

MODELOS DE VOLATILIDADE ESTOCÁSTICA PARA O ÍNDICE
IBOVESPA

Reversão Rápida à Média e Análise Assintótica

por

Cássio Antonio Machado Alves

Dissertação de Mestrado submetida ao
Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada
como requerimento para a obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Métodos Matemáticos em Finanças
Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – IMPA

Rio de Janeiro, Abril de 2008

Cássio Antonio Machado Alves

**Modelos de Volatilidade Estocástica para o Índice
IBOVESPA**

Reversão Rápida à Média e Análise Assintótica

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-graduação em Métodos Matemáticos em Finanças do IMPA. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Dr. Jorge Passamani Zubelli

Orientador

IMPA – Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

Dr. Max Oliveira Souza

Co-orientador

UFF – Universidade Federal Fluminense

Dr. Roberto Imbuzeiro Oliveira

IMPA – Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

Dr. Rafael Iório

IMPA – Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

Rio de Janeiro, 4 de Abril de 2008

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização do instituto, do autor e do orientador. Os *softwares* utilizados na preparação deste trabalho não violam direitos. São eles: editor L^AT_EX L^ED, disponível em <http://www.latexeditor.org>, compilador MiKTeX, disponível em <http://miktex.org>, e editor de imagens xfig. Os resultados foram gerados utilizando-se o *software* MatLab 2007, fruto do acordo entre o IMPA e a Opencadd.

Cássio Antonio Machado Alves

Graduou-se em Matemática na Universidade Federal Fluminense (Niterói, Rio de Janeiro, Brasil).

Ficha Catalográfica

Alves, Cássio Antonio Machado

Modelos de Volatilidade Estocástica para o Índice IBOVESPA / Cássio Antonio Machado Alves; orientador: Jorge Passamani Zubelli; co-orientador: Max Oliveira Souza. — Rio de Janeiro : IMPA, Matemática, 2008.

v., 87 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada , Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese. 2. Volatilidade Estocástica. 3. Reversão Rápida à Média. 4. Análise Assintótica. 5. Superfície de Volatilidade Implícita. 6. IBOVESPA. I. Zubelli, Jorge Passamani. II. Souza, Max Oliveira. III. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada . Matemática. IV. Título.

Agradecimentos

Agradeço antes de tudo a Deus, por ter me dado a oportunidade de realizar um trabalho tão importante para mim e contribuir com o avanço científico de meu país.

Dedico minhas primeiras palavras de agradecimento ao Prof. Dr. Jorge P. Zubelli, meu Orientador. Agradeço pela sugestão do tema, pela confiança e pelo constante interesse na evolução deste trabalho. Pelo apoio fundamental em momentos importantes, pela oportunidade dada e sobretudo pela orientação, que somados resultaram neste trabalho.

Dedico sincero e especial agradecimento ao Prof. Dr. Max O. Souza, meu Co-orientador, que acompanha minha caminhada acadêmica desde a graduação. Sempre me incentivando e orientando nos mais diversos horários e das mais diversas formas. Suas idéias “espetaculares” engrandeceram muito este trabalho. Seu constante apoio, que por diversas vezes foi além da dinâmica acadêmica, foi fundamental para tornar real este trabalho.

Agradeço aos professores Jorge Delgado, Maria Lúcia T. Villela e Renata R. Del-Vecchio, com quem tive o prazer de trabalhar na UFF e que tiveram papel importante durante minha formação na graduação.

Aos amigos do IMPA, Flávio Val, Rodrigo Claessen e Thais Rodrigues, agradeço a amizade construída durante esses últimos anos. Sempre me apoiando, incentivando e compartilhando o conhecimento. Um agradecimento especial aqui aos grandes amigos Leonardo Lima, Leonardo Moraes e Welington Oliveira pelos esforços compartilhados em várias listas de exercício, trabalhos, provas e tardes de estudo no IMPA. Agradeço os conselhos profissionais, as muitas dúvidas sanadas em programação (Fortran 90, Latex e Matlab), os exemplos de perseverança e dedicação, e pelo conjunto denso de momentos de amizades que juntos compartilhamos fora do IMPA.

Aos amigos de longa data: Diego e Priscila Estrela e aos amigos de faculdade, agradeço o incentivo, a confiança e a torcida pelo meu sucesso.

Agradeço aos meus parentes de uma forma geral, em especial à minha Avó Maria. Vocês que torceram e acreditaram no meu sucesso e foram compreensivos quando por vários momentos não pude estar presente em momentos importantes de suas vidas.

Agradeço a uma pessoa muito especial, minha namorada Greice Reinaldo. Você cruzou meu caminho a pouco tempo, e tem se mostrado tão importante e presente em minha vida, mesmo estando do outro lado da ponte aérea. Saiba que você tem uma parcela especial neste trabalho.

Sobretudo agradeço aos meus Pais, Edmissio e Cecília, e aos meus irmãos, João e Cassiano, meus mais próximos companheiros nestes 25 anos. Sempre ao

meu lado em todas as circunstâncias seu apoio foi e sempre será fundamental em minha vida. É motivo de orgulho para mim ter vocês ao meu lado, a quem devo grande parte desta conquista.

Não poderia esquecer de agradecer à BOVESPA, na pessoa do Sr Rogério Marques, Supervisor de Assistência ao Mercado - Gerência Técnica de Mercado, que forneceu todos os dados utilizados neste trabalho, os quais possuem papel essencial na elaboração dos resultados aqui apresentados.

Por fim agradeço a todos aqueles que de uma simples maneira se fizeram presente em minha vida nesta caminhada e participaram de todo este processo. Peço desculpas pela falha na retenção e/ou na evocação de vossos nomes.

Resumo

Alves, Cássio Antonio Machado; Zubelli, Jorge Passamani; Souza, Max Oliveira. **Modelos de Volatilidade Estocástica para o Índice IBOVESPA**. Rio de Janeiro, 2008. 87p. Dissertação de Mestrado — Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada .

Em 1973, Black & Scholes e Merton derivaram uma fórmula, hoje conhecida como fórmula de Black & Scholes, para o apreamento de opções. Esta fórmula tornou-se ferramenta amplamente difundida e utilizada pelo mercado financeiro de todo o mundo. Porém, evidências empíricas e resultados estatísticos, como a não-normalidade dos retornos e o efeito *smile*, mostram a inconsistência de algumas das hipóteses feitas por Black & Scholes, sendo uma das mais controversas a de que a volatilidade seja constante. Em trabalhos recentes, J-P. Fouque, G. Papanicolaou & R. Sircar, consideram um modelo com volatilidade estocástica com reversão rápida à média. Inclusive tendo verificado o regime em questão para o índice de ações norte-americano S&P 500. Sob a hipótese de reversão rápida à média, Fouque, Papanicolaou & Sircar obtiveram uma correção para o preço de Black & Scholes, independente do estado da volatilidade, através de uma expansão assintótica. Em seu trabalho, a calibragem do modelo é feita por um estimador não paramétrico, através do uso da superfície de volatilidade implícita do mercado. Sob este ponto de vista, neste trabalho verifica-se a hipótese de reversão rápida à média para o principal índice de ações brasileiro, o IBOVESPA. Tendo em vista a estimação, não-paramétrica, da superfície de volatilidade implícita, torna-se fundamental o uso de um método, desenvolvido por N. Kahlé, para interpolar superfícies de volatilidade implícita para um conjunto de dados esparsos. Tal ferramenta foi necessária para que se pudesse contornar a falta de liquidez do mercado brasileiro de opções sobre o índice IBOVESPA.

Palavras-chave

Volatilidade Estocástica. Reversão Rápida à Média. Análise Assintótica. Superfície de Volatilidade Implícita. IBOVESPA.

Abstract

Alves, Cássio Antonio Machado; Zubelli, Jorge Passamani; Souza, Max Oliveira. **Stochastic Volatility Models in the Brazilian Index Stock Market**. Rio de Janeiro, 2008. 87p. MsC Thesis — Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada .

In 1973, Black & Scholes and Merton derived a pricing formula for options, nowadays known as the Black & Scholes formula. This formula became widely used in financial markets worldwide. However, there are empirical evidences, such as the non-normality of the returns and the *smile* effect, that show inconsistencies in some of the hypothesis postulated by Black & Scholes. The most controversial one being the assumption of constant volatility. In recent works, J-P. Fouque, G. Papanicolaou & R. Sircar, consider a model with stochastic volatility, that reverts to a mean under the assumption of fast mean-reversion. They derived an asymptotic correction for the Black & Scholes price, which is independent of the volatility driving process state. They verified that such regime, is indeed present in the S&P500. The calibration of the correction is a non-parametric one, through the use of the market implied volatility surface. In this work, it is verified that the main Brazilian stock index, IBOVESPA, displays a mean reversion behaviour. For the calibration of the correction, due to lack of liquidity of the Brazilian option market, an appropriate interpolation of the sparse data is necessary to generate an implied volatility surface. This is done using a method derived by N. Kahalé that guarantees that there is no arbitrage in the interpolated surface.

Keywords

Stochastic Volatility. Fast Mean Reversion. Asymptotics Analysis. Implied Volatility Surface. IBOVESPA.

Sumário

1	Introdução	13
1.1	Organização do Trabalho	14
2	Modelo de Black - Scholes	16
2.1	Apreçamento	19
3	Modelos de Volatilidade Estocástica	26
3.1	Modelos com Reversão à Média	26
3.1.1	Modelo de Cox-Ingersoll-Ross (CIR)	28
3.1.2	Modelo de Ornstein-Uhlenbeck (OU)	28
3.2	Apreçamento do Derivativo	29
3.3	Escalas de Tempo no Processo de Volatilidade	35
4	Identificação de Reversão Rápida à Média	38
4.1	Modelo e Dados	38
4.2	Procedimento Estatístico	39
4.3	Algoritmo para Estimação	40
4.4	Dados Sintéticos	41
4.5	Regime do IBOVESPA	42
4.5.1	Série Histórica de 2005	43
4.5.2	Série Histórica de 2006	45
5	Análise Assintótica	48
5.1	Análise Dimensional	48
5.2	Solução Assintótica	50
5.3	Volatilidade Implícada para Opções Europeias de Compra	59
6	Interpolação da Superfície de Volatilidade Implícita	62
6.1	Conceitos Preliminares	62
6.2	Método de Interpolação	63
6.3	Algoritmo para Interpolação	70
6.4	Interpolação Bi-dimensional	71
6.5	Superfícies de Volatilidade Implícita para o IBOVESPA	72
6.5.1	Superfície de Volatilidade Implícita no dia 24/01/2005	72
6.5.2	Superfície de Volatilidade Implícita no dia 04/02/2005	72
7	Resultados Empíricos para o IBOVESPA	77
7.1	Estimação da Superfície de Volatilidade Implícita	77
7.2	Uma parametrização no tempo de Fouque et al	78
8	Conclusões e Aprimoramentos Futuros	83
8.1	Contribuições do Trabalho	83
8.2	Aprimoramentos Futuros	84

Lista de figuras

2.1	Valor intrínseco de uma opção europeia de compra e uma opção europeia de venda, com preço de exercício K , data de vencimento T e preço do ativo X .	20
3.1	Volatilidade Estocástica Simulada, com $f(y) = e^y, m_1 = 0.001, m_2 = 4$ e com os parâmetros: $\alpha = 1, m = -0.7, \beta = 0.5, \rho = -0.2$.	30
3.2	Caminhos simulados para volatilidade, com $f(y) = e^y, m_1 = 0.001, m_2 = e^{2.5}, m = -0.7, v = 0.3, \rho = 0$.	36
3.3	Caminhos simulados para volatilidade, com $f(y) = 0.35 \frac{\arctan y + \frac{\pi}{3}}{\pi} + 0.01, m = -0.7, v = 3, \rho = 0$.	37
4.1	Retornos Simulados e Variograma	41
4.2	Ajuste do valor médio do variograma	42
4.3	Índice IBOVESPA e seu Retorno para 2005	44
4.4	Variograma IBOVESPA (2005)	44
4.5	Ajuste do Variograma Médio (2005)	45
4.6	Índice IBOVESPA e seu Retorno para 2006	46
4.7	Variograma IBOVESPA (2006)	46
4.8	Ajuste do Variograma Médio (2006)	47
5.1	Superfície de volatilidade implícita estimada pela análise assintótica. Os parâmetros estimados foram $a = -0.01105$ e $b = 0.2966$, para o valor do índice IBOVESPA de 24818.01 no dia 04/02/2005.	61
6.1	Curva de preços para opções no dia 24/01/2005, com o índice IBOVESPA cotado a 23812.51	73
6.2	Superfície de volatilidade implícita para opções sobre o IBOVESPA, no dia 24/01/2005, com o índice IBOVESPA cotado a 23812.51	74
6.3	Curva de preços para opções no dia 04/02/2005, com o índice IBOVESPA cotado a 24548.18	75
6.4	Superfície de volatilidade implícita para opções sobre o IBOVESPA, no dia 04/02/2005, com o índice IBOVESPA cotado a 24548.18	76
7.1	Ajuste da superfície de volatilidade implícita do mercado pela superfície estimada segundo FPS, no dia 21/01/2005, com o índice IBOVESPA cotado a 23608.58	78
7.2	Ajuste da superfície de volatilidade implícita do mercado pela superfície estimada segundo FPS, no dia 11/04/2006, com o índice IBOVESPA cotado a 37823.02	79
7.3	Ajuste da superfície de volatilidade implícita do mercado pela superfície estimada segundo FPS paramétrico no tempo, no dia 21/01/2005, com o índice IBOVESPA cotado a 23608.58	80

7.4	Ajuste da superfície de volatilidade implícita do mercado pela superfície estimada segundo FPS paramétrico no tempo, no dia 11/04/2006, com o índice IBOVESPA cotado a 23812.51	81
7.5	Ajuste da superfície de volatilidade implícita do mercado pela superfície estimada segundo FPS paramétrico no tempo, no dia 04/01/2005, com o índice IBOVESPA cotado a 24790.57	82

Lista de tabelas

4.1	Parâmetros usados na simulação	41
4.2	Parâmetros estimados pelo Variograma	42
4.3	Dias de negociação da BOVESPA	43
4.4	Parâmetros estimados pelo Variograma (2005)	43
4.5	Parâmetros estimados pelo Variograma (2006)	45
7.1	Erro da estimativa de FPS na figura 7.1	77
7.2	Erro da estimativa de FPS na figura 7.2	77
7.3	Erro da estimativa de FPS paramétrico no tempo na figura 7.3	78
7.4	Erro da estimativa de FPS paramétrico no tempo na figura 7.4	79
7.5	Erro da estimativa de FPS paramétrico no tempo na figura 7.5	80

*Dedico esta à minha Avó Maria e aos meus
Pais Edmissio e Cecília.*

1

Introdução

Black & Scholes e Merton deduziram, em 1973, uma fórmula para o apreamento de opções assumindo, dentre outras hipóteses, a log-normalidade dos retornos e volatilidade constante. Testes estatísticos sobre dados de mercado, como os apresentados em [25, 29, 16], evidenciam que tais hipóteses não são válidas. Além disso, dados de mercado costumam exibir o efeito conhecido como *smile*, [10, 15, 24], contrariando a hipótese de que a volatilidade do ativo é constante, i.e., invalidando a fórmula de Black & Scholes. Mais ainda, alguns trabalhos, [29, 15, 5] sugerem também um comportamento de retorno à média, para a volatilidade.

Uma parte significativa dos trabalhos encontrados atualmente na literatura tenta corrigir os problemas apresentados pelo modelo de Black & Scholes, através da introdução da hipótese que a dinâmica da volatilidade seja dada por um processo estocástico, [16, 29, 15]. Um das principais razões é o fato das distribuições dos retornos apresentarem uma cauda mais pesada que a da distribuição gaussiana, além do efeito *smile*, [10]. A incorporação da hipótese de volatilidade estocástica ajuda a justificar distribuições assimétricas, e, para o caso $\rho = 0$, Renault & Touzi mostram, em [24], que volatilidade estocástica implica *smile*. Porém, a introdução desta hipótese aumenta a dificuldade do apreamento de uma opção, uma vez que não existe uma única medida martingal equivalente.

Fouque, Papanicolaou & Sircar [11, 17, 12] sugerem em seu trabalho uma análise do regime de reversão rápida à média da volatilidade, através de métodos assintóticos. Em [17], eles derivam uma correção para o preço de Black & Scholes. Em trabalhos mais recentes, como o de Souza & Zubelli [28], sugere-se que em regimes diferentes, em particular quando a vol-vol é moderadamente pequena, tal correção assintótica toma uma forma um pouco diferente da encontrada em [17].

Em 2003, Fouque, Papanicolaou, Sircar & Solna [13] mostraram a evidência da reversão rápida à média, para o índice de ações americano S&P500.

Em 2005 Almeida & Dana, [1], aplicam esta metodologia para o mercado de ações brasileiro, verificando o regime para as ações da TELEMAR, porém em sua

análise não são usados dados de alta frequência ($\Delta t = 30$ minutos) para a verificação da hipótese de alta reversão à média e, devido ao problema de liquidez, a estimação dos parâmetros da correção é feita de uma maneira diversa da proposta por Fouque et al.

Neste trabalho aplica-se a metodologia proposta por Fouque et al, [17], para o índice IBVOESPA, principal índice de ações do mercado brasileiro. Verifica-se a hipótese de reversão à média da volatilidade usando dados de alta frequência ($\Delta t = 30$ segundos), e faz-se a estimação, não paramétrica, dos parâmetros do modelo, segundo Fouque et al., visando a calibração do modelo.

Para contornar o problema da falta de liquidez do mercado de opções brasileiro, mencionado em [1], apresenta-se um resultado crucial para a calibração do modelo. Desenvolve-se um algoritmo, baseado no método devido a Kahalé em [19], para interpolar superfícies de volatilidade implícita partindo de um conjunto esparso de dados de volatilidades implícita de mercado. Este algoritmo gera, a partir de dados livres de arbitragem, uma superfície de volatilidade implícita livre de arbitragem que satisfaz algumas condições de suavidade e estabilidade.

1.1

Organização do Trabalho

No capítulo 2, apresenta-se uma breve dedução da fórmula de Black & Scholes.

No capítulo 3, introduz-se o conceito de volatilidade estocástica, e apresentam-se dois exemplos baseados em modelos clássicos: Hull-White e Heston; [16, 15]. Vários resultados mostram uma melhor adaptação à volatilidade estocástica do que à volatilidade constante, [25, 29, 5]. Apresenta-se a dedução da equação do apreamento da opção no modelo de volatilidade estocástica.

No capítulo 4, seguindo a referência [17], é descrito um procedimento usado para verificar a hipótese de reversão rápida à média. Esse procedimento é usado para determinar se o processo satisfaz ao regime de Fouque et al., tendo sido aplicado a dados do IBOVESPA. Em seguida, no capítulo 5, apresenta-se a derivação da correção do preço de Black-Scholes, feita por Fouque et al. em [17], encontrando-se a expansão assintótica do mesmo. Além disso encontra-se a correção assintótica para a superfície de volatilidade implícita.

Como o mercado brasileiro de opções sobre o índice IBOVESPA apresenta uma baixa liquidez, torna-se necessário o desenvolvimento de uma ferramenta para poder reconstruir a superfície de volatilidade implícita de mercado. Sendo assim, no

capítulo 6, é descrito um método para interpolar a superfície de volatilidade implícita de mercado a partir de um conjunto esparso de dados. Esta abordagem garante propriedades importantes para a superfície, como a não-arbitragem, suavidade e estabilidade.

Finalmente, no capítulo 7 são apresentados os resultados numéricos obtidos do modelo de Fouque et al. [17] aplicados ao índice IBOVESPA. Os resultados são apresentados para um conjunto pequeno de dias dos anos de 2005 e 2006, devido à falta de liquidez do mercado de opções.

2

Modelo de Black - Scholes

Em 1973, Black & Scholes, [6], e Merton, [21], deduziram a fórmula para o apreamento de opções européias, a qual se tornou desde então, ferramenta imprescindível para os mercados financeiros de todo o mundo. A dedução desta fórmula é apresentada de maneira breve neste capítulo, devido à sua importância para o mercado e para este trabalho, baseando-se para isto, em [6, 30, 20].

Algumas definições, que são utilizadas durante o desenvolvimento deste trabalho, são expostas a seguir. Referências gerais para este capítulo são [20, 6, 30, 4, 8, 27]. Inicialmente são apresentadas as definições de espaço de probabilidade, filtração e processo estocástico.

Definição 2.1 (Espaço de Probabilidade) *Um espaço de probabilidade é um trio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, onde:*

- Ω é um conjunto não-vazio, chamado de espaço amostral;
- \mathcal{F} é uma σ -álgebra de subconjuntos de Ω , e
- \mathbb{P} é uma medida de probabilidade.

Definição 2.2 (Filtração) *Seja $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathcal{I}}$ uma coleção de σ -álgebras e \mathcal{I} um conjunto ordenado tais que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ para $s < t, s, t \in \mathcal{I}$. Tal coleção é chamada filtração.*

Definição 2.3 (Processo Estocástico) *O conjunto $\{(X_t, \mathcal{F}_t)\}_{t \in \mathcal{I}}$ formado pela filtração $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathcal{I}}$ e uma família de variáveis aleatórias tomando valores no \mathbb{R}^n com X_t sendo \mathcal{F}_t -mensurável é chamada de processo estocástico com filtração $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathcal{I}}$.*

Na seqüência deste trabalho, usualmente considera-se $\mathcal{I} = [0, \infty)$ ou $\mathcal{I} = [0, T)$ como conjunto de índices.

Define-se agora o processo conhecido como movimento browniano:

Definição 2.4 (Movimento Browniano) *Seja o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Defina-se como Movimento Browniano o processo $\{W_t\}_{t \geq 0}$ com caminhos contínuos tal que:*

- $W_0 = 0, \mathbb{P} - qtp$;
- $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s), s < t$, e
- $W_t - W_s$ independe de $W_u - W_v$ para $0 \leq r \leq u \leq s \leq t$.

A demonstração da existência do movimento browniano pode ser encontrada em [20].

Define-se agora uma classe de processos estocásticos que são fundamentais para aplicações de cálculo estocástico, os processos martingais:

Definição 2.5 (Martingal) *Dado o par $\{(X_t, \mathcal{F}_t)\}_{t \in \mathcal{I}}$, formado um processo com valores reais tal que $\mathbb{E}|X_t| < \infty$ para todo $t \in \mathcal{I}$ e um filtração, onde \mathcal{I} é um conjunto ordenado, então:*

- (X_T) é dito ser um super-martingal, se para todo $s, t \in \mathcal{I}$, com $s \leq t$ tem-se:

$$\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] \leq X_s, \mathbb{P} - qtp,$$

- (X_T) é dito ser um sub-martingal, se para todo $s, t \in \mathcal{I}$, com $s \leq t$ tem-se:

$$\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] \geq X_s, \mathbb{P} - qtp,$$

- (X_T) é dito ser um martingal, se para todo $s, t \in \mathcal{I}$, com $s \leq t$ tem-se:

$$\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s, \mathbb{P} - qtp.$$

Proposição 2.1 *O movimento Browniano unidimensional W_t é um martingal em relação ao filtro adaptado \mathcal{F}_t .*

Prova.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W_t | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[W_t - W_s + W_s | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[W_t - W_s | \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[W_s | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[W_t - W_s | \mathcal{F}_s] + W_s \\ &= W_s. \end{aligned}$$

para $s \leq t$, \mathbb{P} -qtp. ■

Define-se agora o que é uma integral estocástica e em seguida apresentam-se duas propriedades importantes.

Definição 2.6 (Integral Estocástica) *Seja o processo estocástico simples $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$. A integral estocástica $\mathbb{I}(X)$ para $t \in [0, T]$ é definida como:*

$$\mathbb{I}(X) := \int_0^t X_s dW_s := \sum_{1 \leq i \leq p} X_i (W_{t_i \wedge t} - W_{t_{i-1} \wedge t}).$$

Um apresentação para um processo mais geral pode ser encontrada em [22].

Proposição 2.2 (Propriedades da Integral Estocástica) *Sejam $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$ um processo estocástico e $\mathbb{I}(X)$ a integral estocástica. As afirmações a seguir são verdadeiras:*

- $\{\mathbb{I}(X)\}_{t \in [0, T]}$ é um martingal com respeito a $\{\mathcal{F}\}_{t \in [0, T]}$. Em particular, $\mathbb{E}[\mathbb{I}_t(X)] = 0$ para todo $t \in [0, T]$, e
- Para $t \in [0, T]$ tem-se

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t X_s dW_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^t X_s^2 ds \right]. \quad (2-1)$$

A relação (2-1) é conhecida como *Isometria de Itô*. A demonstração da proposição pode ser encontrada em [20].

A próxima definição apresentada, é a Fórmula de Itô, apresentada na forma diferencial.

Teorema 2.3 (Fórmula de Itô - Bidimensional) *Sejam (W_t) um movimento browniano unidimensional e (X_t) e (Y_t) processos de Itô unidimensionais tais que:*

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu_t dt + \sigma_t dW_t. \\ dY_t &= \eta_t dt + \xi_t dW_t. \end{aligned} \quad (2-2)$$

Seja $f \in C^{1,2}([0, \infty), U \subset \mathbb{R}^2)$. Então, para todo $t \geq 0$ têm-se:

$$\begin{aligned} df(t, X_t, Y_t) &= \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dX_t + \frac{\partial f}{\partial y} dY_t \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} d\langle X \rangle_t + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} d\langle X, Y \rangle_t + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} d\langle Y \rangle_t \right), \end{aligned} \quad (2-3)$$

onde:

$$d\langle X \rangle_t = \sigma^2 dt, \quad (2-4)$$

$$d\langle Y \rangle_t = \eta^2 dt, \quad (2-5)$$

$$d\langle X, Y \rangle_t = \sigma\eta dt. \quad (2-6)$$

$$(2-7)$$

A completa dedução desta expressão pode ser encontrada em [20].

Definição 2.7 (Processo Estocástico Mensurável) *Seja $\{(X_t, \mathcal{G}_t)\}_{t \in [0, \infty)}$ um processo estocástico. Este processo estocástico é dito ser mensurável, se a aplicação:*

$$\begin{aligned} [0, \infty) \times \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (s, w) &\longmapsto X_s(w) \end{aligned}$$

é $\mathcal{B}([0, \infty)) \otimes \mathcal{F} - \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ -mensurável.

Definição 2.8 (Processo Estocástico Progressivamente Mensurável) *Seja $\{(X_t, \mathcal{G}_t)\}_{t \in [0, \infty)}$ um processo estocástico. Este processo estocástico é dito ser progressivamente mensurável, se para todo $t \geq 0$ a aplicação:*

$$\begin{aligned} [0, t) \times \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (s, w) &\longmapsto X_s(w) \end{aligned} \quad (2-8)$$

é $\mathcal{B}([0, \infty)) \otimes \mathcal{G} - \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ -mensurável.

2.1

Apreçamento

O modelo de Black & Scholes busca apreçar um derivativo europeu. Os dois exemplos clássicos de derivativos europeus são as *opções de compra e venda*. Uma opção de compra (venda) europeia, é um derivativo que dá ao seu detentor o direito, porém não a obrigação, de comprar (vender) uma ação por um preço previamente especificado, denominado preço de exercício, numa data específica do futuro, chamada data de vencimento da opção. O valor intrínseco deste derivativo

na data do vencimento depende do tipo do contrato. Em particular no caso de uma opção de compra e de venda eles apresentam a seguinte forma:

- Valor intrínseco da opção de compra:

$$h(X_T) = (X_T - K)^+, \quad (2-9)$$

- Valor intrínseco da opção de venda:

$$h(X_T) = (K - X_T)^+, \quad (2-10)$$

onde T representa a data de vencimento da opção, K o seu preço de exercício e $(x)^+ = \max\{0, x\}$. A figura 2.1 apresenta o gráfico do valor intrínseco de opções europeias de compra e venda, respectivamente.

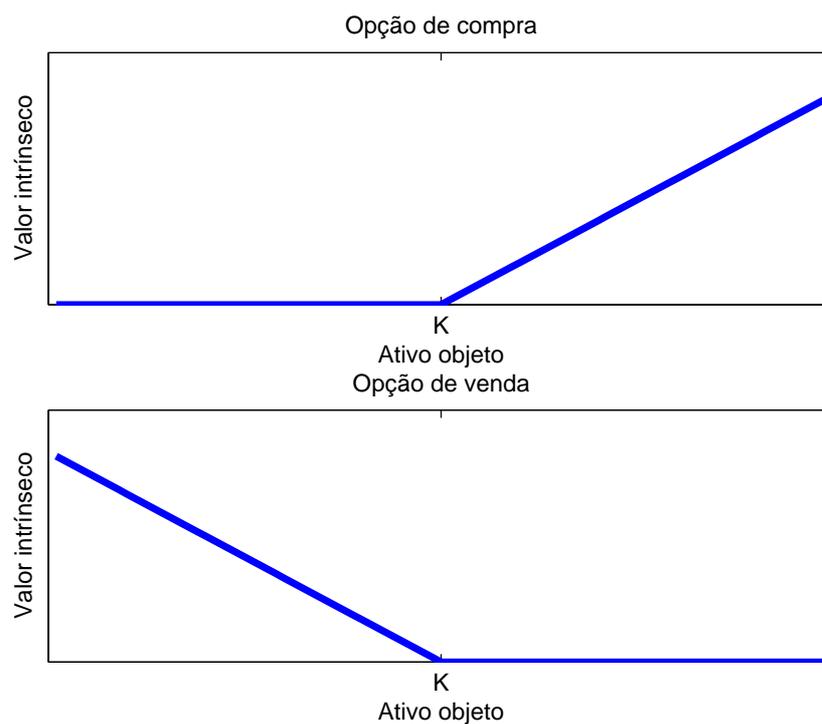


Figura 2.1: Valor intrínseco de uma opção europeia de compra e uma opção europeia de venda, com preço de exercício K , data de vencimento T e preço do ativo X .

O modelo de Black-Scholes (BS) consiste de dois ativos, um livre de risco (B_t) e o ativo de risco (X_t), seguindo as dinâmicas:

$$dB_t = rB_t dt, \quad (2-11)$$

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t, \quad (2-12)$$

onde as constantes r , μ e σ representam a taxa livre de risco, o retorno médio esperado e a volatilidade do ativo, respectivamente.

Para calcular os processos (B_t) e (X_t) usa-se a fórmula unidimensional de Itô, (2-4), e verifica-se que:

$$B_t = e^{rt}, \quad (2-13)$$

$$X_t = X_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}. \quad (2-14)$$

Apresentam-se agora algumas definições e resultados que serão usados para a dedução do preço de Black & Scholes para um derivativo europeu. As demonstrações destes resultados podem ser encontradas em [20], [4], [27] e [8].

Definição 2.9 (Portfólio) *Seja $Z(t) > 0$ o valor de riqueza inicial. Um portfólio Π_t é uma carteira formada por ativos negociados no mercado. Em particular, no caso de Black & Scholes, $\Pi_t = (\Pi_t^1, \Pi_t^2)_{t \geq 0}$, com $\Pi_t^i := \frac{\varphi_t^i P_t^i}{Z_t}$ onde φ_t^i , $i \in 1, 2$, é a quantidade de ativos com e sem risco que compõem o portfólio.*

Definição 2.10 (Oportunidade de Arbitragem) *Existe oportunidade de arbitragem, se é possível construir um portfólio auto-financiado, tal que $\Pi_0 = 0$ e $\mathbb{P}[\Pi_t > 0] > 0$. Diz-se que não existe oportunidade de arbitragem, se não existe um portfólio com valor inicial igual a zero, tal que se tenha probabilidade positiva de retorno estritamente maior do que zero.*

Definição 2.11 (Mercados Completos) *Um Mercado é dito completo se, e somente se, todo ativo negociável deste mercado pode ser replicado por um portfólio auto-financiado composto apenas por ativos do mercado.*

O mercado proposto por Black & Scholes é completo e livre de arbitragem. A demonstração deste fato pode ser encontrada em [8].

O objetivo agora é calcular $P(t, X_t)$, o preço de uma opção europeia sobre o ativo objeto (X_t), com valor intrínseco $h(X_T)$. Para isto, monta-se um portfólio Π_t , composto por (X_t) e (B_t) para replicar a opção, e então poder calcular seu preço.

Definição 2.12 (Estratégia de Investimento) *Uma Estratégia de Investimento* $\varphi = (a_t, b_t)$ é um processo progressivamente mensurável em relação à filtração $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ tomando valores em \mathbb{R}^2 , tal que:

$$\int_0^T |b_t| dt < \infty, \mathbb{P} - q.t.p.$$

$$\int_0^T (a_t X_t)^2 dt < \infty, \mathbb{P} - q.t.p.$$

Definição 2.13 (Portfólio Auto-Financiado) *Seja o portfólio* $\Pi_t = a_t X_t + b_t B_t$ *formado pela estratégia de investimento* $\varphi = (a_t, b_t)$ *e pelos ativos* (X_t) *e* (B_t) . Π_t *é dito ser Auto-Financiado, se:*

$$d\Pi_t = a_t dX_t + r b_t e^{rt} dt. \quad (2-15)$$

Isto é, as variações no valor do portfólio apenas se darão em função de variações dos valores do ativo objeto e do ativo sem risco.

Seja então Π_t um portfólio auto-financiado, composto por (X_t) e (B_t) , que replique a opção na sua data de vencimento, i.e., Π_t possui o mesmo fluxo de caixa que a opção. Na ausência de arbitragem, isso é equivalente a possuir o mesmo preço, logo:

$$\Pi_T = a_T X_T + b_T e^{rT} = h(X_T). \quad (2-16)$$

Para que não exista oportunidade de arbitragem, também deve satisfazer:

$$\Pi_t = a_t X_t + b_t e^{rt} = P(t, X_t), \quad (2-17)$$

para todo $0 \leq t \leq T$.

Busca-se então encontrar os processos a_t e b_t que satisfaçam (2-17). Como o portfólio é auto-financiado, a equação (2-15) é válida e, assim, tem-se:

$$d\Pi_t = a_t dX_t + r b_t e^{rt} dt = dP(t, X_t). \quad (2-18)$$

Para calcular $dP(t, X_t)$ faz-se uso da fórmula de Itô (2-4). Com isso, de (2-12) e (2-18), pode-se escrever:

$$(a_t \mu X_t + r b_t e^{rt}) dt + a_t \sigma X_t dW_t = \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \mu X_t \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 X_t^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right) dt + \sigma X_t \frac{\partial P}{\partial x} dW_t. \quad (2-19)$$

Igualando-se os coeficientes dos termos dW_t de (2-19), têm-se:

$$a_t = \frac{\partial P}{\partial x}(t, X_t). \quad (2-20)$$

De (2-17) e (2-20), deduz-se o valor de b_t como sendo:

$$b_t = (P(t, X_t) - a_t X_t) e^{-rt}. \quad (2-21)$$

Desta forma, igualando-se os termos em dt de (2-19) e substituindo-se a_t e b_t de acordo com (2-20) e (2-21) chega-se a:

$$r \left(P - X_t \frac{\partial P}{\partial x} \right) = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 X_t^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}. \quad (2-22)$$

A equação (2-22) é a equação diferencial parcial de Black-Scholes, e deve ser suplementada com a condição final $P(T, X_T) = h(X_T)$ e condições de contorno dependentes do contrato.

O preço de Black-Scholes para uma opção europeia de compra no tempo t , sobre o ativo objeto (X_t) é denotado por $C_{BS}(t, x)$ e para uma opção de venda denota-se por $P_{BS}(t, x)$. No caso de opções europeias de compra e venda, as condições de contorno são:

– Opção europeia de compra:

$$\lim_{x \rightarrow 0} C_{BS}(t, x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{C_{BS}(t, x)}{x - K e^{-r(T-t)}} = 1.$$

– Opção europeia de venda:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{P_{BS}(t, x)}{K e^{-r(T-t)} - x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} P_{BS}(t, x) = 0.$$

O preço de Black-Scholes para uma opção europeia de compra, pode ser resolvido analiticamente, [20], e possui a seguinte forma:

$$C_{BS} = xN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2), \quad (2-23)$$

onde

$$d_1 = \frac{\log(x/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad (2-24)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}, \quad (2-25)$$

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy. \quad (2-26)$$

Grande parte da popularidade desta fórmula deve-se ao fato da mesma relacionar o preço atual do ativo objeto x , o tempo até o vencimento da opção $T-t$, o preço de exercício da opção K , a volatilidade σ e a taxa livre de risco r , com o preço da opção.

Outro fato importante é a paridade entre opções europeias de compra e venda.

Teorema 2.4 (Paridade entre Opções Europeias de Compra e Venda)

Para preços de opções europeias de compra e venda, $C_{BS}(t, X(t))$, $P_{BS}(t, X(t))$, com mesma data de vencimento e mesmo preço de exercício, tem-se:

$$C_{BS}(t, X(t)) + Ke^{-r(T-t)} = P_{BS}(t, X(t)) + X(t) \quad (2-27)$$

se o ativo objeto não paga dividendos em $[0, T]$.

Prova. O lado esquerdo da equação (2-27) corresponde a estratégia de comprar um opção de compra e investir $Ke^{-r(T-t)}$ unidades monetárias no ativo sem risco. Quando $t = T$, tem-se esta estratégia dá o seguinte retorno:

$$\begin{aligned} C_{BS}(T, X(T)) + Ke^{-r(T-T)} &= (X(T) - K)^+ + K \\ &= K1_{\{X(T) < K\}} + X(T)1_{\{X(T) \geq K\}}. \end{aligned} \quad (2-28)$$

A estratégia correspondente ao lado direito da equação (2-27) corresponde a estratégia de comprar uma opção de venda e uma unidade do ativo objeto. Quando

$t = T$, tem-se o seguinte retorno:

$$\begin{aligned} P_{BS}(t, X(t)) + X(t) &= (K - X(T))^+ + X(t) \\ &= K1_{\{X(T) < K\}} + X(T)1_{\{X(T) \geq K\}}. \end{aligned} \quad (2-29)$$

Ambas estratégias possuem mesmo retorno para $t = T$, provando (2-27) neste caso. Se (2-27) não fosse válido para $t < T$, então, poderia se construir uma oportunidade de arbitragem vendendo a estratégia de maior valor e comprando a estratégia com menor valor. Assim, como de acordo com (2-28) e (2-29) ambas possuem mesmo retorno no tempo $t = T$, esta estratégia seria uma possibilidade de arbitragem. Logo, segue que (2-27) é válida para todo $t \in [0, T]$. ■

3

Modelos de Volatilidade Estocástica

Num modelo estocástico para a volatilidade de um ativo, a mesma varia de acordo com alguma equação diferencial estocástica ou algum processo aleatório discreto. Em ambos os casos, a principal característica do modelo estocástico é a introdução de uma nova fonte de incerteza no mercado.

Assumir a volatilidade como um processo estocástico é uma hipótese muito consistente, pois tal modificação ajuda a descrever um mercado mais complexo do que aquele assumido por Black & Scholes. Sob esta hipótese, o fato da distribuição dos retornos não serem log-normais, e as assimetrias encontradas nas distribuições e o efeito conhecido *smile* são melhores explicados, [16, 15, 29, 5, 25, 10]. Em particular, resultado devido a Renault & Touzi, [17, 24] mostra que volatilidade estocástica implica *smile*.

Entretanto, ao considerar esta hipótese, o mercado deixa de ser completo, uma vez que a volatilidade não é um ativo negociável. Desta forma, apreçar uma opção num modelo com volatilidade estocástica significa apreçar este derivativo num mercado incompleto, onde não existe uma única medida martingal equivalente. Assim, este não pode ser perfeitamente replicado por um portfólio auto-financiado composto apenas pelos ativos sem risco e objeto, o que torna o apreçamento mais difícil.

Neste capítulo, dois exemplos de modelos contínuos de volatilidade estocástica são apresentados. Apresenta-se a derivação da equação de apreçamento para volatilidade estocástica e adicionalmente, apresenta-se um estudo sobre as possíveis escalas de tempo identificadas no processo de volatilidade.

3.1

Modelos com Reversão à Média

A primeira premissa do modelo proposto neste trabalho é a de que a volatilidade de um ativo, segue um processo estocástico.

Além disto, evidências estatísticas sobre dados de mercado e grande parte dos modelos de volatilidade encontrados na literatura, como em [15, 29, 5], levam em consideração a hipótese de reversão à média. Esta hipótese procura representar o comportamento típico destes processos que, após um período de tempo, tendem a retornar a seus níveis históricos.

A interpretação do mercado de finanças sobre a hipótese de reversão à média é de que, em momentos de maior turbulência, a volatilidade tende a aumentar, voltando a oscilar em torno de um nível mais baixo ao findar este período.

Sendo assim, as seguintes hipóteses são consideradas, [17, 14, 28]:

$$dX_t = \mu X_t dt + f(Y_t) X_t dW_t \quad (3-1)$$

$$dY_t = \alpha(m - Y_t) dt + g(t, Y_t) d\widehat{Z}_t, \quad (3-2)$$

onde

- (X_t) é o preço do ativo e $f(Y_t)$ é o processo de volatilidade do ativo;
- f é tal que existem $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$, tais que $0 < m_1 \leq f(y) \leq m_2 < \infty$, para todo $y \in \mathbb{R}$;
- α representa a taxa de reversão à média de Y ;
- m representa a média da distribuição de Y .

Além disso, \widehat{Z}_t é um *movimento browniano* correlacionado com W_t da seguinte forma:

$$d\widehat{Z}_t = \rho dW_t + \sqrt{1 - \rho^2} dZ_t, \quad (3-3)$$

onde (W_t) e (Z_t) são dois movimentos brownianos independentes, $\langle dW_t, d\widehat{Z}_t \rangle = \rho dt$, $\rho \in [-1, 1]$.

A seguir, dois exemplos de processos estocásticos com reversão à média encontrados na literatura, [29, 15], são apresentados.

3.1.1

Modelo de Cox-Ingersoll-Ross (CIR)

O modelo de Cox-Ingersoll-Ross (CIR) é um modelo de volatilidade estocástica com reversão à média, onde as relações (3-1) e (3-2) são válidas, com $f(y) = \sqrt{y}$ e $g(y) = \beta\sqrt{y}$, o que leva à seguinte dinâmica:

$$dX_t = \mu X_t dt + \sqrt{Y_t} X_t dW_t \quad (3-4)$$

$$dY_t = \alpha(m - Y_t)dt + \beta\sqrt{Y_t}d\widehat{Z}_t, \quad (3-5)$$

onde β é um valor constante.

Vale observar que a dinâmica do modelo CIR é a mesma do modelo de Heston [15]. Neste caso, como $(Y_t) \geq 0$, para $t \geq 0$, tem-se $m \geq 0$. No modelo CIR (Y_t) possui distribuição qui-quadrado não central, com média e variância dadas por:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_t|Y_0 = y] &= m + (y - m)e^{-|\alpha|t} \\ \text{Var}[Y_t|Y_0 = y] &= \frac{m\beta^2}{2\alpha} + \frac{\beta^2}{\alpha}(y - m)e^{-|\alpha|t} + \frac{\beta^2}{\alpha}\left(\frac{m}{2} - y\right)e^{-2|\alpha|t}. \end{aligned} \quad (3-6)$$

Note que apesar de $f(y)$ não satisfazer a hipótese inicial, este é um modelo bem definido, como em [15], e sua assintótica pode ser obtida de maneira semelhante àquela do Modelo de Ornstein-Uhlenbeck (OU), que é apresentado a seguir e cuja análise assintótica é apresentada em 5.

3.1.2

Modelo de Ornstein-Uhlenbeck (OU)

Um outro modelo de volatilidade estocástica é considerar a volatilidade como um processo de Ornstein-Uhlenbeck (OU), onde também são válidas as relações (3-1) e (3-2), considerando-se $g(y) = \beta$. Assim, diferentemente do modelo CIR, a dinâmica para o processo de volatilidade é dada por:

$$dY_t = \alpha(m - Y_t)dt + \beta d\widehat{Z}_t, \quad (3-7)$$

onde β é um valor constante.

Vale notar que outros trabalhos, como [29, 5], adotam a mesma dinâmica para o processo de volatilidade. A seguir calcula-se o processo Y_t , solução de (3-7):

$$\begin{aligned} dY_t &= \alpha(m - Y_t)dt + \beta d\widehat{Z}_t \\ dY_t + \alpha Y_t dt &= \alpha m dt + \beta d\widehat{Z}_t, \\ d(e^{\alpha t} Y_t) &= \alpha m e^{\alpha t} dt + \beta e^{\alpha t} d\widehat{Z}_t, \end{aligned}$$

Integrando em t , tem-se:

$$\begin{aligned} \int_0^t d(e^{\alpha s} Y_s) ds &= \int_0^t \alpha m e^{\alpha s} ds + \beta \int_0^t e^{\alpha s} d\widehat{Z}_s \\ Y_t e^{\alpha t} - Y_0 &= m e^{\alpha t} - m + \beta \int_0^t e^{\alpha s} d\widehat{Z}_s \\ Y_t &= m + (Y_0 - m)e^{-\alpha t} + \beta \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} d\widehat{Z}_s. \end{aligned} \quad (3-8)$$

A equação (3-8) representa, então, a forma explícita de (Y_t) , solução de (3-7). A sua análise permite afirmar que:

$$Y_t \sim \mathcal{N}(m + (Y_0 - m)e^{-\alpha t}, v^2(1 - e^{-2\alpha t})), \quad (3-9)$$

onde $v = \frac{\beta^2}{2\alpha}$. A distribuição invariante deste processo, obtida no limite $t \rightarrow \infty$, é $Y_{t(t \rightarrow \infty)} \sim \mathcal{N}(m, v^2)$, que não depende de Y_0 .

Na figura 3.1 são apresentadas simulações para a volatilidade resultante da utilização do modelo OU, com $f(y) = e^y$, $m_1 = 0.001$ e $m_2 = 4$, bem como os respectivos retornos.

3.2

Apreçamento do Derivativo

Seja $P^{(1)}(t, X_t, Y_t)$ o preço de uma opção do tipo europeia com valor intrínseco $h(X_T)$ e vencimento em T_1 , cujo ativo objeto é (X_t) . Deste ponto em diante, os processos (X_t) e (Y_t) são considerados tais que valem as relações (3-1) e (3-7).

Deseja-se apreçar a opção $P^{(1)}(t, X_t, Y_t)$. Como visto em 2.1, o método utilizado para se obter a equação do preço da opção é montar um portfólio auto-financiado que replique esta opção. Porém, no caso de se ter um mercado incompleto, não é possível replicar a opção através de um portfólio composto pelos ativos com risco e sem risco apenas, como considerado na modelagem de Black-Scholes.

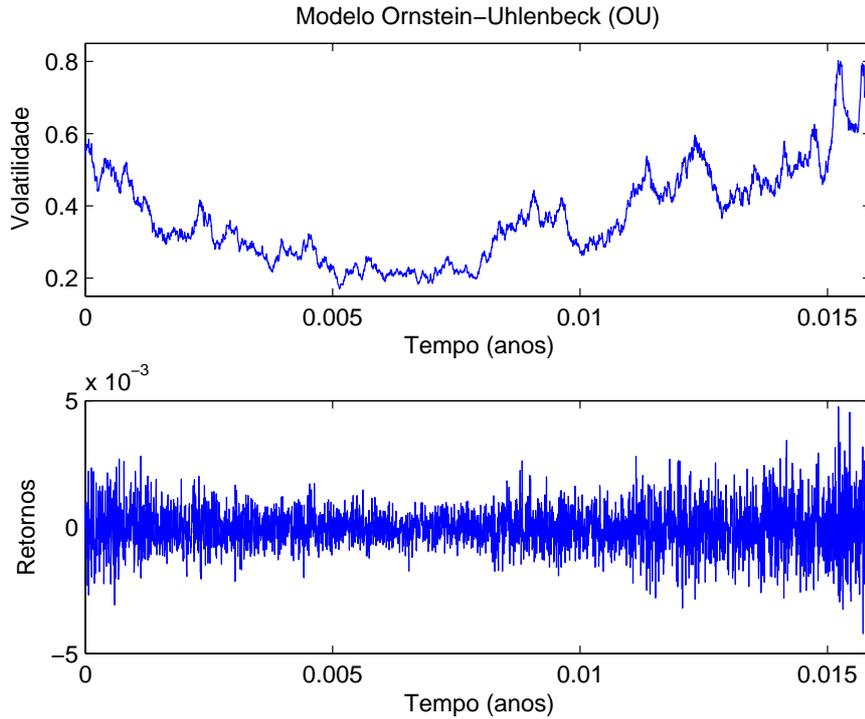


Figura 3.1: Volatilidade Estocástica Simulada, com $f(y) = e^y$, $m_1 = 0.001$, $m_2 = 4$ e com os parâmetros: $\alpha = 1$, $m = -0.7$, $\beta = 0.5$, $\rho = -0.2$.

Desta forma, monta-se um portfólio Π_t , contendo além dos ativos com e sem risco, uma outra opção europeia, de preço $P^{(2)}(t, X_t, Y_t)$, da mesma classe que $P^{(1)}(t, X_t, Y_t)$, i.e., mesmo ativo objeto, porém com data de vencimento T_2 , tal que $T_2 > T_1 > t$, com o objetivo de completar o mercado para o apreçamento da opção. Assim, procura-se pela estratégia de investimento $\varphi = [a_t, b_t, c_t]$ tal que:

$$P^{(1)}(T_1, X_{T_1}, Y_{T_1}) = \Pi_{T_1}, \quad (3-10)$$

$$P^{(1)}(T_1, X_{T_1}, Y_{T_1}) = a_{T_1}X_{T_1} + b_{T_1}B_{T_1} + c_{T_1}P^{(2)}(T_1, X_{T_1}, Y_{T_1}), \quad (3-11)$$

onde $B_t = e^{rt}$ é o preço do ativo sem risco com taxa de juros instantânea r .

Como o portfólio é auto-financiado, vale a relação:

$$d\Pi_t = a_t dX_t + b_t r e^{rt} dt + c_t dP^{(2)}(t, X_t, Y_t). \quad (3-12)$$

De (3-11) e dado que seja possível encontrar um portfólio com estas características, (3-12), para que não exista oportunidade de arbitragem, deve ser verdade

que:

$$P^{(1)}(t, X_t, Y_t) = a_t X_t + b_t e^{rt} + c_t P^{(2)}(t, X_t, Y_t), \quad (3-13)$$

para todo $t < T_1$.

Para calcular $dP^{(i)}(t, X_t, Y_t)$, $i = 1, 2$, e encontrar então a equação do preço, faz-se uso da fórmula bidimensional de Itô, apresentada em (2-3). Antes porém, calcula-se $dP^{(i)}(t, X_t, Y_t)$, $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} dP^{(i)}(t, X_t, Y_t) &= \frac{\partial P^{(i)}}{\partial t} dt + \frac{\partial P^{(i)}}{\partial x} dX_t + \frac{\partial P^{(i)}}{\partial y} dY_t \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 P^{(i)}}{\partial x^2} d\langle X \rangle_t + 2 \frac{\partial^2 P^{(i)}}{\partial x \partial y} d\langle X, Y \rangle_t + \frac{\partial^2 P^{(i)}}{\partial y^2} d\langle Y \rangle_t \right) \\ &= \frac{\partial P^{(i)}}{\partial t} dt + \frac{\partial P^{(i)}}{\partial x} dX_t + \frac{\partial P^{(i)}}{\partial y} dY_t \\ &+ \frac{1}{2} \left(x^2 f(y)^2 \frac{\partial^2 P^{(i)}}{\partial x^2} dt + 2x\beta\rho f(y) \frac{\partial^2 P^{(i)}}{\partial x \partial y} dt + \beta^2 \frac{\partial^2 P^{(i)}}{\partial y^2} dt \right) \\ &= \frac{\partial P^{(i)}}{\partial t} dt + \frac{\partial P^{(i)}}{\partial x} dX_t + \frac{\partial P^{(i)}}{\partial y} dY_t \\ &+ \left(\frac{1}{2} x^2 f(y)^2 \frac{\partial^2 P^{(i)}}{\partial x^2} + x\beta\rho f(y) \frac{\partial^2 P^{(i)}}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \beta^2 \frac{\partial^2 P^{(i)}}{\partial y^2} \right) dt \\ &= \frac{\partial P^{(i)}}{\partial t} dt + \mathcal{M}_1 P^{(i)} dt + \frac{\partial P^{(i)}}{\partial x} dX_t + \frac{\partial P^{(i)}}{\partial y} dY_t \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{M}_1 \right) P^{(i)} dt + \frac{\partial P^{(i)}}{\partial x} dX_t + \frac{\partial P^{(i)}}{\partial y} dY_t, \end{aligned} \quad (3-14)$$

onde

$$\mathcal{M}_1 = \frac{1}{2} x^2 f(y)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + x\beta\rho f(y) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (3-15)$$

Sendo o portfólio auto-financiado, a relação (3-12) é válida. Assim, substituindo-se (3-14) em (3-12), tem-se:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{M}_1\right) P^{(1)} dt + \frac{\partial P^{(1)}}{\partial x} dX_t + \frac{\partial P^{(1)}}{\partial y} dY_t = a_t dX_t + b_t r e^{rt} dt + \\ c_t \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{M}_1\right) P^{(2)} dt + \frac{\partial P^{(2)}}{\partial x} dX_t + \frac{\partial P^{(2)}}{\partial y} dY_t \right] \end{aligned} \quad (3-16)$$

onde

$$\begin{aligned} P^{(1)} &= P^{(1)}(t, X_t, Y_t) \\ P^{(2)} &= P^{(2)}(t, X_t, Y_t). \end{aligned}$$

Igualando-se os termos em dX_t e dY_t de (3-16), tem-se:

$$\frac{\partial P^{(1)}}{\partial x} = a_t + c_t \frac{\partial P^{(2)}}{\partial x} \quad (3-17)$$

$$\frac{\partial P^{(1)}}{\partial y} = c_t \frac{\partial P^{(2)}}{\partial y}. \quad (3-18)$$

Desta maneira, os termos c_t e a_t , podem ser escritos como:

$$c_t = \left(\frac{\partial P^{(1)}}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial P^{(2)}}{\partial y}\right)^{-1} \quad (3-19)$$

$$a_t = \frac{\partial P^{(1)}}{\partial x} - \left(\frac{\partial P^{(1)}}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial P^{(2)}}{\partial y}\right)^{-1} \frac{\partial P^{(2)}}{\partial x}. \quad (3-20)$$

Substituindo a_t , c_t e $b_t = (P^{(1)} - a_t X_t - c_t P^{(2)})/e^{rt}$ na relação (3-16) e

comparando os termos em dt , tem-se:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{M}_1\right) P^{(1)} &= b_t r e^{rt} + c_t \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{M}_1\right) P^{(2)} \\
 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{M}_1\right) P^{(1)} &= r(P^{(1)} - a_t x - c_t P^{(2)}) \\
 &\quad + c_t \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{M}_1\right) P^{(2)} \\
 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{M}_1\right) P^{(1)} &= rP^{(1)} - r \left(\frac{\partial P^{(1)}}{\partial x} - c_t \frac{\partial P^{(2)}}{\partial x}\right) x \\
 &\quad - r c_t P^{(2)} + c_t \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{M}_1\right) P^{(2)} \\
 \mathcal{M}_2 P^{(1)} &= c_t \mathcal{M}_2 P^{(2)} \\
 \left(\frac{\partial P^{(1)}}{\partial y}\right)^{-1} \mathcal{M}_2 P^{(1)} &= \left(\frac{\partial P^{(2)}}{\partial y}\right)^{-1} \mathcal{M}_2 P^{(2)}, \tag{3-21}
 \end{aligned}$$

onde

$$\mathcal{M}_2 = \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{M}_1 + r \left(x \frac{\partial}{\partial x} - 1 \right). \tag{3-22}$$

O operador diferencial \mathcal{M}_2 é dado pelo operador diferencial de Black-Scholes, com parâmetro de volatilidade (estocástica) $f(y)$, somado aos termos de segunda ordem do processo de difusão de Y .

Como o lado esquerdo da equação (3-21) contém termos que dependem apenas de T_1 , e o lado direito contém termos que dependem apenas de T_2 , ambos os lados devem ser iguais a uma função que não dependa nem de T_1 nem de T_2 , i.e., iguais a uma função invariante em relação ao tempo de expiração da opção. Seja $\Gamma(t, x, y)$ esta função. Mais recentemente, Souza & Zubelli mostraram em [28], que Γ na verdade não depende de x , podendo então ser escrita como $\Gamma(t, y)$.

A função $\Gamma(t, y)$ não pode ser determinada somente pela teoria de não-arbitragem. Todavia, ela pode-se ser escrita como:

$$\Gamma(t, y) = \alpha(m - y) - \beta \left(\rho \frac{(\mu - r)}{f(y)} + \gamma(t, y) \sqrt{1 - \rho^2} \right), \tag{3-23}$$

onde $\gamma(t, y)$ uma função arbitrária qualquer. Tal forma para $\Gamma(t, y)$ é justificada pelo teorema de Girsanov, [11], ao se realizar a mudança da medida física para a medida martingal equivalente. Como tal medida não é única (dado que o mercado incompleto), ela depende do preço de mercado do risco, γ .

Desta forma, omitindo-se a dependência da data de vencimento, $P(t, x, y)$ deve satisfazer a equação diferencial parcial:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}x^2f(y)^2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + x\beta\rho f(y)\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y} + \frac{1}{2}\beta^2\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \\ + r\left(x\frac{\partial P}{\partial x} - P\right) + (\alpha(m-y) - \beta\Lambda(t, x, y))\frac{\partial P}{\partial y} = 0, \end{aligned} \quad (3-24)$$

onde

$$\Lambda(t, x, y) = \rho\frac{(\mu-r)}{f(y)} + \gamma(t, x, y)\sqrt{1-\rho^2}. \quad (3-25)$$

A condição final da equação diferencial parcial é $P(T, x, y) = h(x)$.

A equação diferencial (3-24) pode ser reagrupada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}x^2f(y)^2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + r\left(x\frac{\partial P}{\partial x} - P\right)}_{\mathcal{L}_{BS}(f(y))} + \underbrace{x\beta\rho f(y)\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}}_{\text{correlação}} \\ + \underbrace{\frac{1}{2}\beta^2\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \alpha(m-y)\frac{\partial P}{\partial y}}_{\mathcal{L}_{OU}} - \underbrace{\beta\Lambda\frac{\partial P}{\partial y}}_{\text{prêmio}} = 0. \end{aligned} \quad (3-26)$$

De uma forma mais simples, pode-se escrever:

$$(\mathcal{L}_{BS} + \mathcal{L}_{OU} + \mathcal{L}_*)P = 0, \quad (3-27)$$

onde os operadores \mathcal{L}_{BS} , \mathcal{L}_{OU} e \mathcal{L}_* são definidos da seguinte forma:

$$\mathcal{L}_{OU} = \frac{1}{2}\beta^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \alpha(m-y)\frac{\partial}{\partial y}, \quad (3-28)$$

$$\mathcal{L}_* = x\beta\rho f(y)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} - \beta\Lambda\frac{\partial}{\partial y}, \quad (3-29)$$

$$\mathcal{L}_{BS}(f(y)) = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}f(y)^2x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + r\left(x\frac{\partial}{\partial x} - 1\right), \quad (3-30)$$

onde \mathcal{L}_{BS} representa o operador de Black & Scholes com volatilidade $f(y)$, \mathcal{L}_{OU} o operador do processo (OU) e \mathcal{L}_* o operador que une os fatores de correlação e os fatores do risco de mercado da volatilidade.

3.3

Escalas de Tempo no Processo de Volatilidade

Nesta seção são apresentadas possíveis escalas de tempo para o processo de volatilidade. Através de argumentos empíricos, justifica-se o motivo pelo qual se consideram escalas de tempo com alta reversão à média. Em particular, é utilizado como exemplo um processo OU.

Da equação (3-8), $Y_t \sim \mathcal{N}(m + (y - m)e^{-\alpha t}, \frac{\beta^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t}))$ e a sua distribuição invariante é do tipo, $Y \sim \mathcal{N}(m, v^2)$, $v^2 = \beta^2/2\alpha$. Sendo assim, a distribuição invariante de Y , satisfaz:

$$\mathbb{E}[\mathcal{L}g(Y(0))] = 0, \quad (3-31)$$

onde \mathcal{L} é o gerador infinitesimal do processo Y que, de acordo com [17], é dado por:

$$\mathcal{L} = \alpha(m - y)\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}\beta^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (3-32)$$

Como a distribuição de Y é uma gaussiana, e esta fica bem definida em função de sua média e variância, a função de densidade de Y é:

$$\phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v^2}} \exp\left(\frac{-(y - m)^2}{2v^2}\right), \quad (3-33)$$

onde $v^2 = \beta^2/2\alpha$. Os parâmetros constantes α , m e v^2 , são a taxa de reversão à média, a média e a variância da distribuição invariante de Y , respectivamente.

Agora calcula-se a covariância do processo Y :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(Y_t - \mathbb{E}[Y_t])(Y_s - \mathbb{E}[Y_s])] &= \mathbb{E}\left[\left(\beta \int_0^t e^{-\alpha(t-u)} dZ_u\right) \left(\beta \int_0^s e^{-\alpha(s-u)} dZ_u\right)\right] \\ &= \beta^2 e^{-\alpha(t-s)} \mathbb{E}\left[\left(\int_s^t e^{\alpha u} dZ_u\right) \left(\int_0^s e^{\alpha u} dZ_u\right)\right] \\ &+ \beta^2 e^{-\alpha(t-s)} \mathbb{E}\left[\left(\int_0^s e^{\alpha u} dZ_u\right)^2\right] \\ &= \beta^2 e^{-\alpha(t-s)} \mathbb{E}\left[\int_0^s (e^{-\alpha(s-u)})^2 du\right] \\ &= \frac{\beta^2}{2\alpha} e^{-\alpha(t-s)} e^{-2\alpha(s-u)} \Big|_0^s \\ &= v^2 e^{-\alpha(t-s)} (1 - e^{-2\alpha s}) \end{aligned} \quad (3-34)$$

Pode-se notar, então, que a taxa de decorrelação é proporcional a α . Logo, pode-se pensar em $1/\alpha$ como o tempo típico de decorrelação.

Nas figuras 3.2 e 3.3, são apresentados exemplos de caminhos simulados para o processo Y para três valores da constante α , com valores funcionais diferentes para f em cada uma delas.

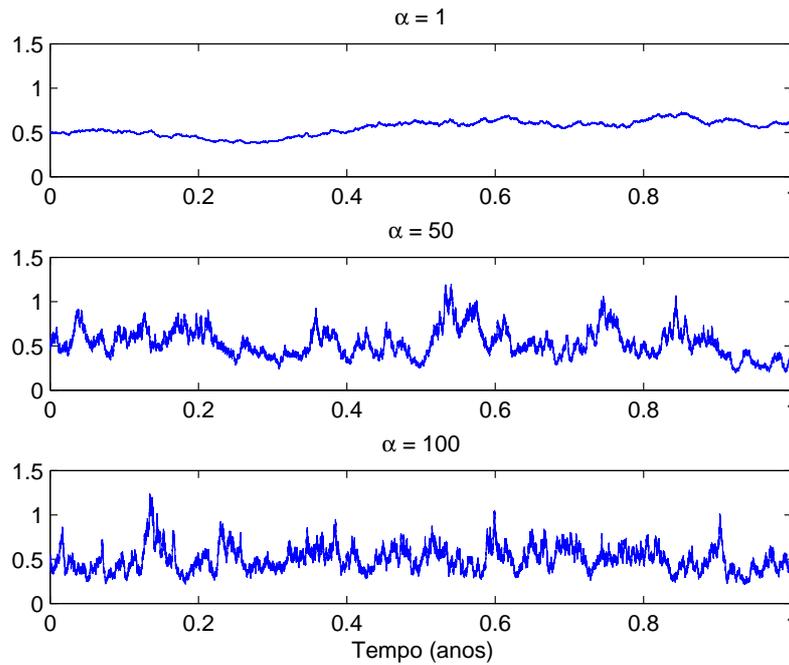


Figura 3.2: Caminhos simulados para volatilidade, com $f(y) = e^y$, $m_1 = 0.001$, $m_2 = e^{2.5}$, $m = -0.7$, $v = 0.3$, $\rho = 0$.

Dados de mercado tendem a apresentar um comportamento semelhante aos apresentados nas figuras 3.2 e 3.3, no caso em que o valor de α é maior ($\alpha = 100$), como será visto mais adiante. Tal evidência nos dados, justifica a consideração da hipótese de reversão rápida à média, regime de interesse deste trabalho.

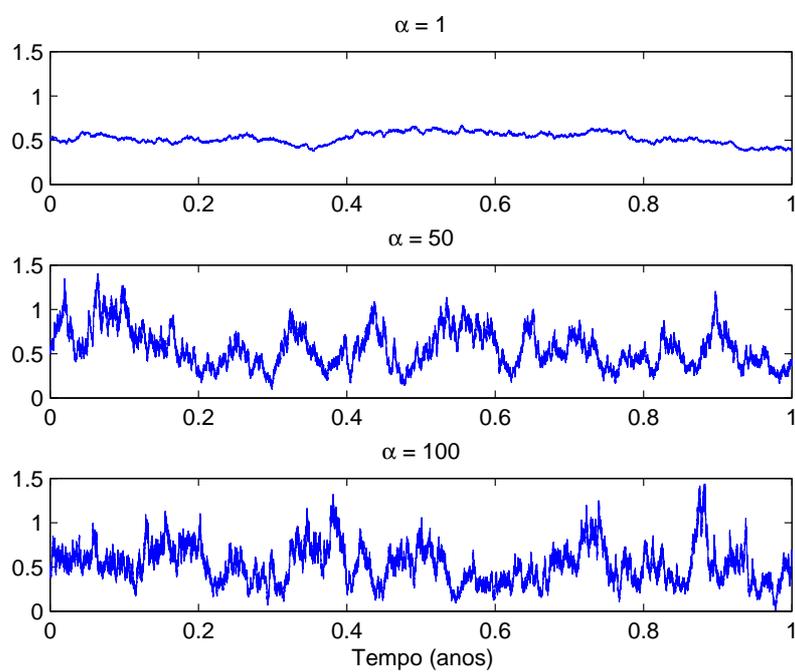


Figura 3.3: Caminhos simulados para volatilidade, com $f(y) = 0.35 \frac{\arctan y + \frac{\pi}{3}}{\pi} + 0.01$, $m = -0.7, v = 3, \rho = 0$.

4

Identificação de Reversão Rápida à Média

Neste capítulo descreve-se um processo quantitativo, análogo ao descrito em [17], para verificar a consistência de hipótese de reversão à média para a volatilidade, e mais ainda, identificar a ordem de grandeza desta reversão. Subseqüentemente, verifica-se esta hipótese para o índice IBOVESPA.

4.1

Modelo e Dados

De acordo com os modelos assumidos, (3-1) e (3-7), para o modelo de volatilidade estocástica com reversão à média, os parâmetros a serem estimados em (3-7), são:

- A taxa de reversão à média, α ;
- A volatilidade do processo de volatilidade, v .

A unidade de tempo é ano, sendo então necessário utilizar taxas anualizadas.

Vale ressaltar que apenas as realizações dos preços dos ativos (X_t) são observáveis no mercado. Desta forma, a volatilidade $f(Y_t)$ é observada indiretamente, o que dificulta o processo de estimação dos parâmetros anteriormente citados. Do resultado apresentado no capítulo 3, é possível concluir que, sobre OU, Y_t tende a sua distribuição invariante $Y \sim \mathcal{N}(m, v^2)$, com velocidade $e^{-\alpha t}$, como pode ser visto em (3-9). Busca-se então, estimar α .

Por fim, torna-se importante frisar que o objetivo desta estimação é verificar a validade ou não da hipótese de que a taxa de reversão à média se encontra num regime de reversão rápida, não sendo necessária então uma estimação precisa para α . Mais adiante, no capítulo 5 será mostrado que não se faz necessária uma estimação do parâmetro α para o cálculo da correção. A importância de α , é restrita à identificação do regime de reversão à média.

4.2

Procedimento Estatístico

Seja \bar{X}_n a n -ésima média de cinco minutos de negociação do ativo, correspondente ao tempo $t_n = n\Delta t$, $\Delta t = 5$ minutos. São introduzidas as flutuações normalizadas, i.e., os retornos médios observados em cinco minutos do ativo:

$$D_n = \frac{2(\bar{X}_n - \bar{X}_{n-1})}{\sqrt{\Delta t}(\bar{X}_n + \bar{X}_{n-1})} \quad (4-1)$$

Discretizando-se a equação (3-1), tem-se:

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \frac{\Delta X_t}{X_t} = f(Y_t) \frac{\Delta W_t}{\sqrt{\Delta t}} + \mu\sqrt{\Delta t} \quad (4-2)$$

$$D_n = f(Y_t) \frac{\Delta W_t}{\sqrt{\Delta t}} + \mu\sqrt{\Delta t}. \quad (4-3)$$

Considerando-se $\mu\sqrt{\Delta t}$ pequeno, podemos escrever:

$$D_n = f(\bar{Y}_n)\epsilon_n, \quad (4-4)$$

onde (ϵ_n) é uma seqüência de variáveis aleatórias gaussianas iid¹, com média 0 e variância 1. Um importante passo para o estudo desenvolvido neste capítulo é a análise do logaritmo absoluto dos retornos:

$$\begin{aligned} L_n &= \log |D_n| \\ &= \log(f(\bar{Y}_n)) + \log |\epsilon_n|. \end{aligned} \quad (4-5)$$

Observe que o logaritmo transforma o ruído multiplicativo em ruído aditivo, $\log |\epsilon_n|$. Em particular, uma boa ferramenta para extrair ruídos aditivos é a mediana, como pode ser visto em [18].

Finalmente, o variograma é definido:

$$V_j^N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (L_{n+j} - L_n)^2, \quad (4-6)$$

onde j é o número de *lags* e N o número total de pontos. Além disso, (4-6) é um

¹Independentes e identicamente distribuídas

estimador de $2c^2 + 2v_f^2(1 - \exp(-j\alpha\Delta t))$, como pode-se ver a seguir:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} [(L_{n+j} - L_n)^2] &= \mathbb{E} [(L_j - L_0)^2] \\
 &= \mathbb{E} \left[\left((\log(f(\bar{Y}_j)) + \log(|\epsilon_j|)) - (\log(f(\bar{Y}_0)) + \log(|\epsilon_0|)) \right)^2 \right] \\
 &= \mathbb{E} [\log(f(\bar{Y}_j))^2] + \mathbb{E} [\log(|\epsilon_j|)^2] - 2\mathbb{E} [\log(f(\bar{Y}_j)) \log(f(\bar{Y}_0))] \\
 &\quad + \mathbb{E} [\log(f(\bar{Y}_0))^2] + \mathbb{E} [\log(|\epsilon_0|)^2] \\
 &\approx 2\mathbb{E} [\log(f(\bar{Y}))^2] + 2\text{Var}(\log(|\epsilon|)) \\
 &\approx 2v_f^2(1 - e^{-j\alpha\Delta t}) + 2c^2.
 \end{aligned} \tag{4-7}$$

4.3

Algoritmo para Estimação

Nesta seção são apresentados os passos do algoritmo utilizado para calcular o variograma, para assim, estimar os parâmetros.

Algoritmo de Estimação do Variograma:

Considere (X_n) a seqüência de pontos do ativo objeto. Sendo conhecidos a freqüência dos dados, tem-se o seguinte procedimento:

1. Cálculo das flutuações normalizadas, D_n , como em (4-1);
2. Cálculo do logaritmo das flutuações normalizadas e uso do filtro da mediana, $L_n = \log(f(\bar{Y}_n)) + \log|\epsilon_n|$;
3. Cálculo do variograma, V_j^N , como em (4-6);
4. Cálculo da média temporal do variograma;
5. Extrapolação polinomial dos extremos do variograma, devido à instabilidade dos dados de mercado para estimação de c^2 , intercepto do gráfico à esquerda, e de v_f^2 , a assíntota do gráfico à direita, quando $t \rightarrow \infty$;
6. Estimação de α , através de um ajuste de mínimos quadrados não-linear, da seguinte forma:

$$\arg \min_{\alpha} \|2c^2 + 2v_f^2(1 - e^{-j\alpha\Delta t}) - V_j^N\|_2. \tag{4-8}$$

4.4

Dados Sintéticos

Nesta seção, apresenta-se um caso teste para o procedimento descrito anteriormente, com dados sintéticos. Para esta simulação, os processos (X_t) e (Y_t) são modelados segundo (3-1) e (3-7), e para o caso $f(y) = e^y$, com $m_1 = 0.001$ e $m_2 = e^{2.5}$. Na tabela 4.1 tem-se os parâmetros usados na simulação:

α	150
ν	0.27

Tabela 4.1: Parâmetros usados na simulação

Na figura 4.1 são apresentados o retorno simulado juntamente com o variograma calculado para este caso.

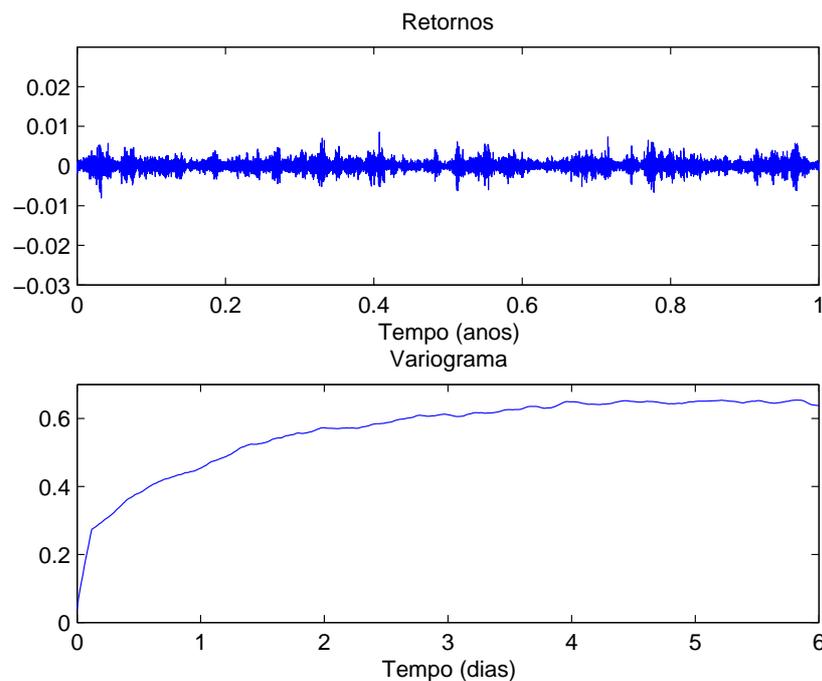


Figura 4.1: Retornos Simulados e Variograma

Na tabela 4.2, apresentam-se os parâmetros estimados pelo processo previamente descrito em 4.2. Por sua vez, na figura 4.2, é apresentado o ajuste do estimador, obtido a partir do valor médio do variograma e de (4-8) por meio de mínimos quadrados não-lineares, e de acordo com isto, os parâmetros estimados pelo método.

α	180.8479
v	0.2413

Tabela 4.2: Parâmetros estimados pelo Variograma

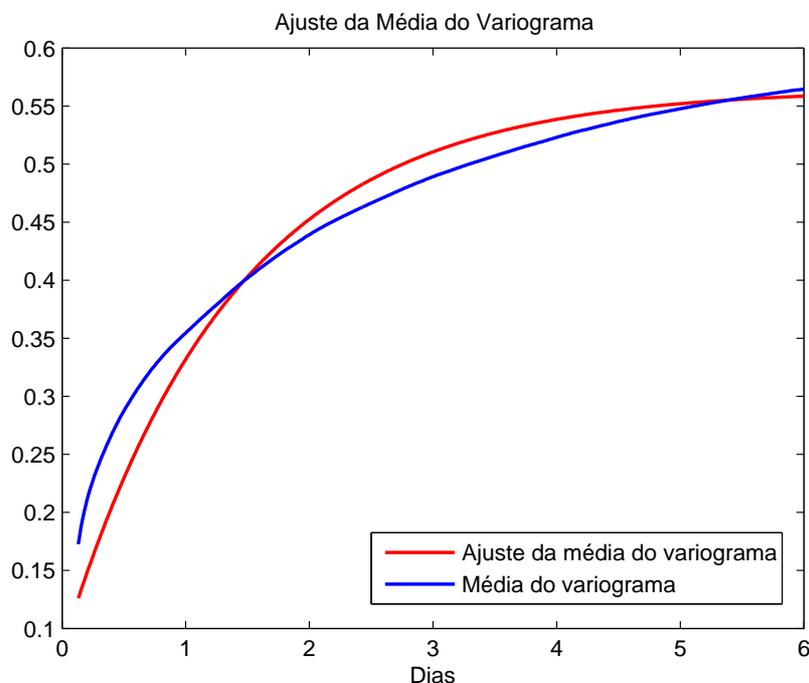


Figura 4.2: Ajuste do valor médio do variograma

Como pode-se observar na tabela 4.2, o erro na estimação em α fica da ordem de 20%, o que poderia ser considerado uma estimativa ruim. Porém, como já foi dito anteriormente e será visto mais adiante, tal erro não vai influenciar na cálculo da correção, uma vez que α é usado apenas para estimar o regime da reversão, e um erro da ordem de 20% não altera a ordem de grandeza do parâmetro.

4.5

Regime do IBOVESPA

Nesta seção apresenta-se a estimação de α , segundo procedimento descrito na seção 4.2, para a série histórica do índice IBOVESPA², principal índice de ações do mercado brasileiro, no período de 2005 e 2006. Tais dados foram gentilmente cedidos pela BOVESPA, através do Sr Rogério Marques, Supervisor de Assistência ao Mercado da Gerência Técnica de Mercado.

²Fonte: BOVESPA

Ano	Dias de Negócio	Qtde de Pontos
2003	250	21000
2004	249	20916
2005	249	20916
2006	246	20664

Tabela 4.3: Dias de negociação da BOVESPA

O principal resultado apresentado neste capítulo é a confirmação da hipótese de reversão rápida à média para o índice IBOVESPA.

Nesta seção são considerados dados de alta frequência, 30 segundos, do índice IBOVESPA. Entretanto, os dados utilizados para os cálculos são os valores médios de cinco minutos de negociação. Ainda assim, a quantidade de pontos obtidas é da ordem de 84 pontos por 7 horas de pregão a cada dia³.

Na tabela 4.3, é apresentado o número de dias de negócios da BOVESPA no período de 2003 a 2006.

4.5.1 Série Histórica de 2005

Nas figuras 4.3 e 4.4 são apresentados a série do IBOVESPA em conjunto com o seu retorno médio e o gráfico do variograma para esta série, respectivamente.

Como pode ser visto na figura 4.4, tem-se um componente periódico, que corresponde a efeitos diários nos dados, como maior negociação em horários específicos do dia. Os dados estimados para esta série são apresentados na tabela 4.4.

α	697.9059
ν	0.311

Tabela 4.4: Parâmetros estimados pelo Variograma (2005)

Na figura 4.5 apresenta-se o ajuste para o variograma e sua média, através de mínimos quadrados não-lineares, com os parâmetros estimados. De acordo com os dados estimados, a taxa de reversão à média verificada para o IBOVESPA (2005) foi de 0.36 dias, o que significa uma alta taxa de reversão à média, evidenciando a veracidade desta hipótese.

³São eliminados os *overnights* e os dias de não-negociação como feriados e finais de semana

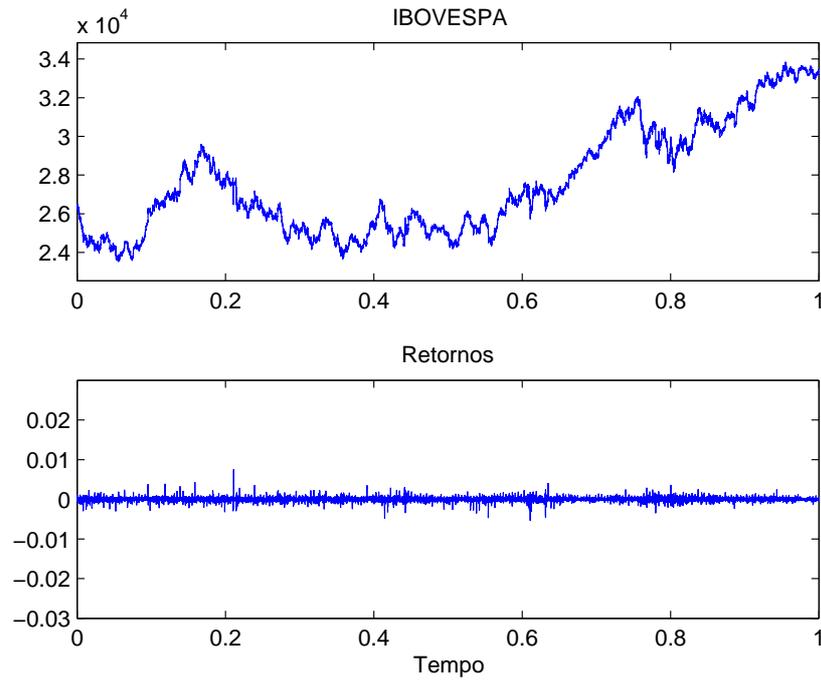


Figura 4.3: Índice IBOVESPA e seu Retorno para 2005

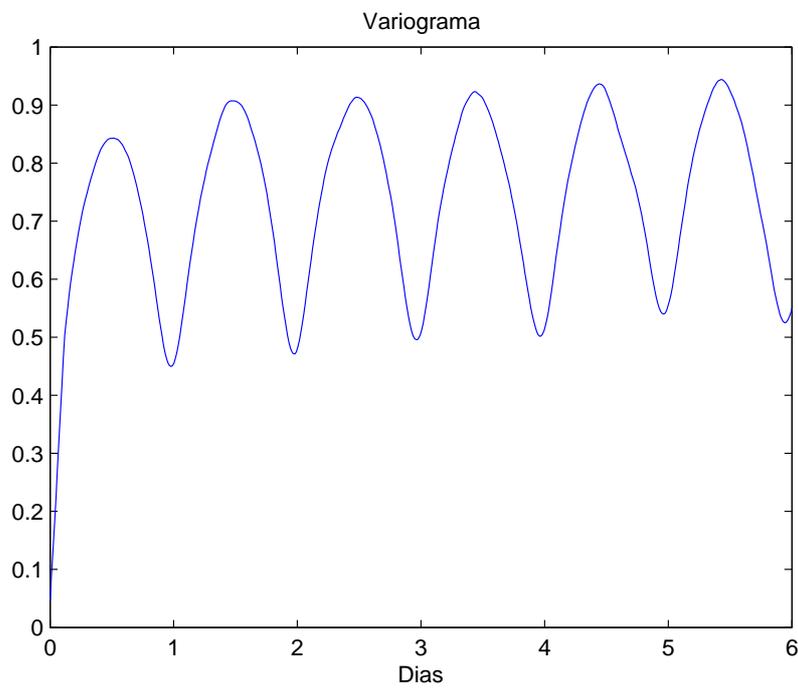


Figura 4.4: Variograma IBOVESPA (2005)

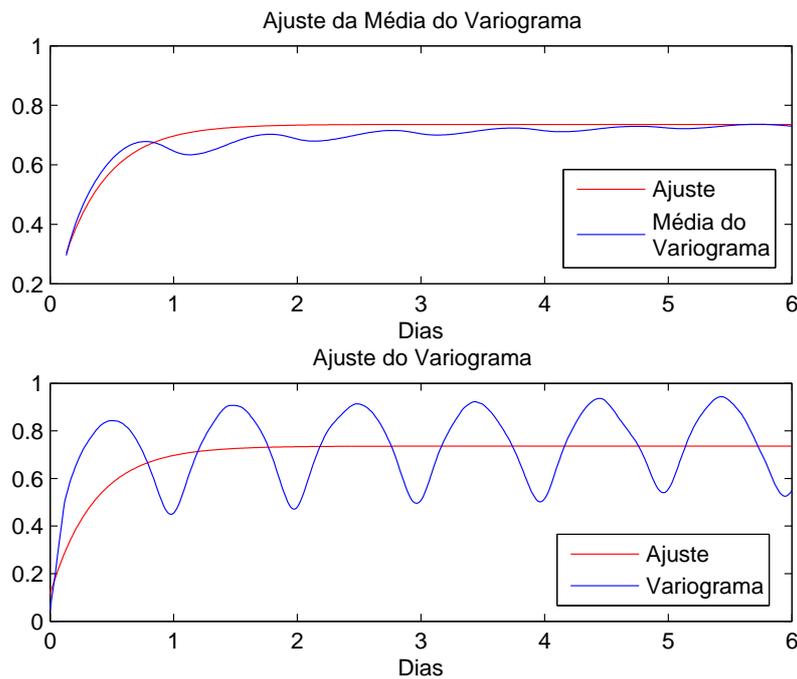


Figura 4.5: Ajuste do Variograma Médio (2005)

4.5.2 Série Histórica de 2006

Nas figuras 4.6 e 4.7 são apresentados a série do IBOVESPA em conjunto com o seu retorno médio e o gráfico do variograma para esta série, respectivamente.

Como pode ser visto na figura 4.7, bem como na figura 4.4, existe uma componente periódica, que gera uma oscilação no variograma. Os dados estimados para esta série são apresentados na tabela 4.5.

α	723.2259
v	0.2513

Tabela 4.5: Parâmetros estimados pelo Variograma (2006)

Na figura 4.8 apresenta-se o ajuste para o variograma e sua média através de mínimos quadrados não-lineares, com os parâmetros estimados. De acordo com os dados estimados, a taxa de reversão à média verificada para o IBOVESPA (2006) foi de 0.34 dia, o que significa uma alta taxa de reversão à média, evidenciando a veracidade desta hipótese.

Como visto nos dois casos apresentados aqui, para os anos de (2005) e (2006), e de resultados anteriormente vistos em [2, 3], o IBOVESPA apresenta uma alta

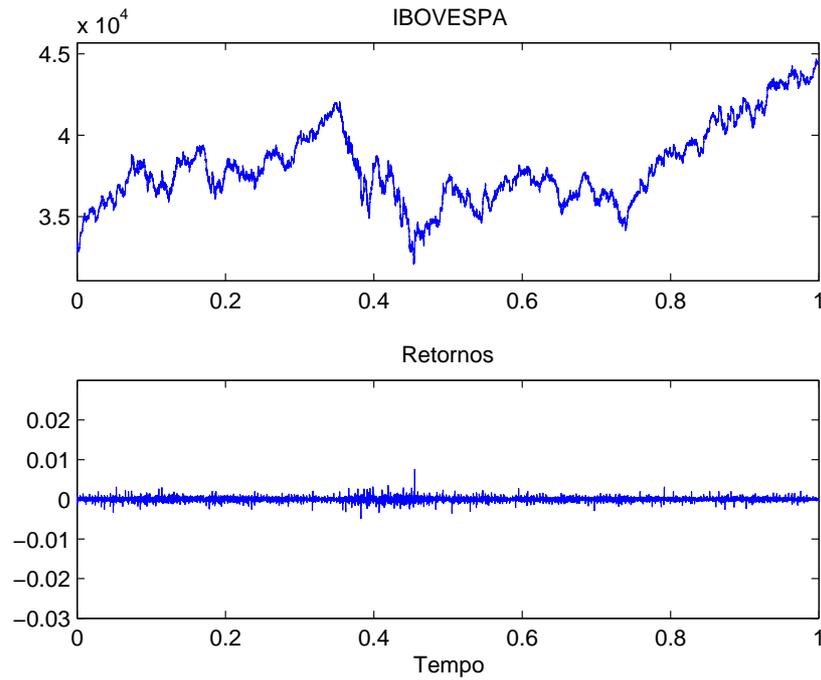


Figura 4.6: Índice IBOVESPA e seu Retorno para 2006

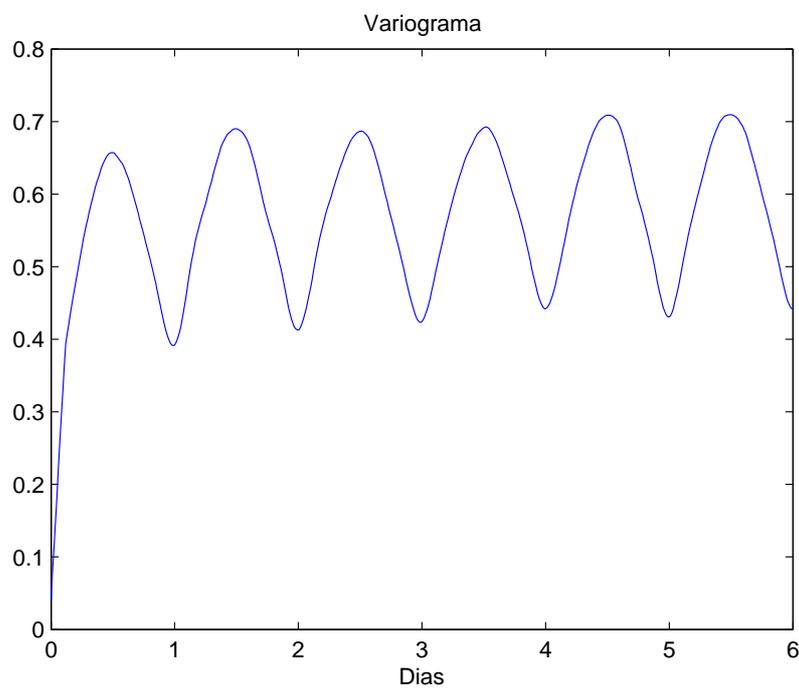


Figura 4.7: Variograma IBOVESPA (2006)

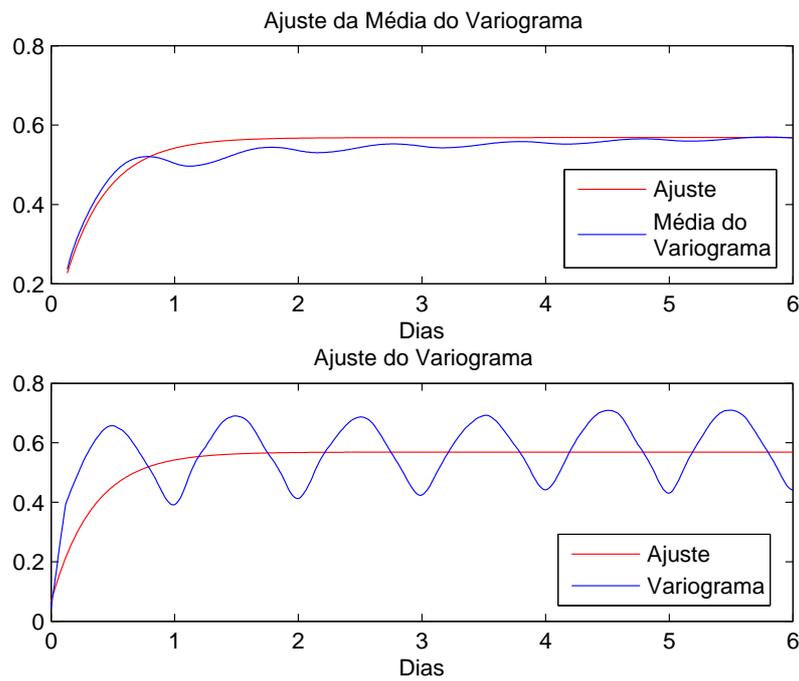


Figura 4.8: Ajuste do Variograma Médio (2006)

taxa de reversão à média, em particular maior do que a encontrada no S&P500 por Fouque et al, o que possibilita uma análise de apreçamento via teoria assintótica apresentada por Fouque et al em [17], que é descrita no capítulo 5.

5

Análise Assintótica

No capítulo 3 descreve-se como a volatilidade pode ser modelada por um processo estocástico. Seguindo as relações (3-1) e (3-7) e utilizando argumentos de não-arbitragem, conclui-se que o preço $P(t, x, y)$ de uma opção satisfaz as relações (3-24), com (3-25) e condição de final $h(x)$.

No presente capítulo encontra-se o preço corrigido para um derivativo europeu, derivado por Fouque et al. em [17], dado por:

$$P = P_0 - (T - t) \left(V_2 x^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + V_3 x^3 \frac{\partial^3 P}{\partial x^3} \right), \quad (5-1)$$

onde P_0 representa o preço de Black & Scholes com volatilidade constante $\bar{\sigma}^2$ e $(T-t)$ representa o tempo até o vencimento. Os parâmetros V_2 e V_3 serão calculados mais adiante.

Em trabalho mais recente, Souza & Zubelli em [28], usam uma adimensionalização das variáveis, com o objetivo de estudar a ordem de grandeza das variáveis e os possíveis regimes para o processo de volatilidade. Neste trabalho usa-se a adimensionalização de Souza & Zubelli e restringe-se ao regime considerado por Fouque et al.

5.1

Análise Dimensional

A dimensionalização de variáveis usada por Souza & Zubelli em [28] é dada por:

- $\hat{x} = x$;
- $\hat{t} = rt$, em particular $\hat{T} = rT$;
- $\widehat{f(y)^2} = rf(y)^2$;
- $\hat{y} = y$;

$$- \widehat{\Lambda(\hat{t}, \hat{y})} = r^{-1/2} \Lambda(r^{-1} \hat{t}, \hat{y}).$$

Substituindo-se as variáveis dimensionalizadas em (3-24), e omitindo-se os circunflexos para não carregar a notação, tem-se:

$$\begin{aligned} r \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} r f(y)^2 x^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \beta^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \rho r^{1/2} \beta x f(y) \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \\ + r \left(x \frac{\partial P}{\partial x} - P \right) + (\alpha - 1)(m - y) - r^{1/2} \beta \Lambda(t, y) \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial P^\epsilon}{\partial t} + \frac{1}{2} f(y)^2 x^2 \frac{\partial^2 P^\epsilon}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \nu^2 \frac{\partial^2 P^\epsilon}{\partial y^2} + \rho \nu x f(y) \frac{\partial^2 P^\epsilon}{\partial x \partial y} \\ + \left(x \frac{\partial P^\epsilon}{\partial x} - P^\epsilon \right) + (\epsilon^{-1}(m - y) - \nu \Lambda(t, y)) \frac{\partial P^\epsilon}{\partial y} = 0, \end{aligned}$$

sujeito à condição terminal

$$P^\epsilon(T, x, y) = h(x), \quad (5-2)$$

onde:

$$\epsilon = r \alpha^{-1}; \quad (5-3)$$

$$\nu = r^{-1/2} \beta; \quad (5-4)$$

$$\nu = \sqrt{2} \nu \epsilon^{-1/2}. \quad (5-5)$$

Note que a equação (5-5) é relação entre o parâmetro adimensionalizado de Souza & Zubelli e o parâmetro original de Fouque et al.

É conveniente reagrupar os termos da equação diferencial parcial (5-2) da seguinte maneira:

$$\left(\frac{1}{\epsilon} \mathcal{L}_0 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 \right) P^\epsilon = 0, \quad (5-6)$$

onde os operadores \mathcal{L}_0 , \mathcal{L}_1 e \mathcal{L}_2 são definidos da seguinte forma:

$$\mathcal{L}_0 = \tilde{\nu}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (m - y) \frac{\partial}{\partial y} \quad (5-7)$$

$$\mathcal{L}_1 = \sqrt{2\rho\tilde{\nu}} x f(y) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \tilde{\nu} \Lambda(t, y) \frac{\partial}{\partial y} \quad (5-8)$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} f(y)^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(x \frac{\partial}{\partial x} - 1 \right), \quad (5-9)$$

onde $\nu = \tilde{\nu}\epsilon^{-1/2}$, \mathcal{L}_2 representa o operador de BS, para $r = 1$, $\alpha\mathcal{L}_0$ o operador infinitesimal do processo (OU) e \mathcal{L}_1 o operador que une os fatores de correlação e os fatores do risco de mercado da volatilidade.

5.2

Solução Assintótica

O método aqui utilizado consiste em expandir assintoticamente a solução P^ϵ em potências de $\sqrt{\epsilon}$, como em [17]:

$$P^\epsilon = P_0 + \sqrt{\epsilon}P_1 + \epsilon P_2 + \epsilon\sqrt{\epsilon}P_3 + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (5-10)$$

Partindo da hipótese da existência da expansão assintótica de P^ϵ , o objetivo desta análise é determinar as funções $P_i(t, x, y)$ igualando os termos de mesma ordem. Como será observado a seguir, se faz necessário o cálculo da expansão até o termo da expansão de ordem $\mathcal{O}(\epsilon^{3/2})$.

Substituindo-se a relação (5-10) em (5-6), têm-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon} \mathcal{L}_0 P_0 &+ \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} (\mathcal{L}_0 P_1 + \mathcal{L}_1 P_0) \\ &+ (\mathcal{L}_0 P_2 + \mathcal{L}_1 P_1 + \mathcal{L}_2 P_0) \\ &+ \sqrt{\epsilon} (\mathcal{L}_0 P_3 + \mathcal{L}_1 P_2 + \mathcal{L}_2 P_1) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (5-11)$$

Estudam-se os termos de $\mathcal{O}(\epsilon^{-1})$, $\mathcal{O}(\epsilon^{-1/2})$, $\mathcal{O}(1)$ e $\mathcal{O}(\epsilon^{1/2})$ de (5-11), passo a passo. O primeiro termo de (5-11) a ser estudado é, então:

$$\mathcal{L}_0 P_0 = 0. \quad (5-12)$$

O operador diferencial \mathcal{L}_0 , contém derivadas com respeito a variável y , mas não em relação às variáveis (t, x) . Logo, $P_0 = P_0(t, x)$, com condição final $P_0(T, x) = h(x)$.

O segundo termo de (5-11) a ser analisado é:

$$\mathcal{L}_0 P_1 + \mathcal{L}_1 P_0 = 0. \quad (5-13)$$

Sabe-se que P_0 não depende da variável y . Como \mathcal{L}_1 envolve derivadas em relação à variável y , segue que $\mathcal{L}_1 P_0 = 0$, reduzindo a equação (5-13) a $\mathcal{L}_0 P_1 = 0$.

De maneira análoga, ao termo $\mathcal{O}(\epsilon^{-1})$, obtém-se $P_1 = P_1(t, x)$, com condição terminal $P_1(T, x) = 0$. **Conclui-se então que os dois primeiros termos de (5-10) não dependem da variável y .**

O próximo termo de (5-11) a ser analisado é, então:

$$\mathcal{L}_0 P_2 + \mathcal{L}_1 P_1 + \mathcal{L}_2 P_0 = 0. \quad (5-14)$$

Como P_1 não depende da variável y , a equação (5-14) se reduz a:

$$\mathcal{L}_0 P_2 + \mathcal{L}_2 P_0 = 0. \quad (5-15)$$

Sabe-se que P_0 depende apenas de (t, x) . Fixando-se x , $\mathcal{L}_2 P_0$ depende apenas de y e (5-15) é uma equação de Poisson para P_2 com respeito a \mathcal{L}_0 . Pela alternativa de Fredholm, [26], para que exista uma solução, $\mathcal{L}_2 P_0$ tem que estar no complemento ortogonal do núcleo de \mathcal{L}_0^* , onde:

$$\mathcal{L}_0^* \Psi = \tilde{v}^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{\partial((m-y)\Psi)}{\partial y}, \quad (5-16)$$

onde Ψ possui decaimento exponencial no infinito.

De acordo com [11], isto é equivalente a dizer que $\mathcal{L}_2 P_0$ tem média zero com respeito à distribuição invariante de Y :

$$\mathbb{E}[\mathcal{L}_2 P_0] = \langle \mathcal{L}_2 P_0 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}_2 P_0 \phi(y) dy = 0. \quad (5-17)$$

onde ϕ em (3-33) é tal que $\mathcal{L}_0 \phi = 0$.

Como P_0 não depende de y , tem-se:

$$\langle \mathcal{L}_2 P_0 \rangle = \langle \mathcal{L}_2 \rangle P_0 = \mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}) P_0 = 0, \quad (5-18)$$

onde $\bar{\sigma}^2$ é a volatilidade efetiva com respeito a distribuição invariante de Y , definida por:

$$\bar{\sigma}^2 = \mathbb{E}[f(y)^2] = \langle f^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)^2 \phi(y) dy. \quad (5-19)$$

Conclui-se então que $P_0(t, x)$ é solução da equação de Black & Scholes com condição terminal $P_0(T, x) = h(x)$ e $\sigma = \bar{\sigma}$, como em (5-19).

A equação (5-15) pode ser re-escrita como:

$$\mathcal{L}_0 P_2 = -\mathcal{L}_2 P_0. \quad (5-20)$$

Aplicando a relação (5-17), $\mathcal{L}_2 P_0$ pode ser escrito como:

$$\mathcal{L}_2 P_0 = \mathcal{L}_2 P_0 - \langle \mathcal{L}_2 P_0 \rangle = \frac{1}{2} (f(y)^2 - \bar{\sigma}^2) x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}. \quad (5-21)$$

Substituindo-se (5-21) na equação (5-20) tem-se:

$$\mathcal{L}_0 P_2 = -\frac{1}{2} (f(y)^2 - \bar{\sigma}^2) x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}. \quad (5-22)$$

Neste ponto faz-se necessária uma observação. Existe uma solução da equação (5-22) satisfazendo um crescimento no máximo polinomial, desde que o lado direito da equação, como função de y , possua no máximo crescimento polinomial; conforme mencionado em [17] (páginas 92 e 93). No caso do lado direito da equação (5-22), então P_2 não tem, em geral, uma solução polinomialmente limitada em y e, neste caso, o adjunto \mathcal{L}_0^* terá uma natureza diferente de (5-16) e, portanto a alternativa de Fredholm levaria a uma condição de solvabilidade diferente. Em trabalho mais recente, [14], Fouque et al. consideram f limitada inferiormente e superiormente, como neste trabalho, diferentemente da definição de f dada em [17], de modo que tal afirmação seja válida.

Sendo assim, o segundo termo de correção P_2 , solução da equação de Poisson (5-22), é dado por:

$$\begin{aligned} P_2 &= -\frac{1}{2} \mathcal{L}_0^{-1} (f(y)^2 - \bar{\sigma}^2) x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} \\ &= -\frac{1}{2} (\psi(y) + c(t, x)) x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (5-23)$$

onde $\psi(y)$ é solução da equação de Poisson:

$$\mathcal{L}_0\psi = f(y)^2 - \bar{\sigma}^2, \quad (5-24)$$

e $c(t, x)$ é constante em y e pode depender de (t, x) .

Finalmente, agora analisa-se o termo de $\mathcal{O}(\epsilon^{1/2})$ que também deve ser igual a zero. Isto implica a seguinte relação:

$$\mathcal{L}_0P_3 + \mathcal{L}_1P_2 + \mathcal{L}_2P_1 = 0. \quad (5-25)$$

De modo análogo ao termo de $\mathcal{O}(1)$, (5-25) é uma equação de Poisson para P_3 , com respeito a \mathcal{L}_0 , pois:

$$\mathcal{L}_0P_3 = -(\mathcal{L}_1P_2 + \mathcal{L}_2P_1). \quad (5-26)$$

Utilizando-se novamente a condição de solvabilidade, obtêm-se:

$$0 = \mathbb{E}[\mathcal{L}_1P_2 + \mathcal{L}_2P_1] = \langle \mathcal{L}_1P_2 + \mathcal{L}_2P_1 \rangle = \langle \mathcal{L}_1P_2 \rangle + \langle \mathcal{L}_2P_1 \rangle. \quad (5-27)$$

Analisa-se primeiramente \mathcal{L}_2P_1 . Note que P_1 não depende de y , logo, de maneira análoga ao termo de $\mathcal{O}(\epsilon^{-1/2})$, tem-se:

$$\langle \mathcal{L}_2P_1 \rangle = \langle \mathcal{L}_2 \rangle P_1 = \mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma})P_1. \quad (5-28)$$

Agora calcula-se $\langle \mathcal{L}_1P_2 \rangle$. Usando a definição de P_2 em (5-23), tem-se:

$$\begin{aligned} -\langle \mathcal{L}_1P_2 \rangle &= \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}_1(\psi(y) + c(t, x)) \rangle x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} \\ &= \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}_1\psi(y) \rangle x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (5-29)$$

onde ψ satisfaz (5-24).

Calcula-se então $\langle \mathcal{L}_1\psi(y)\delta(x) \rangle$, onde δ é uma função x diferenciável.

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_1\psi(y)\delta(x) \rangle &= \left\langle \left(\sqrt{2}\rho\tilde{\nu}x f(y) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \tilde{\nu}\Lambda(y) \frac{\partial}{\partial y} \right) (\psi(y)\delta(x)) \right\rangle \\ &= \sqrt{2}\rho\tilde{\nu}x \langle f(y)\psi'(y) \rangle \delta'(x) \\ &- \tilde{\nu} \langle \Lambda(y)\psi'(y) \rangle \delta(x). \end{aligned} \quad (5-30)$$

De (5-27), (5-28) e (5-29), tem-se:

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{L}_2 P_1 \rangle &= -\langle \mathcal{L}_1 P_2 \rangle \\ \mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}) P_1 &= -\langle \mathcal{L}_1 P_2 \rangle \\ \mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}) P_1 &= \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}_1 \psi(y) \rangle x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2},\end{aligned}\quad (5-31)$$

para $t < T$.

Substituindo-se a relação (5-30), com $\delta(x) = x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}$ em (5-31) tem-se:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}) P_1 &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{2} \rho \tilde{\nu} x \langle f(y) \psi'(y) \rangle \delta'(x) - \tilde{\nu} \langle \Lambda(y) \psi'(y) \rangle \delta(x) \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \rho \tilde{\nu} \langle f(y) \psi'(y) \rangle x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3} \\ &+ \left(\sqrt{2} \rho \tilde{\nu} \langle f(y) \psi'(y) \rangle - \frac{1}{2} \tilde{\nu} \langle \Lambda(y) \psi'(y) \rangle \right) x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2},\end{aligned}\quad (5-32)$$

com condição de contorno $P_1(T, x) = 0$.

Pode-se então, escrever:

$$\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}) P_1(t, x) = H(t, x), \quad (5-33)$$

com condição terminal $P_1(t, x) = 0$.

Aqui $H(t, x)$ é definido como:

$$H(t, x) = V_2 x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} + V_3 x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}, \quad (5-34)$$

onde

$$V_2 = \frac{\tilde{\nu}}{\sqrt{2}} \left(2\rho \langle f \psi' \rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \Lambda \psi' \rangle \right) \quad (5-35)$$

$$V_3 = \frac{\rho \tilde{\nu}}{\sqrt{2}} \langle f \psi' \rangle. \quad (5-36)$$

Mostra-se então, que aplicando-se a condição de contorno,

$$P_1(t, x) = -(T - t)H(t, x).$$

Note que se $\rho = 0$, caso em que o ativo não é correlacionado com o processo de

volatilidade estocástica, então $V_3 = 0$. Neste caso, P_1 é um múltiplo de $\Lambda\psi'$, onde Λ é o preço de mercado do risco. Desta forma, o preço corrigido de Black & Scholes vai estar em torno do preço de Black & Scholes.

Proposição 5.1 *Seja $H(t, x)$ como em (5-34). Então, $P_1(t, x)$ solução de (5-33) é da seguinte forma:*

$$P_1(t, x) = -(T - t)H(t, x). \quad (5-37)$$

Prova.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma})P_1(t, x) &= \frac{\partial P_1}{\partial t} + \frac{1}{2}f(y)^2x^2\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + \left(x\frac{\partial P_1}{\partial x} - P_1\right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t}((T - t)H(t, x)) - \frac{1}{2}f(y)^2x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}((T - t)H(t, x)) \\ &\quad + \left(-x\frac{\partial}{\partial x}((T - t)H(t, x)) + (T - t)H(t, x)\right) \\ &= -(T - t)\frac{\partial H(t, x)}{\partial t} + H(t, x) - \frac{1}{2}f(y)^2x^2(T - t)\frac{\partial^2 H(t, x)}{\partial x^2} \\ &\quad + \left(-x(T - t)\frac{\partial H(t, x)}{\partial x} + (T - t)H(t, x)\right) \\ &= -(T - t)\left[\frac{\partial H(t, x)}{\partial t} + \frac{1}{2}f(y)^2x^2\frac{\partial^2 H(t, x)}{\partial x^2} + \left(x\frac{\partial H(t, x)}{\partial x} - H(t, x)\right)\right] \\ &\quad + H(t, x) \\ &= -(T - t)\mathcal{L}_{BS}(H(t, x)) + H(t, x) \\ &= H(t, x). \end{aligned}$$

■

A última afirmação da proposição anterior é válida, pois dado uma solução P_0 de Black & Scholes, vale que:

Proposição 5.2 *Seja P_0 uma solução de Black & Scholes. Então, $x^n \frac{\partial^n P_0}{\partial x^n}$ também é uma solução de Black & Scholes. Isto é:*

$$\mathcal{L}_{BS}(\sigma)\left(x^n \frac{\partial^n P_0}{\partial x^n}\right) = x^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} \mathcal{L}_{BS}(\sigma)P_0 = 0. \quad (5-38)$$

Prova. Primeiramente mostra-se que:

$$x \frac{\partial}{\partial x} \left(x^n \frac{\partial^n P_0}{\partial x^n} \right) = x^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left(x \frac{\partial P_0}{\partial x} \right), \quad (5-39)$$

$$x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(x^n \frac{\partial^n P_0}{\partial x^n} \right) = x^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left(x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} \right). \quad (5-40)$$

Primeiramente mostra-se (5-39):

$$x \frac{\partial}{\partial x} \left(x^n \frac{\partial^n P_0}{\partial x^n} \right) = x^n \left(n \frac{\partial^n P_0}{\partial x^n} + x \frac{\partial^{n+1} P_0}{\partial x^{n+1}} \right) \quad (5-41)$$

Da regra de Leibinz, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left(x \frac{\partial P_0}{\partial x} \right) &= \sum_{i=0}^1 \frac{\partial^i x}{\partial x^i} \frac{\partial^{n-i+1} P_0}{\partial x^{n-i+1}} \\ &= x \frac{\partial^{n+1} P_0}{\partial x^{n+1}} + n \frac{\partial^n P_0}{\partial x^n}. \end{aligned} \quad (5-42)$$

De (5-41) e (5-42), segue que:

$$x \frac{\partial}{\partial x} \left(x^n \frac{\partial^n P_0}{\partial x^n} \right) = x^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left(x \frac{\partial P_0}{\partial x} \right), \quad (5-43)$$

o que demonstra (5-39). Mostra-se agora (5-40):

$$\begin{aligned} x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(x^n \frac{\partial^n P_0}{\partial x^n} \right) &= x^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(nx^{n-1} \frac{\partial^n P_0}{\partial x^n} + x^n \frac{\partial^{n+1} P_0}{\partial x^{n+1}} \right) \\ &= x^2 \left(n(n-1)x^{n-2} \frac{\partial^n P_0}{\partial x^n} + 2nx^{n-1} \frac{\partial^{n+1} P_0}{\partial x^{n+1}} + x^n \frac{\partial^{n+2} P_0}{\partial x^{n+2}} \right) \\ &= x^n \left(n(n-1) \frac{\partial^n P_0}{\partial x^n} + 2nx \frac{\partial^{n+1} P_0}{\partial x^{n+1}} + x^2 \frac{\partial^{n+2} P_0}{\partial x^{n+2}} \right). \end{aligned} \quad (5-44)$$

Da regra de Leibinz, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left(x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} \right) &= \sum_{i=0}^2 \frac{\partial^i x^2}{\partial x^i} \frac{\partial^{n-i+2} P_0}{\partial x^{n-i+2}} \\ &= x^2 \frac{\partial^{n+2} P_0}{\partial x^{n+2}} + 2nx \frac{\partial^{n+1} P_0}{\partial x^{n+1}} + n(n-1) \frac{\partial^n P_0}{\partial x^n}. \end{aligned} \quad (5-45)$$

De (5-44) e (5-45), segue que:

$$x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(x^n \frac{\partial^n P_0}{\partial x^n} \right) = x^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left(x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} \right), \quad (5-46)$$

o que demonstra (5-40).

Mostra-se agora que $x^n \frac{\partial^n P_0}{\partial x^n}$ é uma solução de Black & Scholes, i.e., satisfaz a equação (2-22). Daí:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{BS}(x^n \frac{\partial^n P_0}{\partial x^n}) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(x^n \frac{\partial^n P_0}{\partial x^n} \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(x^n \frac{\partial^n P_0}{\partial x^n} \right) \\ &+ r \left(x \frac{\partial}{\partial x} \left(x^n \frac{\partial^n P_0}{\partial x^n} \right) - \left(x^n \frac{\partial^n P_0}{\partial x^n} \right) \right) \end{aligned} \quad (5-47)$$

Usando as identidades (5-39) e (5-40) em (5-47), tem-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{BS}(x^n \frac{\partial^n P_0}{\partial x^n}) &= x^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left(\frac{\partial P_0}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left(x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} \right) \\ &+ r \left(x^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left(x \frac{\partial P_0}{\partial x} \right) - \left(x^n \frac{\partial^n P_0}{\partial x^n} \right) \right) \\ &= x^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} (\mathcal{L}_{BS}(P_0)). \end{aligned} \quad (5-48)$$

Logo, conclui-se que $x^n \frac{\partial^n P_0}{\partial x^n}$ é solução de Black & Scholes. ■

Finalmente, chega-se ao preço corrigido de Black & Scholes, dado por:

$$\begin{aligned} P &\simeq P_0(t, x) + \sqrt{\epsilon} P_1(t, x) \\ P &\simeq P_0(t, x) - \sqrt{\epsilon}(T - t) \left(V_2 x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} + V_3 x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3} \right), \end{aligned} \quad (5-49)$$

onde P_0 é o preço de Black & Scholes, (5-18), considerando σ como em (5-19), e P_1 é dado por (5-49).

Em [14] Fouque et al., provam a convergência da expansão assintótica para P^ϵ , com o seguinte resultado:

Teorema 5.3 *Valem as afirmações abaixo sobre a expansão assintótica P^ϵ :*

- O primeiro termo P_0 é a solução da equação de Black & Scholes, como volatilidade efetiva $\bar{\sigma}$, i.e., vale a equação (5-18);
- O segundo termo P_1 é dado explicitamente como combinação linear das três primeiras derivadas de P_0 em relação ao preço, tal como em (5-37) e (5-34);

para $t < T$, $x, y \in \mathbb{R}$, a convergência dos preços é dado por:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{|P^\epsilon(t, x, y) - (P_0(t, x) + \sqrt{\epsilon}P_1(t, x))|}{\epsilon |\log \epsilon|^{1+p}} = 0,$$

para $p > 0$.

Note que esta convergência é pontual, o que torna o resultado mais interessante, uma vez que os preços são calculados para valores dados de (t, x) .

Em particular, quando se tem uma opção europeia de compra, usando as relações (2-23), (2-24), (2-25), (2-26) e fazendo uso das identidades:

$$\begin{aligned} \frac{\partial d_{1,2}}{\partial x} &= \frac{1}{x\bar{\sigma}\sqrt{T-t}}, \\ N'(d) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-d^2/2}, \end{aligned} \tag{5-50}$$

$$e^{-d_2^2/2} = e^{-d_1^2/2} \left(\frac{xe^{r(T-t)}}{K} \right), \tag{5-51}$$

pode-se calcular as “Gregas” **Delta**, **Gama**, **Vega** e **Epsilon**, tendo sido esta última introduzida por Fouque et al em [17]:

– **Delta**

$$\frac{\partial P_0}{\partial x} = N(d_1), \tag{5-52}$$

– **Gama**

$$\frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} = \frac{e^{-d_1^2/2}}{x\bar{\sigma}\sqrt{2\pi(T-t)}}, \tag{5-53}$$

– **Vega**

$$\frac{\partial P_0}{\partial \sigma} = \frac{xe^{-d_1^2/2}\sqrt{T-t}}{\sqrt{2\pi}}, \tag{5-54}$$

$$= (T-t)\sigma x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}. \tag{5-55}$$

– Epsilon

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3} &= x \frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 \frac{\partial P_0^2}{\partial x^2} \right) - 2x^2 \frac{\partial P_0^2}{\partial x^2} \\
&= \frac{1}{\sigma(T-t)} \left(x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial P_0}{\partial \sigma} \right) - 2 \frac{\partial P_0}{\partial \sigma} \right) \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3} \\
&= \frac{e^{-d_1^2/2}}{x^2 \bar{\sigma} \sqrt{2\pi(T-t)}} \left(1 + \frac{d_1}{\bar{\sigma} \sqrt{T-t}} \right),
\end{aligned}$$

Usando as identidades (5-50) e substituindo a equação (5-56) em (5-34) obtém-se:

$$\begin{aligned}
H(t, x) &= \frac{V_2}{\bar{\sigma}(T-t)} \left(\frac{\partial P_0}{\partial \sigma} \right) + \frac{V_3}{\bar{\sigma}(T-t)} \left(x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial P_0}{\partial \sigma} \right) - 2 \frac{\partial P_0}{\partial \sigma} \right) \\
&= \frac{1}{\bar{\sigma}(T-t)} \left[(V_2 - 2V_3) \frac{\partial P_0}{\partial \sigma} + V_3 \left(\frac{\partial P_0}{\partial \sigma} - x \frac{\partial P_0}{\partial \sigma} d_1 \left(\frac{\partial d_1}{\partial x} \right) \right) \right] \\
&= \frac{1}{\bar{\sigma}(T-t)} \left(\frac{\partial P_0}{\partial \sigma} \right) \left[(V_2 - V_3) - \frac{V_3 d_1}{\bar{\sigma} \sqrt{T-t}} \right] \\
&= \frac{x e^{-d_1^2/2}}{\bar{\sigma} \sqrt{2\pi(T-t)}} \left(V_2 - V_3 - \frac{V_3 d_1}{\bar{\sigma} \sqrt{T-t}} \right). \tag{5-56}
\end{aligned}$$

Substituindo-se (5-56) na equação (5-37), a correção do preço de Black & Scholes para uma opção de compra europeia é dada por:

$$\begin{aligned}
P_1(t, x) &= -(T-t)H(t, x) \\
&= \frac{x e^{-d_1^2/2}}{\bar{\sigma} \sqrt{2\pi}} \left(V_3 \frac{d_1}{\bar{\sigma}} + (V_3 - V_2) \sqrt{T-t} \right). \tag{5-57}
\end{aligned}$$

5.3

Volatilidade Implícada para Opções Europeias de Compra

O objetivo desta seção é calcular uma estimativa para a superfície de volatilidade implícita, I , de uma opção europeia em termos de $P_0 + \epsilon^{1/2} P_1$. Em particular, apresenta-se a conta para uma opção de compra. A volatilidade implícita é definida como sendo a volatilidade que deve ir em Black & Scholes para que se tenha a relação (5-58).

$$C_{BS}(t, x, K, T, I) = C_{obs} \tag{5-58}$$

Tomando o preço observado como em (5-49), e substituindo na equação (5-58), a relação que determina a volatilidade implícita é então dado por:

$$C_{BS}(t, x, K, T, I) = P_0 + \epsilon^{1/2} P_1, \quad (5-59)$$

sendo P_0 e P_1 como em (5-18) e (5-57), respectivamente.

Expandindo-se $I = \bar{\sigma} + \sqrt{\epsilon} I_1 + \mathcal{O}(\epsilon)$ no lado esquerdo de (5-59), e usando o *Teorema da Função Implícita*, em sua versão analítica, [9], tem-se:

$$C_{BS}(t, x, K, T, \bar{\sigma}) + \sqrt{\epsilon} I_1 \frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma}(t, x, K, T, \bar{\sigma}) = P_0(t, x) + \epsilon^{1/2} P_1(t, x) + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (5-60)$$

o que leva a:

$$I_1 = P_1(t, x) \left[\frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma}(t, x, K, T, \bar{\sigma}) \right]^{-1}. \quad (5-61)$$

Isto quer dizer que a volatilidade implícita é dada por:

$$I = \bar{\sigma} + \epsilon^{1/2} P_1(t, x) \left[\frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma}(t, x, K, T, \bar{\sigma}) \right]^{-1} + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (5-62)$$

para $T - t \gg \epsilon^{1/2}$.

Substituindo as relações (5-57), (5-54) e (2-24) na equação (5-62), tem-se:

$$I = \bar{\sigma} + \epsilon^{1/2} \left[\frac{V_3}{\bar{\sigma}^3} \left(r + \frac{3}{2} \bar{\sigma}^2 \right) - \frac{V_2}{\bar{\sigma}} - \frac{V_3}{\bar{\sigma}^3} \left(\frac{\log(\frac{K}{x})}{T - t} \right) \right] + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (5-63)$$

Pode-se então escrever a volatilidade implícita como uma função afim da *razão log-moneyness-ao-vencimento* (RLMV), em termos do preço de exercício K , do preço do ativo objeto x , do tempo até o vencimento $T - t$ e dos parâmetros a e b como segue:

$$I = a \left[\frac{\log(\frac{K}{x})}{T - t} \right] + b + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (5-64)$$

onde

$$\begin{aligned} a &= -\frac{V_3}{\bar{\sigma}^3} \\ b &= \bar{\sigma} + \frac{V_3}{\bar{\sigma}^3} \left(r + \frac{3}{2} \bar{\sigma}^2 \right) - \frac{V_2}{\bar{\sigma}}. \end{aligned}$$

Da equação, (5-64), nota-se que o parâmetro b deve ser estimado para $K = x$, i.e., b vai ser aproximadamente a volatilidade implícita de opções no dinheiro. E então, tendo b , estima-se o parâmetro a para valores de opções próximas do dinheiro. No gráfico (5.1), é apresentado uma primeira estimativa para a superfície de volatilidade implícita do mercado através da análise assintótica e de dados do mercado. Mais adiante, no capítulo 7, confronta-se estas estimativas com as superfícies dadas pelo mercado.

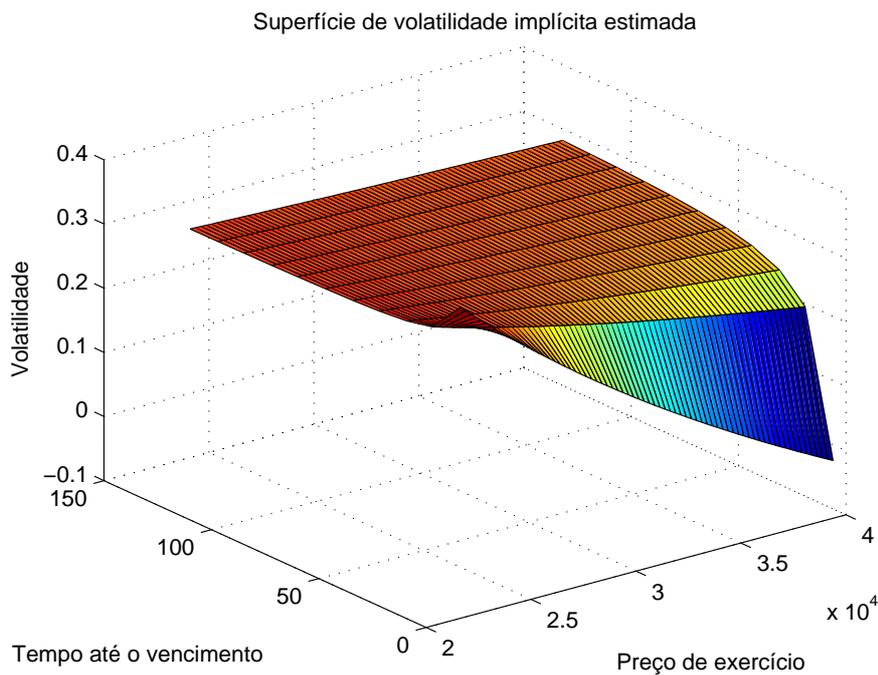


Figura 5.1: Superfície de volatilidade implícita estimada pela análise assintótica. Os parâmetros estimados foram $a = -0.01105$ e $b = 0.2966$, para o valor do índice IBOVESPA de 24818.01 no dia 04/02/2005.

6

Interpolação da Superfície de Volatilidade Implícita

Este capítulo descreve o algoritmo desenvolvido por Kahalé em [19], para gerar uma superfície de volatilidade implícita partindo de um conjunto de dados esparsos, como no caso de mercados ilíquidos. Se as volatilidades do mercado são livres de arbitragem, a superfície interpolada é livre de arbitragem e além disso satisfaz algumas condições de suavidade.

A idéia base do método apresentado é construir uma interpolação para uma única maturidade com as seguintes propriedades:

- Se as volatilidades implícita do mercado são constantes, as volatilidade interpoladas também serão; e
- A segunda derivada do preço da call em relação ao preço de exercício é positiva e contínua.

A motivação por trás do segunda propriedade é que a segunda derivada do preço de uma opção de compra europeia é proporcional à densidade implicada do preço do spot. A interpolação por uma única maturidade não depende da forma das volatilidades discretas, e pode ser aplicada a opções sobre índices, commodities, câmbio e taxas de juros.

Tendo gerado uma curva livre de arbitragem para cada maturidade, gera-se então, uma superfície de volatilidade implícita, através de uma interpolação no livre de arbitragem no tempo.

6.1

Conceitos Preliminares

Resultados de Carr & Madan, [7], mostram que para dado um conjunto de preços, preços de exercícios e datas de opções, condições necessárias e suficientes

para a ausência de arbitragem¹ são a ausência de *call spread*², *calendar spread*³ e *butterfly spread calendar*⁴. Tais condições podem ser reinterpretadas como as condições apresentadas por Kahalé, [19], e são descritas a seguir:

- para uma data de vencimento o preço da opção de compra é não-crescente e convexo, com respeito ao preço de exercício, e
- o preço da opção de compra é uma função não-decrescente do tempo.

A condição de convexidade pode ser interpretada a partir da fórmula de volatilidade local de Dupire, [10], e a condição que o preço é não-crescente segue por um simples argumento de arbitragem.

Em particular, para o caso unidimensional pode ser mostrado que:

Lema 6.1 *Considere uma seqüência $(k_i, c_i)_{0 \leq i \leq n+1}$ tal que:*

$$0 = c_{n+1} = k_0 < k_1 < \dots < k_n < k_{n+1} = \infty, \quad (6-1)$$

e c_i , $0 \leq i \leq n$, é o preço de uma call com preço de exercício k_i . Não há arbitragem entre estes preços se, e somente se, c_0 é igual ao preço atual, $c_n \geq 0$ e

$$-1 \leq \frac{c_i - c_{i-1}}{k_i - k_{i-1}} \leq \frac{c_{i+1} - c_i}{k_{i+1} - k_i} \leq 0, \quad \text{para } 1 \leq i < n. \quad (6-2)$$

A demonstração do lema (6.1), segue por argumentos de análise convexa.

6.2

Método de Interpolação

Nesta seção, seguindo Kahalé [19], é apresentado o método de interpolação C^1 livre de arbitragem para uma dada data de vencimento. O método é baseado na concatenação de diversas funções convexas, e é inspirado na fórmula Black & Scholes. Inicia-se a análise com o seguinte lema:

Lema 6.2 *Dados $f > 0, \Sigma > 0$, a e b , a função*

$$c(k) = c_{f,\Sigma,a,b}(k) = fN(d_1) - kN(d_2) + ak + b, \quad (6-3)$$

¹Neste caso, utiliza-se a definição de arbitragem estática, vide [23].

²Spread entre call's de mesmo vencimento e preços de exercícios diferentes.

³Spread entre call's de mesmo preço de exercício e datas de vencimentos diferentes

⁴[7]

onde

$$d_1 = \frac{\log(f/k) + \Sigma^2/2}{\Sigma}, \quad (6-4)$$

e $d_2 = d_1 - \Sigma$, é uma função convexa em k para $k > 0$.

Prova. Busca-se mostrar que $c''(k) > 0$, antes porém calculam-se algumas relações importantes:

$$d'_2 = (d_1 - \Sigma)' = d'_1 = \frac{-1}{k\Sigma}, fN'(d_1) = kN'(d_2). \quad (6-5)$$

$$\begin{aligned} c'(k) &= fN'(d_1)d'_1 - N(d_2) - kN'(d_2)d'_2 + a \\ &= d'_1 [fN'(d_1) - kN'(d_2)] - N(d_2) + a \\ &= -N(d_2) + a. \end{aligned} \quad (6-6)$$

Logo,

$$c''(k) = -N'(d_2)d'_2 = \frac{N'(d_2)}{k\Sigma} > 0, \quad (6-7)$$

para $k > 0$. ■

Lema 6.3 *Seja g uma função real definida para todos os números reais tais que $g'(x)$ existe e é positiva para todo número real x e $1/g'$ é estritamente convexa. Para $\lambda \in (0, 1)$ e todo número real $x_0 < x_1$, a função $h(a) = g(\lambda g^{-1}(a + x_0) + (1 - \lambda)g^{-1}(a + x_1)) - a$ tem derivada positiva em relação a a no (possivelmente vazio) intervalo no qual é definida.*

Prova. Sejam $y = g^{-1}(a + x_0)$ e $z = g^{-1}(a + x_1)$.

$$\begin{aligned} h'(a) &= g'(\lambda y + (1 - \lambda)z) \left[\lambda(g^{-1}(a + x_0))' + (1 - \lambda)(g^{-1}(a + x_1))' \right] - 1 \\ &= g'(\lambda y + (1 - \lambda)z) \left[\frac{\lambda}{g'(y)} + \frac{(1 - \lambda)}{g'(z)} \right] - 1. \end{aligned} \quad (6-8)$$

Segue que:

$$\begin{aligned}
 h'(a) > 0 &\Leftrightarrow \\
 g'(\lambda y + (1 - \lambda)z) \left[\frac{\lambda}{g'(y)} + \frac{(1 - \lambda)}{g'(z)} \right] > 1 &\Leftrightarrow \\
 \frac{\lambda}{g'(y)} + \frac{(1 - \lambda)}{g'(z)} > \frac{1}{g'(\lambda y + (1 - \lambda)z)}. &
 \end{aligned} \tag{6-9}$$

Como $\frac{1}{g'}$ é estritamente convexa, segue o lema. ■

Teorema 6.4 Para todos os números reais k_0, k_1, c_0, c_1, c'_0 e c'_1 tais que $0 < k_0 < k_1$ e

$$c'_0 < \frac{c_1 - c_0}{k_1 - k_0} < c'_1 < 1 + c'_0, \tag{6-10}$$

então existe um único vetor (f, Σ, a, b) com $f > 0, \Sigma > 0$ tais que a função $c = c_{f, \Sigma, a, b}$ satisfaça as seguintes condições: $c(k_0) = c_0, c(k_1) = c_1, c'(k_0) = c'_0$, e $c'(k_1) = c'_1$. O vetor (f, Σ, a, b) é contínuo em relação a $(k_0, k_1, c_0, c_1, c'_0, c'_1)$ e pode ser calculado numericamente.

Prova. Seja $a \in (c'_1, 1 + c'_0)$. Sejam α, β, d_2^0 e d_2^1 os únicos números reais tais que:

$$c'_i = -N(d_2^i) + a, e \tag{6-11}$$

$$d_2^i = \alpha \log(k_i) + \beta, \tag{6-12}$$

para $i \in \{0, 1\}$. A relação (6-11) é válida pois $c'_0 < c'_1 < a < 1 + c'_0 < 1 + c'_1$. Daí, vai existir um único d_2^i tal que $a = c'_i + N(d_2^i)$, $i \in \{0, 1\}$. A existência de α e β deve-se a (6-12). Como $c'_0 < c'_1$, tem-se $d_2^0 > d_2^1$ por (6-11), e então:

$$\alpha = \frac{d_2^0 - d_2^1}{\log(k_0) - \log(k_1)} < 0. \tag{6-13}$$

Daí, existem $f, \Sigma > 0$ tais que $\alpha = -1/\Sigma$ e $\beta = (\log f)/\Sigma - \Sigma/2$. Segue então que:

$$d_2^i = \frac{\log(f/k_i) - \Sigma^2/2}{\Sigma}. \tag{6-14}$$

Note que d_2^i, α, β, f e Σ são funções contínuas de $a, a \in (c'_1, 1 + c'_0)$. Considere a função $c = c_{f, \Sigma, a, b}$, onde b é escolhido tal que $c(k_0) = c_0$. Segue das equações (6-7) e (6-14) que $c'(k_i) = -N(d_2^i) + a$, e então, $c'(k_i) = c'_i$ por (6-11). Mostra-se agora que $c(k_1) = c_1$, para $a \in (c'_1, 1 + c'_0)$. A razão $(c(k_1) - c(k_0))/(k_1 - k_0)$ é uma função

contínua de a , por ser composição de funções contínuas. Note que $d_2^i = N^{-1}(a - c'_i)$. Da equação (6-6), para $k_0 < k < k_1$, tem-se:

$$c'(k) = a - N(d_2) = a - N(\lambda N^{-1}(a - c'_0) + (1 - \lambda)N^{-1}(a - c'_1)), \quad (6-15)$$

onde $\lambda = (\log(k_1/k))/(\log(k_1/k_0))$ e $d_2 = \lambda d_2^0 + (1 - \lambda)d_2^1$. Aplicando-se o lema 6.3, conclui-se que $\frac{\partial c'(k)}{\partial a} < 0$. O mesmo vale para a razão $(c(k_1) - c(k_0))/(k_1 - k_0)$, pois:

$$\left(\frac{c(k_1) - c(k_0)}{k_1 - k_0} \right)' = \frac{c'(k_1)}{k_1 - k_0} < 0, \quad (6-16)$$

pois $c(k_0) = c_0$. Quando $a \rightarrow c'_1$, $c'(k) \rightarrow c'_1$. Segue então que:

$$\lim_{a \rightarrow c'_1} \frac{c(k_1) - c(k_0)}{k_1 - k_0} = c'_1. \quad (6-17)$$

$$(6-18)$$

$$\lim_{a \rightarrow 1+c'_0} \frac{c(k_1) - c(k_0)}{k_1 - k_0} = c'_0. \quad (6-19)$$

$$(6-20)$$

Por continuidade, por (6-10) e aplicando o teorema do valor intermediário, existe $a_0 \in (c'_1, 1 + c'_0)$ tal que, para $a = a_0$, tem-se:

$$\frac{c(k_1) - c(k_0)}{k_1 - k_0} = \frac{c_1 - c_0}{k_1 - k_0}. \quad (6-21)$$

Como $c(k_0) = c_0$, segue de (6-21) que $c(k_1) = c_1$ para $a = a_0$. Como a derivada da razão $\frac{c(k_1) - c(k_0)}{k_1 - k_0} = \frac{c_1 - c_0}{k_1 - k_0}$ em relação a a é negativa, segue a unicidade de a_0 . ■

O teorema 6.4 fornece um método de interpolação entre dois preços de exercício. Este teorema é estendido mais adiante, de modo a extrapolar os preços das opções de compra abaixo ou acima de um certo preço de exercício. O método de extrapolação satisfaz condições limites que são também satisfeitas no caso de volatilidade constante.

Lema 6.5 *Para todos os números k_0 , c_0 e c'_0 tais que $0 < k_0, -1 < c'_0 < 0$ e $c_0 > 0$ existem dois únicos parâmetros $f > 0$ e $\Sigma > 0$ tais que a função $c = c_{f,\Sigma,0,0}$ satisfaz as seguintes condições: $c(k_0) = c_0$, $c'(k_0) = c'_0$. Além disto, $c(k) \rightarrow 0$ e $c'(k) \rightarrow 0$ para $k \rightarrow \infty$. O vetor (f, Σ) é contínuo em relação a (k_0, c_0, c'_0) e pode ser calculado*

numericamente.

Prova. Seja d_2^0 o único número tal que $c'_0 = -N(d_2^0)$. Para $\Sigma > 0$, seja $f = k_0 \exp \Sigma d_2^0 + \Sigma^2/2$. A função $c = c_{f,\Sigma,0,0}$ tem derivada igual a c'_0 em k_0 , pois $c'(k_0) = -N(d_2^0) = c'_0$. Tomando $d_1 = d_2^0 + \Sigma$, quando $\Sigma \rightarrow 0$, $c(k_0) \rightarrow 0$ pois:

$$\begin{aligned} c(k_0) &= fN(d_1) - k_0N(d_2^0) \\ &= k_0 e^{\Sigma d_2^0 + \Sigma^2/2} N(d_2^0 + \Sigma) - k_0 N(d_2^0) \rightarrow k_0 N(d_2^0) - k_0 N(d_2^0) = 0, \end{aligned} \quad (6-22)$$

e quando $\Sigma \rightarrow \infty$, $c(k_0) \rightarrow \infty$, pois:

$$\begin{aligned} c(k_0) &= fN(d_1) - k_0N(d_2^0) \\ &= k_0 e^{\Sigma d_2^0 + \Sigma^2/2} N(d_2^0 + \Sigma) - k_0 N(d_2^0) \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (6-23)$$

Logo, pelo teorema do valor intermediário, existe Σ_0 tal que $c(k_0) = k_0$. Para provar a unicidade, mostra-se que $c(k_0)$ possui derivada positiva com respeito a Σ . Podemos escrever a função avaliada em k_0 como:

$$c(k_0) = fN(d_1) + k_0N(d_2^0) = fN(d_1) + k_0c'_0 \quad (6-24)$$

Derivando o logaritmo de (6-24) em relação a Σ , tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log(c(k_0))}{\partial \Sigma} &= \frac{f'N(d_1) + fN'(d_1)}{fN(d_1)} \\ &= \frac{fN(d_1)d_1 + fN'(d_1)}{fN(d_1)} \\ &= d_1 + \frac{N'(d_1)}{N(d_1)}. \end{aligned} \quad (6-25)$$

Suponha por absurdo que $\frac{\partial \log(c(k_0))}{\partial \Sigma} \leq 0$. Tomando-se $\Sigma = -d_2^0$ em (6-25), tem-se:

$$\begin{aligned} d_1 + \frac{N'(d_1)}{N(d_1)} &\leq 0 \\ \frac{N'(d_1)}{N(d_1)} &\leq 0, \end{aligned} \quad (6-26)$$

o que não pode acontecer. Logo, $\frac{\partial \log(c(k_0))}{\partial \Sigma} > 0$, daí, $\frac{\partial(c(k_0))}{\partial \Sigma} > 0$ pela regra da cadeia. Resta calcular os limites de $c(k)$ e $c'(k)$, quando $k \rightarrow \infty$.

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} c(k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} fN(d_1) - kN(d_2) = 0,$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} c'(k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} -N(d_2) = 0, e$$

De acordo com (6-3) e (6-4). ■

Lema 6.6 Para todos os números reais k_1, c_0, c_1 e c'_1 tais que $0 < k_1$ e

$$-1 < \frac{c_1 - c_0}{k_1} < c'_1 < 0, \quad (6-27)$$

existem três parâmetros únicos $f > 0$, $\Sigma > 0$ e b tais que a função $c = c_{f,\Sigma,0,b}$ satisfaça as seguintes condições: $c(k) \rightarrow c_0$, para $k \rightarrow 0$, $c'(k_1) = c'_1, c(k_1) = c_1$. Além disto, $c'(k) \rightarrow -1$, para $k \rightarrow 0$. O vetor (f, Σ, b) é contínuo em relação a (k_1, c_0, c_1, c'_1) e pode ser calculado numericamente.

Prova. Seja d_2^1 o único número tal que $c'_1 = -N(d_2^1)$. Para $\Sigma > 0$, sejam então:

$$f = k_1 \exp(\Sigma d_2^1 + \Sigma^2/2); \quad (6-28)$$

$$b = c_0 - f. \quad (6-29)$$

A função $c = c_{f,\Sigma,0,b}$ tem derivada igual a c'_1 em k_1 , pois $c'(k_1) = -N(d_2^1) = c'_1$. Mais ainda, tem-se:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} c(k) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} fN(d_1) - kN(d_2) + c_0 - f; \\ &= f + c_0 - f; \\ &= c_0; \end{aligned} \quad (6-30)$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} c'(k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} -kN(d_2) = 0. \quad (6-31)$$

Resta mostrar que $c(k_1) = c_1$, para algum $\Sigma > 0$. Como $c(k_1) = fN(d_1) + k_1 c'_1 + b$, com $d_1 = d_2^1 + \Sigma$, usando (6-29), chega-se a:

$$\begin{aligned} c(k_1) &= fN(d_2^1 + \Sigma) + k_1 c'_1 + c_0 - f \\ c(k_1) - c_0 &= f(N(d_2^1 + \Sigma) - 1) + k_1 c'_1 \\ c(k_1) - c_0 &= -fN(-d_2^1 - \Sigma) + k_1 c'_1. \end{aligned} \quad (6-32)$$

Da equação (6-28), tem-se f como uma função de Σ tal que quando $\Sigma \rightarrow 0$, $f \rightarrow k_1$. Substituindo em (6-32), tem-se:

$$c(k_1) - c_0 = -k_1 N(-d_1^2) + k_1 c'_1 = k_1. \quad (6-33)$$

Como $N(x) \sim N'(x)/|x|$ quando $x \rightarrow -\infty$, tem-se:

$$\lim_{\Sigma \rightarrow \infty} c(k_1) - c_0 = k_1 c'_1. \quad (6-34)$$

Da equação (6-27), por continuidade e pelo teorema do valor intermediário, segue que existe $\Sigma_0 > 0$, tal que $c(k_1) = k_1$. Como no 6.5, pode ser mostrado que a derivada de $c(k_1)$ com respeito a Σ é positiva, o que implica continuidade e a unicidade de Σ_0 com respeito a (k_1, c_0, c_1, c'_1) . ■

Combinando os lemas 6.2, 6.5, 6.6 e o teorema 6.4, pode-se obter a definição e o teorema a seguir.

Definição 6.1 Considere os números reais k_0, k_1, c_0, c_1, c'_0 e c'_1 , tais que $0 < k_0 < k_1$ e a equação 6-10 é válida. Seja denotada por $\phi(k_0, c_0, c'_0, k_1, c_1, c'_1)$ a função $c = c_{f,\Sigma,a,b}$ que satisfaça as seguintes condições: $c(k_0) = c_0$, $c(k_1) = c_1$, $c'(k_0) = c'_0$, e $c'(k_1) = c'_1$. De modo similar, para todos os números reais k_0, c_0 e c'_0 tais que $0 < k_0, -1 < c'_0 < 0$ e $c_0 > 0$, seja denotada por $\phi(k_0, c_0, c'_0, \infty, 0, 0)$ a função $c = c_{f,\Sigma,0,0}$ que satisfaça as seguintes condições $c(k_0) = c_0$, $c'(k_0) = c'_0$. Finalmente, para todos os números reais k_1, c_0, c_1 e c'_1 tais que $0 < k_1$ e a equação (6-27) seja válida, seja denotada por $\phi(0, c_0, -1, k_1, c_1, c'_1)$ a função $c = c_{f,\Sigma,a,b}$ que satisfaça as seguintes condições: $c(k) \rightarrow c_0$, para $k \rightarrow 0$, $c'(k_1) = c'_1$, $c(k_1) = c_1$.

Segue da definição 6.1 que para todos os números reais ou infinitos k_0, k_1, c_0, c_1, c'_0 e c'_1 tais que a função $c = \phi(k_0, c_0, c'_0, k_1, c_1, c'_1)$ seja definida, $(c(k), c'(k)) \rightarrow (c_i, c'_i)$ para $k \rightarrow k_i$, $i \in \{0, 1\}$. Combinando os métodos de interpolação e extrapolação para uma série de preços de exercício, o seguinte resultado é obtido.

Teorema 6.7 Para todas as seqüências $(k_i)_{0 \leq i \leq n+1}$, $(c_i)_{0 \leq i \leq n+1}$ e $(c'_i)_{0 \leq i \leq n+1}$ tais que a relação (6-1) é válida em conjunto da condições de limite:

$$c'_0 = -1, c'_n < c'_{n+1} = 0 < c_n, \quad (6-35)$$

e da condições de convexidade:

$$c'_i < \frac{c_{i+1} - c_i}{k_{i+1} - k_i} < c'_{i+1}, \text{ para } 0 \leq i < n, \quad (6-36)$$

existe uma função C^1 e convexa $c(k)$, $k > 0$, e uma seqüência única $(f_i, \Sigma_i, a_i, b_i)_{0 \leq i \leq n}$ tal que $c(k) = c_{f_i, \Sigma_i, a_i, b_i}(k)$ no intervalo $[k_i, k_{i+1}] - 0, \infty$, $c(k_i) = c_i$ e $c'(k_i) = c'_i$ para $1 \leq i \leq n$. Mais ainda, tem-se:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} (c(k), c'(k)) &= (c_0, -1), e \\ \lim_{k \rightarrow \infty} (c(k), c'(k)) &= (0, 0). \end{aligned} \quad (6-37)$$

A seqüência $(f_i, \Sigma_i, a_i, b_i)_{0 \leq i \leq n}$ é contínua em relação a $(c_0, (k_i, c_i, c'_i)_{0 \leq i \leq n})$ e pode ser calculada numericamente.

Existem $4(n + 1)$ parâmetros desconhecidos, $(f_i, \Sigma_i, a_i, b_i)_{0 \leq i \leq n}$, que definem a função c . Cada equação $c(k_i) = c_i$, $1 \leq i \leq n$, dá duas condições para estes parâmetros pois esta é verdadeira para $c_{f_i, \Sigma_i, a_i, b_i}(k_i)$ e $c_{f_{i-1}, \Sigma_{i-1}, a_{i-1}, b_{i-1}}(k_i)$. O mesmo é válido para a equação $c'(k_i) = c'_i$, $1 \leq i \leq n$. Somando as condições de limite, tem-se $4n + 4$ condições, que é o mesmo número de parâmetros.

6.3

Algoritmo para Interpolação

Na presente seção apresenta-se o algoritmo utilizado para gerar a curva de preços, livre de arbitragem e suave, de uma opção europeia de compra, seguindo o método descrito na seção 6.2.

Algoritmo A:

Considere as seqüências $(k_i)_{0 \leq i \leq n+1}$ e $(c_i)_{0 \leq i \leq n+1}$, seqüências de preços de exercícios os respectivos preços de opções europeia de compra tais que sejam válidas as relações (6-1), $c_n > 0$ e:

$$-1 < \frac{c_i - c_{i-1}}{k_i - k_{i-1}} < \frac{c_{i+1} - c_i}{k_{i+1} - k_i} < 0, \quad \text{para } 1 \leq i < n. \quad (6-38)$$

Note que (6-38) é idêntica a (6-2) exceto pela troca das desigualdades por desigualdades estritas. A condição (6-38) verifica a ausência de arbitragem nos dados de mercado. Desta forma, o algoritmo é descrito como:

1. Define-se $c'_0 = -1$ e $c'_{n+1} = \infty$;
2. Calcula da seqüência $(c'_i)_{1 \leq i \leq n}$, como:

$$c'_i = \frac{l_i + l_{i+1}}{2}, \quad (6-39)$$

para $1 \leq i \leq n$, onde:

$$l_i = \frac{(c_i - c_{i-1})}{k_i - k_{i-1}}; \quad (6-40)$$

3. Cálculo dos parâmetros $(f, \Sigma, a, b)_{1 \leq j \leq n+1}$, da seguinte forma:
 - Para $j = 1$, cálculo dos parâmetros $(f, \Sigma, 0, b)$, de acordo com o lema 6.6;
 - Para $2 \leq j < n$, cálculo dos parâmetros (f, Σ, a, b) , de acordo com o teorema 6.4;
 - Para $j = n$, cálculo dos parâmetros $(f, \Sigma, 0, 0)$, de acordo com o lema 6.5.
4. Cálculo dos preços, utilizando a equação (6-3) dada em 6.2.

6.4

Interpolação Bi-dimensional

Nesta seção, apresenta-se o método de interpolação bidimensional para gerar uma superfície de volatilidade implícita, livre de arbitragem.

Algoritmo B:

Supondo que não é possível encontrar oportunidades de arbitragem nos dados de mercado, calcula-se então a superfície de volatilidade implícita utilizando o Algoritmo A, de acordo com os seguintes passos:

1. Para cada t_i gera-se uma curva de volatilidade implícita, livre de arbitragem, usando o Algoritmo A;
2. Para cada data de vencimento $t \in (t_i, t_{i+1})$ e preço de exercício K , calcula-se a volatilidade implícita $\sigma_{imp}(K, T)$ tal que $\sigma_{imp}^2(K, T)T$ é a interpolação linear de $\sigma_{imp}^2(K, t_i)t_i$ e $\sigma_{imp}^2(K, t_{i+1})t_{i+1}$.

No artigo original, [19], apresenta-se um terceiro passo. Testes verificados para vários exemplos não mostraram a necessidade da consideração deste outro passo, visto que a superfície de volatilidade obtida no passo dois já é livre de arbitragem.

6.5

Superfícies de Volatilidade Implícita para o IBOVESPA

Nesta seção apresentam-se alguns resultados obtidos quando da implementação do procedimento descrito nos Algoritmos A e B para interpolar superfícies de volatilidade implícita de opções de compra sobre o índice IBOVESPA.

Os dados utilizados para gerar tais gráficos foram os dados de negociações de opções de compra européia, sobre o IBOVESPA, referente aos anos de 2005 e 2006⁵. O uso do procedimento descrito anteriormente foi necessário devida a falta de liquidez deste mercado. Para exemplificar, para um dado dia de negociação, o máximo que foi encontrado, respeitando as hipóteses do procedimento, foi um conjunto de opções com apenas três maturidades diferentes sendo negociadas, o que ocorreu dez vezes para cada ano. Mais ainda, como será visto nos gráficos a seguir, em alguns casos, apenas um preço de exercício era negociado.

6.5.1

Superfície de Volatilidade Implícita no dia 24/01/2005

Na figura 6.1 apresenta-se as curvas de preço das opções interpoladas fazendo uso do método descrito pelo Algoritmo A, para dados de mercado do dia 24/01/2005. Note que, para duas datas de vencimento apenas um preço de exercício é negociado, e no caso mais próximo ao vencimento dois preços de exercícios são negociados. Observa-se também que o comportamento das curvas nos limites $x \rightarrow 0$ e $x \rightarrow \infty$ são coerentes e verifica-se a suavidade da interpolação.

Na figura 6.2 apresenta-se a superfície de volatilidade implícita gerada a partir das curvas de preço apresentadas na figura 6.1, de acordo com o procedimento apresentado no Algoritmo B. Observe que esta figura foi gerada a partir de um conjunto de quatro cotações de opções com preços de exercícios e/ou vencimentos diferentes.

6.5.2

Superfície de Volatilidade Implícita no dia 04/02/2005

Um outro exemplo é apresentado na figura 6.3, para dados de mercado do dia 04/02/2005. Nesta figura apresentam-se as curvas de preço das opções interpoladas, de acordo com método descrito pelo Algoritmo A. Neste caso, para as duas datas

⁵Fonte: BOVESPA

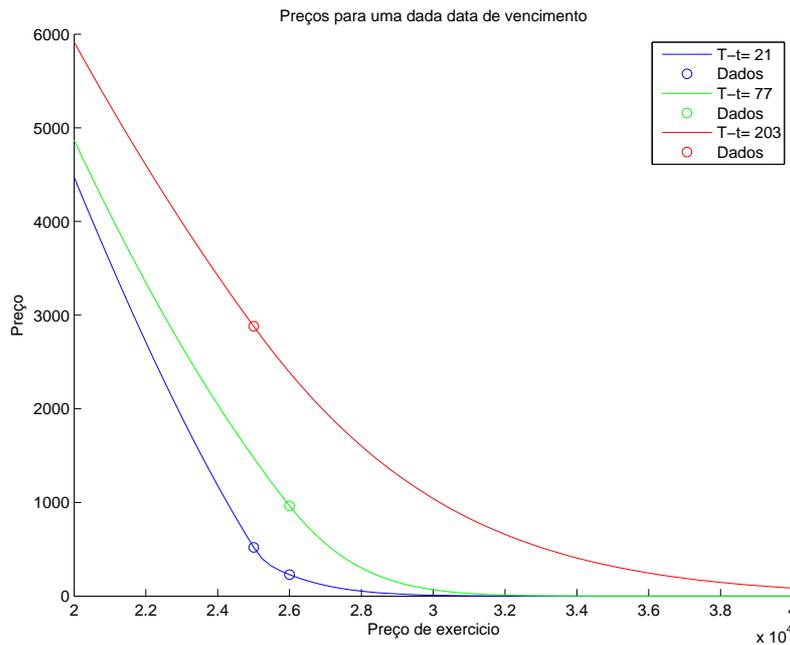


Figura 6.1: Curva de preços para opções no dia 24/01/2005, com o índice IBOVESPA cotado a 23812.51

de vencimentos mais próximas, três opções com preços de exercícios diferentes são negociadas. Para a data de vencimento mais distante, apenas uma opção é negociada. Mais uma vez, tem-se que o comportamento das curvas nos limites $x \rightarrow 0$ e $x \rightarrow \infty$ são coerentes e verifica-se a suavidade da interpolação.

Como para a primeira data apresentada, na figura 6.4 apresenta-se a superfície de volatilidade implícita gerada a partir das curvas de preço da figura 6.3, de acordo com o procedimento descrito no Algoritmo B. Neste caso, a superfície foi gerada a partir de um conjunto de sete cotações de opções com preços de exercícios e/ou vencimentos diferentes.

As figuras 6.1, 6.2, 6.3 e 6.4 mostram como o procedimento descrito neste capítulo é eficiente. Partindo de conjuntos de apenas quatro e sete pontos, como visto em 6.5.1 e 6.5.2, é possível interpolar superfícies de volatilidade implícita, sendo estas superfícies suáveis, estáveis e livres de arbitragem.

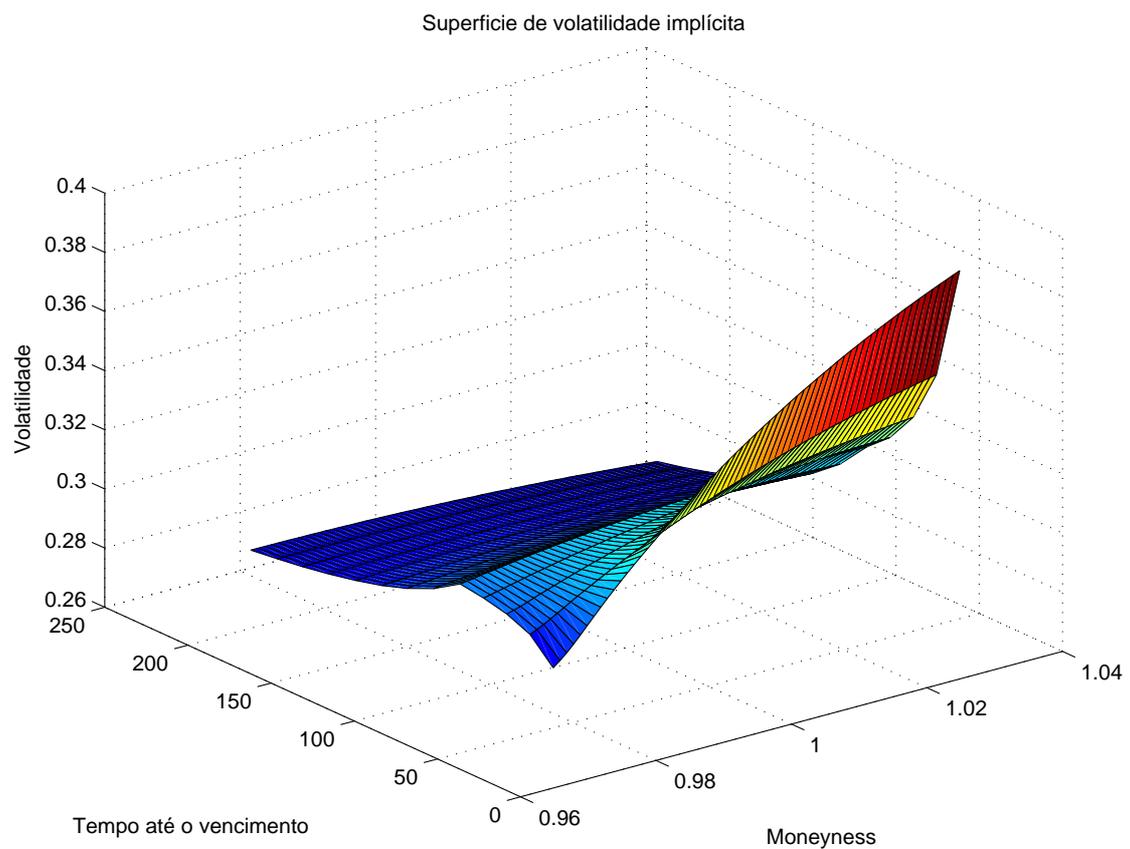


Figura 6.2: Superfície de volatilidade implícita para opções sobre o IBOVESPA, no dia 24/01/2005, com o índice IBOVESPA cotado a 23812.51

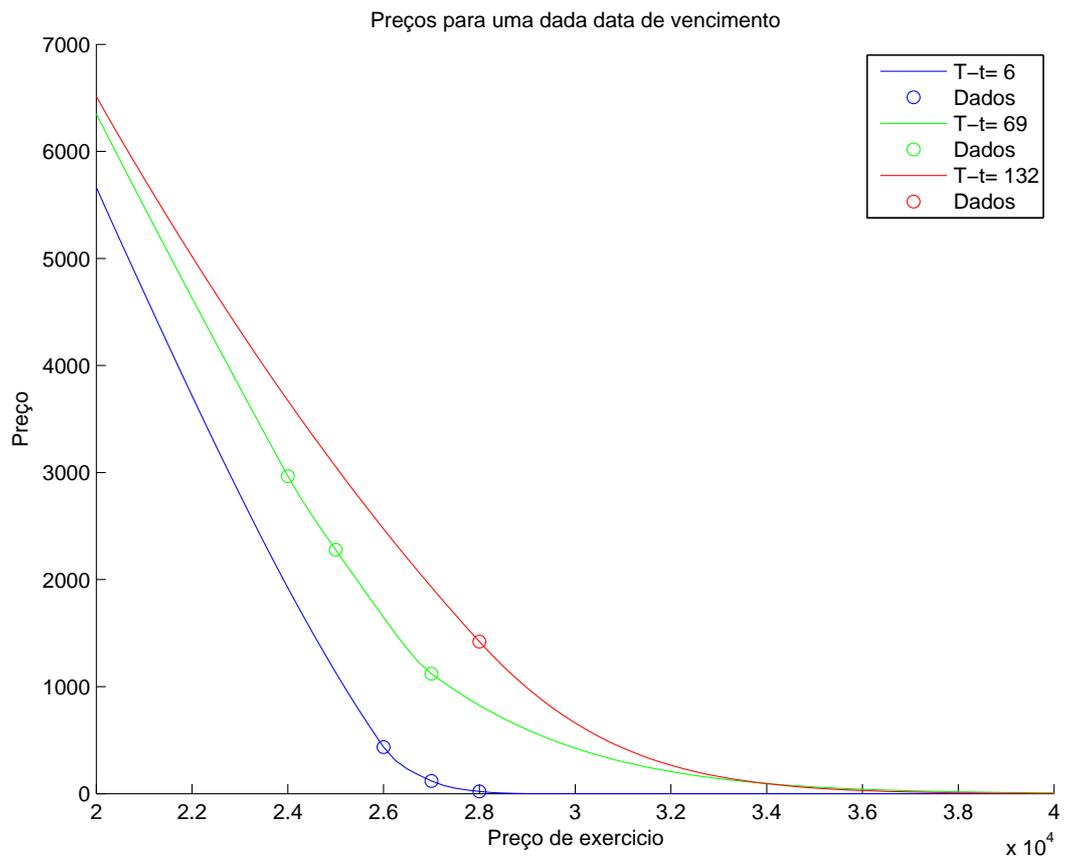


Figura 6.3: Curva de preços para opções no dia 04/02/2005, com o índice IBOVESPA cotado a 24548.18

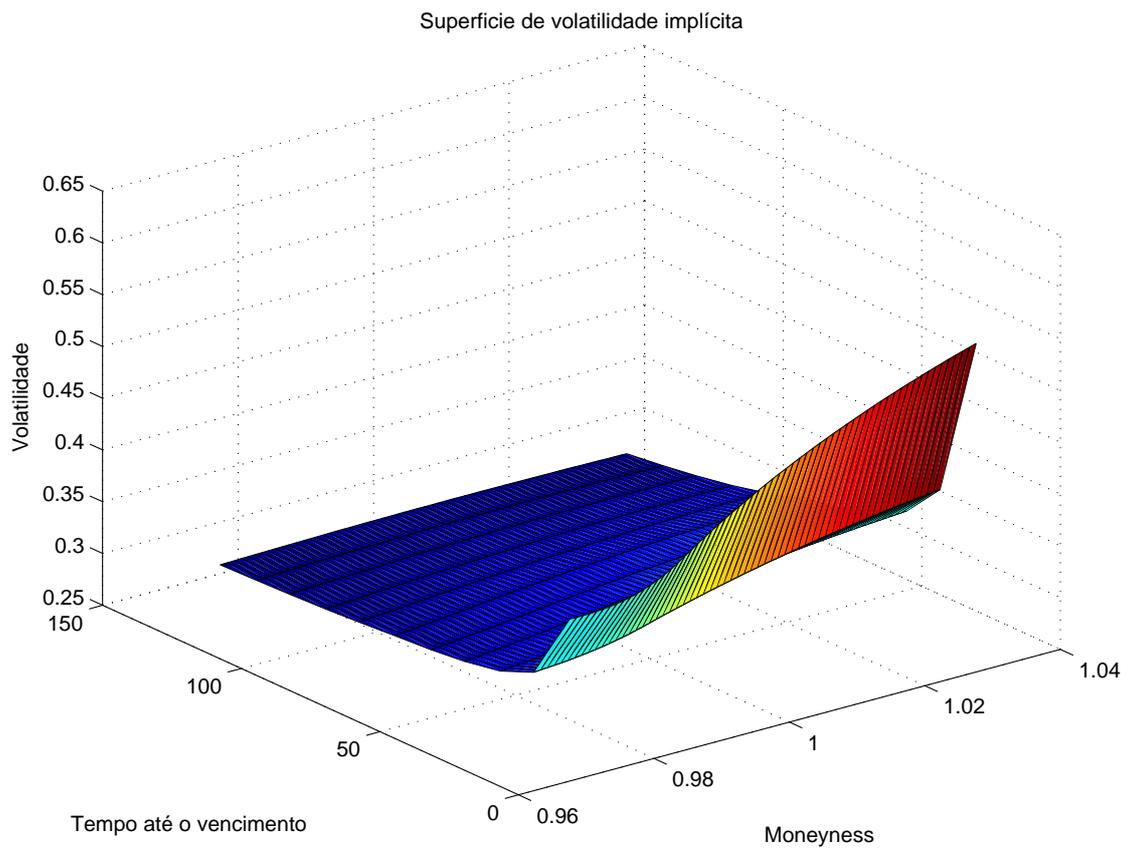


Figura 6.4: Superfície de volatilidade implícita para opções sobre o IBOVESPA, no dia 04/02/2005, com o índice IBOVESPA cotado a 24548.18

7

Resultados Empíricos para o IBOVESPA

Neste capítulo, apresentam-se resultados obtidos através da estimação, não-paramétrica, da superfície de volatilidade implícita gerada por opções de compra do índice IBOVESPA. Estas estimativas foram feitas de acordo com a modelagem apresentada em 3 e 5, e utilizando o procedimento descrito em 5.3.

7.1

Estimação da Superfície de Volatilidade Implícita

Na figura 7.1 apresenta-se o ajuste da superfície de volatilidade implícita do mercado, no dia 21/01/2005, pela superfície gerada através da estimação, não-paramétrica, segundo a fórmula (5-63). Como pode-se ver, para longe da data de vencimento, o ajuste da superfície é melhor do que aquele comparado a datas próximas ao vencimento. Na tabela 7.1 tem-se o erro da estimativa e erro do modelo.

Erro FPS	0.06365
ϵ	0.00139

Tabela 7.1: Erro da estimativa de FPS na figura 7.1

Um outro exemplo, apresentado na figura 7.2, é o ajuste da superfície de volatilidade do mercado, no dia 11/04/2006, pela superfície estimada via FPS. Como no caso anterior, o ajuste é melhor para datas distantes do vencimento. Em ambos os casos, FPS não se mostra uma ferramenta muito eficaz para estimar com precisão $\mathcal{O}(\epsilon)$.

Erro FPS	0.04019
ϵ	0.00139

Tabela 7.2: Erro da estimativa de FPS na figura 7.2

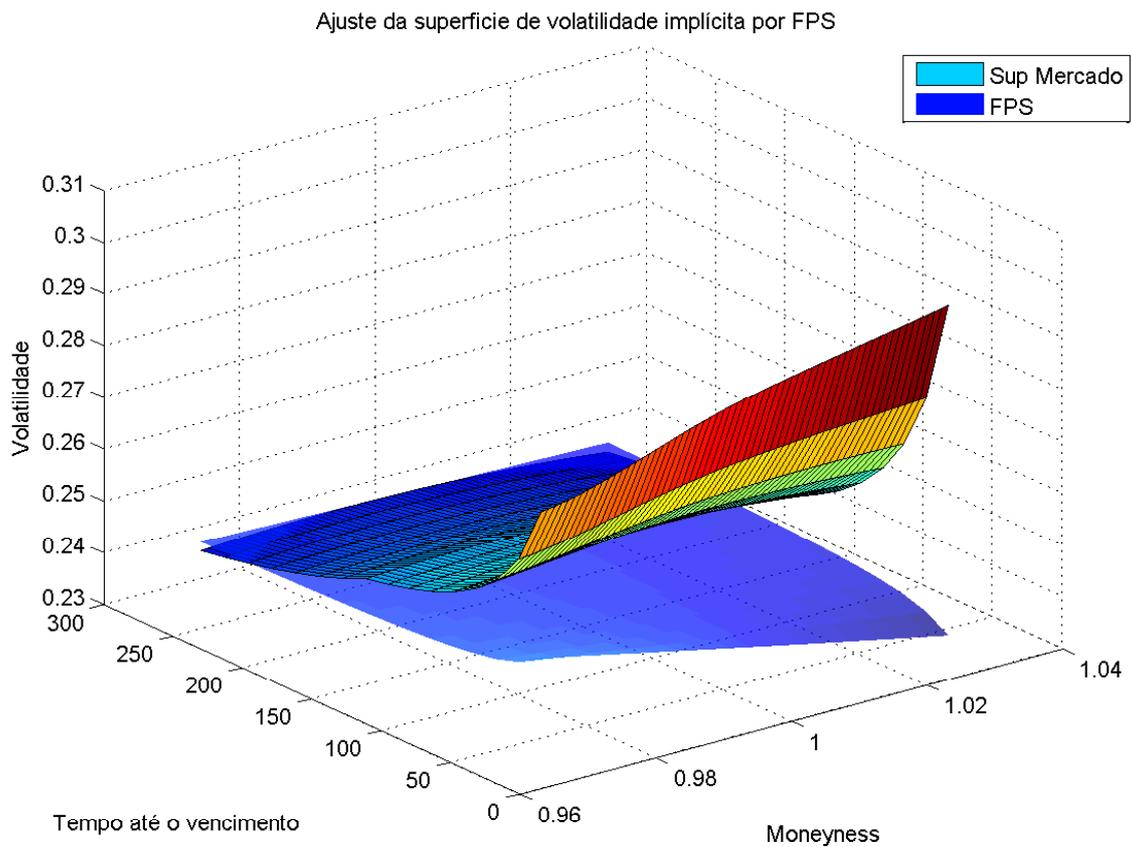


Figura 7.1: Ajuste da superfície de volatilidade implícita do mercado pela superfície estimada segundo FPS, no dia 21/01/2005, com o índice IBOVESPA cotado a 23608.58

7.2 Uma parametrização no tempo de Fouque et al

Uma tentativa heurística para melhorar estas estimativas feita neste trabalho, foi considerar a estimação no tempo dos parâmetros a e b . Os resultados com esta consideração foram melhores, e são apresentados a seguir, para os casos anteriormente vistos e para mais um caso adicional.

Na figura 7.3, apresenta-se a nova estimação para a superfície de volatilidade implícita de mercado, no dia 21/01/2005. Note que diferentemente da apresentada anteriormente, agora o resultado obtido é que o erro da estimativa é da mesma ordem de ϵ , como pode-se ver na tabela 7.3.

Erro FPS	0.00269
ϵ	0.00139

Tabela 7.3: Erro da estimativa de FPS paramétrico no tempo na figura 7.3

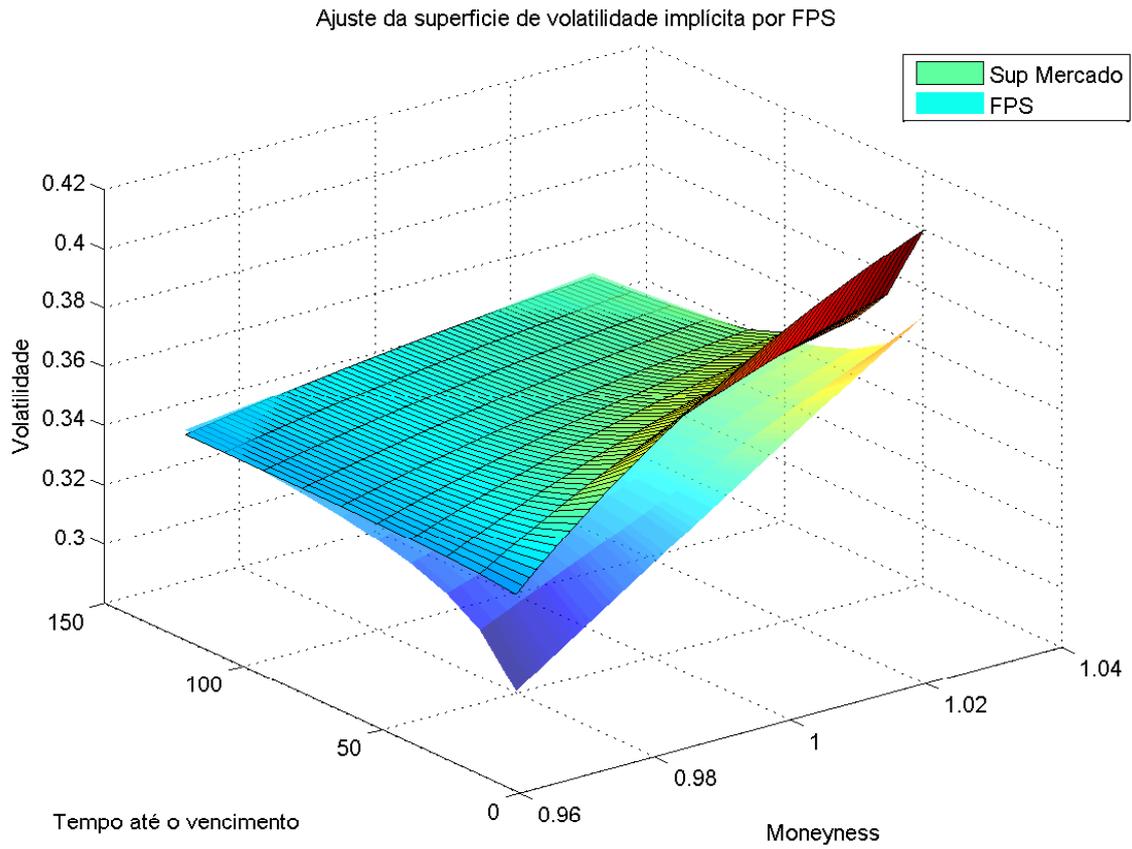


Figura 7.2: Ajuste da superfície de volatilidade implícita do mercado pela superfície estimada segundo FPS, no dia 11/04/2006, com o índice IBOVESPA cotado a 37823.02

Na figura 7.4 apresenta-se a estimação para a superfície de volatilidade implícita do mercado, no dia 11/04/2006, com esta nova consideração. Na tabela 7.4 apresenta-se o erro da nova estimativa. Verifica-se que para datas distante da maturidade, $T - t > 30$ dias, a estimação tem erro de ordem ϵ .

Erro FPS	0.010701
Erro FPS longe do vencimento	0.00659
ϵ	0.00139

Tabela 7.4: Erro da estimativa de FPS paramétrico no tempo na figura 7.4

Na figura 7.5 apresenta-se uma terceira estimação para a superfície de volatilidade implícita do mercado, no dia 04/01/2005, com esta nova consideração. Na tabela 7.5 apresenta-se o erro da nova estimativa. Novamente verifica-se longe do vencimento, o erro da estimativa é da ordem de ϵ .

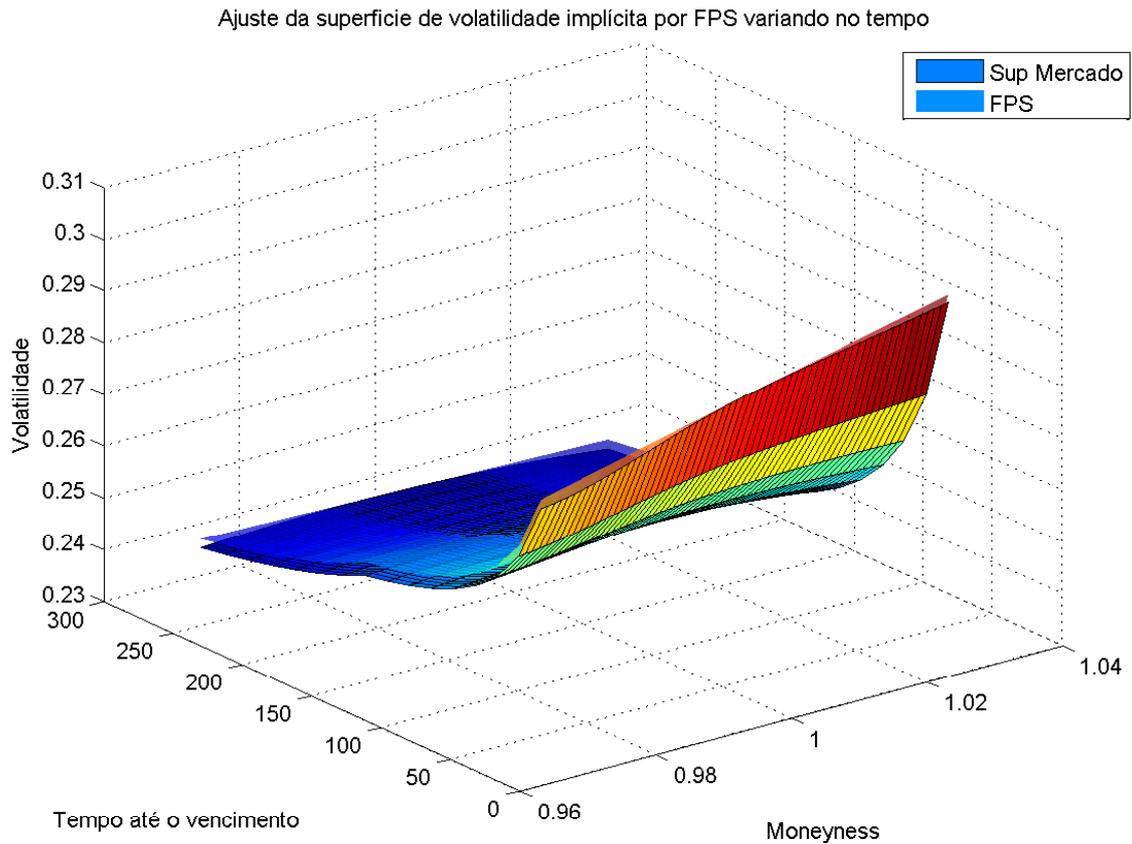


Figura 7.3: Ajuste da superfície de volatilidade implícita do mercado pela superfície estimada segundo FPS paramétrico no tempo, no dia 21/01/2005, com o índice IBOVESPA cotado a 23608.58

Erro FPS	0.01337
Erro FPS longe do vencimento	0.00703
ϵ	0.00144

Tabela 7.5: Erro da estimativa de FPS paramétrico no tempo na figura 7.5

Como pode-se ver, quando a estimação dos parâmetros leva em conta uma possível variação dos parâmetros ao longo do vencimento e são considerados datas distantes do vencimento, maiores que um mês, os resultados obtidos são significativamente melhores. Isto pode ser pensado como uma forma de capturar uma escala de tempo intermediária que a princípio está no modelo. Em trabalho recente, Fouque et al., [12], incorporam ao modelo uma escala rápida para a volatilidade, e tal hipótese leva a resultados melhores. Em seu trabalho, Souza & Zubelli, [28], apresentam uma estimação com um termo a mais, termo este referente a uma escala mais rápida, que deve capturar este efeito.

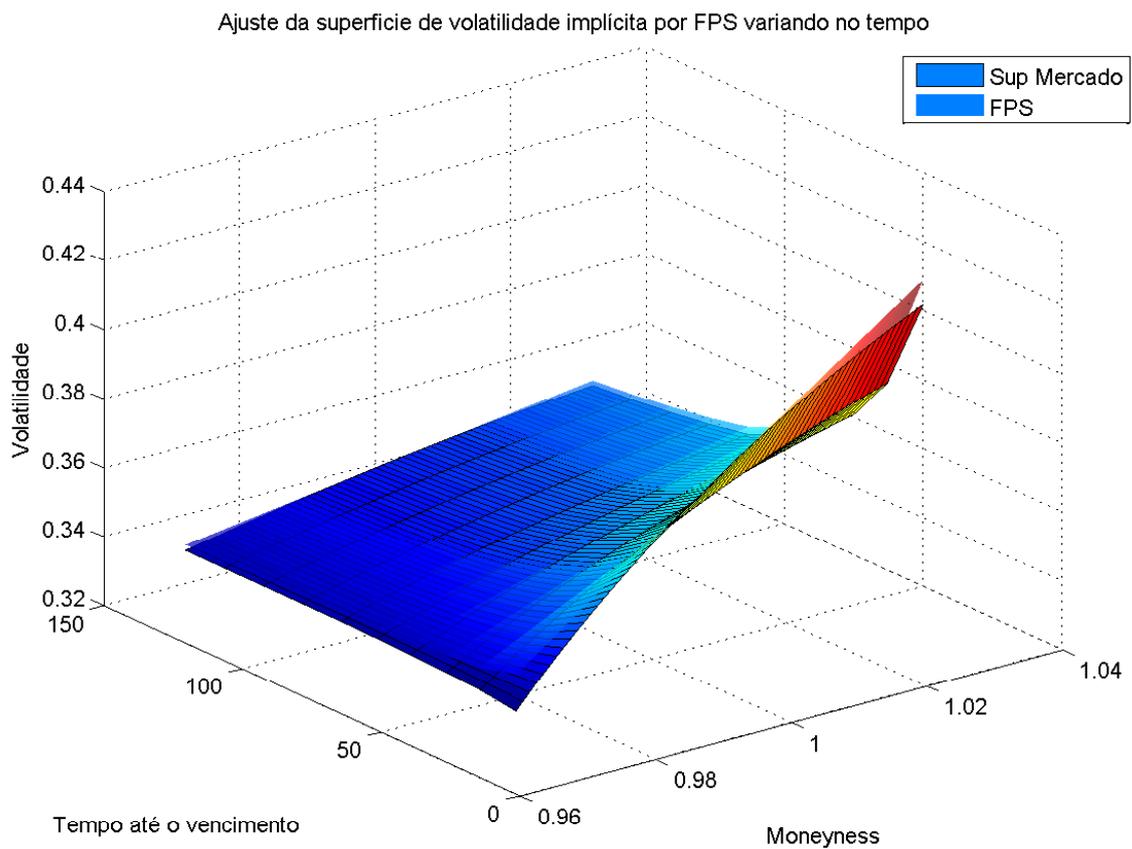


Figura 7.4: Ajuste da superfície de volatilidade implícita do mercado pela superfície estimada segundo FPS paramétrico no tempo, no dia 11/04/2006, com o índice IBOVESPA cotado a 23812.51

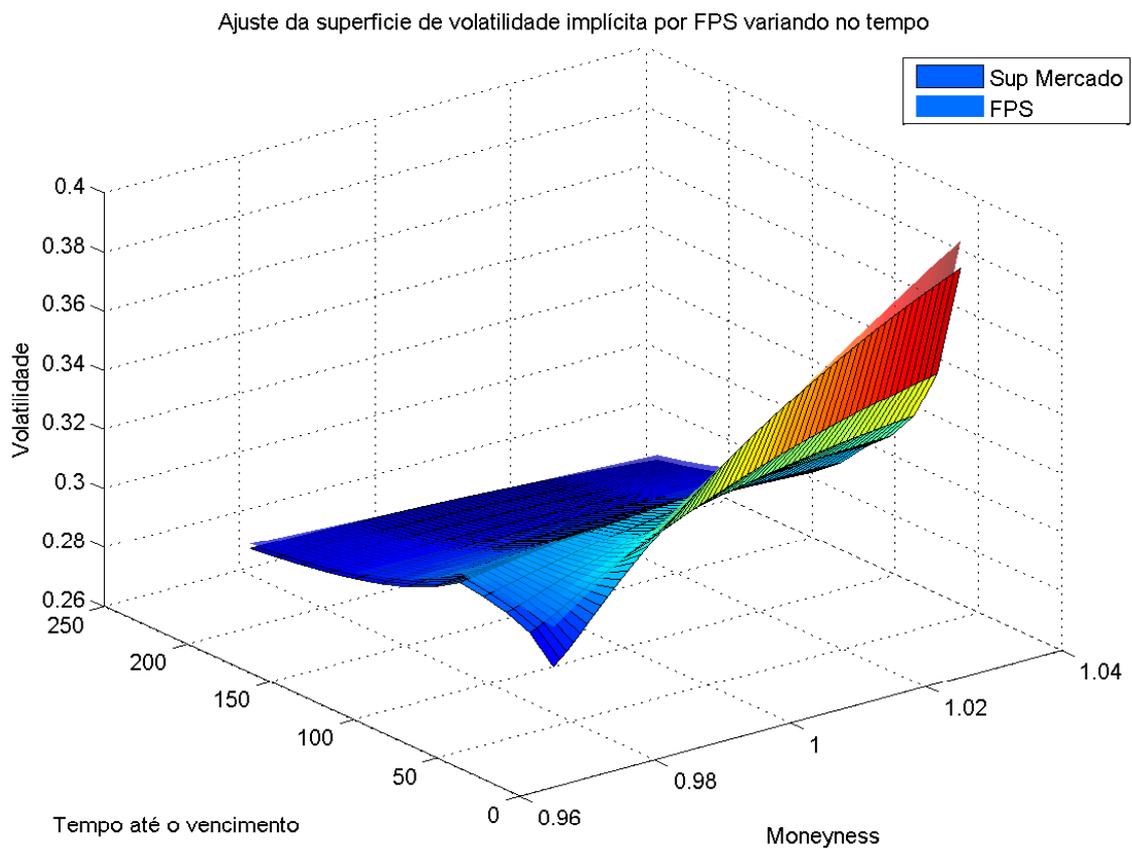


Figura 7.5: Ajuste da superfície de volatilidade implícita do mercado pela superfície estimada segundo FPS paramétrico no tempo, no dia 04/01/2005, com o índice IBOVESPA cotado a 24790.57

8

Conclusões e Aprimoramentos Futuros

8.1

Contribuições do Trabalho

Neste trabalho, estuda-se o comportamento do índice IBOVESPA a partir de um modelo de volatilidade estocástica. Um estudo estatístico, tomando o modelo como base, mostra que o IBOVESPA exhibe uma rápida reversão à média. Esse comportamento segue ao longo de estudos feitos sobre outros mercados, como o S&P500, por Fouque et al. Um fato relevante é a verificação de uma reversão que pode ser considerada extremamente rápida, da ordem de 0.5 dia, quando comparada com estudos similares em outros mercados, que encontram taxas da ordem de 1.5 dias.

A partir dessa constatação, rederiva-se a expansão assintótica do apreçamento de um derivativo europeu, feita por Fouque et al. em [17], levando em consideração hipóteses adicionais feitas em [14] e de acordo com a adimensionalização usada por Souza & Zubelli.

Descreve-se também um procedimento que permite gerar superfícies de volatilidade implícita a partir de um conjunto esparsos de dados. Esta ferramenta é crucial para calibrar o modelo assintótico discutido anteriormente num mercado de opções com pouca liquidez como o brasileiro.

E por fim, calibra-se o modelo de Fouque et al. para o IBOVESPA e se compara as superfícies obtidas a partir da calibração com as superfícies obtidas a partir do procedimento descrito anteriormente. De um modo geral, verificou-se que, longe do vencimento, as aproximações encontradas desempenham de maneira bastante satisfatória. Assim, as superfícies obtidas a partir dos dados e a partir da aproximação assintótica são consistentes. A análise de erro apresentada no capítulo 7 mostra esse grau de consistência e sugere regiões onde o usar a aproximação obtida. Observamos também, que a falta de liquidez impede uma comparação mais decisiva

com preços de mercado para determinar a eficiência do modelo e da aproximação em capturar os preços praticados pelo mercado.

8.2

Aprimoramentos Futuros

Um primeiro aprimoramento natural deste trabalho seria considerar a modelagem proposta por Souza & Zubelli,[28], que já incorpora uma escala rápida no tempo, porém considerando a vol-vol no mesmo regime estudado por Fouque et. al. Souza & Zubelli mostraram que essa análise dessingulariza a aproximação assintótica para a volatilidade implícita e deve permitir uma maior precisão no uso do modelo assintótico para um apuração de um derivativo próximo ao seu vencimento.

Ainda na mesma linha, uma outra possibilidade interessante seria considerar modelos que incorporam mais escalas de tempo para a volatilidade, como feito em trabalho mais recente de Fouque et al. [12].

No mercado brasileiro, as opções sobre futuros do IBOVESPA são muito mais líquidas do que as sobre o índice em si. Do ponto de vista a uma aplicação bastante relevante para o mercado, seria fazer essa análise sobre os futuros e as opções do mercado.

Implementar o algoritmo C^2 proposto por Kahalé, [19]. Por um lado, o algoritmo é computacionalmente mais intenso e uma implementação de interesse prático teria uma componente significativa em obter um bom desempenho operacional do mesmo. Por outro lado, uma implementação desse algoritmo permitiria estudar o comportamento da volatilidade local no ibovespa o que nos dá uma metodologia alternativa para apuração.

Referências Bibliográficas

- [1] C. I. R. Almeida and S. Dana. Stochastic volatility and option pricing in the Brazilian stock market: An empirical investigation. *Journal of Emerging Market Finance*, 4(2), 2005. 1
- [2] C.A.M. Alves, M.O. Souza, and J.P. Zubelli. Evidence of fast mean reversion in Brazilian stock market. Poster section in the Congress: Mathematics & Finance: From Theory to Practice, October 2006. 4.5.2
- [3] C.A.M. Alves, M.O. Souza, and J.P. Zubelli. Fast mean reversion in the Brazilian stock market. Poster section in the Congress: Mathematics & Finance: Research in Options, October 2007. 4.5.2
- [4] M. Avellaneda and P. Laurence. *Quantitative Modeling of Derivative Securities: From Theory to Practice*. Chapman & Hall/CRC, 2000. 2, 2.1
- [5] C. Ball and A. Roma. Stochastic volatility option pricing. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 29(4):589–607, Dec 1994. 1, 1.1, 3, 3.1, 3.1.2
- [6] F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *The Journal of Political Economy*, 81(3):637–654, May 1973. 2
- [7] P. Carr and D. B. Madan. A note on sufficient conditions for no arbitrage. *Financial Research Letters*, 2:125–130, 2005. 6.1, 4
- [8] Freddy Delbaen and Walter Schachermayer. *The mathematics of arbitrage*, volume 1 of *Springer Finance*. Springer, 2000. 2, 2.1, 2.1
- [9] Jean A. Dieudonné. *Calcul Infinitésimal*. Collection Méthodes. Paris: Hermann, 1968. 5.3
- [10] B. Dupire. Pricing with a smile. *Risk Magazine*, 7:18–20, 1994. 1, 3, 6.1

- [11] J.-P. Fouque, G. Papanicolaou, and K.R.Sircar. Mean-reverting stochastic volatility. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 3(1):101–42, Jan 2000a. 1, 3.2, 5.2
- [12] J.-P. Fouque, G. Papanicolaou, K.R.Sircar, and K. Solna. Multiscale stochastic volatility asymptotics. *Multiscale Model. Simul.*, 2(1):22–42, 2003. 1, 7.2, 8.2
- [13] J.-P. Fouque, G. Papanicolaou, K.R.Sircar, and K. Solna. Short time-scale in sp-500 volatility. *Journal of Computational Finance*, 6(4):1–23, 2003. 1
- [14] J.-P. Fouque, G. Papanicolaou, K.R.Sircar, and K. Solna. Singular perturbations in option pricing. *SIAM J. Appl. Math.*, 63(5):1648–1665, 2003. 3.1, 5.2, 5.2, 8.1
- [15] S. Heston. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of Financial Studies*, 6(2):327–43, 1993. 1, 1.1, 3, 3.1, 3.1, 3.1.1, 3.1.1
- [16] J. Hull and A. White. The pricing of options on assets with stochastic volatilities. *J. Finance*, 42(2):281–300, 1987. 1, 1.1, 3
- [17] G. Papanicolaou J.-P. Fouque and K.R. Sircar. *Derivatives in financial markets with stochastic volatility*. Cambridge University Press, 1 edition, 2000. 1, 1.1, 3, 3.1, 3.3, 4, 4.5.2, 5, 5.2, 5.2, 5.2, 8.1
- [18] B. R. James. *Probabilidade: Um Curso em Nível Intermediário*. IMPA, 2 edition, 2002. 4.2
- [19] N. Kahalé. Smile interpolation and calibration of the local volatility model. *Risk Magazine*, March 2005. 1, 6, 6.1, 6.2, 6.4, 8.2
- [20] E. Korn and R. Korn. *Option Pricing and Portfolio Optimization*, volume 31. American Mathematical Society, 2001. 2, 2, 2, 2, 2.1, 2.1
- [21] Robert C Merton. Theory of rational option pricing. *Bell J. Econ, and Management Sci*, 4:141–183, 1973. 2
- [22] B. K. Oksendal. *Stochastic differential equations : an introduction with applications*. Universitext. Berlin ; : New York : Springer, 3rd edition, 1992. 2
- [23] D. B. Madan P. Carr, H. Gérman and M. Yor. Stochastic volatility for lévy processes. *Mathematical Finance*, 13:345–382, 2003. 1

- [24] E. Renault and N. Touzi. Option hedging and implied volatilities in a stochastic volatility model. *Math Finance*, 6(3):279–302. 1, 3
- [25] M. Rubinstein. Nonparametric tests of alternative option pricing models. *J. Finance*, 40(2):455–80, 1985. 1, 1.1, 3
- [26] W. Rudin. *Functional analysis*. McGraw-Hill New York, 1973. 5.2
- [27] S.E. Shreve. *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-time Models*. Springer, 2004. 2, 2.1
- [28] M.O. Souza and J.P. Zubelli. On the asymptotics of fast mean-reversion stochastic volatility models. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 10:817–835, Aug 2007. 1, 3.1, 3.2, 5, 5.1, 7.2, 8.2
- [29] E. Stein and J. Stein. Stock price distributions with stochastic volatility: An analytic approach. *Review of Financial Studies*, 4(4):727–52, 1991. 1, 1.1, 3, 3.1, 3.1, 3.1.2
- [30] Jorge P. Zubelli. Notas de aula de métodos matemáticos em finanças. Technical report, IMPA, 2005. 2