

PRECIFICAÇÃO DE RESERVAS DE PETRÓLEO NÃO-DESENVOLVIDAS EM BLOCOS DA REGIÃO  
DO PRÉ-SAL BRASILEIRO

**Uma abordagem por Opções Reais**

por

**Angelo Miguel de Barros**

Dissertação de Mestrado submetida ao  
Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada  
como requerimento para a obtenção do grau de  
**MESTRE EM MATEMÁTICA**

Métodos Matemáticos em Finanças  
Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA

Rio de Janeiro, 2 de abril de 2009



Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

**Angelo Miguel de Barros**

**Precificação de reservas de petróleo não-desenvolvidas em blocos da  
região do Pré-Sal Brasileiro  
Uma abordagem por Opções Reais**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-graduação em Métodos Matemáticos em Finanças do IMPA. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Dr. Roberto Imbuzeiro F. Oliveira**

Orientador

IMPA - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

**Dr. Jorge Passamani Zubelli**

IMPA - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

**Dr. Max de Oliveira Souza**

UFF - Universidade Federal Fluminense

**Dr. Hélio Lopes**

Suplente

PUC-Rio - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro, 2 de abril de 2009

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização do instituto, do autor e do orientador. Os softwares utilizados na preparação deste trabalho não violam direitos. São eles: editor LATEX LEd, disponível em <http://www.latexeditor.org>, compilador MiKTeX, disponível em <http://miktex.org>, e editor de imagens xfig. Os resultados foram gerados utilizando-se os softwares MatLab 2007 e R 2.6.2.

**Angelo Miguel de Barros**

Graduou-se em Matemática na Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ (Rio de Janeiro, RJ, Brasil).

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>10</b>
1.1	Teoria das Opções Reais . . . . .	10
1.2	Aplicação da Teoria das Opções Reais no setor de Exploração e Produção de Petróleo . . . . .	11
1.3	Estrutura da dissertação . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Reservas de petróleo do Pré-Sal brasileiro</b>	<b>15</b>
2.1	A indústria do Petróleo . . . . .	15
2.2	A camada Pré-Sal . . . . .	17
2.3	A região do Pré-Sal brasileiro . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Modelagem de Opções Financeiras</b>	<b>24</b>
3.1	Premissas da Teoria de Opções . . . . .	24
3.2	O modelo de Black & Scholes (1973) . . . . .	28
3.2.1	Opções com dividendos - A fórmula de Black & Scholes & Merton . . . . .	36
3.3	Opções Americanas . . . . .	37
3.3.1	O Problema do Obstáculo . . . . .	39
3.3.2	Problema de Complementaridade Linear . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Modelagem de reservas não-desenvolvidas de petróleo</b>	<b>42</b>
4.1	O modelo de Paddock & Siegel & Smith (1988) . . . . .	42
4.1.1	Qualidade econômica da reserva . . . . .	46
4.1.2	Volume da reserva . . . . .	50
4.1.3	Custos de desenvolvimento da reserva . . . . .	55
4.2	Reversão à média em preços de petróleo . . . . .	61
4.3	Estimação dos parâmetros do processo de Ornstein-Uhlenbeck . . . . .	64
<b>5</b>	<b>Métodos numéricos</b>	<b>71</b>
5.1	Método de Diferenças Finitas - Crank-Nicholson . . . . .	71
5.2	Método SOR . . . . .	73
<b>6</b>	<b>Resultados</b>	<b>76</b>
<b>7</b>	<b>Conclusão</b>	<b>94</b>
<b>8</b>	<b>Referências</b>	<b>97</b>
<b>9</b>	<b>Anexo - Código fonte do programa implementado no MATLAB</b>	<b>100</b>

À minha noiva Juliana e aos meus pais Maria Helena  
e Rui.

## Agradecimentos

Agradeço a Deus acima de tudo, por ter me dado a oportunidade de realizar um trabalho tão importante para mim e ajudado a contribuir com o avanço científico de meu país.

Agradeço a uma pessoa muito especial na minha vida, que eu amo muito, minha noiva Juliana, que durante esse período me apoiou e incentivou de forma fundamental, além de demonstrar compreensão e paciência imensuráveis.

Agradeço muito aos meus pais, Maria Helena e Rui, que permitiram que eu conseguisse alcançar este objetivo, sempre me incentivando, dando suporte, torcendo e acreditando no meu sucesso.

Agradeço ao meu irmão Renato, minha cunhada Mariana, meus sogros e cunhadinhas, minhas tias e demais familiares pelo apoio e compreensão pelos vários momentos nestes últimos dois anos em que pouco pude estar presente em momentos importantes nas suas vidas.

Agradeço também aos meus avós e demais parentes que já se foram.

Aos meus grandes amigos Fabiano, Djalma, Caio, Elys, Mariana, César e demais, agradeço pelo carinho e amizade demonstrados, tantos nos bons quanto nos momentos difíceis da minha vida.

Gostaria de agradecer também ao Prof. Dr. Roberto Imbuzeiro F. Oliveira, meu orientador, pelo apoio em momentos importantes, principalmente na definição do tema, pela confiança e, sobretudo, pela orientação, que viabilizou a confecção deste trabalho.

Agradeço ainda ao Prof. Dr. Jorge P. Zubelli, pela ajuda na definição do tema e no seu desenvolvimento.

Agradeço ao Prof. Steven Lillywhite pelas aulas de Opções Reais que agregaram grande valor a este trabalho.

Gostaria de agradecer ao Osmond Coelho Junior e ao Dr. Marco Antônio Guimarães Dias, ambos da Petrobrás, pelas informações prestadas sobre o Pré-Sal e pelas dúvidas sanadas sobre Opções Reais em E&P de petróleo. Aos amigos do IMPA, Elcio, Luíza e Teresa, agradeço a amizade construída nestes últimos anos. Pelos esforços compartilhados nas várias tardes de estudo no IMPA, pelas dúvidas sanadas e pela união demonstrada ao longo deste percurso. Vocês são grandes exemplos de dedicação e perseverança.

Gostaria de agradecer também aos colegas profissionais Maria Cristina, Bruno, Luiz Cláudio, Valmir, Paulo Fontes e Ana Lúcia, pelo apoio e compreensão demonstrados neste período, sem os quais esta jornada não seria possível.

Aos monitores Tertuliano e Marcelo, agradeço a importante ajuda e apoio.

Ao grande monitor Leonardo Muller, agradeço pela sua ajuda durante boa parte do curso, principalmente na reta final.

Agradeço a todo o corpo docente do IMPA e aos funcionários de uma maneira geral.

Por fim, agradeço a todos aqueles que de uma simples maneira se fizeram presentes em minha vida nesta caminhada e participaram de todo este processo.

## **Resumo**

Esta dissertação faz uso das técnicas modernas de análise de investimentos chamadas de Opções Reais para valoração de reservas não-desenvolvidas de petróleo do Pré-Sal brasileiro. Tais técnicas conseguem captar as flexibilidades e incertezas do mercado, superando os métodos tradicionais de Fluxo de Caixa Descontado (FCD).

A reservas estudadas neste trabalho são extremamente complexas e têm chamado a atenção de muitos investidores (nacionais e estrangeiros) com relação ao seu processo de desenvolvimento.

O enorme reservatório de petróleo existente no Pré-Sal tem sido motivo de grande expectativa do governo brasileiro, em virtude da possibilidade da elevação do país no ranking das maiores reservas de óleo e gás do mundo. Entretanto, o alto custo de desenvolvimento requerido faz com que muitos questionem a viabilidade de investir no Pré-Sal, principalmente em tempos de crise no mercado financeiro mundial.

Nesta dissertação, utilizamos as Opções Reais para obter o valor da reserva não-desenvolvida, baseado no modelo de Paddock & Siegel & Smith, adaptado a um processo de reversão à média. O objetivo é analisar a viabilidade de investimento no Pré-Sal brasileiro através do preço de concessão das reservas, descrito por uma equação diferencial parcial a ser deduzida ao longo da dissertação. Esta equação será resolvida por métodos numéricos implementados por algoritmos computacionais descritos no trabalho.

A análise será feita por cada tipo de reserva, visto que no Pré-Sal brasileiro existem reservas com características diferentes (tais como tamanho da camada de sal, profundidade do poço, entre outros).

Ao final, apresentaremos os resultados de conclusões obtidas.

Lembramos que os resultados foram gerados considerando as hipóteses e modelo escolhidos, e que tais resultados podem variar se utilizarmos outros modelos.

## **Palavras-Chave**

Opções Reais, Reservas não-desenvolvidas, Pré-Sal.



## **Abstract**

This dissertation makes use of the modern techniques of investment analysis called Real Options for valuation of brazilian Pre-Salt undeveloped petroleum reserves. Such techniques can capture the flexibilities and uncertainties of the market, overcoming the traditional methods of Discounted Cash Flow (DCF).

The reserves studied in this work are extremely complex and have called the attention of many investors (national and foreign ones) about their development process.

The enormous petroleum reservoir existent in the Pre-Salt has been the reason of great expectation of the brazilian government, on account of the possibility of elevation of the country in the ranking of the biggest oil and gas reserves in the world. However, the high development cost required makes many question the viability of investing on Pre-Salt, specially in times of crisis in the world financial market.

In this dissertation, we use Real Options in order to obtain the value of an undeveloped reserve, based on Paddock & Siegel & Smith model, adapted to a mean-reversion process. The objective is to analyse the the viability of investing on brazilian Pre-Salt through the price of concession of the reserves, described by a partial differential equation to be deduced in the dissertation. This equation will be solved by numerical methods implemented by computational algorithms described in this work.

The analysis will be done by the type of the reserve, because in brazilian Pre-Salt there exist reserves with different characteristics (such that size of the salt zone, depth of the well, so on).

By the end, we present the results and conclusions obtained.

We recall that the results were obtained considering the hypothesis and model chosen, and that such results may vary if we make use of other models.

## **Keywords**

Real Options, Undeveloped reserves, Pre-Salt.

# 1 Introdução

## 1.1 Teoria das Opções Reais

O mercado de derivativos financeiros cresceu muito a partir dos anos 70, desde a publicação do artigo de Black & Scholes (1973), onde eles descrevem uma fórmula fechada para o cálculo do valor de uma opção financeira. A partir de então, cresceram as pesquisas acadêmicas e industriais no campo das opções financeiras, bem como ocorreu uma ávida procura por tais instrumentos.

Paralelamente a isso, no campo das análises de projetos, as instituições financeiras e grandes empresas faziam uso de métodos tradicionais para avaliação de investimentos: o Fluxo de Caixa Descontado - FCD (*Discounted Cash Flow* - DCF, em inglês) -, utilizando como ferramenta principal o Valor Presente Líquido - VPL (*Net Present Value* - NPV, em inglês).

A eficiência deste método vinha sendo fortemente questionada sob a alegação de que sua aplicação poderia induzir a decisões de investimento equivocadas. O FCD, por não considerar as inúmeras flexibilidades e incertezas do mercado, acabava subestimando o valor do projeto analisado.

A fim de lidar com estas incertezas e flexibilidades, surge o conceito de Opções Reais (*Real Options*, em inglês). O termo *opções reais* foi cunhado pelo professor Stewart C. Myers do MIT, em 1977, quatro anos após a publicação do artigo de Black & Scholes (1973). Myers caracterizou as oportunidades de investimento das firmas em ativos reais (por exemplo, projetos de investimento) como sendo análogas a opções de compra sobre esses ativos. Assim, a teoria das Opções Reais reconhece e valoriza o fato de que as firmas têm o direito, mas não a obrigação, de investir  $D$  em um projeto que vale  $V$  (ver [Dias 2005]). O brasileiro Tourinho (1979) foi o primeiro a aplicar as idéias da teoria de opções para valorar reservas de recursos naturais.

O ferramental da Teoria de Opções Reais permite uma análise mais profunda de investimentos, procurando associar, ao valor total de uma operação, suas diversas opções embutidas de tomada de decisão, as quais agregam grande valor a um investimento por possibilitar a redução de riscos frente às condições de incerteza do mercado.

Sua idéia básica consiste em considerar uma tomada de decisão a respeito de um projeto como uma opção financeira. O cálculo do seu valor corresponderia aos custos com a decisão tomada. Por exemplo, podemos supor que uma empresa, especializada na comercialização de um determinado produto, pretenda expandir seus negócios investindo também em um outro produto. O empresário deve ser cauteloso em relação à sua decisão, devendo atentar para os diversos fatores que podem interferir no sucesso de seu projeto de expansão, como, por exemplo, se o produto a ser investido justificará a relação custo-benefício e, em caso positivo, até quando. Então surgem às decisões a serem tomadas, no sentido de avaliar a melhor época de

se investir (se investe agora ou se espera), de parar de investir no produto - caso o retorno obtido não esteja mais justificando o investimento - ou de suspender temporariamente o investimento naquele produto, entre outros.

Por permitir a incorporação dessas flexibilidades à avaliação tradicional de projetos, o método de opções reais se mostrava superior ao FCD, resultando em um grande avanço na sua literatura, além da evolução de suas metodologias. Diversos foram os trabalhos desenvolvidos nas últimas décadas, destacando-se a diversidade de projetos analisados, bem como de modelos adotados.

Um dos maiores alvos de trabalhos acadêmicos, nesse sentido, é o setor de exploração e produção (E&P) de petróleo. Há uma vasta literatura sobre avaliação de projetos relacionados a E&P desta *commodity*, desde trabalhos pioneiros, como o de Paddock & Siegel & Smith (1988), onde é calculado o valor de um campo de petróleo situado em águas profundas (*off-shore*) e determinado seu *timing* de investimento; até trabalhos mais recentes, como [Dias 2005], onde são estudadas as combinações entre teoria de opções reais e outras, tais como teoria dos jogos, configurando as chamadas opções reais híbridas.

Neste trabalho, estamos interessados na valoração de reservas não-desenvolvidas de petróleo do Pré-Sal brasileiro (entraremos em maiores detalhes nas subseções seguintes), utilizando para tanto as premissas de Paddock & Siegel & Smith (1988), aliado a um modelo de reversão à média. O valor da reserva não-desenvolvida obtida no modelo de Paddock & Siegel & Smith é o preço de concessão da reserva, isto é, o valor pago por uma empresa de petróleo para desenvolver a reserva (esses preços são bastante estudados pelas empresas visando obter uma estimativa precisa para apresentação de lances em leilões de campos de petróleo). Veremos mais adiante o que significa desenvolver um reserva.

## **1.2 Aplicação da Teoria das Opções Reais no setor de Exploração e Produção de Petróleo**

A teoria de opções reais em petróleo começa com Tourinho (1979) e o modelo clássico de Paddock & Siegel & Smith (1988). Existem várias dezenas de artigos sobre este assunto (algumas dezenas só na SPE, *Society of Petroleum Engineers*).

A maioria dos trabalhos publicados sobre opções reais em petróleo se referem ao setor de exploração e produção. Há alguns trabalhos em outras áreas, como por exemplo em refino do petróleo, porém não são muito comuns.

O processo de investir na exploração e produção de petróleo é dividido em três etapas: investimento em exploração, em delimitação e desenvolvimento. Uma vez desenvolvida, há ainda outras tomadas de decisão a serem consideradas, tais como a opção de abandonar a produção, suspender temporariamente, expandir, entre outras.

A figura 1 ilustra as etapas supramencionadas, com as correspondentes opções.



Figura 1: Etapas de investimento em Exploração Produção de Petróleo: Fonte - Dias (2005)

Suponha uma firma que detém os direitos de um bloco exploratório obtido por concessão através de leilão ou adquirido no mercado. Durante a fase exploratória, a firma concessionária decide se exerce a opção de perfurar um poço exploratório pioneiro, cujo investimento é totalmente irreversível. Caso a opção seja exercida e no caso de sucesso (descoberta de óleo e/ou gás), a firma obtém um *campo não-delimitado*. Após, a firma tem a opção de investir em delimitação, que consiste na perfuração de poços de delimitação e estudos sísmicos visando obter mais informações sobre o volume das reservas, reduzindo as incertezas envolvidas e obtendo as *reservas não-desenvolvidas*. Estes dois primeiros estágios se referem a etapa inicial de perfurações e estudos sísmicos, com o objetivo de obter informações sobre as quantidades de reservas de hidrocarbonetos e identificar a quantidade de óleo. Após estas etapas, o concessionário poderá mapear o reservatório de forma a estabelecer os poços e o uso de tecnologia, de modo a extrair petróleo e gás à maior quantidade e ao menor custo.

Uma vez obtidas as reservas não-desenvolvidas, o próximo estágio se refere ao desenvolvimento da reserva, ou seja, uma vez identificado o potencial de hidrocarbonetos da reserva e sua tecnologia para desenvolvê-lo, o concessionário tem a opção de realizar as perfurações e instalar as plataformas de produção para iniciar a extração de petróleo e gás. Durante esta fase, o uso de engenharia de petróleo através da simulação de reservatórios é extensivamente utilizada para determinar justamente o plano de desenvolvimento do reservatório.

Este trabalho tem por objetivo precificar reservas não-desenvolvidas, mais especificamente as do Pré-Sal brasileiro, que possuem um custo elevado de desenvolvimento (veremos na seção

seguinte o motivo desta afirmativa). Para tanto, o foco deste trabalho estará na terceira etapa vista, a de desenvolvimento de uma reserva já explorada e delimitada, considerando o valor de desenvolvimento da reserva concedida como sendo o valor a ser despendido para desenvolvê-la.<sup>1</sup>

Na seção 4, veremos como funciona o modelo de Paddock & Siegel & Smith (1988) para precificação de reservas não-desenvolvidas de petróleo, onde é utilizado o Movimento Geométrico Browniano para modelagem dos preços do barril de petróleo. Veremos também como modelá-los por meio de processos com reversão à média.

### **1.3 Estrutura da dissertação**

A presente dissertação está dividida em sete seções mais as Referências e o Anexo. Na introdução, que corresponde à primeira seção, vimos uma revisão do histórico da Teoria das Opções Reais (subseção 1.1) desde seus trabalhos pioneiros. É destacado a importância de se agregar os custos com flexibilidade ao custo total do projeto a fim de não se obter subestimações.

Ainda na introdução, na subseção 1.2, é explicado como a Teoria das Opções Reais é aplicada ao setor de exploração e produção de petróleo. Nesta subseção, são descritas todas as etapas do processo de E&P de petróleo, especificando os tipos de opções e tomadas de decisão previstas em cada etapa.

Na seção 2, são descritas as reservas do Pré-Sal, explicando o que é a camada Pré-Sal, qual sua origem, onde está localizada e quais as principais características do Pré-Sal no Brasil, precedido de um breve histórico sobre a indústria petrolífera.

Na seção 3, inicia-se a modelagem de opções financeiras, ferramenta necessária para posterior entendimento da modelagem de opções reais. Começamos pelas definições básicas da teoria de opções, passando ao modelo de Black & Scholes (1973) e à sua extensão (fórmula de Black & Scholes & Merton). Posteriormente, vemos a definição e características de opções americanas, passando ao problema de exercício ótimo.

Na seção 4, é descrito o modelo de Paddock & Siegel & Smith (1988) para modelar a reserva desenvolvida e, posteriormente, obter a equação diferencial parcial que descreve o valor da reserva não-desenvolvida. A modelagem do valor da reserva desenvolvida é feita baseada em um Movimento Geométrico Browniano.

Em seguida, são vistos os conceitos e modelagens da qualidade econômica da reserva, volume da reserva (sinônimo de capacidade petrolífera ou volume de petróleo) e custos de desenvolvimento da reserva, todos eles considerando dados empíricos do Pré-Sal no Brasil. Analisaremos dois tipos de reserva em especial: campos com poços profundos e com camada

---

<sup>1</sup>O modelo de Paddock & Siegel & Smith (1988) considera apenas esta etapa. Na verdade, esta é a etapa de maior custo e interesse das firmas participantes de licitações, como por exemplo as Rodadas de Licitação da ANP.

de sal extensa (reservas situadas na bacia de Santos); e campos com poços rasos e com camada de sal menos extensa (reservas situadas nas bacias de Campos e Espírito Santo).

Em virtude destas duas últimas bacias possuírem características similares, para efeito de estudo não haverá distinção entre bacias de Campos e a bacia do Espírito Santo, portanto, quando nos referirmos a um bloco situado na bacia de Campos e Espírito Santo, este bloco pode estar localizado tanto na bacia de Campos quanto na bacia do Espírito Santo, não havendo distinção e considerando que os resultados serão os mesmos para blocos situados em cada uma delas.

Na subseção 4.2, é descrito o processo de reversão à média e sua aplicação na dinâmica de preços de petróleo. Nesta subseção, é feita a adequação do modelo de Paddock & Siegel & Smith (1988), alterando a modelagem da reserva desenvolvida de Movimento Geométrico Browniano para o processo de Ornstein-Uhlenbeck, utilizando *Contingent Claims Analysis* para adequação da equação diferencial parcial que descreve o valor da reserva não-desenvolvida.

Na subseção 4.3, é explicado como estimar os parâmetros da equação diferencial parcial que descreve o valor da reserva não-desenvolvida, segundo a dinâmica do processo de Ornstein-Uhlenbeck.

Uma vez obtidos a equação diferencial, para o cálculo do preço da reserva, e os parâmetros a serem utilizados, faz-se necessário resolver a equação. Como a equação diferencial em questão não possui solução analítica, é necessário fazer uso de métodos numéricos, que são descritos na seção 5. Na subseção 5.1, é descrito o método de diferenças finitas de Crank-Nicholson - método amplamente eficaz na solução de equações diferenciais.

Na subseção 5.2, é descrito o método SOR - *Successive Over Relaxation*-, que se trata de um método iterativo para solução de sistemas lineares. O objetivo é utilizar o método SOR para resolver os sistemas lineares presentes no método de Crank-Nicholson.

Na seção 6, são apresentados os resultados obtidos com a solução da equação diferencial que descreve o valor da reserva não-desenvolvida, obtendo, assim, o preço de concessão da reserva e fazendo uma análise destes valores para as reservas situadas no Pré-Sal da bacia de Santos e das bacias de Campos e Espírito Santo.

Nas seções seguintes, são apresentadas as conclusões, as referências e o código fonte implementado em MATLAB para a solução da EDP em questão, utilizando os métodos numéricos descritos.

## 2 Reservas de petróleo do Pré-Sal brasileiro

### 2.1 A indústria do Petróleo

O petróleo é um combustível fóssil, cuja origem mais provável é de restos de vida aquática animal acumulados no fundo de oceanos primitivos e cobertos por sedimentos. O tempo e a pressão do sedimento sobre o material depositado no fundo do mar transformaram-no em massas homogêneas viscosas de coloração negra, denominadas jazidas de petróleo.

O petróleo é constituído por uma complexa mistura de diferentes substâncias químicas, cerca de 300 compostos, dentre eles, o nitrogênio (0% a 0,5%), enxofre (0% a 6%), oxigênio (0% a 3,5%), alguns metais (principalmente níquel e vanádio) e os hidrocarbonetos (50% a 98%), sendo os hidrocarbonetos, o nitrogênio, o enxofre e o oxigênio seus principais compostos (ver [da Silva]).

Os hidrocarbonetos, por serem os compostos mais abundantes, são indicados como indicadores de poluição. São compostos formados por carbono e hidrogênio (82% a 87% em carbono e 11% a 15% em hidrogênio). Maiores detalhes sobre a composição do petróleo pode ser visto em [da Silva].

Além de gerar a gasolina, que serve de combustível para grande parte dos automóveis que circulam no mundo, vários produtos são derivados do petróleo como, por exemplo, a parafina, gás natural, GLP, produtos asfálticos, nafta petroquímica, querosene, solventes, óleos combustíveis, óleos lubrificantes, óleo diesel e combustível de aviação. Devido à sua grande utilização, o petróleo se transformou, ao longo dos anos, em uma das principais *commodities* (matérias-primas) do mercado, tornando-se um dos termômetros da política internacional. O primeiro poço de petróleo foi descoberto nos Estados Unidos - Pensilvânia - no ano de 1859. Ele foi encontrado em uma região de pequena profundidade (21m).

Os países que possuem maior número de poços de petróleo estão localizados no Oriente Médio, e, por sua vez, são os maiores exportadores mundiais. O maior consumidor mundial são os Estados Unidos.

Em 1960, os principais países exportadores criaram a Organização dos Países Exportadores de Petróleo (OPEP), cujo papel principal, de acordo com o estatuto da mesma, é coordenar as políticas petrolíferas desses países, de forma a evitar flutuações desnecessárias no preço do barril, garantir o retorno financeiro aos países-membros e o fornecimento de petróleo às nações consumidoras. Na prática, a OPEP decide o volume total de petróleo a ser produzido pelo conjunto de países-membros. Este total é então dividido em cotas de produção de cada membro. Devido a grande quantidade produzida por estes países, estes podem influenciar o preço mundial do barril. Com isso, basta que a organização decida aumentar/baixar a produção para fazer diminuir/crescer o preço do barril. Assim, essa associação, unindo os principais exportadores e evitando a concorrência entre eles, conseguiu ter um importante peso na fixação

dos preços do produto.

A importância econômica do petróleo se tornou tão acentuada que terríveis guerras foram desencadeadas ao longo dos anos, visando ao monopólio deste recurso natural, tais como Yom Kippur (1973), Irã x Iraque (1980-1988), Golfo (1991) e a atual intervenção dos Estados Unidos no Iraque.

No Brasil, a primeira sondagem foi realizada em São Paulo, entre 1892-1896, por Eugênio Ferreira de Camargo, quando ele fez a primeira perfuração na profundidade de 488 metros; contudo, o poço jorrou somente água sulfurosa. Foi somente no ano de 1939 que foi descoberto o óleo de Lobato na Bahia.

Em 1954, foi criada a Petrobrás, com o objetivo de monopolizar a exploração do petróleo no Brasil. A partir de então, muitos poços foram perfurados. Atualmente, ela está entre as maiores empresas petrolíferas do mundo.

Na década de 1990, a Petrobrás desenvolveu tecnologias para ampliar sua capacidade de exploração e produção de óleo, superando, em 1997, a marca de um milhão de barris de óleo por dia, ganhando, inclusive, o prêmio *Offshore Technology Center (OTC Award)*, um Oscar do setor petrolífero).

Em 6 de agosto de 1997, a Lei 9.478 (conhecida como Lei do Petróleo) regulamentou uma emenda constitucional que flexibilizou o monopólio estatal da Petrobrás, permitindo que outras empresas (nacionais e estrangeiras) explorassem e produzissem óleo em território brasileiro. A responsabilidade pelo controle do setor petrolífero sairia das mãos da Petrobrás para as da recém-criada Agência Nacional do Petróleo (ANP).

Conforme disposto no artigo 8º da Lei 9.478 - com redação dada pela Lei 11.097 de 2005 -, a ANP foi criada com a finalidade de promover a regulação, a contratação e a fiscalização das atividades econômicas integrantes da indústria do petróleo, do gás natural e dos biocombustíveis. Uma das atividades atribuídas à ANP pela lei em questão é promover as licitações para concessão de campos de petróleo, para exploração e produção, conforme disposto em seu Inciso IV, que segue transcrito abaixo:

elaborar os editais e promover as licitações para a concessão de exploração, desenvolvimento e produção, celebrando os contratos delas decorrentes e fiscalizando a sua execução...([ANP])

Após a chamada Rodada Zero, em 1998, na qual a Petrobrás devolveu à União as áreas nas quais não tinha interesse, outras dez rodadas de licitações já foram realizadas. Muitas das principais empresas petrolíferas do mundo participaram, pelo menos, de uma delas (ver [Nascimento & Maciel & Moreira & Neto]).

Uma vez concedido a uma empresa petrolífera, o bloco sofre as etapas de E&P vistas na seção 1.2. Para o caso de reservas já descobertas, o bloco sofre apenas a etapa de desenvolvimento.



Nos contratos de concessão dos blocos licitados pela ANP, é estipulado o prazo de concessão das reservas para a etapa de desenvolvimento que é de 27 anos, contados a partir do momento da obtenção da Declaração de Comercialidade junto à ANP. Esta declaração é obtida mediante aprovação do plano de desenvolvimento do bloco.

Com as licitações promovidas pela ANP, cresceram os estudos a fim de se obter uma estimativa razoável para o preço de concessão de uma reserva a ser licitada, tentando evitar subestimações, bem como superestimações.

Para se calcular o preço de concessão de uma determinada reserva, devem ser consideradas as características da jazida, como, por exemplo, se esta é localizada em bacias terrestres (*onshore*), águas profundas (*offshore*) ou ainda em águas ultraprofundas (como por exemplo as reservas do Pré-Sal).

Veremos a seguir as características das reservas do Pré-Sal.

## 2.2 A camada Pré-Sal

Os geólogos denominam de Pré-Sal os campos submarinos de petróleo existentes abaixo de um enorme e espesso lençol de sal.

Acredita-se que a camada Pré-Sal teve origem há cerca de 125 milhões de anos, resultante do rompimento do supercontinente Gondwana<sup>2</sup>, ocasionando a separação das placas sul-americana e africana em meio a um intenso vulcanismo.

Segundo [Bacocoli], grandes lagos intracontinentais teriam se estabelecido nas fendas e fissuras da crosta. Depois, com a penetração do mar entre as placas, formou-se um golfo estreito e alongado, predecessor do oceano Atlântico.

Nos lagos, foram depositados grandes geradores de petróleo, sedimentos finos ricos em matéria orgânica, ao lado de rochas reservatório. Sobre estes geradores, precipitou-se uma camada de sal dando origem à camada Pré-Sal.

Em geral, a E&P das reservas do Pré-Sal exige um alto investimento, visto a dificuldade de extração de petróleo das camadas ultraprofundas abaixo do sal, fazendo-se necessário o uso de tecnologias mais avançadas que as utilizadas para o Pós-Sal (campos de petróleo situados acima da camada de sal).

Há indícios da existência de tais camadas na África, o que vem despertando o interesse da Petrobrás e de diversas empresas do setor petrolífero na sua exploração.

---

<sup>2</sup>A Gondwana foi uma grande massa continental localizada no hemisfério sul há cerca de 180 milhões de anos e composta pelas atuais América do Sul, África, Oceânia, Antártica e o sub-continente indiano.

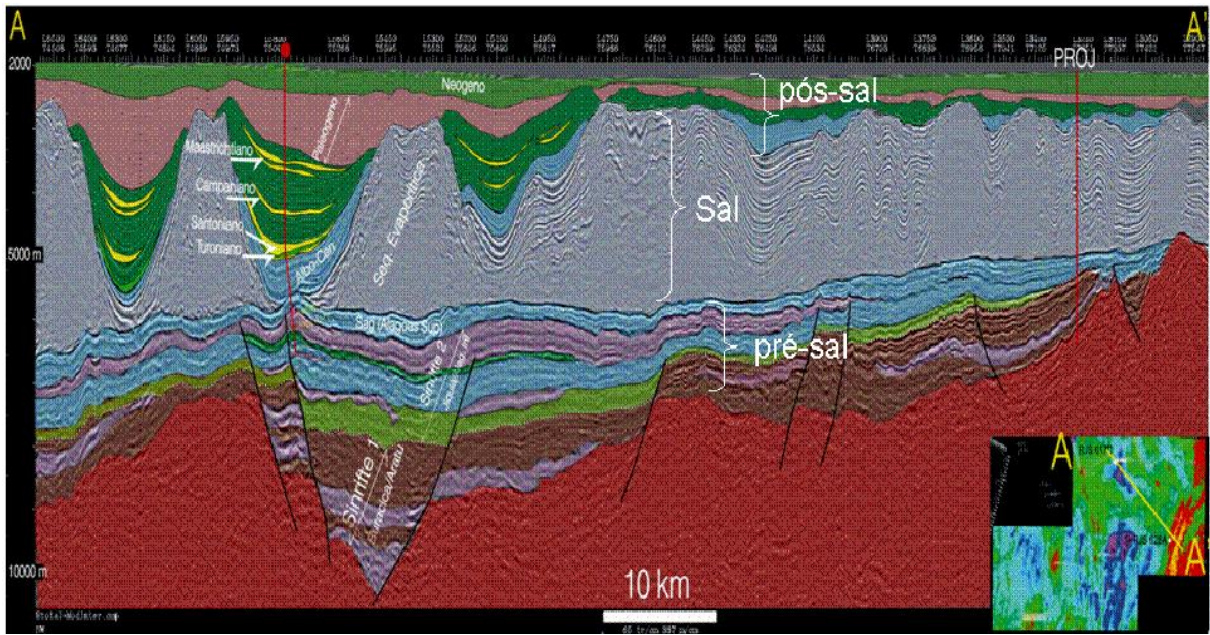


Figura 2: Camada Pré-Sal - Fonte: Apresentação de nov. 2007 em Miami-EUA, por José Formigli (Petrobrás)



Figura 3: Origem do Pré-Sal - Fonte: O Pré-Sal: perspectivas & desafios

## 2.3 A região do Pré-Sal brasileiro

A camada Pré-Sal do Brasil é um gigantesco reservatório de petróleo e gás natural, localizado em uma faixa que se estende ao longo de 800 km entre os estados do Espírito Santo e Santa Catarina, englobando três bacias sedimentares: as de Santos, Campos e Espírito Santo. Estas reservas estão localizadas abaixo da camada de sal (que podem ter até 2 km de espessura). Portanto, se localizam de 5 a 7 mil metros abaixo do nível do mar, conforme figura 4.

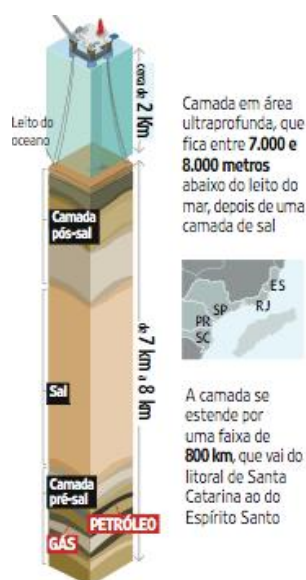


Figura 4: Camada do Pré-Sal brasileiro - Fonte: Folha on Line.

As principais características das reservas do Pré-Sal do Brasil são:

- espessa camada de sal atravessada (chega a cerca de 2 km);
- rochas reservatório carbonáticas;
- óleo leve e alta concentração de  $CO_2$ .

Uma das jazidas pioneiras na exploração do petróleo nas camadas do Pré-Sal se localiza em Jubarte, na Bacia de Campos, litoral do Espírito Santo. A Petrobrás iniciou a produção de petróleo naquela região em dezembro de 2006, através da plataforma P-34. Em setembro de 2008, a Petrobrás anunciou a produção do primeiro óleo na camada Pré-Sal de Jubarte.

Outro campo importante desta camada fica na região de Tupi, localizada na bacia de Santos. Anunciada pela Petrobrás em novembro de 2007, sua previsão para entrar em produção é em 2010.



## Os reservatórios carbonáticos do Pré-Sal

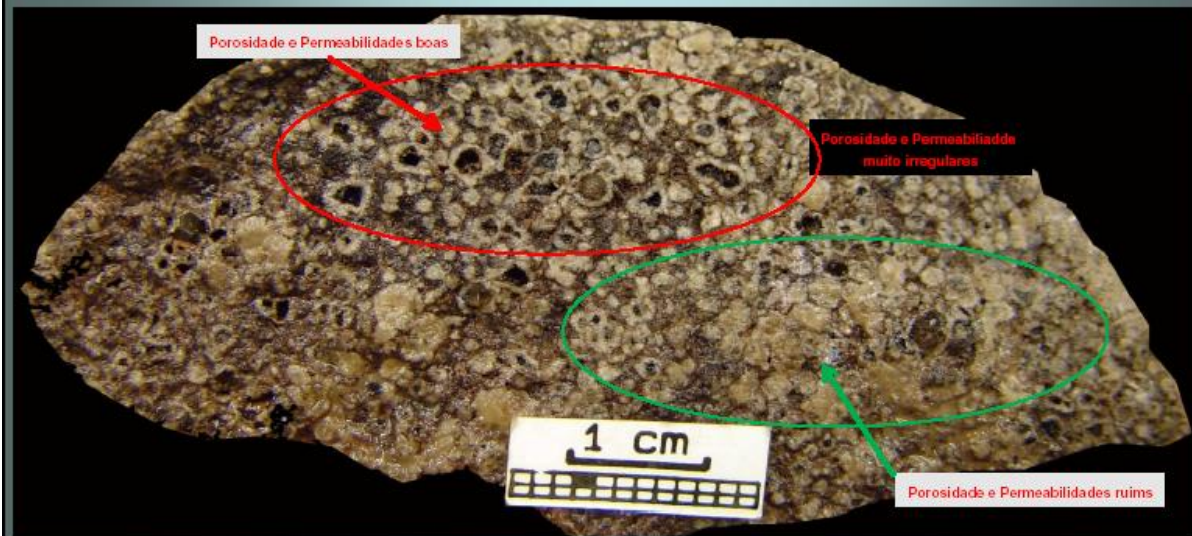


Figura 5: Rocha reservatório - Fonte: O Pré-Sal: perspectivas & desafios.

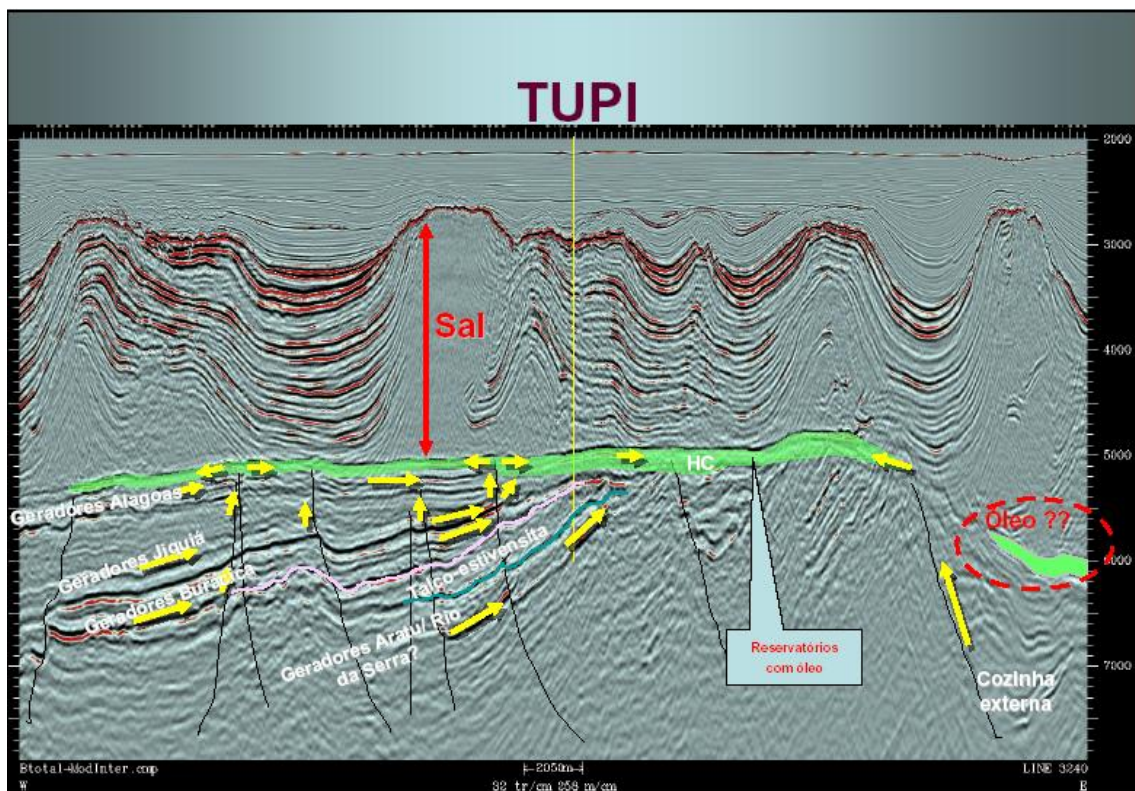


Figura 6: Reserva de Tupi - Fonte: O Pré-Sal: perspectivas & desafios.

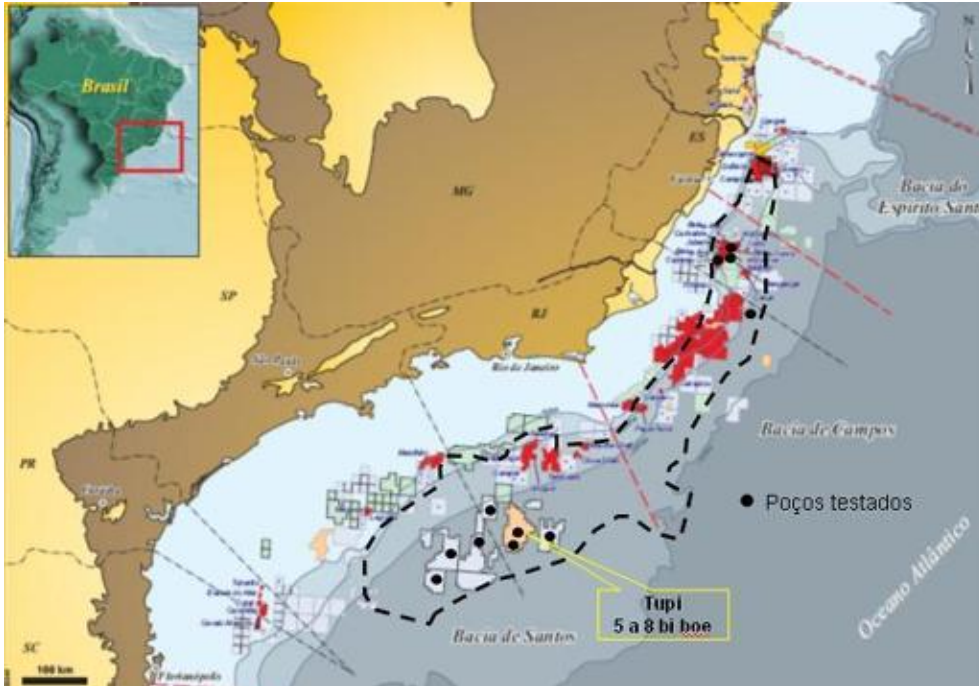


Figura 7: Abrangência do Pré-Sal brasileiro - Fonte: Campos (2008).

Estima-se que, com as reservas do Pré-Sal, o Brasil saltaria da 25ª para a 9ª posição no ranking das maiores reservas de petróleo do mundo.

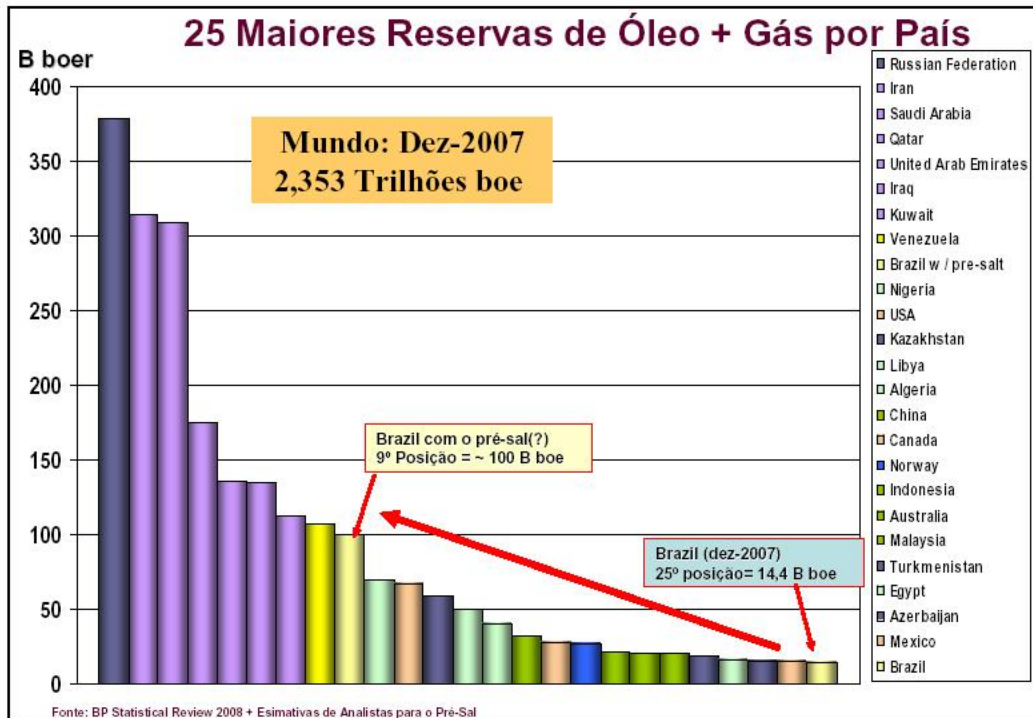


Figura 8: Estimativas - Fonte: O Pré-Sal: perspectivas & desafios.

Ao mesmo tempo em que estas reservas são extremamente atrativas (só a região de Tupi possui capacidade estimada de reserva petrolífera de 5 a 8 bilhões de barris de petróleo, conforme Figura 7), há o problema do alto custo para desenvolver uma reserva do Pré-Sal, visto a extrema profundidade a ser perfurada, bem como a camada de sal sobre o petróleo.

Na verdade, a tecnologia para desenvolver um campo do Pré-Sal vem sendo estudada e, para alguns, encarada como um desafio. Dentre os principais problemas a serem enfrentados, destacamos (conforme [RT] e [Fomigli 2007]):

1. Reservatório:

- possível não uniformidade dos reservatórios.

2. Engenharia de Poço:

- poços com início vertical, inclinação na camada de sal, maior área de exposição para facilitar a extração;
- camada de sal instável;
- materiais resistentes a alto conteúdo de  $CO_2$ .

3. Garantia de Fluxo (“Flow Assurance”):

- possibilidade de obstrução do fluxo - deposição de parafinas.

4. Logística para gás associado:

- gasoduto maior que 18” em lâmina d’água de 2.200 metros;
- distante da costa (300 km);
- desenvolver novas tecnologia para produção do gás.

5. Unidades Flutuantes de Produção (FPSO’S):

- ancoragem em lâminas maiores que 2.000 metros.

6. Engenharia Submarina:

- qualificação de *riser* para CB’s maiores que 2.000 metros, com  $CO_2$  e alta pressão;
- cenário para *risers tower*, SCRs com *lazy waves* e outras tecnologias;
- *Thermal Insulated Flowline* para lâminas d’água maiores que 2.000 metros;
- linhas de fluxo para altas pressões de injeção de gás.

A elevada incerteza sobre a capacidade das reservas do Pré-Sal, aliada a incerteza sobre o custo para desenvolvê-las, faz com que muitos se questionem sobre a viabilidade econômica de se investir nestas reservas.

O fato é que o preço corrente do petróleo é importantíssimo para uma decisão de investimento no Pré-Sal, porém não se sabe a partir de que valor o preço do petróleo passa a não compensar o custo do projeto. Em outras palavras, as flutuações no preço do petróleo podem ser decisivos na decisão de se investir no Pré-Sal.

A atual crise financeira mundial torna a situação ainda mais difícil, visto que o preço do petróleo vem caindo de forma que o investimento na E&P destas reservas pode ser seriamente ameaçado.

Neste trabalho, estamos interessados em verificar até que ponto é interessante investir no desenvolvimento de uma reserva destas, utilizando, para isso, modelos matemáticos para descrever as flutuações dos preços do petróleo, bem como as incertezas técnicas e de mercado envolvidas.

Além disso, buscaremos encontrar, através das técnicas de opções reais, o preço de concessão de uma reserva desse tipo, o que não é tarefa fácil. Para tanto, vamos estudar as jazidas situadas nas bacias de Santos separadamente das situadas nas bacias de Campos e Espírito Santo, visto que possuem características distintas (a espessura da camada Pré-Sal da bacia de Santos é bem maior que as das bacias de Campos e Espírito Santo, sendo estas duas últimas semelhantes). Faremos uso das características específicas destas bacias, com dados reais, a fim de tornar os resultados e conclusões os mais realistas possíveis.

Lembramos aqui, mais uma vez, que os resultados obtidos, nesta dissertação, são meramente acadêmicos, sendo consideradas algumas premissas e o modelo utilizado nesta dissertação. Como há inúmeros outros modelos em opções reais, os preços de concessão podem sofrer variações de acordo com o modelo adotado.

## 3 Modelagem de Opções Financeiras

### 3.1 Premissas da Teoria de Opções

Nesta seção, vamos fazer uma revisão sobre a teoria de opções financeiras, iniciando por algumas premissas básicas das teorias de probabilidade e de cálculo estocástico. Estas premissas serão necessárias para o entendimento da teoria de opções para posterior entendimento da teoria de opções reais. Iniciaremos por algumas definições que serão utilizadas durante o desenvolvimento deste trabalho.

**Definição 3.1 (Espaço de Probabilidade)** *Um espaço de probabilidade é uma tripla  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ , onde:*

- $\Omega$  é um conjunto não-vazio, chamado de espaço amostral;
- $\mathfrak{F}$  é uma  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $\Omega$ , e
- $\mathbb{P}$  é uma medida de probabilidade.

**Definição 3.2 (Filtração)** *Sejam  $\{\mathfrak{F}(t)\}_{t \in \zeta}$  uma coleção de  $\sigma$ -álgebras e  $\zeta$  um conjunto totalmente ordenado tais que  $\mathfrak{F}(s) \subset \mathfrak{F}(t) \forall s < t$ , onde  $s, t \in \zeta$ . Esta coleção é denominada filtração.*

**Definição 3.3 (Processo Estocástico)** *O conjunto  $\{(X(t), \mathfrak{F}(t))\}_{t \in \zeta}$  formado pela família de variáveis aleatórias  $\{X(t)\}_{t \in \zeta}$  tomando valores em  $\mathbb{R}^n$  e pela filtração  $\{\mathfrak{F}(t)\}_{t \in \zeta}$  é chamado de processo estocástico com filtração  $\{\mathfrak{F}(t)\}_{t \in \zeta}$ .*

**Definição 3.4 (Processo Estocástico Adaptado)** *Seja o processo estocástico da Definição 3.3. Se  $X(t)$  é  $\mathfrak{F}(t)$ -mensurável  $\forall t \in \zeta$ , dizemos que o processo estocástico é  $\mathfrak{F}(t)$ -adaptado.*

Neste trabalho consideraremos  $\zeta = [0, T]$ , para  $T$  fixado.



**Definição 3.5 (Movimento Browniano)** *Seja o espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ . Chamamos de Movimento Browniano o processo  $\{W(t)\}_{t>0}$  com trajetória contínua, tal que:*

- $W(0) = 0, \mathbb{P} - qc$
- $W(t) - W(s) \sim N(0, t - s)$ , com  $s < t$ , e
- $W(t) - W(s)$  é independente de  $W(u) - W(v)$  para  $0 \leq v \leq u \leq s \leq t$ .

A demonstração da existência do movimento browniano pode ser encontrada em [Korn & Korn].

**Definição 3.6 (Filtro Browniano)** *Dada a  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{F}$ , chamamos de Filtro Browniano a seguinte filtração:*

$$\mathfrak{F}(t) := \sigma\{\mathfrak{F}^W(t) \cup N | N \in \mathfrak{F}, \mathbb{P}(N) = 0\}, t \in \zeta$$

onde,

$$\mathfrak{F}^W(t) := \sigma\{W(s) | 0 \leq s \leq t\}, t \in \zeta$$

$\sigma(\cdot)$  é a  $\sigma$ -álgebra gerada por  $\cdot$ .

e

$$W(t) - W(s) \text{ é independente de } \mathfrak{F}(s), 0 \leq s \leq t.$$

**Definição 3.7 (Martingal)** *Dado o processo estocástico adaptado  $\{(X(t), \mathfrak{F}(t))\}_{t \in \zeta}$ , dizemos que  $X(t)$  é um martingal, se:*

- $\mathbb{E}|X(t)| < \infty, \forall t \in \zeta$ , e
- $\mathbb{E}[X(t) | \mathfrak{F}(s)] = X(s), \mathbb{P} - qc, \forall s, t \in \zeta$ , com  $s \leq t$ .

**Proposição 3.1** *O movimento browniano uni-dimensional  $W(t)$  é um martingal em relação ao Filtro Browniano.*

*Demonstração:*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W(t) | \mathfrak{F}(s)] &= \mathbb{E}[W(t) - W(s) + W(s) | \mathfrak{F}(s)] \\ &= \mathbb{E}[W(t) - W(s) | \mathfrak{F}(s)] + \mathbb{E}[W(s) | \mathfrak{F}(s)] \\ &= \mathbb{E}[W(t) - W(s)] + W(s) \\ &= W(s), \text{ para } s \leq t, \mathbb{P} - qc. \end{aligned}$$

□

Vamos definir agora a integral estocástica e em seguida suas propriedades mais importantes.

**Definição 3.8 (Integral Estocástica)** *Seja o processo estocástico simples  $\{X(t)\}_{t \in [0, T]}$ . A integral estocástica  $\mathbb{I}(X)$  para  $t \in [0, T]$  é definida por:*

$$\mathbb{I}(X) := \int_0^t X(s) dW(s) := \sum_{1 \leq i \leq p} X(i)(W(t_i \wedge t) - W(t_{i-1} \wedge t)), \text{ onde } a \wedge b = \min\{a, b\}.$$

Maiores detalhes sobre a definição de integral estocástica pode ser encontrada em [Korn & Korn].

**Proposição 3.2 (Propriedades da Integral Estocástica)** *Sejam  $\{X(t)\}_{t \in [0, T]}$  um processo estocástico e  $\mathbb{I}(X)$  a integral estocástica (também chamada de integral de Itô). Valem as seguintes propriedades:*

- $\{\mathbb{I}(X)\}_{t \in [0, T]}$  é um martingal com respeito a filtração  $\{\mathfrak{F}(t)\}_{t \in [0, T]}$ . Em particular,  $\mathbb{E}[\mathbb{I}(X, t)] = 0, \forall t \in [0, T]$ .
- (Isometria de Itô) Para todo  $t \in [0, T]$  vale:

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^t X(s) dW(s) \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \int_0^t X^2(s) ds \right].$$

A demonstração desta proposição pode ser vista em [Korn & Korn].

**Definição 3.9** *Sejam  $X$  e  $Y$  processos estocásticos descritos por:*

$$X(t) = X(0) + \int_0^t K(s) ds + \int_0^t H(s) dW(s)$$

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t L(s) ds + \int_0^t M(s) dW(s)$$

onde  $W(t)$  é um movimento browniano, então,

$$dX(t)dY(t) := H(s)M(s)ds$$

é chamado de covariância quadrática entre  $X(t)$  e  $Y(t)$ . Em particular  $dX(t)dX(t)$  é chamado de variação quadrática de  $X(t)$ .

A seguir, veremos dois teoremas importantes e que serão utilizados durante o presente trabalho.

**Teorema 3.1 (Fórmula de Itô)** *Seja  $W(t)$  um movimento browniano uni-dimensional e  $X(t)$  um processo estocástico com respeito a uma filtração  $\mathfrak{F}(t)$  definida sob um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ , descrito por:*

$$X(t) = X(0) + \int_0^t K(s)ds + \int_0^t H(s)dW(s)$$

*Seja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(t, X(t))$  é uma vez continuamente diferenciável em  $t$  e duas vezes continuamente diferenciável em  $X$  (diz-se que  $f \in C^{1,2}$ ). Então,  $\forall t \geq 0$  temos que:*

$$f(t, X(t)) = f(0, X(0)) + \int_0^t f_t(s, X(s))ds + \int_0^t f_x(s, X(s))dX(s) + \frac{1}{2} \int_0^t f_{xx}(s, X(s))dX(s)dX(s)$$

*similarmente,*

$$df(t, X(t)) = f_t(t, X(t))dt + f_x(t, X(t))dX(t) + \frac{1}{2}f_{xx}(t, X(t))dX(t)dX(t)$$

*onde  $dX(t)dX(t)$  é a variação quadrática de  $X(t)$ .*

**Teorema 3.2 (Regra do Produto)** *Sejam  $X(t)$  e  $Y(t)$  processos estocásticos como os do teorema 3.1, vale:*

$$X(t)Y(t) = X(0)Y(0) + \int_0^t X(s)dY(s) + \int_0^t Y(s)dX(s) + \int_0^t dX(s)dY(s)$$

*similarmente,*

$$d(X(t)Y(t)) = X(t)dY(t) + Y(t)dX(t) + dX(t)dY(t)$$

*onde  $dX(t)dY(t)$  é a covariação quadrática entre  $X(t)$  e  $Y(t)$ .*

A demonstração dos teoremas 3.1 e 3.2 podem ser vistos em [Korn & Korn].

**Definição 3.10 (Função Borel-Mensurável)** *Seja  $f$  uma função de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ . Dizemos que  $f$  é Borel-mensurável se o conjunto  $\{x \in \mathbb{R} | f(x) \in A\}$  está contido em  $\mathbb{B}(\mathbb{R})$  para quaisquer  $A \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$ , onde  $\mathbb{B}(\mathbb{R})$  representa a  $\sigma$ -álgebra de Borel (menor  $\sigma$ -álgebra que contém todos os intervalos da Reta).*

**Definição 3.11 (Mercados Completos)** *Um mercado é dito completo se todo ativo negociável deste mercado pode ser replicado por um portfólio composto apenas por ativos deste mercado.*

**Definição 3.12 (Oportunidade de arbitragem)** *Uma oportunidade de arbitragem é uma estratégia de investimento onde o custo inicial é não-positivo, não há risco de perda em nenhum cenário e ainda há chance de ganho em algum.*

### 3.2 O modelo de Black & Scholes (1973)

Conforme visto na subseção 1.1, Black & Scholes deduziram, em 1973, a fórmula para o apreamento de opções europeias, a qual passou a ser imprescindível para os mercados financeiros do mundo inteiro.

Nesta subseção, descreveremos brevemente o modelo devido à sua importância, bem como para seu melhor entendimento, visto que sua compreensão será necessária nas seções seguintes.

Veremos a seguir algumas definições necessárias ao entendimento do modelo.

**Definição 3.13 (Call Option europeia)** *Uma call option (ou opção de compra) europeia é um derivativo que dá ao seu detentor o direito, mas não a obrigação, de comprar uma ação por um preço previamente especificado, denominado preço de exercício, numa data específica, chamada de data de vencimento da opção. O valor intrínseco deste derivativo é dado por:*

$$h(S(T)) = (S(T) - K)^+,$$

onde  $T$  representa a data de vencimento da opção,  $K$  o seu preço de exercício e  $(\cdot)^+ = \max\{\cdot, 0\}$ . A figura 9 apresenta o valor intrínseco da opção europeia de compra.

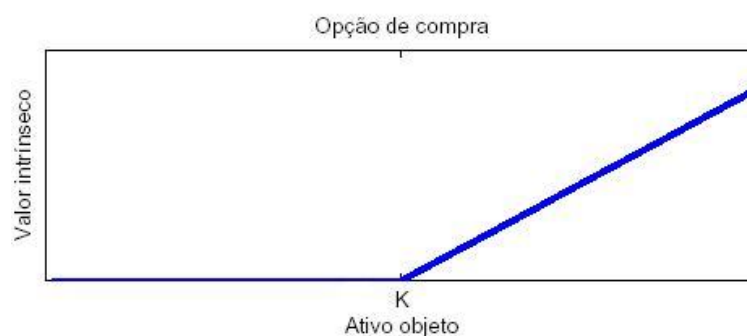


Figura 9: Valor intrínseco de uma *call option* europeia, com preço de exercício  $K$ , vencimento  $T$  e preço do ativo  $S$ .

**Definição 3.14 (Put Option europeia)** Uma put option (ou opção de venda) europeia é um derivativo que dá ao seu detentor o direito, mas não a obrigação, de vender uma ação por um preço previamente especificado, denominado preço de exercício, numa data específica, chamada de data de vencimento da opção. O valor intrínseco deste derivativo é dado por:

$$h(S(T)) = (K - S(T))^+,$$

onde  $T$  representa a data de vencimento da opção,  $K$  o seu preço de exercício e  $(\cdot)^+ = \max\{0, \cdot\}$ . A figura 10 apresenta o valor intrínseco da opção europeia de venda.

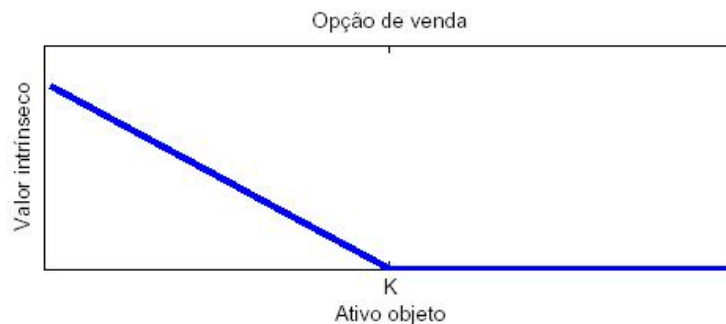


Figura 10: Valor intrínseco de uma put option europeia, com preço de exercício  $K$ , vencimento  $T$  e preço do ativo  $S$ .

O modelo de Black & Scholes consiste em dois ativos, um sem risco ( $Y(t)$ ) e um com risco ( $S(t)$ ), seguindo as seguintes dinâmicas<sup>3</sup>(considerando um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ ).

$$dY(t) = rY(t)dt \quad (1)$$

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dW(t) \quad (2)$$

onde  $r$ ,  $\mu$  e  $\sigma$  são constantes e representam, respectivamente, a taxa livre de risco, o retorno médio esperado e a volatilidade do ativo. Já  $W(t)$ , em (2), representa o movimento browniano<sup>4</sup>. Na equação (1), definimos a função  $f(t, Y(t)) = e^{rt}$ , onde observamos que  $f \in C^{1,2}$ , logo aplicando a fórmula de Itô (Teorema 3.1) temos que:

$$\begin{aligned} df(t, Y(t)) &= re^{rt} dt \\ &= rf(t, Y(t))dt \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Tais dinâmicas implicam que o mercado é completo e que não há oportunidades de arbitragem.

<sup>4</sup>A dinâmica de  $S(t)$  representada pela equação (2) é denominada Movimento Geométrico Browniano (MGB).

logo, temos:

$$df(t, Y(t)) = rf(t, Y(t))dt$$

que é a equação (1), logo  $f(t, Y(t)) = Y(t) = e^{rt}$ .

Com relação a equação (2), seja a função  $f(t, W(t)) = S(0)e^{\sigma W(t) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}$ , novamente temos que  $f \in C^{1,2}$  e aplicando a fórmula de Itô (Teorema 3.1) obtemos:

$$\begin{aligned} df(t, W(t)) &= (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)fdt + \sigma f dW(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 f dt \\ &= \mu f(t, W(t))dt + \sigma f(t, W(t))dW(t) \end{aligned}$$

logo, temos que:

$$\frac{df(t, W(t))}{f(t, W(t))} = \mu dt + \sigma dW(t)$$

que é a equação (2), portanto  $f(t, W(t)) = S(t) = S(0)e^{\sigma W(t) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}$

Com isso, vimos que:

$$Y(t) = e^{rt} \quad (3)$$

$$S(t) = S(0)e^{\sigma W(t) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} \quad (4)$$

Utilizando *Contingent Claims Analysis*, vamos agora obter a equação diferencial parcial (EDP) que nos dá o valor de uma opção de compra (*call option*) européia, conhecida como a equação clássica de Black & Scholes.

Consideremos um portfólio  $\Pi$  composto de uma unidade da opção de compra que chamaremos de  $C$  e uma posição (venda) de  $-C_S$  unidades do ativo objeto, onde  $C_S$  representa a derivada de  $C$  em relação ao preço do ativo objeto  $S$ . Assim temos:

$$\Pi = C - C_S S$$

Após um instante de tempo  $dt$ , o valor da carteira sofre uma variação  $d\Pi$  dado por:

$$d\Pi = dC - C_S dS$$

Pela fórmula de Itô (Teorema 3.1) temos:

$$d\Pi = \left[ C_t dt + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 C_{SS} dt + C_S dS \right] - C_S dS$$

Pela ausência de arbitragem o rendimento da carteira é dado por:

$$\begin{aligned} d\Pi &= r\Pi dt \\ &= r[C - C_S S] dt \end{aligned}$$

Igualando os rendimentos da carteira temos:

$$r[C - C_S S] dt = \left[ C_t dt + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 C_{SS} dt + C_S dS \right] - C_S dS$$

Portanto a EDP de Black & Scholes para uma *call option* europeia é dada por:

$$\boxed{\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 C_{SS} + r S C_S - r C + C_t = 0} \quad (5)$$

Com as seguintes condições de contorno:

- $C(0, t) = 0$ ;
- $C(S, T) = (S(T) - K)^+$ .

Note que como  $dS = \mu S dt + \sigma S dW(t)$ ,  $S = 0$  implica  $dS = 0$ , logo a opção vale zero e temos que  $C(0, t) = 0, \forall t$ , nos dando a primeira condição de contorno.

A segunda condição de contorno é uma caracterização da opção europeia em que a possibilidade de exercício da opção se dá apenas no vencimento, logo o valor da opção é igual ao seu valor intrínseco e daí segue que  $C(S, T) = (S(T) - K)^+$ .

A EDP descrita pela equação (5) vale também para a opção de venda (*put option*) europeia, sendo necessário adequar as condições de contorno. Veremos a seguir um teorema de suma importância para o desenvolvimento deste trabalho e que, nesta seção, será utilizado para resolver a EDP de Black & Scholes (equação (5)) e assim encontrar a fórmula analítica para o cálculo do valor de uma opção europeia, conhecida como a fórmula de Black & Scholes.

**Teorema 3.3 (Feynman-Kac)** *Considere a equação diferencial estocástica*

$$dX(t) = \beta(t, X(t))dt + \gamma(t, X(t))dW(t)$$

*Seja  $h(y)$  uma função Borel-mensurável e  $r$  uma constante. Fixando  $T > 0$ , e dado  $t \in [0, T]$  defina a função*

$$f(t, x) = \mathbb{E}[e^{-r(T-t)} h(X(T))]$$

*(Assumimos aqui que  $\mathbb{E}|h(X(T))| < \infty, \forall t$  e  $x$ .) Então  $f(t, x)$  satisfaz a equação diferencial parcial*

$$\frac{1}{2} \gamma^2(t, x) f_{xx}(t, x) + \beta(t, x) f_x(t, x) - r f(t, x) + f_t(t, x) = 0$$

*com a condição final*

$$f(T, x) = h(x), \forall x$$

*Demonstração:*

A demonstração se baseia nos seguintes passos:

1. encontrar um martingal;
2. calcular seu diferencial, e
3. igualar o termo multiplicador de  $dt$  a zero.

Seja  $X(t)$  solução da equação diferencial estocástica  $dX(t) = \beta(t, X(t))dt + \gamma(t, X(t))dW(t)$ , e  $f(t, x) = \mathbb{E}[e^{-r(T-t)}h(X(T))|\mathfrak{F}(t)]$ . Note que  $e^{-rt}f(t, X(t)) = \mathbb{E}[e^{-rT}h(X(T))|\mathfrak{F}(t)]$ . Logo, temos que se  $0 \leq s \leq t \leq T$ , então:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{-rt}f(t, X(t))|\mathfrak{F}(s)] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{-rT}h(X(T))|\mathfrak{F}(t)]|\mathfrak{F}(s)] \\ &= \mathbb{E}[e^{-rT}h(X(T))|\mathfrak{F}(s)] \\ &= e^{-rs}f(s, X(s)) \end{aligned}$$

portanto  $e^{-rt}f(t, X(t))$  é um martingal.

Aplicando o Teorema 3.2 obtemos:

$$\begin{aligned} d(e^{-rt}f(t, X(t))) &= e^{-rt}df(t, X(t)) + d(e^{-rt})f(t, X(t)) + \underbrace{d(e^{-rt})df(t, X(t))}_0 \\ &= e^{-rt}df(t, X(t)) - rf(t, X(t))e^{-rt}dt \end{aligned}$$

Aplicando a fórmula de Itô (Teorema 3.1) em  $df(t, X(t))$  temos:

$$\begin{aligned} d(e^{-rt}f(t, X(t))) &= e^{-rt} \left( \frac{1}{2}f_{xx}dXdX + f_xdX + f_tdt \right) - rfe^{-rt} \\ &= e^{-rt} \left( \frac{1}{2}f_{xx}dXdX + f_xdX + f_tdt - rfe^{-rt} \right) \\ &= e^{-rt} \left( \frac{1}{2}\gamma^2f_{xx} + \beta f_x + f_t - rf \right) dt + e^{-rt}\gamma f_x dW \end{aligned}$$

Finalmente, fazendo o termo multiplicador de  $dt$  igual a zero, obtemos

$$\frac{1}{2}\gamma^2f_{xx} + \beta f_x - rf + f_t = 0$$



Ainda, da definição de  $f(t, X(t))$  temos que

$$\begin{aligned} f(T, X(T)) &= \mathbb{E}[e^{-r(T-T)}h(X(T))|\mathfrak{F}(T)] \\ &= \mathbb{E}[h(X(T))|\mathfrak{F}(T)] \\ &= h(X(T)) \end{aligned}$$

Daí a condição de contorno  $f(T, x) = h(x), \forall x$ .

□

Maiores detalhes sobre a demonstração deste teorema podem ser vistos em [Shreve 2004].

Veremos a seguir que a equação diferencial parcial de Black & Scholes para uma *call option* européia (equação (5)) pode ser resolvida analiticamente, o que já não ocorre quando lidamos com opções americanas, como veremos na subseção 3.3.

Considerando  $h(x) = (S(T) - K)^+$ , além de  $\beta(t, x) = \mu$  e  $\gamma(t, x) = \sigma$ , pelo Teorema 3.3 temos que  $C(t, S) = \mathbb{E}[e^{-r(T-t)}(S(T) - K)^+]$  é solução da EDP (5).

**Definição 3.15 (Medida neutra ao risco)** *Dado o espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ , seja  $\mathbb{Q}$  uma medida de probabilidade sobre  $(\Omega, \mathfrak{F})$ . Dizemos que  $\mathbb{Q}$  é uma medida neutra ao risco se:*

- $\mathbb{Q}$  é equivalente a  $\mathbb{P}$ , isto é,  $\forall A \subset \mathfrak{F}, \mathbb{Q}(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(A) = 0$ , e
- O processo estocástico  $\{S(t)\}$  referente à dinâmica dos preços do ativo objeto é um martingal em relação à medida  $\mathbb{Q}$ .

A medida  $\mathbb{Q}$  também é chamada de *medida martingal equivalente* (ver [Shreve 2004]).

Vimos que  $\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dW(t)$ . Seja  $\theta = \frac{\mu-r}{\sigma}$ , e considere o processo  $Z(t)$  com a dinâmica

$$dZ(t) = \theta dt + dW(t)$$

onde  $Z(t)$  é um movimento browniano<sup>5</sup> sobre a medida  $\mathbb{Q}$  (o *drift* é eliminado na passagem de  $\mathbb{P}$  para  $\mathbb{Q}$ ). Então:

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{S(t)} &= \mu dt + \sigma(dZ(t) - \theta dt) \\ &= \mu dt + \sigma dZ(t) - \sigma \theta dt \\ &= \mu dt + \sigma dZ(t) - (\mu - r)dt \\ &= \mu dt + \sigma dZ(t) + rdt - \mu dt \\ &= rdt + \sigma dZ(t) \end{aligned}$$

---

<sup>5</sup>O fato de  $Z(t)$  ser um movimento browniano sobre a medida  $\mathbb{Q}$  se dá pelo Teorema de Girsanov, cujo enunciado e demonstração podem ser encontrados em [Korn & Korn].

logo, pela equação (4) temos que

$$S(t) = S(0)e^{\sigma Z(t) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t} \quad (6)$$

daí, fazendo  $t = T$  temos

$$S(T) = S(0)e^{\sigma Z(T) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T} \quad (7)$$

com isso, dividindo a equação (7) pela (6) temos

$$\begin{aligned} \frac{S(T)}{S(t)} &= \frac{S(0)e^{\sigma Z(T) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}}{S(0)e^{\sigma Z(t) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t}} \\ &= e^{\sigma(Z(T) - Z(t)) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)} \end{aligned}$$

logo,

$$S(T) = S(t)e^{\sigma(Z(T) - Z(t)) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}.$$

Conforme vimos há pouco como resultado do Teorema de Feynman-Kac (Teorema 3.3), o valor de uma opção de compra no tempo  $t$ , expirando em  $T$  com preço de exercício  $K$  é dado por:

$$\begin{aligned} C(t, S) &= \mathbb{E}[e^{-r(T-t)}(S(T) - K)^+] \\ &= \mathbb{E}[e^{-r(T-t)}(S(t)e^{\sigma(Z(T) - Z(t)) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} - K)^+] \end{aligned}$$

Fazendo  $\kappa = S(t)$ ,  $\tau = T - t$  e considerando  $X = -\frac{Z(T) - Z(t)}{\sqrt{T-t}} \sim N(0, 1)$  (lembrando que  $Z(T) - Z(t) \sim N(0, T - t)$ ) temos:

$$\begin{aligned} C(t, \kappa) &= \mathbb{E}[e^{-r\tau}(\kappa e^{-\sigma\sqrt{\tau}x + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau} - K)^+] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-r\tau}(\kappa e^{-\sigma\sqrt{\tau}x + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau} - K)^+ e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \end{aligned}$$

Lembrando que o valor esperado agora é sobre a medida  $\mathbb{Q}$ , pois na a dinâmica do ativo objeto houve a mudança de  $\mathbb{P}$  para  $\mathbb{Q}$ .

Definimos

$$d_+(\tau, \kappa) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left[ \log\left(\frac{\kappa}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau \right]$$

e

$$d_-(\tau, \kappa) = d_+(\tau, \kappa) - \sigma\sqrt{\tau} = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left[ \log\left(\frac{\kappa}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau \right].$$

Repare que

$$(\kappa e^{-\sigma\sqrt{\tau}x+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\tau} - K)^+ = \begin{cases} \kappa e^{-\sigma\sqrt{\tau}x+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\tau} - K, & \text{se } 0 \leq \kappa \leq d_-(\tau, \kappa) \\ 0, & \text{se } \kappa \geq d_-(\tau, \kappa) \end{cases}$$

logo, temos que

$$\begin{aligned} C(t, \kappa) &= \int_{-\infty}^{d_-(\tau, \kappa)} \frac{e^{-r\tau} (\kappa e^{-\sigma\sqrt{\tau}x+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\tau} - K) e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{d_-(\tau, \kappa)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-r\tau} \kappa e^{-\sigma\sqrt{\tau}x+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\tau} e^{-\frac{x^2}{2}} dx}_I - \underbrace{\int_{-\infty}^{d_-(\tau, \kappa)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-r\tau} K e^{-\frac{x^2}{2}} dx}_{II}. \end{aligned}$$

Desenvolvendo  $I$  temos:

$$\begin{aligned} I &= \kappa \int_{-\infty}^{d_-(\tau, \kappa)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-r\tau} e^{r\tau} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\tau - \sigma\sqrt{\tau}x - \frac{x^2}{2}} dx \\ &= \kappa \int_{-\infty}^{d_-(\tau, \kappa)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sigma^2\tau + 2\sigma\sqrt{\tau}x + x^2)}{2}} dx \\ &= \kappa \int_{-\infty}^{d_-(\tau, \kappa)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x + \sigma\sqrt{\tau})^2}{2}} dx \\ &= \kappa \int_{-\infty}^{d_+(\tau, \kappa)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x'^2}{2}} dx' \\ &= \kappa N(d_+(\tau, \kappa)) \end{aligned}$$

onde  $x' = x + \sigma\sqrt{\tau}$  e  $N(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x'^2}{2}} dx'$ .

Desenvolvendo  $II$  temos:

$$\begin{aligned} II &= e^{-r\tau} K \int_{-\infty}^{d_-(\tau, \kappa)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= e^{-r\tau} K N(d_-(\tau, \kappa)). \end{aligned}$$

Daí temos que

$$\boxed{C(t, \kappa) = \kappa N(d_+(\tau, \kappa)) - e^{-r\tau} K N(d_-(\tau, \kappa))}$$

conhecida como a fórmula de Black & Scholes para uma *call option* europeia (os cálculos para uma *put option* europeia são análogos, podendo alternativamente ser utilizada a paridade *put-call*, ver [Korn & Korn]).

### 3.2.1 Opções com dividendos - A fórmula de Black & Scholes & Merton

Após o trabalho de Fisher Black e Myron Scholes em 1973, o americano Robert Merton ajustou, no mesmo ano, o modelo de Black & Scholes para um ativo que paga uma taxa de dividendos contínua  $\delta$ .

As premissas e hipóteses do modelo permanecem inalteradas, apenas acrescentando a previsão do pagamento da taxa de dividendos contínua ao ativo objeto. Com isso, o preço de um ativo  $S$  segue a seguinte dinâmica sobre a medida  $\mathbb{P}$ :

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = [\mu - \delta]dt + \sigma dW(t)$$

e conseqüentemente, sobre a medida  $\mathbb{Q}$  tem-se,

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = [r - \delta]dt + \sigma dZ(t).$$

Para se obter a equação diferencial parcial de uma *call option* européia, segundo Merton, segue-se os mesmos passos para obtenção da equação diferencial de Black & Scholes com as seguintes alterações: o rendimento da carteira  $\Pi$  deverá ser descontado dos dividendos através do termo  $\delta C dt$ , assim temos:

$$d\Pi = \left[ C_t dt + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 C_{SS} dt + C_S dS \right] - C_S dS - \delta C dt$$

Temos também que descontar a taxa de dividendos  $\delta$  da taxa  $r$ , assim temos que o rendimento da carteira também será dado por:

$$\begin{aligned} d\Pi &= [r - \delta] \Pi dt \\ &= [r - \delta] [C - C_S S] dt \end{aligned}$$

Daí, igualando os rendimentos da carteira obtemos:

$$\begin{aligned} [r - \delta] [C - C_S S] dt &= \left[ C_t dt + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 C_{SS} dt + C_S dS \right] - C_S dS - \delta C dt \Rightarrow \\ -\delta C dt + r C dt - [r - \delta] C_S S dt &= C_t dt + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 C_{SS} dt - \delta C dt \end{aligned}$$

Portanto a EDP de Black & Scholes ajustada por Merton para uma *call option* européia, chamada de EDP de Black & Scholes & Merton, é dada por:

$$\boxed{\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 C_{SS} + [r - \delta] S C_S - r C + C_t = 0} \quad (8)$$

Com as mesmas condições de contorno da EDP (5):

- $C(0, t) = 0$ ;
- $C(S, T) = (S(T) - K)^+$ .

Da mesma forma que no modelo sem dividendos, a opção europeia de compra com dividendos possui solução analítica, cujos passos para sua obtenção são exatamente os mesmos passos efetuados para obtenção da solução analítica da equação (5), apenas substituindo  $r$  por  $r - \delta$  na dinâmica do ativo objeto. Com isso, a fórmula analítica para a equação (8) é dada por:

$$C(t, \kappa) = \kappa e^{-\delta\tau} N(d_+(\tau, \kappa)) - e^{-r\tau} KN(d_-(\tau, \kappa))$$

onde,

$$d_+(\tau, \kappa) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left[ \log\left(\frac{\kappa}{K}\right) + \left(r - \delta + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau \right]$$

e

$$d_-(\tau, \kappa) = d_+(\tau, \kappa) - \sigma\sqrt{\tau} = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left[ \log\left(\frac{\kappa}{K}\right) + \left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau \right].$$

Para uma opção de venda, todos os cálculos efetuados aqui são análogos.

### 3.3 Opções Americanas

Enquanto as opções europeias só podem ser exercidas na data de vencimento, as opções americanas podem ser exercidas a qualquer momento até seu vencimento. Isso torna sua precificação mais complexa, visto que, diferentemente das opções europeias, o conhecimento apenas do preço final do ativo objeto já não é suficiente para determinar o preço da opção.

Parte dessa complexidade envolve a determinação do momento ótimo de exercício antecipado. É exatamente a necessidade da determinação deste momento ótimo que torna as opções americanas mais interessantes e difíceis de avaliarmos que as europeias.

Geralmente, não existem soluções analíticas para opções do estilo americano (a não ser em caso de opções perpétuas, como pode ser visto em [Dixit & Pindick]), sendo necessário o uso de métodos numéricos para calcular seu valor.

**Definição 3.16 (Call Option americana)** *Uma call option (ou opção de compra) americana é um derivativo que dá ao seu detentor o direito, mas não a obrigação, de comprar uma ação por um preço previamente especificado, denominado preço de exercício, em qualquer tempo desejado até a data de vencimento da opção. A função de valor intrínseco é dada por*

$$h(S(t)) = (S(t) - K)^+, t \in [0, T]$$

onde  $h(S(t))$  representa o valor intrínseco da opção no tempo  $t$ ,  $K$  o preço de exercício e  $(\cdot)^+ = \max\{\cdot, 0\}$ .

A avaliação de opções americanas se baseia nos mesmos passos da dedução da equação diferencial parcial de Black & Scholes & Merton (equação (8)), com algumas modificações nas condições de contorno, as quais caracterizam os efeitos da possibilidade de exercício antecipado.

Um desses efeitos é a chamada *condição de contorno livre*, a qual descreveremos a seguir, considerando uma *call option* americana.

Considere um preço  $S^*$  (ou  $S^*(t)$ ) para o qual o exercício antecipado da opção é ótimo no instante  $t$ ,  $t \in [0, T]$ . Caso  $S^*(t)$  não exista, o problema se resume a uma opção européia, pois a opção não seria exercida antecipadamente em nenhum momento, independentemente do preço do ativo objeto  $S$ . Assim, em uma *call option* americana, existe uma região  $S > S^*$  chamada de *região de exercício antecipado*, onde o exercício antecipado é ótimo, pois maximiza a função do valor intrínseco da opção,  $h(S(t))$ . Caso  $S < S^*$ , deve-se manter a opção viva, sendo esta região chamada de *região de continuação*. Os valores  $S^*$  para todos os instantes  $t \in [0, T]$  são denominados condição de contorno livre ou ainda *curva de gatilho*<sup>6</sup>.



Figura 11: Gráfico da curva de gatilho (condição de contorno livre) de uma *call option* americana.

Como não conhecemos esses preços de exercício ótimo, devemos tratar  $S^*$  como uma restrição a ser determinada por procedimentos numéricos.

Assim, supondo conhecida a curva de gatilho  $S^*$  e repetindo os passos para obtenção da

<sup>6</sup>A terminologia *curva de gatilho* é bastante utilizada em opções americanas, mais ainda quando são aplicadas a situações de análise de investimentos, como é o caso do presente trabalho.

equação (8), o valor de uma *call option* americana ( $C(t, S)$ ) é descrita pela EDP:

$$\boxed{\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 C_{SS} + [r - \delta]SC_S - rC + C_t = 0} \quad (9)$$

Com as seguintes condições de contorno:

- $C(0, t) = 0$ ;
- $C(S, T) = (S(T) - K)^+$ ;
- $C(S^*, t) = S^* - K$ ;
- $C_S(S^*, t) = 1$ .

As duas primeiras condições de contorno são análogas as obtidas para a *call option* européia e a terceira condição de contorno é a curva de gatilho.

A última condição de contorno é chamada de *Smooth Pasting* (ver [Dixit & Pindick]) que visa garantir a suavidade da curva de gatilho.

Os resultados para uma *put option* americana são análogos.

Em geral, tratar de condições de contorno livre não é tarefa fácil, na verdade, seu estudo é consideravelmente mais complicado que o de opções européias. Encontrar uma solução exata é quase sempre impossível, sendo necessária a determinação numérica de uma solução, o que pressupõe o estudo de problemas de contorno livre de modo a possibilitar a implementação de métodos numéricos adequados. No intuito de melhor entendermos os problemas de contorno livre, vamos analisar, a seguir, o problema de contorno livre canônico denominado *Problema do Obstáculo*.

### 3.3.1 O Problema do Obstáculo

Considere uma corda elástica de extremidades fixas e que supostamente passa sobre um obstáculo, conforme ilustrado na figura 12.

Seja  $u(x)$  o deslocamento da corda e  $x = \pm 1$  os extremos em que a corda está fixada,  $u(\pm 1) = 0$ . É suposto que  $f(\pm 1) < 0$  e que  $f(x) > 0$  para alguns valores de  $x \in (-1, 1)$ , que implica a existência de uma zona de contato entre a corda e o obstáculo, representada na figura pela zona entre  $A$  e  $B$ . Contudo, esta zona não é conhecida à priori e precisa ser determinada como parte da solução, representando, assim, um problema de contorno livre.

Em cada ponto da zona de contato, o deslocamento da corda coincide com a altura do obstáculo e fora dela a corda é retilínea. Isto é traduzido matematicamente da seguinte maneira:

$$u(x) = f(x), \text{ se } A \leq x \leq B$$

$$u_{xx}(x) = 0, \text{ se } -1 < x < A \text{ ou } B < x < 1.$$

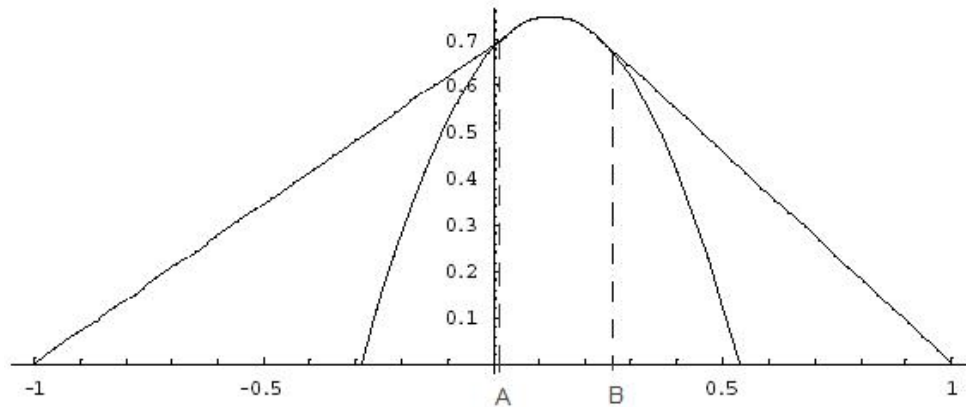


Figura 12: Corda em equilíbrio com obstáculo em que os extremos da corda estão ligados nos pontos  $\{-1, 0\}$  e  $\{1, 0\}$  e o obstáculo é descrito pela função  $f(x) = -\alpha(x - a)^2 + h$ .

Como os pontos  $A$  e  $B$  são desconhecidos, são necessárias mais duas condições para sua determinação, que são a continuidade de  $u$  e  $u_x$ <sup>7</sup>. Portanto o problema de contorno livre representado na figura 12 consiste em encontrar uma função  $u(x)$  e pontos  $A$  e  $B$  tais que

$$u(-1) = 0 = u(1)$$

$$u_{xx}(x) = 0, \text{ se } -1 < x < A \text{ ou } B < x < 1$$

$$u(x) = f(x), \text{ se } A \leq x \leq B$$

$$u_x(A) = f_x(A)$$

$$u_x(B) = f_x(B).$$

Conforme [Grossinho 2008], para cada função  $f(x)$  do tipo dado, a solução  $u(x)$  e os pontos  $A$  e  $B$  existem e são únicos. Quanto à sua determinação exata, em geral, só é possível para exemplos de  $f(x)$  muito simples, o que motiva a busca pela sua determinação numérica.

Uma das possíveis estratégias para solucionar o problema de contorno livre é o método envolvendo *Problema de Complementaridade Linear*, descrito a seguir.

### 3.3.2 Problema de Complementaridade Linear

Trata-se de uma maneira de reduzir o problema a um problema de contorno fixo do qual se pode derivar o contorno livre posteriormente.

<sup>7</sup>Tais condições são sugeridas por um argumento baseado em um equilíbrio de forças, conforme pode ser visto em [Grossinho 2008].



Como vimos no exemplo anterior, é suposto que a corda elástica de extremos fixos passe por um obstáculo. Duas situações podem ocorrer: ou a corda não toca o obstáculo, o que corresponde analiticamente a  $u > f$ , caso em que é retilínea, tendo-se  $u_{xx} = 0$ ; ou existe uma região de contato implicando  $u = f$  e  $u_{xx} = f_{xx} < 0$ . Então podemos escrever o problema na forma equivalente denominada *problema de complementaridade linear*

$$u_{xx}(u - f) = 0, -u_{xx} \geq 0, (u - f) \geq 0$$

sob as condições

$$u(-1) = u(1) = 0, u, u_x \text{ são contínuas.}$$

Da mesma forma, podemos escrever o problema de Complementaridade Linear referente à opção de compra americana vista anteriormente <sup>8</sup>. Temos então

$$\left(\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 C_{SS} + [r - \delta]SC_S - rC + C_t\right) (C(S^*, t) - (S^* - K)) (C_S(S^*, t) - 1) = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 C_{SS} + [r - \delta]SC_S - rC + C_t\right) \geq 0,$$

$$(C(S^*, t) - (S^* - K)) \geq 0 \text{ e } (C_S(S^*, t) - 1) \geq 0$$

com condições finais e de contorno dadas por

$$C(0, t) = 0 \text{ e } C(S, T) = (S(T) - K)^+.$$

Veremos mais adiante como resolver este problema de Complementaridade Linear.

---

<sup>8</sup>Maiores detalhes sobre a obtenção do sistema referente ao problema de Complementaridade Linear para uma opção de compra americana, baseada na Problema do Obstáculo, podem ser visto em [Grossinho 2008].

## 4 Modelagem de reservas não-desenvolvidas de petróleo

### 4.1 O modelo de Paddock & Siegel & Smith (1988)

Em seu artigo de 1988, Paddock & Siegel & Smith utilizam a teoria de opções reais para valorar um campo de petróleo *offshore* e determinar seu *timing* de investimento, tornando-se um dos modelos mais populares de aplicação de opções reais na indústria petrolífera.

O artigo ressalta a importância de se obter uma certa precisão na precificação de uma reserva, o que tem sido buscado pelas empresas participantes de leilões de campos de petróleo, visto que cada lance envolve milhões (às vezes até bilhões) de dólares.

Para tanto, a reserva não-desenvolvida é comparada a uma *call option* americana, conforme mostra a figura 13 (americana, pois a opção de desenvolver a reserva pode ser feita em qualquer tempo, dentro do prazo do projeto).

OPÇÃO FINANCEIRA	RESERVA NÃO-DESENVOLVIDA
Preço corrente da ação	Valor corrente da reserva desenvolvida
Variância da taxa de retorno da ação	Variância da taxa de variação do valor de uma reserva desenvolvida
Preço de exercício	Custo de desenvolvimento da reserva
Data de vencimento	Data de vencimento dos direitos sobre o bloco
Taxa de juros livre de risco	Taxa de juros livre de risco
Dividendo	Receita líquida de produção menos a depleção da jazida

Figura 13: Comparação entre uma *call option* e uma reserva não-desenvolvida.

O modelo de Paddock & Siegel & Smith inicia pelo valor de uma reserva desenvolvida, onde veremos mais a frente que sua dinâmica é a similar à dos preços do barril de petróleo, o que facilita a estimação dos parâmetros do modelo utilizado.

O modelo de Paddock & Siegel & Smith considera que, no equilíbrio, o retorno esperado da concessão de uma reserva não-desenvolvida deve compensar o concessionário pelo seu custo de oportunidade. Sendo  $B(t)$  o volume de petróleo da reserva,  $V(t)$  o valor unitário da reserva desenvolvida (por barril de petróleo) e  $R(t)$  o retorno instantâneo do concessionário da reserva (todas variáveis no instante  $t$ ), o modelo assume que a taxa de retorno para o proprietário segue um Movimento Geométrico Browniano, conforme abaixo.

$$\frac{R(t)dt}{B(t)V(t)} = \alpha(v)dt + \sigma(v)dW(t) \quad (10)$$

onde  $\alpha(v)$  é o retorno esperado pelo concessionário,  $\sigma(v)$  é o desvio padrão da taxa de retorno e  $W(t)$  um movimento Browniano. O retorno  $R(t)$  provém dos lucros com a produção e do

ganho de capital devido às variações no preço do petróleo. Suponha que o volume de petróleo de uma reserva possua decaimento exponencial (efeito de depleção), o que é largamente usado pela indústria petrolífera, daí temos que:

$$dB(t) = -\omega B(t)dt \quad (11)$$

onde  $\omega$  é a fração de óleo produzido a cada ano. Então, o retorno  $R(t)$  do concessionário da reserva é formado por dois componentes: os benefícios provenientes da produção (dividendos) e os benefícios devidos à valorização da reserva (ganho de capital). Para um intervalo de tempo  $dt$ ,  $R(t)$  é dado por:

$$R(t)dt = \omega B(t)\Pi(t)dt + d(B(t)V(t)) \quad (12)$$

Logo, aplicando o Teorema 3.2 na equação (12) temos:

$$d(B(t)V(t)) = B(t)dV(t) + V(t)dB(t) + dB(t)dV(t) \quad (13)$$

Como  $dB(t)$  não possui termo  $dW(t)$ , temos que  $dB(t)dV(t) = 0$  e a equação (13) fica:

$$d(B(t)V(t)) = B(t)dV(t) + V(t)dB(t) \quad (14)$$

substituindo (11) em (14) e o resultado em (12) temos:

$$R(t)dt = \omega B(t)\Pi(t)dt + B(t)dV(t) - \omega V(t)B(t)dt \quad (15)$$

onde  $\Pi(t)$  é o lucro operacional por unidade de barril de petróleo vendido. Substituindo (15) em (10), temos:

$$\frac{\omega B(t)\Pi(t)dt + B(t)dV(t) - \omega V(t)B(t)dt}{B(t)V(t)} = \alpha(v)dt + \sigma(v)dW(t)$$

$$\frac{\omega\Pi(t)dt}{V(t)} + \frac{dV(t)}{V(t)} - \omega dt = \alpha(v)dt + \sigma(v)dW(t)$$

isolando o termo  $\frac{dV(t)}{V(t)}$  temos:

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{V(t)} &= \left( - \left( \frac{\omega\Pi(t)}{V(t)} - \omega \right) + \alpha(v) \right) dt + \sigma(v)dW(t) \\ &= \left( - \left( \frac{\omega\Pi(t) - \omega V(t)}{V(t)} \right) + \alpha(v) \right) dt + \sigma(v)dW(t) \end{aligned}$$

fazendo  $\delta(t) = \omega \frac{\Pi(t) - V(t)}{V(t)}$ , onde  $\delta(t)$  é a taxa de distribuição dos fluxos de caixa (*dividend*

yield), temos que o valor da reserva desenvolvida em produção obedecerá a equação:

$$\frac{dV(t)}{V(t)} = (\alpha(v) - \delta(t))dt + \sigma(v)dW(t) \quad (16)$$

Com isso, temos que, no equilíbrio, a taxa de retorno esperada de uma reserva desenvolvida sem produção  $(\alpha(v) - \delta(t))$  é menor do que a taxa de retorno exigida  $(\alpha(v))$  para um ativo com risco  $\sigma(v)dW(t)$ , motivo pelo qual nenhum agente irá manter uma reserva desenvolvida sem produzir.

Para determinar o valor de uma reserva não-desenvolvida  $(X(V, t))$ , assumiremos que  $\alpha(v) = \alpha$ ,  $\sigma(v) = \sigma$  e  $\delta(t) = \delta$  são constantes.

Pelo Teorema 3.1 temos que:

$$dX = X_t dt + X_V dV(t) + \frac{1}{2} X_{VV} dV(t)dV(t) \quad (17)$$

Pela definição de variação quadrática (Definição 3.9) temos que:

$$dV(t)dV(t) = \sigma^2 V(t)^2 dt$$

Substituindo na equação (17) obtem-se:

$$dX = X_t dt + X_V dV(t) + \frac{1}{2} \sigma^2 V(t)^2 X_{VV} dt \quad (18)$$

Utilizando-se *Contingent Claims Analysis*, podemos montar um portfólio livre de risco ( $\theta$ ) comprando (posição longa) uma opção ( $X$ ) e vendendo (posição curta)  $n$  unidades de  $V$ . O valor de  $n$  varia ao longo do tempo de forma a tornar o portfólio livre de risco. No mercado financeiro,  $n$  é chamado de *delta* e é definido pela derivada da opção em relação a  $V$  (assim como na seção 3). Com isso, o portfólio vale:

$$\theta = X - nV = X - X_V V$$

Assim, o retorno total da carteira é dado por:

$$r\theta dt = r(X - X_V V)dt \quad (19)$$

onde  $r$  é a taxa de juros livre de risco.

Da mesma forma que na equação (12), o retorno é formado por dois componentes: a posição longa  $dX$  e posição curta  $X_V(\omega \Pi dt + dV - \omega V dt)$ , logo o retorno do portfólio será dado por:

$$\text{Retorno} = dX - X_V(\omega \Pi dt + dV - \omega V dt) \quad (20)$$

Igualando as equações (19) e (20) temos:

$$r(X - X_V V)dt = dX - X_V(\omega \Pi dt + dV - \omega V dt)$$

substituindo o valor de  $dX$  (equação (18)) temos:

$$r(X - X_V V)dt = X_t dt + X_V dV + \frac{1}{2}\sigma^2 V^2 X_{VV} dt - X_V(\omega \Pi dt + dV - X_V \omega V dt)$$

reescrevendo:

$$\left( \frac{1}{2}\sigma^2 V^2 X_{VV} + rV X_V - \omega(\Pi - V)X_V - rX + X_t \right) dt = 0$$

lembrando que  $\delta = \omega \frac{(\Pi - V)}{V}$ , logo  $\omega(\Pi - V) = \delta V$ , substituindo na equação anterior e eliminando  $dt$  temos:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 X_{VV} + rV X_V - \delta V X_V - rX + X_t = 0$$

portanto,

$$\boxed{\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 X_{VV} + (r - \delta)V X_V - rX + X_t = 0} \quad (21)$$

Esta é a equação diferencial parcial que dá o valor da reserva não-desenvolvida (preço de concessão da reserva). Note que é a mesma equação clássica de Black & Scholes & Merton (equação (8)).

As condições de contorno da EDP são:

- $X(0, t) = 0$ ;
- $X(V, T) = (V(T) - D)^+$ , onde  $D$  é o custo por barril de petróleo de desenvolvimento da reserva (preço de exercício);
- $X(V^*, t) = V^* - D$ , onde  $V^*$  representa a curva de gatilho do investimento;
- $X_V(V^*, t) = 1$ .

Note que como  $dV = (\alpha - \delta)V dt + \sigma V dW(t)$ , se  $V = 0$  então  $dV = 0$ . Então, se  $V = 0$  segue que a opção de investir quando  $V = 0$  é zero também ( $X(0, t) = 0$ ), o que nos dá a primeira condição de contorno.

A segunda condição de contorno nos diz que, na maturidade, a opção de desenvolver a reserva será exercida se  $V(T) > D$ .

Como  $V^*$  é a curva de gatilho do investimento, segue que  $X(V^*, t) = V^* - D$  e, com isso, obtemos a terceira condição de contorno.

A última condição de contorno é para garantir a suavidade do contato entre a região de exercício antecipado e a de continuação (Smooth Pasting). A equação (21) não tem solução

analítica (exceto na hipótese de perpetuidade, conforme mencionado na subseção 3.3 e descrito em [Dixit & Pindick]), portanto deve ser resolvida por métodos numéricos, como veremos nas seções seguintes.

No modelo de Paddock & Siegel & Smith,  $D$  e  $V$  são valores unitários por barril de petróleo, veremos, a seguir, que o modelo permanece inalterado, considerando estes parâmetros como totais, já englobando o volume da reserva  $B(0)$ . Neste trabalho, consideraremos esta última hipótese.

#### 4.1.1 Qualidade econômica da reserva

Vimos, no modelo de Paddock & Siegel & Smith, que para encontrarmos o valor da reserva não-desenvolvida (preço de concessão desejado), é necessário conhecer a dinâmica do valor da reserva desenvolvida, que, no modelo em questão, é dado por um Movimento Geométrico Browniano.

Como vimos anteriormente, o volume da reserva  $B(t)$  possui decaimento exponencial, seguindo a dinâmica da equação (11). Portanto  $B(0)$  é o volume total da reserva, pois representa o volume  $B(t)$  no instante  $t = 0$ , ou seja, sem sofrer ainda o efeito depleção. Como utilizaremos a partir de agora apenas o volume total da reserva ( $B(0)$ ), denotaremos por  $B$  o volume da reserva ( $B = B(0)$ ).

Para estimarmos os parâmetros do modelo, tais como a volatilidade e a média do valor da reserva desenvolvida, é preciso que tenhamos o conhecimento do comportamento real desses valores, o que na prática é muito difícil.

Desta forma, consideraremos o valor da reserva desenvolvida  $V$  proporcional ao preço do petróleo  $P$  e ao volume da reserva  $B$ . Além disso,  $V$  também será proporcional ao parâmetro  $q$ , chamado de *qualidade econômica da reserva*. Assim temos:

$$V = qBP$$

onde  $0 \leq q \leq 1$ .

Esse modelo é conhecido como *modelo de negócios*<sup>9</sup> (“business model”).

Note que, no modelo de Paddock & Siegel & Smith,  $V$  era o valor unitário da reserva desenvolvida, aqui,  $V$  é o valor total da reserva desenvolvida, ou seja, o valor unitário multiplicado pelo volume da reserva  $B$ . Veremos pela Proposição 4.1, a seguir, que tanto faz considerarmos  $V$  como sendo unitário ou total, pois em ambos os casos a dinâmica será a mesma. Logo as equações (16) a (21) são válidas para o modelo de negócios. Portanto, quando falarmos do valor da reserva desenvolvida, consideraremos o valor total (unitário multiplicado pelo volume da reserva).

---

<sup>9</sup>Maiores detalhes sobre o modelo de negócios pode visto em [Dias 2005].

**Proposição 4.1** *Seja  $P$  um processo de Itô com a seguinte dinâmica:*

$$\frac{dP}{P} = \alpha(P)dt + \sigma(P)dW$$

*então,  $V = qBP$ , com  $q$  e  $B$  determinísticos, também é um processo de Itô, com a seguinte dinâmica:*

$$\frac{dV}{V} = \alpha(P)dt + \sigma(P)dW$$

*Demonstração:* Pelo Teorema 3.1 temos:

$$dV = V_t dt + V_P dP + \frac{1}{2} V_{PP} dP dP$$

porém, como  $V = qBP$ , temos:

$$V_t = 0; V_P = qB; V_{PP} = 0$$

Logo,

$$dV = qBdP = qPB\alpha(P)dt + qPB\sigma(P)dW \Rightarrow$$

$$\frac{dV}{V} = \alpha(P)dt + \sigma(P)dW \quad \square$$

A Proposição 4.1 mostra que  $V$  segue a mesma dinâmica de  $P$ , logo podemos utilizar os preços de petróleo para estimar a média e a volatilidade de  $V$ , visto que preços de petróleo possuem maior facilidade de tratamento. Outra conclusão importante da Proposição 4.1 é que ao ser multiplicado por um valor determinístico, a dinâmica de um processo de Itô não se altera, isso mostra que  $V$  total tem a mesma dinâmica de  $V$  unitário.

A qualidade econômica da reserva é um valor percentual que varia de acordo com os seguintes aspectos:

- permeabilidade e porosidade do reservatório;
- qualidade do fluido;
- tipo de reserva (terrestre, águas profundas, ultraprofundas etc.);
- regime fiscal do país.

Quanto maior forem a qualidade da rocha reservatório e a qualidade do petróleo/fluidos e quanto menor forem o custo operacional, a taxa de desconto e os impostos, maior será o valor de  $q$ .

Podemos calcular o valor de  $q$  a partir da modelagem da função  $VPL$  (Valor Presente Líquido) do projeto. A parametrização dessa função depende do regime fiscal onde o campo

de petróleo está localizado. Os dois principais regimes fiscais na indústria de E&P de petróleo são o regime de concessões - usado em países como o Brasil, EUA, Inglaterra e outros -, e o regime de partilha da produção - usado por exemplo na África. Para concessões, é comum assumir que o  $VPL$  é uma função linear<sup>10</sup> dos preços do petróleo, conforme [Dias 2005]. Deve-se então construir o gráfico (reta)  $VPL \times P$ .

Uma reta é definida por dois pontos. Um deles pode ser o resultado da análise do fluxo de caixa descontado: para um certo preço médio  $P$  usado no fluxo de caixa obtém-se o  $VPL$ . Assim temos um dos pontos  $\{P, VPL\}$ .

O outro ponto é observando a definição do  $VPL$ , a saber,  $VPL = qBP - D$ . Quando  $P = 0$ , temos  $VPL = -D$ . Logo, o outro ponto da reta é  $\{0, -D\}$ .

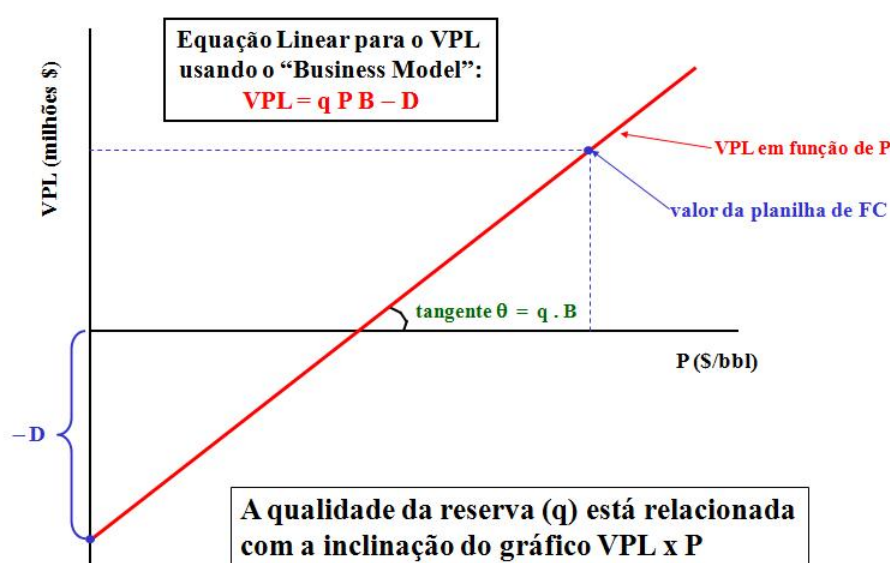


Figura 14: Equação VPL utilizando o modelo de negócios ("business model") - Fonte: [Dias 2005].

Como vemos na Figura 14,  $q$  é obtido dividindo-se o coeficiente angular da reta pelo volume da reserva.

Nos EUA, é comum a utilização do percentual médio  $q = 33.33\%$ , conhecido como regra do um terço<sup>11</sup>. Porém, esta média não reflete a realidade do Pré-Sal, visto o alto custo operacional característico, acarretando um valor menor de  $q$ .

Para o cálculo de  $q$ , através da construção da reta  $VPL$ , necessitamos de uma planilha de FCD, característica de uma reserva do Pré-Sal. Devido a impossibilidade de acesso a uma

<sup>10</sup>A utilização da função linear para o  $VPL$  é comum entre os autores, quando se trata de regime de concessões. Já para regime de partilha de produção, são utilizadas outras funções, não-lineares, para modelagem do  $VPL$ . Para maiores detalhes sobre as modelagens do  $VPL$ , e argumentos para utilização de funções lineares ou não-lineares, ver [Dias 2005].

<sup>11</sup>Esta regra foi utilizada no artigo de Paddock & Siegel & Smith.



dessas planilhas, utilizamos uma outra maneira para o cálculo de  $q$  (utilizado por diversos autores), através da modelagem dos possíveis valores assumidos por  $q$  em uma determinada jazida. Isso nos dá uma distribuição de probabilidades, cujo valor esperado será o valor de  $q$ . Matematicamente, podemos definir uma variável aleatória  $Q$ , cujos valores assumidos refletem os possíveis valores de  $q$ . Assim,  $Q$  terá uma distribuição de probabilidades e, com isso, teremos:

$$q = \mathbb{E}[Q]$$

Neste trabalho, vamos estimar o valor de  $q$  específico para as reservas situadas na bacia de Santos e outro para as reservas situadas nas bacias de Campos e Espírito Santo, através do valor esperado da variável aleatória  $Q$ , que terá distribuição uniforme. A distribuição uniforme não é a mais realista, podendo sua utilização inclusive afetar os resultados finais obtidos, porém, sua utilização para  $Q$  é comum entre os autores na ausência de dados históricos, como é o caso do Pré-Sal. Os parâmetros da distribuição uniforme foram obtidos junto à Petrobrás, como sendo valores (mínimos e máximos) típicos das reservas do Pré-Sal de cada bacia, de acordo com suas características, que veremos a seguir.

Assim, vamos analisar o valor de  $q$  para cada bacia especificamente:

- **Bacia de Santos:**

Os poços da bacia de Santos são os mais profundos e, portanto, acarretam maior custo operacional. Além disso a camada de sal é um das mais extensas, gerando maiores problemas de garantia de escoamento. Considerando estas e as demais características das reservas da bacia de Santos, temos que:

$$Q \sim U(0.08, 0.15)$$

logo,

$$q = \mathbb{E}[Q] = \frac{0.08 + 0.15}{2} = 0.115$$

lembrando que a densidade de probabilidade de uma variável aleatória  $X \sim U(a, b)$  é dada por  $f(X) = \frac{1}{b-a}$ , logo:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} X f(X) dX = \int_a^b \frac{X}{b-a} dX = \frac{X^2}{2(b-a)} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}.$$

- **Bacias de Campos e Espírito Santo:**

Os poços situados nas bacias de Campos e do Espírito Santo são mais rasos que os da bacia de Santos, logo o custo operacional é menor, fazendo com que  $q$  seja maior. Além disso, estes poços possuem menos problemas de escoamento, pois a camada de

sal também é menor. Com isso e levando-se em conta as demais características destas reservas, temos que:

$$Q \sim U(0.10, 0.17)$$

logo,

$$q = \mathbb{E}[Q] = \frac{0.10 + 0.17}{2} = 0.135$$

Em resumo, temos:

Reservas	Qualidade econômica da reserva
Bacia de Santos	11.5%
Bacias de Campos e Espírito Santo	13.5%

#### 4.1.2 Volume da reserva

Como vimos anteriormente, um dos maiores atrativos das reservas do Pré-Sal é o grande volume de petróleo existente em seus reservatórios.

Sendo  $\mathcal{B}$  uma variável aleatória com distribuição triangular, o volume da reserva será dado pelo valor esperado de  $\mathcal{B}$ .

Novamente, por conta de ausência de dados históricos, utilizamos uma distribuição pouco realista, porém, com a observação de que os valores do volume da reserva possuem um valor mais provável de ser assumido, foi possível utilizar a distribuição triangular ao invés da distribuição uniforme neste caso. O fato de  $\mathcal{B}$  ter distribuição triangular se justifica ainda pelo fato de que iremos considerar três valores possíveis para  $\mathcal{B}$ : o mínimo, o mais provável e o máximo. Os valores mínimo, mais provável e máximo foram obtidos com base nas estimativas da Petrobrás em reservas situadas nas bacias de Santos, Campos e Espírito Santo<sup>12</sup>. Estas estimativas mostram que a expectativa de maior volume de petróleo se dá na bacia de Santos. Temos, então, os seguintes valores:

- **Bacia de Santos:**

Volume mínimo	3 bilhões boe
Volume mais provável	5 bilhões boe
Volume máximo	8 bilhões boe

Daí temos,

$$\mathcal{B} \sim \text{Triang}(3, 5, 8)$$

<sup>12</sup>Tais estimativas constam em [RT], [Fomigli 2007] e [Fomigli 2008].

Com isso temos que

$$B = \mathbb{E}[\mathcal{B}] = \frac{3 + 5 + 8}{3} = 5.33$$

lembrando que a densidade de probabilidade de uma variável aleatória  $X \sim \text{Triang}(a, b, c)$  é dada por

$$f(X) = \begin{cases} \frac{2(X-a)}{(c-a)(b-a)}, & \text{se } a \leq X \leq b \\ \frac{2(c-X)}{(c-a)(c-b)}, & \text{se } b \leq X \leq c \\ 0, & \text{para os demais casos} \end{cases}$$

logo,

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} X f(X) dX = \underbrace{\int_a^b \frac{2(X-a)}{(c-a)(b-a)} X dX}_I + \underbrace{\int_b^c \frac{2(c-X)}{(c-a)(c-b)} X dX}_{II}.$$

Resolvendo  $I$  temos:

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{(c-a)(b-a)} \int_a^b X(X-a) dX \\ &= \frac{2}{(c-a)(b-a)} \int_a^b (X^2 - aX) dX \\ &= \frac{2}{(c-a)(b-a)} \left( \frac{X^3}{3} - a \frac{X^2}{2} \right) \Big|_a^b \\ &= \frac{2}{(c-a)(b-a)} \left[ \left( \frac{b^3}{3} - a \frac{b^2}{2} \right) - \left( \frac{a^3}{3} - a \frac{a^2}{2} \right) \right] \\ &= \frac{2}{(c-a)(b-a)} \left[ \left( \frac{b^3 - a^3}{3} \right) - a \left( \frac{b^2 - a^2}{2} \right) \right] \\ &= \frac{2}{3} \frac{(b-a)(b^2 + ab + a^2)}{(b-a)(c-a)} - \frac{a(b-a)(b+a)}{(b-a)(c-a)} \\ &= \frac{2(b^2 + ab + a^2)}{3(c-a)} - \frac{3a(b+a)}{3(c-a)} \\ &= \frac{(-a^2 - ab + 2b^2)}{3(c-a)}. \end{aligned}$$

Resolvendo  $II$  temos:

$$\begin{aligned}
II &= \frac{2}{(c-a)(c-b)} \int_b^c X(c-X)dX \\
&= \frac{2}{(c-a)(c-b)} \int_b^c (cX - X^2)dX \\
&= \frac{2}{(c-a)(c-b)} \left( c \frac{X^2}{2} - \frac{X^3}{3} \right) \Big|_b^c \\
&= \frac{2}{(c-a)(c-b)} \left[ \left( \frac{c^3}{2} - \frac{c^3}{3} \right) - \left( c \frac{b^2}{2} - \frac{b^3}{3} \right) \right] \\
&= \frac{2}{(c-a)(c-b)} \left[ \left( \frac{b^3 - c^3}{3} \right) - c \left( \frac{b^2 - c^2}{2} \right) \right] \\
&= -\frac{2}{3} \frac{(c-b)(b^2 + bc + c^2)}{(c-b)(c-a)} - \frac{c(c-b)(c+b)}{(c-b)(c-a)} \\
&= -\frac{2(b^2 + bc + c^2)}{3(c-a)} - \frac{3c(c+b)}{3(c-a)} \\
&= \frac{(c^2 + bc - 2b^2)}{3(c-a)}.
\end{aligned}$$

Fazendo  $I + II$  temos:

$$\begin{aligned}
E[X] &= \frac{(-a^2 - ab + 2b^2)}{3(c-a)} + \frac{(c^2 + bc - 2b^2)}{3(c-a)} \\
&= \frac{-a^2 - ab + 2b^2 - 2b^2 + c^2 + bc}{3(c-a)} \\
&= \frac{c^2 - a^2 + bc - ab}{3(c-a)} \\
&= \frac{(c-a)(c+a) + b(c-a)}{3(c-a)} \\
&= \frac{(c-a)(a+b+c)}{3(c-a)} \\
&= \frac{a+b+c}{3}
\end{aligned}$$

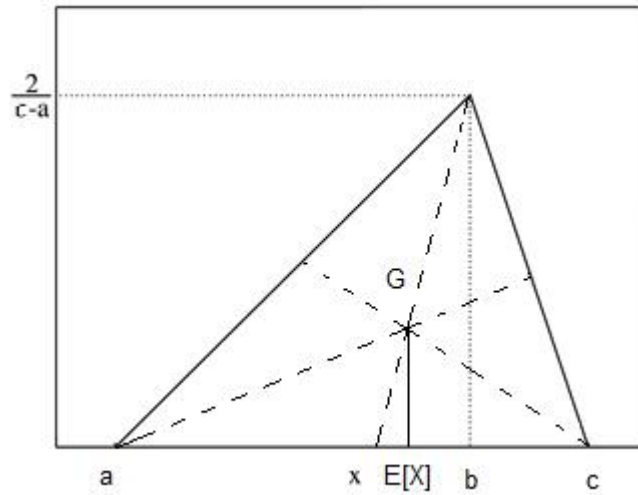


Figura 15: O valor esperado da variável aleatória com distribuição triangular é a abcissa do baricentro (centro de massa) do triângulo.

Na distribuição triangular, o valor de  $b$  (que neste caso foi visto como o volume mais provável) é a moda da distribuição, que para o caso das bacias de Santos, Campos e Espírito Santo foi obtido entre os valores que apareciam com mais frequência nas estimativas feitas para os campos de cada bacia.

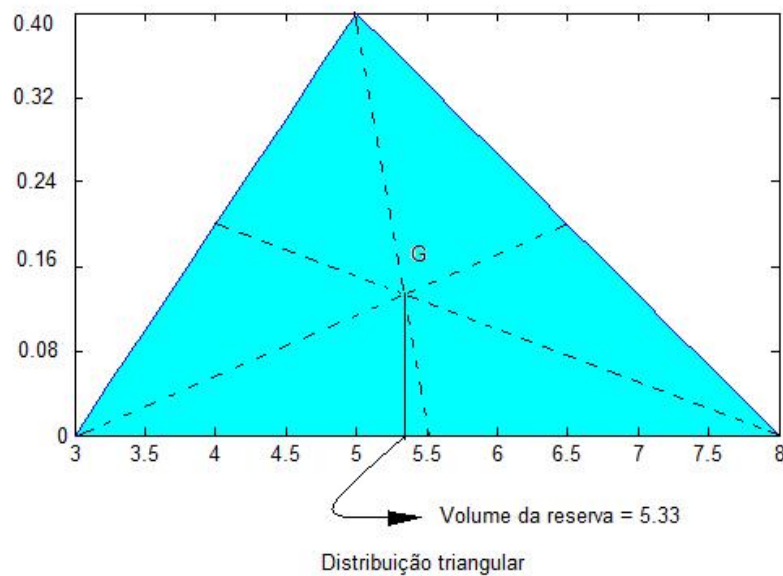


Figura 16: Volume de uma reserva localizada na Bacia de Santos

- **Bacias de Campos e Espírito Santo:**

Volume mínimo	2 bilhões boe
Volume mais provável	4 bilhões boe
Volume máximo	5 bilhões boe

Com isso, temos:

$$B \sim \text{Triang}(2, 4, 5)$$

Assim,

$$B = \mathbb{E}[B] = \frac{2 + 4 + 5}{3} = 3.67$$

Graficamente, temos:

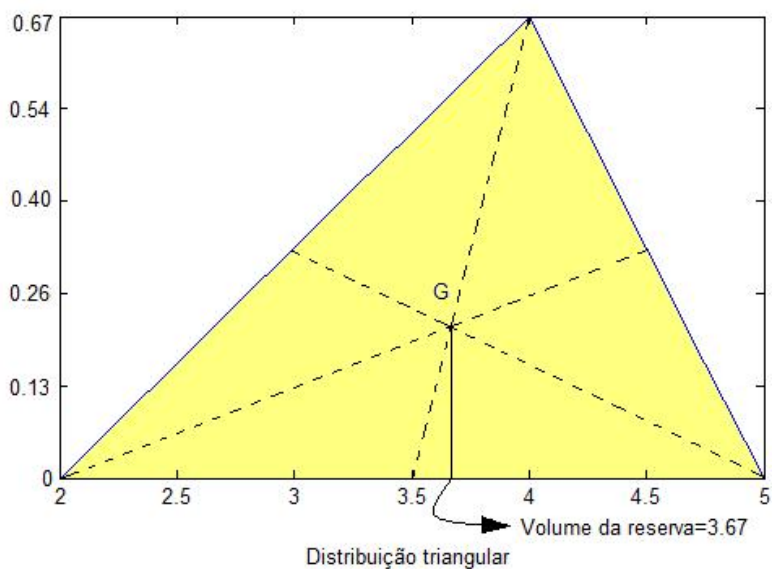


Figura 17: Volume de uma reserva localizada nas Bacias de Campos e Espírito Santo.

Em resumo, temos:

Reservas	Volume da reserva
Bacia de Santos	5.33 bilhões boe
Bacias de Campos e Espírito Santo	3.67 bilhões boe

### 4.1.3 Custos de desenvolvimento da reserva

Outro fator importante para a análise deste trabalho são os custos de desenvolvimento de uma reserva do Pré-Sal. Estes custos, como vimos ao longo desta dissertação, são muito elevados, devido à dificuldade de extração de óleo de um campo do Pré-Sal em razão de sua profundidade e da extensa camada de sal.

Estes custos podem ser divididos em custos fixos (como custo de pessoal e custos com tecnologia para perfuração das camadas de sal, por exemplo) e custos variáveis (como custos com produtos químicos e de transporte, por exemplo).

Um modelo comum para representação destes custos é uma função linear do volume da reserva.

Seja  $D$  o custo de desenvolvimento da reserva, temos então que:

$$D = D_{\text{fixo}} + D_{\text{variavel}}B$$

onde,  $D_{\text{fixo}}$  representa o custo fixo e  $D_{\text{variavel}}$  representa o custo variável (custo por barril de petróleo da reserva).

Para calcularmos a reta  $DXB$  vamos considerar novamente o modelo de negócios (“business model”). Neste modelo, vimos o VPL como função linear do preço do petróleo ( $P$ ). Porém, pela definição do modelo, fixando o valor de  $P$  e variando o volume da reserva ( $B$ ), o VPL também é função linear de  $B$ , pois

$$VPL = qPB - D$$

com isso,

$$\begin{aligned} VPL &= qPB - (D_{\text{fixo}} + D_{\text{variavel}}B) \\ &= -D_{\text{fixo}} + (qP - D_{\text{variavel}})B. \end{aligned}$$

Consideraremos para o ponto da reta onde o  $VPL = 0$  (conhecido como “break even”) o valor  $B = b$ , onde  $b$  é o volume mínimo da reserva (um dos parâmetros da distribuição de  $B$ , visto anteriormente), pois no Pré-Sal os custos fixos são bem superiores aos custos variáveis, logo podemos considerar que os custos fixos (independentes de  $B$ ) foram elaborados para desenvolver uma reserva do porte mínimo de  $b$ , não compensando seus gastos com uma reserva de volume inferior a  $b$ . Daí, temos que a reta  $VPLXB$  passa pelo ponto  $\{b,0\}$ . Com isso temos:

$$-D_{\text{fixo}} + (qP - D_{\text{variavel}})b = 0 \Rightarrow$$

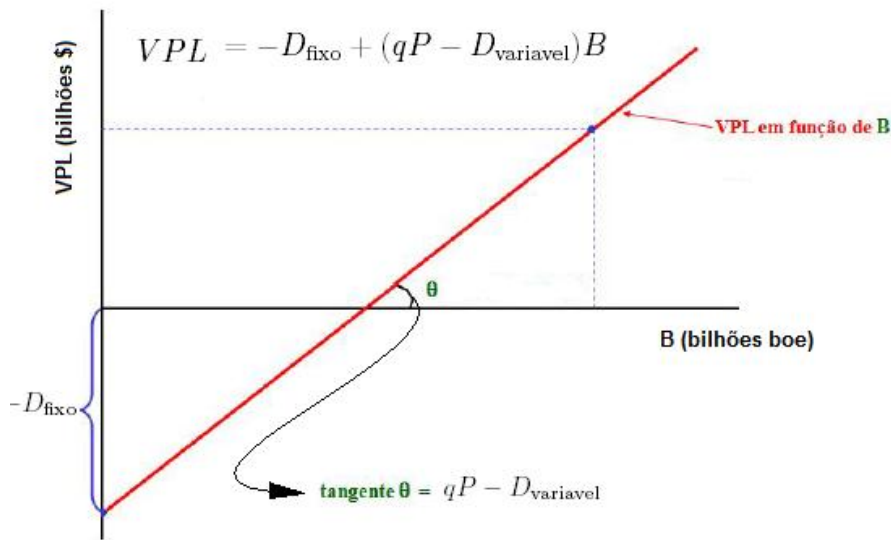


Figura 18: VPL em função de B: Adaptado de [Dias 2005]

$$D_{\text{fixo}} = bqP - bD_{\text{variavel}}$$

Para determinarmos os valores de  $D_{\text{fixo}}$  e  $D_{\text{variavel}}$ , necessitamos de mais um ponto, seja da reta  $VPLXB$  ou da reta  $DXB$ , visto que ambas estão relacionadas. Para tanto, vamos utilizar estimativas de custos existentes para campos específicos de cada bacia, como veremos a seguir:

- **Bacia de Santos:**

Com poços mais profundos, os custos das reservas da bacia de Santos são os maiores do Pré-Sal.

Uma de suas reservas mais importantes e com maior volume é a reserva de Tupi, conforme visto na seção 2, cujo volume da reserva é estimado em pelo menos 5 bilhões de boe. Segundo [RT], os custos para desenvolver Tupi, considerando um volume de 5 bilhões de boe, é estimado em US\$ 22 bilhões. Logo, para a bacia de Santos, consideraremos que a reta  $DXB$  passa pelo ponto  $\{5,22\}$ . Assim temos:

$$D_{\text{fixo}} + D_{\text{variavel}}5 = 22$$

Logo, temos o sistema:

$$\begin{cases} D_{\text{fixo}} = bqP - bD_{\text{variavel}} \\ D_{\text{fixo}} + D_{\text{variavel}}5 = 22 \end{cases}$$

Lembrando que, para a bacia de Santos, o volume mínimo da reserva é  $b = 3$  e a quali-



dade econômica da reserva é  $q = 0.115$ , conforme visto anteriormente. Para o valor de  $P$ , consideraremos o preço do petróleo no mercado à vista, que aqui será o preço mais atual da série histórica considerada neste trabalho, a saber,  $P = 57.08$  (na seção 4.3 identificaremos a série histórica considerada). Assim o sistema acima fica:

$$\begin{cases} D_{\text{fixo}} = 19.69 - 3D_{\text{variavel}} \\ D_{\text{fixo}} + D_{\text{variavel}}5 = 22 \end{cases}$$

Logo,  $D_{\text{fixo}} = 16.20$  e  $D_{\text{variavel}} = 1.16$ . Ainda,  $qP - D_{\text{variavel}} = 5.40$ , logo temos que o VPL é dado por:

$$VPL = -16.20 + 5.40B$$

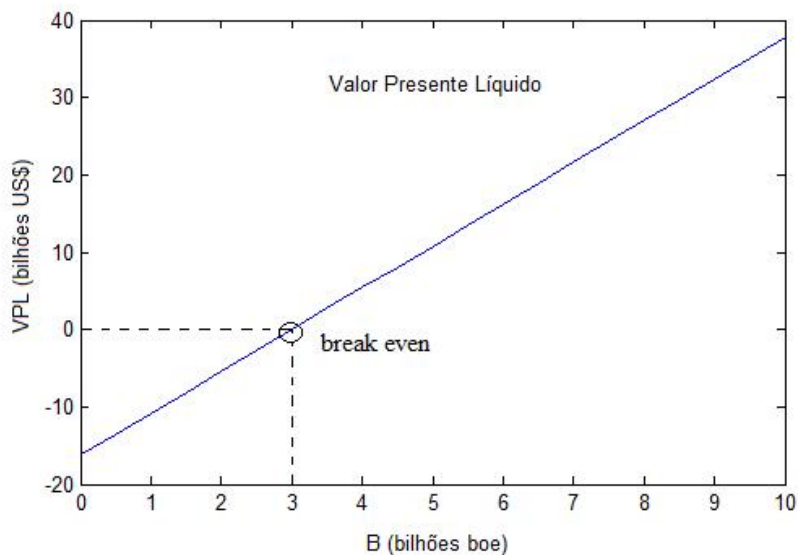


Figura 19: VPL em função do volume de uma reserva da Bacia de Santos.

E o custo de desenvolvimento da reserva ( $D$ ) é dado por:

$$D = 16.20 + 1.16B$$

Logo, substituindo na reta  $D \times B$  o valor de  $B$  obtido na subseção 4.1.2, a saber,  $B = 5.33$  bilhões de boe, obtemos o custo total de desenvolvimento de uma reserva na bacia de Santos, conforme abaixo:

$$D = 16.20 + (1.16)(5.33) = 16.20 + 6.18 = 22.38$$

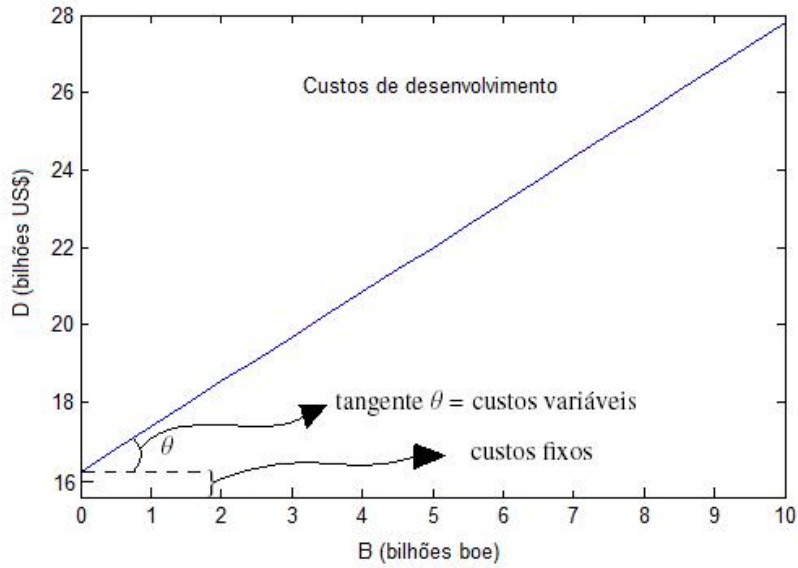


Figura 20: Custos de desenvolvimento de uma reserva da Bacia de Santos.

Portanto, temos no total US\$ 22.38 bilhões, sendo US\$16.20 bilhões de custos fixos e US\$6.18 bilhões de custos variáveis.

- **Bacias de Campos e Espírito Santo:**

Com poços mais rasos, o custos das reservas das bacias de Campos e Espírito Santo são menores que os das reservas da bacia de Santos.

Com base na estimativa de [RT], podemos supor que o custo para desenvolver uma reserva situada nestas bacias com volume de 5 bilhões de boe é da ordem de US\$18 bilhões. Logo, analogamente ao feito para a bacia de Santos, consideraremos para as bacias de Campos e Espírito Santo que a reta  $D \times B$  passa pelo ponto  $\{5,18\}$ . Assim temos:

$$D_{\text{fixo}} + D_{\text{variavel}}5 = 18$$

Logo, temos o sistema:

$$\begin{cases} D_{\text{fixo}} = bqP - bD_{\text{variavel}} \\ D_{\text{fixo}} + D_{\text{variavel}}5 = 18 \end{cases}$$

Lembrando que, para as bacias de Campos e Espírito Santo, o volume mínimo da reserva é  $b = 2$ , a qualidade econômica da reserva é  $q = 0.135$  e, conforme visto anteriormente,  $P = 57.08$ . Assim o sistema acima fica:

$$\begin{cases} D_{\text{fixo}} = 15.41 - 2D_{\text{variavel}} \\ D_{\text{fixo}} + D_{\text{variavel}}5 = 18 \end{cases}$$

Logo,  $D_{\text{fixo}} = 13.69$  e  $D_{\text{variavel}} = 0.86$ . Ainda,  $qP - D_{\text{variavel}} = 6.85$ , logo temos que o VPL é dado por:

$$VPL = -13.69 + 6.85B$$

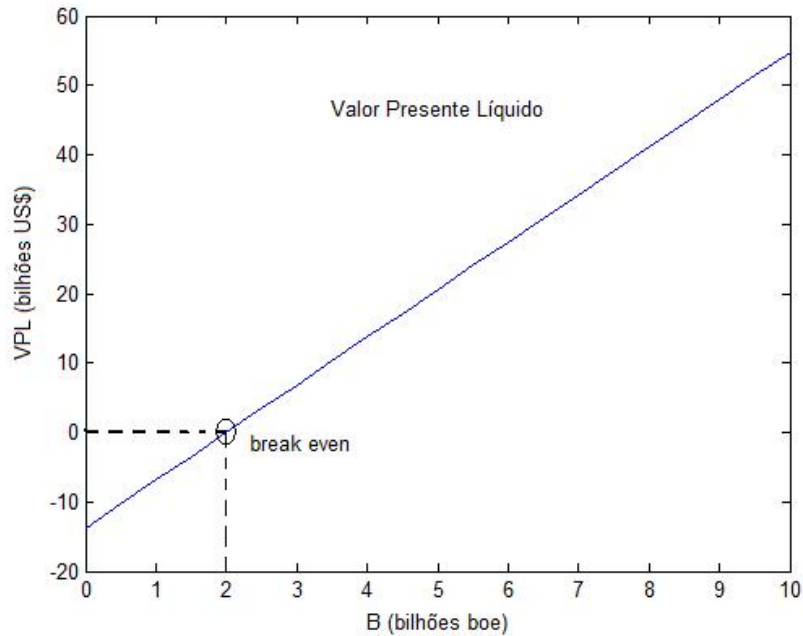


Figura 21: VPL em função do volume de uma reserva das Bacias de Campos e Espírito Santo.

E o custo de desenvolvimento da reserva ( $D$ ) é dado por:

$$D = 13.69 + 0.86B$$

Logo, substituindo na reta  $D \times B$  o valor de  $B$  obtido na subseção 4.1.2, a saber,  $B = 3.67$  bilhões de boe, obtemos o custo total de desenvolvimento de uma reserva nas bacias de Campos e Espírito Santo, conforme abaixo:

$$D = 13.69 + (0.86)(3.67) = 13.69 + 3.16 = 16.85$$

Portanto, temos no total US\$ 16.85 bilhões, sendo US\$13.69 bilhões de custos fixos e US\$3.16 bilhões de custos variáveis.

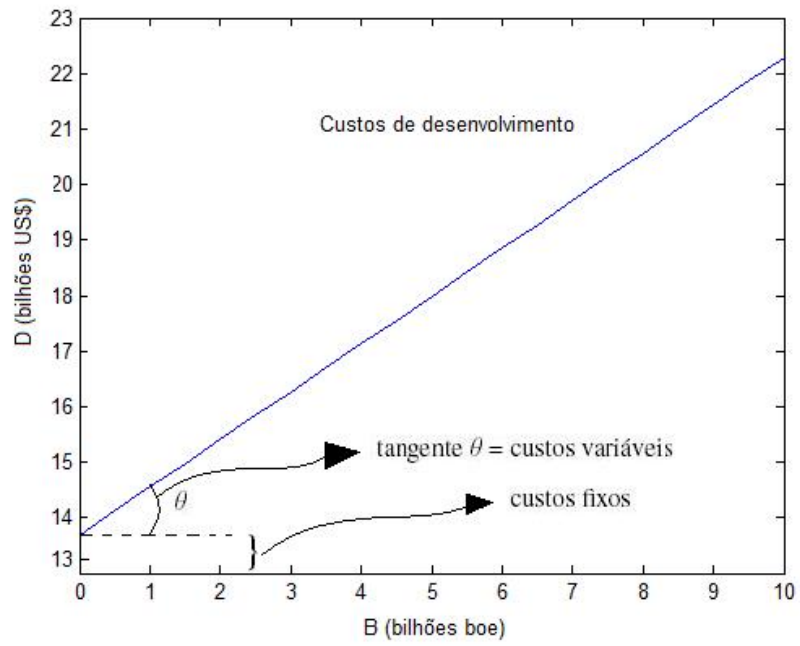


Figura 22: Custos de desenvolvimento de uma reserva das Bacias de Campos e Espírito Santo.

Em resumo, temos:

Reservas	Custos de desenvolvimento
Bacia de Santos	US\$22.38 bilhões
Bacias de Campos e Espírito Santo	US\$16.85 bilhões

## 4.2 Reversão à média em preços de petróleo

Como vimos anteriormente no modelo de Paddock & Siegel & Smith, foi utilizado o Movimento Geométrico Browniano para modelar o valor da reserva desenvolvida. No entanto, este é um modelo bastante questionado quando o ativo real é o petróleo (lembrando que o valor da reserva desenvolvida segue a mesma dinâmica dos preços do petróleo).

Muitos argumentam que os preços de petróleo, e, na verdade, dos *commodities* em geral, devem estar relacionados, no longo prazo, ao custo marginal da produção. Em outras palavras, não obstante os preços do óleo flutuarem aleatoriamente (devido ao stress de mercado, guerras ou à atual crise americana, por exemplo), no longo prazo, os preços tendem a retornar ao custo marginal de produção. Este fenômeno pode ser modelado por um processo de reversão à média.

Nesta seção, estudaremos o processo de Ornstein-Uhlenbeck, um processo de reversão à média bastante popular, utilizado por Vasicek em 1977 para modelar a dinâmica de taxas de juros.

Assumiremos que a dinâmica do valor do preço do petróleo, e com isso da reserva desenvolvida, é descrita pelo processo de Ornstein-Uhlenbeck. Este será o modelo de reversão à média adotado neste trabalho.

Primeiramente, vamos assumir que os logaritmos<sup>13</sup> dos valores da reserva desenvolvida seguem o seguinte processo de Ornstein-Uhlenbeck (similarmente ao feito em [Herkenhoff 2006]):

$$dZ(t) = \eta(\bar{Z} - Z(t))dt + \sigma dW(t) \quad (22)$$

onde,

$$Z(t) = \ln(V(t)),$$

$\eta$  é a velocidade de reversão à média,

$\bar{Z} = \ln(\bar{V})$ , onde  $\bar{V}$  é o nível "normal" de  $V$  (representa a média para onde  $V$  convergirá ao longo prazo).

Isso implica que  $V(t) = e^{Z(t)}$  e pelo Teorema 3.1, temos:

$$\begin{aligned} dV &= e^Z dZ + \frac{1}{2} e^Z dZ dZ \\ &= V[\eta(\bar{Z} - Z)dt + \sigma dW] + \frac{1}{2} V \sigma^2 dt \Rightarrow \end{aligned}$$

---

<sup>13</sup>O uso de  $Z(t) = \ln(V(t))$ , embora algumas vezes criticado, é utilizado por muitos autores, visto a maior facilidade não só da modelagem, como também da estimação dos parâmetros.

$$\begin{aligned}\frac{dV}{V} &= \left[ \eta[\ln(\bar{V}) - \ln(V)] + \frac{1}{2}\sigma^2 \right] dt + \sigma dW \\ &= \eta \left[ \ln(\bar{V}) + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\eta} - \ln(V) \right] dt + \sigma dW\end{aligned}$$

logo, temos que:

$$\boxed{\frac{dV}{V} = \eta(\lambda - \ln(V))dt + \sigma dW} \quad (23)$$

Onde,

$$\lambda = \ln(\bar{V}) + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\eta}.$$

De forma a obter a EDP que descreve o valor da reserva não-desenvolvida sob o modelo de reversão à média, vamos, a priori, obter a taxa de mudança esperada em  $V$ , conforme [Dixit&Pindyck] que é dada por:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{dt} E \left[ \frac{dV}{V} \right] \\ &= \frac{1}{dt} E[\eta[\lambda - \ln(V)]dt + \sigma dW] \\ &= \frac{1}{dt} \eta[\lambda - \ln(V)]dt + \frac{\sigma}{dt} \underbrace{E[dW]}_0 \\ &= \eta[\lambda - \ln(V)]\end{aligned}$$

Agora, vamos utilizar *Contingent Claims Analysis* para determinar a regra ótima de investimento e, assim, obter a EDP que nos dará o valor da reserva não-desenvolvida.

Conforme [Dixit&Pindyck], temos que:

$$\mu = \alpha + \delta$$

onde,  $\mu$  é a taxa de desconto ajustado ao risco que é dado pela soma de dois fatores: a taxa esperada de crescimento e a taxa de dividendos.

Como a taxa esperada de dividendos é dada em função de  $V$ , pois  $\alpha = \eta(\lambda - \ln(V))$ , então  $\delta$  também será dado em função de  $V$ , pelo que chamaremos de  $\delta(V)$ . Temos então:

$$\delta(V) = \mu - \alpha \Rightarrow$$

$$\delta(V) = \mu - \eta(\lambda - \ln(V))$$

Substituindo  $\delta$  por  $\delta(V)$  na equação (21) temos:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 X_{VV} + (r - \delta(V))V X_V - rX + X_t = 0$$

Com isso, obtemos a equação diferencial parcial que nos dá o valor da reserva não-desenvolvida, dada por:

$$\boxed{\frac{1}{2}\sigma^2V^2X_{VV} + (r - \mu + \eta(\lambda - \ln(V)))VX_V - rX + X_t = 0} \quad (24)$$

onde  $X(V, t)$  deve satisfazer às mesmas condições de contorno da equação (21), a saber:

- $X(0, t) = 0$ ;
- $X(V, T) = (V(T) - D)^+$ , onde  $D$  é o custo de desenvolvimento da reserva (preço de exercício);
- $X(V^*, t) = V^* - D$ , onde  $V^*$  representa a curva de gatilho do investimento;
- $X_V(V^*, t) = 1$ .

Na subseção 4.1.1, vimos que o  $VPL$  é definido por  $VPL = qBP - D$ , ou seja  $VPL = V - D$  (ver [Dias 2005]).

Com isso, no instante  $T$ , temos que  $VPL(T) = V(T) - D$ . Portanto, a terceira condição de contorno pode ser escrita como:

$$X(V, T) = (VPL(T))^+$$

Daí a importância da modelagem do  $VPL$ . A metodologia para estimação dos parâmetros da equação (24) será vista na subseção 4.3 a seguir.

### 4.3 Estimação dos parâmetros do processo de Ornstein-Uhlenbeck

Estamos agora interessados em estimar os parâmetros da dinâmica do valor da reserva desenvolvida descrita pela equação (23), dada por:

$$\frac{dV}{V} = \eta(\lambda - \ln(V))dt + \sigma dW$$

Por simplicidade, vamos estimar os parâmetros da dinâmica dos logaritmos dos valores da reserva descrita pela equação (22), dada por:

$$dZ(t) = \eta(\bar{Z} - Z(t))dt + \sigma dW(t)$$

Então, obtendo as estimativas de  $\eta$ ,  $\bar{Z}$ , e  $\sigma$  (que são constantes), teremos automaticamente a estimativa de  $\lambda$ , pois, como visto anteriormente,  $\lambda = \bar{Z} + \frac{\sigma^2}{2\eta}$ . Ainda,  $\eta$  e  $\sigma$  são os mesmos para ambas as equações (22) e (23).

Primeiramente vamos resolver a equação (22). Tomando  $e^{\eta s}$  como fator integrante, seu diferencial é dado por:

$$de^{\eta s} = \eta e^{\eta s} ds + 0dW(s)$$

Aplicando o Teorema 3.2 temos:

$$\begin{aligned} d(e^{\eta s} Z(s)) &= de^{\eta s} Z(s) + e^{\eta s} dZ(s) + de^{\eta s} dZ(s) \\ &= Z(s)\eta e^{\eta s} ds + e^{\eta s}[\eta(\bar{Z} - Z(s))ds + \sigma dW(s)] \\ &= Z(s)\eta e^{\eta s} ds + e^{\eta s}\eta(\bar{Z} - Z(s))ds + e^{\eta s}\sigma dW(s) \\ &= Z(s)\eta e^{\eta s} ds + e^{\eta s}\eta\bar{Z}ds - e^{\eta s}\eta Z(s)ds + e^{\eta s}\sigma dW(s) \\ &= e^{\eta s}\eta\bar{Z}ds + e^{\eta s}\sigma dW(s) \end{aligned}$$

Integrando ambas as partes de 0 a  $t$  temos:

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_0^t d(e^{\eta s} Z(s))}_{\phantom{=}} &= \underbrace{\int_0^t e^{\eta s}\eta\bar{Z}ds}_{\phantom{=}} + \int_0^t e^{\eta s}\sigma dW(s) \Rightarrow \\ e^{\eta t} Z(s)\Big|_0^t &= \eta\bar{Z}\frac{e^{\eta s}}{\eta}\Big|_0^t + \int_0^t e^{\eta s}\sigma dW(s) \Rightarrow \\ e^{\eta t} Z(t) - Z(0) &= \bar{Z}(e^{\eta t} - 1) + \sigma \int_0^t e^{\eta s} dW(s) \Rightarrow \\ e^{\eta t} Z(t) &= Z(0) + \bar{Z}(e^{\eta t} - 1) + \sigma \int_0^t e^{\eta s} dW(s) \end{aligned}$$



dividindo ambos os lados por  $e^{\eta t}$  obtemos a solução da equação (22), dada por:

$$Z(t) = e^{-\eta t} Z(0) + \bar{Z}(1 - e^{-\eta t}) + \sigma e^{-\eta t} \int_0^t e^{\eta s} dW(s) \quad (25)$$

Logo temos,

$$\begin{aligned} E[Z(t)] &= E \left[ e^{-\eta t} Z(0) + \bar{Z}(1 - e^{-\eta t}) + \sigma e^{-\eta t} \int_0^t e^{\eta s} dW(s) \right] \\ &= E \left[ e^{-\eta t} Z(0) + \bar{Z}(1 - e^{-\eta t}) \right] + E \left[ \sigma e^{-\eta t} \int_0^t e^{\eta s} dW(s) \right] \end{aligned}$$

Como  $E \left[ \sigma e^{-\eta t} \int_0^t e^{\eta s} dW(s) \right] = 0$ , pois a integral estocástica tem média zero (pela Proposição 3.2) e  $e^{-\eta t} Z(0) + \bar{Z}(1 - e^{-\eta t})$  é constante, temos que:

$$E[Z(t)] = e^{-\eta t} Z(0) + \bar{Z}(1 - e^{-\eta t}) \quad (26)$$

Ainda,

$$E^2[Z(t)] = e^{-2\eta t} Z^2(0) + \bar{Z}^2(1 - e^{-\eta t})^2 + 2(e^{-\eta t} Z(0)\bar{Z}(1 - e^{-\eta t}))$$

Temos também,

$$\begin{aligned} E[Z^2(t)] &= E \left[ e^{-2\eta t} Z^2(0) + \bar{Z}^2(1 - e^{-\eta t})^2 + \sigma^2 e^{-2\eta t} \left[ \int_0^t e^{\eta s} dW(s) \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. 2 \left[ e^{-\eta t} Z(0)\bar{Z}(1 - e^{-\eta t}) + e^{-\eta t} Z(0)\sigma e^{-\eta t} \int_0^t e^{\eta s} dW(s) + \bar{Z}(1 - e^{-\eta t})\sigma^2 e^{-2\eta t} \int_0^t e^{\eta s} dW(s) \right] \right] \end{aligned}$$

Pela Isometria de Itô (Proposição 3.2), temos que

$$\left[ \int_0^t e^{\eta s} dW(s) \right]^2 = \int_0^t [e^{\eta s}]^2 ds = \int_0^t e^{2\eta s} ds = \frac{1}{2\eta} (e^{2\eta t} - 1)$$

ainda, como pela Proposição 3.2 a integral estocástica tem média zero e como os demais termos são constantes temos:

$$E[Z^2(t)] = e^{-2\eta t} Z^2(0) + \bar{Z}^2(1 - e^{-\eta t})^2 + \sigma^2 e^{-2\eta t} \frac{1}{2\eta} (e^{2\eta t} - 1) + 2(e^{-\eta t} Z(0)\bar{Z}(1 - e^{-\eta t}))$$

Com isso temos que,

$$\begin{aligned} Var[Z(t)] &= E^2[Z(t)] - E[Z(t)]^2 \\ &= \sigma^2 e^{-2\eta t} \frac{1}{2\eta} (e^{2\eta t} - 1) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\text{Var}[Z(t)] = \frac{\sigma^2}{2\eta}(1 - e^{-2\eta t}) \quad (27)$$

Com isso, segue que  $Z(t)$  tem distribuição normal com média e variância definidos pelas equações (26) e (27), isto é,  $Z(t) \sim N(e^{-\eta t}Z(0) + \bar{Z}(1 - e^{-\eta t}), \frac{\sigma^2}{2\eta}(1 - e^{-2\eta t}))$ .

**Definição 4.1 (Ruído Branco)** *Uma série temporal  $\epsilon_t$  é chamada de ruído branco se  $\{\epsilon_t\}$  é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média e variância finitas.*

**Definição 4.2 (Ruído Branco Gaussiano)** *Uma série temporal  $\epsilon_t$  é chamada de ruído branco gaussiano se  $\epsilon_t$  é um ruído branco normalmente distribuído com média zero e variância  $\sigma_\epsilon^2$ .*

**Definição 4.3 (Modelo Auto-Regressivo de primeira ordem - AR(1))** *Um modelo auto-regressivo de primeira ordem - AR(1) é uma série temporal  $\Gamma(t)$  descrita pela seguinte dinâmica:*

$$\Gamma(t) = \phi_0 + \phi_1\Gamma(t-1) + \epsilon_t$$

Onde  $\phi_0$  e  $\phi_1$  são constantes e  $\epsilon_t$  é um ruído branco.

**Proposição 4.2** *O processo de Ornstein-Uhlenbeck  $Z(t)$  definido pela equação (25) é uma versão contínua do processo Auto-Regressivo de primeira ordem, AR(1) em tempo discreto, da forma*

$$Z(t) = a + bZ(t-1) + \epsilon_t$$

com  $a = \bar{Z}(1 - e^{-\eta})$ ,  $b = e^{-\eta}$  e  $\epsilon_t$  é um ruído branco gaussiano.

*Demonstração:*

Dado  $Z(t)$  definido pela equação (25), temos que em  $t-1$ :

$$Z(t-1) = e^{-\eta(t-1)}Z(0) + \bar{Z}(1 - e^{-\eta(t-1)}) + \sigma e^{-\eta(t-1)} \int_0^{t-1} e^{\eta s} dW(s)$$

logo,

$$e^{-\eta}Z(t-1) = e^{-\eta t}Z(0) + \bar{Z}(e^{-\eta} - e^{-\eta t}) + \sigma e^{-\eta t} \int_0^{t-1} e^{\eta s} dW(s)$$

Fazendo  $Z(t) - e^{-\eta}Z(t-1)$  temos:

$$Z(t) - e^{-\eta}Z(t-1) = \bar{Z}(1 - e^{-\eta}) + \sigma e^{-\eta t} \int_{t-1}^t e^{\eta s} dW(s) \Rightarrow$$

$$Z(t) - e^{-\eta}Z(t-1) = \bar{Z}(1 - e^{-\eta}) + \epsilon_t$$

onde,  $\epsilon_t \sim N(0, \sigma_\epsilon^2)$ , tal que:

Como  $\epsilon_t$  tem média zero, segue que  $\sigma_\epsilon^2 = E[\epsilon_t^2]$ .

Ainda, como  $\epsilon_t = \sigma e^{-\eta t} \int_{t-1}^t e^{\eta s} dW(s)$ , por definição, temos que:

$$\begin{aligned}\sigma_\epsilon^2 &= E \left[ \left( \sigma e^{-\eta t} \int_{t-1}^t e^{\eta s} dW(s) \right)^2 \right] \\ &= E \left[ \sigma^2 e^{-2\eta t} \left( \int_{t-1}^t e^{\eta s} dW(s) \right)^2 \right]\end{aligned}$$

pela isometria de Itô (Proposição 3.2) temos:

$$\begin{aligned}\sigma_\epsilon^2 &= E \left[ \sigma^2 e^{-2\eta t} \int_{t-1}^t (e^{\eta s})^2 ds \right] \\ &= E \left[ \sigma^2 e^{-2\eta t} \int_{t-1}^t e^{2\eta s} ds \right] \\ &= \sigma^2 e^{-2\eta t} \left( \frac{e^{2\eta s}}{2\eta} \Big|_{t-1}^t \right) \\ &= \sigma^2 \frac{e^{-2\eta t}}{2\eta} (e^{2\eta t} - e^{2\eta(t-1)}) \Rightarrow \\ \sigma_\epsilon^2 &= \frac{\sigma^2}{2\eta} (1 - e^{-2\eta})\end{aligned}\tag{28}$$

logo,  $\epsilon_t \sim N(0, \frac{\sigma^2}{2\eta}(1 - e^{-2\eta}))$ .

Com isso, temos:

$$Z(t) = \bar{Z}(1 - e^{-\eta}) + e^{-\eta}Z(t-1) + \epsilon_t$$

portanto, temos  $Z(t)$  é uma representação contínua<sup>14</sup> de um  $AR(1)$  da forma

$$Z(t) = a + bZ(t-1) + \epsilon_t$$

com  $a = \bar{Z}(1 - e^{-\eta})$ ,  $b = e^{-\eta}$  e  $\epsilon_t$  um ruído branco gaussiano . □

Da Proposição 4.2, temos que

$$b = e^{-\eta} \Rightarrow \boxed{\eta = -\ln(b)}, b \neq 1 \text{ e } b > 0\tag{29}$$

---

<sup>14</sup>Tal metodologia de comparação entre o processo de Ornstein-Uhlenbeck e o  $AR(1)$ , bem como a relação entre a forma contínua e a discreta, podem ser vistas em maiores detalhes em [Dixit & Pindyck].

temos também

$$a = \bar{Z}(1 - e^{-\eta}) \Rightarrow \boxed{\bar{Z} = \frac{a}{1-b}} \quad (30)$$

ainda, pela equação (28) vimos que

$$\begin{aligned} \sigma_\epsilon^2 &= \frac{\sigma^2}{2\eta}(1 - e^{-2\eta}) \Rightarrow \\ \sigma^2 &= \frac{2\eta\sigma_\epsilon^2}{1 - e^{-2\eta}} \\ &= \frac{-2\ln(b)}{1 - b^2}\sigma_\epsilon^2 \\ &= \frac{2\ln(b)}{b^2 - 1}\sigma_\epsilon^2 \Rightarrow \\ \boxed{\sigma} &= \sigma_\epsilon \sqrt{\frac{2\ln(b)}{b^2 - 1}} \end{aligned} \quad (31)$$

por fim, temos que

$$\begin{aligned} \lambda &= \bar{Z} + \frac{\sigma^2}{2\eta} \Rightarrow \\ \boxed{\lambda} &= \frac{a}{1-b} + \frac{\sigma_\epsilon^2 \left( \frac{2\ln(b)}{b^2 - 1} \right)}{-2\ln(b)} \end{aligned} \quad (32)$$

Com isso, vimos que necessitamos apenas obter os parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $\sigma_\epsilon^2$  do modelo  $AR(1)$ , conforme Proposição 4.2, de forma a obtermos os parâmetros da EDP (equação (24)).

A taxa esperada de desconto ajustada ao risco ( $\mu$ ) é dada pela expectativa com relação ao retorno do ativo, que, no caso, será dado pela média dos logaritmos dos valores da reserva.

Conforme visto até aqui, os parâmetros a serem estimados se referem ao processo de Ornstein-Uhlenbeck, utilizado para a dinâmica do valor da reserva não-desenvolvida (equação (23)). Porém vimos que sua dinâmica é a mesma que a dos preços do petróleo, logo podemos utilizar sua série histórica para ajustar um modelo  $AR(1)$  e estimar os parâmetros.

Para o problema em questão, consideraremos a série histórica de preços do petróleo no período de 20/05/1987 a 10/11/2008. A figura 23 mostra a evolução dos preços com o passar do tempo.

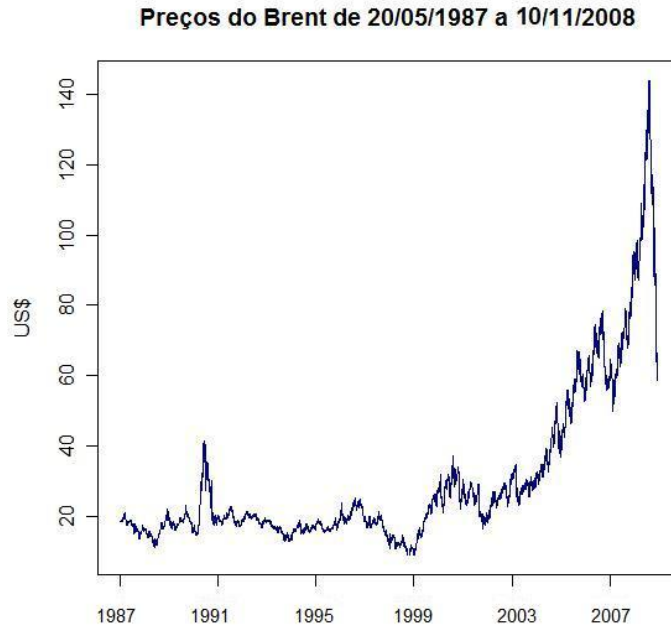


Figura 23: Evolução dos preços do barril de petróleo.

Considerando o modelo de reversão à média para os logaritmos dos preços do petróleo e, consequentemente, o modelo  $AR(1)$ , ajustamos o modelo através do pacote R2.6.2, conforme *outputs* abaixo:

```

Model: ARIMA(1,0,0) with method: CSS-ML
Coefficient(s):
      ar1  intercept
      0.9993    3.2314
Residuals:
      Min       1Q   Median       3Q      Max
-0.361090 -0.011430  0.000406  0.012474  0.188064
Moments:
Skewness Kurtosis
  -0.8134  16.7221
Coefficient(s):
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
ar1      0.9993055   0.0005659 1765.844 <2e-16 ***
intercept 3.2313767   0.03854967   8.382 <2e-16 ***
---
sigma^2 estimated as: 0.0005697

```

log likelihood: 12641.14  
 AIC Criterion: -25276.28

Lembrando que o modelo  $AR(1)$  do pacote R2.6.2 segue a seguinte dinâmica:

$$(x[t] - m) = a[1](x[t - 1] - m) + e(t)$$

onde  $m = intercept$  e  $a[1] = ar1 = b$ , de modo que  $a = m(1 - a[1])$ , Assim, obtivemos os seguintes resultados:

Parâmetros	Estimativas
$\sigma_\epsilon^2$	0.0006
$a$	0.0023
$b$	0.9993

Substituindo os resultados da tabela acima nas equações (29), (30) e (31) obtemos:

Parâmetros	Estimativas
$\eta$	0.0007
$\sigma^2$	0.0006
$\bar{Z}$	3.2857

Como a série histórica utilizada para estimação dos parâmetros  $\sigma$  e  $\eta$  considerou os preços diários o Brent, a fim de obtermos parâmetros anuais, é necessário multiplicá-los por 360<sup>15</sup>. Obtemos assim os valores de:

Parâmetros	Estimativas
$\eta$	25.20% <i>a.a.</i>
$\sigma^2$	21.60% <i>a.a.</i>

Os parâmetros calculados mostram uma baixa velocidade de reversão à média ( $\eta$ ) caracterizando uma reversão lenta à média.

Agora que já possuímos os parâmetros da equação diferencial (24), que nos dá o valor da reserva não-desenvolvida, veremos a seguir, na subseção 5, como resolver esta EDP por métodos numéricos.

---

<sup>15</sup>No mercado financeiro, é considerado o ano comercial de 360 dias

## 5 Métodos numéricos

### 5.1 Método de Diferenças Finitas - Crank-Nicholson

Para resolver a equação diferencial parcial (24), vamos utilizar métodos numéricos denominados de Métodos de Diferenças Finitas.

Estes métodos se baseiam na aproximação das derivadas das equações as quais estamos interessados em resolver por simples diferenças finitas.

Existem vários tipos de métodos que podem ser utilizados para a resolução do problema proposto, dentre os quais destacamos:

- Método Explícito;
- Método Implícito;
- Método de Crank-Nicholson.

O Método Explícito é um método bastante eficiente para a solução de equações diferenciais, porém apresenta problemas de estabilidade para determinadas discretizações, conforme [Ntwiga 2005]. Já o Método Implícito resolve o problema da estabilidade, porém apresenta uma convergência lenta por ter de resolver sistemas lineares em cada passo da discretização do tempo. O terceiro método, de Crank-Nicholson, embora também seja um método implícito, resolve tanto o problema de estabilidade quanto o da velocidade de convergência, e este será o método utilizado neste trabalho.

O Método de Crank-Nicholson é a média entre o Método Explícito e o Implícito (preservando características do Método Implícito) e possui o seguinte esquema de aproximações da função derivada, conforme [Brandimarte 2002].

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{X_{i,j} - X_{i-1,j}}{\Delta t}$$
$$\frac{\partial X}{\partial V} = \frac{1}{2} \left( \frac{X_{i-1,j+1} - X_{i-1,j-1}}{2\Delta V} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{X_{i,j+1} - X_{i,j-1}}{2\Delta V} \right)$$
$$\frac{\partial^2 X}{\partial V^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{X_{i-1,j+1} - 2X_{i-1,j} + X_{i-1,j-1}}{(\Delta V)^2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{X_{i,j+1} - 2X_{i,j} + X_{i,j-1}}{(\Delta V)^2} \right)$$
$$X = \frac{1}{2}(X_{i-1,j} + X_{i,j})$$

onde  $V = j\Delta V$  e  $t = i\Delta t$

A discretização da função  $\delta(V)$  é dada por:

$$\delta(V) = \delta(j\Delta V) = \delta_j$$

Substituindo na equação diferencial em questão temos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\sigma^2 V^2 X_{VV} + (r - \delta(V))V X_V - rX + X_t = 0 \\ & \frac{\sigma^2(j\Delta V)^2}{4} \left( \frac{X_{i-1,j+1} - 2X_{i-1,j} + X_{i-1,j-1}}{(\Delta V)^2} \right) + \frac{\sigma^2(j\Delta V)^2}{4} \left( \frac{X_{i,j+1} - 2X_{i,j} + X_{i,j-1}}{(\Delta V)^2} \right) + \\ & + \frac{(r - \delta_j)}{2} j\Delta V \left( \frac{X_{i-1,j+1} - X_{i-1,j-1}}{2\Delta V} \right) + \frac{(r - \delta_j)}{2} j\Delta V \left( \frac{X_{i,j+1} - X_{i,j-1}}{2\Delta V} \right) + \frac{X_{i,j} - X_{i-1,j}}{\Delta t} \\ & - r\frac{1}{2}(X_{i-1,j} + X_{i,j}) = 0 \end{aligned}$$

reescrevendo a equação acima temos:

$$-\alpha_j X_{i-1,j-1} + (1 - \beta_j) X_{i-1,j} - \gamma_j X_{i-1,j+1} = \alpha_j X_{i,j-1} + (1 + \beta_j) X_{i,j} + \gamma_j X_{i,j+1}$$

onde,

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \frac{\Delta t}{4} (\sigma^2 j^2 - (r - \delta_j) j) \\ \beta_j &= -\frac{\Delta t}{2} (\sigma^2 j^2 + r) \\ \gamma_j &= \frac{\Delta t}{4} (\sigma^2 j^2 + (r - \delta_j) j) \end{aligned}$$

Considerando ainda as condições de contorno dadas por  $X(0, t) = 0$  e  $X(V_{max}, t) = X_M$ , podemos reescrever a equação anterior na forma matricial dada por:

$$A_1 \vec{X}_{i-1} = A_2 \vec{X}_i + \vec{X}_{contorno} \quad (33)$$

onde,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 - \beta_1 & -\gamma_1 & & & \\ -\alpha_2 & 1 - \beta_2 & -\gamma_2 & & \\ & -\alpha_3 & 1 - \beta_3 & -\gamma_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -\alpha_{M-2} & 1 - \beta_{M-2} & -\gamma_{M-2} \\ & & & & -\alpha_{M-1} & 1 - \beta_{M-1} \end{bmatrix}$$



$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 + \beta_1 & \gamma_1 & & & & & \\ & \alpha_2 & 1 + \beta_2 & \gamma_2 & & & \\ & & \alpha_3 & 1 + \beta_3 & \gamma_3 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \alpha_{M-2} & 1 + \beta_{M-2} & \gamma_{M-2} \\ & & & & & \alpha_{M-1} & 1 + \beta_{M-1} \end{bmatrix}$$

$$\vec{X}_i = \left[ X_{i,1} \quad X_{i,2} \quad \dots \quad X_{i,M-1} \right]^T$$

$$\vec{X}_{contorno} = \left[ 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad \gamma_{M-1}(X_{i,M} + X_{i-1,M}) \right]^T$$

O sistema dado pela equação (33) pode ser resolvido por métodos diretos ou iterativos. Como a equação diferencial parcial a ser resolvida possui contorno livre e a matriz  $A_1$  é tridiagonal, adotou-se o método SOR pela flexibilidade e velocidade de convergência. Note que este método iterativo preserva a esparsidade da matriz  $A_1$ . O método será descrito na subseção 5.2 a seguir.

## 5.2 Método SOR

O método SOR - *Successive Over Relaxation* é um método iterativo para resolução de sistemas de equações lineares. Este método é um melhoramento do método de Gauss - Seidel, que por sua vez é um melhoramento do método de Jacobi. Considere o seguinte sistema de equações:

$$Ax = b,$$

$$\text{onde } A = [a_{i,j}]_{N \times N}, x = [x_i]_{N \times 1} \text{ e } b = [b_i]_{N \times 1}.$$

O método SOR consiste em aplicar o seguinte processo iterativo para resolver o sistema acima:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{w}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^N a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

até que seja atingido um critério de convergência tal como  $\|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\| < \epsilon$ . No processo em questão,  $k$  é a iteração,  $\epsilon$  é a tolerância a ser adotada no problema e  $w$  é a constante de relaxação (parâmetro de *over relaxation*).

A escolha do parâmetro  $w$  deve ser feita de forma apropriada para se reduzir o raio espectral da matriz de iteração e acelerar a taxa convergência para a solução do sistema. Para escolhas

de  $w \in (1, 2)$ , teremos a situação de *over relaxation*. Para  $w \in (0, 1)$ , teremos a situação de *under relaxation*. Para  $w = 1$ , o método SOR se reduz ao método de Gauss-Seidel.

Para resolvermos a equação (33) pelo método SOR, temos o seguinte:

$$A_1 \vec{X}_{i-1} = A_2 \vec{X}_i + \vec{X}_{contorno} \Rightarrow A_1 \vec{X}_{i-1} = R_i, \text{ onde } R_i = [r_{ij}]_{N \times 1} = A_2 \vec{X}_i + \vec{X}_{contorno}$$

Como a matriz  $A_1$  é tridiagonal, utilizamos o seguinte algoritmo que tira proveito dessa esparsidade (conforme [Brandimarte 2002]). Para cada passo da discretização, teremos:

$$\begin{aligned} X_{i1}^{(k+1)} &= X_{i1}^{(k)} + \frac{w}{1 - \beta_1} \left[ r_{i1} - (1 - \beta_1)X_{i1}^{(k)} + \gamma_1 X_{i2}^{(k)} \right] \\ X_{i2}^{(k+1)} &= X_{i2}^{(k)} + \frac{w}{1 - \beta_2} \left[ r_{i2} + \alpha_2 X_{i1}^{(k+1)} - (1 - \beta_2)X_{i2}^{(k)} + \gamma_2 X_{i3}^{(k)} \right] \\ &\vdots \\ X_{i,M-1}^{(k+1)} &= X_{i,M-1}^{(k)} + \frac{w}{1 - \beta_{M-1}} \left[ r_{i,M-1} + \alpha_{M-1} X_{i,M-2}^{(k+1)} - (1 - \beta_{M-1})X_{i,M-1}^{(k)} \right] \end{aligned}$$

O processo iterativo acima resolve problemas de contorno fixo. A EDP para precificação da reserva não-desenvolvida possui, no entanto, um contorno livre. Esse contorno corresponde a procura do tempo ótimo de exercício da opção. Conforme visto anteriormente, temos que:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 V^2 X_{VV} + (r - \delta(V)) V X_V - rX + X_t = 0$$

Com condições de contorno dadas por:

- $X(0, t) = 0$ ;
- $X(V, T) = (VPL(T))^+$ ;
- $X(V^*, t) = V^* - D$ ;
- $X_V(V^*, t) = 1$ .

Esse problema se torna um problema de Complementaridade Linear (análogo ao visto na subseção 3.3.2) dado por:

$$\left( \frac{1}{2} \sigma^2 V^2 X_{VV} + (r - \delta(V)) V X_V - rX + X_t \right) (X(V^*, t) - (V^* - D)) (X_V(V^*, t) - 1) = 0$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{2} \sigma^2 V^2 X_{VV} + (r - \delta(V)) V X_V - rX + X_t \right) &\geq 0, \\ (X(V^*, t) - (V^* - D)) &\geq 0 \quad \text{e} \quad (X_V(V^*, t) - 1) \geq 0 \end{aligned}$$

Com condições finais e de contorno dadas por:

$$X(0, t) = 0 \quad \text{e} \quad X(V, T) = (VPL(T))^+$$

De acordo com [Wilmott 1995] e [Brandimarte 2002], podemos resolver esse Problema de Complementaridade Linear utilizando o método SOR, considerando as seguintes modificações<sup>16</sup> no esquema iterativo (analogamente ao feito em [Herkenhoff 2006]).

$$\begin{aligned} X_{i1}^{(k+1)} &= \max \left( V_1 - D, X_{i1}^{(k)} + \frac{w}{1 - \beta_1} \left[ r_{i1} - (1 - \beta_1)X_{i1}^{(k)} + \gamma_1 X_{i2}^{(k)} \right] \right) \\ X_{i2}^{(k+1)} &= \max \left( V_2 - D, X_{i2}^{(k)} + \frac{w}{1 - \beta_2} \left[ r_{i2} + \alpha_2 X_{i1}^{(k+1)} - (1 - \beta_2)X_{i2}^{(k)} + \gamma_2 X_{i3}^{(k)} \right] \right) \\ &\vdots \\ X_{i, M-1}^{(k+1)} &= \max \left( V_{M-1} - D, X_{i, M-1}^{(k)} + \frac{w}{1 - \beta_{M-1}} \left[ r_{i, M-1} + \alpha_{M-1} X_{i, M-2}^{(k+1)} - (1 - \beta_{M-1})X_{i, M-1}^{(k)} \right] \right) \end{aligned}$$

Na seção seguinte, veremos os resultados da aplicação dos métodos numéricos vistos nesta seção para a resolução da equação diferencial parcial (24), que nos dará o valor da reserva não-desenvolvida.

---

<sup>16</sup>Tais modificações caracterizam o chamado método SOR - Projetado.

## 6 Resultados

Nesta seção, vamos calcular os preços justos para concessão de blocos nas reservas situadas nas bacias de Santos, Campos e Espírito Santo (valor da reserva não-desenvolvida) a partir dos métodos e parâmetros calculados nas seções anteriores.

Na seção 4.3, vimos que

$\eta$	25.20% <i>a.a.</i>
$\sigma^2$	21.60% <i>a.a.</i>

e que:

$\bar{Z}$	3.2857
-----------	--------

Além disso, assumimos os seguintes parâmetros:

Taxa de juros livre de risco	3.47% <i>a.a.</i>
Tempo máximo de concessão da reserva	27 anos

A taxa de juros livre de risco considerada foi a taxa média do Tesouro Americano durante os meses de setembro/2008 e novembro/2008 (período de maior impacto pela crise econômica mundial)<sup>17</sup>.

O tempo de concessão da reserva considerado foi o prazo estipulado pela Agência Nacional do Petróleo para as reservas concedidas através de leilões.

Vejamos os demais parâmetros considerados, bem como os resultados para cada área específica do Pré-Sal.

- **Bacia de Santos:**

Para as reservas da bacia de Santos, temos que o valor inicial da reserva desenvolvida ( $V_0$ ) será obtido pelo modelo de negócios (“business model”), visto na subseção 4.1.1, considerando os valores de  $q = 11.5\%$ ,  $B = 5.33$  bilhões de boe e  $P = \text{US}\$57.08$ , calculados ao longo da seção 4. Com isso temos:

$$V_0 = (0.115)(5.33)(57.08) = 34.98$$

Vimos também na seção 4.1.3 que o custo de desenvolvimento das reservas da bacia de Santos é  $D = \text{US}\$22.38$  bilhões. Logo temos:

---

<sup>17</sup>Para estimativa da taxa livre de risco, foi considerada apenas o período informado e descartado dados mais antigos, visando focar a análise no período da crise do mercado financeiro.

Valor inicial da reserva desenvolvida	US\$34.98 bilhões
Custos de desenvolvimento da reserva	US\$22.38 bilhões

Aplicando os métodos de Crank-Nicholson e SOR, vistos na seção 5, na equação diferencial parcial (24), sob os parâmetros acima mencionados, obtivemos o seguinte valor para a reserva-não desenvolvida.

Valor da reserva não-desenvolvida	US\$30.40 bilhões
-----------------------------------	-------------------

O valor acima foi obtido através do código fonte implementado no pacote MATLAB, que segue na seção 9. Os parâmetros utilizados para a simulação foram  $N = 200$ ,  $M = 200$ ,  $w = 1.2$  e  $tol = 0.0001$ .

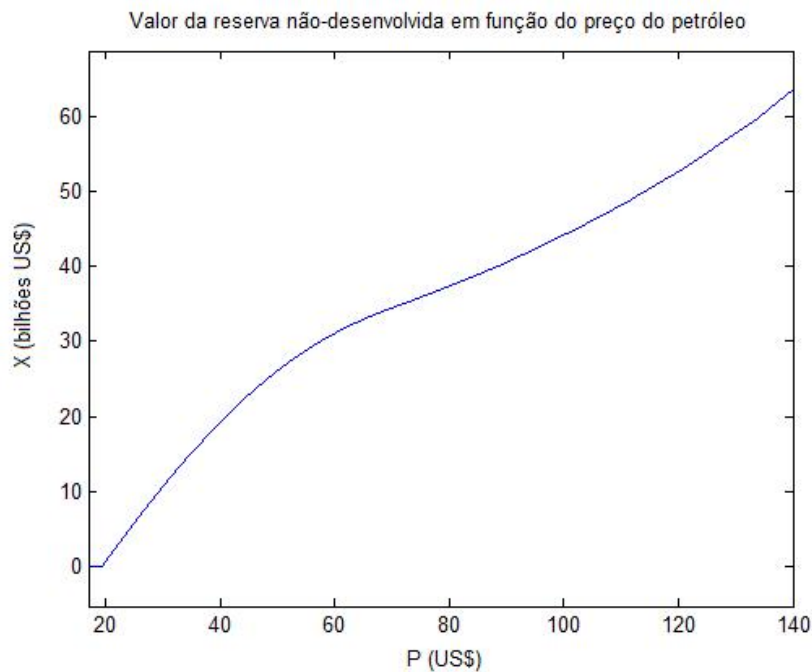


Figura 24: Curva de preços de concessão de blocos do Pré-Sal da Bacia de Santos em função do preço do barril de petróleo.

Na figura 24, verificamos o comportamento do preço de concessão da reserva da bacia de Santos de acordo com a variação do preço do barril do petróleo. Vemos que, para preços do barril abaixo de US\$ 20, o preço de concessão se aproxima de zero, o que significa que a opção real de desenvolver a reserva vai se tornando cada vez menos atraente até chegar a inviabilidade.

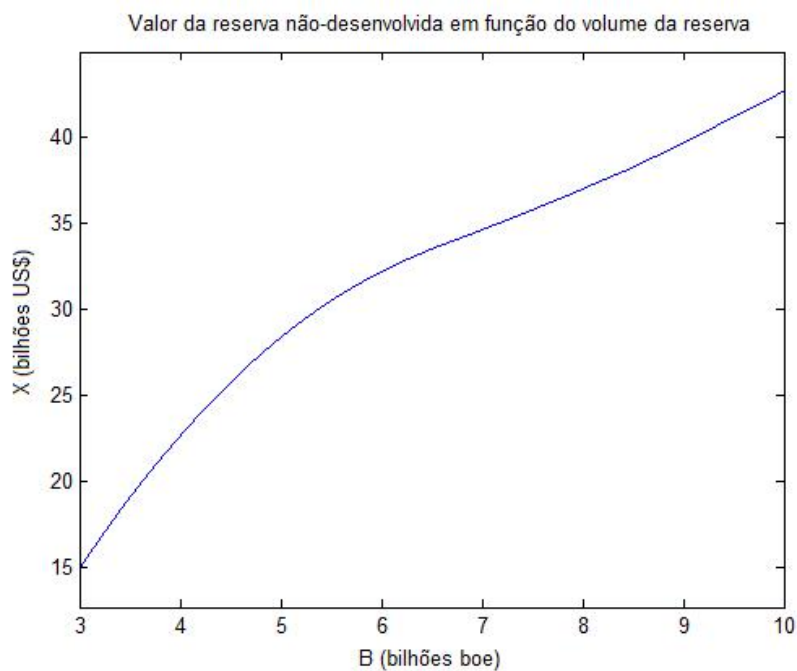


Figura 25: Curva de preços de concessão de blocos do Pré-Sal da Bacia de Santos em função do volume da reserva.

Por ser uma atividade sem precedentes, o desenvolvimento de reservas do Pré-Sal ainda é marcado pelas dúvidas quanto a capacidade petrolífera dessas reservas. Na bacia de Santos, acredita-se haver um reservatório gigantesco de petróleo, talvez ainda maior do que o estimado neste trabalho. Na figura 25, vemos o comportamento do valor da reserva não-desenvolvida para um intervalo de valores para o volume da reserva. O intuito é mostrar o quanto o preço de concessão aumenta com o aumento do volume da reserva, mesmo com os custos variáveis de desenvolvimento estando diretamente ligados a ele. Isto comprova ainda mais o fato de que no Pré-Sal, mais do que no Pós-Sal ou em campos terrestres, os custos fixos de desenvolvimento são bem mais relevantes que os custos variáveis.

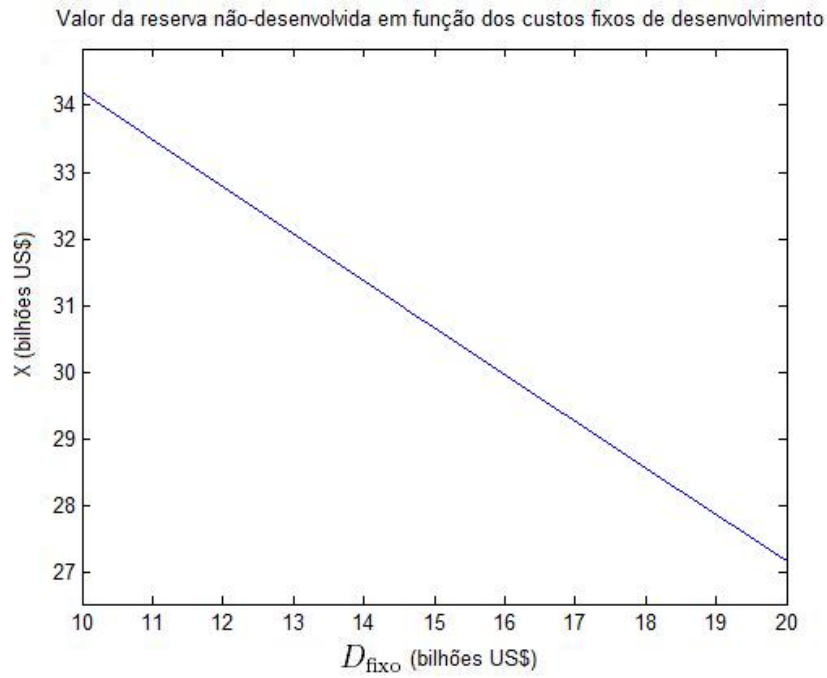


Figura 26: Curva de preços de concessão de blocos do Pré-Sal da Bacia de Santos em função dos custos fixos de desenvolvimento da reserva.

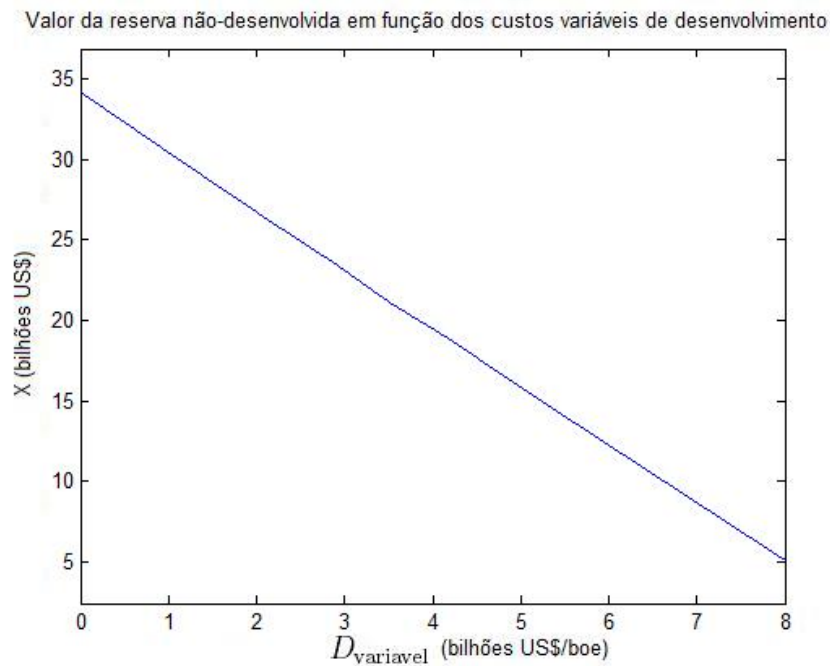


Figura 27: Curva de preços de concessão de blocos do Pré-Sal da Bacia de Santos em função dos custos variáveis de desenvolvimento da reserva.

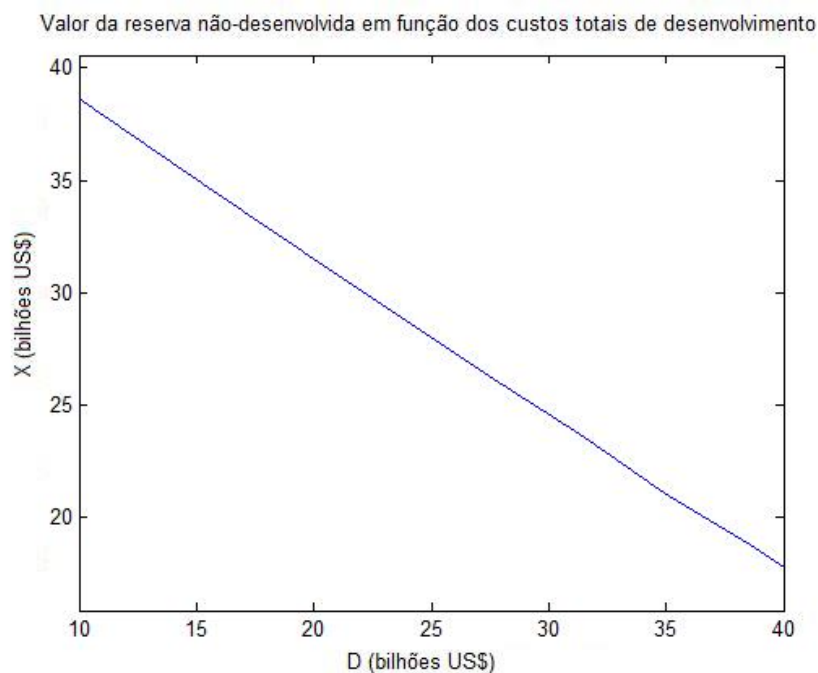


Figura 28: Curva de preços de concessão de blocos do Pré-Sal da Bacia de Santos em função dos custos totais de desenvolvimento da reserva.

Da mesma forma que o volume da reserva, os custos de desenvolvimento também vêm sendo alvo de grandes dúvidas e especulações. Nas figuras 26, 27 e 28 vemos a variação do valor da reserva não-desenvolvida de acordo com a variação dos custos de desenvolvimento. Repare nas figuras 26 e 27 que a variação dos custos variáveis acarreta uma variação maior dos preços de concessão do que a variação dos custos fixos. O motivo pelos quais os custos fixos são mais relevantes é que a variação nos custos variáveis não se dá de forma tão ampla como na figura 27, geralmente seu valor não ultrapassa US\$ 2 ou US\$ 3 por barril de petróleo.



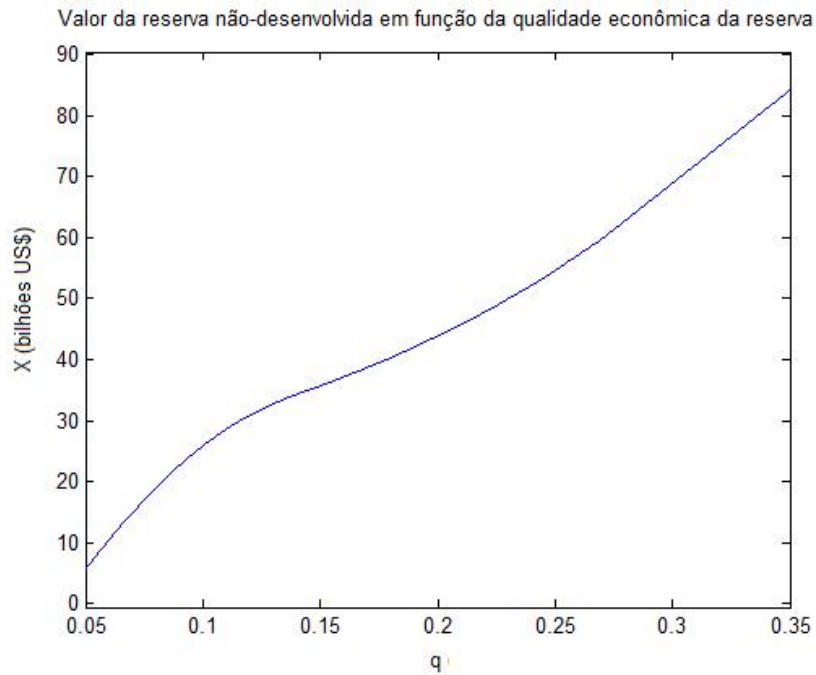


Figura 29: Curva de preços de concessão de blocos do Pré-Sal da Bacia de Santos em função da qualidade econômica da reserva.

Na figura 29, vemos que a variação do valor da reserva é consideravelmente alta em relação à variação da qualidade econômica da reserva. Valores de  $q > 0.3$  caracterizam campos terrestres, o que mostra que um bloco situado em um campo terrestre com o mesmo volume e características do Pré-Sal de Santos teria seu preço de concessão triplicado.

Já valores de  $0.17 < q < 0.3$  caracterizam reservas em águas profundas (*offshore*), situadas em camadas Pós-Sal, que, pela figura 29, teriam seu preço de concessão duplicado. Isto comprova que o motivo pelos quais os preços de concessão das reservas do Pré-Sal são tão superiores aos preços de campos terrestres ou do Pós-Sal é o gigantesco volume de petróleo existente no Pré-Sal.

Na figura 30 abaixo, quando o preço do barril do petróleo atinge o valor mínimo de US\$ 17, o volume mínimo da reserva deverá ser de 5.97 bilhões de boe para que o valor da opção real de desenvolver a reserva (valor da reserva não-desenvolvida) seja não-nulo. Nesse caso, o valor da reserva não-desenvolvida será de US\$ 308.4 mil.

Da mesma forma, quando o volume da reserva atinge o valor mínimo de 3 bilhões de boe, o preço mínimo do barril de petróleo necessário para que o valor da opção real de desenvolver a reserva seja não-nulo é de US\$ 29.51. Nesse caso, o valor da reserva não-desenvolvida será de US\$ 528 mil.

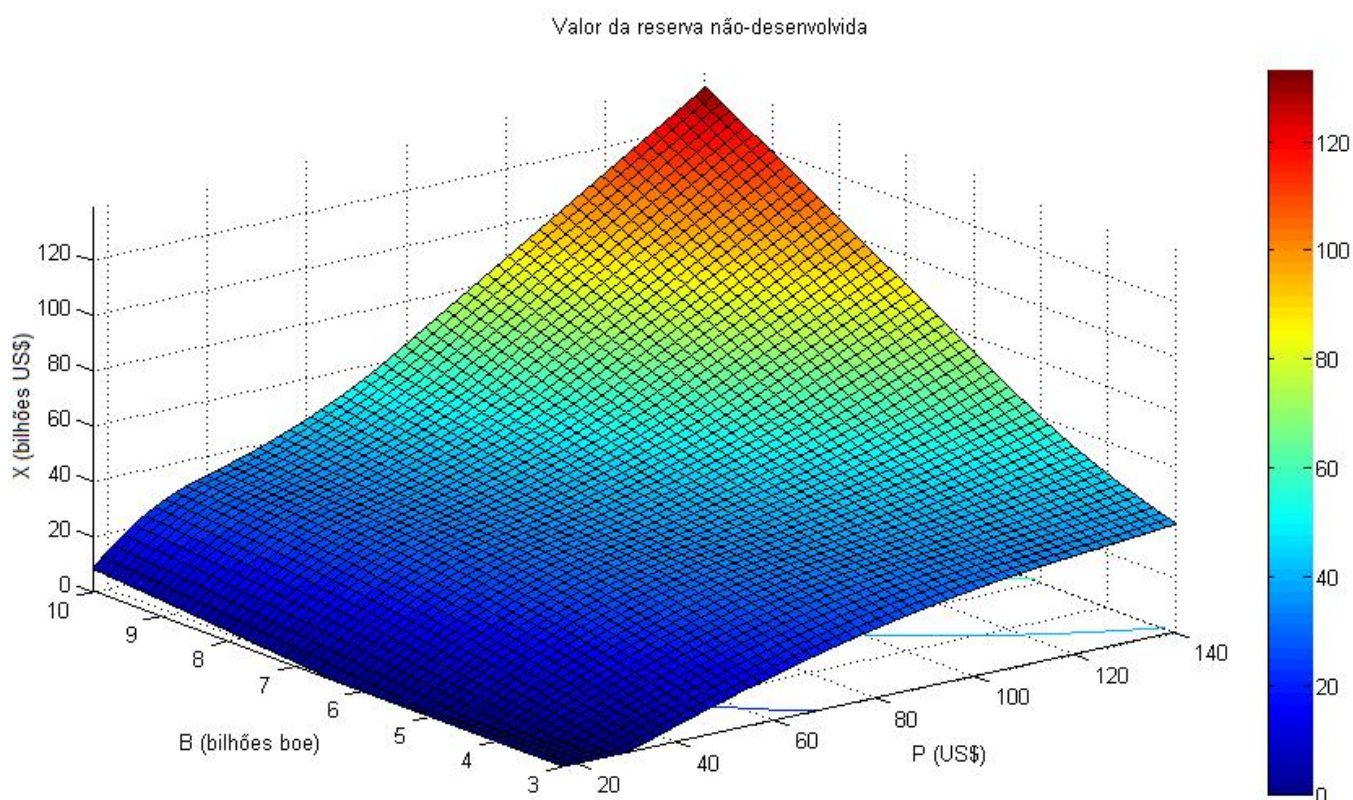


Figura 30: Superfície de preços de concessão de blocos do Pré-Sal da Bacia de Santos em função do preço do barril de petróleo e do volume da reserva.

Na figura 31 abaixo, quando o preço do barril de petróleo atinge o valor mínimo de US\$ 17, a qualidade econômica da reserva mínima para se obter uma preço de concessão não-nulo é de 12.67%. Nesse caso, o valor da reserva não desenvolvida será de US\$ 481.2 mil. Para o valor de  $q$  estimado neste trabalho ( $q = 11.5\%$ ), o preço mínimo do barril de petróleo para que a opção real de desenvolver a reserva seja não-nula é de US\$ 19. Nesse caso, o valor da reserva não-desenvolvida é de US\$ 202.2 milhões.

Outra observação feita na figura é que quando o preço do barril de petróleo atinge o valor de US\$ 17, se a qualidade econômica da reserva for igual a 39.71% (caracterizando uma reserva terrestre), o valor da reserva não-desenvolvida é aproximadamente igual a US\$ 30.40 bilhões (mesmo valor obtido para uma reserva da bacia de Santos para o preço do barril em US\$ 57.08 e a qualidade econômica estimada em 11.5%). Isso ilustra mais uma vez o fato de que o preço de concessão de uma reserva terrestre com as mesmas características do Pré-Sal de Santos é superior ao preço de concessão da reserva do Pré-Sal. O motivo disso é o alto custo de desenvolvimento requerido para o Pré-Sal, pois como vimos na figura 28, aumentando o custo de desenvolvimento diminui o valor da reserva não-desenvolvida.

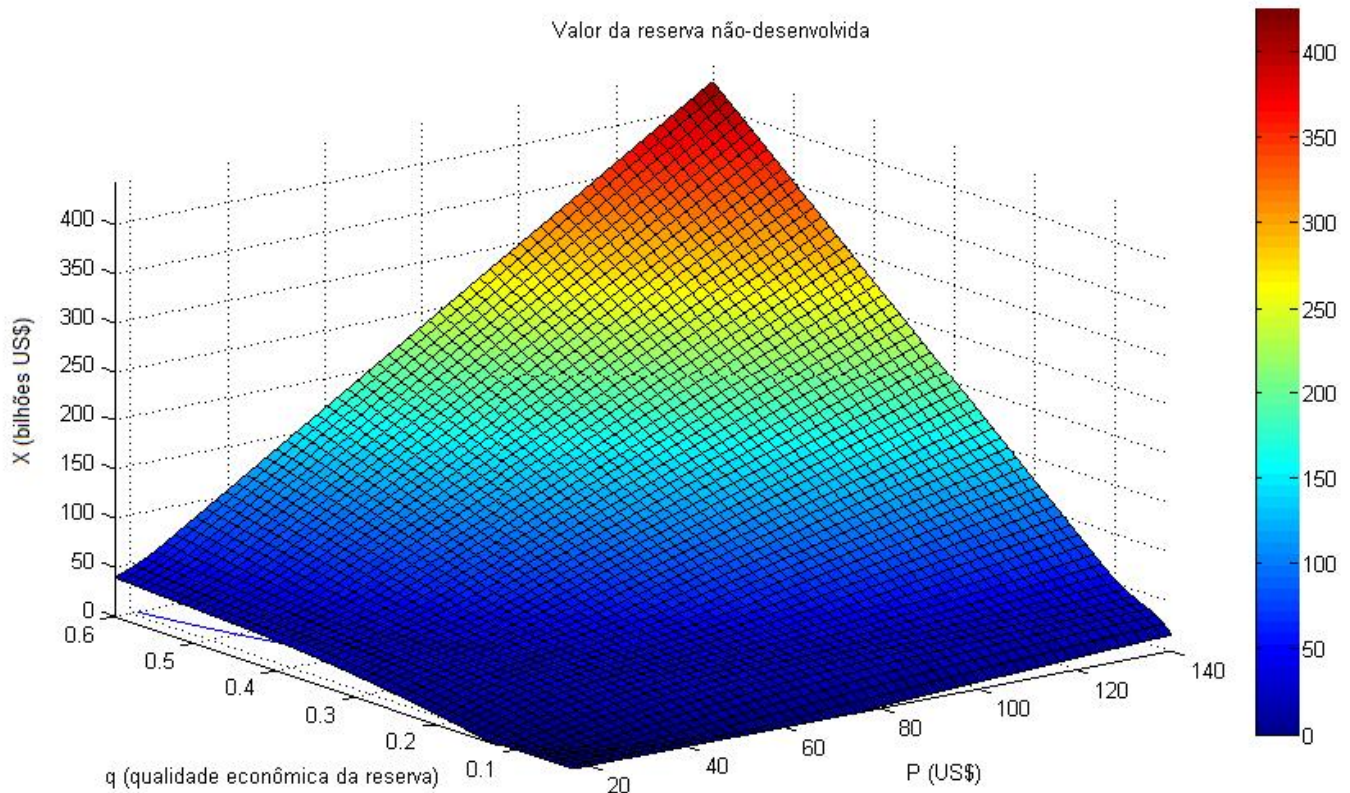


Figura 31: Superfície de preços de concessão de blocos do Pré-Sal da Bacia de Santos em função do preço do barril de petróleo e da qualidade econômica da reserva.



Na figura 32, para o custo de desenvolvimento de uma reserva da bacia de Santos (estimado neste trabalho em US\$ 22.38 bilhões), se o preço do petróleo cair para abaixo de US\$ 19 por barril, o valor da reserva passa a ser nulo.

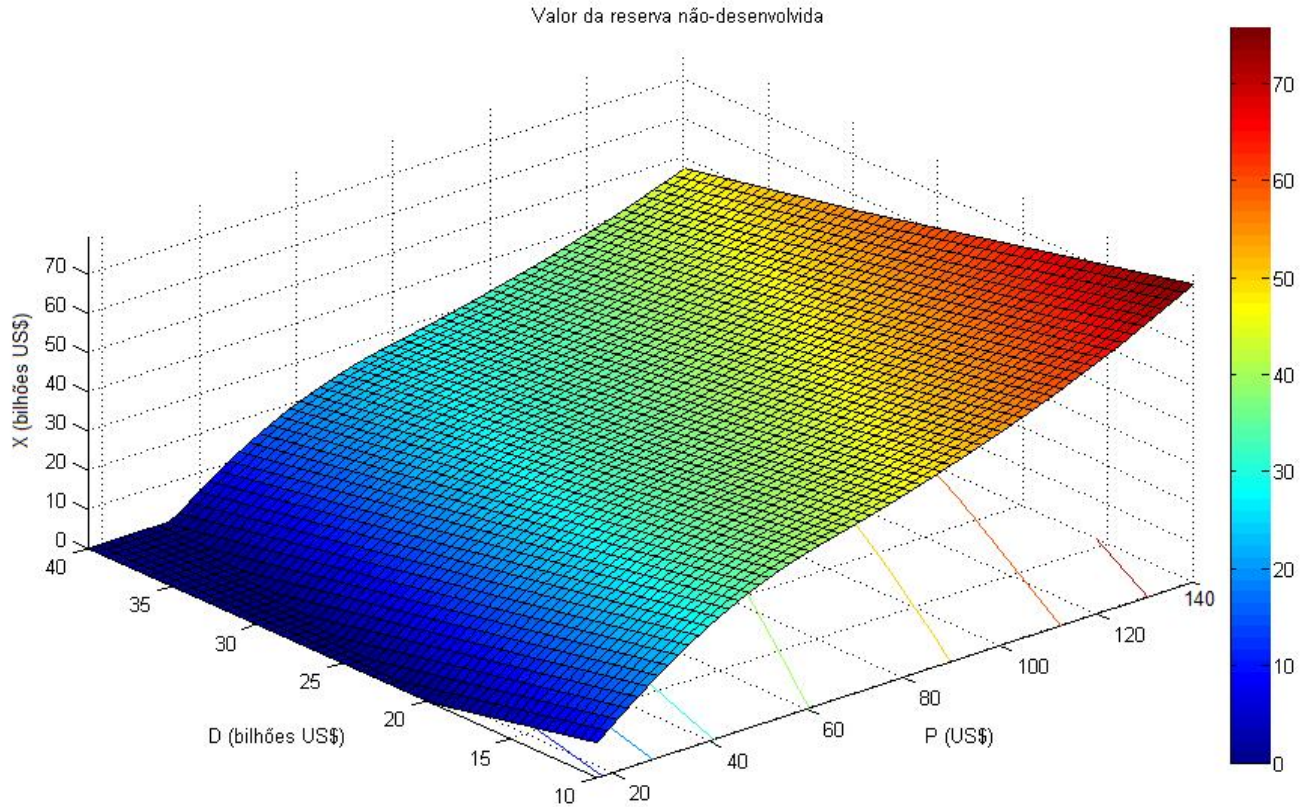


Figura 32: Superfície de preços de concessão de blocos do Pré-Sal da Bacia de Santos em função do preço do barril de petróleo e dos custos de desenvolvimento.

• **Bacias de Campos e Espírito Santo:**

Para as reservas das bacias de Campos e Espírito Santo, da mesma forma que para a bacia de Santos, o valor inicial da reserva desenvolvida ( $V_0$ ) será obtido pelo modelo de negócios (“business model”), visto na subseção 4.1.1, considerando os valores de  $q = 13.5\%$ ,  $B = 3.67$  bilhões de boe e  $P = \text{US\$ } 57.08$ , calculados ao longo da seção 4. Com isso temos:

$$V_0 = (0.135)(3.67)(57.08) = 28.28$$

Vimos também, na seção 4.1.3, que o custo de desenvolvimento das reservas das bacias de Campos e Espírito Santo é  $D = \text{US\$ } 16.85$  bilhões. Logo temos:

Valor inicial da reserva desenvolvida	US\$ 28.28 bilhões
Custos de desenvolvimento da reserva	US\$ 16.85 bilhões

Aplicando os métodos de Crank-Nicholson e SOR, vistos na seção 5, na equação diferencial parcial (24), sob os parâmetros acima mencionados, obtivemos o seguinte valor para a reserva-não desenvolvida.

Valor da reserva não-desenvolvida	US\$ 28.94 bilhões
-----------------------------------	--------------------

Os parâmetros utilizados para a simulação foram  $N = 200$ ,  $M = 200$ ,  $w = 1.2$  e  $tol = 0.0001$ .

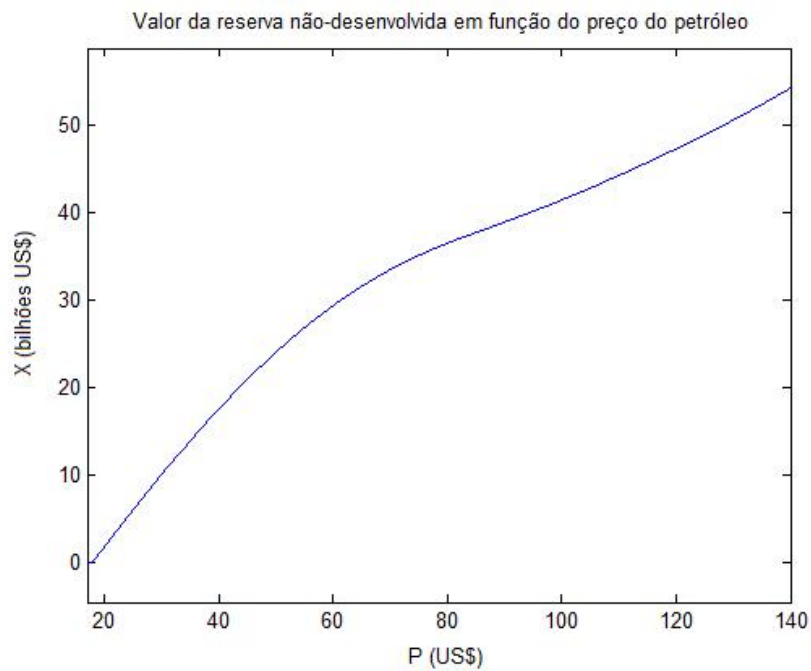


Figura 33: Curva de preços de concessão de blocos do Pré-Sal das Bacias de Campos e Espírito Santo em função do preço do barril de petróleo.

Repare que o gráfico da figura 33 mostra que, para preços do barril de petróleo abaixo de US\$ 60, o valor da reserva não-desenvolvida das bacias de Campos e Espírito Santo é próxima ao da bacia de Santos, ao passo que para preços do barril acima de US\$ 60, começa a ficar visível a diferença dos preços de concessão, sendo as das bacias de Campos e Espírito Santo menores que da bacia de Santos. Lembrando que esta análise é para reservas com os volumes estimados neste trabalho.

A figura 34 mostra que, em blocos com mesmo volume de petróleo, o preço de concessão das reservas da bacia de Santos é inferior ao das bacias de Campos e Espírito Santo. Isso mostra que na análise anterior ocorria o inverso, pois era considerado um volume de petróleo maior para as reservas da bacia de Santos.

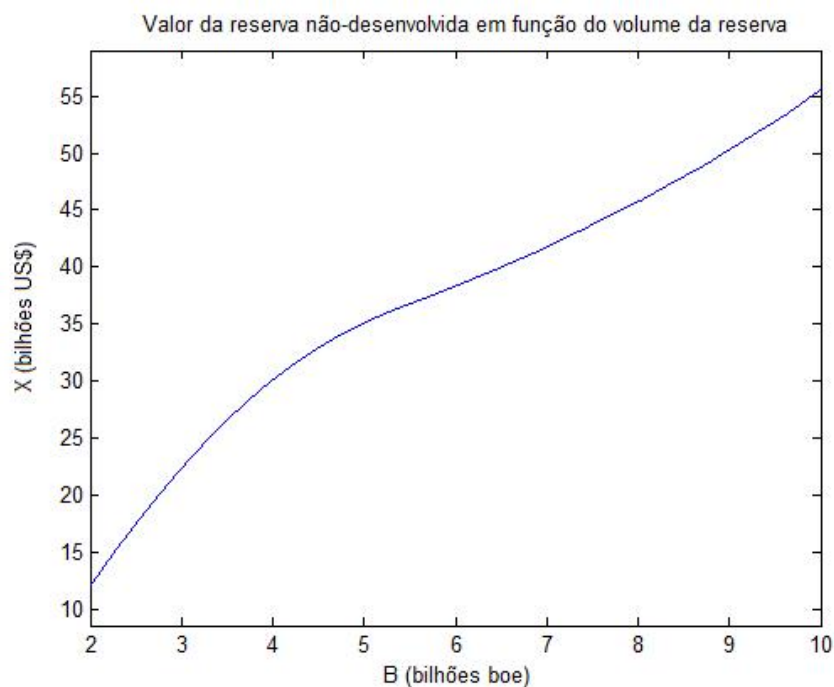


Figura 34: Curva de preços de concessão de blocos do Pré-Sal das Bacias de Campos e Espírito Santo em função do volume da reserva.

Na figura 35, vemos que a variação do custo fixo de desenvolvimento da reserva da bacia de Campos e Espírito Santo exerce uma influência mais significativa no preço de concessão do que a variação do custo fixo de desenvolvimento da reserva da bacia de Santos. Já na figura 36, vemos que para o custo variável ocorre o inverso. Embora os gráficos das figuras 36 e 27 sejam bem próximos, a variação do custo variável de desenvolvimento da reserva da bacia de Campos e Espírito Santo exerce uma influência ligeiramente maior no preço de concessão do que a variação do custo variável de desenvolvimento da reserva da bacia de Santos. Na figura 37, vemos que no total os custos de desenvolvimento afetam mais as reservas das bacias de Campos e Espírito Santo do que as reservas da bacia de Santos, sendo que, ao mesmo custo de desenvolvimento e com os volumes estimados neste trabalho, o valor da reserva não-desenvolvida é maior para a bacia de Santos. Tais fatos podem ser melhor visualizados na figura 44.

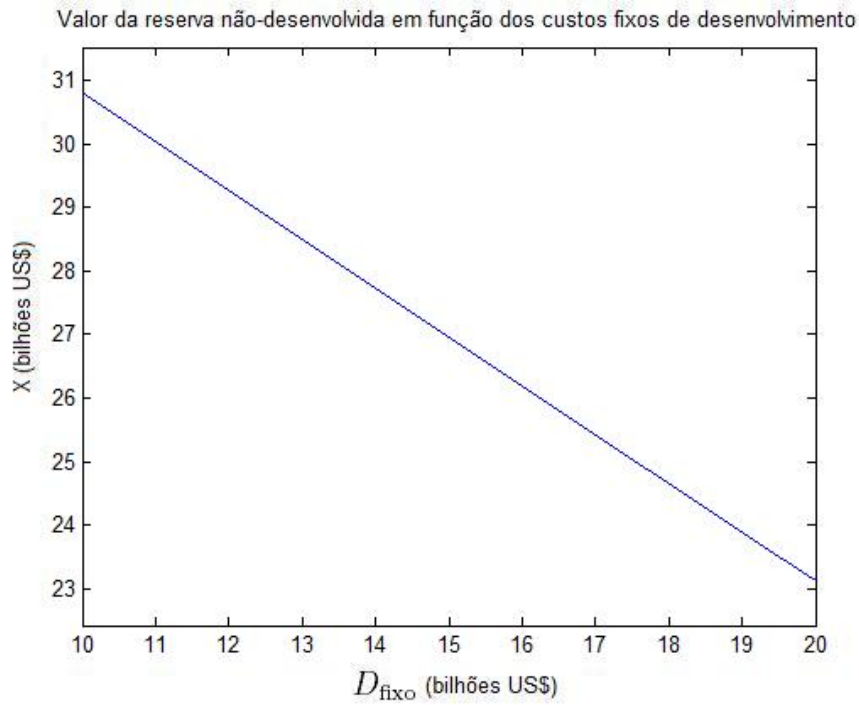


Figura 35: Curva de preços de concessão de blocos do Pré-Sal das Bacias de Campos e Espírito Santo em função dos custos fixos de desenvolvimento.

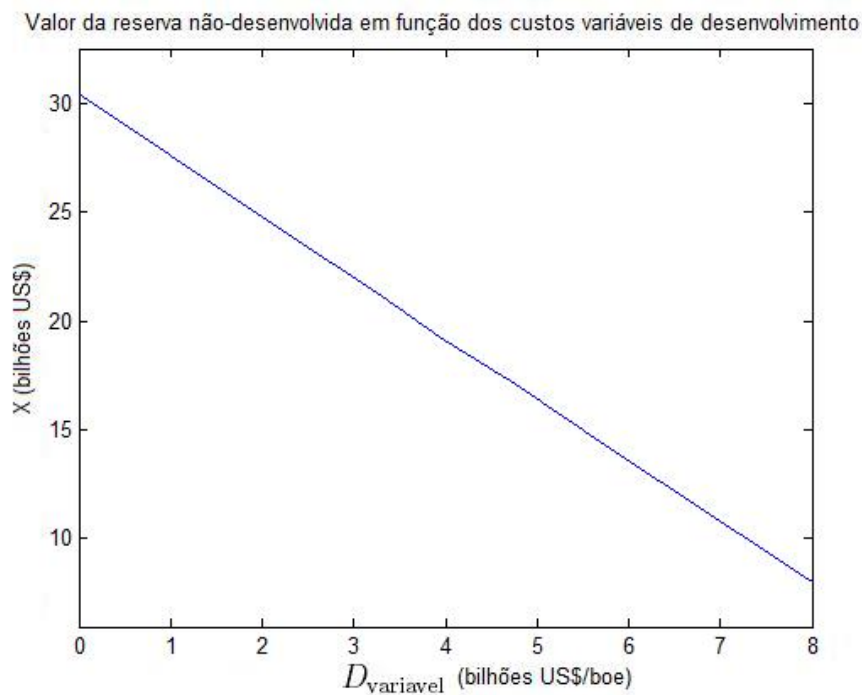


Figura 36: Curva de preços de concessão de blocos do Pré-Sal das Bacias de Campos e Espírito Santo em função dos custos variáveis de desenvolvimento.

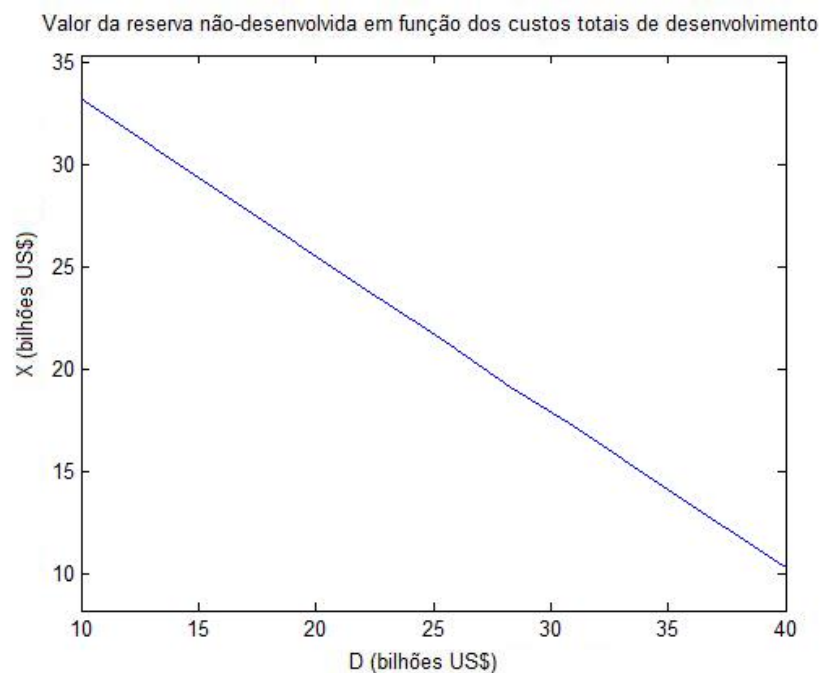


Figura 37: Curva de preços de concessão de blocos do Pré-Sal das Bacias de Campos e Espírito Santo em função dos custos totais de desenvolvimento.

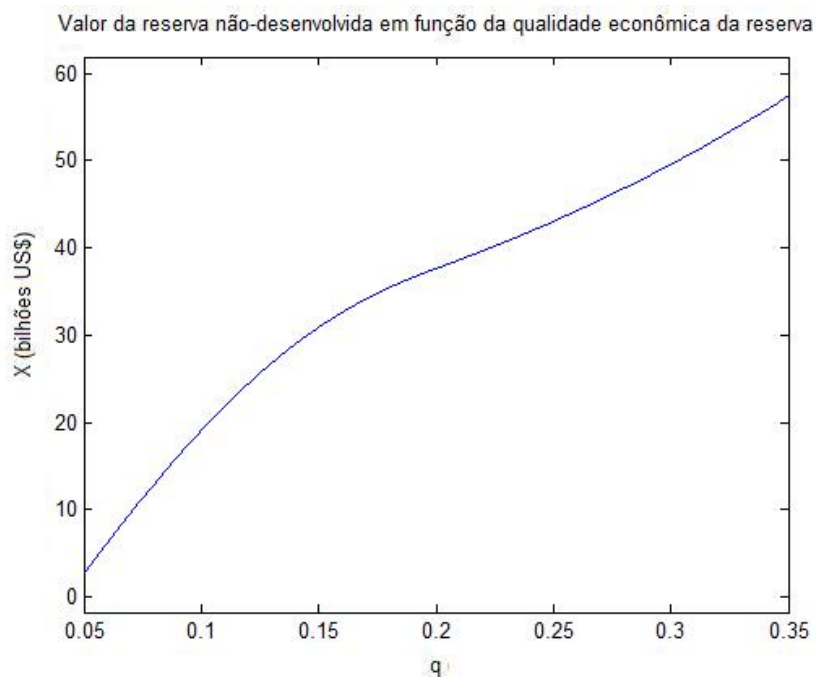


Figura 38: Curva de preços de concessão de blocos do Pré-Sal das Bacias de Campos e Espírito Santo em função da qualidade econômica da reserva.

A figura 38 mostra uma curva similar à curva da figura 29. A diferença novamente é que o valor da reserva não-desenvolvida para as bacias de Campos e Espírito Santo é



inferior ao da bacia de Santos (lembrando que o volume de petróleo considerado para as reservas são diferentes).

Na figura 39 abaixo, quando o preço do barril do petróleo atinge o valor mínimo de US\$ 17, o volume mínimo da reserva deverá ser de 3.76 bilhões de boe para que o valor da opção real de desenvolver a reserva (valor da reserva não-desenvolvida) seja não-nulo. Nesse caso, o valor da reserva não-desenvolvida será de US\$ 283.7 mil. Se, para o mesmo preço do barril, o volume da reserva for de 5.97 bilhões de boe (valor que, para a bacia de Santos, corresponderia ao valor da reserva não-desenvolvida de US\$ 308.4 mil), o preço de concessão será de US\$ 6.43 bilhões. Essa enorme diferença pode ser explicada pelo fato de que, ao custo de US\$ 17, os custos da reserva da bacia de Santos quase não compensam o seu desenvolvimento, enquanto que, para as bacia de Campos e Espírito Santo, mesmo esse preço baixo do barril de petróleo, compensa o desenvolvimento, em virtude dos menores custos de desenvolvimento oriundos, entre outras coisas, da maior facilidade de extração de petróleo por ter uma camada de sal mais rasa.

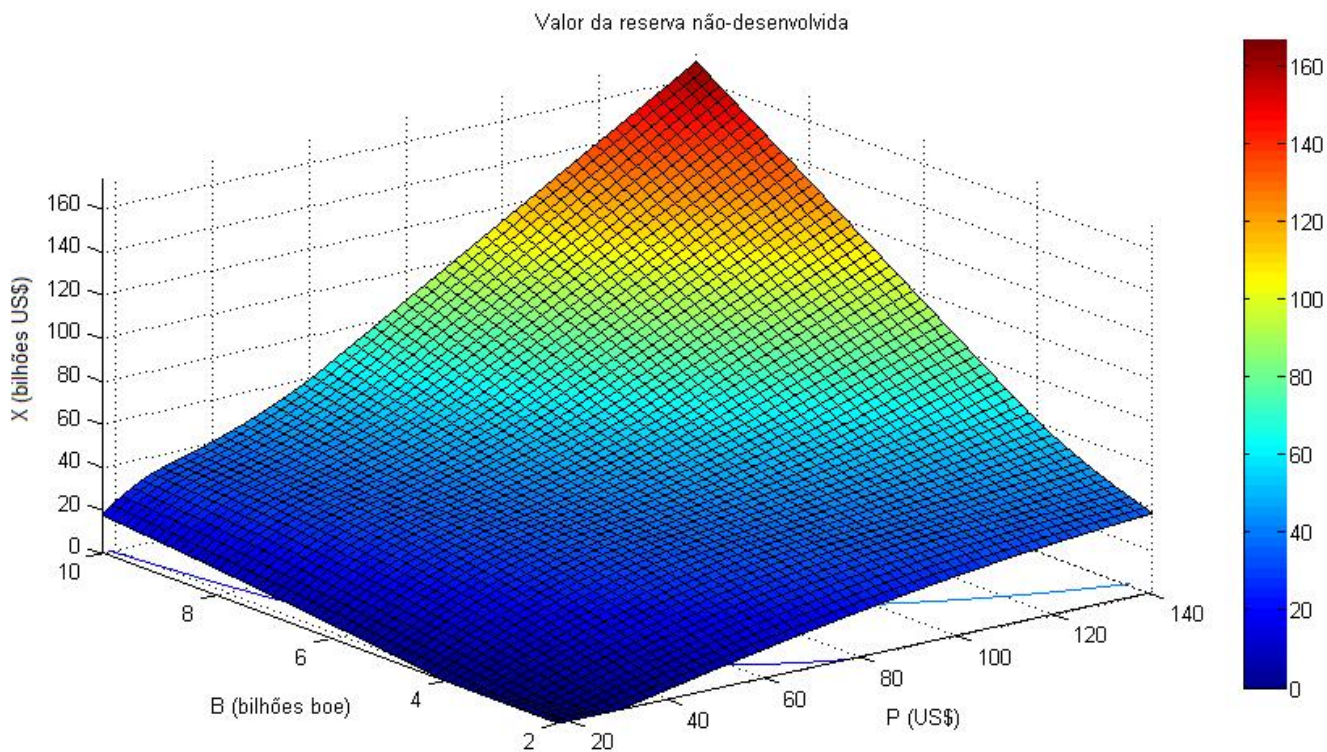


Figura 39: Superfície de preços de concessão de blocos do Pré-Sal das Bacias de Campos e Espírito Santo em função do preço do barril de petróleo e do volume da reserva.

Ainda na figura 39, quando o volume da reserva atinge o valor mínimo de 2 bilhões de boe, o preço mínimo do barril de petróleo necessário para que o valor da opção real de desenvolver a reserva seja não-nulo é de US\$ 27.42. Nesse caso, o valor da reserva não-desenvolvida será de US\$ 240.5 mil.

Na figura 40 abaixo, vemos que a superfície de preços gerada para as bacias de Campos e Espírito Santo é similar à obtida para a bacia de Santos, exceto pelos valores inferiores apresentados (lembrando que isso é justificado pelo fato de que volume de petróleo considerado para as reservas são diferentes, sendo o volume da bacia de Santos maior que as bacias de Campos e Espírito Santo).

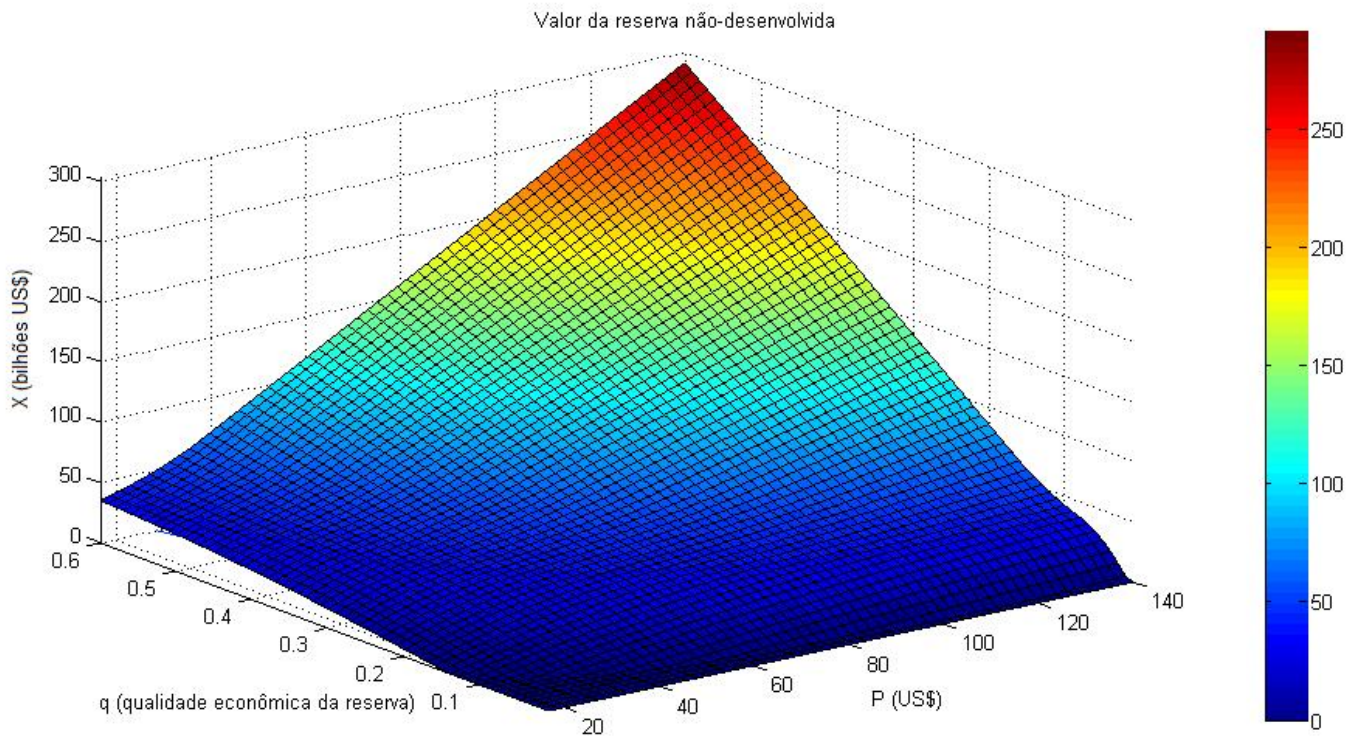


Figura 40: Superfície de preços de concessão de blocos do Pré-Sal das Bacias de Campos e Espírito Santo em função do preço do barril de petróleo e da qualidade econômica da reserva.

Na figura 41, vemos que o custo que inviabiliza o desenvolvimento de uma reserva situada nas bacias de Campos e Espírito Santo é menor que o de uma reserva situada na bacia de Santos.

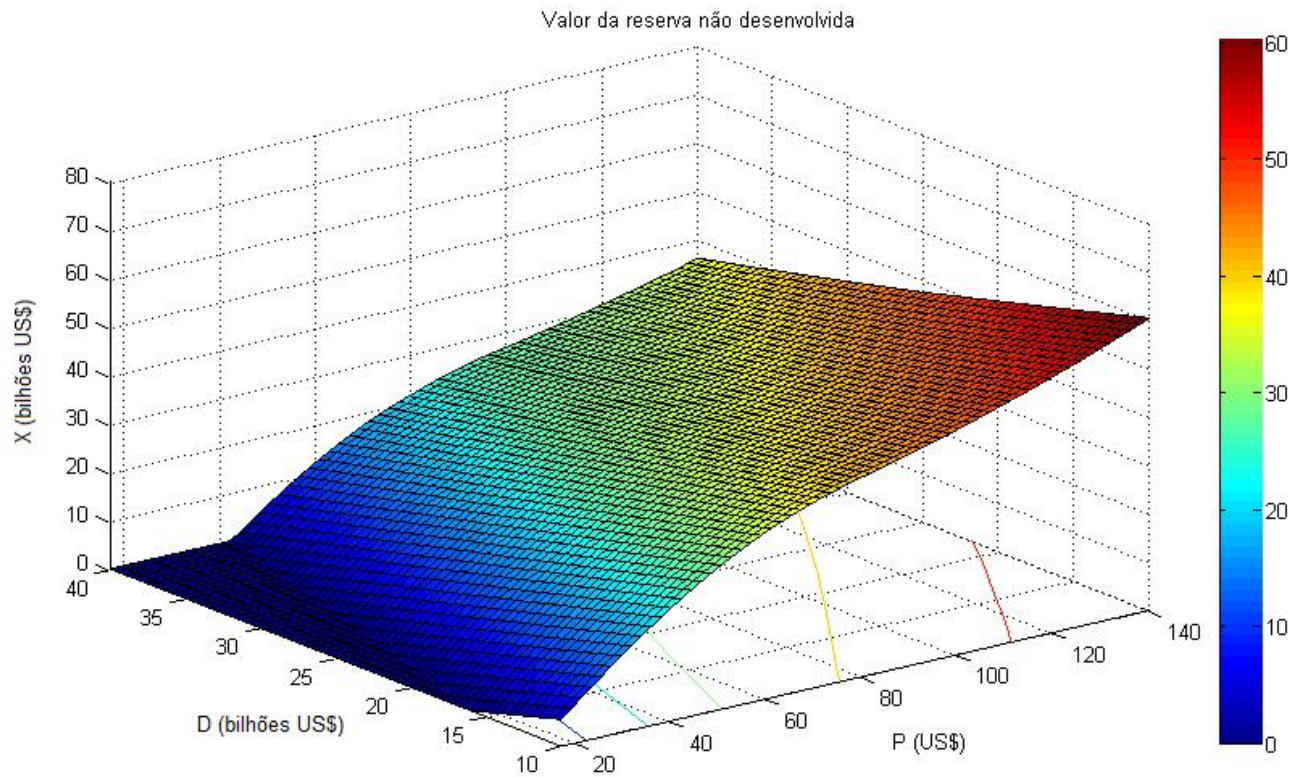


Figura 41: Superfície de preços de concessão de blocos do Pré-Sal das Bacias de Campos e Espírito Santo em função do preço do barril de petróleo e do custo de desenvolvimento da reserva.

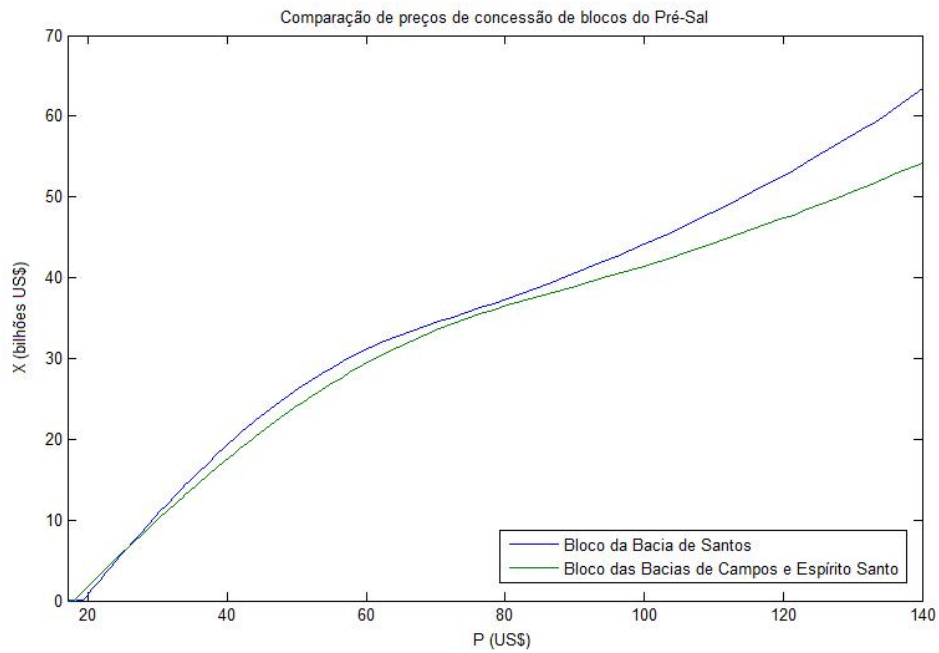


Figura 42: Comparação entre os preços de concessão de blocos do Pré-Sal da bacia de Santos e das bacias de Campos e Espírito Santo em função do preço do barril de petróleo.

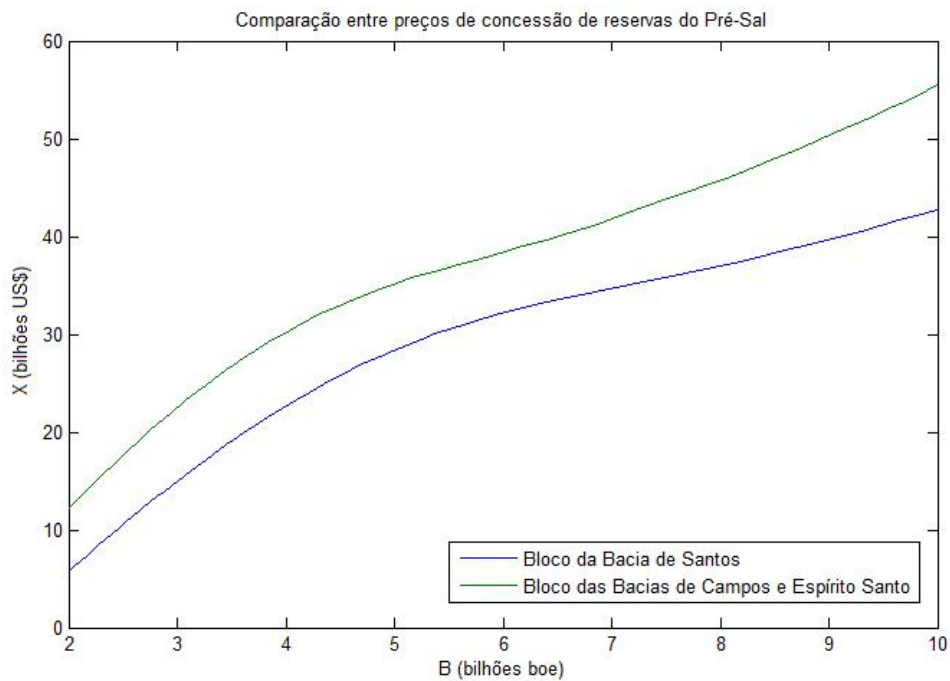


Figura 43: Comparação entre os preços de concessão de blocos do Pré-Sal da bacia de Santos e das bacias de Campos e Espírito Santo em função do volume de petróleo.



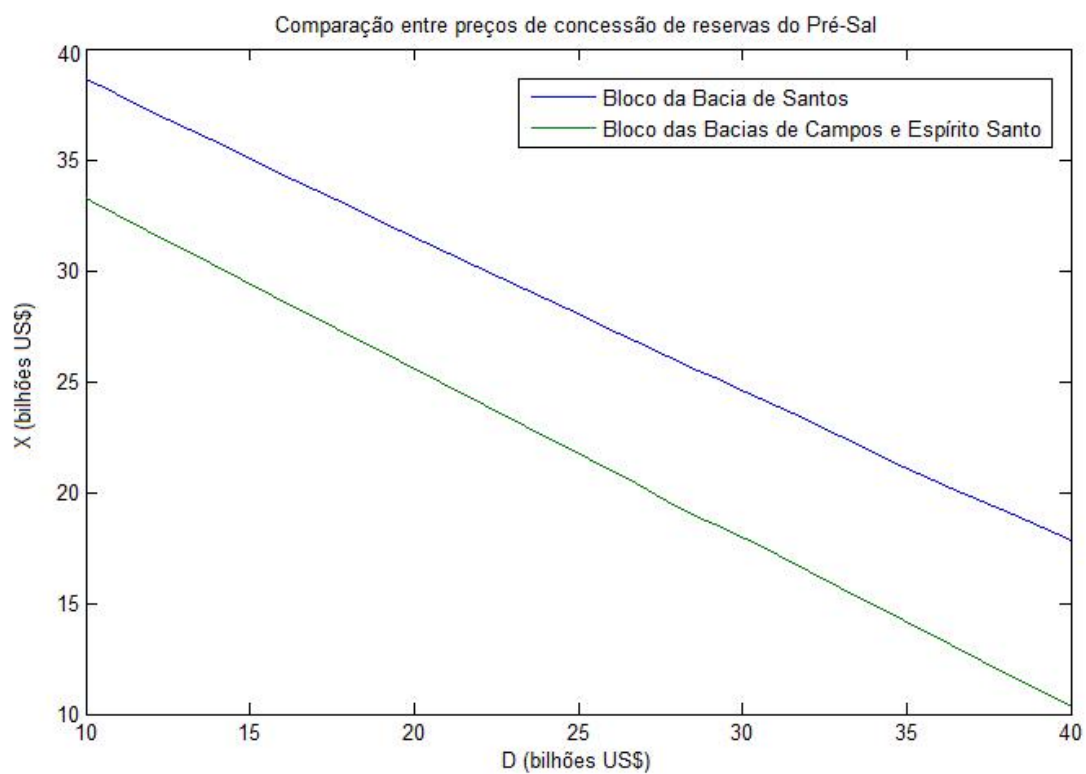


Figura 44: Comparação entre os preços de concessão de blocos do Pré-Sal da bacia de Santos e das bacias de Campos e Espírito Santo em função dos custos de desenvolvimento da reserva.

## 7 Conclusão

Este trabalho realizou uma análise dos preços de concessão de campos de petróleo da região do Pré-Sal do Brasil, caracterizada pelo seu alto custo de desenvolvimento e enorme capacidade petrolífera. Tal análise foi feita com foco em dois tipos de reservas específicas: as de poços mais profundos e com camada de sal mais extensa (Pré-Sal da bacia de Santos) e as de poços mais rasos e com menor camada de sal (Pré-Sal das bacias de Campos e Espírito Santo). Com isso, consideramos as características de um bloco localizado na bacia de Santos e outro localizado nas bacias de Santos e Espírito Santo (as duas últimas consideradas como uma só reserva por possuírem características similares).

O modelo proposto para a avaliação deste projeto utilizou as técnicas de *Contingent Claims Analysis*. Esta técnica faz uso de hipóteses fortes sobre o mercado que nem sempre correspondem à realidade. Uma destas hipóteses é de que o mercado é completo.

Para superar estas hipóteses, é necessário implementar técnicas de programação dinâmica. Nesta segunda metodologia, as restrições são menores e não temos a condição de equilíbrio geral. Muitos autores condenam essas técnicas, pois as taxas de desconto e suposições sobre o crescimento dos ativos e do mercado são tidas como exógenas ao modelo.

Neste trabalho, descrevemos o modelo de Paddock & Siegel & Smith (1988) para modelar o valor da reserva desenvolvida e, posteriormente, obter a equação diferencial parcial que descreve o valor da reserva não-desenvolvida. Para tanto, fizemos uso das técnicas de *Contingent Claims Analysis*, assumindo que o valor da reserva desenvolvida (que representa o ativo objeto) seguia um Movimento Geométrico Browniano.

Utilizando o modelo de negócios (“business model”), modelamos o valor da reserva desenvolvida como uma proporção do preço do petróleo, o que facilitou a análise de dados, pois bastou estudar a série histórica dos preços do petróleo, sendo considerado neste trabalho os preços do Brent.

Devido a correlação entre o preço do petróleo e o valor da reserva desenvolvida (característico do modelo de negócios), optamos por modelar o valor da reserva desenvolvida por um processo de reversão à média, visto ser um modelo considerado mais realista quando o ativo objeto é uma *commodity*. O modelo adotado foi o processo de Ornstein-Uhlenbeck.

Com isso, adequamos o modelo de Paddock & Siegel & Smith (1988), alterando a modelagem da reserva desenvolvida de Movimento Geométrico Browniano para Ornstein-Uhlenbeck, utilizando *Contingent Claims Analysis* para adequação da equação diferencial parcial que descreve o valor da reserva não-desenvolvida.

Fez-se necessário, então, estimar os parâmetros do processo de Ornstein-Uhlenbeck, o que foi feito comparando-o a um modelo auto regressivo de ordem 1 (Proposição 4.2). Utilizando métodos numéricos de diferenças finitas (mais especificamente o método de Crank-Nicholson),

juntamente ao método SOR (para resolução dos sistemas lineares gerados pelo método de Crank-Nicholson), resolvemos numericamente a equação diferencial parcial e, assim, obtivemos o preço de concessão da reserva (denominado no modelo de Paddock & Siegel & Smith como valor da reserva não-desenvolvida) para cada bloco estudado.

Na seção 6, vimos os resultados obtidos para o preço de concessão de uma reserva situada na bacia de Santos e o preço de uma reserva situada nas bacias de Santos e Espírito Santo, de acordo com os parâmetros estimados ao longo do trabalho. Após, obtivemos as curvas e superfícies de preços de concessão para cada reserva, a fim de analisar a variação destes em função dos parâmetros custos de desenvolvimento, preço do barril de petróleo e volume da reserva.

Foi possível observar através das curvas e superfícies geradas, que o preço de concessão de uma reserva da bacia de Santos é maior que o das bacias de Campos e Espírito Santo. O motivo principal desse fato é que o volume de petróleo existente na bacia de Santos é superior ao volume das bacias de Campos e Espírito Santo. Mesmo requerendo um menor custo de desenvolvimento motivado pela maior facilidade de extração de petróleo, o preço de concessão de uma reserva na bacia de Campos e Espírito Santo mostrou-se inferior ao de uma reserva na bacia de Santos em quase todas as análises efetuadas, excetuando-se quando considerados capacidades petrolíferas iguais para ambas as reservas. Neste último caso, prevaleceu o preço de concessão da reserva das bacias de Campos e Espírito Santo, com seu menor custo de desenvolvimento.

Contudo, todos os resultados obtidos, neste trabalho, são meramente estimados para os dados utilizados. Na prática, existe uma grande incerteza quanto às características das reservas do Pré-Sal brasileiro, tais como o volume das reservas e o custo de desenvolvimento. O que se tem é uma grande expectativa de que, na bacia de Santos, o volume de petróleo seja superior ao das bacias de Campos e Espírito Santo, conforme visto neste trabalho, porém não se conhece todos os poços de petróleo do Pré-Sal e qualquer nova descoberta pode vir a alterar as expectativas.

Em trabalhos futuros, pode-se tentar captar essa incerteza do valor da reserva para melhorar os resultados e torná-los mais realistas.

Outro melhoramento a ser considerado é a volatilidade do valor da reserva, que não precisa ser necessariamente constante. Em trabalhos futuros, podem ser utilizados modelos de volatilidade estocástica.

Outra análise que pode ser feita, posteriormente, é a de sensibilidade dos resultados, que não foi estudada nesta dissertação. O campo de estudos de opções reais é bastante amplo e com muitas frentes ainda a serem exploradas.

Mesmo com todas essas possíveis melhoras no modelo, é fácil verificar o ganho que o uso da Teoria de Opções Reais trás para a análise de investimentos. A capacidade de valorar a

flexibilidade presente nos projetos deve ser, sempre que possível, considerada, pois acrescenta valor substancial ao valor total do projeto.

No presente caso, o preço da reserva não-desenvolvida calculado através das técnicas de opções reais pode trazer um valor mais realista, fazendo com que, em leilões, firmas possam dar lances com maior confiança e precisão.

Porém, cabe reforçar que o intuito desta dissertação é aplicar a Teoria de Opções Reais ao setor de E&P de petróleo, mais precisamente às reservas do Pré-Sal, porém, os resultados obtidos aqui não são necessariamente os valores reais de mercado, visto que os valores, curvas e superfícies obtidos refletem os resultados do modelo utilizado, o que podem não ser necessariamente os mesmos, se adotado um outro modelo.

Esta aplicação da Teoria de Opções Reais nos mostrou que as reservas não-desenvolvidas do Pré-Sal brasileiro apresentaram valores elevados, motivados pelo alto custo de desenvolvimento, compensado pela grande capacidade petrolífera da região. Tanto na bacia de Santos quanto nas bacias de Campos e Espírito Santo, o preço de concessão mostrou-se bem superior aos preços usuais de campos terrestres, bem como aos de campos situados em águas profundas.

Percebemos, então, que o Pré-Sal é ainda uma caixa preta, coberta de expectativas quanto a elevação do Brasil no ranking das maiores reservas de óleo e gás, além da incerteza quanto à relação custo-benefício do desenvolvimento de suas reservas.



## 8 Referências

- [Andersson 1999] Andersson, H., - *Capital budgeting in a situation with variable utilisation of capacity an example from pulp industry* - Artigo, 1999.
- [Black & Scholes] Black, F. and Scholes, M. - *The Pricing of Options and Corporate Liabilities* - Artigo, 1973.
- [Brandão 2002] Brandão, L. - *Uma aplicação da teoria das opções reais em tempo discreto para a valoração de uma concessão rodoviária* - PUC/RJ, Tese de Doutorado, 2002.
- [Brandimarte 2002] Brandimarte, P. - *Numerical Methods in Finance: A MATLAB-based Introduction* - J. Wiley, Livro, 2002.
- [Dixit & Pindyck] Dixit, A.K. and Pindyck, R.S. - *Investment under uncertainty* - Princeton University Press Princeton, NJ, Livro, 1994.
- [Dias 2005] Dias, Marco Antonio Guimarães - *Opções Reais Híbridas com aplicações em Petróleo*- PUC/RJ, Tese de Doutorado, 2005.
- [Herkenhoff 2006] Herkenhoff, Renato - *Opções Reais de Abandono* - IMPA, Trabalho de final de curso de Derivativos, 2006.
- [Korn&Korn] Korn, R. and Korn, E. - *Option Pricing and Portfolio Optimization: Modern Methods of Financial Mathematics* - American Mathematical Society, Livro, 2001.
- [Ntwiga 2005] Ntwiga, Davis Bundi - *Numerical Methods for the valuation of financial derivatives* - Artigo, 2005.
- [Paddock & Siegel & Smith] Paddock, J.L. and Siegel, D.R. and Smith, J.L. - *Option Valuation of Claims on Real Assets: The Case of Offshore Petroleum Leases* - Quarterly Journal of Economics, Artigo, 1988.
- [Shreve 2004] Shreve, S.E. - *Stochastic Calculus for Finance* - Springer, Livro, 2004.
- [Tourinho 1979] Tourinho, Octavio A. F. - *Option value of reserves of Natural Resources* - University of California, Artigo, 1979.
- [Trigeorgis 1996] Trigeorgis, L. - *Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation* - MIT Press, Livro, 1996.
- [Tsay] Tsay, R.S. - *Analysis of financial time series* - Wiley Interscience, Livro.

- [Campos] Campos, João Vitor - Apresentação da AEPET na audiência pública sobre o pré-sal - [www.senado.gov.br](http://www.senado.gov.br), 2008
- [Pelet] Pelet, M. - *Real Options in Petroleum: Geometric Brownian Motion and Mean-Reversion with jumps* - Oxford University, Dissertação de Mestrado, 2003.
- [Júnior] Júnior, F. M. - *Avaliação de Campo de Petróleo maduro por opções reais* - IBMEC, Dissertação de mestrado, 2006.
- [Saito & Schiozer & Castro] Saito, R., Schiozer, D.J. e Castro, G. N. - *Simulação de Técnicas de Engenharia de Reservatórios: Exemplo de Utilização de Opções Reais* - Artigo, RAE.
- [GAZETA MERCANTIL] GAZETA MERCANTIL, 11 nov. 2008.
- [FOLHA ON LINE] FOLHA ON LINE. *Entenda o que é camada pré-sal*. Disponível em <http://www1.folha.uol.com.br/folha/dinheiro/ult91u40468.shtm>. acessado em 17 nov. 2008
- [suapesquisa.com] suapesquisa.com. *Petróleo*. Disponível em <http://www.suapesquisa.com/geografia/petroleo/> acessado em 07 fev. 2009
- [Radiobras] Radiobras *Flexibilização do monopólio em 1997 leva à criação da ANP*. Disponível em <http://www.radiobras.gov.br/abrn/brasilagora/materia.phtml?materia=262623>. acessado em 07 fev. 2009
- [ANP] Agência Nacional do Petróleo. *Petróleo e Derivados*. Disponível em <http://www.anp.gov.br/petro/> acessado em 07 fev. 2009
- [Nascimento & Maciel & Moreira & Neto] Nascimento, A.B.M, Maciel, E.F., Moreira, D.L.S., Neto, O.S.S. - *A ANP e a defesa da concorrência no setor de petróleo e gás no Brasil*, 3º Congresso de P&D em Petróleo e Gás, Artigo, Outubro, 2005.
- [Bacoccoli] Bacoccoli, Giuseppe - *Pré-Sal: uma longa história*, Artigo, Jornal Folha de São Paulo, 09 set. 2008
- [RT] Tourinho, Rodolpho - *O Pré-Sal: perspectivas & desafios*, Reunião COINFRA, FIESP 17 out. 2008
- [Formigli 2008]Formigli, José - Apresentação Rio Oil Gas 2008, Petrobrás, 2008 (reservado, disponibilizado pela Petrobrás).
- [Formigli 2007]Formigli, José - Apresentação Pré-Sal Miami-EUA, Petrobrás, 2007(reservado, disponibilizado pela Petrobrás).

- [Araújo] Araújo, R. O. de. *Avaliação de opções reais através do método dos Mínimos Quadrados de Monte Carlo*. PUC/RJ- Dissertação de Mestrado, 2004.
- [Souza & Cunha & Motta] Souza, C. P. R., Cunha, M. M., Motta, R.R. - *Opções Reais Estudo de Caso: Opções Reais na Exploração e Produção (E&P) de Petróleo*, Artigo, XXV Encontro Nac. de Eng. de Produção, Porto Alegre/RS, Brasil, 29 out a 01 de nov de 2005.
- [Grossinho 2008] Grossinho, Maria do Rosário - *Opções Americanas*, Insituto Superior de Economia e Gestão, 2008.
- [da Silva] da Silva, Priscilla Reis - *Transporte Marítimo de Petróleo e Derivados na Costa Brasileira: Estrutura e Implicações Ambientais*, COPPE/UFRJ, Dissertação de Mestrado, 2004.
- [Frota 2003] Frota, Alexandre E. Farias - *Avaliação de opções americanas tradicionais e complexas*, DEI-PUC/RJ, Dissertação de Mestrado, 2003.
- [Wilmott 1995] WILMOTT, P., HOWINSON, S. e DEWYNNE, J. - *The Mathematics of Financial Derivatives. A Student Introduction*, Cambridge University Press, Livro, 1995.

## 9 Anexo - Código fonte do programa implementado no MATLAB

```

function[price]=PDEUndevelopedReserve(V0,D,r,T,N,M,sigma,omega,tol,eta,Zbarra)
% Função que calcula o valor da reserva não-desenvolvida de petróleo pelo
% método de Crank-Nicholson usando o método SOR.
% Parêmtros: V0- valor inicial da reserva desenvolvida
%           D - custos de desenvolvimento da reserva
%           r - taxa de juros livre de risco
%           T - vencimento do projeto
%           N - discretização do tempo
%           M - discretização do espaço
%           sigma - volatilidade da reserva desenvolvida
%           omega - constante de relaxação
%           tol - tolerância do método SOR
%           eta - velocidade de reversão à média dos log de V
%           zbarra - média para onde os log de V reverterem ao longo prazo
Vmax=2*V0;
dt = T/N;
dv = Vmax/M;
oldval=zeros(M-1,1);
newval=zeros(M-1,1);
vetV=linspace(0,Vmax,M+1)';
veti=0:N; vetj=0:M;
mu = r;
K = Zbarra + (sigma^2)/(2*eta);
delta = mu - eta*(K-log(vetV'));
delta(1,1)=0;
%condições de contorno
payoff=max(vetV(2:M)-D,0);
pastval=payoff;
boundvalVmax= zeros(1,N+1);
boundvalVmax(1,N+1) = max(vetV(M+1)-D,0);
boundvalV0=zeros(1,N+1);
%coeficientes matriciais da equação do método de Crank-Nicholson
alpha = 0.25*dt*( sigma^2*(vetj.^2) - (r-delta).*vetj );
beta = -dt*0.5*( sigma^2*(vetj.^2) + r );
gamma = 0.25*dt*( sigma^2*(vetj.^2) + (r-delta).*vetj );
A2 = diag(alpha(3:M),-1) + diag(1+beta(2:M)) + diag(gamma(2:M-1),1);
A1 = diag(-alpha(3:M),-1) + diag(1-beta(2:M)) + diag(-gamma(2:M-1),1);
%solução da sequência de sistemas lineares pelo método SOR
aux=zeros(M-1,1);
for i=N:-1:1
    aux(1)=alpha(2)*(boundvalV0(1,i) + boundvalV0(1,i+1));

```

```

aux(end)=gamma(M)*(boundvalVmax(1,i) + boundvalVmax(1,i+1)) ;
rhs=A2*pastval(:) + aux;
oldval=pastval;
error=REALMAX;
while tol < error
    newval(1)=max(payoff(1),oldval(1)+omega/(1-beta(2))*(...
        rhs(1)-(1-beta(2))*oldval(1)+gamma(2)*oldval(2)));
    for k=2:M-2
        newval(k)=max(payoff(k),oldval(k)+omega/(1-beta(k+1))*(...
            rhs(k)+alpha(k+1)*newval(k-1)-(1-beta(k+1))*oldval(k)+...
            gamma(k+1)*oldval(k+1)));
    end
    newval(M-1)=max(payoff(M-1),oldval(M-1)+omega/(1-beta(M))*(...
        rhs(M-1)+alpha(M)*newval(M-2)-(1-beta(M))*oldval(M-1)));
    error=norm(newval-oldval);
    oldval=newval;
end
    pastval=newval;
end
pastval = [boundvalV0(1) ; pastval; boundvalVmax(1)];
price = interp1(vetV,pastval,V0,'linear');

```