste caso, é o downside risk, ou seja, o risco de perdas elevadas. Na visão de um gestor de riscos, não importa o que ocorre na cauda direita da distribuição, apenas o que ocorre na cauda esquerda.

Essa assimetria é considerada por medidas como o VaR, que são baseadas em quantis da cauda inferior da distribuição. No entanto, o VaR não satisfaz alguns requerimentos básicos de consistência que são desejados em qualquer medida de risco.

Essas observações tem motivado o estudo e a investigação de novas medidas que satisfaçam esses axiomas.

2.1 – Axiomas Básicos das Medidas de Risco

Conforme mencionado na seção anterior, o VaR não satisfaz alguns requerimentos básicos de consistência que são desejados em qualquer medida de risco. Esses requerimentos são conhecidos como axiomas básicos das medidas de risco e serão estudados e demonstrados nesta seção.

Seja Ω um conjunto de cenários fixados. Uma posição financeira é descrita por um mapeamento $X: \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$, onde $X(\omega)$ é o payoff descontado da posição no final do período de transação se o cenário $\omega \in \Omega$ for realizado. O objetivo é quantificar o risco de X por algum número $\rho(X)$, onde X pertence a uma dada classe χ de posições financeiras. No caso considerado, χ será um espaço linear de funções limitadas contendo as funções constantes. Vale destacar que não suporemos que alguma medida de probabilidade é dada em Ω .

Um mapeamento $\rho: \chi \rightarrow \mathfrak{R}$ é chamado uma medida monetária de risco (MMR) se satisfaz as seguintes condições:

- Monotonicidade: Se $X \leq Y$, então $\rho(X) \geq \rho(Y)$.
- Invariância de Translação: Se $m \in \mathfrak{R}$, então $\rho(X + m) = \rho(X) - m$

Temos as seguintes interpretações financeiras para as duas condições:

- O downside risk de uma posição financeira é reduzido se o perfil de payoffs é aumentado, ou seja, se uma posição Y é maior que outra posição X em todos os estados possíveis, então o risco de Y é menor que o risco de X.
- $\rho(X)$ pode ser interpretado como a quantidade que deve ser acrescida na posição X para torná-la aceitável do ponto de vista de uma agência reguladora, o que é conhecido como requerimento de capital. Desta forma, se m é a quantidade acrescida à posição e investida no ativo livre de risco, o requerimento de capital é reduzido pela mesma quantidade m.

Em particular, invariância de translação implica que $\rho(X + \rho(X)) = 0$ e $\rho(m) = -m$. Logo $\rho(0)=0$.

Para muitos propósitos, podemos assumir sem perda de generalidade que uma dada MMR satisfaz a condição $\rho(0) = 0$, conhecida como normalização⁴.

Um característica muito importante a ser considerada é que toda medida monetária de risco é Lipschitz contínua com respeito à norma $\| \cdot \|$ ⁵:

$$| \rho(X) - \rho(Y) | \leq \| X - Y \|$$

Prova:

Claramente temos que:

$$X \leq Y + \| X - Y \|$$

Assim:

$$\rho(X) \geq \rho(Y + \| X - Y \|)$$

$$\rho(X) \geq \rho(Y) - \| X - Y \|\rho(1)$$

$$\rho(Y) - \rho(X) \leq \| X - Y \|\rho(1)$$

⁴ Estamos utilizando a convenção que X descreve a posição financeira após desconto. O fator de desconto pode ser escolhido como $1/(1+r)$, onde r é o retorno do ativo livre de risco, ou seja, r é a taxa de juros. Assim, poderíamos mensurar o risco da posição total X', ao invés de mensurar o risco da posição descontada X:

$$X' = (1+r)*X$$

⁵ Uma norma em X é denotada por $\| \cdot \|$ e é definida como toda função cujo domínio é X e cujo contra-domínio são os reais não-negativos que satisfaça os seguintes axiomas:

- $\| x \| \geq 0, \forall x \in X$
- $\| x \| = 0 \leftrightarrow x = 0$
- $\| ax \| = |a| \| x \|, \forall x \in X, \forall a \in \mathfrak{R}$
- $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|, \forall x, y \in X$

Analogamente:

$$Y \leq X + \|X - Y\|$$

Assim:

$$\rho(Y) \geq \rho(X + \|X - Y\|)$$

$$\rho(Y) \geq \rho(X) - \|X - Y\|$$

$$\rho(X) - \rho(Y) \leq \|X - Y\|$$

Portanto:

$$|\rho(X) - \rho(Y)| \leq \|X - Y\|$$

└

Uma medida monetária de risco é chamada medida convexa de risco (MRC) se satisfaz:

- Convexidade: $\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y)$, $0 \leq \lambda \leq 1$

Temos a seguinte interpretação financeira para a condição:

- Considere a coleção dos possíveis investimentos que podem ser realizados com o capital disponível pelo investidor. Uma estratégia leva ao perfil de payoffs X e outra estratégia leva ao perfil de payoffs Y . Se outro investidor diversifica seu portfólio, alocando uma fração λ de seus recursos em X e o restante em Y , então ele obtém o perfil de payoffs $\lambda X + (1 - \lambda)Y$. Desta forma, o axioma nos garante que a diversificação não deve aumentar o risco.

Uma medida convexa de risco é chamada de medida coerente de risco (MCR) se satisfaz:

- Homogeneidade Positiva: Se $\lambda \geq 0$, então $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$

Se uma medida monetária de risco é positivamente homogênea, então é normalizada.

Sob a suposição de homogeneidade positiva, convexidade se torna equivalente a:

- Subaditividade: $\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$

A propriedade da subaditividade permite a descentralização da gestão de riscos surgidos de diferentes posições: se os limites de riscos específicos são dados por

diferentes posições, então o risco total é limitado pela soma dos riscos individuais de cada posição.

Desta forma, obtemos as quatro características básicas que qualquer medida de riscos deve apresentar: monotonicidade, invariância sobre translações, homogeneidade positiva e subaditividade (convexidade).

Um medida monetária de risco induz a seguinte classe:

$$A_\rho = \{ X \in \mathcal{X} \mid \rho(X) \leq 0 \}$$

A_ρ é a classe das posições que são aceitas do ponto de vista de uma agência reguladora no sentido que não requerem capital adicional. Esta classe é chamada de conjunto de aceitação de ρ .

Temos que, se ρ é uma medida monetária de risco com conjunto de aceitação $A := A_\rho$, então entre outras propriedades:

1. ρ é uma MCR $\leftrightarrow A$ é um cone convexo.

Prova:

A é um cone se para todo $Z \in A$ e para todo $t \geq 0$ vale que $tZ \in A$.

→

Se $X \in A$ então $\rho(X) \leq 0$

Da homogeneidade positiva temos que dado $t \geq 0$ então $\rho(tX) = t \rho(X) \leq 0$.

Então $tX \in A$. Logo A é um cone.

Como ρ é convexa então A é convexo.

Então A é um cone convexo.

←

A é um cone convexo.

De A ser um cone $\rightarrow \rho$ é positivamente homogêneo.

De A ser convexo $\rightarrow \rho$ é convexo.

Seja $X, Y \in A$. Se $X \leq Y$ então $\rho(X) \leq \rho(Y)$. Como $\rho(X) \leq 0$ e $\rho(Y) \leq 0$ então $\rho(X) \geq \rho(Y)$.

Seja $X \in A$. Então $\rho(X) \leq 0$, $\rho(X + m) \leq 0$, $\rho(X) - m \leq 0$.

└

2.2 – Preferências e Medidas Coerentes de Risco

Os quatro axiomas apresentados na seção anterior surgiram através de observações do comportamento dos investidores, levando em consideração a teoria das preferências.

Seja χ um conjunto não vazio. Um elemento $x \in \chi$ será interpretado como uma possível escolha de um agente econômico. Se duas escolhas $x, y \in \chi$ forem apresentadas, o agente pode preferir uma a outra. Assim, uma ordem de preferência em χ é uma relação binária \succ com as seguintes propriedades:

1. Assimetria: Se $x \succ y$ então $y \not\succeq x$
2. Negativamente transitiva: Se $x \succ y$ e $z \in \chi$ então ou $x \succ z$, ou $y \succ z$, ou ambos.

Um ordem de preferência em χ induz à seguinte ordem de preferência fraca:

$$x \geq y \leftrightarrow y \not\succeq x$$

Também é induzida um relação de indiferença:

$$x \sim y \leftrightarrow x \geq y \text{ e } y \geq x$$

Uma representação numérica para a ordem de preferência é um funcional $U: \chi \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que:

$$x \succ y \leftrightarrow U(x) > U(y)$$

Claramente, quando \geq é assimétrica:

$$x \geq y \leftrightarrow U(x) \geq U(y)$$

Vale observar que a representação numérica U não é única.

Suponha que cada escolha possível para o agente econômico corresponda a uma distribuição de probabilidade em um dado conjunto de cenários. Então o conjunto χ pode ser identificado como um subconjunto M do conjunto $M_1(S)$ de todas as distribuições de probabilidade em um espaço mensurável (S) . No contexto da teoria da escolha, os elementos de M são chamados de loterias. Vamos assumir que M é convexo.

Uma representação numérica U para uma ordem de preferência \succ em M é chamada uma representação von Neumann-Morgenstern se é da forma:

$$U(\mu) = \int u(x)\mu(dx) \forall \mu \in M$$

onde u é uma função real em S .

Uma relação de preferência \succ em M satisfaz o axioma da independência se, para todo $\mu, \nu \in M$, a relação $\mu \succ \nu$ implica:

$$a\mu + (1-a)\lambda \succ a\nu + (1-a)\lambda \text{ para todo } \lambda \in M \text{ e todo } a \in (0, 1]$$

Fixando um ponto $x_0 \in S$ e denotando a bola fechada de raio r centrada em x_0 por $B_r(x_0)$, o espaço de medidas com suporte limitado em S é dado por:

$$M_b(S) := \bigcup_{r>0} M_1(B_r(x_0)) = \left\{ \mu \in M_1(S) \mid \mu(B_r(x_0)) = 1 \text{ para algum } r \geq 0 \right\}$$

Assim, seja \succ uma ordem de preferência em $M_b(S)$ cuja restrição para cada espaço $M_1(B_r(x_0))$ é contínua com respeito à topologia fraca. Se \succ satisfaz o axioma da independência, então existe uma representação de von Neumann-Morgenstern:

$$U(\mu) = \int u(x)\mu(dx)$$

com uma função contínua $u: S \rightarrow \mathfrak{R}$. Ainda, U e u são únicos quanto a transformações afins^{6[11]}.

A relação de preferência \succ em $M_b(\mathfrak{R})$ satisfaz o teorema acima e obtemos a existência de uma função contínua $u: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que

$$\tilde{u}(\mu) := \int u(x)\mu(dx)$$

é uma representação numérica de \succ no conjunto $M_b(\mathfrak{R})$. Ainda, temos que existe uma extensão única \tilde{U} do funcional \tilde{u} acima como representação numérica de \succ em $\tilde{\chi}$ ^{7[11]}.

Assim, temos a indução da representação numérica U de \succ em χ dada por:

$$U(X) := \tilde{U}(\delta_X)^{[11]}$$

Seja o funcional u e a representação numérica U em χ dados acima. Existe um único funcional $J: \chi \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que:

$$U(X) = J(u(X)), \text{ para todo } X \in \chi$$

tal que as seguintes quatro propriedades são satisfeitas^[11]:

1. Monotonicidade: Se $Y(\omega) \geq X(\omega)$ para todo ω , então $J(Y) \geq J(X)$
2. Concavidade: Se $\lambda \in [0,1]$ então $J(\lambda X + (1-\lambda)Y) \geq \lambda J(X) + (1-\lambda)J(Y)$
3. Homogeneidade positiva: $J(\lambda X) = \lambda J(X)$, para todo $\lambda \geq 0$
4. Invariância de translação: $J(X+m) = J(X) + m$, para todo $m \in \mathfrak{R}$.

Mais ainda, qualquer funcional J com essas quatro propriedades é Lipschitz contínua em χ com respeito à norma $\| \cdot \|$, ou seja:

⁶ Qualquer representação de von Neumann-Morgenstern U é afim em M se:

$$U(a\mu + (1-a)\nu) = aU(\mu) + (1-a)U(\nu) \text{ para todo } \mu, \nu \in M$$

⁷ $\tilde{\chi}$ é definido como o conjunto convexo de todos os núcleos estocásticos $X^\sim(w, dy)$ de (Ω, \mathcal{F}) em \mathfrak{R} para o qual existe uma constante $c \geq 0$ tal que $X^\sim(w, [-c, c]) = 1$ para todo $w \in \Omega$. O espaço χ pode ser acrescentado dentro de $\tilde{\chi}$ através do mapeamento $X \in \chi \rightarrow \delta_X \in \tilde{\chi}$.

$$|J(X) - J(Y)| \leq \|X - Y\|, \text{ para todo } X, Y \in \chi^{[11]}$$

Podemos perceber que, pela teoria da preferência, existe um funcional com as características necessárias para que uma medida de riscos seja coerente, porém com sinais invertidos. Isto ocorre pois, na teoria da preferência estamos considerando a situação inversa àquela considerada na medida de riscos. Isso fica claro ao analisarmos cada uma das propriedades)

1. Se $X \geq Y$ em todos os estados possíveis então X é preferível a Y e, conseqüentemente, o risco de X deve ser menor que o risco de Y .
2. A diversificação aumenta a preferência e, conseqüentemente, diminui o risco, ou seja, a preferência nos dá um conjunto côncavo, enquanto as medidas de risco nos fornecem conjuntos convexos.
3. A homogeneidade positiva é igual em ambos os casos.
4. O acréscimo de m unidades monetárias em X aumenta a preferência a X da mesma quantidade m e, conseqüentemente, diminui o risco de X em m unidades.

Desta forma, se conseguirmos uma representação para este funcional J através da teoria da preferência, automaticamente temos uma representação para o funcional ρ , nossa medida coerente de risco.

Um funcional $J: \chi \rightarrow \mathfrak{R}$ é monótono, côncavo, positivamente homogêneo e invariante a translações se, e somente se, existir um conjunto $Q \subset M_1$ tal que:

$$J(X) = \text{INF}_{q \in Q} \{E_q[X]\}, X \in \chi^8$$

De posse do funcional J acima, podemos construir o funcional ρ , uma medida coerente de risco.

Considere a situação onde χ consiste de todas as funções mensuráveis e limitadas no espaço mensurável (Ω, \mathcal{F}) . Denote por $M_1 = M_1(\Omega, \mathcal{F})$ o conjunto de todas as medidas de probabilidade em (Ω, \mathcal{F}) e por $M_{1,f} = M_{1,f}(\Omega, \mathcal{F})$ o conjunto de todas as funções finitas e aditivas $q: \mathcal{F} \rightarrow [0,1]$ normalizadas para $q[\Omega]=1$. Vale notar que não foi assumido que uma medida de probabilidade em (Ω, \mathcal{F}) é dada a priori.

Se ρ é uma medida coerente de risco em χ então o funcional J definido por $\rho(X)$ é monótono, côncavo, positivamente homogêneo e invariante a translações. Ou seja, um funcional $\rho: \chi \rightarrow \mathfrak{R}$ é uma medida coerente de risco se, e somente se, existe um subconjunto Q de $M_{1,f}$ tal que:

$$\rho(X) = - \text{INF}_{q \in Q} \{E_q[X]\} = \text{SUP}_{q \in Q} \{E_q[-X]\}, X \in \chi \quad (1)$$

⁸ Teorema de “Gilboa & Schmeidler”, 1989

A representação (1) apresenta uma interpretação econômica direta: temos uma família Q de cenários probabilísticos; sobre cada cenário calculamos a posição financeira média (P&L); pegamos então o pior caso.

Iremos demonstrar a necessidade de (1). A suficiência será demonstrada no apêndice I.

Prova:

1 –

Seja $X \leq Y$

$$\text{Como } X \leq Y \rightarrow E_q[X] \leq E_q[Y] \rightarrow \text{INF}_{q \in Q}\{E_q[X]\} \leq \text{INF}_{q \in Q}\{E_q[Y]\}$$

$$\rightarrow -\text{INF}_{q \in Q}\{E_q[X]\} \geq -\text{INF}_{q \in Q}\{E_q[Y]\} \rightarrow \rho(X) \geq \rho(Y)$$

\rightarrow *Monotonicidade*

2 –

Seja $m \in \mathcal{R}$

$$\rho(X+m) = -\text{INF}_{q \in Q}\{E_q[X+m]\} = -\text{INF}_{q \in Q}\{E_q[X]+m\} = -\text{INF}_{q \in Q}\{E_q[X]\} - m = \rho(X) - m$$

\rightarrow *Invariância de Translações*

3 –

Seja $\lambda \geq 0$

$$\rho(\lambda X) = -\text{INF}_{q \in Q}\{E_q[\lambda X]\} = -\text{INF}_{q \in Q}\{\lambda E_q[X]\} = \lambda[-\text{INF}_{q \in Q}\{E_q[X]\}] = \lambda\rho(X)$$

\rightarrow *Homogeneidade Positiva*

4 –

$$\rho(X+Y) = -\text{INF}_{q \in Q}\{E_q[X+Y]\} = -\text{INF}_{q \in Q}\{E_q[X]+E_q[Y]\} \leq -\text{INF}_{q \in Q}\{E_q[X]\} - \text{INF}_{q \in Q}\{E_q[Y]\} = \rho(X) + \rho(Y)$$

\rightarrow *Subaditividade*

⊥

A noção de medidas coerentes de risco é muito conveniente teoricamente, porém, quando aplicada na prática surge o seguinte problema: como estimar (1) empiricamente?

Obviamente a representação (1) não pode ser usada em cálculos práticos pois não temos como avaliar a média de todas as posições financeiras possíveis em cada cenário macroeconômico.

Desta forma, para propósitos práticos é necessário selecionar uma subclasse de medidas coerentes de risco que admitam um procedimento de estimação viável.

A próxima seção é dedicada ao Value-at-Risk e à demonstração de sua falta de coerência.

3 – Value-at-Risk

Uma abordagem comum ao problema de mensurar o risco de uma posição financeira X consiste em especificar um quantil da distribuição de X sobre a medida de probabilidade P . Para $\lambda \in (0,1)$, um λ -quantil de uma variável aleatória X em (Ω, F, P) é qualquer número real q com as propriedades:

$$P[X \leq q] \geq \lambda \text{ e } P[X < q] \leq \lambda$$

e o conjunto de todos os λ -quantis de X está em um intervalo $[q_X^-(\lambda), q_X^+(\lambda)]$, onde:

$$q_X^-(t) = \sup\{x \mid P[X < x] < t\} = \inf\{x \mid P[X \leq x] \geq t\}$$

é o quantil inferior de X e

$$q_X^+(t) = \inf\{x \mid P[X \leq x] > t\} = \sup\{x \mid P[X < x] \leq t\}$$

é o quantil superior de X .

O Value-at-Risk (VaR) é uma medida baseada em um determinado quantil da distribuição de X . Assim, fixado um nível $\lambda \in (0,1)$, definimos matematicamente o VaR ao nível λ como:

$$\text{VaR}_\lambda(X) = -q_X^-(\lambda) = q_{-X}^-(1-\lambda) = \inf\{m \mid P[X + m < 0] \leq \lambda\} \quad (2)$$

Em termos financeiros, $\text{VaR}_\lambda(X)$ é a menor quantia de capital que, se adicionada a X e investida no ativo livre de risco, mantém a probabilidade de perda abaixo do nível λ . O VaR é uma das formas mais conhecidas e utilizadas na prática para a mensuração do risco de uma posição financeira.

O VaR nos fornece uma medida da maior (ou pior) perda esperada em uma posição financeira para um determinado período de tempo e um intervalo de confiança previamente especificado.

Por exemplo, uma carteira cujo VaR fosse medido como R\$10 milhões para um horizonte de tempo de um dia com um intervalo de confiança de 95%, tem a probabilidade de 5% de sofrer uma perda superior a esses R\$10 milhões em um dia; ou ainda que um a cada vinte dias tenha uma perda maior que R\$10 milhões; ou que, com 95% de confiança, a perda não será superior a R\$10 milhões em um dia.

Uma vantagem apresentada pelo VaR perante as outras técnicas de medida de riscos de mercado é que o mesmo consegue quantificar em um único número a exposição total de uma instituição, financeira ou não, a esses riscos.

Para realizar corretamente o cálculo, deve-se supor que a carteira a ser analisada é “congelada” no horizonte de tempo especificado. Isto quer dizer que o perfil de risco

da mesma permanece constante. Além disso o VaR supõe que a carteira será marcada a mercado ao final desse mesmo período.

Feitas as considerações iniciais, pode-se resumir o cálculo do VaR de uma carteira em cinco etapas:

- Marcar a carteira a mercado;
- Medir as volatilidades e covariâncias dos fatores de risco dessa carteira;
- Determinar o horizonte de tempo para a análise;
- Determinar o nível de confiança a ser considerado;
- Reportar o quantil (VaR)

Deve ser destacado que o valor encontrado como medida de risco pode ser denotado de diversas maneiras, dependendo dos intervalos de tempo e de confiança considerados na análise.

Apesar da vantagem apresentada acima, o VaR apresenta duas falhas. A primeira é que o VaR controla a probabilidade de uma perda ocorrer, mas não captura a magnitude de tal perda se a mesma ocorrer. Obviamente que o tamanho da perda deve ser levada em consideração.

A segunda falha é a falta de coerência do VaR.

3.1 – Falta de Coerência do VaR

De sua definição, temos que o VaR é uma medida baseada em um determinado quantil. Vamos então, demonstrar a homogeneidade positiva, a invariância de translação e a monotonicidade para o λ -quantil.

Para isso, vamos definir o λ -quantil de X da seguinte forma:

$$P[X \leq q_x] = \lambda$$

Considere h uma função crescente. Então:

$$P[h(X) \leq h(q_x)] = \lambda$$

Assim, o λ -quantil $q_{h(x)}$ da variável aleatória $h(X)$ é definido implicitamente por:

$$P[h(X) \leq q_{h(x)}] = \lambda$$

Como os resultados acima valem para qualquer λ obtemos o resultado geral para qualquer função crescente:

$$q_{h(x)}(\lambda) = h(q_x(\lambda))$$

Como um caso especial, considere $h(X) = SX$, onde $S > 0$. Então:

$$q_{sX}(\lambda) = s q_X(\lambda)$$

Outro caso especial, considere $h(X)=X+S$. Então:

$$q_{S+X}(\lambda) = q_X(\lambda) + s$$

Finalmente, considere $h(X)=X+g(X)$, onde g é uma função crescente:

$$q_{X+g(X)}(\lambda) = q_X(\lambda) + g(q_X(\lambda)) = q_X(\lambda) + q_{g(X)}(\lambda)$$

Assim, temos que:

1. $q_\lambda(SX) = Sq_\lambda(X)$, para $S \geq 0 \rightarrow$ Homogeneidade Positiva;
2. $q_\lambda(X + m) = q_\lambda(X) + m \rightarrow$ Invariância de Translação;
3. $q_\lambda(X + Y) = q_\lambda(X) + q_\lambda(Y) \rightarrow$ Monotonicidade.

Vale destacar que qualquer medida baseada em quantis satisfaz as três propriedades acima. Assim, vamos demonstrá-las para o VaR.

Prova:

Da definição de VaR, temos que:

$$VaR_\lambda(X) = -q_X^+(\lambda)$$

Seja $S \geq 0$.

$$VaR_\lambda(SX) = -q_{SX}^+(\lambda) = -Sq_X^+(\lambda) = S(-q_X^+(\lambda)) = SVaR_\lambda(X)$$

\rightarrow Homogeneidade Positiva

Seja $m \in \mathfrak{R}$.

$$VaR_\lambda(X + m) = -q_{X+m}^+(\lambda) = -(q_X^+(\lambda) + m) = -q_X^+(\lambda) - m = VaR_\lambda(X) - m$$

\rightarrow Invariância de Translação

Seja $X \leq Y$.

$$VaR_\lambda(X) = -q_X^+(\lambda) \text{ e } VaR_\lambda(Y) = -q_Y^+(\lambda)$$

$$\text{Como } X \leq Y \rightarrow q_X^+(\lambda) \leq q_Y^+(\lambda) \rightarrow -q_X^+(\lambda) \geq -q_Y^+(\lambda) \rightarrow VaR_\lambda(X) \geq VaR_\lambda(Y)$$

\rightarrow Monotonicidade

└

Como demonstrado acima, o VaR apresenta as três primeiras propriedades que qualquer medida de riscos deve apresentar. Porém é possível demonstrar que o VaR não satisfaz sempre a subaditividade, ou seja, é possível encontrar portfólios cuja soma do VaR de cada componente é menor que o VaR total da carteira em questão. Em outras

palavras, é possível encontrar exemplos em que o VaR penaliza a diversificação, o que é inviável do ponto de vista da teoria das preferências.

Para mostramos a falta de subaditividade, considere o exemplo a seguir:

Exemplo:

Considere um investimento em dois bonds corporativos que podem ocorrer default, cada um com retorno $r' > r$. Onde $r \geq 0$ é o retorno do ativo livre de risco.

O ganho descontado de um investimento $w > 0$ no i -ésimo bond é dado por:

$$X_i = \begin{cases} -w, & \text{default} \\ \frac{w(r'-r)}{1+r}, & \text{cc} \end{cases}$$

Se o default do primeiro bond ocorre com probabilidade $p \leq \lambda$ então:

$$P[X_1 - \frac{w(r'-r)}{1+r} < 0] = P[\text{Primeiro bond default}] = p \leq \lambda$$

Assim, pela definição do VaR (2) temos:

$$\text{VaR}_\lambda(X) = \inf \{m \mid P[X + m < 0] \leq \lambda\} = - \frac{w(r'-r)}{1+r}$$

Isso significa que a posição X_1 é aceitável, no sentido que não possui um VaR positivo, apesar de existir uma probabilidade de perda total de w .

Considere agora um portfólio Y diversificado investindo $w/2$ em cada um dos bonds.

Temos então que $Y = (X_1 + X_2)/2$.

Vamos supor que o default dos dois bonds são eventos independentes, cada um com probabilidade p .

Para um r' realista, a probabilidade de Y ser negativo é igual à probabilidade de ao menos um dos dois bonds dar default:

$$P[Y < 0] = p(2-p)$$

Se, por exemplo, $p = 0.009$ e $\lambda = 0.01$ temos então que $p < \lambda < p(2-p)$.

Nesse caso:

$$Y = \begin{cases} -w, & 2\text{default} \\ \frac{w}{2} \left(\frac{r'-r}{1+r} \right) - \frac{w}{2}, & 1\text{default} \\ \frac{w}{s} \left(\frac{r'-r}{1+r} \right), & \text{cc} \end{cases}$$

Assim, pela definição do VaR (2) temos:

$$VaR_\lambda(X) = \inf \{m / P[X + m < 0] \leq \lambda\} = \frac{w}{2} - \frac{w}{2} \left(\frac{r' - r}{1 + r} \right) > 0$$

Ou seja: $VaR_\lambda(X_1) < VaR_\lambda(Y)$.

└

O exemplo acima é um contra exemplo que nos mostra a falta de subaditividade do VaR. Ainda, o exemplo nos mostra que o VaR pode desencorajar a diversificação, ou seja, ele penaliza drasticamente o aumento da probabilidade de problemas, sem considerar a redução de perda esperada condicional.

Assim, otimizar um portfólio com respeito ao VaR pode levar à concentração da carteira em um único ativo, ou um grupo pequeno de ativos, com uma probabilidade pequena de problemas, mas com uma grande exposição a perdas elevadas.

Um exemplo no qual o VaR apresenta a subaditividade e, portanto, é coerente, é o caso onde os retornos são normalmente distribuídos. Neste caso:

$$VaR_\lambda(X + Y) \leq VaR_\lambda(X) + VaR_\lambda(Y) \quad [16]$$

Porem, para variáveis aleatórias gerais, este não é o caso.

Ainda, no caso dos retornos gaussianos, o VaR é um múltiplo direto da variância dos retornos.

3.2 – VaR de Carteira – Modelo Delta-Normal

Vimos acima que quando os retornos são normalmente distribuídos o VaR é uma medida de risco coerente e é um múltiplo direto da variância desses retornos. De posse desses fatos, é possível encontrar uma fórmula fechada para o cálculo do VaR de uma carteira de ativos.

Uma carteira pode ser caracterizada por posições em certo número de fatores de risco, determinados em uma moeda base. Se a posição permanecer fixa durante o intervalo de tempo especificado, a taxa de retorno da carteira é uma combinação linear dos retornos dos ativos subjacentes, cujos pesos são dados pelos valores relativos investidos no início do período. Logo, o VaR de uma carteira pode ser calculado a partir de uma combinação dos riscos dos ativos subjacentes.

O retorno da carteira de t a t+1 é definido como:

$$R_{p,t+1} = \sum_{i=1}^N w_i R_{i,t+1}$$

Onde N é o número de ativos, $R_{i,t+1}$ é a taxa de retorno do ativo i ⁹ e w_i seu peso na carteira. Os pesos são determinados de tal modo que a soma deles seja 1. Em notação matricial temos:

$$R_p = w' R$$

Onde w' representa o vetor dos pesos e R o vetor que contém os retornos individuais dos ativos.

O retorno esperado da carteira é dado por:

$$E[R_p] = \mu_p = \sum_{i=1}^N w_i \mu_i$$

E sua variância, em notação matricial:

$$\sigma_p^2 = \begin{bmatrix} w_1 & \dots & w_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \dots & \sigma_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \cdot \\ w_N \end{bmatrix}$$

Definindo-se a matriz de covariância como Σ , a variância da taxa de retorno da carteira pode ser escrita de forma compacta como:

$$\sigma_p^2 = w' \Sigma w$$

No modelo conhecido como delta-normal, supõe-se que o vetor de retornos de ativos é normalmente distribuído. Nesse caso, pode-se transformar o nível de confiança c num desvio da distribuição normal padrão α tal que a probabilidade de observar uma perda pior que $-\alpha$ seja c . Definindo-se W como o valor inicial da carteira, o VaR será dado então por:

$$\text{VaR}_p = \alpha \sigma_p W = \alpha \sqrt{w' \Sigma w} W$$

A equação nos mostra que o VaR da carteira depende das variâncias, das covariâncias e do número de ativos.

Quando a quantidade de ativos é grande a estimação da matriz de covariância torna-se complexa. A quantidade de correlações aumenta geometricamente com a quantidade de ativos e para carteiras grandes isso causa sérios problemas.

Na prática, é rotineiro mapear os ativos em fatores de risco gerais. Esses procedimentos de mapeamento substituem o perfil de exposição de um ativo por um perfil de índices apropriadamente escolhidos. Estes são chamados de riscos gerais de

⁹ $R_{i,t+1} = \frac{P_{i,t+1} - P_{i,t}}{P_{i,t}}$, onde P_i é o preço do ativo i .

mercado. O mapeamento em fatores de risco reduz os requisitos computacionais quando há um grande número de posições.

Assim, sendo x um vetor de posições equivalentes nos fatores primitivos de risco e Σ a matriz de covariância desses fatores, o VaR da carteira pode ser calculado por:

$$\text{VaR}_p = \alpha \sqrt{x' \Sigma x}$$

Alternativamente, a matriz de covariância pode ser representada em termos da matriz de correlação C e das volatilidades individuais σ :

$$\Sigma = S' C S$$

Onde S é uma matriz com as volatilidades em sua diagonal principal e zeros fora dela. Se o fator de risco for então mensurado diretamente com o vetor $V = (\alpha \sigma)$, o VaR é calculado da seguinte forma:

$$\text{VaR}_p = \sqrt{(x \times V)' C (x \times V)} \quad (3)$$

Na prática, as variâncias são modeladas através do modelo EWMA (Exponencial Weighted Moving Average). Formalmente, a previsão para o instante t é a média ponderada da previsão anterior, à qual se atribui peso λ , e a do quadrado da última inovação, à qual se atribui peso $(1 - \lambda)$:

$$\sigma_t = \lambda \sigma_{t-1} + (1 - \lambda) R_{t-1}^2$$

Aqui o parâmetro λ é denominado fator de decaimento, que deve ser menor que 1. O modelo exponencial atribui pesos que declinam geometricamente conforme se recua no tempo, dando assim mais importância às observações recentes.

As covariâncias são estimadas de forma bem semelhante às variâncias, com uma ponderação exponencial:

$$\sigma_{12,t} = \lambda \sigma_{12,t-1} + (1 - \lambda) R_{1,t-1} R_{2,t-1}$$

A correlação condicional é, então:

$$\rho_{12,t} = \frac{\sigma_{12,t-1}}{\sqrt{\sigma_{1,t-1} \sigma_{2,t-1}}}$$

O caso especificado acima, onde supomos a normalidade dos retornos, é conhecido como modelo de avaliação local.

Para casos mais gerais não é possível encontramos fórmulas fechadas e, para estimarmos o VaR, devemos utilizar técnicas de simulação, tais como a Simulação de Monte Carlo. Nesse caso, o modelo é conhecido como modelo de avaliação plena. Esse é o caso, por exemplo, quando uma carteira é composta por um número significativo de

ativos não lineares, como opções. A Simulação de Monte Carlo para a estimação do VaR de uma carteira será detalhada no capítulo 5.

4 – Medidas Coerentes de Risco

Conforme visto no capítulo anterior o Value-at-Risk, em geral, não é uma medida de riscos coerente.

Desta forma, torna-se necessária a estimação do risco de uma posição financeira X através de medidas que apresentem as características desejadas.

Neste capítulo serão apresentadas duas medidas coerentes de risco para a solução dos problemas do VaR: Expected Shortfall e VaR Espectral.

4.1 – Expected Shortfall

O Expected Shortfall (ES), também conhecido como Average-VaR, Conditional-VaR ou Tail-VaR, é uma medida de riscos definida em termos do VaR.

Além de ser uma medida coerente de riscos, conforme será demonstrado, o ES também cobre uma outra falha do VaR, pois sabemos que VaR controla a probabilidade de uma perda ocorrer, mas não captura a magnitude de tal perda se a mesma ocorrer.

O Expected Shortfall de nível $\lambda \in (0,1]$ de uma posição financeira $X \in \mathcal{X}$ é dado por:

$$ES_{\lambda}(X) = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} VaR_{\gamma}(X) d\gamma$$

Desta forma, podemos notar que:

$$ES_{\lambda}(X) = -\frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} q_X(t) dt$$

Temos que λ é um parâmetro de aversão ao risco, no sentido de quanto maior o λ menor o risco incorrido.

Prova:

Seja $\lambda' \leq \lambda \rightarrow ES_{\lambda'}(X) \geq ES_{\lambda}(X)$

Ou seja, λ é um parâmetro que controla a aversão ao risco.

└

Uma outra representação para o ES é dada por:

$$ES_{\lambda}(X) = E[-X \mid -X \geq VaR_{\lambda}(X)]$$

Da definição acima, podemos perceber que $ES_{\lambda}(X) \geq VaR_{\lambda}(X)$.

A vantagem do ES é que o mesmo leva em consideração o peso da cauda inferior. Ainda, o ES corrige a primeira falha do VaR, ou seja, ele leva em consideração o tamanho da perda, em média, e não apenas a probabilidade da perda ocorrer.

4.1.1 – Coerência do ES_λ

A construção do ES é motivada pela consideração da necessidade de se medir o risco na cauda esquerda da distribuição de X, onde riscos mais severos que o VaR podem ocorrer. Porém, é possível demonstrar que o Expected Shortfall também é uma medida de riscos coerente, ou seja, satisfaz os quatro axiomas básicos das medidas de risco.

Prova:

Considere a seguinte definição do ES:

$$ES_\lambda(X) = -\frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda q_X(t) dt$$

1-

$$ES_\lambda(SX) = -\frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda q_{SX}(t) dt = -\frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda S q_X(t) dt = S \left(-\frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda q_X(t) dt \right) = S ES_\lambda(X)$$

\rightarrow Homogeneidade Positiva

2-

$$ES_\lambda(X+m) = -\frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda q_{X+m}(t) dt = -\frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda (q_X(t) + m) dt = -\frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda q_X(t) dt - \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda m dt$$

$$ES_\lambda(X+m) = ES_\lambda(X) - \frac{\lambda m}{\lambda} = ES_\lambda(X) - m$$

\rightarrow Invariância de Translações

3 -

Seja $X \leq Y$

$$ES_\lambda(X) = -\frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda q_X(t) dt \text{ e } ES_\lambda(Y) = -\frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda q_Y(t) dt$$

Como $X \leq Y \rightarrow q_X(t) \leq q_Y(t) \rightarrow -q_X(t) \geq -q_Y(t)$

Ou seja: $ES_{\lambda}(X) \geq ES_{\lambda}(Y)$

→ *Monotonicidade*

4-

Considere a seguinte definição do ES:

$$ES_{\lambda}(X) = -\frac{1}{\lambda} E[X * I_{\{X \leq q_{\lambda}\}}]$$

$$\text{Onde } I_A(\lambda) = \begin{cases} 1, \lambda \in A \\ 0, \lambda \notin A \end{cases}$$

Definimos $Z = X+Y$, onde X e Y são duas variáveis aleatórias.

Ainda, $E[I_{\{X \leq q_{\lambda}\}}] = \lambda$.

Assim:

$$\lambda\{ES_{\lambda}(X) + ES_{\lambda}(Y) - ES_{\lambda}(Z)\} = E[Z * I_{\{Z \leq q_{\lambda}\}} - X * I_{\{X \leq q_{\lambda}\}} - Y * I_{\{Y \leq q_{\lambda}\}}] =$$

$$E[X * I_{\{Z \leq q_{\lambda}\}} + Y * I_{\{Z \leq q_{\lambda}\}} - X * I_{\{X \leq q_{\lambda}\}} - Y * I_{\{Y \leq q_{\lambda}\}}] =$$

$$E[X * (I_{\{Z \leq q_{\lambda}\}} - I_{\{X \leq q_{\lambda}\}}) + Y * (I_{\{Z \leq q_{\lambda}\}} - I_{\{Y \leq q_{\lambda}\}})] \geq q_{\lambda} * E[I_{\{Z \leq q_{\lambda}\}} - I_{\{X \leq q_{\lambda}\}}] + q_{\lambda} * E[I_{\{Z \leq q_{\lambda}\}} - I_{\{Y \leq q_{\lambda}\}}]$$

$$= q_{\lambda}(\lambda - \lambda) + q_{\lambda}(\lambda - \lambda) = 0$$

$$ES_{\lambda}(X) + ES_{\lambda}(Y) \geq ES_{\lambda}(Z) \rightarrow ES_{\lambda}(X) + ES_{\lambda}(Y) \geq ES_{\lambda}(X+Y)$$

→ *Subaditividade*

⊥

Portanto, temos que o ES é uma medida coerente de risco.

Ainda, uma medida monetária de risco ρ em $\chi = L^{\infty}(\Omega, F, P)$ é chamada invariante de distribuição se $\rho(X) = \rho(Y)$ quando X e Y têm a mesma distribuição sobre P . É possível demonstrar que o ES_{λ} é a menor medida coerente de risco invariante de distribuição que domina o VaR_{λ} ^[19].

No exemplo a seguir, será explorada a coerência do ES contra a falta de coerência do VaR.

Exemplo:

Considere um bond arriscado lançado por A e suponha que, na ausência de default, ele paga no vencimento um coupon de \$8 mais o notional de \$100. Suponha também que há 2% de probabilidade de ocorrer default apenas do coupon e 3% de probabilidade de ocorrer default tanto do coupon quanto do notional.

Suponha também que exista um segundo bond lançado por B que é idêntico ao anterior. Vamos supor que os defaults de A e B são mutuamente exclusivos, ou seja, se A der default então B não dá default, e vice-versa¹⁰.

O valor do bond é \$104.6 e os dados no vencimento para ambos os bonds e para um portfólio constituído pela soma deles são mostrados na tabela abaixo:

Evento	Prob.	Payoff			Perdas e Ganhos		
		A	B	A+B	A	B	A+B
Default total B	3%	108	0	108	3.4	-104.6	-101.2
Default coupon B	2%	108	100	208	3.4	-4.6	-1.2
Default total A	3%	0	108	108	-104.6	3.4	-101.2
Default coupon A	2%	100	108	208	-4.6	3.4	-1.2
Sem default	90%	108	108	216	3.4	3.4	6.4

Os riscos são analisados com $VaR_{5\%}$ e $ES_{5\%}$.

Estamos supondo que os riscos são fortemente não correlacionados, devido aos defaults serem mutuamente exclusivos.

Analisando a tabela temos que os bonds são bons instrumentos de hedge um para o outro e esperamos que a diversificação diminua o risco do portfólio.

1 – Cálculo do VaR:

O VaR é calculado diretamente e nos fornece o melhor dos 5% piores casos:

$$VaR_{5\%}(A) = VaR_{5\%}(B) = 4.6$$

$$VaR_{5\%}(A+B) = 101.2$$

Como podemos perceber:

$$VaR_{5\%}(A) + VaR_{5\%}(B) = 9.2 < 101.2 = VaR_{5\%}(A+B)$$

2 – Cálculo do ES

Para o ES temos a média dos 5% piores casos em cada portfólio:

$$ES_{5\%}(A) = ES_{5\%}(B) = (104.6*3\% + 4.6*2\%) = 64.6$$

$$ES_{5\%}(A+B) = (101.2*5\%)/5\% = 101.2$$

Como podemos perceber:

$$ES_{5\%}(A) + ES_{5\%}(B) = 129.2 > 101.2 = ES_{5\%}(A+B)$$

└

O exemplo acima confirma a coerência do ES contra a falta de coerência do VaR.

¹⁰ Por exemplo, empresas que colocam papel no mercado e são do mesmo nicho onde somente há lugar para um monopólio de médio prazo.

A coerência do ES surge do fato que as superfícies formadas pela medida serão convexas enquanto para o VaR, em geral, este não será o caso. Como veremos com melhor detalhe a seguir.

Considerando o exemplo acima e analisando o risco de um portfólio Π_λ com valor fixo de 104.6 e formado pela combinação linear dos dois bonds:

$$\Pi_\lambda = \lambda * \text{Bond}_A + (1-\lambda) * \text{Bond}_B \text{ com } \lambda \in [0,1]$$

O que temos acima é um problema de alocação de recursos onde, dado um portfólio com valor fixo, devemos encontrar a combinação entre os bonds A e B que minimiza o risco total. O resultado do problema é mostrado na figura abaixo para todo $\lambda \in [0,1]$:

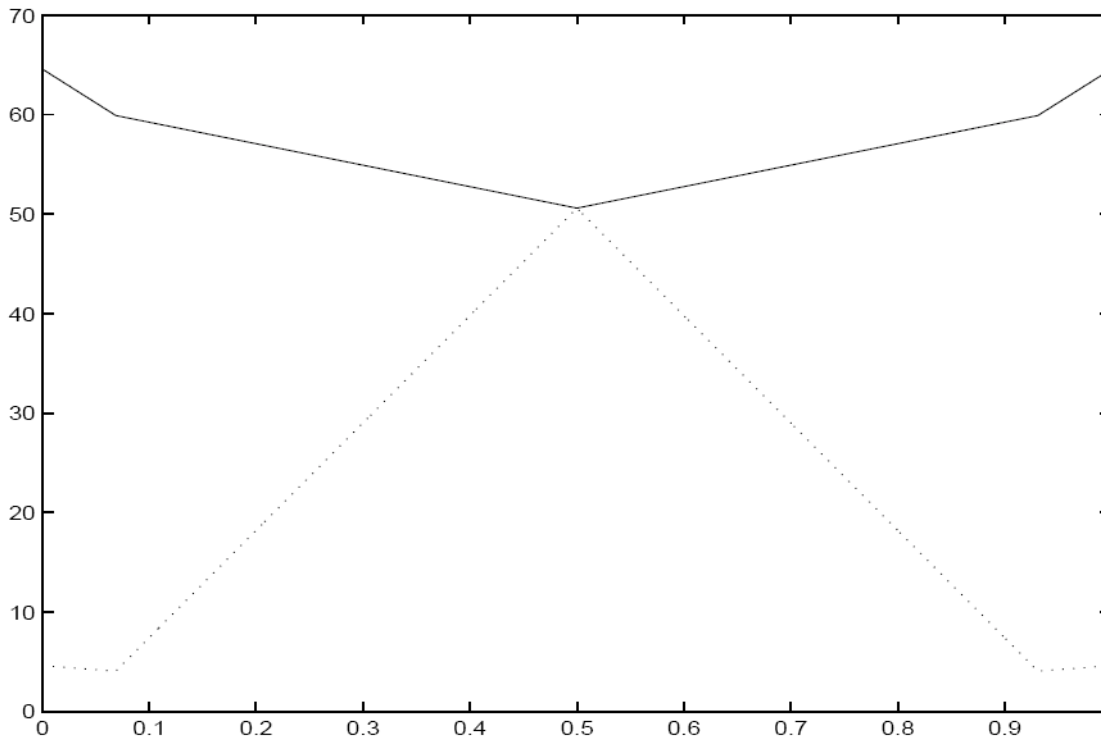


Figura 1 – Superfícies de VaR (linha pontilhada) e ES (linha sólida)

Como podemos perceber, a superfície formada pelo $ES_{5\%}(\Pi_\lambda)$ como função do peso do portfólio (λ) é convexa, o que não é verdade para a superfície formada pelo $VaR_{5\%}(\Pi_\lambda)$.

4.1.2 – ES_λ - Modelo Delta Normal

Analogamente ao VaR, ao supormos que os retornos possuem uma distribuição normal, é possível encontrar uma fórmula fechada para o cálculo do ES de uma carteira de ativos.

Para isso, definimos o ES de uma carteira da seguinte forma:

$$ES_{\lambda}(X) = E[X | X < -VaR_{\lambda}(X)]$$

Estamos supondo que X é um variável aleatória normalmente distribuída com média zero e desvio padrão σ . Desta forma, podemos calcular o valor esperado acima, encontrando uma fórmula fechada para o ES.

Sendo x uma realização da v.a. X, a densidade f(x) e a função acumulada F(x) são dadas por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u)du$$

Desta forma, temos:

$$ES_{\lambda}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x * P[X = x | X < -VaR]dx$$

Pela Regra de Bayes, temos:

$$P[X = x | X < -VaR] = \frac{P[X = x, X < -VaR]}{P[X < -VaR]}$$

Sabemos que λ é o nível de significância para o VaR. Desta forma:

$$P[X = x | X < -VaR] = \frac{p[X = x, X < -VaR]}{\lambda}$$

Assim, substituindo a expressão acima em ES_λ(X) temos:

$$ES_{\lambda}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{P[X = x, X < -VaR]}{\lambda}$$

$$ES_{\lambda}(X) = \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{-VaR} xf(x)dx$$

Substituindo a densidade de X na expressão acima:

$$ES_{\lambda}(X) = \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{-VaR} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

Fazendo uma mudança de variáveis temos:

$$y = \frac{-x^2}{2\sigma^2}$$

$$dy = -\frac{x}{\sigma^2} dx$$

Substituindo a nova variável na expressão do ES temos:

$$ES_{\lambda}(X) = -\frac{\sigma}{\lambda\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-(VaR^2)/2\sigma^2} \exp(y) dy$$

Portanto, resolvendo a integral temos:

$$ES_{\lambda}(X) = -\frac{\sigma}{\lambda\sqrt{2\pi}} * \exp\left(-\frac{VaR^2}{2\sigma^2}\right)$$

Como X é uma v.a. normalmente distribuída, temos que:

$$VaR_{\lambda}(X) = \sigma * Z_{1-\lambda}$$

Onde $Z_{1-\lambda}$ é o $(1-\lambda)$ -quantil da distribuição normal, associado ao nível de significância λ .

Substituindo a expressão do VaR temos, finalmente, o expressão para o ES:

$$ES_{\lambda}(X) = -\sigma \left(\frac{\exp\left(\frac{-(Z_{1-\lambda})^2}{2}\right)}{\lambda\sqrt{2\pi}} \right)$$

Para casos mais gerais não é possível encontramos fórmulas fechadas e, para estimarmos o ES, devemos utilizar técnicas de simulação, tais como a Simulação de Monte Carlo. Esse é o caso, por exemplo, quando uma carteira é composta por um número significativo de ativos não lineares, como opções. A Simulação de Monte Carlo para a estimação do ES de uma carteira será detalhada no capítulo 5.

4.2 – Medidas Espectrais de Risco – Weighted-VaR

Como foi demonstrado na seção anterior, o Expected Shortfall (ES) é uma medida de riscos coerente. Relembrando sua definição temos:

$$ES_{\lambda}(X) = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} VaR_{\gamma}(X) d\gamma$$

Da definição acima, temos que o ES de nível $\lambda \in (0,1]$ nos fornece a perda esperada quando a mesma supera o VaR. Porém, o ES não foi derivado dos axiomas de coerência e sim foi demonstrado que o mesmo apresenta as características necessárias para a coerência, dado o ES a priori.

Analisando a definição acima, podemos pensar no ES de nível $\lambda \in (0,1]$ como uma medida particular de probabilidade que faz a média ponderada das saídas da variável aleatória X que dá peso $d\gamma/\lambda$ aos $100\lambda\%$ piores casos e peso zero aos demais.

Podemos então pensar no ES como um caso particular de uma medida de probabilidade de médias ponderadas mais geral que utiliza uma função peso para cada observação de X . Chamando essa função peso de ϕ , podemos então definir:

$$M_{\phi}(X) = - \int_0^1 \phi(p) q_p(X) dp \quad (4)$$

Onde o funcional $\phi: [0,1] \rightarrow \mathfrak{R}$ nos permite dar diferentes pesos $\phi(p)dp$ para cada possível realização $q_p(X)$.

O funcional ϕ é conhecido como espectro de risco, ou função de aversão ao risco de $M_{\phi}(X)$, no sentido que qualquer investidor racional pode expressar sua aversão ao risco subjetiva escolhendo perfis diferentes para o funcional ϕ . Qualquer escolha para ϕ que atenda às propriedades necessárias para a coerência representará uma atitude legítima frente ao risco. Por este motivo, $M_{\phi}(X)$ é conhecido como medida espectral de risco. Vale notar que, quanto mais massa for colocada na parte esquerda de $[0,1]$ através de ϕ , mais “avesso ao risco” é $M_{\phi}(X)$.

A medida espectral de risco também é conhecida como Weighted-VaR, devido à função peso ϕ .

Temos dois argumentos básicos a favor das medidas espectrais, um financeiro e outro matemático:

1. Financeiro: O ES de ordem λ leva em consideração apenas a λ -cauda da distribuição de X , ou seja, duas distribuições com a mesma λ -cauda serão consideradas da mesma forma pela medida, embora uma delas possa ser melhor que a outra. Por outro lado, se o ponto direito extremo do espectro de risco ϕ for 1, então a medida espectral depende de toda a distribuição de X

2. Matemático: Se o suporte de ϕ é todo o $[0,1]$, então $M_\phi(X)$ possui boas propriedades que o ES não apresenta. Em particular se X e Y não são comonotônicas¹¹ então $M_\phi(X+Y) < M_\phi(X) + M_\phi(Y)$.

É fácil verificar que o ES é um caso particular das medidas espectrais. Para isso, definimos:

$$\phi(p) = \frac{1}{\alpha} \mathbf{I}_{\{p \leq \alpha\}} = \begin{cases} 1/\alpha, & p \leq \alpha \\ 0, & \text{cc} \end{cases}$$

Substituindo $\phi(p)$ acima em $M_\phi(X)$:

$$M_\phi(X) = -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha q_p(X) dp$$

O VaR também pode ser obtido como um caso particular de $M_\phi(X)$, como um caso limite. É fácil verificar esse fato quando pensamos no VaR como uma média particular que atribui toda a massa em uma única realização de X . Desta forma, é necessário a utilização da “função” Delta de Dirac δ como espectro de risco:

$$\phi(p) = \delta(p - \alpha)$$

O Delta de Dirac não é propriamente uma função, e sim uma distribuição de probabilidade degenerada cujo suporte se restringe ao único ponto $p = \alpha$. Uma maneira de visualizar este fato é pensar na função delta como o limite quando $\sigma \rightarrow \infty$ de uma seqüência de gaussianas normalizadas; por isso é comum (embora incorreto do ponto de vista matemático) que se pense nele como uma função que vale 0 fora de p e infinito em p , com integral 1 sobre a reta. Usaremos abaixo a notação correspondente, que pode ser justificada rigorosamente através da teoria de distribuições.

Substituindo $\phi(p)$ acima em $M_\phi(X)$:

$$M_\phi(X) = -\int_0^1 \delta(p - \alpha) q_p(X) dp = \text{VaR}_\alpha(X)$$

Na figura 2, temos a construção da função Delta de Dirac $\phi(p) = \delta(p - 0.5)$ como o limite de funções de distribuição de probabilidade de gaussianas para $\sigma \rightarrow \infty$. A função também é o espectro de risco de $\text{VaR}_\alpha(X)$ para um nível de confiança $\alpha = 50\%$.

¹¹ Quando as v.a's X e Y são comonotônicas Y é quase certamente uma função crescente de X .

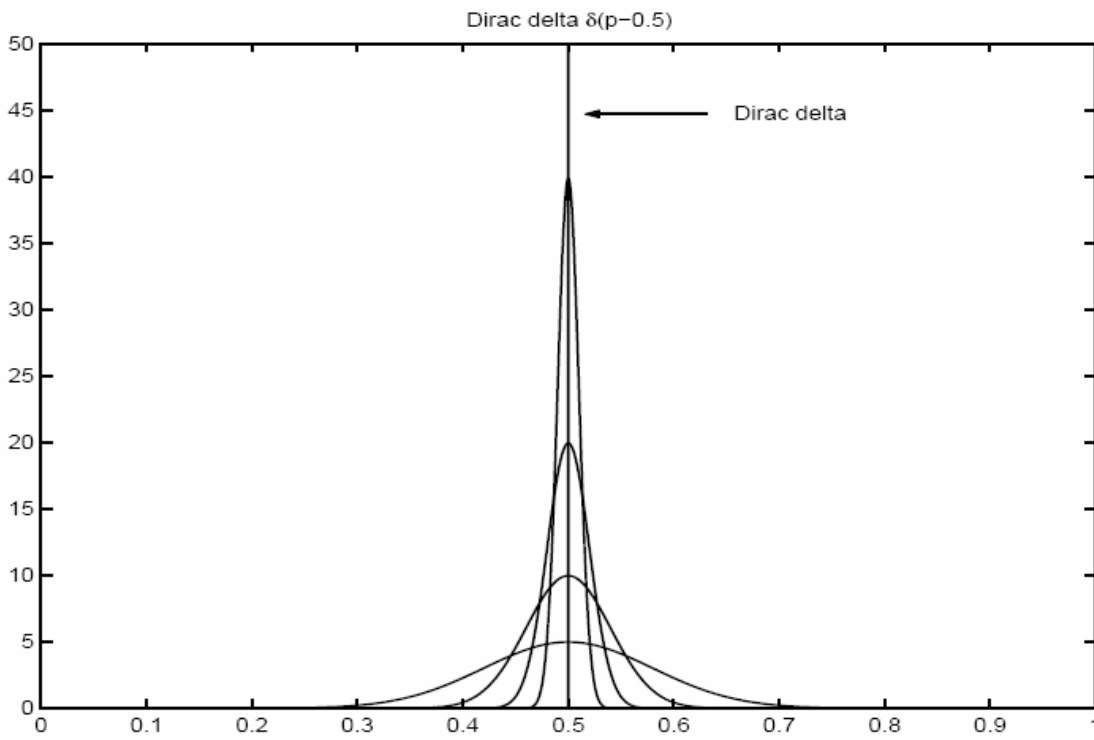


Figura 2

Desta forma, podemos perceber que $M_\phi(X)$ nos fornece tanto medidas coerentes quanto medidas não coerentes de risco, dependendo da escolha do espectro de risco ϕ . Assim, a coerência de $M_\phi(X)$ depende da escolha de ϕ , que deve atender uma série de propriedades que irão garantir a construção de medidas coerentes.

Para a construção das propriedades, vamos destacar primeiramente uma característica que nos permite a construção de novas medidas coerentes a partir de medidas coerentes conhecidas.

Seja $\{\rho_\tau\}_{\tau \in T}$ uma família de medidas coerentes de risco. Então, qualquer combinação convexa é também uma medida coerente de risco:

$$\rho = \sum_{\tau \in T} \lambda_\tau \rho_\tau \text{ com } \sum_{\tau \in T} \lambda_\tau = 1 \text{ e } \lambda_\tau \geq 0$$

Prova:

Seja $\{\rho_\tau\}_{\tau \in T}$ uma família de medidas coerentes de risco.

Desta forma, cada componente ρ_τ é uma medida coerente de riscos.

Suponha que $\lambda_\tau \geq 0$ e que $\sum_{\tau \in T} \lambda_\tau = 1$

1-

Seja $X \leq Y$. Então $\rho_\tau(X) \geq \rho_\tau(Y) \forall \tau$

Então $\lambda_\tau \rho_\tau(X) \geq \lambda_\tau \rho_\tau(Y)$ e $\sum_{\tau \in T} \lambda_\tau \rho_\tau(X) \geq \sum_{\tau \in T} \lambda_\tau \rho_\tau(Y)$

Assim: $\rho(X) = \sum_{\tau \in T} \lambda_\tau \rho_\tau(X) \geq \sum_{\tau \in T} \lambda_\tau \rho_\tau(Y) = \rho(Y)$

→ *Monotonicidade*

2-

Seja $m \in \mathfrak{R}$. Então $\rho_\tau(X+m) = \rho_\tau(X) - m \vee \tau$

Assim:

$\rho(X+m) =$

$$\sum_{\tau \in T} \lambda_\tau \rho_\tau(X+m) = \sum_{\tau \in T} \lambda_\tau [\rho_\tau(X) - m] = \sum_{\tau \in T} [\lambda_\tau \rho_\tau(X) - \lambda_\tau m] = \sum_{\tau \in T} \lambda_\tau \rho_\tau(X) - m \sum_{\tau \in T} \lambda_\tau =$$

$\rho(X) - m$

→ *Invariância de Translação*

3-

Seja $\lambda \geq 0$. Então $\rho_\tau(\lambda X) = \lambda \rho_\tau(X) \vee \tau$

Assim:

$$\rho(\lambda X) = \sum_{\tau \in T} \lambda_\tau \rho_\tau(\lambda X) = \sum_{\tau \in T} \lambda_\tau \lambda \rho_\tau(X) = \lambda \sum_{\tau \in T} \lambda_\tau \rho_\tau(X) = \lambda \rho(X)$$

→ *Homogeneidade Positiva*

4-

Sejam X e Y . Então $\rho_\tau(X+Y) \leq \rho_\tau(X) + \rho_\tau(Y) \vee \tau$

Assim:

$\rho(X+Y) =$

$$\sum_{\tau \in T} \lambda_\tau \rho_\tau(X+Y) \leq \sum_{\tau \in T} \lambda_\tau [\rho_\tau(X) + \rho_\tau(Y)] = \sum_{\tau \in T} [\lambda_\tau \rho_\tau(X) + \lambda_\tau \rho_\tau(Y)] = \sum_{\tau \in T} \lambda_\tau \rho_\tau(X) + \sum_{\tau \in T} \lambda_\tau \rho_\tau(Y) \\ = \rho(X) + \rho(Y)$$

→ *Subaditividade*

⊥

A interpretação geométrica deste fato é direta. A combinação convexa de dois pontos no espaço euclidiano gera o segmento entre eles. A combinação convexa de n pontos gera o menor poliedro convexo que os contém, conhecido como envoltória convexa.

Lembrando que o ES é uma família uni - paramétrica $\{ES_\lambda\}_{\lambda \in [0,1]}$ de medidas coerentes, a envoltória convexa gerada por esta família é uma nova classe de medidas coerentes, a qual chamamos de Medida Espectral de Risco. Na figura 3, temos a envoltória convexa gerada pela família do ES.

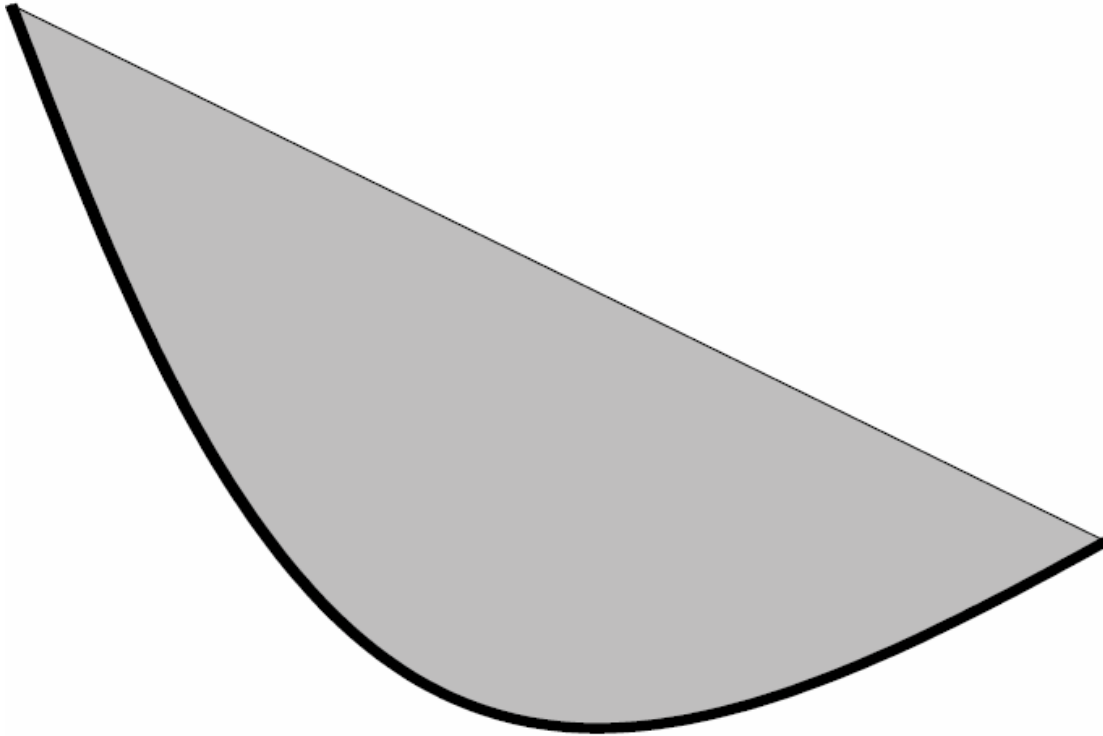


Figura 3

A classe das medidas espectrais é dada por todas as medidas do tipo:

$$M_{\phi,c}(X) = c \cdot ES_0(X) - (1-c) \cdot \int_0^1 \phi(p) q_p(X) dp$$

Com $c \in [0,1]$ e $\phi: [0,1] \rightarrow \Re$ satisfazendo as seguintes condições:

1. Positividade: $\phi(p) \geq 0 \forall p \in [0,1]$
2. Normalização: $\int_0^1 \phi(p) dp = 1$
3. Monotonicidade: Para $0 \leq p_1 \leq p_2 \rightarrow \phi(p_1) \geq \phi(p_2)$

Ainda, $M_{\phi,c}$ é coerente se, e somente se, c e ϕ satisfazem as condições acima.

A condição de positividade requer $\phi(p)$ ser positiva. Se algum $\phi(p)$ apresenta valores negativos para algum p , o M_ϕ correspondente apresenta uma preferência a perdas que a ganhos no quantil $q_p(X)$. Nesse caso, temos uma violação da monotonicidade.

A condição de normalização, caso violada, faz M_ϕ violar a condição de invariância de translações.

A terceira condição está ligada à subaditividade. Para M_ϕ ser coerente seu espectro de risco deve ser não-crescente. Caso ϕ não seja não-crescente, M_ϕ viola a subaditividade.

Vale ressaltar que os quatro axiomas da coerência são reduzidos a três condições sobre ϕ . Isso ocorre pois qualquer medida M_ϕ satisfaz automaticamente ao axioma da homogeneidade positiva sem qualquer restrição sobre ϕ .

É fácil perceber que o espectro de risco do ES satisfaz as três condições acima, o que nos garante a coerência. O espectro do VaR, ao contrário, satisfaz as duas primeiras mas viola a monotonicidade. Essa é a razão da falta de coerência do VaR.

De fato, se uma estatística baseada em quantis M_ϕ da forma da equação (4) ignora alguma parte da cauda esquerda, isto é, se $\phi(p) = 0$ em algum intervalo $[0, p']$ e $c=0$, então M_ϕ é necessariamente não coerente.

Este resultado é muito importante na interpretação das medidas coerentes de risco. Na classe de medidas consideradas, nenhuma alternativa coerente ao VaR pode não estimar a cauda esquerda da distribuição. Nenhum espectro de risco pode ser zero no fim esquerdo de seu domínio pois isso é incompatível com ϕ ser decrescente, positivo e com área unitária. Coerência também significa pegar todos os piores casos e dar a eles os maiores pesos. No espaço de medidas considerado, esse é o significado essencial para a coerência.

Vale ressaltar que a classe das medidas espectrais não representa todos os casos possíveis de medidas coerentes de risco.

Uma outra representação para M_ϕ é dada a seguir:

$$\rho_\mu(X) = W\text{-VaR}(X) = \int_0^1 ES_\lambda(X) \mu(d\lambda)$$

Onde a medida μ reflete a aversão ao risco.

A seguir, apresentamos um exemplo teórico de aplicação das medidas espectrais de risco sob a ótica das instituições financeiras.

Exemplo:

Considere duas instituições financeiras I e S

I é uma empresa essencialmente de venda de proteção e seu negócio é feito com base em pequenos ganhos diários frequentes, em comparação com as grandes perdas associadas a eventos catastróficos.

S é uma empresa tomadora de risco e apresenta perdas e ganhos de tamanhos e probabilidades comparáveis.

Podemos supor que as perdas diárias de S e I ocorrem com probabilidade de 50% e 0.5% respectivamente.

Fica claro que uma escolha padrão de nível de confiança α para o ES em um horizonte de tempo de um dia não é apropriado para S e I. Por exemplo, a escolha de $\alpha = 5\%$ é grande demais para I e pequena demais para S.

Escolhas diferentes de α , digamos 1% para I e 25% para S, são necessárias nesse caso.

Considere agora que I e S são linhas de negócio de uma única empresa $C = I \cup S$.

Agora, para mensurar o risco de C, um único valor para α pode não ser adequado, devido aos diferentes perfis de risco de I e S.

Desta forma, o gestor de riscos de C poderia optar por utilizar uma medida espectral de risco construída como uma combinação convexa dos ES's de I e S, por exemplo $ES_{1\%}$ para I e $ES_{25\%}$ para S.

Os pesos de cada linha de negócio podem representar, por exemplo, o impacto econômico relativo de cada uma delas em C, por exemplo $\lambda_I = 30\%$ e $\lambda_S = 70\%$.

Neste caso, o resultado seria:

$$M_{\phi_C} = \lambda_I * ES_{1\%} + \lambda_S * ES_{25\%}$$

└

Para estimarmos as medidas espectrais de risco, devemos utilizar técnicas de simulação, tais como a Simulação de Monte Carlo, que será detalhada no capítulo 5.

5 – Simulação de Monte Carlo

Conforme vimos nos capítulos anteriores, para o cálculo de medidas de risco de portfólios que apresentam instrumentos não lineares, como por exemplo opções, não é possível encontrarmos fórmulas fechadas e calcular diretamente as medidas de risco. Neste caso, devemos utilizar técnicas de simulação, tais como a Simulação de Monte Carlo.

A simulação de Monte Carlo consiste em três passos principais:

1. Estimativas de volatilidades e correlações: de posse das séries históricas dos ativos básicos da carteira, ou dos fatores de risco gerais previamente selecionados de acordo com a seção 3.2, é possível estimar as volatilidades e correlações através do modelo EWMA.
2. Geração de cenários: usando as estimativas de volatilidades e correlações, produzimos um grande número de cenários de preços futuros de acordo com um modelo lognormal, modelo que supõe os preços dos ativos como uma variável aleatória lognormal.
3. Precificação do Portfólio: para cada cenário simulado, avaliamos o preço do portfólio.
4. Sumário: de posse dos preços da carteira em cada cenário, reportamos as medidas desejadas.

5.1 – Geração de Cenários

Conforme citado acima, vamos assumir um modelo lognormal. Assim, considerando um horizonte de tempo de estimação de t dias, um preço inicial P_0 e a volatilidade estimada σ temos:

$$P_t = P_0 \exp[\sigma \sqrt{t} Y]$$

Onde $Y \sim N(0,1)$.

Portanto, o procedimento para a geração de cenários consiste na geração de variáveis aleatórias com distribuição normal padrão e usar a equação acima para estimar preços futuros.

O procedimento adotado para o caso multivariado é semelhante, com a suposição que as variáveis aleatórias Y geradas devem ser correlacionadas de acordo com a matriz de correlação estimada pelo EWMA, que será chamada Σ .

Suponha que desejamos gerar n variáveis aleatórias normais com variância 1 e correlações dadas pela matriz Σ . O procedimento é gerar n variáveis independentes e então combina-las de forma a se obter as correlações desejadas. Para isso utilizamos três passos:

1. Decompor Σ usando a decomposição de Cholesky^[15] criando uma matriz triangular inferior A de modo que $\Sigma = AA'$.
2. Gerar um vetor $n \times 1$ Y de variáveis aleatórias normais padrão independentes.
3. Realizar o produto matricial $Z = AY$. Os elementos de Z terão variância unitária e correlações dadas por Σ .

Vale ressaltar que não é necessária a utilização da decomposição de Cholesky. Qualquer matriz B que satisfaça $\Sigma = BB'$ pode ser utilizada. A vantagem da decomposição surge do fato da matriz A ser triangular inferior, o que reduz o número de operações na multiplicação AY . Porém, a decomposição requer que Σ seja positiva definida.

De posse do procedimento descrito acima, podemos gerar cenários para os preços dos ativos. Por exemplo, suponha que desejamos modelar o preço de dois ativos $P^{(1)}$ e $P^{(2)}$ t dias no futuro. Os preços atuais são $P_0^{(1)}$ e $P_0^{(2)}$, σ_1 e σ_2 são as volatilidades estimadas e ρ é a correlação entre eles. Através do método acima:

$$P_t^{(1)} = P_0^{(1)} \exp[\sigma_1 \sqrt{t} Z_1]$$

$$P_t^{(2)} = P_0^{(2)} \exp[\sigma_2 \sqrt{t} Z_2]$$

Para gerarmos uma coleção de cenários, simplesmente repetimos os procedimentos acima um número N de vezes.

5.2 – Precificação do Portfólio

Após a geração dos cenários para os preços futuros dos ativos, ou fatores de risco, utilizamos esses preços no cálculo do valor do portfólio em cada cenário.

Para isso, é escolhido um modelo de precificação e aplicamos os preços simulados neste modelo.

Para os ativos lineares, os preços simulados ou são o próprio preço do ativo ou basta aplicarmos os preços simulados em fórmulas simples de precificação.

Para as opções, podemos utilizar o modelo de Black-Scholes.

5.3 – Sumário

De posse do valor do portfólio em cada cenário, obtemos a distribuição de probabilidade simulada da carteira.

Essa distribuição simulada é uma boa aproximação para a distribuição real do portfólio. De fato, é possível demonstrar que a distribuição simulada converge para a distribuição real quando o número de simulações $N \rightarrow \infty$.

Com a distribuição simulada da carteira, podemos estimar as medidas de risco desejadas.

Para o VaR, basta ordenarmos os retornos obtidos em cada cenário e reportarmos a observação correspondente ao nível de confiança desejado.

5.4 – Estimações das Medidas Coerentes de Risco

Para estimarmos as medidas coerentes de risco apresentadas, geramos a distribuição empírica do portfólio X através de simulação de Monte Carlo.

Sejam $\{X_i\}_{i=1\dots N}$ um conjunto de valores equiprováveis do portfólio X gerados pela simulação de Monte Carlo. A distribuição empírica obtida é da forma:

$$F_X^{(N)}(x) = P[X \leq x] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_{\{X_i \leq x\}}$$

Para computarmos o Expected Shortfall de nível α (ES_α) desta distribuição, precisamos ordenar os valores obtidos e aplicar diretamente a definição.

Para essa aplicação, basta utilizarmos as estatísticas de ordem da distribuição $\{X_{i:N}\}_{i=1\dots N}$:

$$\{X_{i:N}\}_{i=1\dots N} = \{X_i\}_{i=1\dots N}, \text{ com } X_{1:N} \leq X_{2:N} \leq \dots \leq X_{N:N}$$

Ou seja, as estatísticas de ordem $X_{i:N}$ são as realizações de X_i ordenadas de forma crescente.

Agora, para calcularmos o ES_α , basta avaliarmos a média dos $100\alpha\%$ piores casos do portfólio X , que será a média dos N_α piores cenários:

$$ES_{\alpha}^{(N)}(X) = -\frac{1}{N\alpha} \sum_{i=1}^{N\alpha} X_{i:N}$$

Caso $N\alpha$ seja um número inteiro.

Caso $N\alpha$ não seja um número inteiro, temos então:

$$ES_{\alpha}^{(N)}(X) = -\frac{1}{N\alpha} \left[\sum_{i=1}^{N\alpha} X_{i:N} + (N\alpha - [N\alpha])X_{[N\alpha]+1:N} \right]$$

Onde $(N\alpha - [N\alpha])X_{[N\alpha]+1:N}$ representa uma fração do $([N\alpha]+1)$ -ésimo cenário ordenado.

Ainda, é possível demonstrar que:

$$ES_{\alpha}^{(N)}(X) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} ES_{\alpha}(X) \quad [1]$$

Para a estimação da medida espectral, definimos $M_{\phi}^{(N)}$ como:

$$M_{\phi}^{(N)}(X) = -\sum_{i=1}^N \phi_i X_{i:N}$$

Temos que $M_{\phi}^{(N)}$ é uma medida coerente de riscos se, e somente se, o espectro de risco discreto $\{\phi_i\}_{i=1, \dots, N}$ satisfazer uma versão discreta das condições apresentadas no capítulo 4:

1. Positividade: $\phi_i \geq 0$ para todo $i = 1, \dots, N$
2. Normalização: $\sum_{i=1}^N \phi_i = 1$
3. Monotonicidade: $\phi_i \geq \phi_j$ se $1 \leq i \leq j \leq N$

A coerência pode ser verificada pelos mesmos argumentos apresentados no capítulo 4.

Ainda, se definirmos o espectro de risco discreto como:

$$\phi_i = \frac{1}{N} \phi \left(\frac{i - \frac{1}{2}}{N} \right)$$

Onde ϕ é o espectro de risco original de M_{ϕ} , então é possível demonstrar que:

$$M_{\phi}^{(N)}(X) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} M_{\phi}(X) \quad [1]$$

Para garantirmos a condição de normalização:

$$\phi_i = \frac{\phi((i-1/2)/N)}{\sum_{k=1}^N \phi((k-1/2)/n)}$$

Um exemplo é a classe das funções de aversão ao risco exponenciais, definidas da forma:

$$\phi_{\alpha}(p) = \frac{e^{-p/\alpha}}{\alpha(1 - e^{-1/\alpha})} \text{ com } \alpha \in (0, \infty)$$

Onde o parâmetro α é o mesmo do ES_{α} .

De posse das N simulações obtidas por Monte Carlo:

$$\phi_i = \left[\frac{e^{1/N\alpha} - 1}{1 - e^{-1/\alpha}} \right] e^{-i/N\alpha}$$

O que nos fornece o cálculo da medida espectral:

$$M_{\phi_{\alpha}}^{(N)}(X) = -\sum_{i=1}^N \phi_i X_{i:N}$$

O próximo passo é o estudo da otimização de portfólios com base nas três medidas discutidas.

Em seguida será utilizada a simulação de Monte Carlo detalhada acima e dos procedimentos de estimação para o cálculo do VaR, Expected Shortfall e Medida Espectral de Risco para um portfólio, bem como a otimização da carteira.

6 – Otimização de Portfólios

Até agora foram apresentadas as medidas coerentes de risco e as maneiras de estimá-las, através de simulação de Monte Carlo.

Neste capítulo, não estamos mais interessados nas estimações de tais medidas, e sim na otimização de portfólios utilizando as três medidas apresentadas nos capítulos anteriores.

Em um problema de otimização de portfólio, o objetivo é encontrar os pesos ótimos de cada ativo de uma carteira de modo que o risco associado a essa carteira seja mínimo. O risco pode ser estimado, como já discutimos, através da variância, do VaR, do Expected Shortfall ou da Medida Espectral.

O valor de um portfólio será denotado por $\Pi(w)$, função de um conjunto de parâmetros w_1, w_2, \dots, w_w e $X(w) = \Delta\Pi(w)$ será a variável aleatória das perdas e ganhos em um intervalo de tempo T .

Os parâmetros assumem valores em algum domínio $w \in \Omega \subset \Re^W$. Será assumido que esse conjunto é convexo, de forma que dados dois vetores de peso w_1 e $w_2 \in \Omega$, os pontos do segmento entre eles também pertence a Ω :

$$w_\lambda = \lambda w_1 + (1 - \lambda)w_2 \in \Omega \text{ para todo } \lambda \in [0,1]$$

Dada uma medida de riscos $\rho(\cdot)$, a função $\rho(w) = \rho(X(w))$ é a superfície de riscos do portfólio $\Pi(w)$. O objetivo é encontrar o mínimo desta superfície.

Sendo w os pesos dos ativos $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_w$ do portfólio:

$$\Pi(w) = \sum_{i=1}^w w_i \pi_i$$

Neste caso, a dependência de Π com w é linear:

$$\Pi(\lambda w_1 + \mu w_2) = \lambda \Pi(w_1) + \mu \Pi(w_2); \mu, \lambda \in \Re$$

$$X(\lambda w_1 + \mu w_2) = \lambda X(w_1) + \mu X(w_2); \mu, \lambda \in \Re$$

Este fato implica que a superfície de riscos de uma medida coerente de riscos é convexa. De fato, conforme visto no capítulo 2, uma medida de riscos coerente é convexa.

Prova:

Seja w_1 e $w_2 \in \Omega$ e $\lambda \in [0,1]$

$$\rho(\lambda w_1 + (1-\lambda)w_2) = \rho(X(\lambda w_1 + (1-\lambda)w_2)) = \rho(X(\lambda w_1) + (1-\lambda)X(w_2)) \leq \rho(X(\lambda w_1)) + \rho((1-\lambda)X(w_2)) = \lambda\rho(X(w_1)) + (1-\lambda)\rho(X(w_2)) = \lambda\rho(w_1) + (1-\lambda)\rho(w_2)$$

└

Sendo uma superfície convexa uma superfície na qual qualquer segmento entre dois de seus pontos está inteiramente contida nela mesma, então tal superfície não apresenta dois mínimos distintos.

Desta forma, a superfície de riscos $\rho(w)$ não apresenta mínimo local. Existe apenas um único conjunto convexo de portfólios de risco mínimo global $\Omega_0 \subset \Omega$:

$$\rho(w) = \min_{z \in \Omega} \rho(z)$$

Este resultado nos mostra que as superfícies de riscos das medidas coerentes no espaço de pesos de um portfólio são sempre convexas. Desta forma, tais superfícies sempre apresentam um único valor mínimo $\rho(w)$, atingido em uma região convexa de risco mínimo $w \in \Omega_0$. Se esse subconjunto é reduzido a um único ponto w_0 , o portfólio de risco mínimo é único.

Vale destacar que os resultados apresentados acima continuam válidos se forem impostas ao domínio original Ω um número de restrições de igualdade ou desigualdade lineares:

$$\sum_{i=1}^w w_i \beta_i = K ; \beta_i, K \in \mathfrak{R}$$

$$\sum_{i=1}^w w_i \beta_i \leq H ; \beta_i, H \in \mathfrak{R}$$

Impondo tais restrições, obtemos um subdomínio menor $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ no qual a superfície de riscos ainda é convexa.

Tais restrições são comuns em finanças na forma, por exemplo, de restrições no valor de um portfólio:

$$\sum_{i=1}^w w_i \pi_i = V$$

Onde π_i representa o valor de mercado do i -ésimo ativo e V o valor do portfólio. Outro exemplo é a restrição orçamentária:

$$\sum_{i=1}^w w_i \pi_i \leq B$$

Onde B é a restrição orçamentária determinada por um montante de capital máximo K que o investidor pode empregar no investimento.

Ainda, podem ocorrer restrições em ativos direcionais, tais como ações, que não podem apresentar posições vendidas:

$$w_k \geq 0$$

6.1 – Otimização do Expected Shortfall

Como foi discutido acima, o problema de minimização de medidas coerentes de risco no espaço de pesos de portfólios é sempre convexo, ou seja, sempre apresenta um valor mínimo.

Porém, um procedimento de minimização padrão se mostra ineficiente na busca pela solução do problema.

A ineficiência ocorre devido à necessidade da ordenação dos cenários obtidos nas simulações.

Temos que o ES é dado por:

$$ES_{\alpha}^{(N)}(X(w)) = -\frac{1}{N\alpha} \sum_{i=1}^N X_{i:N}(w)$$

onde as estatísticas de ordem são resultado da seguinte operação de ordenação:

$$\{X_{i:N}(w)\}_{\{i=1\dots N\}} = SORT[\{X_{i:N}(w)\}_{\{i=1\dots N\}}] = SORT\left[\left\{\sum_k^K w_k X_i^{(k)}\right\}_{\{i=1\dots N\}}\right]^{12}$$

Podemos perceber que uma pequena mudança nos pesos w pode produzir uma reordenação abrupta nas estatísticas de ordem $X_{i:N}$ e esta é a razão da falha nos procedimentos básicos de minimização quando o $ES_{\alpha}^{(N)}$ é a função objetivo.

Desta forma, para realizarmos a minimização do ES, iremos substituir a função objetivo.

Considere a seguinte função Γ_{α} em $X \times \Re$ contendo uma variável auxiliar ψ :

$$\Gamma_{\alpha}(X(w), \psi) = -\psi + \frac{1}{\alpha} E[-X(w) + \psi]^+$$

onde $[x]^+ = \text{Max}(x, 0)$.

Como função de ψ , $\Gamma_{\alpha}(x, \psi)$ é convexa e continuamente diferenciável. Ainda, o ES_{α} coincide com o mínimo de $\Gamma_{\alpha}(x, \psi)$ em ψ :

$$ES_{\alpha}(X) = \min_{\psi} \Gamma_{\alpha}(X, \psi)$$

¹² SORT é uma função de ordenação.

O mínimo de $\Gamma_\alpha(x, \psi)$ é atingido quando a variável auxiliar ψ toma qualquer valor no segmento delimitado pelos α -quantis inferior e superior:

$$\min_{\psi} \Gamma_\alpha(x, \psi) = \Gamma_\alpha(x, \psi^*) = ES_\alpha(X), \forall \psi^* \in [q_\alpha(x), q^\alpha(x)]$$

O mínimo do $ES_\alpha(X(w))$ em w coincide com o mínimo de $\Gamma_\alpha(X(w), \psi)$ no conjunto definido por $\{w, \psi\}$:

$$\min_w ES_\alpha(X(w)) = \min_{w, \psi} \Gamma_\alpha(X(w), \psi)$$

Ainda, se $X(w)$ é linear em w , ou seja, se os parâmetros w são os pesos dos ativos, então a função $\Gamma_\alpha(X(w), \psi)$ é convexa no conjunto estendido $\{w, \psi\}$.

Prova:

Considere a seguinte definição para a função $\Gamma_\alpha(x, \psi)$:

$$\Gamma_\alpha(x, \psi) = \psi + \frac{1}{\alpha} \int_{y \in \mathfrak{R}^m} [f(x, y) - \psi]^+ p(y) dy$$

Seja $\Psi(x, \psi)$ uma função contínua com respeito à ψ . Isto é equivalente ao fato que, independente da escolha de x , o conjunto de y com $f(x, y) = \psi$ tem probabilidade zero:

$$\int_{f(x, y) = \psi} p(y) dy = 0$$

Com x fixo, considere a função G da seguinte forma:

$$G(\psi) = \int_{y \in \mathfrak{R}^m} g(\psi, y) p(y) dy$$

onde $g(\psi, y) = [f(x, y) - \psi]^+$.

Então G é convexa e continuamente diferenciável com derivada:

$$G'(\psi) = \Psi(x, \psi) - 1$$

Desta forma:

$$\frac{\partial \Gamma_\alpha(x, \psi)}{\partial \psi} = 1 + \frac{1}{\alpha} [\Psi(x, \psi) - 1] = \frac{1}{\alpha} [\Psi(x, \psi) - (1 - \alpha)]$$

Assim, os valores de ψ que permitem $\Gamma_\alpha(x, \psi)$ atingir seu mínimo são precisamente aqueles para os quais:

$$\Psi(x, \psi) = 1 - \alpha$$

Isto nos fornece um intervalo fechado não vazio, pois $\Psi(x, \psi)$ é contínua e não decrescente em ψ com:

$$\lim_{\psi \rightarrow \infty} \Psi(x, \psi) = 1$$

$$\lim_{\psi \rightarrow -\infty} \Psi(x, \psi) = 0$$

Em particular então, temos:

$$\min_{\psi} \Gamma_{\alpha}(x, \psi) = \Gamma_{\alpha}(x, \psi_{\alpha}(x)) = \psi_{\alpha}(x) + \frac{1}{\alpha} \int_{y \in \mathfrak{R}^m} [f(x, y) - \psi_{\alpha}(x)]^+ p(y) dy$$

A integral na fórmula acima é:

$$\int_{f(x, y) \geq \psi_{\alpha}(x)} [f(x, y) - \psi_{\alpha}(x)] p(y) dy = \int_{f(x, y) \geq \psi_{\alpha}(x)} f(x, y) p(y) dy - \psi_{\alpha}(x) \int_{f(x, y) \geq \psi_{\alpha}(x)} p(y) dy$$

Temos que:

$$\int_{f(x, y) \geq \psi_{\alpha}(x)} f(x, y) p(y) dy = \alpha ES_{\alpha}(x)$$

$$\int_{f(x, y) \geq \psi_{\alpha}(x)} p(y) dy = 1 - \Psi(x, \psi_{\alpha}(x))$$

Ainda, $\Psi(x, \psi) = 1 - \alpha$.

Então:

$$\min_{\psi} \Gamma_{\alpha}(x, \psi) = \psi_{\alpha}(x) + \frac{1}{\alpha} [\alpha ES_{\alpha}(x) - \psi_{\alpha}(x) \alpha] = ES_{\alpha}(x)$$

Desta forma, minimizar $ES_{\alpha}(X)$ é minimizar $\min_{\psi} \Gamma_{\alpha}(X, \psi)$. Ou seja:

$$\min_w ES_{\alpha}(X(w)) = \min_{w, \psi} \Gamma_{\alpha}(X(w), \psi)$$

pois minimizar $\Gamma_{\alpha}(X, \psi)$ com respeito à $(x, \psi) \in X \times \mathfrak{R}$ pode ser feito primeiro minimizando ψ sobre \mathfrak{R} para um x fixo e então minimizar o resultado sobre $x \in X$.

└

O resultado acima nos permite mapear o problema de minimizar ES_{α} no problema de minimizar Γ_{α} . Este procedimento elimina a operação de reordenar, o tornando um problema de fácil solução.

Assim, para minimizar $ES_{\alpha}^{(N)}$ em w basta minimizarmos a seguinte função em w e ψ :

$$\Gamma_{\alpha}^{(N)}(X(w), \psi) = -\psi + \frac{1}{N\alpha} \sum_{i=1}^N (\psi - X_i(w))^+$$

e no mínimo, o parâmetro ψ toma valores no intervalo:

$$\psi^* \in [X_{N\alpha:N}(w), X_{N\alpha+1:N}(w)]$$

Temos então o seguinte problema de minimização:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{w, \psi} \left\{ -\psi + \frac{1}{N\alpha} \sum_{i=1}^N (\psi - X_i(w))^+ \right\} \\ w \in W \subset \mathfrak{R}^W \\ \psi \in \mathfrak{R} \end{array} \right\}$$

A minimização força ψ a assumir o valor do α -quantil, o que de fato separa os cenários em dois subconjuntos, o pior α e o melhor $(1 - \alpha)$. Mas sabemos que, da estimação do ES, essa separação dos dados é suficiente, tornando desnecessária a ordenação de todos os cenários simulados. Ou seja, uma pequena variável de informação adicional ψ elimina a necessidade de ordenação.

Vale destacar que um portfólio com menor valor de ES também apresenta um menor valor de VaR, porém esse valor não é o VaR mínimo da carteira em questão.

6.2 – Otimização das Medidas Espectrais

O problema de ordenação encontrado na minimização do Expected Shortfall e tratado na seção anterior também está presente na minimização de Medidas Espectrais mais gerais.

De fato, para a Medida Espectral com espectro de risco discreto ϕ_i , também utilizamos as estatísticas de ordem:

$$M_{\phi}^{(N)}(X(w)) = -\sum_{i=1}^N \phi_i X_{i:N}(w)$$

Analogamente ao caso do ES, podemos evitar o problema da ordenação através da utilização de uma função $\Gamma_{\phi}(X(w), \psi)$, contendo graus de liberdade adicionais.

A função Γ_{ϕ} será definida como:

$$\Gamma_{\phi}(X(w), \psi) = \int_0^1 d\alpha \frac{d\phi}{d\alpha} \left\{ \alpha \psi(\alpha) - E[\psi(\alpha) - X(w)]^+ \right\} - \phi(1)E[X(w)]$$

Neste caso, Γ_{ϕ} depende de uma função $\psi(\alpha): [0,1] \rightarrow \mathfrak{R}$, o que significa que precisamos de infinitos graus de liberdade adicionais ao problema de minimização original a fim de eliminarmos o problema de ordenação.

Analisando a expressão acima em casos contínuos, não é possível a utilização de Γ_{ϕ} . Porém, em casos discretos baseados na simulação de N cenários, o número de graus de liberdade adicionais é finito e menor que N .

A versão discreta de Γ_ϕ é dada por:

$$\Gamma_\phi^{(N)}(X, \psi) = \sum_{j=1}^{N-1} \Delta\phi_j \left\{ j\psi_j - \sum_{i=1}^N (\psi_j - X_i)^+ \right\} - \phi_N \sum_{i=1}^N X_i$$

onde $\Delta\phi_i = \phi_{i+1} - \phi_i$

Desta forma, foram adicionadas N-1 variáveis ψ_j .

Podemos generalizar os seguintes fatos, temos que $M_\phi^{(N)}(X)$ coincide com o mínimo de $\Gamma_\phi^{(N)}(X, \psi)$ em ψ :

$$M_\phi^{(N)}(X) = \min_{\psi} \Gamma_\phi^{(N)}(X, \psi)$$

Além disso, o mínimo de $\Gamma_\phi^{(N)}(X, \psi)$ é atingido quando o vetor ψ satisfaz a condição:

$$\psi_k = \psi_k^* \in [X_{k:N}, X_{k+1:N}] \text{ se } \Delta\phi_k \neq 0$$

enquanto não há condições em ϕ se $\Delta\phi_k = 0$.

O mínimo de $M_\phi^{(N)}(X(w))$ em w coincide com o mínimo de $\Gamma_\phi^{(N)}(X(w), \psi)$ no conjunto de parâmetros estendido $\{w, \psi\}$:

$$\min_w M_\phi^{(N)}(X(w)) = \min_{w, \psi} \Gamma_\phi^{(N)}(X(w), \psi)$$

Além disso, $\Gamma_\phi^{(N)}(X, \psi)$ é convexo em ψ e X e se $X(w)$ é linear em w , ou seja, se os parâmetros w são os pesos de ativos, então $\Gamma_\phi^{(N)}(X(w), \psi)$ é convexo no conjunto estendido de parâmetros $\{w, \psi\}$.

A necessidade da inclusão de N-1 graus de liberdade ψ adicionais no caso de N cenários surge pois, ao contrário do ES onde é suficiente dividir os cenários em dois conjuntos, nas medidas espectrais mais gerais cada estatística de ordem apresenta, em geral, um peso diferente ϕ_k . Assim, para separarmos todos os N cenários um do outro na reta, é necessário termos N-1 diferentes pedaços de informação, que são adquiridos através das variáveis adicionais ψ_k .

De fato, das condições acima, vimos que cada ψ_k está no intervalo entre as estatísticas de ordem $X_{k:N}$ e $X_{k+1:N}$.

Desta forma, temos o seguinte problema de minimização:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{w, \psi} \left\{ \sum_{j \in J} \Delta\phi_j \left[j\psi_j - \sum_{i=1}^N (\psi_j - X_i)^+ \right] - \phi_N \sum_{i=1}^N X_i \right\} \\ w \in W \subset \mathfrak{R}^W \\ \psi \in \mathfrak{R}^J \end{array} \right.$$

6.3 – Otimização Risco-Retorno de um Portfólio

Um problema mais geral que os descritos nas seções anteriores é a otimização de um portfólio simultaneamente minimizando o risco e maximizando o seu retorno. Em outras palavras, queremos resolver o problema de determinar a fronteira eficiente no plano risco-retorno $(x,y) \equiv (M_\phi(X), E[X])$ para uma dada medida espectral de risco.

O problema de otimização acima, pode ser interpretado de duas maneiras.

A primeira é minimizar $M_\phi(X)$ dado um nível pré-estabelecido de retorno:

$$\begin{cases} \min_w M_\phi(X(w)) \\ E[X(w)] = \mu \\ w \in W \end{cases}$$

A segunda é maximizar o valor esperado dado um determinado nível de risco:

$$\begin{cases} \max_w E[X(w)] \\ M_\phi(X(w)) = \rho \\ w \in W \end{cases}$$

Portanto, podemos atacar o problema de otimizar o binômio risco-retorno de um portfólio utilizando o problema de minimização de $M_\phi(X)$ descrito na seção anterior adicionando uma restrição na média de X , de forma a obtermos o seguinte problema:

$$\begin{cases} \min_{w,\psi} \left\{ \sum_{j \in J} \Delta \phi_j \left[j \psi_j - \sum_{i=1}^N (\psi_j - X_i)^+ \right] - \phi_N \sum_{i=1}^N X_i \right\} \\ w \in W \subset \mathfrak{R}^W \\ \psi \in \mathfrak{R}^J \\ E[X(w)] \geq \mu \end{cases}$$

O próximo capítulo será dedicado à estimação das medidas de risco estudadas através da simulação de Monte Carlo detalhada no capítulo 5. Além disso, serão utilizados os procedimentos de otimização descritos acima a fim de encontramos o portfólio ótimo dado um conjunto de ativos lineares e não lineares.

7 – Estimações Empíricas

De posse dos resultados encontrados nos capítulos 5 e 6, foram realizadas as estimações empíricas.

Foi selecionada uma carteira com diversos ativos e foram estimados o VaR, o Expected Shortfall e a Medida Espectral com função de aversão ao risco exponencial.

Conforme visto no capítulo 5, a função de aversão ao risco exponencial é dada pela seguinte equação:

$$\phi_i = \left[\frac{e^{1/N\alpha} - 1}{1 - e^{-1/\alpha}} \right] e^{-i/N\alpha}$$

onde N é o número de simulações de Monte Carlo. Além disso, para garantirmos a coerência da medida espectral, a função de aversão ao risco deve atender às seguintes condições:

1. Positividade: $\phi_i \geq 0$ para todo $i = 1, \dots, N$
2. Normalização: $\sum_{i=1}^N \phi_i = 1$
3. Monotonicidade: $\phi_i \geq \phi_j$ se $1 \leq i \leq j \leq N$

Foram utilizados os seguintes ativos, com as seguintes características:

Ações	
Código	Quantidade
PETR4	20,000.00
CSNA3	14,200.00
ITAU4	120,000.00
VALE5	5,300.00
GGBR4	6,500.00

Opções							
Código	Tipo	Ativo Base	Quantidade	Preço Exercício	Vencimento	Vol	Pré
PETRL20	call	PETR4	-4,000.00	20	15/12/2008	0.8904	0.135
VALEL26	call	VALE5	2,550.00	25.42	15/12/2008	0.8248	0.135
GGBRL2	call	GGBR4	-6,000.00	27.64	15/12/2008	0.7998	0.135
PETRX27	put	PETR4	-2,400.00	27	15/12/2008	0.8529	0.135
VALEX26	put	VALE5	6,000.00	26	15/12/2008	0.8165	0.135

Os fatores de risco selecionados para as simulações de Monte Carlo foram os preços de IBovespa, CSN, Gerdau, Itaú, Petrobras e Vale.

Os preços dos fatores de risco foram obtidos no mercado e as volatilidades e correlações foram calculadas através do EWMA (Exponencial Weighted Moving Average), conforme descrito no capítulo 3.

Nas simulações, os preços das opções foram calculados pelo modelo de Black-Scholes. Foram utilizados 10000 cenários nas simulações de Monte Carlo e o nível de confiança especificado para as medidas de risco foi de 97.5%.

Os valores em R\$ encontrados para as medidas de risco e para o valor esperado do portfólio inicial foram:

Medidas	
VaR	247,534.53
ES	293,683.40
Espectral	271,100.96
Soma ϕ	1
Valor Esp.	7,075.87

Ainda, as três condições da função de aversão risco foram respeitadas. Como podemos observar na figura 4, a função é positiva e monotônica.

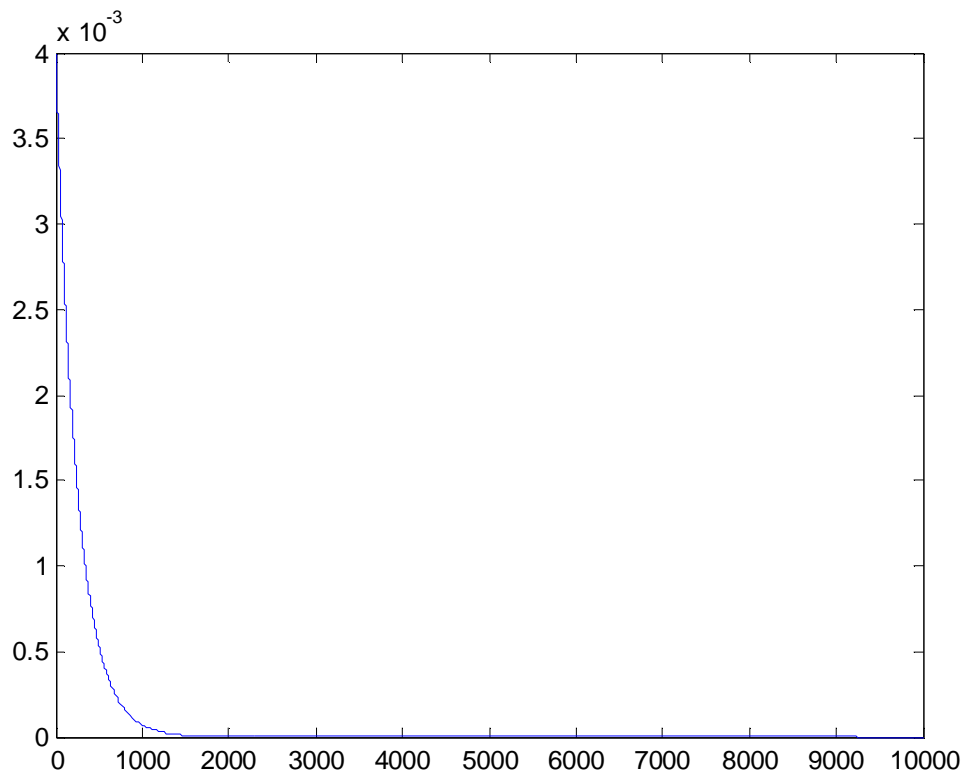


Figura 4 – Função de Aversão ao Risco Exponencial ($\phi \times N$)

7.1 – Minimização das Medidas Coerentes

De posse das estimações das medidas de risco, o próximo passo é a minimização das medidas coerentes estudadas.

O objetivo é, de posse do portfólio estudado, encontrar a proporção dos ativos contidos na carteira que possua o menor Expected Shortfall e a menor Medida Espectral com função de aversão ao risco exponencial.

Para isso foram utilizados os seguintes problemas, conforme descritos no capítulo 6, para a minimização do ES e da Medida Espectral, respectivamente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{w, \psi} \left\{ -\psi + \frac{1}{N\alpha} \sum_{i=1}^N (\psi - X_i(w))^+ \right\} \\ w \in W \subset \mathfrak{R}^W \\ \psi \in \mathfrak{R} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{w, \psi} \left\{ \sum_{j \in J} \Delta \phi_j \left[j \psi_j - \sum_{i=1}^N (\psi_j - X_i)^+ \right] - \phi_N \sum_{i=1}^N X_i \right\} \\ w \in W \subset \mathfrak{R}^W \\ \psi \in \mathfrak{R}^J \end{array} \right.$$

Foi exigido que a soma dos pesos de cada ativo na carteira seja 1, ou seja, todo o patrimônio líquido deve ser utilizado na compra ou venda dos ativos.

Apenas as opções podem ser vendidas e essa venda não pode exceder uma vez o patrimônio do fundo, ou seja, cada peso associado às opções não pode ser menor que -1.

Ainda, os custos de transação não foram levados em consideração nas soluções dos problemas.

Para o problema da minimização do ES, foram utilizados 10000 cenários nas simulações de Monte Carlo. Novamente os preços das opções foram calculados pelo modelo de Black-Scholes.

O portfólio ótimo encontrado, o Expected Shortfall mínimo e o valor esperado com os novos pesos em R\$ foram:

ES Mínimo	137,690.00
Valor Esp.	9,432.80

PETR4	0.3034
CSNA3	0.219
ITAU4	0.448
VALE5	0.2829
GGBR4	0.619
PETRL20	0.0487
VALEL26	0.1104
GGBRL2	-0.0808
PETRX27	-0.4643
VALEX26	-0.4863

Para o problema da minimização da Medida Espectral, foram utilizados 500 cenários nas simulações de Monte Carlo. Novamente os preços das opções foram calculados pelo modelo de Black-Scholes.

O número de cenários deve ser reduzido devido ao tamanho do problema de minimização. Vale ressaltar que, caso utilizássemos 10000 cenários, teríamos um problema de minimização de 10009 variáveis. Com 500 cenários temos um problema de 509 variáveis.

O portfólio ótimo encontrado, a Medida Espectral mínima e o valor esperado com os novos pesos em R\$ foram:

Espectral	120,340.70
Valor Esp.	10,862.01

PETR4	0.1538
CSNA3	0.5445
ITAU4	0.3754
VALE5	0.5084
GGBR4	0.5968
PETRL20	-0.1003
VALEL26	0.1862
GGBRL2	-0.2121
PETRX27	-0.4828
VALEX26	-0.5699

Como era de se esperar, os valores encontrados para as medidas de risco são menores que aqueles obtidos com o portfólio original. Ainda, tivemos uma diminuição de cerca de 55% na medida espectral e 53% no ES.

7.2 – Análises Estatísticas das Medidas de Risco

O próximo passo das estimações empíricas foi a realização de análises estatísticas nas três medidas estudadas.

Foi selecionada uma janela de tempo de 255 dias (de 11/12/2007 a 11/12/2008) e uma carteira contendo as seguintes posições, que se mantiveram fixas ao longo dos 255 dias considerados nas análises:

Ação	Número de Contratos
CSNA3	14200
GGBR4	6500
ITAU4	1200
PETR4	2000
VALE5	5300

Novamente os preços das ações foram obtidos no mercado e as volatilidades e correlações foram calculadas através do EWMA (Exponencial Weighted Moving Average).

A função de aversão ao risco utilizada foi a exponencial e o nível de confiança utilizado foi de 97.5%.

De posse das medidas de risco para os 255 dias foram calculadas as estatísticas descritivas e foi plotado o histograma para as três medidas. Os resultados encontram-se abaixo:

<i>VaR</i>	
Mean	130,385.93
Standard Error	2,000.38
Median	127,722.29
Standard Deviation	31,943.56
Sample Variance	1,020,391,194.14
Kurtosis	0.60
Skewness	0.67

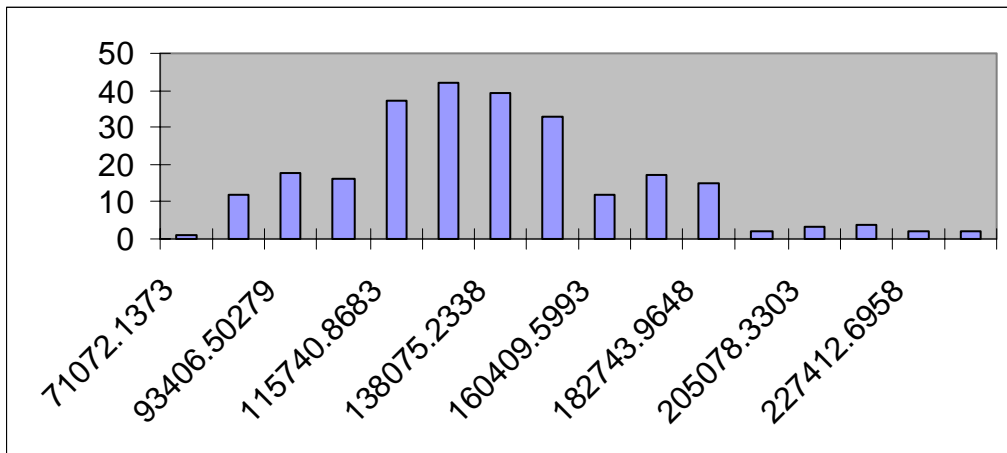


Figura 5 – Histograma do VaR

<i>Expected Shortfall</i>	
Mean	154,846.38
Standard Error	2,369.25
Median	150,756.36
Standard Deviation	37,833.89
Sample Variance	1,431,402,989.49
Kurtosis	0.58
Skewness	0.67

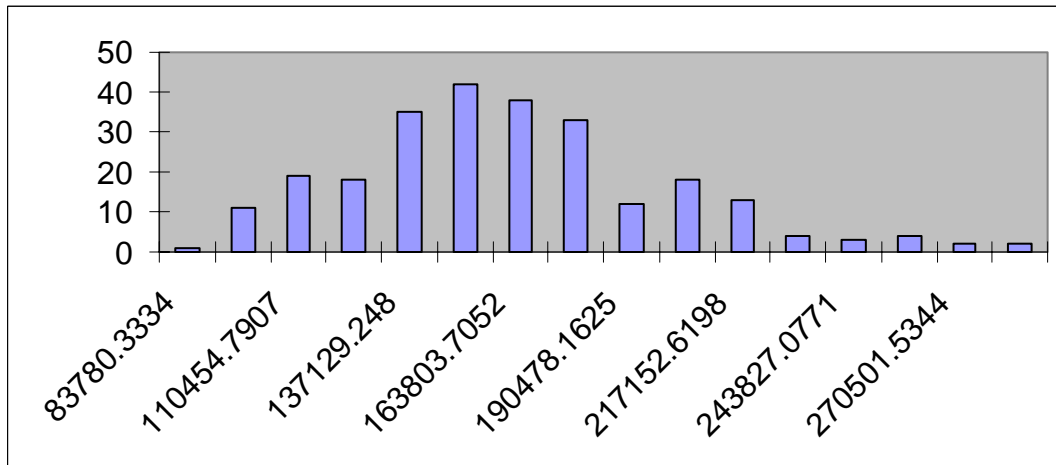


Figura 6 – Histograma do Expected Shortfall

<i>Medida Espectral</i>	
Mean	142,889.45
Standard Error	2,188.16
Median	139,564.36
Standard Deviation	34,942.05
Sample Variance	1,220,947,092.97
Kurtosis	0.59
Skewness	0.67

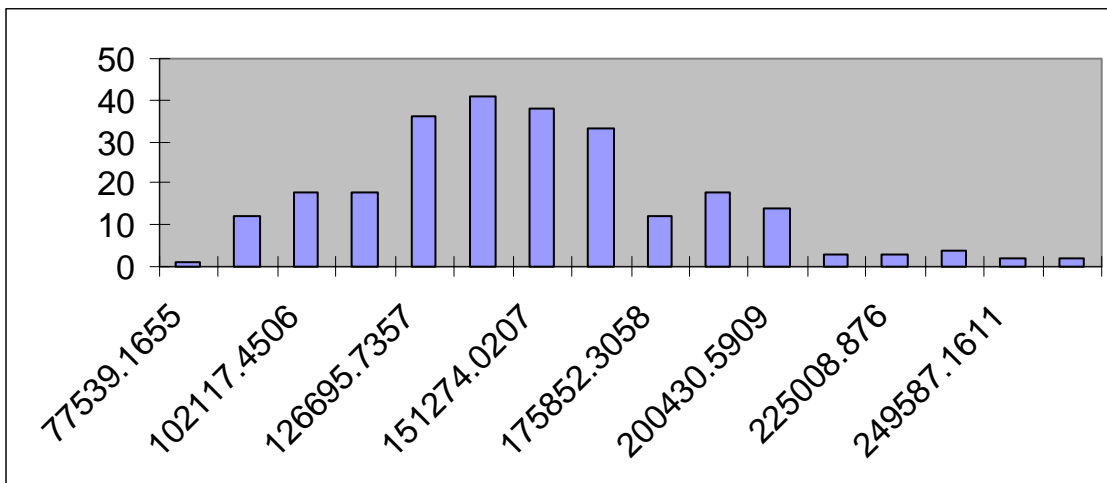


Figura 7 – Histograma da Medida Espectral

Como podemos perceber, os histogramas das três medidas são muito similares. Este resultado era esperado, visto que as medidas são funções uma da outra, a carteira utilizada apresenta somente ativos lineares e, principalmente, pois foi adotado o modelo lognormal para o preço dos ativos nas simulações de Monte Carlo. Conforme visto no capítulo 3, neste modelo o VaR é coerente e, portanto, temos uma forte correlação entre as três medidas de risco. Podemos perceber este resultado analisando também as séries históricas das medidas, apresentadas na figura 8.

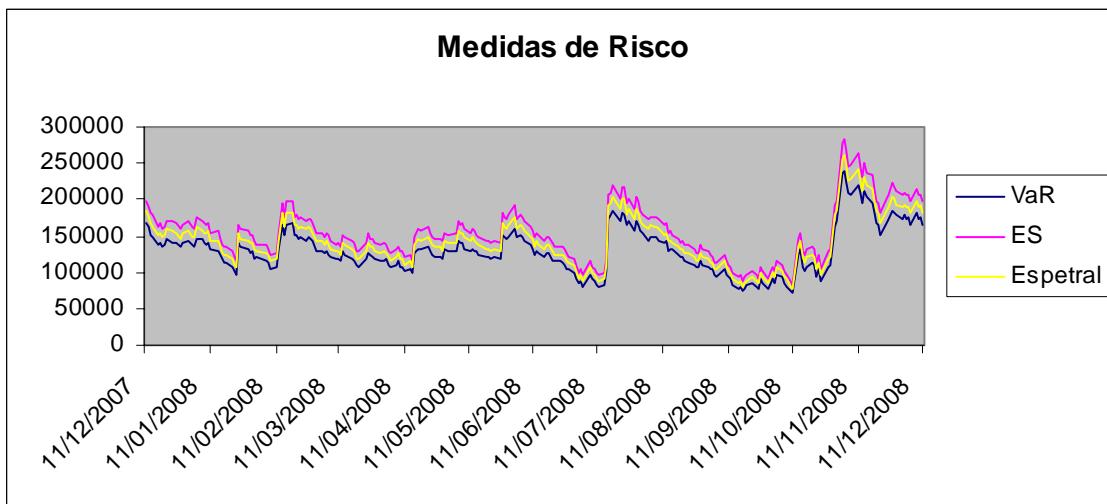


Figura 8 – Séries Históricas das Medidas de Risco

Ainda, o VaR foi a medida que apresentou os menores desvio padrão e erro padrão, seguido pela Medida Espectral e pelo Expected Shortfall. Porém, o VaR apresentou a maior curtose, seguido pela Medida Espectral e pelo ES. A assimetria encontrada foi a mesma para as três medidas.

Após as análises estatísticas de uma carteira de ações foram realizadas as análises estatísticas de uma carteira contendo ações e opções, de forma a estudarmos o comportamento das medidas de risco de uma carteira contendo ativos lineares e não-lineares.

O portfólio utilizado apresentava as seguintes ações:

Ações	
Código	Quantidade
PETR4	20,000.00
CSNA3	14,200.00
ITAU4	120,000.00
VALE5	5,300.00
GGBR4	6,500.00

Como as opções possuem vencimentos curtos, foram utilizadas opções de Petrobrás, CSN, Itaú, Vale e Gerdau. Devido aos vencimentos curtos, foram utilizadas diversas opções, de acordo com seus vencimentos.

Foi utilizada uma janela de tempo de 66 dias para as análises e as posições se mantiveram fixas durante a janela de tempo considerada.

A função de aversão ao risco utilizada foi a exponencial e o nível de confiança utilizado foi de 97.5%.

De posse das medidas de risco para os 66 dias foram calculadas as estatísticas descritivas e foi plotado o histograma para as três medidas. Os resultados encontram-se abaixo:

<i>VaR</i>	
Mean	137,555.98
Standard Error	6,080.08
Median	130,389.98
Standard Deviation	49,394.79
Sample Variance	2,439,845,639.35
Kurtosis	(1.40)
Skewness	0.26

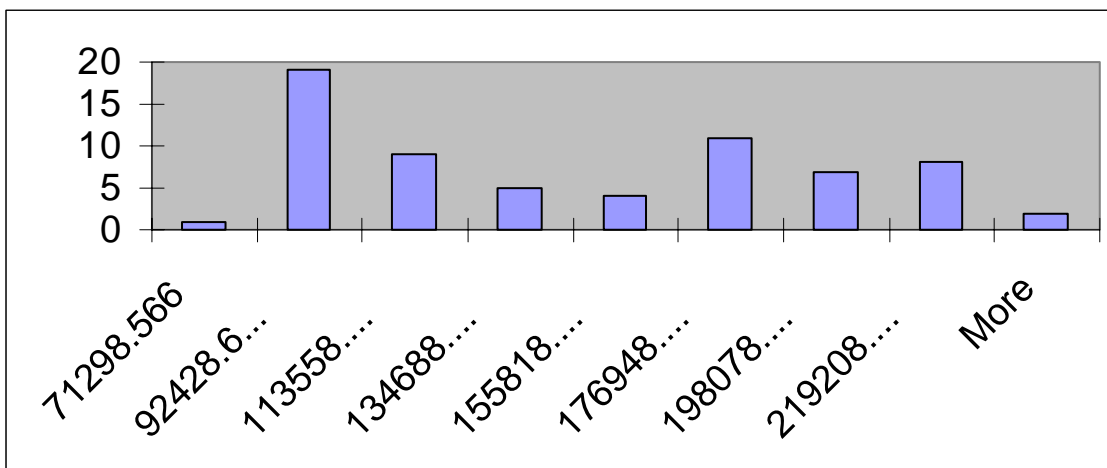


Figura 9 – Histograma do VaR

<i>Expected Shortfall</i>	
Mean	163,101.93
Standard Error	7,193.47
Median	155,934.87
Standard Deviation	58,440.00
Sample Variance	3,415,234,122.07
Kurtosis	(1.38)
Skewness	0.27

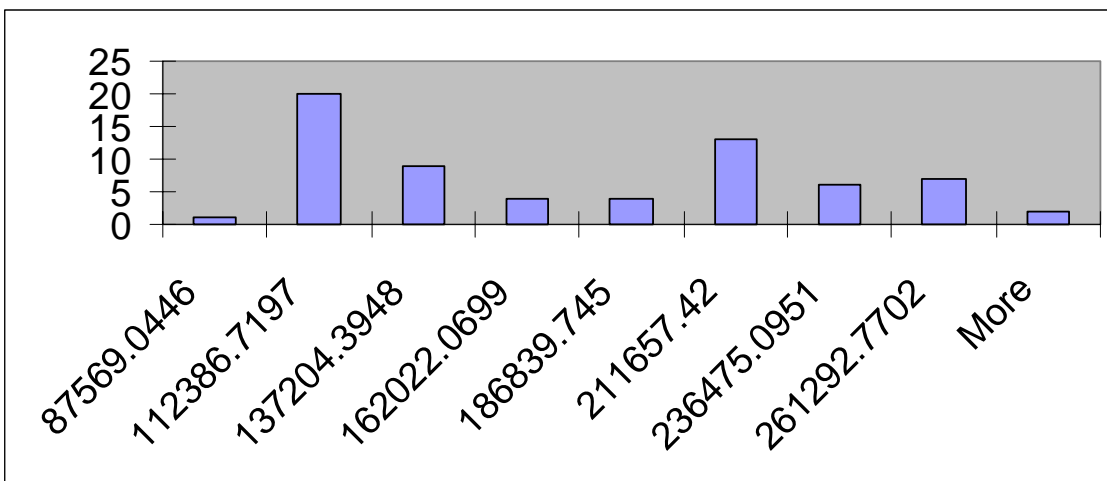


Figura 10 – Histograma do Expected Shortfall

<i>Medida Espectral</i>	
Mean	150,585.04
Standard Error	6,658.28
Median	143,904.19
Standard Deviation	54,092.16
Sample Variance	2,925,962,050.20
Kurtosis	(1.38)
Skewness	0.27

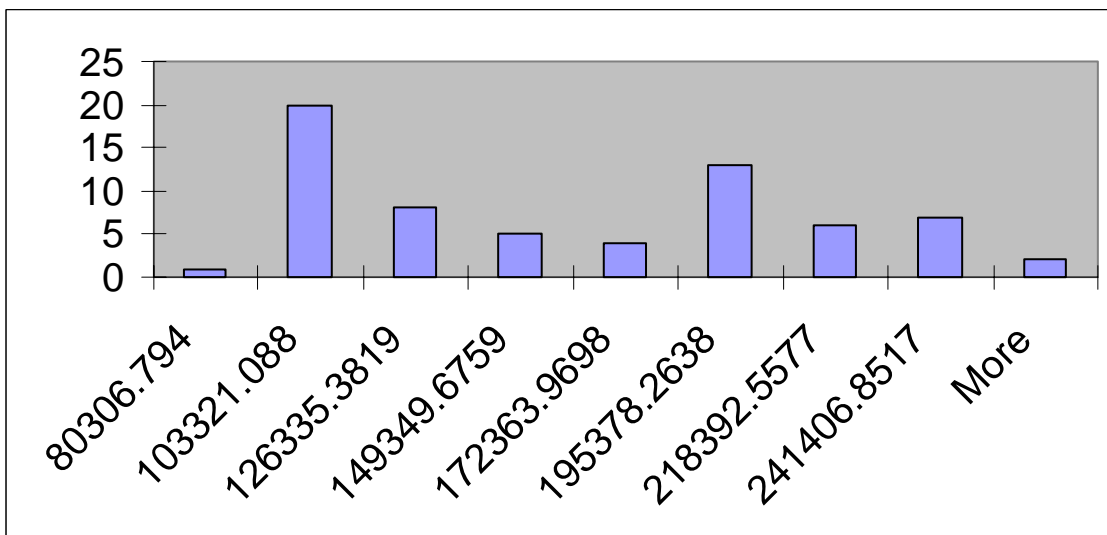


Figura 11 – Histograma da Medida Espectral

Como podemos perceber, devido à presença de ativos não lineares, a distribuição das medidas fica bem distante da distribuição normal. Ainda, os histogramas são similares visto que as medidas são funções uma da outra e novamente foi usado o

modelo lognormal para os preços dos ativos nas simulações de Monte Carlo. Conforme visto no capítulo 3, neste modelo o VaR é coerente e, portanto, temos uma forte correlação entre as três medidas de risco.

Ao contrário da carteira contendo apenas ações, a curtose das três medidas é negativa e com uma magnitude superior àquela encontrada no portfólio linear. A assimetria foi a mesma nas três medidas. O VaR apresentou erro padrão e desvio padrão menores, sendo seguido pela medida espectral e pelo expected shortfall.

Abaixo segue gráfico com a evolução histórica das três medidas.

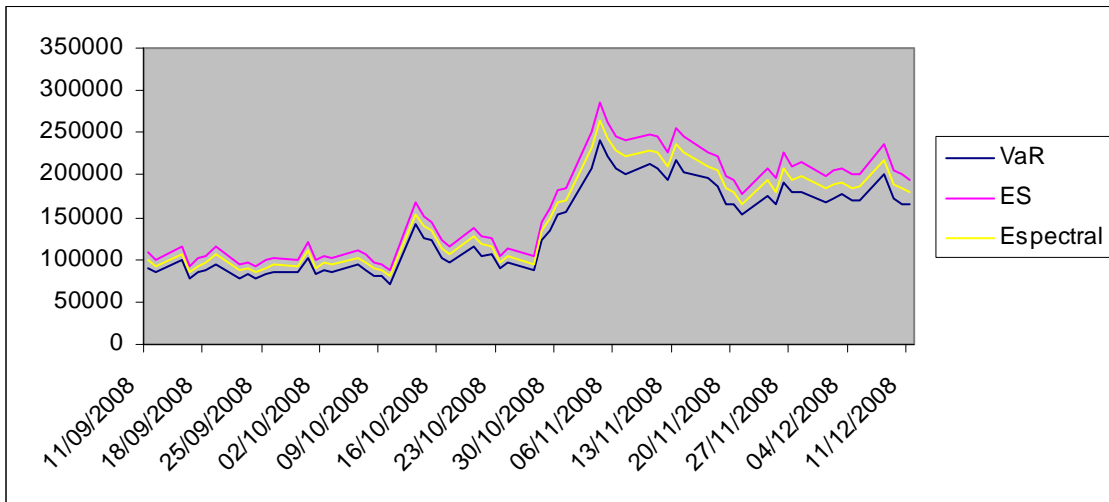


Figura 12 – Séries Históricas das Medidas de Risco

Podemos concluir que a medida espectral apresenta o comportamento esperado tanto para uma carteira linear quanto para uma carteira contendo opções, tendo desvio padrão e erro padrão menores que aqueles apresentados pelo ES.

De posse das carteiras ótimas encontradas podemos concluir também que a medida espectral nos fornece, quando minimizada, uma carteira com risco 55% menor e com um retorno 53% maior enquanto o ES apresenta um risco 53% menor com um retorno 33% maior.

Desta forma, temos que a medida espectral, além de ser uma medida de riscos coerente, se mostra superior ao expected shortfall tanto estatisticamente quanto na obtenção de carteiras ótimas.

7.3 – Backtesting das Medidas de Risco

Após mensurar as medidas de risco de uma carteira deve-se validar os modelos utilizados, de forma a verificar se o mesmo se apresenta adequado.

Esta verificação pode ser realizada com um conjunto de ferramentas, que incluem o backtesting.

O backtesting é uma ferramenta estatística para verificar a consistência entre as perdas observadas e as previstas pelos modelos de risco. Para o caso do VaR, isso implica comparar o histórico de perdas estimadas com os retornos observados da carteira.

O modelo mais utilizado como “BackTesting” de VaR é o modelo de exceções, que consiste em verificar a precisão de um modelo em registrar a taxa de exceções, correspondente à proporção das vezes em que o resultado foi pior do que o VaR para uma determinada amostra.

Primeiro, definimos VaR_{t+1}^p , um número avaliado em t tal que a perda de uma carteira em $t+1$ será maior que VaR_{t+1}^p com probabilidade p . Se observarmos uma série temporal das estimativas passadas de VaR, ex-ante, e das perdas (PL), ex-post, podemos definir a seqüência de exceções do VaR como:

$$I_{t+1} = \begin{cases} 1, & se PL_{t+1} > VaR_{t+1}^p \\ 0, & se PL_{t+1} < VaR_{t+1}^p \end{cases}$$

Para o backtesting, construímos uma seqüência $\{I_{t+1}\}^T$ sobre uma amostra de T dias.

Caso o modelo utilizado esteja correto, esperamos obter 1 na seqüência de exceções com probabilidade p e 0 com probabilidade $1-p$. Além disso, a ocorrência das violações deve ser aleatório ao longo do tempo.

Desta forma, o backtesting do VaR equivale a testar a hipótese:

$$H_0: I_{t+1} \sim \text{iid Bernoulli}(p)$$

A abordagem para o teste é o arcabouço clássico de testes para seqüências de sucessos e fracassos, também chamados de eventos de Bernoulli. O número de exceções, X , possui distribuição de probabilidade binomial:

$$f(X) = \binom{T}{x} p^x (1-p)^{T-x}$$

Sabemos que X possui valor esperado $E[X] = pT$ e variância $V[X] = p(1-p)T$. Quando T é grande, pode-se usar o teorema central do limite e aproximar a distribuição binomial pela distribuição normal:

$$z = \frac{x - pT}{\sqrt{p(1-p)T}} \sim N(0,1)$$

Kupiec (1995) gerou regiões de confiança para o teste. Essas regiões são definidas por uma razão de log-verossimilhança, onde N é o número de exceções:

$$LR = -2 \ln[(1-p)^{T-N} p^N] + 2 \ln\left\{ \left[1 - \left(\frac{N}{T}\right)\right]^{T-N} \left(\frac{N}{T}\right)\right\}$$

LR possui distribuição assintótica qui-quadrado com um grau de liberdade, sob a hipótese alternativa. Portanto, rejeita-se a hipótese nula se $LR > 3.84$.

Na tabela abaixo, temos as regiões de não-rejeição do modelo com intervalo de confiança de 95% e amostras de tamanho $T = 255$ e $T = 500$ dias:

Nível de Probabilidade:	Nível de Confiança do VaR (%)	T = 255 dias	T = 510 dias
0.01	99	$N < 7$	$1 < N < 11$
0.025	97.5	$2 < N < 12$	$6 < N < 21$
0.05	95	$6 < N < 21$	$16 < N < 36$
0.075	92.5	$11 < N < 28$	$27 < N < 51$
0.1	90	$16 < N < 36$	$38 < N < 65$

De posse do teste acima e das estimações de VaR para os 255 dias e para a carteira de ações descrita para os testes estatísticos, foi realizado o backtesting. Segundo a tabela acima, esperamos encontrar entre 2 e 12 exceções. O valor encontrado foi $N = 4$, o que nos mostra que o modelo utilizado é adequado. A figura 9 mostra a série histórica dos ganhos e perdas da carteira utilizada e do VaR:

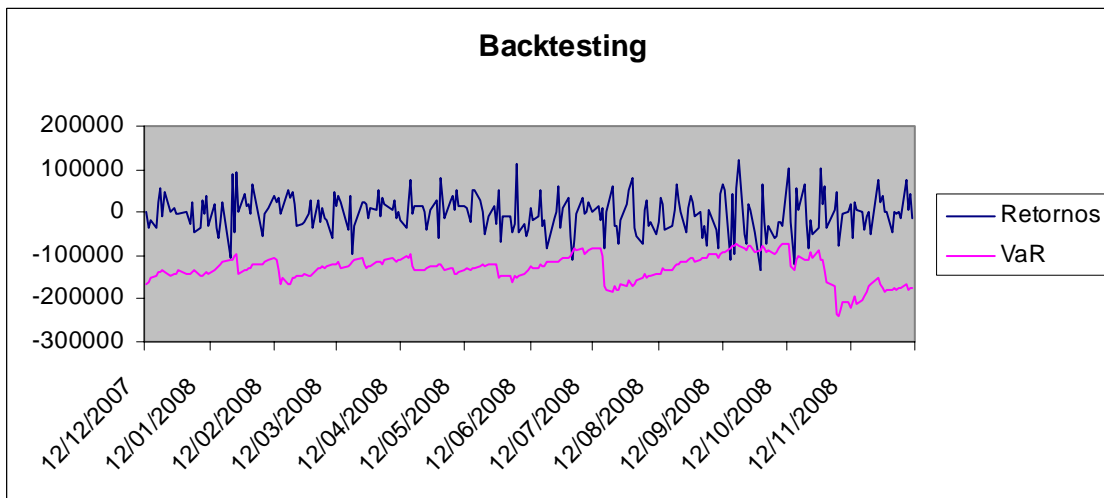


Figura 13 – Backtesting do modelo VaR

Vale ressaltar que o teste apresentado acima não necessita de nenhuma hipótese sobre a distribuição dos retornos.

Para realizarmos o backtesting do Expected Shortfall, primeiramente selecionamos os dias em que a perda superou o VaR. Após isso, computamos:

$$NS = \frac{PL_{t+1}}{ES_{t+1}}$$

Onde NS é conhecido como “Normalized Shortfall”.

Computamos então a média de NS. Como o ES é o valor esperado da perda quando esta supera o VaR, espera-se que o valor da média de NS seja o mais próximo de 1 possível.

O valor encontrado com série temporal utilizada foi 1.099, o que nos mostra que o modelo está adequado também para o ES.

8 – Conclusões

O objetivo deste trabalho foi estudar as medidas coerentes de risco, estimar corretamente o risco de um portfólio contendo ativos lineares e não lineares e encontrar o portfólio ótimo, ou seja, encontrar a carteira que apresenta o menor risco possível considerando os ativos iniciais.

Para isso, foi apresentada no capítulo dois uma introdução às medidas de risco e à teoria das medidas coerentes de risco. Neste capítulo foi mostrada a relação entre coerência e teoria da preferência.

No capítulo três foi estudado o Value-at-Risk. Foi demonstrada a sua falta de coerência e apresentado o modelo delta-normal, de forma a traçarmos um paralelo entre teoria e prática.

No capítulo quatro foram apresentadas duas medidas coerentes de risco: o Expected Shortfall (ES) e as Medidas Espectrais de risco. Foram demonstradas as suas coerências e apresentados os modelos. Ainda, para o ES, foi apresentado o modelo delta-normal.

No capítulo cinco foi apresentada a Simulação de Monte Carlo, utilizada para a estimação das medidas de risco. A vantagem da Simulação de Monte Carlo encontra-se na estimação de riscos em carteiras que contenham ativos não-lineares, como opções. Ainda, foram apresentados os modelos necessários para a correta estimação das medidas coerentes de risco.

No sexto capítulo foi apresentada a teoria para a otimização de portfólio. Foram apresentados os problemas associados à minimização das medidas coerentes, decorrentes da ordenação necessária para a estimação das medidas, e demonstrada a sua solução, alterando a função objetivo a ser utilizada nos problemas de minimização.

Finalmente, no sétimo capítulo, foram realizadas as estimações empíricas.

Foi selecionada uma carteira contendo diversas ações e opções de ações, de forma a termos um portfólio contendo ativos lineares e não-lineares. Para esse portfólio foram estimados o VaR, o Expected Shortfall e a Medida Espectral com espectro de risco exponencial. Como esperado, o ES e a Medida Espectral apresentam valores superiores ao VaR.

Foi também verificado que a função de aversão ao risco apresenta as três características necessárias para a garantia da coerência, conforme demonstrado no capítulo quatro.

De posse das estimações das medidas de risco, o próximo passo foi a minimização das medidas coerentes estudadas.

Para isso, foi utilizada a teoria apresentada no capítulo seis, ou seja, as funções objetivo dos problemas de minimização foram substituídas para a solução do problema decorrente da ordenação.

Os portfólio encontrados efetivamente apresentaram riscos inferiores ao portfólio original. De fato, tivemos uma diminuição no risco de cerca de 55% na medida espectral e 53% no ES.

O próximo passo das estimações empíricas foi a realização de análises estatísticas nas três medidas estudadas.

Foi selecionada uma janela de tempo de 255 dias (de 11/12/2007 a 11/12/2008) e uma carteira contendo ações, que se mantiveram fixas ao longo dos 255 dias de análise.

De posse das medidas de risco para os 255 dias foram calculadas as estatísticas descritivas e foi plotado o histograma para as três medidas. Os histogramas plotados foram muito similares e este resultado era esperado, visto que as medidas são funções uma da outra, a carteira utilizada apresenta somente ativos lineares e, principalmente, pois foi adotado o modelo lognormal para o preço dos ativos nas simulações de Monte Carlo. Conforme visto no capítulo 3, neste modelo o VaR é coerente e, portanto, temos uma forte correlação entre as três medidas de risco.

Ainda, o VaR foi a medida que apresentou os menores desvio padrão e erro padrão, seguido pela Medida Espectral e pelo Expected Shortfall. Porém, o VaR apresentou a maior curtose, seguido pela Medida Espectral e pelo ES. A assimetria encontrada foi a mesma para as três medidas.

Também foram realizadas análises estatísticas para uma carteira contendo ações e opções de modo a analisarmos o comportamento das medidas na presença de ativos não-lineares.

Foi utilizada uma janela de tempo de 66 dias para as análises e as posições se mantiveram fixas durante a janela de tempo considerada.

De posse das medidas de risco para os 66 dias foram calculadas as estatísticas descritivas e foi plotado o histograma para as três medidas. Os histogramas plotados são similares visto que as medidas são funções uma da outra e foi adotado o modelo lognormal para o preço dos ativos nas simulações de Monte Carlo.

Ao contrário da carteira contendo apenas ações, a curtose das três medidas foi negativa e com uma magnitude superior àquela encontrada no portfólio linear. A

assimetria foi a mesma nas três medidas. O VaR apresentou erro padrão e desvio padrão menores, sendo seguido pela medida espectral e pelo expected shortfall.

Podemos concluir então, que a medida espectral apresenta o comportamento esperado tanto para uma carteira linear quanto para uma carteira contendo opções, tendo desvio padrão e erro padrão menores que aqueles apresentados pelo ES.

De posse das carteiras ótimas encontradas podemos concluir também que a medida espectral nos fornece, quando minimizada, uma carteira com risco 55% menor e com um retorno 53% maior enquanto o ES apresenta um risco 53% menor com um retorno 33% maior.

Desta forma, temos que a medida espectral, além de ser uma medida de riscos coerente, se mostra superior ao expected shortfall tanto estatisticamente quanto na obtenção de carteiras ótimas.

Na realização do backtesting de VaR, segundo a tabela de exceções, esperávamos encontrar entre 2 e 12 exceções. O valor encontrado foi 4, o que nos mostra que o modelo utilizado é adequado. Para o ES esperávamos encontrar um “Normalized Shortfall” próximo de 1 e o valor encontrado 1.099, o que nos mostra que o modelo está adequado também para o ES.

Desta forma, podemos concluir que as medidas apresentadas são boas medidas para a estimação do risco de um portfólio contendo ativos lineares e não-lineares. Ainda, as técnicas de minimização empregadas nos garantem uma carteira com o menor risco possível dentro do universo de ativos iniciais e com retorno esperado maior que aquele apresentado pelo portfólio inicial.

Apêndice I

Teorema de Gilboa & Schmeidler, 1989.

Se ρ é uma medida coerente de risco em χ então o funcional J definido por $-\rho(X)$ é monótono, côncavo, positivamente homogêneo e invariante a translações. Ou seja, um funcional $\rho: \chi \rightarrow \mathfrak{R}$ é uma medida coerente de risco se, e somente se, existe um subconjunto Q de $M_{1,f}$ tal que:

$$\rho(X) = - \text{INF}_{q \in Q} \{E_q[X]\} = \text{SUP}_{q \in Q} \{E_q[-X]\}, X \in \chi \quad (1)$$

A necessidade foi demonstrada no capítulo 2. Agora iremos demonstrar a suficiência.

Construímos para todo $X \in \chi$ um conjunto de funções finitas aditivas Q_X tais que:

$$J(X) = E_{Q_X}[X] \text{ e } J(Y) \leq E_{Q_X}[Y]$$

para todo $Y \in \chi$.

Então:

$$J(Y) = \min_{Q \in Q_0} E_Q[Y], \text{ para todo } Y \in \chi$$

onde $Q_0 = \{Q_X / X \in \chi\}$

Claramente $J(Y)$ permanece verdadeiro se substituirmos Q_0 pela sua envoltória convexa $Q := \text{conv}(Q_0)$.

Para construir Q_X para um dado $X \in \chi$, definimos três conjuntos convexos em χ por:

$$B = \{Y \in \chi / J(Y) > 1\}$$

$$C_1 = \{Y \in \chi / Y \leq 1\}$$

$$C_2 = \{Y \in \chi / Y \leq \frac{X}{J(X)}\}$$

A convexidade de C_1 e C_2 implica que a envoltória convexa de sua união é dada por:

$$C = \text{conv}(C_1 \cup C_2) = \{aY_1 + (1-a)Y_2 / Y_i \in C_i \text{ e } a \in [0,1]\}$$

Como $Y \in C$ é da forma $Y = aY_1 + (1-a)Y_2$ para algum $Y_i \in C_i$ e $a \in [0,1]$:

$$J(Y) \leq J(aY_1 + (1-a)Y_2) = aJ(Y_1) + (1-a)J(Y_2) \leq 1$$

Então B e C são disjuntos.

Seja χ com norma suprema $\|Y\| := \sup_{w \in \Omega} |Y(w)|$.

Então C_1 , e conseqüentemente C_2 , contem a bola unitária em χ .

Em particular, C possui interior não vazio.

Então podemos aplicar o argumento da separação, que resulta em um funcional linear contínuo não-nulo l em χ tal que:

$$c := \sup_{Y \in C} l(Y) \leq \inf_{Z \in B} l(Z)$$

Como C contem a bola unitária, c deve ser estritamente positivo e não há perda de generalidade ao assumir que $c=1$.

Em particular, $l(1) \leq 1$ quando $1 \in C$.

Por outro lado, qualquer constante $b > 1$ está contido em B e então:

$$l(1) = \lim_{b \downarrow 1} l(b) \geq c = 1$$

Portanto, $l(1) = 1$.

Se $A \in F$ então $I_{A^c} \in C_1 \subset C$, o que implica que:

$$l(I_A) = l(1) - l(I_{A^c}) \geq 1 - 1 = 0$$

Temos que a integral:

$$l(H) = \int H d\mu, H \in \chi$$

define uma correspondência um a um entre funcionais lineares contínuos l em χ e conjuntos de funções finitas aditivas $\mu \in ba$.

Então existe um conjunto de funções finitas aditivas Q_X em $M_{1,f}(\Omega, F)$ tais que:

$$l(Y) = E_{Q_X}[Y]$$

para qualquer $Y \in \chi$.

Falta mostrar que $E_{Q_X}[Y] \geq J(Y)$ para todo $Y \in \chi$, com igualdade para $Y=X$.

Pela invariância de translações de J , só precisamos considerar o caso em que $J(Y) > 0$.

Então

$$Y_n = \frac{Y}{J(Y)} + \frac{1}{n} \in B$$

e $Y_n \rightarrow Y/J(Y)$ uniformemente. Portanto:

$$\frac{E_{Q_x}[Y]}{J(Y)} = \lim_{n \uparrow \infty} E_{Q_x}[Y_n] \geq 1$$

Por outro lado, $X/J(X) \in C_2 \subset C$ gera a desigualdade:

$$\frac{E_{Q_x}[X]}{J(X)} \leq c = 1$$

Referências Bibliográficas

- [1] ARCEBI, C. *Coherent Representation of Subjective Risk Aversion*. Wiley, 2003
- [2] ARCEBI, C. *Spectral Measures of Risk: A Coherent Representation of Subject Risk Aversion*. Journal of Banking & Finance, 2002
- [3] ARCEBI, C., TASCHE, D. *On the Coherence of Expected Shortfall*. Journal of Banking & Finance, 2002
- [4] ARTZNER, P., DELBAEN, F., EBER, J.-M, HEATH, D. *Coherent Measures of Risk*. Mathematical Finance, 1999
- [5] ARTZNER, P., DELBAEN, F., EBER, J.-M, HEATH, D. *Thinking Coherently*. Mathematical Finance, 1997
- [6] CHERNY, A. S. *Coherent Measurement of Factor Risk*. Preprint
- [7] CHERNY, A. S. *Weighted VaR and Its Properties*. Preprint
- [8] CHERNY, A. S. *Pricing with Coherent Risk*. Preprint
- [9] CHRISTOFFERSEN, P. *Backtesting*. Academic Press, 2008
- [10] DOWD, K. *Spectral Risk Measures*. Financial Engineering, electronic journal
- [11] FOLLMER, H., SCHIED, A. *Stochastic Finance – An Introduction in Discrete Time*. Walter de Gruyter, 2004
- [12] FARO, J. H., CASTRO, L. I. *Introdução à Teoria da Escolha*. 25º Colóquio Brasileiro de Matemática.
- [13] GILBOA, I., SCHMEIDLER, D. *Maxmin Expected Utility with Non-Unique Prior*. Journal of Math. Economics 18, 1989.
- [14] HULL, JOHN C. *Fundamentos dos Mercados Futuros e de Opções*. São Paulo: Bolsa de Mercadorias e Futuros, 16 pp. 411-434, 2005, 5ª Edição.
- [15] J. P. MORGAN BANK. *RiskMetrics Technical Manual*. Terceira Edição, 1995.
- [16] JORION, P. *Value at Risk*. São Paulo: Bolsa de Mercadorias e Futuros, 2003.
- [17] KORN, R., KORN, E. *Option Pricing and Portfolio Optimization*. Graduate Studies in Mathematics, 2000
- [18] KUPIEC, P. *Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Model*. Journal of Derivatives, 1995
- [19] MEUCCI, A. *Risk and Asset Allocation*. Springer Finance, 2005
- [20] ROCKAFELLAR, R. T., URYASEV, S. *Optimization of Conditional Value-at-Risk*. Journal of Risk 2, 2000

[21] ROVETTA, R. L. *Estudo do Conceito de Value-At-Risk e sua Aplicação para Carteiras Formadas por Opções*. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Industrial, PUC-Rio, 1999.

[22] WARNUNG, R. *Beyond VaR: Manageable Alternatives*. Global Association of Risk Professionals, 2007