Quantização por Deformação e o Método de Fedosov

José Victor Goulart Nascimento

2012

Sumário

A Juliana, Samuel e Miguel (*in memoriam*).

Agradecimentos

Ao Deus unitrino, Pai, Filho e Espírito Santo, meu Criador, Redentor e Advogado.

À Virgem Santíssima, Mãe de Deus, por pousar em mim seus olhos misericordiosos, e representar minha causa junto a seu Filho, Jesus.

À minha diletíssima esposa, Juliana, vinha fecunda, e ao Samuel, nosso brotinho de oliveira, pelo lar que me deram.

Ao meu pai, Carlos, pelo exemplo de trabalhador incansável, e à minha mãe, Helena, pelo amor incondicional.

Ao Pe. Sérgio, pela solicitude de sua paternidade espiritual por mim, pelos meus e por tantos outros.

Aos meus compadres Rodrigo e Sabrina, pela amizade e pela atenção.

Aos meus demais amigos, dentre os quais, Jean Pierre, Léo, Diego, Ana, Miguel, Tiane, Alessandro, Wanderson e André, por fazerem mais suave a peregrinação neste mundo.

Ao professor Ricardo Berrêdo, por me permitir privar de sua amizade e de sua erudição.

Ao professor Júlio Fabris por ter-me introduzido à pesquisa científica e por fornecer o modelo de competência e produtividade que eu busco emular na precária medida das minhas forças.

Ao professor Henrique Bursztyn, meu orientador, por aceitar o desafio, pelo incentivo, e pela paciência praticamente infinita com que tolerou todas as minhas muitas idiossincrasias.

Ao IMPA, instituição cujo nome ostentarei sempre com grande orgulho, e que foi comigo generosa a não mais poder, devoto, com grande reverência, minha mais sincera gratidão, nas pessoas de Fátima Russo e Jorge Vitório Pereira.

À Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, à qual me encontro presentemente ligado, pelo provimento das condições psicológicas e materiais para a conclusão deste trabalho, agradeço, nas pessoas de Creuza Nacimento e Jairo Bochi.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro.

A UM POETA

Longe do estéril turbilhão da rua,
Beneditino, escreve! No aconchego
do claustro, na paciência e no sossego,
trabalha, e teima, e lima, e sofre, e sua!

Mas que na forma se disfarce o emprego
do esforço; e a trama viva se construa
de tal modo, que a imagem fique nua,
rica mas sóbria, como um templo grego.

Não se mostre na fábrica o suplício
do mestre. E, natural, o efeito agrade,
sem lembrar os andaimes do edifício:

porque a Beleza, gêmea da Verdade,
arte pura, inimiga do artifício,
é a força e a graça na simplicidade.

Olavo Bilac

Resumo

Nesta dissertação, apresentamos a noção de quantização por deformação de variedades de Poisson e provamos que toda variedade simplética pode ser quantizada, i.e., admite um produto que deforma o produto comutativo pontual de funções na direção do produto de Lie dado pelo colchete de Poisson de funções suaves desta variedade. Seguimos a prova construtiva proposta por Bóris V. Fedosov em [Fedosov, 1994]. Com o fito de preparação para a prova, incluímos uma derivação minuciosa dos fatos geométricos envolvidos nela, com um grau de abstração ligeiramente maior do que o necessário: tratamos da geometria local de fibrados vetoriais, concluindo com uma breve exposição comparativa das conexões pseudo-riemannianas e simpléticas. Encontra-se ainda nesta dissertação uma classificação dos produtos-estrela diferenciais admitidos por uma variedade simplética, para a qual lançamos mão de resultados cohomológicos deduzidos rigorosamente, embora por métodos elementares, numa parte do trabalho dedicado à cohomologia de Hochschild.

Abstract

In this work we introduce the notion of deformation quantization of Poisson manifolds and prove that every symplectic manifold can be quantized, in the sense that it admits a product which deforms the pointwise commutative product of functions in the direction given by the Lie bracket of smooth functions. We follow the constructive proof proposed by Boris V. Fedosov in [Fedosov, 1994]. In order to prepare the reader for the proof itself, we have included a careful derivation of the geometrical facts we need, with a degree of abstraction perhaps a little bit greater than necessary: we discuss the local geometry of vector bundles, concluding with a brief comparative exposition of pseudo-riemannian and symplectic connections. It is to be found also in this work a classification of differential star-products beared by a symplectic manifold, for which we have made use of cohomological results rigorously derived, although by elementary methods. These results are to be found in a part devoted to Hochschild cohomology.

Introdução

O objetivo desta dissertação é prover uma introdução ao tema da Quantização por Deformação que seja acessível a estudantes de mestrado em Matemética e Física. Os requisitos para sua leitura são apenas familiaridade com Análise em Variedades Diferenciáveis, incluindo a Cohomologia de Rham, e noções básicas de Álgebra, como Grupos e Anéis. O caminho escolhido para levar a cabo esse desiderato é a célebre construção geométrica de Fedosov de produtos-estrela em variedades simpléticas, que veio à luz em [Fedosov, 1994].

A primeira parte da dissertação contém um compêndio dos resultados geométricos usados na construção de Fedosov. Apesar da estrutura sinótica, procurou-se, na medida do possível, fazer da apresentção desses tópicos geométricos um texto auto-contido e evitar a todo custo transições abruptas ou artificiais entre as suas partes. Ele pode ser lido como um trabalho à parte, ou como um apêndice. De fato, pode ser ignorado na leitura da dissertação e abordado apenas para consultar notações, definições e resultados.

O mesmo se pode dizer da segunda parte desta dissertação. Ela contém um cálculo por métodos elementares dos grupos de cohomologia Hochschild diferencial de uma variedade, como encontrado em [Gutt-Rawnsley, 1999]. Não se trata de uma cópia desse artigo, no entanto: procurou-se tornar os argumentos tão explícitos quanto possível, o que deu uma redação original ao referido cálculo. Mas também pode (talvez deva) ser ignorada na leitura, e usada como referência, quando necessário.

O tema *de facto* da dissertação é desenvolvido na terceira parte. A respeito dessa terceira parte, responderemos, nesta introdução, às perguntas seguintes.

Que resultados provaremos?

A questão da existência da deformação por quantização de uma variedade simplética foi levantada já no trabalho seminal [Flato et al., 1978, 1] de Bayen, Flato, Fronsdal, Lichnerovicz & Sternheimer em 1978, e satisfatoriamente respondida (positivamente) por Wilde & Lecomte em *Existence of star-products and of formal deformations in Poisson Lie algebra of arbitrary symplectic manifold*, publicado nas Letters os Mathematical Physics em 1983. Mais tarde, uma prova construtiva e com forte apelo geométrico foi dada por Bóris V. Fedosov em [Fedosov, 1994]. Reproduziremos essa prova no capítulo final da dissertação. Ela se baseia na escolha prévia de uma conexão simplética ∇ livre de torção na variedade (M, ω) candidata à quantização. Por sugestão de Israel Gelfand em [Gelfand et al., 1997], os dados iniciais (M, ω, ∇) dessa construção geométrica passaram a merecer o epônimo "*variedade de Fedosov*".

Começando com uma variedade de Fedosov, a idéia é estender ∇ a uma conexão ∂ no fibrado formal supersimétrico $(\vee^{\bullet}T^*M \otimes \wedge^{\bullet}T^*M)[[\hbar]]$ associado ao fibrado tangente TM, chamado *superfibrado de Weyl*, e depois introduzir uma modificação em ∂ que dê origem a uma conexão plana D. As seções horizontais do fibrado de Weyl formam então uma $\mathbb{C}[[\hbar]]$ −subálgebra em correspondência biunívoca com o anel das funções formais $C^{\infty}(M)[[\hbar]]$. Usa-se essa bijeção para induzir em $C^{\infty}(M)[[\hbar]]$ um produto não-comutativo modelado pelo produto de Weyl-Moyal nas fibras de $(\vee^{\bullet}T^*M)[[\hbar]]$. Este é o produto-estrela de Fedosov. Ele não é unicamente determinado pelos dados (M, ω, ∇) porque no meio da construção toma parte uma condição de calibre, com algum grau de liberdade.

Provaremos ainda, com [Bertelson-Cahen-Gutt, 1997], que as classes de equivalência dos produtos-estrela diferenciais de uma variedade simplética (M, ω) admitem uma parametrização afim em termos das séries numa indeterminada com coeficientes no segundo grupo de cohomologia de Rham de M. Esse resultado é obtido por métodos puramente cohomológicos exceto por alguns ingredientes provenientes da construção de Fedosov.

Por que produtos-estrela são interessantes?

A descoberta, em fins do século XIX, de que o espectro de emissão de uma cavidade (um modelo de corpo negro) estava em desacordo com a previsão clássica (de Rayleigh-Jeans, baseada na mecânica newtoniana via estatística de Maxwell-Boltzmann) levaria, em pouco mais de 30 anos, a uma revisão epistemológica profunda e sem precedentes na história das ciências naturais: estamos falando da Mecânica Quântica, cujo arcabouço cinemático difere fundamentalmente daquele da Mecânica Clássica, assentado por Galileo no século XVII e essencialmente inalterado desde então.

Grosso modo, a versão quântica de um sistema mecânico clássico pode ser implementada (processo a que os físicos denominam *quantização*) em termos de uma deformação formal da álgebra dos observáveis clássicos, determinada por um produto-estrela. A dinâmica clássica é recuperada como limite formal dessa versão quântica-estrela quando o parâmetro de deformação $\hbar$ tende a zero. Fisicamente, isso corresponderia à situação macroscópica, i.e., quando as ações (grandezas físicas com dimensão de energia vezes tempo) obtidas a partir dos parâmetros do sistema (ou por outra: as "ações típicas" desse sistema, num certo sentido) são muito grandes em comparação com a constante de Planck h, a ponto mesmo de podermos desprezar esta última nos cálculos. Nessas circunstâncias, espera-se que o comportamento desse sistema seja predominantemente clássico.

Logo que a noção surgiu, muito se especulou sobre se os produtos-estrela não poderiam fornecer uma prescrição matematicamente coerente para a quantização de sistemas clássicos mais gerais que os mecânicos (com espaços de fase mais gerais do que um fibrado cotangente de uma variedade), e, quiçá, indicar o caminho para uma teoria unificada e matematicamente satisfatória do conceito de quantização. Essa esperança, hoje, não parece mobilizar muitos físicos-matemáticos.

Uma última palavra sobre a Física dos produtos-estrela, para encerrar esta breve introdução. Embora bastante satisfatórias do ponto de vista matemático, tais construções não se referem a quaisquer processos físicos atuais. Com efeito, a Física fundamental é aquela dos sistemas quânticos, sendo a Mecânica Clássica como que a aparência sensível[1] dos sistemas macroscópicos. Ou por outra: obter o análogo quântico de um sistema clássico – ao que chamamos, algo informalmente, "quantizar" este último – é inatural. Entretanto, esse processo é uma fonte prolífica de exemplos[2] tendo interesse teórico próprio.

[1] Nosso sentidos são clássicos; meditando mais detidamente neste ponto, concluiremos talvez que é a estrutura mesma dos nossos sentidos que determina o que chamaríamos o "caráter predominantemente clássico" do mundo sensível.

[2] e.g., o oscilador harmônico simples quântico, que serve de base para a teoria quântica de campos escalares livres.

Parte I

Sobre a geometria local dos fibrados vetoriais

“$\alpha\gamma\epsilon\omega\mu\epsilon\ \ \tau\rho\eta\tau o\sigma\mu\eta\ \ \epsilon\iota\sigma\iota\tau\omega$[3]”
(inscrição sobre o pórtico da Academia Platônica)

Nesta primeira parte encontra-se um compêndio de resultados geométricos invocados ao longo da dissertação. A exposição mantém-se nos limites do que será estritamente necessário para os capítulos posteriores[4]. Não obstante, o presente tomo é bem autocontido, e tivemos o zelo de oferecer provas a quase todas as proposições enunciadas, exceção feita a certos resultados clássicos, satisfatoriamente difundidos na literatura.[5]

A decisão de remover o tratamento dos referidos temas para um volume próprio foi tomada em benefício da legibilidade e da completude: o autor anelava dotar, a um só tempo, de fluidez e rigor a apresentação do que é, de fato e de direito, o assunto deste trabalho: a quantização por deformação. A apresentação fragmentária, com imissão de definições e teoremas alheios ao assunto principal, pareceu-lhe prejudicar a cadência natural das idéias; ao passo que a alternativa de uma exposição lacônica, referindo o leitor às fontes consagradas, frustaria seu desejo por completude. Ou por outra: esta primeira parte deve ser entendida como o “sótão” da dissertação. Aqui o leitor encontrará uma mixórdia que se afiguraria incômoda em qualquer outro lugar, e pior ainda espalhada a esmo.

[3] “Aqui não entre quem não for geômetra”, em tradução livre.

[4] Até porque esses limites praticamente coincidem com os da expertise do autor nos referidos assuntos.

[5] Tudo de que precisaremos sobre a teoria de módulos encontra-se na seção VIII.2 de [Garcia-Lequain]. Assumimos os resultados analíticos do texto introdutório [Tu]. Já os requisitos em topologia simplética equivalem ao livrinho [Cannas].

Exemplos de resultados citados sem prova nesta dissertação são a existência de partição da unidade (teorema 13.10 de [Tu]) e o teorema de Darboux (teorema 1.12 de [Cannas]).

Capítulo 0

Convenções

Fixemos de uma vez por todas algumas convenções a serem observadas ao longo de toda a dissertação.

Por *variedade diferenciável*, neste trabalho, entenderemos uma variedade diferenciável real de classe C^{∞}. Nesta dissertação, sempre que olharmos para o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ sob o ângulo da difereciabilidade, estaremos encarando-o como a variedade real $\mathbb{R}^2$ munida do mapa $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de multiplicação complexa[1]. *Mapas* são aplicações de classe C^{∞} entre variedades diferenciáveis. A palavra *função* está reservada para mapas que tomam valores no corpo de escalares, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Difeomorfismos, neste texto, serão sempre de classe C^{∞}. Assim, sistemas de coordenadas locais em variedades são sempre de classe C^{∞}.

Uma *bump-function* η em torno de um ponto x e com suporte num aberto U de uma variedade diferenciável M é uma função (suave) $\eta : M \to \mathbb{R}$ que goza das seguintes propriedades:

1) existe um compacto $K \subset U$ que possui x como ponto interior e é tal que $\eta(y) = 1$ para todo $y \in K$;

2) *supp* $\eta \subset U$;

3) $0 \leq \eta(y) \leq 1$ para todo $y \in M$.

É fácil construir *bump-functions*: podemos admitir, sem perda de generalidade, que (U, ψ) é uma vizinhança coordenada de x tal que $\psi(x) = 0$. Existe $r > 0$ tal que $\overline{B(0,r)} \subset \psi(U)$. Defina então as funções suaves

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{1-t^2}\right), \text{ se } |t| < 1 \\ 0, \text{ se } |t| \geq 1 \end{cases} \end{array},$$

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \frac{\int_{-1}^{t} f(s)ds}{\int_{-1}^{1} f(s)ds} \end{array}$$

[1] $zw = (z^1 w^1 - z^2 w^2, z^1 w^2 + z^2 w^1)$ para quaisquer $z = (z^1, z^2)$, $w = (w^1, w^2) \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

e

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R}^m & \to & \mathbb{R} \\ & v & \mapsto & g\left(2-\frac{3}{r}\|v\|\right) \end{array}$$

e escreva finalmente

$$\begin{array}{rccc} \eta: & M & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & \left\{ \begin{array}{c} h\left(\psi\left(y\right)\right), \text{ se } y \in U \\ 0, \ y \notin U \end{array} \right. \end{array}.$$

A função η assim obtida é uma *bump-funtion* em torno de x com suporte em U. *Bump-functions* serão empregadas freqüentemente para estender globalmente (i.e., a toda a variedade M) de modo suave funções definidas apenas localmente (i.e., num subconjunto aberto $U \subset M$).

Adotaremos desde já a convenção de soma de Einstein[2] para índices gregos, mas não para índices latinos. Estes serão somados, quando o forem, explicitamente.

Denotaremos o conjunto $\{m, m+1, \cdots, n-1, n\}$ dos inteiros consecutivos entre m e n por $[n]_m$. Se $m = 1$, então escrevemos simplesmente $[n]$. O símbolo $\mathbb{N}$ significará sempre o conjunto dos números inteiros positivos, sendo $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ o conjunto dos inteiros não-negativos.

Dados $m, n \in \mathbb{N}$, podemos falar do conjunto $M_{m\times n}(X)$ das matrizes $m \times n$ sobre um conjunto X qualquer. Uma matriz $m \times n$ sobre X é uma aplicação $\mathbf{A} : [m] \times [n] \to X$. Tradicionalmente, escreve-se $\mathbf{A} = (A_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$, onde $A_{ij} = \mathbf{A}(i,j)$, identificando $\mathbf{A}$ e sua imagem, que costuma ser representada por uma tabela com m linhas e n colunas:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}.$$

Quando usarmos a notação (A_{ij}), a letra i indicará a linha e a letra j a coluna que exibem a entrada A_{ij}. Usaremos indistintamente índices sobrescritos e subscritos para rotular as entradas de uma matriz. Identificaremos sempre a $n-$ésima potência cartesiana de um conjunto X com o conjunto das matrizes $1 \times n$ sobre X:

$$X^n = \underbrace{X \times \cdots \times X}_{n \text{ fatores}} \equiv M_{1\times n}(X).$$

Em particular, temos $X = M_{1\times 1}(X)$.

[2] A notação de Einstein consiste no seguinte: há um somatório subentendido em cada índice que aparece duplicado numa mesma parcela. O domínio da soma é dado pelo contexto. P.ex., a expressão local $\sum_{j=1}^m X^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ de um campo vetorial X em coordenadas $x^1, \cdots, x^m$ fica $X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, sem necessidade de maiores esclarecimentos.

A toda matriz $\mathbf{A} = (A_{ij}) \in M_{m\times n}(X)$ associamos uma matriz $\mathbf{A}^* = \left(A^*_{ij}\right) \in M_{n\times m}(X)$, chamada *a matriz transposta de* $\mathbf{A}$, dada por

$$A^*_{ij} = A_{ji}.$$

Quando X é um anel[3] $(X, +, \times)$, faz sentido a adição de matrizes de um mesmo tipo $m \times n$ e a multiplicação de uma matriz $m \times n$ por uma outra $n \times p$, dadas por

$$(A_{ij})_{m\times n} + (B_{ij})_{m\times n} = (A_{ij} + B_{ij})_{m\times n}$$

e

$$(A_{ij})_{m\times n} \times (B_{ij})_{n\times p} = \left(\sum_{k=1}^{n} A_{ik} \times B_{kj}\right)_{m\times p}.$$

É evidente que, se $(X, +, \times)$ é um anel, então, para cada $n \in \mathbb{N}$ o conjunto $M_{n\times n}(X)$ das matrizes quadradas de ordem n com entradas em X é também um anel. Se X tiver unidade 1, denotaremos por $\mathbf{I}_n = (\delta_{ij}) = \left(\delta^{ij}\right) = \left(\delta^i_j\right) = \left(\delta^j_i\right)$ a unidade do anel $M_{n\times n}(X)$.

Dadas matrizes $\mathbf{A} \in M_{m\times n}(X)$ e $\mathbf{B} \in M_{p\times q}(X)$ com entradas num anel X, a sua *soma direta* é a matriz

$$\mathbf{A} \oplus \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0}_{m\times q} \\ \mathbf{0}_{p\times n} & \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

em $M_{(m+p)\times(n+q)}(X)$. Dadas matrizes $\mathbf{A} \in M_{k\times l}(X)$, $\mathbf{A}' \in M_{l\times m}(X)$, $\mathbf{B} \in M_{n\times p}(X)$ e $\mathbf{B}' \in M_{p\times q}(X)$, vale a regra

$$(\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}) \times (\mathbf{A}' \oplus \mathbf{B}') = \mathbf{A}\mathbf{A}' \oplus \mathbf{B}\mathbf{B}'. \tag{1}$$

Daí se infere que, se $\mathbf{A} \in M_{m\times m}(X)$ e $\mathbf{B} \in M_{n\times n}(X)$ são elementos invertíveis, então também é invertível sua soma direta, e temos

$$(\mathbf{A} \oplus \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \oplus \mathbf{B}^{-1}. \tag{2}$$

Uma noção pouco usual – mas que aplicaremos com proveito nesta dissertação – é a do *produto de Krönecker*[4] de matrizes, que passamos a definir. Sejam $(X, +)$, $(Y, +)$ e $(Z, +)$ grupos abelianos e $\times : X \times Y \to Z$ uma aplicação que preserva as estruturas abelianas envolvidas[5], i.e., tal que valem

$$x \times (y + y') = x \times y + x \times y'$$

[3] Não pedimos aqui que $(X, +, \times)$ seja comutativo ou que tenha unidade.

[4] Ver, por exemplo, seção 3.2 de [Arfken-Weber, 2005].

Usamos a notação $[\times]$ em lugar da tradicional $\otimes$ para evidenciar a dependência do produto $\times$ do anel $(X, +, \times)$ subjascente. Assim, a depender do anel X, o produto de Krönecker pode aparecer ainda como $[\cdot]$, $[\otimes]$, $[\wedge]$, $[\vee]$, etc. Essa notação ainda tem a vantagem de evitar confusão com os produtos tensoriais $\otimes$ definidos a seguir.

[5] À guisa de exemplo, podemos manter em mente o caso $X = Y = Z$, onde $(X, +, \times)$ é um anel.

e

$$(x + x') \times y = x \times y + x' \times y$$

para todos $x, x' \in X$ e $y, y' \in Y$. Dadas matrizes $\mathbf{A} \in M_{m \times n}(X)$ e $\mathbf{B} \in M_{p \times q}(Y)$, definimos o produto de Krönecker (induzido por $\times$) de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ como a seguinte matriz de ordem $mp \times nq$ com entradas em Z:

$$\mathbf{A}\,[\times]\,\mathbf{B} = \begin{bmatrix} A_{11} \times \mathbf{B} & A_{12} \times \mathbf{B} & \cdots & A_{1n} \times \mathbf{B} \\ A_{21} \times \mathbf{B} & A_{22} \times \mathbf{B} & \cdots & A_{2n} \times \mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} \times \mathbf{B} & A_{m2} \times \mathbf{B} & \cdots & A_{mn} \times \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} \times B_{11} & \cdots & A_{11} \times B_{1q} & \cdots & A_{1n} \times B_{11} & \cdots & A_{1n} \times B_{1q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{11} \times B_{p1} & \cdots & A_{11} \times B_{pq} & \cdots & A_{1n} \times B_{p1} & \cdots & A_{1n} \times B_{pq} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} \times B_{11} & \cdots & A_{m1} \times B_{1q} & \cdots & A_{mn} \times B_{11} & \cdots & A_{mn} \times B_{1q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} \times B_{p1} & \cdots & A_{m1} \times B_{pq} & \cdots & A_{mn} \times B_{p1} & \cdots & A_{mn} \times B_{pq} \end{bmatrix}$$

O produto de Krönecker é dito "bilinear" porque valem as identidades

$$\mathbf{A}\,[\times]\,(\mathbf{B} + y \times \mathbf{B}') = \mathbf{A}\,[\times]\,\mathbf{B} + y \times \big(\mathbf{A}\,[\times]\,\mathbf{B}'\big) \tag{3}$$

e

$$(\mathbf{A} + x \times \mathbf{A}')\,[\times]\,\mathbf{B} = \mathbf{A}\,[\times]\,\mathbf{B} + x \times (\mathbf{A}'[\times]\,\mathbf{B}) \tag{4}$$

para todos $x \in X$, $y \in Y$ e todas as matrizes $\mathbf{A}, \mathbf{A}' \in M_{m \times n}(X)$ e $\mathbf{B}, \mathbf{B}' \in M_{p \times q}(Y)$. Cumpre ainda destacar o relacionamento entre o produto usual de matrizes e o produto de Krönecker: dadas matrizes $\mathbf{A}_{k \times l}$, $\mathbf{B}_{m \times n}$, $\mathbf{C}_{l \times p}$ e $\mathbf{D}_{n \times q}$ com entradas em um anel $(X, +, \times)$, vale a identidade

$$(\mathbf{A}\,[\times]\,\mathbf{B}) \times (\mathbf{C}\,[\times]\,\mathbf{D}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{C})\,[\times]\,(\mathbf{B} \times \mathbf{D}) \tag{5}$$

As provas destas propriedades são diretas e serão omitidas em benefício da brevidade. Da última delas decorre o seguinte fato: se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são matrizes (quadradas) invertíveis, então também é invertível seu produto de Krönecker, e vale

$$(\mathbf{A}\,[\times]\,\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\,[\times]\,\mathbf{B}^{-1}. \tag{6}$$

Cada aplicação $f : X \longrightarrow Y$ induz naturalmente aplicações $f : M_{m \times n}(X) \to M_{m \times n}(Y)$, que denotaremos pela mesmo símbolo f, dadas por

$$f(A_{ij}) = (f(A_{ij})).$$

Por exemplo, se $(X, +, \times) = (\Omega^\bullet(M), +, \wedge)$ é o anel das formas diferenciais sobre uma variedade M, faz sentido a multiplicação exterior $\wedge$ de matrizes

$m \times n$ por matrizes $n \times p$ e podemos também estender a derivada exterior d às matrizes $M_{m\times n}(\Omega^{\bullet}(M))$.

Por outro lado, se X for um subanel do anel R^{Ω} das funções definidas num conjunto Ω arbitrário tomando valores em um anel $(R, +, \cdot)$, dados uma matriz $\mathbf{F} = \left(f_j^i\right) \in M_{m\times n}(X)$ e um elemento $\omega \in \Omega$, definimos a matriz $\mathbf{F}(\omega) \in M_{m\times n}(R)$ por

$$\mathbf{F}(\omega) = \left(f_j^i(\omega)\right)$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, o grupo das permutações de n elementos $(Bij\,[n], \circ)$ será denotado por S_n. Por simplicidade, denotaremos a composição $\sigma \circ \rho$ por $\sigma\rho$. Uma transposição é um elemento $\tau \in S_q$ para o qual existem $i, j \in [q]$ distintos tais que

$$\tau(k) = \begin{cases} j, \text{ se } k = i \\ i, \text{ se } k = j \\ k, \text{ se } k \notin \{i, j\} \end{cases}.$$

Costuma-se denotar $\tau = (ij)$. Um resultado ao qual recorreremos algumas vezes é o fato de que toda permutação é uma composição de transposições.[6]

Sempre que tivermos um produto cartesiano de conjuntos, como $X = \underset{\lambda\in L}{\times} X_{\lambda}$, designaremos, independentemente do contexto e sem mais esclarecimentos, por pr_{λ} a projeção no $\lambda-$ésimo fator: $f \in X \mapsto f(\lambda) \in X_{\lambda}$, para todo $\lambda \in L$.

Dada uma lista de objetos $x_1, \cdots, x_n, \cdots$, simbolizaremos a lista $x_1, \cdots, x_{j-1}$, $x_{j+1}, \cdots, x_n, \cdots$, obtida da anterior por supressão do $j-$ésimo termo, por $x_1, \cdots$, $\widehat{x_j}, \cdots, x_n, \cdots$.

[6] Ver proposição V.10.8 de [Garcia-Lequain].

Capítulo 1

Prolegômenos algébricos

Assumimos nesta dissertação os fatos básicos sobre anéis e grupos encontrados p.ex. em [Garcia-Lequain].

1.1 Módulos

Seja A um anel com unidade. A ação

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & A \times M & \longrightarrow & M \\ & (a,m) & \mapsto & am \end{array}$$

do anel A no grupo abeliano $(M,+)$ faz deste um $A-$*módulo à esquerda* quando satisfaz, para quaisquer $m,n \in M$, $a,b \in A$, aos axiomas

$$1m = m$$

$$(ab)\,m = a\,(bm)$$

$$(a+b)\,m = am + bm$$

e

$$a\,(m+n) = am + an.$$

Define-se analogamente uma estrutura de $A-$*módulo à direita* em M. Se ambas estruturas de $A-$módulo à direita e $B-$módulo à esquerda coexistem no grupo abeliano $(M,+)$ e são compatíveis no sentido de que, para todos $m \in M$, $a \in A$ e $b \in B$ temos

$$a\,(mb) = (am)\,b,$$

então dizemos que M é um $A, B-$*bimódulo*. Se $A = B$, falamos simplesmente que M é um $A-$bimódulo.[1]

Exemplo 1 *Todo anel unital A é um $A-$bimódulo, de modo tirival.*

Todo grupo abeliano $(G, \cdot)$ possui uma estrutura natural de $\mathbb{Z}-$módulo, dada pela mutiplicação escalar (potenciação)

$$g^n = \begin{cases} \underbrace{g \cdot \cdots \cdot g}_{n\ fatores}, & se\ n > 0 \\ e, & se\ n = 0 \\ \underbrace{g^{-1} \cdot \cdots \cdot g^{-1}}_{n\ fatores}, & se\ n < 0 \end{cases},$$

definida para todos $g \in G$ e $n \in \mathbb{Z}$. Assim, a noção de $A-$módulo generaliza aquela de grupo abeliano.

Dados $m, n \in \mathbb{N}$ e um anel unital R, o grupo aditivo $M_{m\times n}(R)$ é um $M_{m\times m}(R)-$módulo à esquerda e um $M_{n\times n}(R)-$módulo à direita. Como o produto de matrizes é associativo, temos que essas estruturas são compatíveis e, portanto, que $M_{m\times n}(R)$ é um bimódulo.

Quando o anel A é um corpo, temos que a noção de $A-$módulo é idêntica àquela de espaço vetorial sobre o corpo A. Assim, os espaços vetoriais são casos particulares de módulos. Essa observação por si só fornece uma miríade de exemplos para todas as definições que se seguem.

Dados dois $A-$módulos M e N, um *homomorfismo $A-$linear* é uma aplicação $f : M \to N$ que preserva a estrutura de módulo, i.e., que satisfaz à condição

$$f(m + an) = f(m) + af(n)$$

para todos $m, n \in M$ e $a \in A$. O conjunto dos homomorfismos $A-$lineares de M em N será denotado por $Hom_A(M, N)$. É trivial dotar $Hom_A(M, N)$ de uma estrutura de $A-$módulo.

Um $A-$*submódulo* de um $A-$módulo M é um subgrupo aditivo $N \subset M$ estável com relação à ação do anel A, i.e., tal que $A \cdot N \subset N$. Denotaremos por $span_M(S)$ o $A-$*submódulo gerado pelo subconjunto S* de um $A-$módulo

[1] A menos de menção em contrário, um $A-$módulo significará sempre um $A-$módulo à esquerda. Quando o anel A é comutativo, dado um $A-$módulo à esquerda M, existe uma ação canônica de A à direita de M compatível com a original: basta definir $ma \equiv am$, $\forall a \in A, \forall m \in M$. De fato, temos

$$(am)b = b(am) = (ba)m = (ab)m = a(bm) = a(mb)$$

Nesta dissertação, sempre que lidarmos com $C^\infty(M)-$módulos, como o próprio anel $C^\infty(M)$ ou $\mathfrak{X}(M)$ ou $\Omega(M)$, consideraremo-los como bimódulos, segundo a estrutura canônica acima.

M, definido como o menor $A-$submódulo de M contendo S. É evidente que, se $f : M \to N$ é um homomorfismo $A-$linear e $S \subset M$, então vale a igualdade

$$span_N (f (S)) = f (span_M (S)) .$$

Seja $\{M_\lambda\}_{\lambda \in L}$ uma família de $A-$módulos. Considere o conjunto M das funções $f : L \to \underset{\lambda \in L}{\cup} M_\lambda$ tais que se tem $f (\lambda) \in M_\lambda$ para todo $\lambda \in L$ e $f (\lambda) \neq 0$ apenas para um conjunto finito $L_f \subset L$ de índices λ. Defina uma adição $+$ e uma ação $\cdot$ de A em M pelas regras

$$(f + g) (\lambda) = f (\lambda) + g (\lambda)$$

e

$$(af) (\lambda) = af (\lambda) ,$$

onde, para cada $\lambda \in L$, as operações que figuram no membro direito são as homólogas do $A-$módulo M_λ. A estrutura $(M, +, \cdot, A)$ é um $A-$módulo denominado *a soma direta* da família $\{M_\lambda\}_{\lambda \in L}$ e denotado por $\underset{\lambda \in L}{\oplus} M_\lambda$. São mais comuns as seguintes notações aditivas para um elemento $f \in \underset{\lambda \in L}{\oplus} M_\lambda$.

$$f = \sum_{\lambda \in L_f} f (\lambda) \ ,$$

$$f = \underset{\lambda \in L}{\oplus} f (\lambda) \ ,$$

ou, mais explicitamente,

$$f = f (\lambda_1) \oplus \cdots \oplus f (\lambda_N) \ ,$$

ou simplesmente

$$f = f (\lambda_1) + \cdots + f (\lambda_N) \ ,$$

onde $L_f = \{\lambda_1, \cdots , \lambda_N\}$.

É claro que podemos identificar cada parcela M_{λ_0} com o $A-$submódulo de $\underset{\lambda \in L}{\oplus} M_\lambda$ formado por aquelas funções que se anulam para todo $\lambda \neq \lambda_0$ em L. Escreveremos então $M_{\lambda_0} \subset \underset{\lambda \in L}{\oplus} M_\lambda$, sem maiores esclarecimentos.

Seja S um subconjunto de um $A-$módulo M. Uma *combinação $A-$linear* dos termos de S é um elemento de M da forma

$$\begin{aligned} m &= \sum_{k=1}^{r} a_k m_k \\ &= a_1 m_1 + \cdots + a_r m_r \ , \end{aligned}$$

onde $r \in \mathbb{N}$, $m_1, \cdots , m_r \in S$ e $a_1, \cdots , a_r \in A$. É imediato que $span_M (S)$ é tão somente o conjunto das combinações $A-$lineares de S. O subconjunto S é dito *linearmente independente* se toda combinação linear nula de termos em S possuir coeficientes nulos em A, i.e., se vale sempre a implicação

$$\sum_{k=1}^{r} a_k x_k = 0 \Rightarrow a_1 = \cdots = a_r = 0.$$

Uma *base* para um $A-$módulo M é um subconjunto lineramente independente $\mathcal{B} \subset M$ tal que $span_M(\mathcal{B}) = M$. Todo elemento de M se escreve de maneira única como combinação $A-$linear dos termos da base $\mathcal{B}$. Um $A-$módulo que admite uma base é dito um *$A-$módulo livre*.

É um resultado vulgar da Álgebra Linear o fato de que todo espaço vetorial admite uma base[2]. Em linhas gerais, a prova desse fato consiste no seguinte: 1) ordenar parcialmente a classe (não-vazia) dos subconjuntos linearmente independentes por inclusão; 2) mostrar que toda cadeia ascendente de conjuntos l.i. possui uma cota superior, dada pela sua união; 3) usar o Lema de Zorn para obter um conjunto l.i. maximal; 4) mostrar que a existência de um vetor não gerado por esse conjunto maximal contraria sua maximalidade, donde uma contradição. Poderíamos pensar em adaptar a prova deste resultado ao caso geral de $A-$módulos para tentar provar que todos estes são livres, no sentido da definição acima. Um óbice que se levantaria já no passo 1 de nossa estratégia é o fato nada agradável de que não se pode afirmar que há conjuntos linearmente independentes num $A-$módulo geral.[3].

Exemplo 2 *Como $\mathbb{Z}-$módulo, o anel quociente $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ não possui subconjuntos linearmente independentes, pois $n\bar{m} = \bar{0}$ para todo $\bar{m} \in \mathbb{Z}_n$. De modo geral, módulos de torção[4] não possuem subconjuntos linearmente independentes.*

Em particular, encarado como $A-$módulo, o anel A tem base $\{1\}$ se, e somente se, é domínio de integridade.

É um resultado fundamental da Álgebra Linear o fato de que se um espaço vetorial admite uma base finita, então todas as suas bases possuem a mesma cardinalidade. Diz-se dessa cardinalidade comum ser *a dimensão* do espaço vetorial em questão. Um fato análogo se pode estabelecer para módulos, desde que o anel A possua propriedades adicionais.

---

[2] Notar que a prova oferecida depende essencialmente do Axioma da Escolha, via Lema de Zorn.

[3] Outra dificuldade insanável será reproduzir o passo (4), cuja falsidade para $A-$módulos em geral decorre, em última análise, da não-invertibilidade de elementos do anel A.

[4] Dado um $A-$módulo M, seu *$A-$submódulo de torção* é dado por

$$T(M) = \{m \in M;\ \exists a \in A;\ am = 0\}$$

Quando $M = T(M)$, dizemos que M é um *$A-$módulo de torção*. Por exemplo, são $\mathbb{Z}-$módulos de torção todos os grupos abelianos finitos. Um exemplo de grupo abeliano infinito que é $\mathbb{Z}-$módulo de torção é o grupo multiplicativo das matrizes quadradas reais de ordem 2 da forma

$$\begin{pmatrix} \cos(2\pi r) & \sin(2\pi r) \\ -\sin(2\pi r) & \cos(2\pi r) \end{pmatrix},$$

onde r é um número racional.

Proposição 3 *Sejam A um anel comutativo com unidade e M um $A-$módulo livre com base finita. Então, todas as bases finitas de M possuem a mesma cardinalidade.*

Prova. Sejam $\mathcal{I}$ um ideal maximal[5] de A, $\mathcal{B} = \{m_1, \cdots, m_r\}$ a referida base finita de M e considere o epimorfismo $A-$linear

$$\begin{array}{cccc} f: & M & \twoheadrightarrow & \frac{A}{\mathcal{I}} \times \cdots \times \frac{A}{\mathcal{I}} = \left(\frac{A}{\mathcal{I}}\right)^r \\ & \sum_{k=1}^r a_k m_k & \mapsto & (a_1 + \mathcal{I}, \cdots, a_r + \mathcal{I}) \end{array}$$

cujo núcleo é exatamente $\mathcal{I}M$, como se vê facilmente. Assim, é um isomorfismo de grupos aditivos a aplicação quociente

$$\begin{array}{cccc} \bar{f}: & \frac{M}{\mathcal{I}M} & \twoheadrightarrow & \frac{A}{\mathcal{I}} \times \cdots \times \frac{A}{\mathcal{I}} = \left(\frac{A}{\mathcal{I}}\right)^r \\ & \sum_{k=1}^r a_k m_k + \mathcal{I}M & \mapsto & (a_1 + \mathcal{I}, \cdots, a_r + \mathcal{I}) \end{array}.$$

Como $\mathcal{I}$ é ideal maximal de A, o anel quociente $\frac{A}{\mathcal{I}}$ é um corpo, donde segue que o $A-$módulo $\left(\frac{A}{\mathcal{I}}\right)^r$ é um espaço vetorial de dimensão r sobre o corpo $\frac{A}{\mathcal{I}}$. É trivial dotar $\frac{M}{\mathcal{I}M}$ de uma estrutura de $\frac{A}{\mathcal{I}}-$espaço vetorial compatível com a aplicação $\bar{f}$, no sentido de que $\bar{f}$ seja também um isomorfismo $\frac{A}{\mathcal{I}}-$linear. Deste modo, temos que $\frac{M}{\mathcal{I}M}$ é um espaço vetorial de dimensão r sobre $\frac{A}{\mathcal{I}}$. Usando outra base de M com, digamos, s elementos, concluiríamos analogamente que $\frac{M}{\mathcal{I}M}$ é um espaço vetorial de dimensão s sobre $\frac{A}{\mathcal{I}}$, donde $s = r$, e a proposição está provada. ■

À cardinalidade comum de todas as bases finitas de um $A-$módulo livre finitamente gerado denominamos *o posto* do referido $A-$módulo[6].

Dado um conjunto X arbitrário, denotaremos por $\langle X \rangle_A$ o $A-$*módulo livre gerado por* X. Trata-se do conjunto das funções $f : X \to A$ tais que $f(x) = 0$ exceto para x num subconjunto finito X_f de X, munido das operações

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

e

$$(af)(x) = af(x),$$

onde as operações que figuram no membro direito são as operações do anel A. É mais comum a notação aditiva

$$\begin{aligned} f &= \sum_{k=1}^{N} f(x_k) x_k \\ &= f(x_1) x_1 + \cdots + f(x_N) x_N \end{aligned}$$

[5] É uma conseqüência bem conhecida do Axioma da Escolha o fato de todo anel (não-trivial) comutativo com unidade possuir ideal maximal.

[6] A prova dada acima pode ser facilmente adaptada para provar que, se M é um $A-$módulo de posto r, então todas as bases de M têm exatamente r elementos, i.e., que não coexistem bases finitas e infinitas. A única sutileza consiste na necessidade de se substituir $\left(\frac{A}{\mathcal{I}}\right)^r$ pelo conjunto das funções $f : \kappa \to \frac{A}{\mathcal{I}}$ que se anulam exceto num subconjunto finito de um cardinal infinito arbitrário κ, dotando este conjunto da estrutura natural de espaço vetorial de dimensão infinita sobre $\frac{A}{\mathcal{I}}$. Omitiremos os detalhes.

para um elemento $f \in \langle X \rangle_A$, onde $X_f = \{x_1, \cdots, x_N\}$. É claro que X é base de $\langle X \rangle_A$.

Quando não houver risco de confusão, suprimiremos a referência ao anel A e ao $A-$módulo M, escrevendo apenas $\langle X \rangle$ e $span\,(X)$. Dados conjuntos $X_1, \cdots, X_n$, preferiremos denotar os $A-$módulos gerados por sua união $X_1 \cup \cdots \cup X_n$ simplesmente por $\langle X_1, \cdots, X_n \rangle_A$ e $span_M\,(X_1, \cdots, X_n)$, conforme o caso.

A introdução de um boa-ordem[7] entre os elementos de uma base $\mathcal{B}$ de um $A-$módulo livre M fornece o que chamaremos de uma *base ordenada*[8] para M. Nosso interesse nesta dissertação recairá sobre as bases finitas. Será costumeiro denotarmos uma base ordenada finita por uma $n-$upla ordenada, como em $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k)$. Freqüentemente omitiremos o termo "ordenada" e a ordenação será exibida explicitamente na notação.

Fixemos também a notação para a *representação matricial* de elementos, homomorfismos $A-$lineares e formas $A-$bilineares de $A-$módulos livres de base finita. Sejam $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k)$ e $\mathcal{F} = (\phi_1, \cdots, \phi_l)$ bases finitas para os $A-$módulos M e N, respectivamente. Introduzimos os isomorfismos $A-$lineares[9] "*representação matricial de elementos de M segundo a base $\mathcal{E}$*"

$$\begin{array}{cccccc} [\cdot]_{\mathcal{E}}: & M & \longrightarrow & M_{k\times 1}\,(A) & & \\ & m = m^{\mu}\varepsilon_{\mu} & \mapsto & [m]_{\mathcal{E}} & \equiv \left(m^i\right)_{1\leq i\leq k} & , \end{array}$$

"*representação matricial de formas $A-$bilineares de $M \times N$ segundo as bases $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$*"

$$\begin{array}{ccccc} [\cdot]^{\mathcal{E},\mathcal{F}}: & \mathcal{L}_{A,2}\,(M,N;A) & \longrightarrow & M_{k\times l}\,(A) & \\ & B & \mapsto & [B]^{\mathcal{E},\mathcal{F}} & \equiv \left(B\left(\varepsilon_i, \phi_j\right)\right)_{\substack{1\leq i\leq k \\ 1\leq j\leq l}} \end{array}$$

e "*representação matricial de homomorfismos $A-$lineares de M em N segundo as bases $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$*"

$$\begin{array}{cccccc} [\cdot]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}}: & Hom_A\,(M,N) & \longrightarrow & M_{l\times k}\,(A) & & \\ & f & \mapsto & [f]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}} & \equiv \left(f^i_j\right)_{\substack{1\leq i\leq l \\ 1\leq j\leq k}} & , \end{array}$$

[7] É equivalente ao Axioma da Escolha o fato de todo conjunto poder ser bem-ordenado.

[8] Note a diferença sutil: uma base $\mathcal{B}$ é um subconjunto de um $A-$módulo M, ao passo que uma base ordenada de M é uma bijeção

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \rightarrow & \mathcal{B} \\ \beta & \mapsto & b_{\beta} \end{array}$$

entre um número ordinal e uma base $\mathcal{B}$ de M. Isso justifica, entre outras coisas, o uso de $n-$uplas ordenadas para denotar bases finitas.

Em várias notas de rodapé deste capítulo abordamos conceitos pertinentes aos fundamentos da Matemática (Axioma da Escolha, Lema de Zorn, números ordinais e cardinais, boa ordenação). Embora não sejam de modo algum necessários para a compreensão do presente trabalho, recomendamos ao leitor interessado o texto introdutório [Halmos] e os primeiros capítulos do tratado [Jech].

[9] É inteiramente óbvia a estrutura de $A-$módulo dos conjuntos de matrizes $M_{k\times l}\,(A)$ com entradas no anel A.

onde os escalares f_j^i são determinados pelas relações

$$f(\varepsilon_\nu) = f_\nu^\mu \phi_\mu.$$

Essa notação conduz às regras práticas

$$B(m,n) = [m]_{\mathcal{E}}^* [B]^{\mathcal{E},\mathcal{F}} [n]_{\mathcal{F}}$$

$$[f(m)]_{\mathcal{F}} = [f]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} [m]_{\mathcal{E}}$$

e

$$[f \circ g]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} = [f]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{G}} [g]_{\mathcal{G}}^{\mathcal{E}} \tag{1.1}$$

para toda forma $A-$bilinear B, todos homomorfismos $A-$lineares f, g e todos os elementos m, n, para os quais façam sentido as fórmulas acima.

Denotaremos sempre por *can* $A^n = (e_1, \cdots, e_n)$ a *base*[10] *canônica* do $A-$módulo A^n das $n-$uplas de escalares em A, dada por

$$e_j = \left(0, \cdots, 0, \underbrace{1}_{j-\text{ésima entrada}}, 0, \cdots, 0\right).$$

Por simplicidade, escreveremos

$$[T] \equiv [T]_{can\ A^n}^{can\ A^n}$$

para todo homomorfismo $A-$linear $T \in Hom_A(A^n, A^n)$.

O *módulo dual* de um $A-$módulo M é o $A-$módulo $M^* = Hom_A(M, A)$ dos funcionais $A-$lineares de M. Se M é livre, cada base $\mathcal{E}$ de M põe à nossa disposição um homomorfismo $A-$linear de *dualidade*

$$\begin{array}{rccc} (\cdot)^* : & M & \longrightarrow & M^* \\ & m & \mapsto & m^* \end{array}$$

definido por sua ação nesta base, segundo a regra

$$\varepsilon^*(\varphi) = \begin{cases} 1, \text{ se } \varepsilon = \varphi \\ 0, \text{ se } \varepsilon \neq \varphi \end{cases},$$

onde $\varepsilon, \varphi \in \mathcal{E}$. Os homomorfismos de dualidade assim obtidos são todos injetivos, mas, em geral, não sobrejetivos. A sobrejetividade é garantida apenas no caso em que M admite uma base finita. Nesse caso, tem-se um isomorfismo $A-$linear $M \simeq M^*$, e a base $\mathcal{E}^* = (\varepsilon_1^*, \cdots, \varepsilon_d^*)$ de M^* é dita a *base dual* a $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_d)$. É claro que, nesse caso, vale também o isomorfismo $(M^*)^* \simeq M$.

[10] Aqui, estamos supondo que o anel A é um domínio de integridade.

Exemplo 4 *Seja A um anel com unidade. O homomorfismo de dualidade associado à base $\mathcal{B} = \left\{1, X, X^2, \cdots\right\}$ do $A-$módulo $A[X]$ dos polinômios em uma indeterminada X a coeficientes em A não é sobrejetivo. Basta ver que o funcional $A-$linear* "avaliação em $x = 1$"

$$\begin{array}{cccc} \delta_1 : & A[X] & \longrightarrow & A \\ & p(X) & \mapsto & p(1) \end{array}$$

não corresponde a nenhum polinômio com coeficientes $a_n \in A$, pois teríamos $\delta_1(X^n) = 1 = a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

1.2 Produto tensorial de módulos

Ao longo de toda esta seção, A será um anel comutativo com unidade.

Sejam $q \in \mathbb{N}$ e $M_1, \cdots, M_q$ $A-$módulos. Dizemos que um $A-$módulo T possui a *propriedade universal do produto tensorial* $M_1 \otimes \cdots \otimes M_q$ quando existir uma aplicação $A, q-$linear $t : M_1 \times \cdots \times M_q \to T$ tal que

(i) a imagem de t gera T, i.e.,

$$T = span_T(t(M_1 \times \cdots \times M_q))$$

(ii) dada uma aplicação $A, q-$linear $f : M_1 \times \cdots \times M_q \to L$ qualquer tomando valores num $A-$módulo L, existe um homomorfismo $A-$linear $\varphi : T \to L$ tal que $f = \varphi \circ t$, i.e., tal que comuta o diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccc} M_1 \times \cdots \times M_q & \xrightarrow{t} & T \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ L & \xrightarrow[id]{} & L \end{array}$$

Vamos mostar que, a menos de isomorfismos, existe um único $A-$módulo $M_1 \otimes \cdots \otimes M_q$ gozando da propriedade universal. Comecemos pela unicidade *modulo* isomorfismos. Suponha que T_1 e T_2 são dois $A-$módulos com a propriedade universal do produto tensorial $M_1 \otimes \cdots \otimes M_q$, e considere os diagramas comutativos

$$\begin{array}{ccc} M_1 \times \cdots \times M_q & \xrightarrow{t_1} & T_1 \\ {\scriptstyle t_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tau_2^1} \\ T_2 & \xrightarrow[id]{} & T_2 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} M_1 \times \cdots \times M_q & \xrightarrow{t_2} & T_2 \\ {\scriptstyle t_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tau_1^2} \\ T_1 & \xrightarrow[id]{} & T_1 \end{array}.$$

Temos

$$\tau_2^1 \circ t_1 = t_2 \quad \text{e} \quad \tau_1^2 \circ t_2 = t_1,$$

donde

$$\left(\tau_2^1 \circ \tau_1^2\right) \circ t_2 = t_2 \quad \text{e} \quad \left(\tau_1^2 \circ \tau_2^1\right) \circ t_1 = t_1.$$

Como $\tau_j^i \in Hom_A(T_i, T_j)$, e, pela condição (i) da propriedade universal, temos $T_j = span(t_j(M_1 \times \cdots \times M_q))$, seguem-se as identidades

$$\tau_2^1 \circ \tau_1^2 = id_{T_2} \quad \text{e} \quad \tau_1^2 \circ \tau_2^1 = id_{T_1}.$$

Portanto, $T_1 \simeq T_2$.

Para provar a existência, construiremos explicitamente um $A-$módulo gozando da propriedade universal do produto tensorial $M_1 \otimes \cdots \otimes M_q$. Ele será denotado precisamente por $M_1 \otimes \cdots \otimes M_q$. Doravante, sempre que nos referirmos ao produto tensorial $M_1 \otimes \cdots \otimes M_q$, será ele que teremos em mente.

Considere o $A-$módulo livre gerado pelo produto cartesiano $M_1 \times \cdots \times M_q$ e os subconjuntos

$$X_j \subset \langle M_1 \times \cdots \times M_q \rangle_A$$

constituidos por elementos da forma

$$(m_1, \cdots, am_j + bn_j, \cdots, m_q) - a(m_1, \cdots, m_j, \cdots, m_q) - b(m_1, \cdots, n_j, \cdots, m_q)$$

para $m_1 \in M_1, \cdots, m_j, n_j \in M_j, \cdots, m_q \in M_q$ e $a, b \in A$. Definimos então o produto tensorial

$$M_1 \otimes \cdots \otimes M_q \equiv \frac{\langle M_1 \times \cdots \times M_q \rangle_A}{span(X_1, \cdots, X_q)}.$$

Considere o epimorfismo $A-$linear

$$\pi : \langle M_1 \times \cdots \times M_q \rangle_A \twoheadrightarrow M_1 \otimes \cdots \otimes M_q$$

de projeção ao quociente. Dado $(m_1, \cdots, m_q) \in M_1 \times \cdots \times M_q$, denotaremos por $m_1 \otimes \cdots \otimes m_q$ sua imagem por π:

$$\pi(m_1, \cdots, m_q) = m_1 \otimes \cdots \otimes m_q$$

Afirmamos que o $A-$módulo $M_1 \otimes \cdots \otimes M_q$ possui a propriedade universal com t dada pela restrição de π a $M_1 \times \cdots \times M_q$. De fato, t é $A, q-$linear:

$$t(m_1, \cdots, m_j + an_j, \cdots, m_q) = \pi(m_1, \cdots, m_j + an_j, \cdots, m_q)$$

$$\begin{aligned}
&= m_1 \otimes \cdots \otimes (m_j + an_j) \otimes \cdots \otimes m_q \\
&= m_1 \otimes \cdots \otimes m_q + a(m_1 \otimes \cdots \otimes n_j \otimes \cdots \otimes m) \\
&= \pi(m_1, \cdots, m_q) + a\pi(m_1, \cdots, n_j, \cdots, m_q) \\
&= t(m_1, \cdots, m_q) + at(m_1, \cdots, n_j, \cdots, m_q).
\end{aligned}$$

Temos também

$$\begin{aligned}
M_1 \otimes \cdots \otimes M_q &= \pi\left(\langle M_1 \times \cdots \times M_q \rangle_A\right) \\
&= \pi\left(span_{\langle M_1 \times \cdots \times M_q \rangle_A}(M_1 \times \cdots \times M_q)\right) \\
&= span_{M_1 \otimes \cdots \otimes M_q}(\pi(M_1 \times \cdots \times M_q)) \\
&= span_{M_1 \otimes \cdots \otimes M_q}(t(M_1 \times \cdots \times M_q)).
\end{aligned}$$

Ademais, dados um $A-$módulo L e uma aplicação $A, q-$linear $f : M_1 \times \cdots \times M_q \to L$, defina um homomorfismo $\varphi : M_1 \otimes \cdots \otimes M_q \to L$ pela extensão $A-$linear da regra

$$\varphi (m_1 \otimes \cdots \otimes m_q) = f (m_1, \cdots , m_q)$$

e teremos, por óbvio, que vale $f = \varphi \circ t$. Isso conclui a prova de que $M_1 \otimes \cdots \otimes M_q$ possui a propriedade universal do produto tensorial.

Reservaremo-nos o direito de denotar o produto tensorial $M_1 \otimes \cdots \otimes M_q$ por $\otimes_{j=1}^{q} M_j$ e a imagem $t (m_1, \cdots , m_q)$ por $m_1 \otimes \cdots \otimes m_q$ ou $\otimes_{j=1}^{q} m_j$.

É fácil ver que o homomorfismo $A-$linear φ induzido por uma aplicação $A, q-$linear f é único. Com efeito, suponha que outro $\phi \in Hom_A \left(\otimes_{j=1}^{q} M_j, L\right)$ seja tal que

$$\phi (m_1 \otimes \cdots \otimes m_q) = f (m_1, \cdots , m_q) = \varphi (m_1 \otimes \cdots \otimes m_q) .$$

Como os elementos da forma $\otimes_{j=1}^{q} m_j$ geram $\otimes_{j=1}^{q} M_j$, temos que $\phi = \varphi$.

Ademais, a associação $f \mapsto \varphi$ é um claramente isomorfismo $A-$linear. Assim,

$$\mathcal{L}_{A,q} (M_1, \cdots , M_q; L) \simeq Hom_A \left(\otimes_{j=1}^{q} M_j, L\right) \tag{1.2}$$

Exemplo 5 *Considere o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais e o conjunto $\mathbb{Z}_n$ dos inteiros módulo n ambos como $\mathbb{Z}-$módulos. Temos então que o produto tensorial $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Z}_n$ é o $\mathbb{Z}-$módulo trivial* (0). *Com efeito, dada um aplicação $\mathbb{Z}-$bilinear $b : \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}_n \to L$, temos*

$$b (q, \bar{m}) = b \left(\frac{q}{n}, n\bar{m}\right) = b \left(\frac{q}{n}, \bar{0}\right) = 0,$$

quaisquer que sejam $q \in \mathbb{Q}$ e $\bar{m} \in \mathbb{Z}_n$. Ou seja, b é identicamente nula. Logo, $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Z}_n = (0)$.

O produto tensorial é associativo, no sentido da seguinte

Proposição 6 *Dados $A-$módulos $M_1, \cdots , M_{p+q}$, vale o isomorfismo*

$$\left(\bigotimes_{i=1}^{p} M_i\right) \otimes \left(\bigotimes_{j=p+1}^{p+q} M_j\right) \simeq \bigotimes_{k=1}^{p+q} M_k$$

Prova. Estipulemos, para esta prova, que o índice i percorre o conjunto $[p]$; o índice j, o conjunto $[p + q]_{p+1}$; e o índice k, o conjunto $[p + q]$. Sempre que um produto, cartesiano ou tensorial, for escrito com relação a um desses índices, vamos omitir seus parâmetros de definição.

Considere o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc}
(\otimes_i M_i) \times (\otimes_j M_j) & \overset{\otimes_2}{\longrightarrow} & (\otimes_i M_i) \otimes (\otimes_j M_j) \\
{\scriptstyle b} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \beta} \\
\otimes_k M_k & \underset{id}{\longrightarrow} & \otimes_k M_k \\
{\scriptstyle \otimes_{p+q}} \uparrow & & \downarrow {\scriptstyle \varphi} \\
\times_k M_k & \underset{f}{\longrightarrow} & (\otimes_i M_i) \otimes (\otimes_j M_j)
\end{array}$$

onde

$$\otimes_2 ((\otimes_i m_i) \times (\otimes_j m_j)) = (\otimes_i m_i) \otimes (\otimes_j m_j)$$

e

$$\otimes_{p+q} (\times_k m_k) = \otimes_k m_k$$

são as aplicações que respondem pela propriedade universal dos produtos tensoriais $(\otimes_i M_i) \otimes (\otimes_j M_j)$ e $\otimes_k M_k$, cujo isomorfismo queremos mostrar, e β e φ são os homomorfismos $A-$lineares induzidos, respectivamente, pela aplicação $A-$bilinear b dada por

$$b((\otimes_i m_i) \times (\otimes_j m_j)) = \otimes_k m_k$$

e pela aplicação $A, (p+q)-$linear f dada por

$$f(\times_k m_k) = (\otimes_i m_i) \otimes (\otimes_j m_j).$$

Temos então

$$\beta((\otimes_i m_i) \otimes (\otimes_j m_j)) = \otimes_k m_k$$

e

$$\varphi(\otimes_k m_k) = (\otimes_i m_i) \otimes (\otimes_j m_j),$$

donde segue, por $A-$linearidade, que

$$\varphi \circ \beta = id \quad \text{em } (\otimes_i M_i) \otimes (\otimes_j M_j)$$

$$\beta \circ \varphi = id \quad \text{em } \otimes_k M_k.$$

Isso conclui a prova de que $(\otimes_i M_i) \otimes (\otimes_j M_j) \simeq \otimes_k M_k$. ■

A proposição anterior garante que podemos construir o produto tensorial de q módulos por sucessivos produtos tensoriais de dois módulos. Mas precisamente, temos o seguinte óbvio

Corolário 7 $M_1 \otimes \cdots \otimes M_q \simeq (\cdots((M_1 \otimes M_2) \otimes M_3) \otimes \cdots) \otimes M_q$

Doravante, denotaremos simplesmente por $\otimes$ a aplicação bilinear $t : M \times N \to M \otimes N$ que responde pela propriedade universal do produto tensorial de dois módulos.

Além de associativo, o produto tensorial é comutativo, no seguinte sentido.

Proposição 8 *Dada uma permutação $\sigma \in S_q$, vale o isomorfismo*

$$M_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes M_{\sigma(q)} \simeq M_1 \otimes \cdots \otimes M_q$$

Prova. Graças ao corolário anterior e ao fato de que toda permutação $\sigma \in S_q$ é uma composição de transposições, basta provarmos que, dados $A-$módulos M e N, tem-se

$$M \otimes N \simeq N \otimes M.$$

Considere o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\otimes} & M \otimes N \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ N \otimes M & \xrightarrow[id]{} & N \otimes M \\ {\scriptstyle \otimes}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} \\ N \times M & \xrightarrow[g]{} & M \otimes N \end{array}$$

onde φ e γ são os homomorfismos $A-$lineares induzidos, respectivamente, pela aplicações bilineares f e g, dadas por

$$f\,(m, n) = n \otimes m \quad \text{e} \quad g\,(n, m) = m \otimes n.$$

Assim, temos

$$\varphi\,(m \otimes n) = n \otimes m \text{ e } \gamma\,(n \otimes m) = m \otimes n,$$

donde, por $A-$linearidade, segue que

$$\gamma \circ \varphi = id \quad \text{em } M \otimes N$$

e

$$\varphi \circ \gamma = id \quad \text{em } N \otimes M.$$

Isso conclui a prova de que $M \otimes N \simeq N \otimes M$. ■

Proposição 9 *Dado um $A-$módulo M, vale o isomorfismo $A \otimes M \simeq M$.*

Prova. O homomorfismo $A-$linear $\lambda : A \otimes M \to M$ induzido pela multiplicação à esquerda do módulo[11],

$$(a, m) \in A \times M \mapsto am \in M,$$

tem como inverso o homomorfismo $A-$linear $\rho : M \to A \otimes M$ dado por

$$\rho\,(n) = 1 \otimes n.$$

[11] A ação do anel comutativo A sobre o módulo M, dada por uma multiplicação à esquerda, é bilinear:

$$(a + bc)\, m = am + b\,(cm)$$
$$a\,(m + bn) = am + b\,(an)$$

Com efeito, temos

$$\lambda(\rho(n)) = \lambda(1 \otimes n) = 1 \cdot n = n$$

e

$$\begin{aligned} \rho(\lambda(a \otimes m)) &= \rho(am) = 1 \otimes (am) \\ &= (a \cdot 1) \otimes m = a \otimes m. \end{aligned}$$

■

Proposição 10 *Vale a distributividade do produto tensorial com relação à soma direta, i.e., dados $A-$módulos L, M e N, vale o isomorfismo*

$$L \otimes (M \oplus N) \simeq (L \otimes M) \oplus (L \otimes N)$$

Prova. Definamos uma aplicação

$$B : L \times (M \oplus N) \to (L \otimes M) \oplus (L \otimes N)$$

pela extensão $A-$bilinear da regra

$$B(l, m \oplus n) = (l \otimes m) \oplus (l \otimes n).$$

É fácil convencer-se de que a aplicação $A-$bilinear B fica assim bem-definida. Pela propriedade universal do produto tensorial, sabemos que existe um homomorfismo $A-$linear

$$\beta : L \otimes (M \oplus N) \to (L \otimes M) \oplus (L \otimes N)$$

que satisfaz

$$\beta(l \otimes (m \oplus n)) = (l \otimes m) \oplus (l \oplus n).$$

Vamos mostrar que β é um isomorfismo $A-$linear. É fácil convencer-se de que a regra

$$\zeta((k \otimes m) \oplus (l \otimes n)) = k \otimes (m \oplus 0) + l \otimes (0 \oplus n)$$

define, por extensão $A-$linear, uma aplicação

$$\zeta : (L \otimes M) \oplus (L \otimes N) \to L \otimes (M \oplus N).$$

Agora note que

$$\begin{aligned} (\zeta \circ \beta)(l \otimes (m \oplus n)) &= \zeta((l \otimes m) \oplus (l \oplus n)) \\ &= l \otimes (m \oplus 0) + l \otimes (0 \oplus n) \\ &= l \otimes (m \oplus 0 + 0 \oplus n) \\ &= l \otimes (m \oplus n) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(\beta \circ \zeta)\left((k \otimes m) \oplus (l \otimes n)\right) &= \beta\left(k \otimes (m \oplus 0) + l \otimes (0 \oplus n)\right) \\ &= \beta\left(k \otimes (m \oplus 0)\right) + \beta\left(l \otimes (0 \oplus n)\right) \\ &= (k \otimes m) \oplus 0 + 0 \oplus (l \otimes n) \\ &= (k \otimes m) \oplus (l \otimes n).\end{aligned}$$

Isso mostra que $\zeta = \beta^{-1}$, o que conclui a prova. ■

Proposição 11 *Sejam $\mathcal{E}$ uma base para o $A-$módulo M e $\mathcal{F}$ uma base para o $A-$módulo N. Então, a família $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F} = \{\varepsilon \otimes \phi\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}, \phi \in \mathcal{F}}$ é uma base para o produto tensorial $M \otimes N$.*

Prova. Devemos mostrar que $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ é um conjunto gerador linearmente independente de $M \otimes N$.

Para ver que $M \otimes N = span\,(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F})$, seja $t \in M \otimes N$. Por definição, existem $p \in \mathbb{N}$ e elementos $m_1, \cdots, m_p \in M$ e $n_1, \cdots, n_p \in N$ tais que

$$t = \sum_{i=1}^{p} m_i \otimes n_i.$$

Ora, como $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$ são bases, então, para cada $i \in [p]$, existem $r_i, s_i \in \mathbb{N}$, $a_i^1, \cdots, a_i^{r_i}, b_i^1, \cdots, b_i^{s_i} \in A$ e $\varepsilon_1^i, \cdots, \varepsilon_{r_i}^i \in \mathcal{E}$ e $\phi_1^i, \cdots, \phi_{s_i}^i \in \mathcal{F}$ tais que

$$m_i = \sum_{j=1}^{r_i} a_i^j \varepsilon_j^i \quad \text{e} \quad n_i = \sum_{k=1}^{s_i} b_i^k \phi_k^i.$$

Logo, devido à bilinearidade de $\otimes$, temos

$$t = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{r_i} \sum_{k=1}^{s_i} a_i^j b_i^k \left(\varepsilon_j^i \otimes \phi_k^i\right).$$

Considere agora a combinação $A-$linear nula

$$\sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{s} c^{jk} \left(\varepsilon_j \otimes \phi_k\right) = 0,$$

onde $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r \in \mathcal{E}$ e $\phi_1, \cdots, \phi_s \in \mathcal{F}$, e vamos mostrar que $c^{jk} = 0$ para todos $j \in [r], k \in [s]$.

Dados $\mu \in [r]$ e $\nu \in [s]$, defina a aplicação bilinear $b^{\mu\nu} : M \times N \to A$ por seus valores nas bases $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$ como

$$b^{\mu\nu}(\varepsilon, \phi) = \begin{cases} 1, & \text{se } \varepsilon = \varepsilon_\mu \text{ e } \phi = \phi_\nu \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Então, o homomorfismo $A-$linear $\beta^{\mu\nu} : M \otimes N \to A$ induzido por $b^{\mu\nu}$ é tal que

$$\beta^{\mu\nu}\left(\varepsilon_j \otimes \phi_k\right) = \delta_j^\mu \delta_k^\nu.$$

Aplicando $\beta^{\mu\nu}$ à combinação $A-$linear nula acima, obtemos

$$\begin{aligned}\beta^{\mu\nu}\left(\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} c^{jk}\left(\varepsilon_j \otimes \phi_k\right)\right) &= \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} c^{jk}\beta^{\mu\nu}\left(\varepsilon_j \otimes \phi_k\right) \\ &= \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} c^{jk}\delta_j^\mu \delta_k^\nu = c^{\mu\nu},\end{aligned}$$

donde $c^{\mu\nu} = 0$. Isso encerra a prova. ■

Essencialmente o mesmo argumento dado para o caso $q = 2$, prova o caso geral, que também poderia ser obtido como um corolário da proposição anterior *via* corolário 7. A saber, vale a seguinte

Proposição 12 *Se cada $A-$módulo M_j da lista $M_1, \cdots, M_q$ admite uma base $\mathcal{E}_j$, então, a família*

$$\otimes_{j=1}^q \mathcal{E}_j = \left\{\varepsilon_1 \otimes \cdots \otimes \varepsilon_q\right\}_{\varepsilon_1 \in \mathcal{E}_1, \cdots, \varepsilon_q \in \mathcal{E}_q}$$

é uma base para o produto tensorial $\otimes_{j=1}^q M_j$.

Corolário 13 *Se cada $A-$módulo M_j da lista $M_1, \cdots, M_q$ possui posto (finito) d_j, então o posto do produto tensorial $M_1 \otimes \cdots \otimes M_q$ é $d_1 \cdots d_q$.*

Seja M um $A-$módulo e, dado $q \in \mathbb{N}$, considere a sua *$q-$ésima potência tensorial*

$$\otimes^q M \equiv \underbrace{M \otimes \cdots \otimes M}_{q \text{ fatores}}.$$

Note que $\otimes^1 M = M$. Convencionemos ainda

$$\otimes^0 M \equiv A.$$

Considere as aplicações bilineares[12]

$$\begin{array}{rccc}\otimes_{pq} : & \otimes^p M \times \otimes^q M & \longrightarrow & \otimes^{(p+q)} M \\ & (m, n) & \mapsto & m \otimes_{pq} n\end{array}$$

definidas pela extensão $A-$bilinear da regra

$$\left(m_1 \otimes \cdots \otimes m_p\right) \otimes_{pq} \left(n_1 \otimes \cdots \otimes n_q\right) = m_1 \otimes \cdots \otimes m_p \otimes n_1 \otimes \cdots \otimes n_q.$$

[12] No caso $p = 0$, definimos $a \otimes_{0q} m \equiv am$.

Defina o $A-$módulo

$$\otimes^{\bullet} M \equiv \overset{\infty}{\underset{p=0}{\oplus}} \otimes^{p} M$$

e considere a aplicação $A-$bilinear $\otimes : \otimes^{\bullet} M \times \otimes^{\bullet} M \rightarrow \otimes^{\bullet} M$ definida pela extensão $A-$bilinear da regra

$$m \otimes n = m \otimes_{pq} n, \quad \forall m \in \otimes^{p} M,\ n \in \otimes^{q} M.$$

O anel graduado $(\otimes^{\bullet} M, +, \otimes)$ será chamado a *álgebra tensorial contravariante* do módulo M. Os elementos de $\otimes^{\bullet} M$ serão denominados *tensores contravariantes* de M. De maneira inteiramente análoga, podemos definir a *álgebra tensorial covariante* do módulo M como o anel graduado $(\otimes^{\bullet} M^{*}, +, \otimes)$, cujos elementos serão denominados *tensores covariantes* de M.[13]

Dados $p, q \in \mathbb{N}_0$, definimos o $A-$módulo dos $(p,q)-$tensores de M pelo produto tensorial

$$T_p^q(M) = (\otimes^{p} M^{*}) \otimes (\otimes^{q} M).$$

Dados ainda $r, s \in \mathbb{N}_0$, definimos a aplicação bilinear

$$\otimes_{pr}^{qs} : T_p^q(M) \times T_r^s(M) \longrightarrow T_{p+r}^{q+s}(M)$$

pela extensão $A-$bilinear da regra

$$\left(\left(\otimes_{i=1}^{p} m^{i}\right) \otimes \left(\otimes_{j=1}^{q} m_{j}\right)\right) \otimes_{pr}^{qs} \left(\left(\otimes_{k=1}^{r} m^{p+k}\right) \otimes \left(\otimes_{l=1}^{s} m_{q+l}\right)\right)$$

$$= \left(\otimes_{i=1}^{p+r} m^{i}\right) \otimes \left(\otimes_{j=1}^{q+s} m_{j}\right).$$

Defina então o $A-$módulo

$$T(M) \equiv \overset{\infty}{\underset{p,q=0}{\oplus}} T_p^q(M)$$

e a aplicação $A-$bilinear $\otimes : T(M) \times T(M) \rightarrow T(M)$ dada pela regra

$$t \otimes u = t \otimes_{pr}^{qs} u, \quad \forall t \in T_p^q(M),\ u \in T_r^s(M).$$

O anel bigraduado $(T(M), +, \otimes)$ será denominado a *álgebra tensorial* do módulo M. Seus elementos são ditos *tensores* de M. Um elemento $t \in T_p^q(M)$ é chamado um *tensor* $p-$*covariante* e $q-$*contravariante*, ou simplesmente um $(p,q)-$tensor.

Proposição 14 *Suponha que o* $A-$*módulo* M *admita bases* $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_d)$ *e* $\overline{\mathcal{E}} = (\bar{\varepsilon}_1, \cdots, \bar{\varepsilon}_d)$ *que se relacionam por*

$$\varepsilon_{\mu} = \Lambda_{\mu}^{\lambda} \bar{\varepsilon}_{\lambda} \tag{1.3}$$

[13] Ou seja, os tensores covariantes de M são tensores contravariantes do $A-$módulo dual $M^{*} = Hom_A(M, A)$.

Sejam $\mathcal{E}^* = \left(\varepsilon^1, \cdots, \varepsilon^d\right)$ *e* $\overline{\mathcal{E}}^* = \left(\bar{\varepsilon}^1, \cdots, \bar{\varepsilon}^d\right)$ *as respectivas bases duais em* M^**. Se* $t \in T_p^q(M)$ *se escreve como as combinações* $A-$*lineares*

$$t = t^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q} \varepsilon^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{\nu_q} \otimes \varepsilon_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon_{\mu_p}$$

e

$$t = \bar{t}^{\lambda_1 \cdots \lambda_p}_{\rho_1 \cdots \rho_q} \bar{\varepsilon}^{\rho_1} \otimes \cdots \otimes \bar{\varepsilon}^{\rho_q} \otimes \bar{\varepsilon}_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \bar{\varepsilon}_{\lambda_p},$$

então seus coeficientes se relacionam por

$$\bar{t}^{\lambda_1 \cdots \lambda_p}_{\rho_1 \cdots \rho_q} = \bar{\Lambda}^{\nu_1}_{\rho_1} \cdots \bar{\Lambda}^{\nu_q}_{\rho_q} \Lambda^{\lambda_1}_{\mu_1} \cdots \Lambda^{\lambda_p}_{\mu_p} t^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q}, \tag{1.4}$$

onde $\bar{\mathbf{\Lambda}} = \left(\bar{\Lambda}^i_j\right)$ *é a matriz inversa de* $\mathbf{\Lambda} = \left(\Lambda^i_j\right)$ *em* $M_{d \times d}(A)$*.*

Prova. Começamos descrevendo completamente o relacionamento entre as bases $\mathcal{E}$, $\overline{\mathcal{E}}$, $\mathcal{E}^*$ e $\overline{\mathcal{E}}^*$. Escrevendo

$$\bar{\varepsilon}_\alpha = \bar{\Lambda}^\beta_\alpha \varepsilon_\beta$$

temos

$$\begin{aligned} \varepsilon_\mu &= \Lambda^\lambda_\mu \bar{\varepsilon}_\lambda \\ &= \Lambda^\lambda_\mu \bar{\Lambda}^\nu_\lambda \varepsilon_\nu \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_\mu &= \bar{\Lambda}^\lambda_\mu \varepsilon_\lambda \\ &= \bar{\Lambda}^\lambda_\mu \Lambda^\nu_\lambda \bar{\varepsilon}_\nu, \end{aligned}$$

donde

$$\bar{\Lambda}^\nu_\lambda \Lambda^\lambda_\mu = \Lambda^\nu_\lambda \bar{\Lambda}^\lambda_\mu = \delta^\nu_\mu,$$

ou seja,

$$\bar{\mathbf{\Lambda}} \mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda} \bar{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{I}_d,$$

onde $\mathbf{\Lambda} = \left(\Lambda^i_j\right), \bar{\mathbf{\Lambda}} = \left(\bar{\Lambda}^i_j\right) \in M_{d \times d}(A)$.

A base dual $\mathcal{E}^* = \left(\varepsilon^1, \cdots, \varepsilon^m\right)$ em M^* é definida por

$$\varepsilon^\mu : \begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & A \\ \varepsilon_\nu & \mapsto & \delta^\mu_\nu \end{array}.$$

Verifica-se por inspeção que se trata mesmo de uma base para M^*. Escreva

$$\varepsilon^\nu = L^\nu_\rho \bar{\varepsilon}^\rho$$

e aplique sobre $\varepsilon_\mu = \Lambda^\lambda_\mu \bar{\varepsilon}_\lambda$ obtendo, por um lado

$$\varepsilon^\nu(\varepsilon_\mu) = \delta^\nu_\mu$$

e, por outro,

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{\nu}(\varepsilon_{\mu}) &= L^{\nu}_{\rho}\bar{\varepsilon}^{\rho}\left(\Lambda^{\lambda}_{\mu}\bar{\varepsilon}_{\lambda}\right) \\
&= L^{\nu}_{\rho}\Lambda^{\lambda}_{\mu}\bar{\varepsilon}^{\rho}(\bar{\varepsilon}_{\lambda}) \\
&= L^{\nu}_{\rho}\Lambda^{\lambda}_{\mu}\delta^{\rho}_{\lambda} \\
&= L^{\nu}_{\lambda}\Lambda^{\lambda}_{\mu},
\end{aligned}$$

donde

$$L^{\nu}_{\lambda}\Lambda^{\lambda}_{\mu} = \delta^{\nu}_{\mu}$$

e, logo,

$$\mathbf{L\Lambda} = \mathbf{I}_d,$$

onde $\mathbf{L} = \left(L^i_j\right) \in M_{d\times d}(A)$. Ora, multiplicando a última equação à direita por $\bar{\mathbf{\Lambda}}$, obtemos $\mathbf{L} = \bar{\mathbf{\Lambda}}$. Assim, tem-se

$$\varepsilon^{\nu} = \bar{\Lambda}^{\nu}_{\rho}\bar{\varepsilon}^{\rho}. \tag{1.5}$$

Substituindo (1.3) e (1.5) na expressão

$$t = t^{\mu_1\cdots\mu_p}_{\nu_1\cdots\nu_q}\varepsilon^{\nu_1}\otimes\cdots\otimes\varepsilon^{\nu_q}\otimes\varepsilon_{\mu_1}\otimes\cdots\otimes\varepsilon_{\mu_p},$$

e explorando a multilinearidade do produto tensorial, obtemos

$$t = \bar{\Lambda}^{\nu_1}_{\rho_1}\cdots\bar{\Lambda}^{\nu_q}_{\rho_q}\Lambda^{\lambda_1}_{\mu_1}\cdots\Lambda^{\lambda_p}_{\mu_p}t^{\mu_1\cdots\mu_p}_{\nu_1\cdots\nu_q}\bar{\varepsilon}^{\rho_1}\otimes\cdots\otimes\bar{\varepsilon}^{\rho_q}\otimes\bar{\varepsilon}_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes\bar{\varepsilon}_{\lambda_p}.$$

Comparando com a expressão

$$t = \bar{t}^{\lambda_1\cdots\lambda_p}_{\rho_1\cdots\rho_q}\bar{\varepsilon}^{\rho_1}\otimes\cdots\otimes\bar{\varepsilon}^{\rho_q}\otimes\bar{\varepsilon}_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes\bar{\varepsilon}_{\lambda_p}$$

por meio da proposição 12, segue a tese. ■

Historicamente, a *lei de transformação* (1.4) para as componentes de um tensor foi a motivação para a terminologia dicotômica “contravariante-covariante”. Note que as componentes de um elemento

$$m = a^{\mu}\varepsilon_{\mu} = \bar{a}^{\lambda}\bar{\varepsilon}_{\lambda} \in M = T^1_0(M)$$

transformam-se de acordo com a regra

$$\bar{a}^{\lambda} = \Lambda^{\lambda}_{\mu}a^{\mu}$$

ao passo que as componentes de um elemento

$$f = b_{\nu}\varepsilon^{\nu} = \bar{b}_{\rho}\bar{\varepsilon}^{\rho} \in M^* = T^0_1(M)$$

seguem a fórmula

$$\bar{b}_{\rho} = \bar{\Lambda}^{\nu}_{\rho}b_{\nu}.$$

Ou, em forma matricial, temos

$$[m]_{\overline{\mathcal{E}}} = \mathbf{\Lambda}\,[m]_{\mathcal{E}}$$

e

$$[f]_{\overline{\mathcal{E}}^*} = \bar{\mathbf{\Lambda}}\,[f]_{\mathcal{E}^*} = \mathbf{\Lambda}^{-1}\,[f]_{\mathcal{E}^*}\,.$$

No caso em que M é um módulo livre, dados $p, q \in \mathbb{N}$, $i \in [p]$ e $j \in [q]$, definimos a $(i,j)-$*contração* de $(p,q)-$tensores pelo homomorfismo $A-$linear

$$C_i^j : T_p^q(M) \longrightarrow T_{p-1}^{q-1}(M)$$

determinado pela regra

$$C_j^i\left(\left(\otimes_{k=1}^p m^k\right) \otimes \left(\otimes_{l=1}^q m_l\right)\right) = m^i(m_j)\left(\otimes_{\substack{k=1\\k\neq i}}^p m^k\right) \otimes \left(\otimes_{\substack{l=1\\l\neq j}}^q m_l\right).$$

Decorre diretamente da definição a seguinte propriedade.[14]

Proposição 15 *Suponha que o $A-$módulo M admita uma base $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_d)$. Então, se $t \in T_p^q(M)$ se escreve como a combinação $A-$linear*

$$t = t_{\nu_1\cdots\nu_q}^{\mu_1\cdots\mu_p}\varepsilon^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{\nu_q} \otimes \varepsilon_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon_{\mu_p}\ ,$$

seu tensor $(i,j)-$contraído $C_i^j(t)$ se escreve como

$$t_{\nu_1\cdots\nu_{i-1}\lambda\nu_{i+1}\cdots\nu_q}^{\mu_1\cdots\mu_{j-1}\lambda\mu_{j+1}\cdots\mu_p}\varepsilon^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes \widehat{\varepsilon^{\nu_i}} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{\nu_q} \otimes \varepsilon_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \widehat{\varepsilon_{\mu_j}} \otimes \cdots \otimes \varepsilon_{\mu_p}.$$

Para encerrar esta seção, será bom notar que, quando M admite uma base finita, todo tensor $t \in T_p^q(M)$ pode ser encarado como uma aplicação $A, (p+q)$ - linear

$$t : \underbrace{M \times \cdots \times M}_{p} \times \underbrace{M^* \times \cdots \times M^*}_{q} \longrightarrow A$$

definida por

$$t\left(n_1, \cdots, n_p, n^1, \cdots, n^q\right)$$

$$= \sum_{j=1}^k m_j^1(n_1) \otimes \cdots \otimes m_j^p(n_p) \otimes n^1(m_{j,1}) \otimes \cdots \otimes n^p(m_{j,q})\,,$$

[14] Lembrando que, pela convenção da soma de Einstein, temos

$$t_{\nu_1\cdots\nu_{i-1}\lambda\nu_{i+1}\cdots\nu_q}^{\mu_1\cdots\mu_{j-1}\lambda\mu_{j+1}\cdots\mu_p} \equiv \sum_{\lambda=1}^d t_{\nu_1\cdots\nu_{i-1}\lambda\nu_{i+1}\cdots\nu_q}^{\mu_1\cdots\mu_{j-1}\lambda\mu_{j+1}\cdots\mu_p}$$

onde

$$t = \sum_{j=1}^{k} m_j^1 \otimes \cdots \otimes m_j^p \otimes m_{j,1} \otimes \cdots \otimes m_{j,q}.$$

É fácil ver que essa associação é um epimorfismo $A-$linear. Por igualdade de postos (finitos) sobre A, temos que se trata de um isomorfismo $A-$linear

$$T_p^q(M) \simeq \mathcal{L}_{A,(p+q)}(M, \cdots, M, M^*, \cdots, M^*; A).$$

1.3 Produtos simétrico e antissimétrico de um módulo

A proposição 8 nos diz que cada permutação $\sigma \in S_q$ induz um isomorfismo $A-$linear

$$\begin{array}{rccc} (\cdot)^\sigma : & M_1 \otimes \cdots \otimes M_q & \longrightarrow & M_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes M_{\sigma(q)} \\ & t & \mapsto & t^\sigma \end{array}$$

dado pela extensão $A-$linear da regra

$$(m_1 \otimes \cdots \otimes m_q)^\sigma = m_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes m_{\sigma(q)}.$$

Desse modo, dados um $A-$módulo M e $q \in \mathbb{N}$, vemos que o grupo de permutações S_q possui uma ação livre trasitiva

$$\begin{array}{ccc} (\otimes^q M) \times S_q & \longrightarrow & \otimes^q M \\ (t, \sigma) & \mapsto & t^\sigma \end{array}$$

no $A-$módulo $\otimes^q M$, ou por outra, que há uma representação do grupo de permutações S_q no grupo de automorfismos $A-$lineares de $\otimes^q M$ dada por

$$\begin{array}{ccc} S_q & \longrightarrow & Aut_A(\otimes^q M) \\ \sigma & \mapsto & (\cdot)^\sigma \end{array}.$$

De fato, sejam $\sigma, \rho \in S_q$ e

$$t = \sum_{i=1}^{k} m_{i,1} \otimes \cdots \otimes m_{i,q} \in \otimes^q M$$

e temos

$$\begin{aligned}
(t^{\sigma})^{\rho} &= \left(\left(\sum_{i=1}^{k} m_{i,1}\otimes\cdots\otimes m_{i,q}\right)^{\sigma}\right)^{\rho}\\
&= \left(\sum_{i=1}^{k} (m_{i,1}\otimes\cdots\otimes m_{i,q})^{\sigma}\right)^{\rho}\\
&= \left(\sum_{i=1}^{k} m_{i,\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes m_{i,\sigma(q)}\right)^{\rho}\\
&= \sum_{i=1}^{k} \left(m_{i,\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes m_{i,\sigma(q)}\right)^{\rho}\\
&= \sum_{i=1}^{k} m_{i,\sigma(\rho(1))}\otimes\cdots\otimes m_{i,\sigma(\rho(q))}\\
&= \sum_{i=1}^{k} m_{i,(\sigma\rho)(1)}\otimes\cdots\otimes m_{i,(\sigma\rho)(q)}\\
&= \sum_{i=1}^{k} (m_{i,1}\otimes\cdots\otimes m_{i,q})^{\sigma\rho}\\
&= \left(\sum_{i=1}^{k} m_{i,1}\otimes\cdots\otimes m_{i,q}\right)^{\sigma\rho}\\
&= t^{\sigma\rho},
\end{aligned}$$

i.e.,

$$(t^{\sigma})^{\rho} = t^{\sigma\rho}.$$

Dado $q\in\mathbb{N}$, definimos os endomorfismos $A-$lineares *symm* e *skew* de $\otimes^{q}M$ por

$$symm\,(t) = \frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in S_q} t^{\sigma}$$

e

$$skew\,(t) = \frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in S_q} sgn\ \sigma\ t^{\sigma}\ ,$$

onde $sgn : S_q \to \{\pm 1\}$ é o *homomorfismo de paridade.*[15]

Chamamos *symm* de (operador de) *simetrização* e *skew* de *antissimetrização*, e definimos a *$q-$ésima potência simétrica* de M e a *$q-$ésima potência antissimétrica* (ou *alternada*) de M, respectivamente, pelos seguintes $A-$submódulos

[15]Considere $\{\pm 1\}$ como grupo multiplicativo e defina $sgn\ \sigma$ como (-1) elevado ao número de inversões exibidas pela permutação σ. Ver proposição V.10.10 de [Garcia-Lequain].

de $\otimes^q M$:

$$\vee^q M \equiv symm\,(\otimes^q M)$$

$$\wedge^q M \equiv skew\,(\otimes^q M)$$

Note que $\vee^1 M = \wedge^1 M = M$, pois $symm = skew = id_M$ quando $q = 1$. Convencionaremos ainda $\vee^0 M = \wedge^0 M = A$.

Os tensores $t \in symm\,(\otimes^q M)$ são ditos *simétricos*, ao passo que aqueles em $skew\,(\otimes^q M)$ são chamados *antissimétricos* ou *alternados*. Denotaremos $symm\,(m_1 \otimes \cdots \otimes m_q)$ por $m_1 \vee \cdots \vee m_q$ e $skew\,(m_1 \otimes \cdots \otimes m_q)$ por $m_1 \wedge \cdots \wedge m_q$.

Vejamos algumas das propriedades básicas de $\vee^q M$ e $\wedge^q M$.

Proposição 16 *Dado $\sigma \in S_q$, valem as regras*

$$m_{\sigma(1)} \vee \cdots \vee m_{\sigma(q)} = m_1 \vee \cdots \vee m_q$$

e

$$m_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge m_{\sigma(q)} = sgn\ \sigma\ m_1 \wedge \cdots \wedge m_q.$$

Prova. As fórmulas acima resultam do fato de que, fixado $\sigma \in S_q$, a aplicação $\rho \mapsto \sigma \circ \rho$ é uma bijeção do grupo S_q em si mesmo. Desse modo, temos

$$\begin{aligned}
m_{\sigma(1)} \vee \cdots \vee m_{\sigma(q)} &= \frac{1}{q!} \sum_{\rho \in S_q} m_{\sigma(\rho(1))} \otimes \cdots \otimes m_{\sigma(\rho(q))} \\
&= \frac{1}{q!} \sum_{\rho \in S_q} m_{(\sigma\rho)(1)} \otimes \cdots \otimes m_{(\sigma\rho)(q)} \\
&= \frac{1}{q!} \sum_{\rho \in S_q} m_{\rho(1)} \otimes \cdots \otimes m_{\rho(q)} \\
&= m_1 \vee \cdots \vee m_q
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
m_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge m_{\sigma(q)} &= \frac{1}{q!} \sum_{\rho \in S_q} sgn\ \rho\ m_{\sigma(\rho(1))} \otimes \cdots \otimes m_{\sigma(\rho(q))} \\
&= \frac{1}{q!} \sum_{\rho \in S_q} \underbrace{(sgn\ \sigma)^2}_{+1} sgn\ \rho\ m_{(\sigma\rho)(1)} \otimes \cdots \otimes m_{(\sigma\rho)(q)} \\
&= sgn\ \sigma \frac{1}{q!} \sum_{\rho \in S_q} \underbrace{(sgn\ \sigma\ sgn\ \rho)}_{sgn\ \sigma\rho} m_{(\sigma\rho)(1)} \otimes \cdots \otimes m_{(\sigma\rho)(q)} \\
&= sgn\ \sigma \frac{1}{q!} \sum_{\rho \in S_q} sgn\ \rho\ m_{\rho(1)} \otimes \cdots \otimes m_{\rho(q)} \\
&= sgn\ \sigma\ m_1 \wedge \cdots \wedge m_q
\end{aligned}$$

■

Corolário 17 *Se existirem $i, j \in [q]$ distintos tais que $m_i = m_j$, então $m_1 \wedge \cdots \wedge m_q = 0$.*

Prova. Suponhamos, para fixar idéias, que seja $i < j$ e temos

$$\begin{aligned} m_1 \wedge \cdots \wedge m_q &= m_1 \wedge \cdots \wedge m_j \wedge \cdots \wedge m_i \wedge \cdots \wedge m_q \\ &= sgn\,(ij)\, m_1 \wedge \cdots \wedge m_q \\ &= (-1)\, m_1 \wedge \cdots \wedge m_q, \end{aligned}$$

donde $m_1 \wedge \cdots \wedge m_q = 0$. ∎

Uma condição necessária e suficiente para que um tensor $t \in \otimes^q M$ seja antissimétrico (respectivamente, simétrico) é a igualdade $skew\ t = t$ (resp., $symm\ t = t$). Nesse caso, temos $symm\ t = 0$ (resp., $skew\ t = 0$), salvo quando $q = 1$. Com efeito,

Proposição 18 *Os operadores skew e symm são idempotentes e além disso, se $q \geq 2$, temos $skew \circ symm = symm \circ skew = 0$.*

Prova. Mostraremos primeiro que $skew \circ skew = skew$. Seja $t \in \otimes^q M$. Temos

$$\begin{aligned} skew\,(skew\,(t)) &= skew\left(\frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in S_q} sgn\ \sigma\ t^{\sigma}\right) \\ &= \frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in S_q} sgn\ \sigma\ skew\,(t^{\sigma}) \\ &= \frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in S_q} sgn\ \sigma \frac{1}{q!}\sum_{\rho\in S_q} sgn\ \rho\,(t^{\sigma})^{\rho} \\ &= \frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in S_q} \frac{1}{q!}\sum_{\rho\in S_q} sgn\ (\sigma\rho)\, t^{\sigma\rho} \\ &= \frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in S_q} \left(\frac{1}{q!}\sum_{\tau\in S_q} sgn\ \tau\ t^{\tau}\right) \\ &= \frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in S_q} skew\,(t) \\ &= skew\,(t)\,. \end{aligned}$$

Na quinta igualdade, usamos o fato de que, para cada $\sigma \in S_q$, a aplicação $\rho \mapsto \sigma\rho$ é uma bijeção.

De forma inteiramente análoga, vê-se que $symm \circ symm = symm$.

Por fim, calculamos

$$\begin{aligned}
symm\,(skew\,(t)) &= symm\left(\frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in S_q} sgn\ \sigma\ t^{\sigma}\right)\\
&= \frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in S_q} sgn\ \sigma\ symm\,(t^{\sigma})\\
&= \frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in S_q} sgn\ \sigma\frac{1}{q!}\sum_{\rho\in S_q}(t^{\sigma})^{\rho}\\
&= \left(\frac{1}{q!}\right)^2\sum_{\sigma\in S_q}\sum_{\rho\in S_q} sgn\ \sigma\ t^{\sigma\rho}.
\end{aligned}$$

Seja $\tau\in S_q$ uma transposição de dois elementos[16] (p.ex., $\tau=(12)$). Tem-se $sgn\ \tau=-1$. Usando o fato de que as aplicações $\xi\mapsto\tau\xi$ e $\eta\mapsto\eta\tau$ são ambas bijeções de S_q em S_q, obtemos então

$$symm\,(skew\,(t)) = \left(\frac{1}{q!}\right)^2\sum_{\sigma\in S_q}\sum_{\rho\in S_q} sgn\ \sigma\ t^{\sigma\rho}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{q!}\right)^2\frac{1}{2}\sum_{\sigma\in S_q}\sum_{\rho\in S_q}\left(sgn\ \sigma t^{\sigma(\tau\rho)} + sgn\ \ (\sigma\tau)\,t^{(\sigma\tau)\rho}\right)\\
&= \left(\frac{1}{q!}\right)^2\frac{1}{2}\sum_{\sigma\in S_q}\sum_{\rho\in S_q}\left(sgn\ \sigma t^{\sigma\tau\rho} - sgn\ \sigma t^{\sigma\tau\rho}\right)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

De modo inteiramente análogo se vê que $skew\circ symm=0$. ■

Corolário 19 *Se $q\geq 2$, então $(\vee^q M)\cap(\wedge^q M)=(0)$.*

Proposição 20 *Se M admite uma base finita $\mathcal{E}=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_d)$, então as famílias*

$$\vee^q\mathcal{E}=\left\{\varepsilon_{i_1}\vee\cdots\vee\varepsilon_{i_q}\right\}_{1\leq i_1\leq i_2\leq\cdots\leq i_q\leq d}$$

e

$$\wedge^q\mathcal{E}=\left\{\varepsilon_{i_1}\wedge\cdots\wedge\varepsilon_{i_q}\right\}_{1\leq i_1< i_2<\cdots< i_q\leq d}$$

constituem bases para $\vee^q M$ e $\wedge^q M$, respectivamente. Em particular, temos

$$\dim_A\vee^q M=\binom{d+q-1}{q}\quad e\quad \dim_A\wedge^q M=\begin{cases}\binom{d}{q}, & se\ q\leq d\\ 0, & se\ d<q\end{cases}.$$

[16] É aqui que entra a hipótese de ser $q\geq 2$.

Prova. Que os conjuntos $\vee^q\mathcal{E}$ e $\wedge^q\mathcal{E}$ assim definidos geram $\vee^q M$ e $\wedge^q M$, respectivamente, é matéria de pequena reflexão. A cardinalidade desses conjuntos de geradores requer argumentos de contagem que omitiremos por brevidade. Fica faltando apenas provar suas independências lineares.

Dados $j_1 < \cdots < j_q \in [d]$, seja $\varphi^{j_1\cdots j_q} \in Hom_A\left(\otimes^q M, A\right)$ o homomorfismo induzido pela aplicação $A, q-$linear $f^{j_1\cdots j_q} : \times^q M \to A$ definida por

$$f^{j_1\cdots j_q}\left(\varepsilon_{i_1}, \cdots, \varepsilon_{i_q}\right) = \delta^{j_1}_{i_1}\cdots\delta^{j_q}_{i_q}.$$

É fácil convencer-se de que

$$\varphi^{j_1\cdots j_q}\left(\varepsilon_{i_1}\wedge\cdots\wedge\varepsilon_{i_q}\right) = \frac{1}{q!}\delta^{j_1}_{i_1}\cdots\delta^{j_q}_{i_q}$$

para todos $i_1 < \cdots < i_q \in [d]$. Aplique então $\varphi^{j_1\cdots j_q}$ sobre a combinação $A-$linear nula

$$\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_q\le d} a^{i_1\cdots i_q}\varepsilon_{i_1}\wedge\cdots\wedge\varepsilon_{i_q} = 0$$

e obtenha

$$a^{j_1\cdots j_q} = 0.$$

A argumentação para $\vee^q M$ é inteiramente análoga. ■

Assuma daqui pra frente que o $A-$módulo M admite uma base finita $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_d)$.

Considere as aplicações bilineares[17]

$$\begin{array}{rccc} \wedge_{pq}: & \wedge^p M\times\wedge^q M & \longrightarrow & \wedge^{(p+q)}M \\ & (m,n) & \mapsto & m\wedge_{pq} n \end{array}$$

definidas pela extensão $A-$bilinear da regra

$$(m_1\wedge\cdots\wedge m_p)\wedge_{pq}(n_1\wedge\cdots\wedge n_q) = m_1\wedge\cdots\wedge m_p\wedge n_1\wedge\cdots\wedge n_q.$$

Defina o $A-$módulo

$$\wedge^\bullet M \equiv \bigoplus_{i=0}^{\infty}\wedge^i M$$

e considere a aplicação $A-$bilinear $\wedge : \wedge^\bullet M\times\wedge^\bullet M \to \wedge^\bullet M$ definida pela extensão $A-$bilinear da regra

$$m\wedge n = m\wedge_{pq} n, \quad \forall m\in\wedge^p M,\ n\in\wedge^q M.$$

O anel graduado $(\wedge^\bullet M, +, \wedge)$ será chamado a *álgebra antissimétrica* (ou *exterior*) do módulo M.

Proposição 21 *Vale a seguinte regra de comutação para a álgebra antissimétrica de M:*

$$m\wedge n = (-1)^{pq}\, n\wedge m$$

para todos $m\in\wedge^p M$, $n\in\wedge^q M$.

[17] No caso $p = 0$, definimos $a\otimes_{0q} m \equiv am$.

Prova. Por $A-$bilinearidade do produto alternado $\wedge$, basta provarmos a tese para $m = \varepsilon_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{i_p}$ e $n = \varepsilon_{j_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{j_q}$. Temos

$$m \wedge n = (n \wedge m)^{\sigma},$$

onde $\sigma \in S_{p+q}$ é a composição de pq transposições, e, portanto, $sgn\ \sigma = (-1)^{pq}$. Ora, pela proposição 16, temos

$$(n \wedge m)^{\sigma} = (-1)^{pq}\, n \wedge m.$$

■

De maneira inteiramente análoga, podemos definir a *álgebra simétrica* do módulo M como o anel graduado $(\vee^{\bullet} M^{*}, +, \vee)$. A proposição 16 nos diz que esta álgebra é comutativa, i.e., vale $m \vee n = n \vee m$, para todos $m, n \in \vee^{\bullet} M$.

Dados $p, q \in \mathbb{N}_0$, defina

$$S^{p,q}(M) = (\vee^{p} M) \otimes (\wedge^{q} M).$$

Dados ainda $r, s \in \mathbb{N}_0$, definimos a aplicação bilinear

$$\circ_{r,s}^{p,q} : S^{p,q}(M) \times S^{r,s}(M) \longrightarrow S^{p+r,q+s}(M)(M)$$

pela extensão $A-$bilinear da regra

$$\left(\left(\vee_{i=1}^{p} m^{i}\right) \otimes \left(\wedge_{j=1}^{q} m_{j}\right)\right) \circ_{r,s}^{p,q} \left(\left(\vee_{k=1}^{r} m^{p+k}\right) \otimes \left(\wedge_{l=1}^{s} m_{q+l}\right)\right)$$
$$= \left(\vee_{i=1}^{p+r} m^{i}\right) \otimes \left(\wedge_{j=1}^{q+s} m_{j}\right).$$

Considere então o $A-$módulo

$$S(M) \equiv \bigoplus_{i,j=0}^{\infty} S^{i,j}(M)$$

e a aplicação $A-$bilinear $\circ : S(M) \times S(M) \to S(M)$ dada pela regra

$$C \circ D = C \circ_{r,s}^{p,q} D, \quad \forall C \in S^{p,q}(M),\ D \in S^{r,s}(M).$$

O anel bigraduado $(S(M), +, \circ)$ será denominado a *superálgebra* do módulo M. Seus elementos são ditos *tensores supersimétricos* de M. Um elemento $C \in S^{p,q}(M)$ é chamado um *tensor* $p-$*simétrico* e $q-$*antissimétrico*, ou simplesmente um $(p, q)-$*supertensor*.

É imediata a seguinte

Proposição 22 *Vale a seguinte regra de comutação para a superálgebra de M:*

$$m \circ n = (-1)^{qs}\, n \circ m$$

para todos $m \in S^{p,q}(M)$, $n \in S^{r,s}(M)$.

Capítulo 2

Topologia dos fibrados vetoriais

O conceito de fibrado surgiu em meados da década de 1930, nos trabalhos de H. Whitney, H.Hopf e E. Stiefel, e se mostrou desde logo uma rica fonte de aplicações da topologia à geometria diferencial.

2.1 Noções básicas

A definição de fibrado vetorial admite as versões real e complexa. Como ambas nos interessam, unificaremos a linguagem nesta seção por meio do símbolo $\mathbb{F}$ que poderá significar $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Em cada caso, as aplicações lineares às quais nos referirmos deverão ser entendidas como aplicações $\mathbb{F}-$lineares.

Definição 23 *Sejam E um conjunto, M uma variedade diferenciável e $\pi : E \longrightarrow M$ uma aplicação sobrejetiva. Dizemos que (E, M, π) é um $\mathbb{F}-$*fibrado vetorial *$n-$dimensional quando existe uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ de M e uma família $\{\varphi_U\}_{U\in\mathcal{U}}$ de bijeções*

$$\varphi_U : U \times \mathbb{F}^n \longrightarrow \pi^{-1}(U)$$

satisafazendo

i) $\pi\left(\varphi_U(x,v)\right) = x, \forall U \in \mathcal{U}, \forall x \in U, \forall v \in \mathbb{F}^n$, *i.e., comuta o diagrama*

$$\begin{array}{ccccc} & U \times \mathbb{F}^n & \overset{\varphi_U}{\longrightarrow} & \pi^{-1}(U) & \\ pr_1 & \downarrow & & \downarrow & \pi \\ & U & \underset{id}{\longrightarrow} & U & \end{array}$$

ii) dado $x \in U \in \mathcal{U}$, *defina a aplicação (obviamente bijetiva, devido à condição anterior)*

$$\begin{array}{cccccc} \varphi_{U,x}: & \mathbb{F}^n & \longrightarrow & \pi^{-1}(x) & \\ & v & \mapsto & \varphi_{U,x}(v) & \equiv \varphi_U(x,v) \end{array}$$

Dado $x \in U \cap V$, *com* $U, V \in \mathcal{U}$, *a aplicação*

$$\begin{array}{cccccc} f_{VU}(x): & \mathbb{F}^n & \longrightarrow & \mathbb{F}^n & \\ & v & \mapsto & f_{VU}(x) \cdot v & \equiv \varphi_{V,x}^{-1}\left(\varphi_{U,x}(v)\right) \end{array}$$

é um automorfismo linear de $\mathbb{F}^n$, *i.e.,* $f_{VU}(x) \in GL(\mathbb{F}^n), \forall x \in U \cap V$.

iii) $f_{VU}: U \cap V \longrightarrow GL(\mathbb{F}^n)$ *é uma aplicação suave para todos* $U, V \in \mathcal{U}$ *tais que* $U \cap V \neq \emptyset$.

E *é dito* espaço total, M *é dita a* base, π *é chamada a* projeção ao longo das fibras, *e* $\mathbb{F}^n$ *é dito a* fibra-modelo *do fibrado* (E, M, π), *que denotaremos apenas por* E, *quando não houver risco de confusão. Dado* $x \in M$, $\pi^{-1}(x) \equiv E_x$ *é a* fibra *sobre o ponto* x *(ou de* base x*).*

Uma família $\{(U, \varphi_U)\}_{U \in \mathcal{U}}$ *satisfazendo* (i), (ii), (iii) *é dita uma* trivialização *do fibrado* E. *Cada seu elemento* (U, φ_U) *é dito uma* trivialização local *de* E. *Cada* $U \in \mathcal{U}$ *é dita uma* vizinhança trivial *de* E *(ou, mais propriamente, da base* M*). Dizemos que o fibrado* (E, M, π) *é* trivial *quando admite* M *como vizinhança trivial.*

A aplicação f_{VU} *é chamada* função de transição *de* U *para* V.

Exemplo 24 (alguns fibrados triviais) *O plano* $\mathbb{R}^2$ *pode ser visto como um fibrado real unidimensional* $\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, \pi\right)$ *de base* $\mathbb{R}$, *com projeção* $\pi = pr_1$. *A trivialização é dada por* $\{(\mathbb{R}, id)\}$, *onde*

$$id: \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \pi^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2$$

Também o cilindro $C = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ *é um exemplo trivial de fibrado unidimensional* $\left(C, \mathbb{S}^1, \pi\right)$, *este tendo o círculo* $\mathbb{S}^1$ *por base. Aqui também* $\pi = pr_1$. *Sua trivialização pode ser dada pelo singleto* $\left\{\left(\mathbb{S}^1, id\right)\right\}$, *onde*

$$id_C: C = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \longrightarrow \pi^{-1}\left(\mathbb{S}^1\right) = C$$

Comentemos um pouco a definição acima.

A condição (ii) da definição acima significa que cada fibra E_x admite uma estrutura de espaço vetorial de dimensão n sobre $\mathbb{F}$, que é induzida pela estrutura $\mathbb{F}-$linear de $\mathbb{F}^n$ via uma trivialização local. De fato, seja $x \in U \in \mathcal{U}$ e defina na fibra E_x a adição

$$\begin{array}{rccl} \oplus_U : & E_x \times E_x & \longrightarrow & E_x \\ & (p,q) & \mapsto & p \oplus_U q \;\; \equiv \varphi_{U,x}\left(\varphi_{U,x}^{-1}(p) + \varphi_{U,x}^{-1}(q)\right) \end{array}$$

e a multiplicação por escalar

$$\begin{array}{rccl} \odot_U : & \mathbb{F} \times E_x & \longrightarrow & E_x \\ & (\alpha,p) & \mapsto & \alpha \odot_U p \;\; \equiv \varphi_{U,x}\left(\alpha\varphi_{U,x}^{-1}(q)\right) \end{array} .$$

Vê-se sem dificuldades que essas operações satisfazem os axiomas de espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$, com elemento neutro da adição dado por $\varphi_{U,x}(0)$ e inverso aditivo de p dado por $\varphi_{U,x}\left(-\varphi_{U,x}^{-1}(p)\right)$. Então, $E_{x,U} \equiv (E_x, \oplus_U, \odot_U, \mathbb{F})$ é um espaço vetorial de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{F}$. Com efeito, dado $p \in E_x$ existem únicos escalares $\alpha^1, \cdots, \alpha^n \in \mathbb{F}$ tais que se pode escrever

$$\begin{aligned} \varphi_{U,x}^{-1}(p) &= \alpha^1 e_1 + \cdots + \alpha^n e_n \\ &= \varphi_{U,x}^{-1}\left(\varphi_{U,x}\left(\alpha^1 e_1\right)\right) + \cdots + \varphi_{U,x}^{-1}\left(\varphi_{U,x}\left(\alpha^n e_n\right)\right) \end{aligned}$$

onde $(e_1, \cdots, e_n)$ é a base canônica de $\mathbb{F}^n$. Portanto, aplicando $\varphi_{U,x}$ e explorando a definição de $\oplus_U$ e $\odot_U$, vem

$$\begin{aligned} p &= \varphi_{U,x}\left(\alpha^1 e_1\right) \oplus_U \cdots \oplus_U \varphi_{U,x}\left(\alpha^n e_n\right) \\ &= \varphi_{U,x}\left(\alpha^1 \varphi_{U,x}^{-1}\left(\varphi_{U,x}(e_1)\right)\right) \oplus_U \cdots \oplus_U \varphi_{U,x}\left(\alpha^n \varphi_{U,x}^{-1}\left(\varphi_{U,x}(e_n)\right)\right) \\ &= \left(\alpha^1 \odot_U \varphi_{U,x}(e_1)\right) \oplus_U \cdots \oplus_U \left(\alpha^n \odot_U \varphi_{U,x}(e_n)\right), \end{aligned}$$

com $\alpha^1, \cdots, \alpha^n$ unicamente determinados. Portanto, $\left(\varphi_{U,x}(e_\mu)\right)_{\mu=1}^n$ é base de $E_{x,U}$, donde $\dim_{\mathbb{F}} E_{x,U} = n$.

A propriedade (ii) garante ainda que essa estrutura $\mathbb{F}-$linear de E_x não depende da trivialização (U, φ_U) escolhida. Com efeito, suponha que $x \in U \cap V$, com $U, V \in \mathcal{U}$, e aplique $\varphi_{V,x}^{-1}$ a

$$p \oplus_U q = \varphi_{U,x}\left(\varphi_{U,x}^{-1}(p) + \varphi_{U,x}^{-1}(q)\right)$$

com vistas a obter

$$\begin{aligned} \varphi_{V,x}^{-1}(p \oplus_U q) &= \underbrace{\left(\varphi_{V,x}^{-1} \circ \varphi_{U,x}\right)}_{f_{VU}(x) \in GL(\mathbb{F}^n)}\left(\varphi_{U,x}^{-1}(p) + \varphi_{U,x}^{-1}(q)\right) \\ &= \left(\varphi_{V,x}^{-1} \circ \varphi_{U,x}\right)\left(\varphi_{U,x}^{-1}(p)\right) + \left(\varphi_{V,x}^{-1} \circ \varphi_{U,x}\right)\left(\varphi_{U,x}^{-1}(q)\right) \\ &= \varphi_{V,x}^{-1}(p) + \varphi_{V,x}^{-1}(q), \end{aligned}$$

donde
$$p \oplus_U q = \varphi_{V,x}\left(\varphi_{V,x}^{-1}(p) + \varphi_{V,x}^{-1}(q)\right) \equiv p \oplus_V q.$$
Analogamente, temos
$$\begin{aligned}\varphi_{V,x}^{-1}(\alpha \odot_U p) &= \underbrace{\left(\varphi_{V,x}^{-1} \circ \varphi_{U,x}\right)}_{f_{VU}(x)\in GL(\mathbb{F}^n)}\left(\alpha\varphi_{U,x}^{-1}(p)\right) \\ &= \alpha\left(\varphi_{V,x}^{-1} \circ \varphi_{U,x}\right)\left(\varphi_{U,x}^{-1}(p)\right) \\ &= \alpha\varphi_{V,x}^{-1}(p),\end{aligned}$$
donde
$$\alpha \odot_U p = \varphi_{V,x}(p)\left(\alpha\varphi_{V,x}^{-1}(p)\right) \equiv \alpha \odot_V p$$
para todo escalar $\alpha \in \mathbb{F}$ e todos pontos $p, q \in E_x$. Doravante, sempre que precisarmos nos referir à estrutura linear de uma fibra, usaremos os símbolos convencionais $+$ e $\cdot$, sem índices ou adornos distintivos.

Dado $x \in M$, ponhamos $\varphi_{U,x}(e_\mu) \equiv e_\mu(U,x)$ para cada $\mu \in [n]$ e denotemos por $\mathcal{E}(U,x) = (e_\mu(U,x))_{\mu=1}^n$ a base de E_x assim obtida. Dadas duas vizinhanças triviais U e V tais que $x \in U \cap V$, podemos escrever cada vetor da base $\mathcal{E}(U,x)$ em termos da base $\mathcal{E}(V,x)$:
$$e_\mu(U,x) = f_\mu^\nu e_\nu(V,x), \tag{2.1}$$
donde, usando as regras que definem a estrutra linear de E_x, vem
$$\varphi_{U,x}(e_\mu) = f_\mu^\nu \varphi_{V,x}(e_\nu) = \varphi_{V,x}\left(f_\mu^\nu e_\nu\right).$$
Aplicando $\varphi_{V,x}^{-1}$ à última equação, temos
$$f_{VU}(x) \cdot e_\mu = \left(\varphi_{V,x}^{-1} \circ \varphi_{U,x}\right)(e_\mu) = f_\mu^\nu e_\nu, \tag{2.2}$$
ou seja, a matriz $\left(f_j^i\right)$ de mudança da base $\mathcal{E}(U,x)$ para a base $\mathcal{E}(V,x)$ é tão-somente a matriz de $f_{VU}(x)$ segundo a base canônica de $\mathbb{F}^n$:
$$[id_{E_x}]_{\mathcal{E}(V,x)}^{\mathcal{E}(U,x)} = [f_{VU}(x)]. \tag{2.3}$$

Daí se vê que as funções de transição f_{VU} do fibrado vetorial E satisfazem às seguintes *condições de cociclo*:
$$f_{WV}(x) \circ f_{VU}(x) = f_{WU}(x) \tag{2.4}$$
$\forall x \in U \cap V \cap W$. Com efeito, aplicando (1.1) e usando (2.3), temos
$$\begin{aligned}[f_{WV}(x) \circ f_{VU}(x)] &= [f_{WV}(x)]\,[f_{VU}(x)] \\ &= [id_{E_x}]_{\mathcal{E}(W,x)}^{\mathcal{E}(V,x)}\,[id_{E_x}]_{\mathcal{E}(V,x)}^{\mathcal{E}(U,x)} \\ &= [id_{E_x}]_{\mathcal{E}(W,x)}^{\mathcal{E}(U,x)} \\ &= [f_{WU}(x)].\end{aligned}$$

É óbvio da definição $f_{VU}(x) = \varphi_{V,x}^{-1} \circ \varphi_{U,x}$ que

$$f_{UU}(x) = id_{\mathbb{F}^n}. \tag{2.5}$$

Note, no entanto, que tal propriedade das funções de transição decorre imediatamente das condições de cociclo (2.4), fazendo $U = V = W$ em (2.4).

A trivialização $\{(U, \varphi_U)\}_{U \in \mathcal{U}}$ do fibrado $E \xrightarrow{\pi} M$ induz uma estrutura diferenciável natural no conjunto E, segundo a qual a projeção π é suave e as trivializações φ_U são difeomorfismos. Com efeito, podemos supor, sem perda de generalidade[1], que cada aberto U da cobertura $\mathcal{U}$ de M está equipado com um sistema de coordenadas $\psi_U : U \longrightarrow U_0 \subset \mathbb{R}^m$, e definir nosso candidato Ψ_U a sistema de coordenadas de E sobre $\pi^{-1}(U)$ como a aplicação que torna comutativo o seguinte diagrama.

$$\begin{array}{ccccc} & U \times \mathbb{F}^n & \stackrel{\varphi_U}{\longrightarrow} & \pi^{-1}(U) & \\ (\psi_U, id) & \downarrow & & \downarrow & \Psi_U \\ & \psi_U(U) \times \mathbb{F}^n & \underset{id}{\longrightarrow} & \psi_U(U) \times \mathbb{F}^n & \end{array} \tag{2.6}$$

Trata-se, evidentemente, de uma bijeção Ψ_U entre $\pi^{-1}(U) \subset E$ e o aberto $\psi_U(U) \times \mathbb{F}^n$ de $\mathbb{R}^{m+n}$ (caso $\mathbb{F} = \mathbb{R}$) ou $\mathbb{R}^{m+2n}$ (caso $\mathbb{F} = \mathbb{C}$). Vejamos como ficam as mudanças de coordenadas

$$\Psi_V \circ \Psi_U^{-1} : \psi_U(U \cap V) \times \mathbb{F}^n \longrightarrow \psi_V(U \cap V) \times \mathbb{F}^n.$$

$$\begin{aligned} \Psi_V\left(\Psi_U^{-1}(y,u)\right) &= (\psi_V, id)\, \varphi_V^{-1} \varphi_U \left(\psi_U^{-1}, id\right)(y,u) \\ &= (\psi_V, id)\, \varphi_V^{-1} \varphi_U (x,u) \quad (\text{aqui, } \psi_U(x) = y) \\ &= \left(\psi_V(x), \left(\varphi_{V,x}^{-1} \cdot \varphi_{U,x}\right) \cdot u\right) \\ &= \left(\psi_V(x), f_{VU}(x) \cdot u\right) \\ &= \left(\psi_V\left(\psi_U^{-1}(y)\right), f_{VU}\left(\psi_U^{-1}(y)\right) \cdot u\right). \end{aligned}$$

Portanto, já que ψ_V, ψ_U^{-1} e f_{VU} são suaves, temos também $\Psi_V \circ \Psi_U^{-1} \in C^\infty$. O atlas $\left\{\left(\pi^{-1}(U), \Psi_U\right)\right\}_{U \in \mathcal{U}}$ assim obtido torna E um variedade diferenciável de dimensão $m+n$, se $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, ou $m+2n$, se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, sendo m a dimensão da

[1] Sejam $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ coberturas abertas de M, $\{(U, \varphi_U)\}_{U \in \mathcal{U}}$ uma trivialização do fibrado (E, M, π) e $\{(V, \psi_V)\}_{V \in \mathcal{V}}$ um atlas para M. Considerando as interseções não-vazias do tipo $U \cap V$, e restringindo as aplicações φ_U e ψ_V adequadamente, obtemos uma nova trivialização $\{(W, \varphi_W)\}_{W \in \mathcal{W}}$ de E e um novo atlas $\{(W, \psi_W)\}_{W \in \mathcal{W}}$ para M ambos baseados sobre o mesmo conjunto de abertos $W = U \cap V$. Com efeito, $\mathcal{W} = \{U \cap V;\ U \in \mathcal{U} \text{ e } V \in \mathcal{V}\}$ é ainda uma cobertura aberta de M, $\pi^{-1}(U \cap V) = \pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)$, $\varphi_{U \cap V} = \varphi_U : (U \cap V) \times \mathbb{F}^n \to \pi^{-1}(U \cap V)$ é uma trivialização local e $\psi_{U \cap V} = \varphi_V : U \cap V \to \psi_V(U \cap V)$ é um difeomorfismo.

variedade-base M e n a dimensão da fibra-modelo $\mathbb{F}^n$.[2] Segundo essa estrutura diferenciável, as trivializações φ_U são difeomorfismos[3] e a projeção π é de classe C^∞. Com efeito, a expressão local

$$\psi_U \circ \pi \circ \Psi_U^{-1} : \psi_U(U) \times \mathbb{F}^n \longrightarrow \psi_U(U)$$

é tão somente a projeção no fator $\psi_U(U) \subset \mathbb{R}^m$:

$$\begin{aligned}
(\psi_U \circ \pi \circ \Psi_U)(y,u) &= \left(\psi_U \circ \pi \circ \varphi_U \circ \left(\psi_U^{-1}, id\right)\right)(y,u) \\
&= \psi_U\left((\pi \circ \varphi_U)\left(\psi_U^{-1}(y), u\right)\right) \\
&= \psi_U\left(\psi_U^{-1}(y)\right) \quad \text{(condição } (i) \text{ da def. 23)} \\
&= y
\end{aligned}$$

Sempre que tratarmos o espaço total E como variedade diferenciável, teremos em mente esta estrutura diferenciável natural, e quando nos referirmos a aspectos puramente topológicos, consideraremos em E a topologia induzida por essa estrutura[4]. Por exemplo, afirmamos que o isomorfismo $\mathbb{F}-$linear $\varphi_{U,x} : \mathbb{F}^n \to E_x$ é também um difeomorfismo (e, logo, homeomorfismo) entre o modelo $\mathbb{F}^n$ e a fibra E_x.[5] Com efeito, a restrição da trivialização local φ_U (um difeomorfismo, como vimos) à subvariedade regular $\{x\} \times \mathbb{F}^n$ de $U \times \mathbb{F}^n$ dá uma bijeção sobre sua imagem, E_x, e induz sobre esse conjunto uma estrutura de subvariedade regular de E. Que $\varphi_{U,x}$ é difeomorfismo, segue da evidente comutatividade do

---

[2] Convém chamar a atenção do leitor para uma certa ambigüidade do termo *dimensão* quando aplicado a um fibrado vetorial: um $\mathbb{F}-$fibrado vetorial E de dimensão n sobre uma variedade-base $m-$dimensional M possui, como variedade diferenciável, dimensão $n+m$ (se $\mathbb{F} = \mathbb{R}$) ou $2n+m$ (se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$). Poderíamos ter evitado esta confusão seguindo o uso corrente de dizer que o fibrado E tem *posto* n. Mas o autor crê que, nas poucas situações em que a terminologia puder conduzir a engano, a consideração do contexto baste para evitá-lo.

[3] Veja no diagrama (2.6) que φ_U é composição de difeomorfismos.

[4] A topologia induzida numa variedade $n-$dimensional N pela sua estrutura diferenciável é obtida estipulando que A é um aberto de N se, e somente se, $\psi_U(A \cap U)$ é aberto de $\mathbb{R}^n$ para todo sistema de coordenadas (U, ψ_U) de N. Os axiomas de topologia são facilmente verificados para esse conjunto de abertos de N.

[5] Que cada fibra $E_x = \pi^{-1}(x)$ é uma subvariedade regular de E, decorre do *Teorema do Valor Regular* em variedades. Ver, p.ex., Teorema 9.13 em [Tu]. Com efeito, aplicando a regra da cadeia à identidade $\pi = pr_1 \circ \varphi_U^{-1}$, vemos que vale

$$\pi_{*,p} = pr_1 \circ \left(\varphi_U^{-1}\right)_{*,p}$$

para todo $p \in \pi^{-1}(U)$, donde segue que todo $x \in M$ é valor regular da projeção canônica, já que ambos os fatores pr_1 e $\left(\varphi_U^{-1}\right)_{*,p}$ são sobrejetivos. Quanto à dimensão da fibra $E_x = \pi^{-1}(x)$ como variedade real, o teorema fornece

$$\dim E_x = \dim \pi^{-1}(U) - \dim U = \dim U \times \mathbb{F}^n - \dim U = \dim \mathbb{F}^n = \begin{cases} n, \text{ se } \mathbb{F} = \mathbb{R} \\ 2n, \text{ se } \mathbb{F} = \mathbb{C} \end{cases}.$$

Acima, no corpo do texto, damos uma prova direta disso ao exibir um atlas adaptado para E_x.

diagrama abaixo, onde as demais setas são todas difeomorfismos.

$$\begin{array}{ccc} \{x\} \times \mathbb{F}^n & \xrightarrow{\varphi_U} & E_x \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{\varphi_{U,x}} & E_x \end{array}$$

Essas observações permitem atinar com vários exemplos de fibrados vetoriais: basta escolher a variedade-base e "espetar" em cada ponto seu uma fibra (uma variedade diferenciável que admita um atlas unitário) com a dimensão desejada. O fibrado assim obtido será a união disjunta dessas fibras. Para a regularidade requerida, essas fibras devem estar espetadas de forma tal a permitir que se "passeie" suavemente por elas em qualquer direção no "interior" do fibrado[6]. Exemplos de fibrados reais obtidos por esse método heurístico são o *cilindro* (base: círculo; fibra: reta), e, mais geralmente, qualquer *superfície regrada* em $\mathbb{R}^3$ (base: linha de estricção; fibra: geratriz)[7]; a *vizinhança tubular* de uma superfície diferenciável no $\mathbb{R}^n$ (base: superfície; fibra: bola normal aberta)[8]; o *fibrado tangente* de uma variedade diferenciável (base: variedade; fibra: espaço tangente)[9], e, em particular, a superfície tangente a uma curva parametrizada no $\mathbb{R}^3$ (base: curva; fibra: reta tangente)[10].

Incluiremos aqui a construção do fibrado tangente de uma variedade diferenciável, de modo a evidenciar a sua adequação à definição 23. Escusamo-nos, entretanto, de fazer o mesmo com os demais exemplos acima, meramente ilustrativos da definição.

Exemplo 25 (fibrado tangente) *O fibrado tangente TM de uma variedade diferenciável M, como o próprio nome sugere, tem por base a variedade M e como fibra de base $x \in M$ o espaço tangente a M no ponto x, T_xM. Podemos concebê-lo concretamente como a união disjunta*

$$TM \equiv \cup_{x \in M} \{x\} \times T_xM$$

munida da projeção ao longo das fibras

$$\begin{array}{cccc} \pi : & TM & \longrightarrow & M \\ & (x,v) & \mapsto & x \end{array} .$$

Vamos providenciar uma trivialização para TM.

Dado um sistema de coordenadas $\big(U, \psi_U = \big(u^1, \cdots, u^m\big)\big)$ de M, considere, para cada ponto $x \in U$, a base $\big(\frac{\partial}{\partial u^\mu}\big|_x\big)_{\mu=1}^m$ do espaço tangente T_xM. Dados dois

[6] A imagem que nos vem à mente é aquela de um tapete felpudo no limite ideal em que a densidade da distribuição das cerdas tendesse ao infinito.

[7] Ver §3.5 de [do Carmo, 1].

[8] Ver seção 4.1 de [Lima, 2].

[9] Ver capítulo 12 de [Tu].

[10] Ver §2.3 de [do Carmo, 1].

sistemas de coordenadas $\left(U, \psi_U = \left(u^1, \cdots, u^m\right)\right)$ *e* $\left(V, \psi_V = \left(v^1, \cdots, v^m\right)\right)$, *vale a regra de mudança de base*

$$\left.\frac{\partial}{\partial u^\mu}\right|_x = \frac{\partial v^\lambda}{\partial u^\mu}(x) \left.\frac{\partial}{\partial v^\lambda}\right|_x \tag{2.7}$$

para todo $x \in U \cap V$, *com funções reais* $x \mapsto \frac{\partial v^\lambda}{\partial u^\mu}(x)$ *todas de classe* C^∞.[11].

Tome uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ *de* M *por vizinhanças coordenadas* (U, ψ_U), *e escolha como candidato a trivialização local sobre* U *a bijeção*

$$\begin{array}{rccc} \varphi_U : & U \times \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \pi^{-1}(U) \\ & (x, a^\mu e_\mu) & \mapsto & \left(x, a^\mu \left.\frac{\partial}{\partial u^\mu}\right|_x\right) \end{array},$$

onde $(e_1, \cdots, e_m)$ *é a base canônica de* $\mathbb{R}^m$.

Afirmamos que a família $\{(U, \varphi_U)\}_{U \in \mathcal{U}}$ *é uma trivialização de* TM. *De fato, a condição (i) da definição 1 é trivialmente satisfeita. Além disso, para cada* $x \in U \cap V$, *com* $U, V \in \mathcal{U}$, *temos*

$$\begin{aligned} f_{VU}(x) \cdot (a^\mu e_\mu) &\equiv \varphi_{V,x}^{-1}\left(\varphi_{U,x}(a^\mu e_\mu)\right) \\ &= \varphi_{V,x}^{-1}\left(a^\mu \left.\frac{\partial}{\partial u^\mu}\right|_x\right) \\ &= \varphi_{V,x}^{-1}\left(a^\mu \frac{\partial v^\lambda}{\partial u^\mu}(x) \left.\frac{\partial}{\partial v^\lambda}\right|_x\right) \quad \text{(use (2.7))} \\ &= \frac{\partial v^\lambda}{\partial u^\mu}(x)\, a^\mu e_\lambda , \end{aligned}$$

i.e., $f_{VU}(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ *com*

$$[f_{VU}(x)] = \left(\frac{\partial v^i}{\partial u^j}(x)\right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le m}} = \mathbf{J}\left(\psi_V \circ \psi_U^{-1}\right)(x).$$

Portanto, temos uma aplicação suave $x \in U \cap V \mapsto f_{VU}(x) \in GL(\mathbb{R}^m)$, *o que verifica as condições (ii) e (iii) da definição ?.*

Sendo cada fibra E_x de um fibrado (E, M, π) um espaço vetorial de dimensão n sobre $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, fica perfeitamente bem-definido o espaço vetorial dual E_x^* (dos funcionais lineares com domínio E_x), bem como os espaços de k-formas alternadas $\wedge^k E_x^*$ (das funções $k-$lineares totalmente antissimétricas em E_x) e os espaços de tensores $T_l^k(E_x)$ (das funções k-lineares em E_x^* e l-lineares em E_x). Substituindo as fibras originais E_x por espaços de um desses tipos, obtemos um novo fibrado vetorial sobre M. Esses são exemplos de *fibrados associados* a E.

Vejamos a construção explícita do fibrado dual E^* (de fibras E_x^*), a título de exemplo.

[11] Tais funções são entradas da matriz jacobiana da mudança de coordenadas: temos $\mathbf{J}\left(\psi_V \circ \psi_U^{-1}\right)(\psi_U(x)) = \left(\frac{\partial v^i}{\partial u^j}(x)\right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le m}} \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$ para todo $x \in U \cap V$.

Exemplo 26 (fibrado dual) *Tome a união disjunta*

$$E^* \equiv \cup_{x\in M} \{x\} \times E_x^*$$

e defina a projeção

$$\bar{\pi} : (x, \omega) \in E^* \mapsto x \in M.$$

Seja $\{(U, \varphi_U)\}_{U\in\mathcal{U}}$ *uma trivialização de* E.

Dado $x \in U \in \mathcal{U}$, *consideremos a base* $\mathcal{E}(U,x) = (e_\mu (U,x) \equiv \varphi_U (x, e_\mu))_{\mu=1}^n$ *do espaço vetorial* E_x *e a sua base dual*[12] *em* E_x^*, $\mathcal{E}^* (U,x) = (e^\mu (U,x))_{\mu=1}^n$.

Para cada $U \in \mathcal{U}$ *e cada* $x \in U$, *são válidas para todos* $\mu, \nu \in [n]$ *as equações*

$$e^\mu (U,x) \cdot e_\nu (U,x) = \delta_\nu^\mu. \tag{2.8}$$

Sendo $x \in U \cap V$, *sabemos que as bases* $\mathcal{E}(U,x)$ *e* $\mathcal{E}(V,x)$ *estão relacionadas por (2.1):*

$$e_\nu (U,x) = f_\nu^\lambda (x)\, e_\lambda (V,x),$$

onde

$$[f_{VU}(x)] = \left(f_i^j (x)\right)_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}.$$

Procuremos saber como se relacionam as bases duais $\mathcal{E}^*(V,x)$ *e* $\mathcal{E}^*(U,x)$. *Para isso, vamos avaliar o funcional linear*

$$e^\mu (V,x) = g_\rho^\mu (x)\, e^\rho (U,x)$$

em $e_\nu (U,x)$, *obtendo, por um lado*

$$\begin{aligned} e^\mu (V,x) \cdot e_\nu (U,x) &= e^\mu (V,x) \cdot f_\nu^\lambda (x)\, e_\lambda (V,x) \\ &= f_\nu^\lambda (x)\, e^\mu (V,x) \cdot e_\lambda (V,x) \\ &= f_\nu^\lambda (x)\, \delta_\lambda^\mu = f_\nu^\mu (x), \end{aligned}$$

e por outro

$$g_\rho^\mu (x)\, e^\rho (U,x) \cdot e_\nu (U,x) = g_\rho^\mu (x)\, \delta_\nu^\rho = g_\nu^\mu (x),$$

donde resulta que

$$e^\mu (V,x) = f_\nu^\mu (x)\, e^\nu (U,x), \tag{2.9}$$

ou seja[13]

$$[id]_{\mathcal{E}^*(U,x)}^{\mathcal{E}^*(V,x)} = [f_{VU}(x)].$$

Dado $U \in \mathcal{U}$, *admita como candidato a trivialização local sobre* U *a aplicação*

$$\begin{array}{cccc} \bar{\varphi}_U : & U \times \mathbb{F}^n & \longrightarrow & \bar{\pi}^{-1}(U) \\ & (x, \omega_\nu e_\nu) & \mapsto & (x, \omega_\mu e^\mu (U,x)) \end{array}.$$

[12] Ou seja, a base de E_x^* definida justamente pelas equações (2.8) abaixo.

[13] Note que U e V aparecem aqui em ordem inversa àquela de (2.3).

Afirmamos que a família $\{(U,\bar{\varphi}_U)\}_{U\in\mathcal{U}}$ *é uma trivialização de* E^**. De fato, a condição (i) da definição 1 é trivialmente satisfeita. Além disso, para cada* $x\in U\cap V$*, com* $U,V\in\mathcal{U}$*, temos*

$$\begin{array}{rcl}\bar{f}_{UV}(x)\cdot(\omega_\nu e_\nu) & \equiv & \bar{\varphi}_{U,x}^{-1}\left(\bar{\varphi}_{V,x}(\omega_\nu e_\nu)\right) \\ & = & \bar{\varphi}_{U,x}^{-1}\left(\omega_\mu e^\mu(V,x)\right) \\ & = & \bar{\varphi}_{U,x}^{-1}\left(\omega_\mu f_\nu^\mu(x)\, e^\nu(U,x)\right) \quad \text{use (2.9)} \\ & = & f_\lambda^\mu(x)\,\omega_\mu e_\lambda\ ,\end{array}$$

i.e., $\bar{f}_{UV}(x)\equiv\bar{\varphi}_{U,x}^{-1}\circ\bar{\varphi}_{V,x}\in\mathcal{L}(\mathbb{F}^n)$*. Em particular, comparando as equações (2.2)*

$$f_{VU}(x)\cdot e_\mu = f_\mu^\nu(x)\, e_\nu$$

com

$$\bar{f}_{UV}(x)\cdot e_\mu = f_\nu^\mu(x)\, e_\nu,$$

obtemos

$$\left[\bar{f}_{UV}(x)\right]=\left[f_{VU}(x)\right]^*. \tag{2.10}$$

Portanto, temos uma aplicação suave $x\in U\cap V\mapsto\bar{f}_{UV}(x)\in GL(\mathbb{F}^n)$*, o que verifica as condições (ii) e (iii) da definição 1.*

Exemplo 27 (produto tensorial de fibrados) *Sejam* (E,M,π) *e* (F,M,ρ) $\mathbb{F}-$*fibrados vetoriais sobre uma mesma base* M*.*

Tome a união disjunta

$$E\otimes F\equiv\cup_{x\in M}\{x\}\times(E_x\otimes F_x)$$

e defina a projeção

$$\Pi:(x,t)\in E\otimes F\mapsto x\in M.$$

Sejam $\{(U,\varphi_U)\}_{U\in\mathcal{U}}$ *e* $\{(U,\psi_U)\}_{U\in\mathcal{U}}$ *as respectivas trivializações sobre o mesmo conjunto de vizinhanças triviais*[14]*.*

$$\begin{array}{rccc}\varphi_U: & U\times\mathbb{F}^n & \longrightarrow & \pi^{-1}(U) \\ \psi_U & U\times\mathbb{F}^k & \longrightarrow & \rho^{-1}(U)\end{array}$$

Dado $x\in U\in\mathcal{U}$*, consideremos as bases* $\mathcal{E}(U,x)=\left(e_\mu(U,x)\equiv\varphi_U(x,e_\mu)\right)_{\mu=1}^n$ *do espaço vetorial* E_x *e* $\mathcal{F}(U,x)=\left(\bar{e}_\nu(U,x)\equiv\psi_U(x,e_\nu)\right)_{\nu=1}^k$ *do espaço vetorial* F_x *e a sua base-produto*[15] *em* $E_x\otimes F_x$*:*

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{T}(U,x) & \equiv & \mathcal{E}(U,x)\otimes\mathcal{F}(U,x) \\ & = & \left\{e_\mu(U,x)\otimes\bar{e}_\nu(U,x)\right\}_{\mu\in[n],\nu\in[k]}.\end{array}$$

[14] A hipótese adicional de que as trivializações de E e F estejam baseadas sobre a mesma cobertura aberta $\mathcal{U}$ de M não importa qualquer perda de generalidade. Com efeito, se $\{(U,\varphi_U)\}_{U\in\mathcal{U}}$ e $\{(V,\phi_V)\}_{V\in\mathcal{V}}$ são trivializações de E e F respectivamente, então também o são os refinamentos $\{(W,\varphi_W)\}_{W\in\mathcal{W}}$ e $\{(W,\phi_W)\}_{W\in\mathcal{W}}$ onde $\mathcal{W}=\{U\cap V\neq\emptyset;\ U\in\mathcal{U},\ V\in\mathcal{V}\}$, $\varphi_{U\cap V}$ (respectivamente $\phi_{U\cap V}$) é a restrição de φ_U (resp. ϕ_V) a $(U\cap V)\times\mathbb{F}^n$.

[15] Ver proposição 11.

Sendo $x \in U \cap V$, sabemos que as bases $\mathcal{E}(U,x)$ e $\mathcal{E}(V,x)$ estão relacionadas por (2.1):

$$e_\mu(U,x) = f_\mu^\lambda(x)\, e_\lambda(V,x),$$

onde

$$[f_{VU}(x)] = \left(f_i^j(x)\right)_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$$

e $f_{VU}(x) = \varphi_{V,x}^{-1} \circ \varphi_{U,x} \in GL(\mathbb{F}^n)$ é função de transição do fibrado E. Analogamente, as bases $\mathcal{F}(U,x)$ e $\mathcal{F}(V,x)$ estão relacionadas por (2.1):

$$\bar{e}_\nu(U,x) = g_\nu^\eta(x)\, \bar{e}_\eta(V,x),$$

onde

$$[g_{VU}(x)] = \left(g_i^j(x)\right)_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$$

e $g_{VU}(x) = \psi_{V,x}^{-1} \circ \psi_{U,x} \in GL\left(\mathbb{F}^k\right)$ é função de transição do fibrado F.

Temos então que as bases-produto $\mathcal{T}(V,x)$ e $\mathcal{T}(U,x)$ estão relacionadas pelas equações

$$e_\mu(U,x) \otimes \bar{e}_\nu(U,x) = f_\mu^\lambda(x)\, g_\nu^\eta(x)\, e_\lambda(V,x) \otimes \bar{e}_\eta(V,x), \tag{2.11}$$

ou seja, que

$$[id]_{\mathcal{T}(V,x)}^{\mathcal{T}(U,x)} = [f_{UV}(x)] \otimes [g_{UV}(x)].$$

No que segue, identificaremos o produto tensorial $\mathbb{F}^n \otimes \mathbb{F}^k$ com seu espaço vetorial isomorfo $\mathbb{F}^{nk}$.

Dado $U \in \mathcal{U}$, admita como candidato a trivialização local sobre U a aplicação

$$\begin{array}{cccc} \Phi_U : & U \times \mathbb{F}^{nk} & \longrightarrow & \Pi^{-1}(U) \\ & (x, t^{\mu\nu} e_\mu \otimes e_\nu) & \mapsto & (x, t^{\mu\nu} e_\mu(U,x) \otimes \bar{e}_\nu(U,x)) \end{array}.$$

Afirmamos que a família $\{(U,\Phi_U)\}_{U\in\mathcal{U}}$ é uma trivialização de $E \otimes F$. De fato, a condição (i) da definição 1 é trivialmente satisfeita. Além disso, para cada $x \in U \cap V$, com $U, V \in \mathcal{U}$, temos

$$\begin{aligned} h_{VU}(x) \cdot (t^{\mu\nu} e_\mu \otimes e_\nu) &\equiv \Phi_{V,x}^{-1}\left(\Phi_{U,x}\left(t^{\mu\nu} e_\mu \otimes e_\nu\right)\right) \\ &= \Phi_{V,x}^{-1}\left(t^{\mu\nu} e_\mu(U,x) \otimes \bar{e}_\nu(U,x)\right) \\ &= \Phi_{V,x}^{-1}\left(f_\mu^\lambda(x)\, g_\nu^\eta(x)\, t^{\mu\nu} e_\lambda(V,x) \otimes \bar{e}_\eta(V,x)\right) \quad \textit{use (2.11)} \\ &= f_\mu^\lambda(x)\, g_\nu^\eta(x)\, t^{\mu\nu} e_\lambda \otimes e_\eta\ , \end{aligned}$$

i.e., $h_{VU}(x) \equiv \Phi_{V,x}^{-1} \circ \Phi_{U,x} \in \mathcal{L}\left(\mathbb{F}^{nk}\right)$. Em particular, comparando as equações

$$f_{VU}(x) \cdot e_\mu = f_\mu^\lambda(x)\, e_\lambda$$

e

$$g_{VU}(x) \cdot e_\nu = g_\nu^\eta(x)\, e_\eta$$

com

$$h_{VU}(x) \cdot (e_\mu \otimes e_\nu) = f_\mu^\lambda(x)\, g_\nu^\eta(x)\, e_\lambda \otimes e_\eta,$$

obtemos

$$[h_{VU}(x)] = [f_{VU}(x)] \otimes [g_{VU}(x)]. \tag{2.12}$$

Portanto, temos uma aplicação suave $x \in U \cap V \mapsto h_{UV}(x) \in GL\left(\mathbb{F}^{nk}\right)$*, o que verifica as condições* (ii) *e* (iii) *da definição 1.*

Os demais fibrados associados a E aos quais nos referimos acima admitem construções explícitas segundo o mesmo roteiro. O teorema 35 a seguir permitirá obter esses fibrados de maneira implícita, a partir de suas presumíveis funções de transição. O último caso que trataremos explicitamente é o da *soma direta de fibrados*, ou *soma de Whitney*.

Exemplo 28 (soma direta de fibrados ou soma de Whitney) *Sejam* (E, M, π) *e* (F, M, ρ) $\mathbb{F}-$*fibrados vetoriais sobre uma mesma base* M*.*

Tome a união disjunta

$$E \oplus F \equiv \cup_{x\in M} \{x\} \times (E_x \oplus F_x)$$

e defina a projeção

$$P : (x, s) \in E \oplus F \mapsto x \in M.$$

Sejam $\{(U, \varphi_U)\}_{U\in\mathcal{U}}$ *e* $\{(U, \psi_U)\}_{U\in\mathcal{U}}$ *as respectivas trivializações sobre o mesmo conjunto de vizinhanças triviais*[16]*.*

$$\begin{array}{rccc} \varphi_U : & U \times \mathbb{F}^n & \longrightarrow & \pi^{-1}(U) \\ \psi_U & U \times \mathbb{F}^k & \longrightarrow & \rho^{-1}(U) \end{array}$$

Dado $x \in U \in \mathcal{U}$*, consideremos as bases* $\mathcal{E}(U, x) = (e_\mu(U, x) \equiv \varphi_U(x, e_\mu))_{\mu=1}^n$ *do espaço vetorial* E_x *e* $\mathcal{F}(U, x) = (\bar{e}_\nu(U, x) \equiv \psi_U(x, e_\nu))_{\nu=1}^k$ *do espaço vetorial* F_x *e a sua base-soma em* $E_x \oplus F_x$*:*

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(U, x) &\equiv \mathcal{E}(U, x) \oplus \mathcal{F}(U, x) \\ &= \left\{ \begin{array}{c} e_1(U, x) \oplus 0, \cdots, e_n(U, x) \oplus 0, \\ 0 \oplus \bar{e}_1(U, x), \cdots, 0 \oplus \bar{e}_k(U, x) \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Sendo $x \in U \cap V$*, sabemos que as bases* $\mathcal{E}(U, x)$ *e* $\mathcal{E}(V, x)$ *estão relacionadas por (2.1):*

$$e_\mu(U, x) = f_\mu^\lambda(x)\, e_\lambda(V, x),$$

onde

$$[f_{VU}(x)] = \left(f_i^j(x)\right)_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$$

[16] Ver nota de rodapé 14 à página 46.

e $f_{VU}(x) = \varphi_{V,x}^{-1} \circ \varphi_{U,x} \in GL(\mathbb{F}^n)$ *é função de transição do fibrado* E*. Analogamente, as bases* $\mathcal{F}(U,x)$ *e* $\mathcal{F}(V,x)$ *estão relacionadas por (2.1):*

$$\bar{e}_\nu(U,x) = g_\nu^\eta(x)\, \bar{e}_\eta(V,x),$$

onde

$$[g_{VU}(x)] = \left(g_i^j(x)\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$$

e $g_{VU}(x) = \psi_{V,x}^{-1} \circ \psi_{U,x} \in GL\left(\mathbb{F}^k\right)$ *é função de transição do fibrado* F*.*

Temos então que as bases-soma $\mathcal{S}(V,x)$ *e* $\mathcal{S}(U,x)$ *estão relacionadas pelas equações*

$$e_\mu(U,x) \oplus 0 = f_\mu^\lambda(x)\,(e_\lambda(V,x) \oplus 0)$$

e

$$0 \oplus \bar{e}_\nu(U,x) = g_\nu^\eta(x)\,(0 \oplus \bar{e}_\eta(V,x)),$$

ou seja, que

$$[id]_{\mathcal{S}(V,x)}^{\mathcal{S}(U,x)} = \begin{bmatrix} [f_{UV}(x)] & \mathbf{0}_{n\times k} \\ \mathbf{0}_{k\times n} & [g_{UV}(x)] \end{bmatrix} \equiv [f_{UV}(x)] \oplus [g_{UV}(x)]$$

No que segue, identificaremos a soma direta $\mathbb{F}^n \oplus \mathbb{F}^k$ *com seu espaço vetorial isomorfo* $\mathbb{F}^{n+k}$*.*

Dado $U \in \mathcal{U}$*, admita como candidato a trivialização local sobre* U *a aplicação*

$$\begin{array}{cccc} \Sigma_U: & U \times \mathbb{F}^{n+k} & \longrightarrow & P^{-1}(U) \\ & \left(x, s^1, \cdots, s^n, \bar{s}^1, \cdots, \bar{s}^k\right) & \mapsto & (x, (s^\mu e_\mu(U,x)) \oplus (\bar{s}^\nu \bar{e}_\nu(U,x))) \end{array}.$$

Afirmamos que a família $\{(U,\Sigma_U)\}_{U\in\mathcal{U}}$ *é uma trivialização de* $E \oplus F$*. De fato, a condição (i) da definição 1 é trivialmente satisfeita. Além disso, para cada* $x \in U \cap V$*, com* $U, V \in \mathcal{U}$*, temos*

$$\begin{aligned} j_{VU}(x)\cdot(s,\bar{s}) &\equiv \Sigma_{V,x}^{-1}(\Sigma_{U,x}(s,\bar{s})) \\ &= \Sigma_{V,x}^{-1}(s^\mu e_\mu(U,x)) \oplus (\bar{s}^\nu \bar{e}_\nu(U,x)) \\ &= \Sigma_{V,x}^{-1}\left(s^\mu f_\mu^\lambda(x)\, e_\lambda(V,x)\right) \oplus (\bar{s}^\nu g_\nu^\eta(x)\, \bar{e}_\eta(V,x)) \\ &= (f_{VU}(x)\cdot s, g_{VU}(x)\cdot \bar{s}) \end{aligned}$$

i.e., $j_{VU}(x) \equiv \Sigma_{V,x}^{-1} \circ \Sigma_{U,x} \in \mathcal{L}\left(\mathbb{F}^{n+k}\right)$*. Logo,*

$$[j_{VU}(x)] = [f_{VU}(x)] \oplus [g_{VU}(x)]. \tag{2.13}$$

Portanto, temos uma aplicação suave $x \in U \cap V \mapsto j_{UV}(x) \in GL\left(\mathbb{F}^{n+k}\right)$*, o que verifica as condições (ii) e (iii) da definição 1.*

O fibrado dual ao fibrado tangente TM é o *fibrado cotangente*[17] TM^*, que preferiremos denotar por T^*M. Num certo sentido, esses dois fibrados vetoriais

[17] Ver seção 17.3 de [Tu].

são semelhantes, uma vez que obtivemos um a partir do outro preservando a base e transformando cada fibra, mas de forma linear e reversível. Note que as funções de transição desses fibrados contêm essencialmente a mesma informação, uma vez que, em cada ponto base $x \in U \cap V$, $\left[\bar{f}_{UV}(x)\right]$ é tão-somente a transposta de $[f_{VU}(x)]$.

A noção precisa de equivalência de fibrados vetoriais é dada pela seguinte

Definição 29 *Sejam* (E, M, π), (F, N, ρ) $\mathbb{F}-$*fibrados vetoriais. Um* homomorfismo *entre esses fibrados é um par de mapas* $\Psi : E \longrightarrow F$ *e* $\psi : M \longrightarrow N$ *tais que*

1) $\rho \circ \Psi = \psi \circ \pi$, *i.e., o diagrama abaixo comuta.*

$$\begin{array}{ccccc} & & \Psi & & \\ & E & \longrightarrow & F & \\ \pi & \downarrow & & \downarrow & \rho \\ & M & \longrightarrow & N & \\ & & \psi & & \end{array}$$

2) $\Psi|E_x : E_x \to F_{\psi(x)}$ *é uma trasformação linear*[18], $\forall x \in M$.

Um homomorfismo que admite homomorfismo inverso será chamado um isomorfismo.

Decorre imediatamente da definição que dois fibrados isomorfos possuem espaços totais e espaços-base dois a dois difeomorfos. Portanto, uma condição necessária para o isomorfismo $(E, M, \pi) \simeq (F, N, \rho)$ é que $\dim E = \dim F$ e $\dim M = \dim N$ como variedades, e também que suas fibras típicas tenham a mesma dimensão como espaços vetoriais sobre $\mathbb{F}$. Em caso de isomorfismo, podemos considerar os dois fibrados sobre a mesma base, identificando M e N pelo difeomorfismo ψ. Então nos referiremos apenas ao mapa Ψ como sendo o isomorfismo. Doravante, adotaremos essa atitude.

Exemplo 30 *A trivialização local* φ_U *é um isomorfismo entre o fibrado trivial* $U \times \mathbb{F}^n$ *e o fibrado local* $\pi^{-1}(U) \subset E$.

Exemplo 31 *Todo fibrado trivial* E *é isomorfo ao seu fibrado dual* E^* via $\Psi = \bar{\varphi} \circ \varphi^{-1}$, *onde* $\varphi : M \times \mathbb{F}^n \to E$ *é a trivialização de* E *sobre* M *e* $\bar{\varphi} : M \times \mathbb{F}^n \to E^*$ *é a trivialização de* E^* *sobre* M *induzida por* φ, *como na construção explícita do exemplo 26 acima.*

Provaremos que os fibrados E *e* E^* *são globalmente isomorfos no caso em que sua base comum* M *possui topologia Hausdorff de base enumerável. Ver corolário 62 na seção seguinte.*

[18] Segundo a estrutura linear induzida nas fibras E_x e $F_{\psi(x)}$ pelas trivializações de E e F, respectivamente.

Exemplo 32 *Não é difícil mostrar que a* faixa de Möebius[19] $\mathcal{M}$ *admite uma estrutura de fibrado real unidimensional sobre o círculo, assim como o cilindro* $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ *do exemplo ?. Entretanto, esses fibrados não são isomorfos, pois seus espaços totais* $\mathcal{M}$ *e* $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ *não são difeomorfos. Com efeito,* $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ *é orientável, mas* $\mathcal{M}$ *não é.*

É óbvio que o isomorfismo de fibrados é uma relação de equivalência no conjunto dos fibrados vetoriais. As funções de transição f_{UV} classificam completamente os fibrados vetoriais, no sentido do seguinte

Lema 33 (Steenrod, 1951) *Sejam* $E \xrightarrow{\pi} M$, $F \xrightarrow{\rho} M$ *dois* $\mathbb{F}-$*fibrados vetoriais de mesma dimensão* n. *Suponha que suas trivializações* $\{(U, \varphi_U)\}_{U \in \mathcal{U}}$ *e* $\{(U, \phi_U)\}_{U \in \mathcal{U}}$ *contem com exatamente as mesmas vizinhanças trivializantes. Denotemos por*

$$f_{UV}, g_{UV} : U \cap V \to GL\left(\mathbb{F}^n\right)$$

suas funções de transição. Uma condição necessária e suficiente para que E *e* F *sejam isomorfos é a existência de mapas*

$$\lambda_U : U \to GL\left(\mathbb{F}^n\right)$$

tais que valham as identidades

$$g_{UV}(x) = \lambda_U\left(x\right) \circ f_{UV}\left(x\right) \circ \lambda_V\left(x\right)^{-1} \tag{2.14}$$

para todo $x \in U \cap V$.

Observação 34 *A hipótese adicional de que as trivializações de* E *e* F *estejam baseadas sobre a mesma cobertura aberta* $\mathcal{U}$ *de* M *não importa qualquer perda de generalidade. Com efeito, se* $\{(U, \varphi_U)\}_{U \in \mathcal{U}}$ *e* $\{(V, \phi_V)\}_{V \in \mathcal{V}}$ *são trivializações de* E *e* F *respectivamente, então também o são os refinamentos* $\{(W, \varphi_W)\}_{W \in \mathcal{W}}$ *e* $\{(W, \phi_W)\}_{W \in \mathcal{W}}$ *onde* $\mathcal{W} = \{U \cap V \neq \emptyset;\ U \in \mathcal{U},\ V \in \mathcal{V}\}$, $\varphi_{U \cap V}$ *(respectivamente* $\phi_{U \cap V}$*) é a restrição de* φ_U *(resp.* ϕ_V*) a* $(U \cap V) \times \mathbb{F}^n$.

Prova. ($\Rightarrow$) Suponha que exista um isomorfismo $\Psi : E \to F$. Fixemos $x \in U \cap V$.

As aplicações $\varphi_{U,x}$ são isomorfismos lineares entre $\mathbb{F}^n$ e a fibra E_x. As aplicações $\lambda_U\left(x\right) : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ definidas pelas composições

$$\begin{array}{ccccccc} & \varphi_{U,x} & & \Psi|E_x & & \phi_{U,x}^{-1} & \\ \mathbb{F}^n & \longrightarrow & E_x & \longrightarrow & F_x & \longrightarrow & \mathbb{F}^n \\ u & \mapsto & p & \mapsto & q & \mapsto & v \equiv f_U\left(x\right) \cdot u \end{array}$$

são, por construção, isomorfismos lineares. Também está claro da composição acima que $\lambda_U : U \to GL\left(\mathbb{F}^n\right)$ é de classe C^∞. Resta verificar que a condição (2.14) é satisfeita. De fato,

$$\lambda_U\left(x\right) f_{UV}\left(x\right) \lambda_V\left(x\right)^{-1} =$$

[19] Ver exemplo 20.11 de [Tu].

$$= \left(\phi_{U,x}^{-1} \circ \Psi \circ \varphi_{U,x}\right) \circ \left(\varphi_{U,x}^{-1} \circ \varphi_{V,x}\right) \circ \left(\varphi_{V,x}^{-1} \circ \Psi^{-1} \circ \phi_{V,x}\right)$$

$$= \phi_{U,x}^{-1} \circ \phi_{V,x} = g_{UV}(x).$$

($\Leftarrow$) Assuma a existência de tais mapas λ_U. Defina então, fibra-a-fibra, o mapa $\Psi : E \to F$ pela composição

$$\begin{array}{ccccccc} & \varphi_{U,x}^{-1} & & \lambda_U(x) & & \phi_{U,x} & \\ E_x & \longrightarrow & \mathbb{F}^n & \longrightarrow & \mathbb{F}^n & \longrightarrow & F_x \\ p & \mapsto & u & \mapsto & v & \mapsto & q \equiv \Psi(p) \end{array}, \text{ para } x = \pi(p) \in U.$$

Devemos verificar que a definição acima não depende da escolha particular da vizinhança trivial U de $x = \pi(p)$. De fato, temos

$$\underbrace{\left(\phi_{U,x} \circ \lambda_U(x) \circ \varphi_{U,x}^{-1}\right)}_{\Psi \text{ segundo } U} \circ \underbrace{\left(\varphi_{V,x} \circ \lambda_V(x)^{-1} \circ \phi_{V,x}^{-1}\right)}_{\Psi^{-1} \text{ segundo } V}$$

$$= \phi_{U,x} \circ \lambda_U(x) \circ f_{UV}(x) \circ \lambda_V(x)^{-1} \circ \phi_{V,x}^{-1}$$

$$= \phi_{U,x} \circ g_{UV}(x) \circ \phi_{V,x}^{-1}$$

$$= \phi_{U,x} \circ \left(\phi_{U,x}^{-1} \circ \phi_{V,x}\right) \circ \phi_{V,x}^{-1} = id_{E_x}$$

donde

$$\underbrace{\phi_{U,x} \circ \lambda_U(x) \circ \varphi_{U,x}^{-1}}_{\Psi \text{ segundo } U} = \underbrace{\phi_{V,x} \circ \lambda_V(x) \circ \varphi_{V,x}^{-1}}_{\Psi \text{ segundo } V}$$

para todo $x \in U \cap V$.

Por construção, $\Psi|E_x : E_x \to F_x$ é um isomorfismo linear, e $\Psi : E \to F$ é uma bijeção dada por

$$\Psi(p) = \phi_{U,x}\left(\lambda_U(x) \cdot \varphi_{U,x}^{-1}(p)\right)$$

com inversa dada por

$$\Psi^{-1}(p) = \varphi_{U,x}\left(\lambda_U(x)^{-1} \cdot \phi_{U,x}^{-1}(p)\right),$$

qualquer que seja $U \in \mathcal{U}$ com $x = \pi(p) \in U$. Isso mostra que Ψ é um difeomorfismo. Portanto, Ψ é um isomorfismo entre os fibrados E e F. ■

O Lema 33 sugere que toda informação a respeito de um fibrado encontra-se na variedade-base e nas funções de transição. Essa é a essência do seguinte teorema de existência e unicidade.

Teorema 35 (Steenrod, 1951) *Seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de uma variedade diferenciável M e suponha que, para todo par $U, V \in \mathcal{U}$ tal que $U \cap V \neq \emptyset$*

existe um mapa $f_{UV} : U \cap V \longrightarrow GL(\mathbb{F}^n)$ *satisfazendo, para cada* $x \in U \cap V \cap W$, *às* condições de cociclo

$$f_{WV}(x) \circ f_{VU}(x) = f_{WU}(x) . \tag{2.15}$$

Então, existe um único $\mathbb{F}-$*fibrado vetorial* $n-$*dimensional* (E, M, π), *a menos de isomorfismos, com funções de transição* f_{UV}.

Prova. Considere o conjunto F definido pela união disjunta

$$F = \cup_{U \in \mathcal{U}} \{U\} \times U \times \mathbb{F}^n$$

e defina aí a relação de equivalência $\sim$ dada por

$$(U, x, u) \sim (V, y, v) \Leftrightarrow x = y \text{ e } f_{VU}(x) \cdot u = v.$$

A reflexividade ($f_{UU}(x) = id$), a simetria ($f_{UV}(x)^{-1} = f_{VU}(x)$), e a transitividade de $\sim$ decorrem das condições de cociclo (2.15). Representaremos a classe de esquivalência de (U, x, u) por $[U, x, u]$. O espaço total E do fibrado que pretendemos construir será o conjunto das classes de equivalência de $\sim$ em F. A projeção $\pi : E \to M$ será dada por

$$\pi [U, x, u] = x \tag{2.16}$$

e está patentemente bem-definida.

Dado $U \in \mathcal{U}$, nossa candidata a trivialização local sobre U será a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \varphi_U : & U \times \mathbb{F}^n & \longrightarrow & \pi^{-1}(U) \\ & (x, u) & \mapsto & [U, x, u] \end{array},$$

que é injetiva, pois

$$\varphi_U(x, u) = \varphi_U(y, v)$$

significa que

$$[U, x, u] = [U, y, v]$$

ou seja, que

$$(U, x, u) \sim (U, y, v),$$

i.e., que $x = y$ e $f_{UU}(x) \cdot u = v$, donde $u = v$, pois $f_{UU}(x) = id$; e também é sobrejetiva, pois

$$\pi^{-1}(U) = \{[V, x, v] ; \ x \in U \cap V\}$$

e temos

$$[V, x, v] = [U, x, f_{UV}(x) \cdot v] = \varphi_U(x, f_{UV}(x) \cdot v)$$

para todo $x \in U \cap V$ e $v \in \mathbb{F}^n$.

Segue imediatamente de (2.16) que a condição (i) da definição está satisfeita. Investiguemos a ação da composição $\varphi_{V,x}^{-1} \circ \varphi_{U,x}$ em $\mathbb{F}^n$. Temos

$$\begin{aligned}
\varphi_{U,x}(u) &= \varphi_U(x,u) \\
&= [U,x,u] \\
&= [V,x,f_{VU}(x)\cdot u] \\
&= \varphi_V(x,f_{VU}(x)\cdot u) \\
&= \varphi_{V,x}(f_{VU}(x)\cdot u),
\end{aligned}$$

donde

$$\left(\varphi_{V,x}^{-1} \circ \varphi_{U,x}\right)(u) = f_{VU}(x)\cdot u.$$

Ou seja, temos

$$\varphi_{V,x}^{-1} \circ \varphi_{U,x} = f_{VU}(x).$$

Isso verifica as condições (ii) e (iii) da definição 23 e mostra que as funções de transição do fibrado E assim obtido são mesmo as funções f_{UV}. A unicidade é uma conseqüência óbvia do Lema 33 aplicado ao presente caso. ■

Poderíamos ter usado este teorema para chegar ao fibrado dual.

Exemplo 36 (outra vez o fibrado dual) *Seja (E,M,π) um fibrado com trivialização $\{(U,\varphi_U)\}_{U\in\mathcal{U}}$ e funções de transição f_{UV} e nos perguntemos sobre a existência de um fibrado D com trivialização $\{(U,\phi_U)\}_{U\in\mathcal{U}}$ e funções de transição g_{UV} tal que esteja disponível uma certa noção de* dualidade*, i.e., um produto sesquilinear não-degenerado $D_x \times E_x \longrightarrow \mathbb{F}$ dado por*

$$\phi_U(x,u)\cdot\varphi_U(x,v) = \langle u,v\rangle \quad , \tag{2.17}$$

para todos vetores $u,v\in\mathbb{F}^n$, independentemente da vizinhança trivial U de x.[20] *Em caso positivo, teríamos*

$$\phi_{U,x}(e_\nu)\cdot\varphi_{U,x}(e_\mu) = \phi_{V,x}(e_\nu)\cdot\varphi_{V,x}(e_\mu) = \delta_{\nu\mu}.$$

Escrevamos

$$[f_{VU}(x)] = \left(f_j^i(x)\right) \quad e \quad [g_{VU}(x)] = \left(g_j^i(x)\right) \ ,$$

donde segue

$$\begin{aligned}
\varphi_{U,x}(e_\mu) &= \varphi_{V,x}\left(\varphi_{V,x}^{-1}\left(\varphi_{U,x}(e_\mu)\right)\right) \\
&= \varphi_{V,x}(f_{VU}(x)\cdot e_\mu) \\
&= \varphi_{V,x}\left(f_\mu^\lambda(x)\, e_\lambda\right) \\
&= f_\mu^\lambda(x)\,\varphi_{V,x}(e_\lambda)
\end{aligned}$$

[20] Por $\langle u,v\rangle = u^\mu \bar{v}^\mu$ denotamos o produto interno hermiteano de dois vetores $u = u^\mu e_\mu$ e $v = v^\mu e_\mu$ em $\mathbb{F}^n$.

e, analogamente,

$$\phi_{U,x}\left(e_{\nu}\right)=g_{\nu}^{\rho}\left(x\right)\phi_{V,x}\left(e_{\rho}\right).$$

Usemos essas transformações para atinar com a forma explícita das funções de transição g_{UV} do fibrado procurado. Temos

$$\phi_{U,x}\left(e_{\nu}\right)\cdot\varphi_{U,x}\left(e_{\mu}\right)=\delta_{\nu\mu}$$

$$\Rightarrow g_{\nu}^{\rho}\left(x\right)f_{\mu}^{\lambda}\left(x\right)\phi_{V,x}\left(e_{\rho}\right)\cdot\varphi_{V,x}\left(e_{\lambda}\right)=\delta_{\nu\mu}$$

$$\Rightarrow g_{\nu}^{\rho}\left(x\right)f_{\mu}^{\lambda}\left(x\right)\delta_{\rho\lambda}=\delta_{\nu\mu}$$

$$\Rightarrow g_{\nu}^{\lambda}\left(x\right)f_{\mu}^{\lambda}\left(x\right)=\delta_{\nu\mu}.$$

Colecionando as entradas das matrizes em $\mu,\nu\in[n]$, resumimos as equações acima na sua forma matricial

$$\left[g_{VU}\left(x\right)\right]\left[f_{VU}\left(x\right)\right]^{*}=I_{n},$$

ou seja

$$\begin{aligned}\left[g_{VU}\left(x\right)\right] &= \left(\left[f_{VU}\left(x\right)\right]^{*}\right)^{-1}\\ &= \left(\left[f_{VU}\left(x\right)\right]^{-1}\right)^{*}\\ &= \left(\left[f_{VU}\left(x\right)^{-1}\right]\right)^{*}\\ &= \left[f_{UV}\left(x\right)\right]^{*}.\end{aligned}$$

Portanto, as funções de transição g_{UV} do fibrado desejado D, se este existir, corresponderão necessariamente às matrizes transpostas das funções de transição f_{UV} do fibrado original E. Mas, pelo teorema que acabamos de provar, a existência de D estará garantida desde que as matrizes transpostas das transformações $f_{UV}\left(x\right)$ satisfaçam às condições de cociclo (2.15). De fato, temos

$$\begin{aligned}\left[g_{WV}\left(x\right)\circ g_{VU}\left(x\right)\right] &= \left[g_{WV}\left(x\right)\right]\left[g_{VU}\left(x\right)\right]\\ &= \left[f_{VW}\left(x\right)\right]^{*}\left[f_{UV}\left(x\right)\right]^{*}\\ &= \left(\left[f_{UV}\left(x\right)\right]\left[f_{VW}\left(x\right)\right]\right)^{*}\\ &= \left[f_{UV}\left(x\right)\circ f_{VW}\left(x\right)\right]^{*}\\ &= \left[f_{UW}\left(x\right)\right]^{*}=\left[g_{WU}\left(x\right)\right],\end{aligned}$$

donde

$$\left[g_{WV}\left(x\right)\circ g_{VU}\left(x\right)\right]=\left[g_{WU}\left(x\right)\right].$$

O teorema garante também que o fibrado D é isomorfo ao fibrado E^{*} construído explicitamente no exemplo 4, uma vez que suas funções de transição são as mesmas.

O teorema 35 permite obter rapidamente certos fibrados a partir de suas presumidas funções de transição, inclusive os fibrados associados a E e as somas diretas que mencionamos acima. Daremos a seguir alguns exemplos. Sejam E e F dois fibrados vetoriais de dimensão n e k, respectivamente, sobre uma mesma variedade-base M, com trivializações definidas sobre uma mesma cobertura aberta $\mathcal{U}$ de M. Suas funções de transição serão designadas, respectivamente, por f_{UV} e g_{UV}.

Exemplo 37 (soma direta ou soma de Whitney) *Faremos a identificação $\mathbb{F}^n \oplus \mathbb{F}^k \simeq \mathbb{F}^{n+k}$. As funções*

$$f_{UV} \oplus g_{UV} : U \cap V \to GL\left(\mathbb{F}^n \oplus \mathbb{F}^k\right) \simeq GL\left(\mathbb{F}^{n+k}\right)$$

definidas, para todos $u \in \mathbb{F}^n$ e $v \in \mathbb{F}^k$, por

$$\left(f_{UV} \oplus g_{UV}\right)(x) \cdot (u \oplus v) \equiv \left(f_{UV}(x) \cdot u\right) \oplus \left(g_{UV}(x) \cdot v\right)$$

satisfazem às condições de cociclo (2.15):

$$\begin{aligned} &\left(f_{WV} \oplus g_{WV}\right)(x) \cdot \left(f_{VU} \oplus g_{VU}\right)(x) \cdot (u \oplus v) \\ &= \left(f_{WV} \oplus g_{WV}\right)(x) \cdot \left(\left(f_{VU}(x) \cdot u\right) \oplus \left(g_{VU}(x) \cdot v\right)\right) \\ &= \left(f_{WV}(x) \cdot f_{VU}(x) \cdot u\right) \oplus \left(g_{WV}(x) \cdot g_{VU}(x) \cdot v\right) \\ &= \left(f_{WU}(x) \cdot u\right) \oplus \left(g_{WU}(x) \cdot v\right) \\ &= \left(f_{WU} \oplus g_{WU}\right)(x) \cdot (u \oplus v) \end{aligned}$$

O fibrado dado pelo teorema 35 com funções de transição $f_{UV} \oplus g_{UV}$ será chamado a soma direta *ou* soma de Whitney *dos fibrados E e F, e denotado por $E \oplus F$.*

Exemplo 38 (produto tensorial) *Faremos a identificação $\mathbb{F}^n \otimes \mathbb{F}^k \simeq \mathbb{F}^{nk}$ As funções*

$$f_{UV} \otimes g_{UV} : U \cap V \to GL\left(\mathbb{F}^n \otimes \mathbb{F}^k\right) \simeq GL\left(\mathbb{F}^{nk}\right)$$

definidas pela extensão $\mathbb{F}-$linear a $\mathbb{F}^n \otimes \mathbb{F}^k$ da regra

$$\left(f_{UV} \otimes g_{UV}\right)(x) \cdot (u \otimes v) \equiv f_{UV}(x) \cdot u \otimes g_{UV}(x) \cdot v$$

satisfazem às condições de cociclo (2.15):

$$\begin{aligned} &\left(f_{WV} \otimes g_{WV}\right)(x) \cdot \left(f_{VU} \otimes g_{VU}\right)(x) \cdot (u \otimes v) \\ &= \left(f_{WV} \otimes g_{WV}\right)(x) \cdot \left(f_{VU}(x) \cdot u \otimes g_{VU}(x) \cdot v\right) \\ &= f_{WV}(x) \cdot f_{VU}(x) \cdot u \otimes g_{WV}(x) \cdot g_{VU}(x) \cdot v \\ &= f_{WU}(x) \cdot u \otimes g_{WU}(x) \cdot v \\ &= \left(f_{WU} \otimes g_{WU}\right)(x) \cdot (u \otimes v) . \end{aligned}$$

O fibrado dado pelo teorema 35 com funções de transição $f_{UV} \otimes g_{UV}$ *será chamado o* produto tensorial *dos fibrados* E *e* F*, e denotado por* $E \otimes F$.

Iterando, obtemos o fibrado tensorial *de ordem* (k, l) *associado a* E*:*

$$T_k^l(E) \equiv \underbrace{E^* \otimes \cdots \otimes E^*}_{k\ fatores} \otimes \underbrace{E \otimes \cdots \otimes E}_{l\ fatores}.$$

Exemplo 39 (fibrado alternado) *Para cada* $k < n$*, faremos a identificação* $\wedge^k \mathbb{F}^n \simeq \mathbb{F}^{\binom{n}{k}}$*. Vê-se sem dificuldades que as funções*

$$\wedge^k f_{UV} : U \cap V \to GL\left(\wedge^k \mathbb{F}^n\right) \simeq GL\left(\mathbb{F}^{\binom{n}{k}}\right)$$

definidas pela extensão $\mathbb{F}-$*linear a* $\wedge^k \mathbb{F}^n$ *da regra*

$$\wedge^k f_{UV}(x) \cdot (v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) \equiv f_{UV}(x) \cdot v_1 \wedge \cdots \wedge f_{UV}(x) \cdot v_k$$

satisfazem às condições de cociclo (2.15). O fibrado dado pelo teorema 35 com funções de transição $\wedge^k f_{UV}$ *será chamado a* $k-$ésima potência alternada *do fibrado* E*, e denotado por* $\wedge^k E$.

Exemplo 40 (fibrado simétrico) *Dados* $n, k \in \mathbb{N}$*, faremos a identificação* $\vee^k \mathbb{F}^n \simeq \mathbb{F}^{\binom{n+k-1}{k}}$*. Vê-se sem dificuldades que as funções*

$$\vee^k f_{UV} : U \cap V \to GL\left(\vee^k \mathbb{F}^n\right) \simeq GL\left(\mathbb{F}^{\binom{n+k-1}{k}}\right)$$

definidas pela extensão $\mathbb{F}-$*linear a* $\vee^k \mathbb{F}^n$ *da regra*

$$\vee^k f_{UV}(x) \cdot (v_1 \vee \cdots \vee v_k) \equiv f_{UV}(x) \cdot v_1 \vee \cdots \vee f_{UV}(x) \cdot v_k$$

satisfazem às condições de cociclo (2.15). O fibrado dado pelo teorema 35 com funções de transição $\vee^k f_{UV}$ *será chamado a* $k-$ésima potência simétrica *do fibrado* E*, e denotado por* $\vee^k E$.

2.2 O módulo de seções de um fibrado vetorial

Definição 41 *Uma* seção *de um fibrado vetorial* (E, M, π) *é um mapa* $s : M \to E$ *tal que* $\pi \circ s = id_M$.

Uma seção de $\left(\pi^{-1}(U), U, \pi\right)$*, onde* U *é aberto de* M*, é dita uma* seção local *do fibrado* (E, M, π).

O conjunto das seções de um fibrado (E, M, π) *será representado pelo símbolo* $\Gamma(E, M, \pi)$*, ou, quando não houver risco de confusão, simplesmente por* $\Gamma(E)$.

Exemplo 42 *Retome o exemplo 24. As seções do fibrado* $\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, pr_1\right)$ *são simplesmente os "gráficos" das funções reais a valores reais*[21]*. Com efeito, obtem-se de* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma seção* $gr(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *dada por* $gr(f)(x) = (x, f(x))$*. Por outro lado, dada uma seção* $s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$*, e escrevendo* $s(x) = \left(s^1(x), s^2(x)\right)$*, obtemos, da condição* $pr_1 s(x) = x$*, que* $s^1(x) = x$*. Portanto,* $s(x) = gr\left(s^2\right)$*, donde se vê que* $\Gamma\left(\mathbb{R}^2\right) = gr\left(C^\infty(\mathbb{R})\right)$*. De maneira geral, as seções em fibrados triviais por retas do tipo* $M \times \mathbb{R}$ *são gráficos de funções* $f : M \to \mathbb{R}$*.*

Ao tentar representar graficamente uma seção no cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$*, entendemos o por quê do nome "seção".*

Certas propriedades topológicas do fibrado E têm repercursão no espaço $\Gamma(E)$. Por exemplo, toda seção $s \in \Gamma\left(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}\right)$ do cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ do exemplo 2 deve satisfazer à condição

$$\lim_{\theta \to 0} s(\xi(\theta)) = \lim_{\theta \to 2\pi} s(\xi(\theta)),$$

onde

$$\begin{array}{rccc} \xi : & (0, 2\pi) \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2 \\ & \theta & \mapsto & (\cos\theta, \sin\theta) \end{array}$$

é o mapa de Euler. Outro exemplo, é o fato de que, se m é par, então todo campo vetorial na esfera S^m tem de se anular em algum ponto.[22]

Exemplos de seções são os campos vetoriais ($\mathfrak{X}(M) = \Gamma(TM)$), os campos de $1-$formas ($\Omega(M) = \Gamma(T^*M)$), os campos de $k-$vetores ($\mathfrak{X}^k(M) = \Gamma\left(\wedge^k TM\right)$), os campos de $k-$formas diferenciais ($\Omega^k(M) = \Gamma\left(\wedge^k T^*M\right)$), os campos (k,l)-tensoriais ($\mathfrak{T}_l^k(M) = \Gamma\left(T_l^k(TM)\right)$), e os campos polinomiais de grau k ($Pol^k(M) = \Gamma\left(\vee^k T^*M\right)$) sobre uma variedade diferenciável M.

O espaço de seções $\Gamma(E)$ de um $\mathbb{F}-$fibrado vetorial (E, M, π) é um módulo sobre o anel de funções $C^\infty(M, \mathbb{F})$. Com efeito, graças à estrutura $\mathbb{F}-$linear das fibras E_x, podemos definir combinações $C^\infty(M, \mathbb{F})-$lineares de seções por

$$(s_1 + f \cdot s_2)(x) = s_1(x) + f(x) s_2(x) \in E_x$$

para todos $s_1, s_2 \in \Gamma(E)$, $f \in C^\infty(M, \mathbb{F})$ e $x \in M$. Para ver que a combinação linear $s_1 + f \cdot s_2$ é uma aplicação $M \to E$ suave, tome $x \in U \in \mathcal{U}$, e escreva

$$\begin{aligned} (s_1 + f \cdot s_2)(x) &= \varphi_U\left(\varphi_U^{-1}\left(s_1(x) + f(x) s_2(x)\right)\right) \\ &= \varphi_U\left(x, \varphi_{U,x}^{-1}\left(s_1(x) + f(x) s_2(x)\right)\right) \\ &= \varphi_U\left(x, \varphi_{U,x}^{-1}\left(s_1(x)\right) + f(x)\varphi_{U,x}^{-1}\left(s_2(x)\right)\right), \end{aligned}$$

[21] A distinção entre uma função e o seu gráfico é totalmente supérflua. De fato, a definição de função que mais agrada ao autor destas linhas é como conjunto de pares ordenados, o que coincide com a definição usual de seu gráfico.

[22] Ver Teorema 4 (Poincaré-Brouwer) do capítulo 5 de [Lima 3].

donde

$$(s_1 + f \cdot s_2)\,|U = \varphi_U \circ \left(id_U,\ pr_{\mathbb{F}^n} \circ \varphi_U^{-1} \circ s_1 + f \cdot \left(pr_{\mathbb{F}^n} \circ \varphi_U^{-1} \circ s_2\right)\right),$$

onde $pr_{\mathbb{F}^n} : (x, u) \in U \times \mathbb{F}^n \to u \in \mathbb{F}^n$. Como a soma $+ : \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$ e o produto por escalar $\cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$ são aplicações suaves, e as composições que aparecem do lado direito do sinal de igualdade acima são entre aplicações de classe C^∞, temos então $s_1 + f \cdot s_2 \in \Gamma(E)$, como desejávamos. Os axiomas de módulo provam-se facilmente.

A associação $E \mapsto \Gamma(E)$ é um funtor covariante da categoria dos $\mathbb{F}-$fibrados vetoriais sobre uma mesma base M sobre a categoria dos $C^\infty(M, \mathbb{F})-$módulos. Com efeito, dado um homomorfismo $\psi : E \to F$ de fibrados sobre M, defina o homomorfismo $C^\infty(M, \mathbb{F})-$linear

$$\begin{array}{rccc} \Gamma(\psi): & \Gamma(E) & \longrightarrow & \Gamma(F) \\ & s & \mapsto & \psi \circ s \end{array}.$$

Claramente, temos $\Gamma(id_E) = id_{\Gamma(E)}$ e $\Gamma(\xi \circ \psi) = \Gamma(\xi) \circ \Gamma(\psi)$. Em particular, fibrados vetoriais isomorfos possuem módulos de seções isomorfos.

Não surpreende o fato de as seções do fibrado dual serem objetos $C^\infty(M, \mathbb{F})$ -duais às seções do fibrado original, no seguinte sentido. Definimos uma noção de *dualidade*, ou um *emparelhamento*, entre $\Gamma(E^*)$ e $\Gamma(E)$ por uma operação $C^\infty(M, \mathbb{F})-$sesquilinear

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(E^*) \times \Gamma(E) & \longrightarrow & C^\infty(M, \mathbb{F}) \\ (\omega, s) & \mapsto & \omega(s) \end{array}$$

dada por

$$\omega(s)(x) = \omega(x) \cdot s(x).$$

Para ver que a função $\omega(s) : M \to \mathbb{F}$ é mesmo de classe C^∞, tome $x \in U \in \mathcal{U}$ e reescreva a equação (2.17) do exemplo 12 na forma inversa

$$\omega(x) \cdot s(x) = \left\langle \phi_{U,x}^{-1}(\omega(x)), \varphi_{U,x}^{-1}(s(x)) \right\rangle$$

ou

$$\omega|U \cdot s|U = \left\langle pr_{\mathbb{F}^n} \circ \phi_U^{-1} \circ \omega,\ pr_{\mathbb{F}^n} \circ \varphi_U^{-1} \circ s \right\rangle.$$

Como o produto interno hemiteano $\langle \cdot\,, \cdot \rangle : \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}$ é uma aplicação suave, e as composições que aparecem do lado direito do sinal de igualdade acima são entre aplicações de classe C^∞, temos então que $\omega(s) \in C^\infty(M, \mathbb{F})$, como afirmamos.

Claramente, essa noção de dualidade põe à nossa disposição um homomorfismo $C^\infty(M, \mathbb{F})-$linear $\omega \in \Gamma(E^*) \mapsto \omega(\cdot) \in \Gamma(E)^*$.

Estaremos no melhor dos mundos possíveis se pudermos provar os isomorfismos $\Gamma(E^*) \simeq \Gamma(E)^*$ e $\Gamma(E) \otimes \Gamma(F) \simeq \Gamma(E \otimes F)$. A chave para isso é o conceito de referencial local, dado abaixo.

Definição 43 *Sejam (E, M, π) um $\mathbb{F}-$fibrado vetorial de dimensão n. Seja U um aberto de M. Um* referencial local *(sobre U) para esse fibrado é uma $n-$upla $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ de seções de $\pi^{-1}(U)$ tal que a $n-$upla $(\varepsilon_1(x), \cdots, \varepsilon_n(x))$ é base ordenada de E_x para todo $x \in U$. Nesse caso, dizemos que U é uma* vizinhança referencial *de M para o fibrado E.*

No caso $U = M$, dizemos que $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ é um referencial global *para o fibrado.*

Seja M uma variedade diferenciável e $\left(U, x^1, \cdots, x^n\right)$ um sistema de coordenadas locais. Seguem exemplos de referenciais locais sobre U para certos fibrados de base M: $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ para TM; $\left(dx^1, \cdots, dx^n\right)$ para T^*M; $(dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_k}; \mu : \mathcal{I}_k \to \mathcal{I}_n$ é seqüência crescente) para $\wedge^k T^*M$.

Todo fibrado vetorial admite referenciais locais. De fato, é sempre possível definir um referencial local sobre cada vizinhança trivial de um fibrado, de maneira canônica.

Seja $\varphi_U : U \times \mathbb{F}^n \to \pi^{-1}(U)$ uma trivialização local. Seja $(e_1, \cdots, e_n)$ a base canônica de $\mathbb{F}^n$. Considere as seções

$$x \in U \mapsto (x, e_\mu) \in U \times \mathbb{F}^n$$

do fibrado trivial $U \times \mathbb{F}^n$. Defina agora $e_1(U, \cdot), \cdots, e_n(U, \cdot) : U \to \pi^{-1}(U)$ por

$$e_\mu(U, x) = \varphi_U(x, e_\mu)$$

$\forall x \in U$.

É claro que

$$\pi(e_\mu(U, x)) = \pi(\varphi_U(x, e_\mu)) = x$$

$\forall x \in U$, pela propriedade (i) da definição 1, donde segue que $e_1(U, \cdot), \cdots, e_n(U, \cdot) \in \Gamma\left(\pi^{-1}(U)\right)$. Que $\mathcal{E}(U, x) = (e_\mu(U, x))_{\mu=1}^n$ é base da fibra E_x já provamos num dos comentários à definição 1. No caso de um fibrado trivial, o referencial assim construído é global.

Dada uma seção local $s \in \Gamma\left(\pi^{-1}(U)\right)$, existem funções $s^1, \cdots, s^n \in C^\infty(U, \mathbb{F})$ univocamente determinadas tais que

$$s = s^\mu e_\mu(U, \cdot).$$

Com efeito, para todo $x \in U$, como $\mathcal{E}(U, x)$ é base da fibra E_x, então existem escalares $s^1(x), \cdots, s^\mu(x) \in \mathbb{F}$ univocamente determinados tais que

$$\begin{aligned} s(x) &= s^\mu(x) e_\mu(U, x) \\ &= s^\mu(x) \varphi_{U,x}(e_\mu) \\ &= \varphi_U(x, s^\mu(x) e_\mu). \end{aligned}$$

Logo, as funções $x \in U \mapsto s^{\mu}(x) \in \mathbb{F}$ são dadas pela composição de aplicações suaves

$$s^{\mu} = pr_{\mu} \circ pr_{\mathbb{F}^n} \circ \varphi_U^{-1} \circ s \ ,$$

o que mostra que de fato se tem $s^1, \cdots, s^n \in C^{\infty}(U, \mathbb{F})$.

Mais geralmente, todo referencial local sobre U é uma $C^{\infty}(U, \mathbb{F})$-base para o $C^{\infty}(U, \mathbb{F})$-módulo $\Gamma\left(\pi^{-1}(U)\right)$. De fato, seja $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ um referencial local sobre U. Dada uma seção local $s \in \Gamma\left(\pi^{-1}(U)\right)$, afirmamos que existem também funções $\tilde{s}^1, \cdots, \tilde{s}^n \in C^{\infty}(U, \mathbb{F})$ univocamente determinadas tais que

$$s = \tilde{s}^{\mu} \varepsilon_{\mu}.$$

Com efeito, dado $x \in U$, como $\mathcal{E}(x) = (\varepsilon_1(x), \cdots, \varepsilon_n(x))$ é base da fibra E_x, existem escalares $\tilde{s}^1(x), \cdots, \tilde{s}^n(x) \in \mathbb{F}$ univocamente determinados tais que

$$s(x) = \tilde{s}^{\mu}(x)\, \varepsilon_{\mu}(x).$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que U é uma vizinhança trivial de E. Usando o referencial $\mathcal{E}(U, \cdot) = (e_{\mu}(U, \cdot))_{\mu=1}^{n}$ induzido pela trivialização local φ_U $(e_{\mu}(U, x) = \varphi_U(x, e_{\mu}))$, vimos que existem funções $a_{\mu}^{\nu} \in C^{\infty}(U, \mathbb{F})$ univocamente determinadas tais que

$$\varepsilon_{\mu} = a_{\mu}^{\nu} e_{\nu}(U, \cdot).$$

Assim, temos, por um lado,

$$s(x) = s^{\nu}(x)\, e_{\nu}(U, x) \ ,$$

e, por outro,

$$\begin{aligned} s(x) &= \tilde{s}^{\mu}(x)\, \varepsilon_{\mu}(x) \\ &= \tilde{s}^{\mu}(x)\, a_{\mu}^{\nu}(x)\, e_{\nu}(U, x), \end{aligned}$$

donde

$$s^{\nu}(x) = \tilde{s}^{\mu}(x)\, a_{\mu}^{\nu}(x) \ ,$$

e logo

$$\tilde{s}^{\lambda}(x) = s^{\nu}(x)\, b_{\nu}^{\lambda}(x),$$

onde $\left(b_j^i(x)\right)_{n \times n}$ é a matriz inversa[23] de $\left(a_j^i(x)\right)_{n \times n}$. Isso mostra que as funções $\tilde{s}^{\mu}$ são de fato suaves.

[23] A matriz $\mathbf{a}(x) = \left(a_j^i(x)\right)_{n \times n}$ é a matriz da identidade de E_x com relação às bases $\mathcal{E}(x) = (\varepsilon_1(x), \cdots, \varepsilon_n(x))$ e $\mathcal{E}(U, x) = (e_1(U, x), \cdots, \varepsilon_n(U, x))$. Portanto, possui de fato uma inversa $\mathbf{b}(x) = \left(b_j^i(x)\right)_{n \times n}$. Além disso, como as funções $x \mapsto a_{\mu}^{\nu}(x)$ são suaves, também o são as funções $x \mapsto b_{\mu}^{\nu}(x)$. Isso é uma conseqüência imediata da fórmula de inversão de matrizes

$$b_{\mu}^{\nu}(x) = \frac{(-1)^{\mu+\nu}}{\det \mathbf{a}(x)} \det \left(a_j^i(x)\right)_{i \neq \nu,\ j \neq \mu}$$

Assim, uma vez fixado um referencial local $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ sobre U, temos um isomorfismo (de $C^\infty(U, \mathbb{F})$-módulos) canônico entre $\Gamma\left(\pi^{-1}(U)\right)$ e o módulo livre

$$C^\infty(U,\mathbb{F})^n = \underbrace{C^\infty(U,\mathbb{F}) \times \cdots \times C^\infty(U,\mathbb{F})}_{n \text{ fatores}}$$

Não somente uma trivialização do fibrado (E, M, π) fornece uma cobertura de M por vizinhanças referenciais, como vale também a recíproca: uma cobertura de M por vizinhanças referenciais induz uma trivialização do fibrado (E, M, π) isomorfa à original. Com efeito, seja $\mathcal{U}$ uma cobertura de M por abertos U equipados com referenciais locais $\mathcal{F}(U) = \left(\phi_\mu(U, \cdot)\right)_{\mu=1}^n$ e defina os seguintes candidatos a trivializações locais

$$\begin{array}{cccc} \psi_U : & U \times \mathbb{F}^n & \longrightarrow & \pi^{-1}(U) \\ & (x, u^\mu e_\mu) & \mapsto & u^\mu \phi_\mu(U, x) \end{array}.$$

É claro que se trata de bijeções satisfazendo à condição $\pi(\psi_U(x,u)) = x$ para todo $x \in U$. As aplicações $\psi_{U,x} : \mathbb{F}^n \to E_x$ definidas por $\psi_{U,x}(u) = \psi_U(x,u)$ são obviamente isomorfismos lineares, donde também é claro que, para $x \in U \cap V$ com $U, V \in \mathcal{U}$, temos

$$g_{VU}(x) \equiv \psi_{V,x}^{-1} \psi_{U,x} \in GL(\mathbb{F}^n).$$

Dados $U, V \in \mathcal{U}$ e $x \in U \cap V$, vimos que existem funções $\Phi_\mu^\nu \in C^\infty(U \cap V, \mathbb{F})$ univocamente determinadas tais que

$$\phi_\mu(U,x) = \Phi_\mu^\nu(x)\, \phi_\nu(V,x).$$

Assim, dado $u = u^\mu e_\mu \in \mathbb{F}^n$, temos

$$\begin{aligned} g_{VU}(x) \cdot u &= \psi_{V,x}^{-1}\left(\psi_{U,x}(u)\right) \\ &= \psi_{V,x}^{-1}\left(\psi_U(x,u)\right) \\ &= \psi_{V,x}^{-1}\left(u^\mu \phi_\mu(U,x)\right) \\ &= \psi_{V,x}^{-1}\left(u^\mu \Phi_\mu^\nu(x)\, \phi_\nu(V,x)\right) \\ &= u^\mu \Phi_\mu^\nu(x)\, e_\nu, \end{aligned}$$

donde

$$[g_{VU}(x)] = \left(\Phi_i^j(x)\right)_{n \times n},$$

e, logo, a aplicação $x \in U \cap V \mapsto g_{VU}(x) \in GL(\mathbb{F}^n)$ é de classe C^∞. Isso mostra que $\{(U, \psi_U)\}_{U \in \mathcal{U}}$ é mesmo uma trivialização para (E, M, π). Resta provar que essa estrutura de $\mathbb{F}-$fibrado vetorial é isomorfa à original. Para isso, lançando mão do lema 8, basta encontrarmos mapas

$$\lambda_U : U \longrightarrow GL(\mathbb{F}^n)$$

tais que valha a identidade

$$g_{VU}(x) = \lambda_V(x) \circ f_{VU}(x) \circ \lambda_U(x)^{-1}$$

para todo $x \in U \cap V$. A escolha óbvia é

$$\lambda_V(x) = \psi_{V,x}^{-1} \varphi_{V,x}.$$

Uma conseqüência imediata do que acabamos de provar é a

Proposição 44 *Um fibrado é trivial se, e somente se, admite um referencial global.*

Proposição 45 *Seja $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ um referencial local sobre $U \subset M$ para o fibrado E. Dado $x \in U$, seja $\mathcal{E}^*(x) = \left(\varepsilon^1(x), \cdots, \varepsilon^n(x)\right)$ a base dual a $\mathcal{E}(x) = (\varepsilon_1(x), \cdots, \varepsilon_n(x))$. Isso define aplicações $\varepsilon^\mu : x \in U \mapsto \varepsilon^\mu(x) \in E_x^*$, que constituem um referencial local $\mathcal{E}^* = \left(\varepsilon^1, \cdots, \varepsilon^n\right)$ sobre U para o fibrado dual E^*.*

Prova. O busílis é a suavidade das aplicações ε^μ. Seja $\varphi_U : U \times \mathbb{F}^n \to \pi^{-1}(U)$ a trivialização sobre U induzida por $\mathcal{E}$. Construa, como no exemplo 26, a trivialização dual $\bar{\varphi}_U : U \times \mathbb{F}^n \to \bar{\pi}^{-1}(U)$ para E^*. Temos então $\varepsilon^\mu(x) = \bar{\varphi}_U(x, e_\mu)$ para todo $\mu \in [n]$. ■

Proposição 46 *Sejam $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ e $\mathcal{F} = (\phi_1, \cdots, \phi_k)$ referenciais locais sobre $U \subset M$ para os fibrados E e F, respectivamente. Dado $x \in U$, seja*

$$(\mathcal{E} \oplus \mathcal{F})(x) \equiv \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_1(x) \oplus 0, \cdots, \varepsilon_n(x) \oplus 0, \\ 0 \oplus \phi_1(x), \cdots, 0 \oplus \phi_k(x) \end{array} \right\}$$

a base-soma de $\mathcal{E}(x)$ e $\mathcal{F}(x)$ em $E_x \oplus F_x$. Isso define aplicações

$$\varepsilon_\mu \oplus 0 : x \in U \mapsto \varepsilon_\mu(x) \oplus 0 \in E_x \oplus F_x = (E \oplus F)_x$$

e

$$0 \oplus \phi_\nu : x \in U \mapsto 0 \oplus \phi_\nu(x) \in E_x \oplus F_x = (E \oplus F)_x$$

que constituem um referencial local $\mathcal{E} \oplus \mathcal{F} = \{\varepsilon_\mu \oplus 0, 0 \oplus \phi_\nu\}_{\mu \in [n], \nu \in [k]}$ sobre U para a soma direta $E \oplus F$.

Prova. Basta provar a suavidade das aplicações $\varepsilon_\mu \oplus 0$ e $0 \oplus \phi_\nu$. Sejam $\varphi_U : U \times \mathbb{F}^n \to \pi^{-1}(U)$ e $\psi_U : U \times \mathbb{F}^k \to \rho^{-1}(U)$ as trivializações sobre U induzidas por $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$, respectivamente. Construa, como no exemplo 28, a trivialização $\Sigma_U : U \times \mathbb{F}^{n+k} \to P^{-1}(U)$ para $E \oplus F$. Temos então $(\varepsilon_\mu \oplus 0)(x) = \Sigma_U(x, e_\mu)$ e $(0 \oplus \phi_\nu)(x) = \Sigma_U(x, e_{\nu+n})$ para todos $\mu \in [n]$, $\nu \in [k]$. ■

Proposição 47 *Sejam $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ e $\mathcal{F} = (\phi_1, \cdots, \phi_k)$ referenciais locais sobre $U \subset M$ para os fibrados E e F, respectivamente. Dado $x \in U$, seja*

$$(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F})(x) \equiv \mathcal{E}(x) \otimes \mathcal{F}(x) = \{\varepsilon_\mu(x) \otimes \phi_\nu(x)\}_{\mu\in[n],\nu\in[k]}$$

a base-produto[24] *de $\mathcal{E}(x)$ e $\mathcal{F}(x)$ em $E_x \otimes F_x$. Isso define aplicações*

$$\varepsilon_\mu \otimes \phi_\nu : x \in U \mapsto \varepsilon_\mu(x) \otimes \phi_\nu(x) \in E_x \otimes F_x = (E \otimes F)_x,$$

que constituem um referencial local $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F} = \{\varepsilon_\mu \otimes \phi_\nu\}_{\mu\in[n],\nu\in[k]}$ sobre U para o produto tensorial $E \otimes F$.

Prova. De novo, o busílis é a suavidade das aplicações $\varepsilon_\mu \otimes \phi_\nu$. Sejam $\varphi_U : U \times \mathbb{F}^n \to \pi^{-1}(U)$ e $\psi_U : U \times \mathbb{F}^k \to \rho^{-1}(U)$ as trivializações sobre U induzidas por $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$, respectivamente. Construa, como no exemplo 27, a trivialização $\Phi_U : U \times \mathbb{F}^{nk} \to \Pi^{-1}(U)$ para $E \otimes F$. Temos então $(\varepsilon_\mu \otimes \phi_\nu)(x) = \Phi_U(x, e_\mu \otimes e_\nu)$ para todos $\mu \in [n]$, $\nu \in [k]$. ■

Corolário 48 *Se $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ é referencial local sobre $U \subset M$ para o fibrado E, e $\mathcal{E}^* = (\varepsilon^1, \cdots, \varepsilon^n)$ é o referencial dual em E^*, então,*

$$T_p^q(\mathcal{E}) \equiv \left\{\varepsilon^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{i_p} \otimes \varepsilon_{i_{p+1}} \otimes \cdots \otimes \varepsilon_{i_{p+q}}\right\}_{i_1,\cdots,i_{p+q}\in[n]}$$

é referencial local sobre U para $T_p^q(E)$, para todos $p, q \in \mathbb{N}$;

$$\wedge^k \mathcal{E} \equiv \{\varepsilon_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{i_k}\}_{1\le i_1\le\cdots\le i_k\le n}$$

é referencial local sobre U para $\wedge^k E$, para todo $k \in [n]$, e

$$\vee^k \mathcal{E} \equiv \{\varepsilon_{i_1} \vee \cdots \vee \varepsilon_{i_k}\}_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}$$

é referencial local sobre U para $\vee^k E$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Corolário 49 *Se E e F são fibrados triviais, então valem os isomorfismos*

$$\Gamma(E) \simeq \Gamma(E^*) \simeq \Gamma(E)^*$$

$$\Gamma(E \oplus F) \simeq \Gamma(E) \oplus \Gamma(F)$$

$$\Gamma(E \otimes F) \simeq \Gamma(E) \otimes \Gamma(F)$$

$$\Gamma\left(T_p^q(E)\right) \simeq T_p^q(\Gamma(E))$$

$$\Gamma\left(\wedge^k E\right) \simeq \wedge^k \Gamma(E) \quad \text{e} \quad \Gamma\left(\vee^k E\right) \simeq \vee^k \Gamma(E).$$

[24] Ver proposição 11.

Pode-se mostrar sob hipóteses bem gerais que os mesmos isomorfismos valem ainda que E e F sejam fibrados não-triviais.

Proposição 50 *O funtor Γ preserva a soma de Whitney, i.e., vale o isomorfismo*

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(E) \oplus \Gamma(F) & \to & \Gamma(E \oplus F) \\ e \oplus f & \mapsto & (x \mapsto e(x) \oplus f(x)) \end{array}$$

Prova. Não é difícil ver que o homomorfismo $C^{\infty}(M, \mathbb{F})-$linear acima está bem definido. Também é claro que seu núcleo é trivial. Resta verificar a sobrejetividade. Ora, dada uma seção $w \in \Gamma(E \oplus F)$, podemos escrever, para todo $x \in M$,

$$w(x) = e(x) \oplus f(x),$$

onde $e(x) \in E_x$ e $f(x) \in F_x$. Isso define aplicações $e : M \to E$ e $f : M \to F$ tais que $\pi \circ e = \rho \circ f = id_M$. Resta mostrar que e e f são de classe C^{∞}. Isso equivale a mostrar que, dada uma vizinhança U de M trivial com relação a E e a F, as restrições $e|U$ e $f|U$ são suaves. Construa, a partir das trivializações locais (U, φ_U) de E e (U, ψ_U) de F, uma trivialização local (U, Σ_U) para a soma de Whitney $E \oplus F$, como no exemplo 28 acima. Para ver que e é suave, basta verificar que o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{array}{ccccccc} & U & \overset{w|U}{\longrightarrow} & P^{-1}(U) & \overset{\Sigma_U}{\longleftarrow} & U \times \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^k & \\ id & \downarrow & & & & \downarrow & pr \\ & U & \underset{e|U}{\longrightarrow} & \pi^{-1}(U) & \underset{\varphi_U}{\longleftarrow} & U \times \mathbb{F}^n & \end{array}$$

De fato, escrevendo

$$w(x) = \underbrace{s^{\mu}(x)\, \varphi_U(x, e_{\mu})}_{e(x)} \oplus \underbrace{\bar{s}^{\nu} \psi_U(x, e_{\nu})}_{f(x)}$$

para todo $x \in U$, obtemos

$$\begin{aligned} \varphi_U\left(pr\left(\Sigma_U^{-1}(w(x))\right)\right) &= \varphi_U\left(pr\left(x, s^1(x), \cdots, s^n(x), \bar{s}^1(x), \cdots, \bar{s}^k(x)\right)\right) \\ &= \varphi_U\left(x, s^1(x), \cdots, s^n(x)\right) \\ &= \varphi_U(x, s^{\mu}(x)\, e_{\mu}) = s^{\mu}(x)\, \varphi_U(x, e_{\mu}) \\ &= e(x) \end{aligned}$$

De modo análogo verifica-se que também f é suave. Assim, vemos que $e \in \Gamma(E)$, $f \in \Gamma(F)$ e que $w : x \mapsto e(x) \oplus f(x)$ é imagem de $e \oplus f$. ■

Proposição 51 *O funtor* Γ *preserva a dualidade, i.e., vale o isomorfismo*

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(E^*) & \to & \Gamma(E)^* \\ \omega & \mapsto & \left(\begin{array}{cccc} \Omega: & \Gamma(E) & \to & C^\infty(M,\mathbb{F}) \\ & s & \mapsto & \left(\begin{array}{cccc} \Omega\cdot s: & M & \to & \mathbb{F} \\ & x & \mapsto & \omega(x)\cdot s(x) \end{array}\right) \end{array}\right) \end{array}$$

Prova. Primeiramente, vamos mostrar que os funcionais lineares em $\Gamma(E)^*$ são objetos locais. Mais precisamente, afirmamos que, dados $\Omega \in \Gamma(E)^*$ e $r, s \in \Gamma(E)$ tais que $r(x) = s(x)$ para todo x num aberto U de M, temos

$$\Omega(r)(x) = \Omega(s)(x), \forall x \in U.$$

Com efeito, fixemos e $x \in U$ e tomemos uma *bump-function* η em torno de x com suporte em U. É claro que $\eta r = \eta s$. Temos então, por $C^\infty(M,\mathbb{F})$ $-$linearidade,

$$\eta\Omega(r) = \Omega(\eta r) = \Omega(\eta s) = \eta\Omega(s),$$

donde, avaliando em x, temos

$$\Omega(r)(x) = \Omega(s)(x),$$

já que $\eta(x) = 1$.

A localidade dos funcionais lineares em $\Gamma(E)^*$ permite sua restrição a funcionais lineares em $\Gamma\left(\pi^{-1}(U)\right)$, qualquer que seja o aberto U de M. Basta por

$$(\Omega|U)(s)(x) = \Omega(s^\eta)(x),$$

onde, dados $s \in \Gamma\left(\pi^{-1}(U)\right)$ e $x \in U$, definimos $s^\eta \in \Gamma(E)$ por

$$s^\eta(y) = \begin{cases} \eta(y)\,s(y), \text{ se } y \in U \\ 0, \text{ se } y \notin U \end{cases},$$

com a mesma função η usada acima. Com essa convenção, dada uma seção $s \in \Gamma(E)$, temos

$$\Omega(s)(x) = (\Omega|U)(s|U)(x)$$

para todo $x \in U \subset M$.

Ora, se U é uma vizinhança referencial, temos, pelo caso particular, que $\Omega|U \in \Gamma\left(\bar{\pi}^{-1}(U)\right)$. Dada uma cobertura $\mathcal{U}$ de M por vizinhanças referenciais, fica bem definida[25] a cosseção $\omega \in \Gamma(E^*)$ por

$$\omega(x) = (\Omega|U)(x), \forall x \in U \in \mathcal{U}.$$

[25] Com efeito, dados $U, V \in \mathcal{U}$ e $x \in U \cap V$, temos

$$(\Omega|U)(x) = (\Omega|V)(x) = (\Omega|U \cap V)(x).$$

A aplicação $\Omega \mapsto \omega$ construída acima é o homomorfismo inverso do homomorfismo $C^{\infty}(M, \mathbb{F})-$linear

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(E^*) & \longrightarrow & \Gamma(E)^* \\ \omega & \mapsto & \omega(\cdot) \end{array}$$

definido parágrafos acima por

$$\omega(s)(x) = \omega(x) \cdot s(x)$$

para todo $x \in M$. Que se trata mesmo de um homomorfismo $C^{\infty}(M, \mathbb{F})-$linear verifica-se por inspeção. Agora, dados $s \in \Gamma(E)$ e $x \in U \in \mathcal{U}$ arbitrários, temos

$$\begin{aligned} \omega(s)(x) &= \omega(x) \cdot s(x) \\ &= (\Omega|U)(x) \cdot s(x) \\ &= (\Omega|U)(s|U)(x) \\ &= \Omega(s)(x), \end{aligned}$$

donde $\omega(\cdot) = \Omega$. Isso encerra a prova. ■

A próxima proposição deve ser lida no seguinte contexto: os fibrados vetoriais envolvidos possuem uma variedade-base comum M com topologia Hausdorff de base enumerável. Essas hipóteses adicionais sobre a topologia da base garantem a existência de uma *partição da unidade*[26] subordinada a qualquer cobertura de M por abertos. Além disso, vamos necessitar crucialmente do seguinte resultado técnico, cuja prova se pode encontrar no § 5 do capítulo II de [Greub]. Ela envolve uma incursão pelo terreno da teoria topológica da dimensão, que – à exceção do presente resultado – não apresenta maior interesse para os fins desta dissertação.

Lema 52 *Dado um $\mathbb{F}-$fibrado vetorial (E, M, π), onde M possui topologia Hausdorff de base enumerável, existe um $\mathbb{F}-$fibrado vetorial (E', M, π') tal que a soma de Whitney $(E \oplus E', M, P)$ é um fibrado trivial.*

Proposição 53 *O funtor Γ preserva o produto tensorial, i.e., vale o isomorfismo*

$$\Gamma(E \otimes F) \simeq \Gamma(E) \otimes \Gamma(F)$$

[26] Por partição da unidade subordinada a $\mathcal{U}$ entendemos uma família $\{\rho_U\}_{U \in \mathcal{U}}$ de funções $\rho_U \in C^{\infty}(M)$ tais que:
1) $supp \rho_U \subset U$, para todo $U \in \mathcal{U}$.
2) Para cada $x \in M$, existe um subconjunto finito $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{U}$ tal que $\rho_V(x) = 0$ $\forall V \notin \mathcal{U}_x$.
3) $\sum_{U \in \mathcal{U}} \rho_U(x) = 1$ para todo $x \in M$ (note que a soma é finita, devido à condição 2)
Para uma prova da existência de partições da unidade subordinadas a uma cobertura dada para variedades diferenciáveis com topologia Hausdorff de base enumerável, ver apêndice C de [Tu].

definido pela extensão $C^{\infty}(M,\mathbb{F})-$linear da regra

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(E)\otimes\Gamma(F) & \to & \Gamma(E\otimes F) \\ e\otimes f & \mapsto & (x\mapsto e(x)\otimes f(x)) \end{array}$$

Prova. Consideremos primeiro o caso em que ambos E e F são triviais. Então, amparados pela proposição 47, vemos que vale o isomorfismo acima. Agora ao caso geral. Apelando ao lema 52, afirmamos a existência de fibrados E' e F' tais que $E\oplus E'$ e $F\oplus F'$ sejam fibrados triviais. O caso particular que acabamos de tratar nos diz então que a aplicação

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(E\oplus E')\otimes\Gamma(F\oplus F') & \to & \Gamma((E\oplus E')\otimes(F\oplus F')) \\ (e\oplus e')\otimes(f\oplus f') & \mapsto & (x\mapsto(e(x)\oplus e'(x))\otimes(f(x)\oplus f'(x))) \end{array}$$

é um isomorfismo $C^{\infty}(M,\mathbb{F})-$linear. As proposições 10 e 50 permitem-nos operar distributivamente com o produto tensorial, de modo que o isomorfismo acima passa a ser visto como uma isomorfismo entre os $C^{\infty}(M,\mathbb{F})-$módulos

$$(\Gamma(E)\otimes\Gamma(F))\oplus(\Gamma(E)\otimes\Gamma(F'))\oplus(\Gamma(E')\otimes\Gamma(F))\oplus(\Gamma(E')\otimes\Gamma(F'))$$

e

$$\Gamma(E\otimes F)\oplus\Gamma(E\otimes F')\oplus\Gamma(E'\otimes F)\oplus\Gamma(E'\otimes F').$$

Ora, a deinição mesma deste isomorfismo, i.e., a regra

$$(e\oplus e')\otimes(f\oplus f')\mapsto(x\mapsto(e(x)\oplus e'(x))\otimes(f(x)\oplus f'(x))),$$

mostra que nos é permitido fatorá-lo nos isomorfismos

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(E)\otimes\Gamma(F) & \to & \Gamma(E\otimes F) \\ e\otimes f & \mapsto & (x\mapsto e(x)\otimes f(x)) \end{array},$$

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(E')\otimes\Gamma(F) & \to & \Gamma(E'\otimes F) \\ e'\otimes f & \mapsto & (x\mapsto e'(x)\otimes f(x)) \end{array},$$

etc., o primeiro dos quais é o isomorfismo $C^{\infty}(M,\mathbb{F})-$linear que procuramos. ■

Corolário 54 *O funtor Γ preserva tensorialidade, simetria e antissimetria, i.e., valem os isomorfismos $C^{\infty}(M,\mathbb{F})-$lineares*

$$\Gamma\left(T_p^q(E)\right)\simeq T_p^q(\Gamma(E))$$

$$\Gamma\left(\vee^k E\right)\simeq\vee^k\Gamma(E)$$

e

$$\Gamma\left(\wedge^k E\right)\simeq\wedge^k\Gamma(E).$$

Uma conseqüência que nos será especialmente útil na parte III desta dissertação é o corolário seguinte, que diz respeito ao fibrado $(p,q)-$supersimétrico $S^{p,q}(E)$ associado ao fibrado E, cuja obtenção, omitida aqui por brevidade, pode ser feita por construção explícita, seguindo o paradigma dos exemplos de 25 a 28, ou via teorema 35. Trata-se do fibrado vetorial cuja fibra sobre o ponto $x \in M$ é $S^{p,q}(E_x)$, o espaço dos $(p,q)-$supertensores do espaço vetorial E_x, definido no fim da seção 3 do capítulo 1.

Corolário 55 *O funtor* Γ *preserva supersimetria, i.e., valem os isomorfismos* $C^\infty(M,\mathbb{F})-$*lineares*

$$\Gamma\left(S^{p,q}(E)\right) \simeq S^{p,q}\left(\Gamma(E)\right)$$

2.3 Estruturas bilineares não-degeneradas

Definição 56 *Uma* estrutura (bilinear não-degenerada) *num fibrado vetorial real* (E,M,π) *é uma família* $\{B_x\}_{x\in M}$ *de aplicações bilineares*

$$\begin{array}{rccc} B_x: & E_x \times E_x & \longrightarrow & \mathbb{F} \\ & (p,q) & \mapsto & B_x(p,q) \end{array}$$

que satisfazem as seguintes condições.

(i) *são não-degeneradas, i.e., dado* $p \in E_x$*, se* $B_x(p,q) = 0$ *para todo* $q \in E_x$*, então* $p = 0$*.*

(ii) *variam suavemente em* M*, i.e., a função*

$$x \in M \mapsto B_x(r(x), s(x)) \in \mathbb{F}$$

é C^∞ *para seções* $r, s \in \Gamma(E)$ *quaisquer.*

Uma estrutura $\{B_x\}_{x\in M}$ *em* (E,M,π) *é dita* simétrica *(respectivamente* antissimétrica*) se, para cada* $x \in M$*, a aplicação bilinear* B_x *for simétrica (resp. antissimétrica), i.e., se valer* $B_x(p,q) = B_x(q,p)$ *(resp.* $B_x(p,q) = -B_x(q,p)$*), quaisquer que sejam* $p, q \in E_x$*.*

Ou por outra: uma estrutura é uma família suave a um parâmetro x sobre M de formas bilineares não-degeneradas nas fibras E_x.

É condição necessária para a existência de uma estrutura antissimétrica num fibrado $n-$dimensional E que n seja um número par. Isso decorre do seguinte resultado de Algebra Linear[27].

[27]Referimos o leitor à seção 1.1 de [Cannas] para a prova.

Proposição 57 *Seja $B : V \times V \to \mathbb{F}$ uma forma bilinear alternada num espaço vetorial $n-$dimensional V sobre $\mathbb{F}$. Existe uma base*

$$(u_1, \cdots, u_k, v_1, \cdots, v_m, w_1, \cdots, w_m)$$

de V tal que
1) $B(u_i, v) = 0,\ \forall i \in [k], \forall v \in V$
2) $B(v_i, v_j) = B(w_i, w_j) = 0,\ \forall i, j \in [m]$
3) $B(v_i, w_j) = \delta_{ij},\ \forall i, j \in [m]$

No caso em que a forma alternada B seja não-degenerada, teremos $k = 0$, donde $n = 2m$.

Proposição 58 *Todo fibrado vetorial (E, M, π) cuja variedade-base M tem topologia Hausdorff de base enumerável admite estrutura simétrica. Se a dimensão n do fibrado for par, então ele também admite uma estrutura antissimétrica.*

Prova. A idéia da prova é fazer o pull-back de uma forma bilinear definida na fibra-modelo $\mathbb{F}^n$ para a fibra propriamente dita E_x por meio das trivializações locais em torno de x, e a seguir fazer uma espécie de média ponderada sobre essas trivializações.

Escolha uma forma bilinear $\beta : \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$ do tipo desejado (simétrica ou antissimétrica)[28]. Seja $\{(U, \varphi_U)\}_{U \in \mathcal{U}}$ uma trivialização de (E, M, π). As hipóteses sobre a topologia de M garantem a existência de uma partição da unidade $\{\rho_U\}_{U \in \mathcal{U}}$ para M subordinada à cobertura $\mathcal{U}$. Dados $x \in U \in \mathcal{U}$ e $p, q \in E_x$, escreva

$$B_x(p, q) \equiv \sum_{U \in \mathcal{U}} \rho_U(x)\, B\left(\varphi_{U,x}^{-1}(p), \varphi_{U,x}^{-1}(q)\right).$$

As condições da definição 56 são facilmente verificadas para a família $\{B_x\}_{x \in M}$.
■

Observação 59 *Doravante, consideraremos apenas fibrados vetoriais sobre variedades Hausdorff de base enumerável.*

Uma estrutura $\{B_x\}_{x \in M}$ num fibrado (E, M, π) determina de modo único uma seção b do fibrado tensorial $T_2^0(E)$, que chamaremos *o tensor de estrutura*, dado por

$$b(x)(p, q) = B_x(p, q)$$

[28] Para o caso simétrico, a escolha mais simples é uma forma bilinear cuja matriz na base canônica de $\mathbb{F}^n$ é a identidade $\mathbf{I}_n$. A forma apropriada ao caso antissimétrico, onde $n = 2k$, é dada pela matriz simplética

$$\mathbf{J}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_k & -\mathbf{I}_k \\ \mathbf{I}_k & \mathbf{0}_k \end{pmatrix}_{2k \times 2k}.$$

para todos vetores $p, q \in E_x$ e todo $x \in M$.[29]

Seja $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ um referencial local sobre um aberto U de M e considere também o referencial dual $\mathcal{E}^* = \left(\varepsilon^1, \cdots, \varepsilon^n\right)$ em E^*. Dado $x \in U$ e dois vetores $p = p^\mu \varepsilon_\mu (x)$, $q = q^\nu \varepsilon_\nu (x) \in E_x$, temos

$$b(x)(p, q) = B_x(p, q) = b^{\mathcal{E}}_{\mu\nu}(x) p^\mu q^\nu,$$

onde

$$b^{\mathcal{E}}_{\mu\nu}(x) = B_x(\varepsilon_\mu(x), \varepsilon_\nu(x)).$$

As funções $x \in U \mapsto b^{\mathcal{E}}_{\mu\nu}(x) \in \mathbb{F}$ são suaves. Com efeito, fixado $x \in U$, tome uma *bump-function* η em torno de x com suporte em U e defina seções globais $\varepsilon^\eta_\mu \in \Gamma(E)$ por

$$\varepsilon^\eta_\mu(y) = \begin{cases} \eta(y)\varepsilon_\mu(y), \text{ se } y \in U \\ 0, \text{ se } y \notin U \end{cases}$$

para todo $\mu \in [n]$. Temos $\varepsilon^\eta_\mu(y) = \varepsilon_\mu(y)$ para todo y numa vizinhança A de x. Logo, como

$$\begin{aligned} b^{\mathcal{E}}_{\mu\nu}(y) &= B_y(\varepsilon_\mu(y), \varepsilon_\nu(y)) \\ &= B_y\left(\varepsilon^\eta_\mu(y), \varepsilon^\eta_\nu(y)\right) \end{aligned}$$

para todo $y \in A$, temos que a restrição de $b^{\mathcal{E}}_{\mu\nu}$ a A é de classe C^∞, pela (ii) da definição 56. Como $x \in U$ é arbitrário, segue-se que $b^{\mathcal{E}}_{\mu\nu} \in C^\infty(U, \mathbb{F})$ para todos $\mu, \nu \in [n]$.

Podemos então escrever a expressão local

$$b(x) = b^{\mathcal{E}}_{\mu\nu}(x)\varepsilon^\mu(x) \otimes \varepsilon^\nu(x). \tag{2.18}$$

Resta verificar que esta definição não depende da escolha particular do referencial local $\mathcal{E}$.

Vejamos como se transformam as componentes $b^{\mathcal{E}}_{\mu\nu}$ do tensor b sob uma mudança de referencial $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$ sobre U. Escrevendo

$$\varepsilon_\alpha = f^\beta_\alpha \phi_\beta$$

para relacionar os referenciais $\mathcal{E} = (\varepsilon_\mu)$ e $\mathcal{F} = \left(\phi_\mu\right)$ de E, segue-se necessariamente que os referenciais $\mathcal{E}^* = (\varepsilon^\mu)$ e $\mathcal{F}^* = (\phi^\mu)$ de E^* encontram-se relacionados por

$$\phi^\beta = f^\beta_\alpha \varepsilon^\alpha,$$

i.e., por

$$\varepsilon^\alpha = g^\alpha_\beta \phi^\beta$$

[29] Fazemos uso da identificação canônica

$$T^0_2(E_x) \simeq \mathcal{L}_2(E_x, E_x; \mathbb{R}).$$

Ver comentário no fim da seção 1.2.

com

$$f^{\alpha}_{\gamma}(x)\, g^{\gamma}_{\beta}(x) = g^{\alpha}_{\gamma}(x)\, f^{\gamma}_{\beta}(x) = \delta^{\alpha}_{\beta} \tag{2.19}$$

para todos $\alpha, \beta \in [n]$ e todo $x \in U$. Logo, temos

$$\begin{aligned} b^{\mathcal{E}}_{\mu\nu}(x) &= B_x\left(\varepsilon_\mu(x), \varepsilon_\nu(x)\right) \\ &= B_x\left(f^{\lambda}_{\mu}(x)\,\phi_\lambda(x), f^{\rho}_{\nu}(x)\,\phi_\rho(x)\right) \\ &= f^{\lambda}_{\mu}(x)\, f^{\rho}_{\nu}(x)\, B_x\left(\phi_\lambda(x), \phi_\rho(x)\right) \\ &= f^{\lambda}_{\mu}(x)\, f^{\rho}_{\nu}(x)\, b^{\mathcal{F}}_{\lambda\rho}(x), \end{aligned}$$

i.e.,

$$b^{\mathcal{E}}_{\mu\nu}(x) = f^{\lambda}_{\mu}(x)\, f^{\rho}_{\nu}(x)\, b^{\mathcal{F}}_{\lambda\rho}(x) \tag{2.20}$$

donde

$$\begin{aligned} & b^{\mathcal{E}}_{\mu\nu}(x)\,\varepsilon^{\mu}(x)\otimes\varepsilon^{\nu}(x) \\ &= f^{\lambda}_{\mu}(x)\, f^{\rho}_{\nu}(x)\, b^{\mathcal{F}}_{\lambda\rho}(x)\left(g^{\mu}_{\beta}(x)\,\phi^{\beta}(x)\right)\otimes\left(g^{\nu}_{\gamma}(x)\,\phi^{\gamma}(x)\right) \\ &= \underbrace{f^{\lambda}_{\mu}(x)\, g^{\mu}_{\beta}(x)}_{\delta^{\lambda}_{\beta}}\underbrace{f^{\rho}_{\nu}(x)\, g^{\nu}_{\gamma}(x)}_{\delta^{\rho}_{\gamma}} b^{\mathcal{F}}_{\lambda\rho}(x)\,\phi^{\beta}(x)\otimes\phi^{\gamma}(x) \\ &= b^{\mathcal{F}}_{\beta\gamma}(x)\,\phi^{\beta}(x)\otimes\phi^{\gamma}(x), \end{aligned}$$

como desejávamos. Isso mostra que $b \in \Gamma\left(T^0_2(E)\right)$, como afirmáramos.

Doravante, nos referiremos à estrutura bilinear não-degenerada de um fibrado vetorial E pelo seu tensor b.

Observação 60 *Sejam $b \in \Gamma\left(T^0_2(E)\right)$ uma estrutura bilinear não-degenerada num fibrado $E \to M$ e $\mathcal{U}$ uma cobertura de M por vizinhanças U, cada uma das quais munida de um referencial $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ e do respectivo dual $\mathcal{E}^* = \left(\varepsilon^1, \cdots, \varepsilon^n\right)$, de tal modo que se possa escrever*

$$b|U = b^{\mathcal{E}}_{\mu\nu}\varepsilon^{\mu}\otimes\varepsilon^{\nu}$$

para todo par $(U, \mathcal{E})$. A estrutura b é simétrica (respectivamente antissimétrica) se, e somente se, valem as igualdades $b^{\mathcal{E}}_{\mu\nu} = b^{\mathcal{E}}_{\nu\mu}$ (respectivamente $b^{\mathcal{E}}_{\mu\nu} = -b^{\mathcal{E}}_{\nu\mu}$) para todos índices $\mu, \nu \in [n]$ e todos pares $(U, \mathcal{E})$, com $U \in \mathcal{U}$. Daí conclui-se facilmente que $b \in \Gamma(E^*) \vee \Gamma(E^*) \simeq \Gamma(E^* \vee E^*)$ se b é simétrica, e que $b \in \Gamma(E^*) \wedge \Gamma(E^*) \simeq \Gamma(E^* \wedge E^*)$ se b é antissimétrica.

Observação 61 *No mesmo contexto da observação anterior, cumpre destacar que cada matriz $\mathbf{b}^{\mathcal{E}}(x) = \left(b^{\mathcal{E}}_{ij}(x)\right)_{1\leq i,j\leq n}$ possui inversa. Isso decorre da não-degenerescência da estrutura b, i.e., da condição (i) da definição 56. Com efeito, dado $x \in M$, considere a transformação linear $\widetilde{B_x} : E_x \to E^*_x$ dada por*

$$\widetilde{B_x}(p)(q) = B_x(p, q).$$

A referida condição (i) nos diz que $\ker \widetilde{B_x} = (0)$*, e portanto que* $\widetilde{B_x}$ *é um isomorfismo linear, donde segue que sua representação matricial segundo quaisquer bases de* E_x *e* E_x^* *é invertível. Por outro lado, é fácil ver que*

$$\begin{aligned}\left[\widetilde{B_x}\right]^{\mathcal{E}(x)}_{\mathcal{E}^*(x)} &= [B_x]^{\mathcal{E}(x),\mathcal{E}(x)} \\ &= \left(B_x\left(\varepsilon_i(x), \varepsilon_j(x)\right)\right)_{1\le i,j\le n} \\ &= \left(b^{\mathcal{E}}_{ij}(x)\right)_{1\le i,j\le n} = \mathbf{b}^{\mathcal{E}}(x).\end{aligned}$$

Em particular, vemos que $\det \mathbf{b}^{\mathcal{E}}(x) \neq 0$ *para todo* $x \in U$*. Denotando por* $\mathbf{b}_{\mathcal{E}}(x) = \left(b^{ij}_{\mathcal{E}}(x)\right)_{1\le i,j\le n}$ *a inversa de* $\mathbf{b}^{\mathcal{E}}(x)$*, decorre da conhecida fórmula*

$$b^{\mu\nu}_{\mathcal{E}}(x) = \frac{(-1)^{\mu+\nu}}{\det \mathbf{b}^{\mathcal{E}}(x)} \left(b^{\mathcal{E}}_{ij}(x)\right)_{i\neq\nu, j\neq\mu}$$

de inversão de matrizes que as funções $x \in U \mapsto b^{\mu\nu}_{\mathcal{E}}(x)$ *são de classe* C^∞*, assim como o são as funções* $b^{\mathcal{E}}_{\mu\nu}$*.*

Uma estrutura b no fibrado E induz uma estrutura b^* de mesmo tipo (simétrica ou antissimétrica) no fibrado dual E^* mediante a expressão invariante[30]

$$b^* = b^{\mu\nu}_{\mathcal{E}}(x)\, \varepsilon_\mu(x) \otimes \varepsilon_\nu(x) \tag{2.21}$$

onde $b^{\mu\nu}_{\mathcal{E}}(x)$ são as entradas da matriz $\mathbf{b}_{\mathcal{E}}(x)$ inversa de

$$\mathbf{b}^{\mathcal{E}}(x) = \left(b^{\mathcal{E}}_{ij}(x)\right)_{1\le i,j\le n} \in M_{n\times n}(\mathbb{F}),$$

i.e., valem as equações

$$b^{\mu\lambda}_{\mathcal{E}}(x)\, b^{\mathcal{E}}_{\lambda\nu}(x) = b^{\mathcal{E}}_{\nu\lambda}(x)\, b^{\lambda\mu}_{\mathcal{E}}(x) = \delta^\mu_\nu \tag{2.22}$$

para todos $x \in U$ e $\mu, \nu \in [n]$. A prova da invariância da expressão local (2.21) de b^*, necessária para se afirmar que se tem de fato $b^* \in \Gamma\left(T^0_2(E^*)\right)$, segue o mesmo roteiro da prova da invariância da expressão local (2.18): de (2.22) e (2.20) segue que

$$\delta^\mu_\nu = b^{\mu\lambda}_{\mathcal{E}}(x)\, b^{\mathcal{E}}_{\lambda\nu}(x) = f^\alpha_\lambda(x)\, f^\beta_\nu(x)\, b^{\mu\lambda}_{\mathcal{E}}(x)\, b^{\mathcal{F}}_{\alpha\beta}(x).$$

Multiplicando ambos os lados por $g^\nu_\eta(x)$, somando em ν, e usando (2.19), vem

$$\delta^\mu_\nu g^\nu_\eta(x) = f^\alpha_\lambda(x)\, \underbrace{f^\beta_\nu(x)\, g^\nu_\eta(x)}_{\delta^\beta_\eta} b^{\mu\lambda}_{\mathcal{E}}(x)\, b^{\mathcal{F}}_{\alpha\beta}(x),$$

[30] Aqui, lançamos mão tacitamente do isomorfismo $\mathbb{F}-$linear canônico $(E_x^*)^* \simeq E_x$, que induz de modo trivial o isomorfismo de fibrados vetorais $T^0_2(E^*) \simeq T^2_0(E)$, que por sua vez engendra o isomorfismo $C^\infty(M,\mathbb{F})-$linear $\Gamma\left(T^0_2(E^*)\right) \simeq \Gamma\left(T^2_0(E)\right)$.

donde

$$g_{\eta}^{\mu}(x) = f_{\lambda}^{\alpha}(x)\, b_{\mathcal{E}}^{\mu\lambda}(x)\, b_{\alpha\eta}^{\mathcal{F}}(x)\,.$$

Multilicando agora por $b_{\mathcal{F}}^{\eta\rho}(x)$, somando em η, e usando novamente (2.22), temos

$$\begin{aligned} g_{\eta}^{\mu}(x)\, b_{\mathcal{F}}^{\eta\rho}(x) &= f_{\lambda}^{\alpha}(x)\, b_{\mathcal{E}}^{\mu\lambda}(x)\, \underbrace{b_{\alpha\eta}^{\mathcal{F}}(x)\, b_{\mathcal{F}}^{\eta\rho}(x)}_{\delta_{\alpha}^{\rho}} \\ &= f_{\lambda}^{\rho}(x)\, b_{\mathcal{E}}^{\mu\lambda}(x)\,. \end{aligned}$$

Finalmente, multiplicando por $g_{\rho}^{\gamma}(x)$, somando em ρ, e usando (2.19) outra vez, obtemos

$$\begin{aligned} g_{\rho}^{\gamma}(x)\, g_{\eta}^{\mu}(x)\, b_{\mathcal{F}}^{\eta\rho}(x) &= \underbrace{g_{\rho}^{\gamma}(x)\, f_{\lambda}^{\rho}(x)}_{\delta_{\lambda}^{\gamma}} b_{\mathcal{E}}^{\mu\lambda}(x) \\ &= b_{\mathcal{E}}^{\mu\gamma}(x)\,, \end{aligned}$$

i.e.,

$$b_{\mathcal{E}}^{\mu\nu}(x) = g_{\eta}^{\mu}(x)\, g_{\rho}^{\nu}(x)\, b_{\mathcal{F}}^{\eta\rho}(x)\,,$$

donde

$$\begin{aligned} & b_{\mathcal{E}}^{\mu\nu}(x)\, \varepsilon_{\mu}(x) \otimes \varepsilon_{\nu}(x) \\ &= g_{\eta}^{\mu}(x)\, g_{\rho}^{\nu}(x)\, b_{\mathcal{F}}^{\eta\rho}(x) \left(f_{\mu}^{\beta}(x)\, \phi_{\beta}(x)\right) \otimes \left(f_{\nu}^{\gamma}(x)\, \phi_{\gamma}(x)\right) \\ &= \underbrace{g_{\eta}^{\mu}(x)\, f_{\mu}^{\beta}(x)}_{\delta_{\eta}^{\beta}} \underbrace{g_{\rho}^{\nu}(x)\, f_{\nu}^{\gamma}(x)}_{\delta_{\rho}^{\gamma}} b_{\mathcal{F}}^{\eta\rho}(x)\, \phi_{\beta}(x) \otimes \phi_{\gamma}(x) \\ &= b_{\mathcal{F}}^{\beta\gamma}(x)\, \phi_{\beta}(x) \otimes \phi_{\gamma}(x)\,, \end{aligned}$$

como queríamos mostrar.

Uma estrutura bilinear não-degenerada simétrica ou antissimétrica b num fibrado vetorial (E, M, π) deixa disponível, para cada $x \in M$, um isomorfismo linear canônico[31]

$$\begin{array}{cccc} \flat: & E_x & \longrightarrow & E_x^* \\ & p & \mapsto & p^{\flat} \end{array}$$

entre cada fibra E_x e a sua dual E_x^* no fibrado E^*, dada por

$$p^{\flat} \cdot q = b(x)(p, q)$$

e cuja transformação linear inversa constuma-se denotar por

$$\begin{array}{cccc} \sharp: & E_x^* & \longrightarrow & E_x \\ & \omega & \mapsto & \omega_{\sharp} \end{array}$$

[31] Trata-se do isomorfismo $\widetilde{B_x}$ da observação 51.

e define-se por

$$b(x)(\omega_\sharp, q) = \omega \cdot q \ ,$$

para todo $q \in E_x$. Com efeito, para todo $q \in E_x$, tem-se

$$(\omega_\sharp)^\flat \cdot q = b(x)(\omega_\sharp, q) = \omega \cdot q,$$

donde segue-se que

$$(\omega_\sharp)^\flat = \omega$$

para todo $\omega \in E_x^*$. Por linearidade de $\flat$ e $\sharp$, isso basta para afirmar que são transformações inversas entre si.

A mera extensão fibra-a-fibra das transformações lineares $\flat$ e $\sharp$ produz um isomorfismo de fibrados

$$\begin{array}{ccccc} & E & \overset{\flat}{\underset{\sharp}{\rightleftarrows}} & E^* & \\ \pi & \downarrow & & \downarrow & \bar{\pi} \\ & M & \underset{id}{\longrightarrow} & M & \end{array}$$

Antes de tudo observamos que as aplicações assim definidas são claramente bijeções inversas uma da outra. Passamos agora a provar que são aplicações suaves.

Dado $x \in M$, seja $\mathcal{E}(x) = (\varepsilon_1(x), \cdots, \varepsilon_n(x))$ uma base de E_x proveniente de um referencial local $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ sobre uma vizinhança U de x. Considere também sua dual $\mathcal{E}^*(x) = \left(\varepsilon^1(x), \cdots, \varepsilon^n(x)\right)$ em E_x^*.[32] Dado $p = p^\mu \varepsilon_\mu(x) \in E_x$, escreva

$$p^\flat = p^\flat_\mu \varepsilon^\mu(x) \in E_x^*$$

e aplique a $\varepsilon_\nu(x)$ para obter, por um lado,

$$\begin{aligned} p^\flat \cdot \varepsilon_\nu(x) &= p^\flat_\mu \varepsilon^\mu(x) \cdot \varepsilon_\nu(x) \\ &= p^\flat_\mu \delta^\mu_\nu = p^\flat_\nu \end{aligned}$$

e, por outro lado,

$$\begin{aligned} p^\flat \cdot \varepsilon_\nu(x) &= b(x)(p, \varepsilon_\nu(x)) \\ &= b(x)(p^\mu \varepsilon_\mu(x), \varepsilon_\nu(x)) \\ &= p^\mu b(x)(\varepsilon_\mu(x), \varepsilon_\nu(x)) \\ &= b^{\mathcal{E}}_{\mu\nu}(x)\, p^\mu, \end{aligned}$$

donde

$$p^\flat_\nu = b^{\mathcal{E}}_{\mu\nu}(x)\, p^\mu. \tag{2.23}$$

[32] É claro que a base dual $\mathcal{E}^*(x)$ provém do referencial dual $\mathcal{E}^*$ sobre U.

Temos então

$$\begin{aligned} p^\flat &= p^\flat_\nu \varepsilon^\nu(x) \\ &= b^{\mathcal{E}}_{\mu\nu}(x)\, p^\mu \varepsilon^\nu(x) \\ &= b^{\mathcal{E}}_{\mu\nu}(x)\, p^\mu \delta^\nu_\lambda \varepsilon^\lambda(x) \\ &= b(x)(p, \varepsilon_\lambda(x))\, \varepsilon^\lambda(x), \end{aligned}$$

ou seja

$$p^\flat = b(x)(p, \varepsilon_\lambda(x))\, \varepsilon^\lambda(x), \tag{2.24}$$

para todo $p \in E_x$.

Dado $\omega = \omega_\mu \varepsilon^\mu(x) \in E^*_x$, escreva

$$\omega_\sharp = \omega^\mu_\sharp \varepsilon_\mu(x) \in E_x$$

e tome o produto bilinear na fibra E_x por $\varepsilon_\nu(x)$ para obter, por um lado,

$$\begin{aligned} B_x(\omega_\sharp, \varepsilon_\nu(x)) &= b(x)(\omega_\sharp, \varepsilon_\nu(x)) \\ &= b(x)\left(\omega^\mu_\sharp \varepsilon_\mu(x), \varepsilon_\nu(x)\right) \\ &= \omega^\mu_\sharp b(x)(\varepsilon_\mu(x), \varepsilon_\nu(x)) \\ &= b^{\mathcal{E}}_{\mu\nu}(x)\, \omega^\mu_\sharp \end{aligned}$$

e, por outro lado,

$$\begin{aligned} B_x(\omega_\sharp, \varepsilon_\nu(x)) &= b(x)(\omega_\sharp, \varepsilon_\nu(x)) \\ &= (\omega_\sharp)^\flat \cdot \varepsilon_\nu(x) \\ &= \omega \cdot \varepsilon_\nu(x) = \omega_\nu \;, \end{aligned}$$

donde

$$\omega_\nu = b^{\mathcal{E}}_{\mu\nu}(x)\, \omega^\mu_\sharp \;,$$

ou, multiplicando por $b^{\lambda\nu}_{\mathcal{E}}(x)$, explorando a simetria ou antissimetria dos coeficientes $b^{\mathcal{E}}_{\mu\nu}(x)$, somando em ν, e usando (2.22),

$$\begin{aligned} b^{\lambda\nu}_{\mathcal{E}}(x)\, \omega_\nu &= b^{\lambda\nu}_{\mathcal{E}}(x)\, b^{\mathcal{E}}_{\mu\nu}(x)\, \omega^\mu_\sharp \\ &= \pm b^{\lambda\nu}_{\mathcal{E}}(x)\, b^{\mathcal{E}}_{\nu\mu}(x)\, \omega^\mu_\sharp \\ &= \pm \delta^\lambda_\mu \omega^\mu_\sharp = \pm \omega^\lambda_\sharp, \end{aligned}$$

i.e.,

$$\omega^\mu_\sharp = \pm b^{\mu\nu}_{\mathcal{E}}(x)\, \omega_\nu, \tag{2.25}$$

a depender de se b é uma estrutura simétrica ou antissimétrica. Logo,

$$\begin{aligned} \omega_\sharp &= \omega^\mu_\sharp \varepsilon_\mu(x) \\ &= \pm b^{\mu\nu}_{\mathcal{E}}(x)\, \omega_\nu \varepsilon_\mu(x) \\ &= \pm b^{\mu\nu}_{\mathcal{E}}(x)\, \delta^\lambda_\mu \omega_\nu \varepsilon_\lambda(x) \\ &= \pm b^*(x)\left(\varepsilon^\lambda(x), \omega\right) \varepsilon_\lambda(x) \\ &= b^*(x)\left(\omega, \varepsilon^\lambda(x)\right) \varepsilon_\lambda(x) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\omega_\sharp = b^* (x) \left(\omega, \varepsilon^\lambda (x)\right) \varepsilon_\lambda (x) , \tag{2.26}$$

para todo $\omega \in E_x^*$.

As equações (2.24) e (2.26) escritas na forma

$$p^\flat = b (\pi (p)) (p, \varepsilon_\lambda (\pi (p))) \varepsilon^\lambda (\pi (p))$$

e

$$\omega_\sharp = b^* (\bar{\pi} (\omega)) \left(\omega, \varepsilon^\lambda (\bar{\pi} (\omega))\right) \varepsilon_\lambda (\bar{\pi} (\omega))$$

mostram que as aplicações $\flat$ e $\sharp$ são ambas de classe C^∞.

Desse modo, provamos como um corolário da proposição 58 o seguinte

Corolário 62 *Todo fibrado vetorial (E, M, π) cuja variedade-base M tem topologia Hausdorff de base enumerável é isomorfo ao seu fibrado dual $(E^*, M, \bar{\pi})$.*

Vimos acima que uma estrutura bilinear não-degenerada permite passar, sem prejuízo de informação, de um fibrado para o seu dual e vice-versa. Por essa razão, podemos prescindir completamente do fibrado dual no estudo de certos fibrados munidos de estrutura. Por exemplo, é possível estudar geometria riemanniana sem fazer menção a fibrados cotangentes ou a formas diferenciais.[33]

Denotaremos pelos mesmos símbolos $\flat$ e $\sharp$ os isomorfismos de $C^\infty (M, \mathbb{F})$ −módulos

$$\begin{array}{ccc} \Gamma (E) & \overset{\flat}{\underset{\sharp}{\rightleftarrows}} & \Gamma (E^*) \\ s & \rightarrow & s^\flat \\ \omega_\sharp & \leftarrow & \omega \end{array}$$

dados por $\Gamma (\flat)$ e $\Gamma (\sharp)$, i.e., por

$$s^\flat (x) = s (x)^\flat$$

e

$$\omega_\sharp (x) = \omega (x)_\sharp \, .$$

Esse isomorfismo de módulos pode ser estendido de maneira natural às seções tensoriais, e responde pelas operações de "levantar" e "abaixar" índices, muito caras à Física: dada uma seção $t \in \Gamma \left(T_l^k (E)\right)$ do fibrado tensorial de ordem (k, l) associado a E, escreva, com respeito a um referencial local $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$, a expressão

$$t = t^{\mu_1 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \cdots \nu_l} \varepsilon_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon_{\mu_k} \otimes \varepsilon^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{\nu_l} .$$

[33] Essa é a perspectiva da análise vetorial clássica em $\mathbb{R}^3$ e do texto clássico [do Carmo, 2] sobre geometria riemanniana.

Definimos então as funções

$$t_{\nu_1\cdots\nu_l\mu_i}^{\mu_1\cdots\widehat{\mu_i}\cdots\mu_k} = b_{\mu_i\lambda}^{\mathcal{E}} t_{\nu_1\cdots\nu_l}^{\mu_1\cdots\lambda\cdots\mu_k}$$

e

$$t_{\nu_1\cdots\widehat{\nu_j}\cdots\nu_l}^{\mu_1\cdots\mu_k\nu_j} = b_{\mathcal{E}}^{\nu_j\rho} t_{\nu_1\cdots\rho\cdots\nu_l}^{\mu_1\cdots\mu_k} \ ,$$

que são componentes, com relação ao mesmo referencial local, de uma seção do fibrado $T_{l+1}^{k-1}(E)$ e de uma seção do fibrado $T_{l-1}^{k+1}(E)$, respectivamente, como se verifica sem dificuldades.

A propósito da Física, aproveitaremos para encerrar este capítulo introduzindo alguma terminologia que será útil adiante. A literatura física mais clássica designa sob o nome de *vetores contravariantes* num espaço M (uma variedade diferenciável) objetos compostos de funções $v^\mu \in C^\infty(U)$, onde U é um aberto de M, que se transformam sob mudança de coordenadas segundo a regra

$$\bar{v}^\mu = \frac{\partial \bar{u}^\mu}{\partial u^\lambda} v^\lambda,$$

onde $\left(\frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^j}\right)_{m\times m}$ é a matriz jacobiana da mudança das coordenadas u para as coordenadas $\bar{u}$ em U; e denomina de *vetores covariantes* conjuntos de funções $\omega_\mu \in C^\infty(U)$ que se transformam segundo a regra

$$\bar{\omega}_\mu = \frac{\partial u^\lambda}{\partial \bar{u}^\mu}\omega_\lambda.$$

Generalizando estas noções, define-se um tensor $k-$contravariante e $l-$covariante como um objeto composto de funções $t_{\nu_1\cdots\nu_l}^{\mu_1\cdots\mu_k} \in C^\infty(U)$ que se transformam segundo a regra

$$\bar{t}_{\nu_1\cdots\nu_l}^{\mu_1\cdots\mu_k} = \frac{\partial \bar{u}^{\mu_1}}{\partial u^{\kappa_1}}\cdots\frac{\partial \bar{u}^{\mu_k}}{\partial u^{\kappa_k}}\frac{\partial u^{\lambda_1}}{\partial \bar{u}^{\nu_1}}\cdots\frac{\partial u^{\lambda_l}}{\partial \bar{u}^{\nu_l}} t_{\lambda_1\cdots\lambda_l}^{\kappa_1\cdots\kappa_k}. \tag{2.27}$$

Outra noção importante é a dos objetos invariantes, ou *escalares*, que são compostos de funções $\varphi \in C^\infty(U)$ cuja expressão não muda se trocarmos de coordenadas, i.e., tais que

$$\bar{\varphi} = \varphi.$$

Costuma-se chamar atenção para o fato de as derivadas parciais de escalares serem os protótipos dos vetores covariantes, uma vez que a regra da cadeia nos dá

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{u}^\mu} = \frac{\partial u^\lambda}{\partial \bar{u}^\mu}\frac{\partial \varphi}{\partial u^\lambda}.$$

Diz-se também, já abusando da condescendência do leitor, que os "deslocamentos infinitesimais" são protótipos dos vetores covariantes, uma vez que

$$d\bar{u}^\mu = \frac{\partial \bar{u}^\mu}{\partial u^\lambda} du^\lambda.$$

É também um lugar-comum da literatura física exemplificar o conceito de escalar pela contração $\varphi = \omega_\mu v^\mu$ de um vetor covariante ω com um vetor contravariante v. De fato, as definições acima nos mostram o seguinte comportamento sob troca de coordenadas:

$$\bar{\varphi} = \bar{\omega}_\mu \bar{v}^\mu = \frac{\partial u^\lambda}{\partial \bar{u}^\mu} \frac{\partial \bar{u}^\mu}{\partial u^\nu} \omega_\lambda v^\nu = \delta^\lambda_\nu \omega_\lambda v^\nu = \omega_\lambda v^\lambda = \varphi.$$

Identifica-se claramente no exemplo acima a chave para o comportamento invariante de certas combinações de tensores: cada índice covariante é compensado por exatamente um índice contravariante no mesmo fator e estes devem indexar um somatório com domínio $[m] \subset \mathbb{N}$, onde $m = \dim M$. Tudo isto é excessivamente informal para o gosto matemático hodierno[34], mas este é o princípio subjascente à *regra dos índices alternados* explicada abaixo, que nos será muito útil.

Já nos deparamos acima com a seguinte situação: definir uma seção global num fibrado a partir de uma expressão local em termos de um referencial. Isso ocorre com alguma freqüência em Geometria e Física, e teremos oportunidade de adotar este expediente mais vezes a seguir. Uma *conditio sine qua non* deste procedimento é que a expressão local seja *invariante*, no seguinte sentido. Se adotarmos outro referencial local sobre o mesmo aberto, e observarmos rigorosamente as definições dos termos envolvidos na expressão (particularmente sua dependência do referencial adotado), então os objetos locais assim expressos coincidem. Foi o que fizemos, por exemplo, na definição da estrutura bilinear não-degenerada no fibrado dual algumas linhas acima. Encontraremos ocasião em que a verificação da invariância de uma expressão complexa será extensa e enfadonha – mas inevitável – na definição de derivada covariante, linhas abaixo. De todo modo, há um critério que permite, numa grande quantidade de casos complexos, dirimir a invariância de expressões locais por mera inspeção. Apelidaremos este truque de *regra dos índices alternados*. Explicamos abaixo do que se trata, em linhas gerais.

Todos os fibrados que tomarem parte na discussão que segue deverão ser considerados como tendo base numa mesma variedade M. Numa expressão local como

$$a^{\lambda\nu} b_{\nu\mu} c^\mu$$

tomam parte índices gregos. Dizemos que, numa expressão local composta de parcelas, como

$$g^\lambda_\xi \frac{d\bar{\alpha}^\gamma}{dt} \bar{s}^\eta \bar{\Gamma}^\xi_{\eta\gamma} + g^\lambda_\rho g^\nu_\eta \frac{\partial f^\rho_\nu}{\partial \bar{u}^\xi} \frac{d\bar{\alpha}^\xi}{dt} \bar{s}^\eta$$

[34] De fato, em linguagem atual e precisa, os escalares são tão somente as funções em $C^\infty(M) \simeq \Gamma(M \times \mathbb{R})$; os vetores contravariantes, os campos vetoriais em $\mathfrak{X}(M) = \Gamma(TM)$; os vetores covariantes, as 1-formas diferenciais em $\Omega(M) = \Gamma(T^*M)$; e os tensores $p-$contravariantes e $q-$covariantes, seções do fibrado tensorial $T^p_q(TM)$. Para não sermos injustos, notamos que a literatura física que cultivava a referida terminologia veio à luz numa época em que o conceito mesmo de variedade diferenciável era praticamente desconhecido da comunidade dos físicos, que, nesse sentido, foi pioneira.

um índice grego μ *diz respeito ao fibrado E numa parcela* quando todo objeto[35] Δ que ele indexa na referida parcela transforma-se, sob uma mudança de referencial em E apenas, segundo uma das regras seguintes:

$$\Delta_{\alpha\lambda\mu\theta}^{\beta\gamma} = \Lambda_{\mu}^{\nu}\bar{\Delta}_{\alpha\lambda\nu\theta}^{\beta\gamma}$$

ou

$$\Delta_{\alpha\lambda\mu\theta}^{\beta\gamma} = \tilde{\Lambda}_{\mu}^{\nu}\bar{\Delta}_{\alpha\lambda\nu\theta}^{\beta\gamma},$$

onde $\mathbf{\Lambda} = \left(\Lambda_i^j\right) \in C^{\infty}(U, \mathbb{F})$ é a matriz da referida mudança de referenciais e $\tilde{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{\Lambda}^{-1}$. No primeiro caso, dizemos que μ é um índice *covariante*; no segundo, *contravariante* (ou o oposto, não importa).

Em geral, procura-se apresentar os índices contravariantes sobrescritos e os índices covariantes subescritos. Note que isso não foi feito no exemplo acima, e não é obrigatório fazê-lo, apesar de largamente vantajoso. Pois bem: uma expressão local será invariante se, e somente se, em cada parcela todo índice grego μ dizendo respeito a um fibrado E aparece nela exatamente duas vezes: uma na forma covariante e uma na forma contravariante. Isso decorre do cancelamento entre um fator $\mathbf{\Lambda}$ e um fator $\mathbf{\Lambda}^{-1}$ quando aplicamos uma mudança de referencial em E. Exemplos de expressões locais que encontraremos ao longo deste trabalho e cuja invariância poderemos atestar mediante a regra dos índices alternados são os seguintes:

$$ds^{\mu} \otimes \varepsilon_{\mu} + s^{\mu}\nabla\varepsilon_{\mu}$$

$$\exp\left(-\frac{i\hbar}{2}\omega^{\mu\nu}(x)\, i\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\right|_{x}\right) \otimes i\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\right|_{x}\right)\right) a \otimes b$$

$$\frac{1}{4}\omega_{\kappa\rho}R_{\lambda\mu\nu}^{\rho}dx^{\kappa} \vee dx^{\lambda} \otimes dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}.$$

Uma expressão invariante, mas que não poderá ser apontada como tal apenas usando a regra, é a seguinte:

$$\frac{ds^{\lambda}}{dt}(t) + \frac{d\alpha^{\mu}}{dt}(t)\, s^{\nu}(t)\, \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}(\alpha(t)).$$

Como um exemplo de expressão obviamente não-invariante que encontraremos podemos citar

$$\frac{1}{2}\omega_{\mu\lambda}\Gamma_{\nu\rho}^{\lambda}dx^{\mu} \vee dx^{\nu} \otimes dx^{\rho}.$$

[35] Por objeto entendemos funções, seções locais, operadores, etc.. Enfim: qualquer coisa que faça sentido numa expressão.

Capítulo 3

Geometria local dos fibrados vetoriais

3.1 Conexões

Definição 63 *Uma* conexão *num $\mathbb{F}-$fibrado vetorial (E, M, π) é uma aplicação*

$$\nabla : \Gamma(E) \longrightarrow \Omega(M) \otimes \Gamma(E)$$

satisfazendo às seguintes condições, para todas seções $s, r \in \Gamma(E)$ e todas funções $f \in C^{\infty}(M, \mathbb{F})$

(i) $\nabla(s + r) = \nabla s + \nabla r$

(ii) $\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s$

Dizemos que a seção ∇s é a diferencial absoluta *da seção s. Quando $\nabla s = 0$, dizemos que s é uma* seção horizontal *para ∇.*

Dado um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$, definimos $\nabla_X s = \nabla s \cdot X$, onde $\cdot$ representa a dualidade entre T^*M e TM, ou, mais precisamente, entre $\Omega(M)$ e $\mathfrak{X}(M)$. Dizemos que a seção $\nabla_X s$ é a derivada covariante de s com relação a X.

Exemplo 64 *A diferencial de funções (ligeiramente modificada) fornece uma conexão para o fibrado trivial $M \times \mathbb{R}$, cujas seções são as funções suaves reais* *definidas em M (mais precisamente, os gráficos dessas funções – ver o exemplo 24). Escreva*

$$\begin{array}{rccc} \nabla : & C^{\infty}(M) & \longrightarrow & \Omega(M)\otimes C^{\infty}(M) \\ & f & \mapsto & df\otimes 1 \end{array},$$

onde 1 é a função identicamente um, unidade do anel $C^{\infty}(M)$. A condição (i) é óbvia. Para a (ii), sejam $f, g \in C^{\infty}(M)$. Temos

$$\begin{aligned} \nabla(gf) &\equiv d(gf)\otimes 1 \\ &= (fdg)\otimes 1 + (gdf)\otimes 1 \\ &= dg\otimes f + g(df\otimes 1) \\ &= dg\otimes f + g\nabla f \end{aligned}$$

Comentemos um pouco a definição de conexão.

Em primeiro lugar, notemos que, com relação às óbvias estruturas de $\mathbb{F}-$espaço vetorial dos módulos de seções, uma conexão é uma aplicação $\mathbb{F}-$linear. Com efeito, dados $s, r \in \Gamma(E)$ e $\alpha \in \mathbb{F}$, temos

$$\begin{aligned} \nabla(s+\alpha r) &= \nabla s + \nabla(\alpha r) \\ &= \nabla s + d\alpha\otimes r + \alpha\nabla r \\ &= \nabla s + \alpha\nabla r, \end{aligned}$$

pois $d\alpha = 0$, já que identificamos o subespaço das funções constantes de $C^{\infty}(M,\mathbb{F})$ com o corpo subjacente $\mathbb{F}$, de maneira óbvia. Em particular, uma conexão deve levar seção nula em seção nula.

Notamos que uma conexão é um objeto local, no seguinte sentido. Se duas seções s e r coincidem num aberto U de M, então

$$\nabla s(x) = \nabla r(x), \ \forall x \in U,$$

não importa o quão diferentes essas seções sejam fora de U. Graças à aditividade de ∇, basta provarmos que, se uma seção s se anula em U, então também se anula sua diferencial absoluta ∇s em U.

Dado $x \in U$, tome uma *bump-function* η em torno de x com suporte em U. Logo, se $s \in \Gamma(E)$ se anula em U, temos que ηs é a seção identicamente nula. Assim,

$$0 = \nabla(\eta s) = d\eta\otimes s + \eta\nabla s$$

implica

$$\eta\nabla s = d\eta\otimes s.$$

Como η é constante e igual a 1 numa vizinhança de x, temos então que $\eta(x) = 1$ e $d\eta(x) = 0$, donde

$$\nabla s(x) = 0.$$

Como x foi escolhido arbitrariamente em U, temos então que

$$\nabla s|U = 0,$$

como queríamos demonstar.

Dada a localidade da conexão ∇ podemos considerar sua ação em seções locais $s \in \Gamma\left(\pi^{-1}(U)\right)$, no seguinte sentido. Seja $s \in \Gamma\left(\pi^{-1}(U)\right)$ uma seção local do fibrado (E, M, π), definida apenas sobre um aberto U de M, e seja $x \in U$. Como antes, com o auxílio de uma *bump-function* η em torno de x com suporte em U, podemos associar a s uma seção global $s^\eta \in \Gamma(E)$ dada por

$$s^\eta(y) = \begin{cases} \eta(y)\, s(y)\,, \text{ se } y \in U \\ 0, \text{ se } y \notin U \end{cases}.$$

Defina então[1]

$$\nabla s(x) \equiv \nabla s^\eta(x)\,,\ \forall x \in U.$$

Que esta definição não depende da escolha particular da *bump-function* η segue do fato de que qualquer extensão da forma s^ξ coincide com s^η (e com s) numa vizinhança de x. Assim, podemos sempre restringir ∇ a uma conexão no fibrado local $\pi^{-1}(U)$:

$$\nabla : \Gamma\left(\pi^{-1}(U)\right) \longrightarrow \Omega(U) \otimes \Gamma\left(\pi^{-1}(U)\right).$$

Sejam $\mathcal{U}$ uma cobertura de M por vizinhanças coordenadas $\left(U, u^1, \cdots, u^m\right)$ e $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ um referencial local de E sobre U. Dada uma seção $s = s^\mu \varepsilon_\mu \in \Gamma\left(\pi^{-1}(U)\right)$, temos

$$\nabla s = ds^\mu \otimes \varepsilon_\mu + s^\mu \nabla \varepsilon_\mu. \tag{3.1}$$

Como as seções locais da forma $du^\mu \otimes \varepsilon_\nu$ constituem uma base para o $C^\infty(U, \mathbb{F})$-módulo $\Omega(U) \otimes \Gamma\left(\pi^{-1}(U)\right)$, existem funções $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \in C^\infty(U, \mathbb{F})$ unicamente determinadas tais que possamos escrever

$$\nabla \varepsilon_\mu = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} du^\nu \otimes \varepsilon_\lambda \tag{3.2}$$

Essas funções locais são chamadas *símbolos de Christoffel* da conexão com relação às referidas bases. Quando quisermos fazer referência à vizinhança coordenada U sobre a qual os símbolos de Christoffel estão definidos, escreveremos $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(U, x)$ em lugar de $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x)$. Definindo as $1-$*formas de Christoffel* ω^λ_μ por

$$\omega^\lambda_\mu = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} du^\nu, \tag{3.3}$$

podemos ainda escrever

$$\nabla \varepsilon_\mu = \omega^\nu_\mu \otimes \varepsilon_\nu\ , \tag{3.4}$$

donde

$$\nabla s = \left(ds^\mu + s^\lambda \omega^\mu_\lambda\right) \otimes \varepsilon_\mu \tag{3.5}$$

Note que, dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$\nabla_X s = \nabla s \cdot X = \left(ds^\mu(X) + s^\lambda \omega^\mu_\lambda(X)\right)\varepsilon_\mu = \left(X(s^\mu) + s^\lambda \omega^\mu_\lambda(X)\right)\varepsilon_\mu\ ,$$

[1] Note que η depende de x.

i.e.,

$$\nabla_X s = \left(X\left(s^\mu\right) + s^\lambda \omega_\lambda^\mu \left(X\right)\right) \varepsilon_\mu \tag{3.6}$$

Substituindo (3.2) na expressão (3.1), e escrevendo

$$ds^\mu = \frac{\partial s^\mu}{\partial u^\nu} du^\nu$$

obtemos ainda

$$\nabla s = \left(\frac{\partial s^\lambda}{\partial u^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda s^\mu \right) du^\nu \otimes \varepsilon_\lambda \tag{3.7}$$

De posse de uma conexão ∇ em (E, M, π) e lançando mão da dualidade entre $\Omega(M)$ e $\mathfrak{X}(M)$, podemos ainda definir, de maneira natural, uma operação

$$\begin{array}{rccc} \nabla. : & \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) & \longrightarrow & \Gamma(E) \\ & (X, s) & \mapsto & \nabla_X s = \nabla s \cdot X \end{array}$$

que satisfaz às seguintes propriedades, para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $s, r \in \Gamma(E)$ e $f \in C^\infty(M, \mathbb{F})$.

1) $\nabla_{(X+fY)} s = \nabla_X s + f \nabla_Y s$
2) $\nabla_X (s + r) = \nabla_X s + \nabla_X r$
3) $\nabla_X (fs) = X(f) s + f \nabla_X s$

Essas propriedades são conseqüências imediatas das condições (i) e (ii) da definição de conexão.

Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ são tais que $X(x) = Y(x) \in T_x M$, então, é claro que vale

$$\begin{aligned} \nabla_X s(x) &= \nabla s(x) \cdot X(x) \\ &= \nabla s(x) \cdot Y(x) = \nabla_Y s(x). \end{aligned}$$

para toda seção $s \in \Gamma(E)$. Logo, faz sentido definir a *derivada da seção* $s \in \Gamma(E)$ *no ponto* $x \in M$ *na direção* $X \in T_x M$ por

$$\nabla_X s(x) \equiv \nabla_{\bar{X}} s(x),$$

onde $\bar{X} \in \mathfrak{X}(M)$ é qualquer campo de vetores tal que $\bar{X}(x) = X$. Chamamos a operação

$$\begin{array}{ccc} T_x M \times \Gamma(E) & \longrightarrow & E_x \\ (X, s) & \mapsto & \nabla_X s(x) \end{array}$$

de *derivada direcional* de seções. A derivada de uma seção $s \in \Gamma(E)$ na direção de um vetor tangente $X \in T_x M$ só depende dos valores de s sobre um curva[2] $\alpha : \mathcal{I} \longrightarrow M$ passando por x e tendo X como vetor tangente. Mais precisamente, sejam $r, s \in \Gamma(E)$ seções e $\alpha : \mathcal{I} \longrightarrow M$ uma curva tal que

$$\alpha(t_0) = x \quad \text{e} \quad \dot{\alpha}(t_0) \equiv T_{t_0}\alpha \cdot \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} = X$$

[2]Pelo termo *curva* sobre M queremos significar uma aplicação suave $\alpha : \mathcal{I} \to M$, onde $\mathcal{I}$ é um intervalo da reta $\mathbb{R}$.

para um certo $t_0 \in \mathcal{I}$. Afirmamos que se $r \circ \alpha = s \circ \alpha$, então $\nabla_X r(x) = \nabla_X s(x)$. Com efeito, sejam $\left(U, u^1, \cdots, u^m\right)$ uma vizinhança coordenada de x e $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ um referencial local de E sobre U. Escreva

$$X = X^\mu \left.\frac{\partial}{\partial u^\mu}\right|_x \in T_x M$$

e

$$s|U = s^\mu \varepsilon_\mu \quad \text{e} \quad r|U = r^\mu \varepsilon_\mu$$

Seja ainda

$$\bar{X} = \bar{X}^\mu \frac{\partial}{\partial u^\mu} \in \mathfrak{X}(U)$$

um campo de vetores local tal que $\bar{X}(x) = X$. Temos então

$$\begin{aligned}
\nabla_X s(x) &= \nabla_{\bar{X}} (s|U)(x) \\
&= \nabla_{\bar{X}^\mu \frac{\partial}{\partial u^\mu}} (s^\nu \varepsilon_\nu)(x) \\
&= \bar{X}^\mu (x) \nabla_\mu (s^\nu \varepsilon_\nu)(x) \\
&= \bar{X}^\mu (x) \left(\frac{\partial s^\nu}{\partial u^\mu} \varepsilon_\nu + s^\nu \nabla_\mu \varepsilon_\nu \right)(x),
\end{aligned}$$

onde usamos as propriedades 1, 2 e 3 da derivação covariante e denotamos $\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^\mu}}$ por ∇_μ. Note que, por (3.2), temos

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu \varepsilon_\nu &= \nabla \varepsilon_\nu \cdot \frac{\partial}{\partial u^\mu} \\
&= \left(\Gamma^\lambda_{\nu\rho} du^\rho \otimes \varepsilon_\lambda\right) \cdot \frac{\partial}{\partial u^\mu} \\
&= \Gamma^\lambda_{\nu\rho} \left(du^\rho \cdot \frac{\partial}{\partial u^\mu} \right) \varepsilon_\lambda \\
&= \Gamma^\lambda_{\nu\rho} \delta^\rho_\mu \varepsilon_\lambda = \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \varepsilon_\lambda,
\end{aligned}$$

i.e.,

$$\nabla_\mu \varepsilon_\nu = \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \varepsilon_\lambda, \tag{3.8}$$

donde segue que

$$\nabla_X s(x) = \bar{X}^\mu (x) \left(\frac{\partial s^\lambda}{\partial u^\mu}(x) + s^\nu (x) \Gamma^\lambda_{\nu\mu}(x) \right) \varepsilon_\lambda (x)$$

ou, já que $\bar{X}^\mu (x) = X^\mu$,

$$\nabla_X s(x) = \left(X^\mu \frac{\partial s^\lambda}{\partial u^\mu}(x) + X^\mu s^\nu (x) \Gamma^\lambda_{\nu\mu}(x) \right) \varepsilon_\lambda (x),$$

i.e.,

$$\nabla_X s(x) = \left(X\left(s^\lambda\right)(x) + X^\mu s^\nu (x) \Gamma^\lambda_{\nu\mu}(x) \right) \varepsilon_\lambda (x) \tag{3.9}$$

Seja agora $\alpha : \mathcal{I} \longrightarrow U \subset M$ uma curva tal que $\alpha(t_0) = x$ e $\dot{\alpha}(t_0) = X$. Temos, pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} X\left(s^\lambda\right)(x) &= ds^\lambda(x) \cdot X \\ &= ds^\lambda(x) \cdot \dot{\alpha}(t_0) \\ &= T_{\alpha(t_0)} s^\lambda \cdot T_{t_0}\alpha \cdot \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} \\ &= T_{t_0}\left(s^\lambda \circ \alpha\right) \cdot \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} \\ &= d\left(s^\lambda \circ \alpha\right)(t_0) \cdot \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} \left(s^\lambda \circ \alpha\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left(s^\lambda \circ \alpha\right)(t_0), \end{aligned}$$

donde

$$\nabla_X s(x) = \left(\frac{d}{dt}\left(s^\lambda \circ \alpha\right)(t_0) + X^\mu s^\nu(\alpha(t_0))\,\Gamma^\lambda_{\nu\mu}(\alpha(t_0))\right)\varepsilon_\lambda(\alpha(t_0)).$$

Finalmente, se $r \in \Gamma(E)$ é uma seção satisfazendo

$$r \circ \alpha = s \circ \alpha,$$

então temos

$$r^\mu \circ \alpha = s^\mu \circ \alpha$$

para todo $\mu \in [n]$, onde $r|U = r^\mu \varepsilon_\mu$. Nesse caso, temos

$$\begin{aligned} \nabla_X r(x) &= \left(\frac{d}{dt}\left(r^\lambda \circ \alpha\right)(t_0) + X^\mu r^\nu(\alpha(t_0))\,\Gamma^\lambda_{\nu\mu}(\alpha(t_0))\right)\varepsilon_\lambda(\alpha(t_0)) \\ &= \left(\frac{d}{dt}\left(s^\lambda \circ \alpha\right)(t_0) + X^\mu s^\nu(\alpha(t_0))\,\Gamma^\lambda_{\nu\mu}(\alpha(t_0))\right)\varepsilon_\lambda(\alpha(t_0)) \\ &= \nabla_X s(x), \end{aligned}$$

como afirmáramos.

Faz sentido então a seguinte

Definição 65 *Sejam (E, M, π) um $\mathbb{F}-$fibrado vetorial e $\alpha : \mathcal{I} \longrightarrow M$ uma curva. Uma* seção de E ao longo da curva α *é um mapa $s : \mathcal{I} \longrightarrow E$ tal que $\pi \circ s = \alpha$. Denotamos o conjunto das seções de E sobre α por $\Gamma_\alpha(E)$. É claro que $\Gamma_\alpha(E)$ é um $C^\infty(\mathcal{I}, \mathbb{F})-$módulo.*

Dada uma conexão ∇ em E, definimos um operador derivada covariante *$D_\alpha : \Gamma_\alpha(E) \to \Gamma_\alpha(E)$ pela expressão local*

$$D_\alpha s(t) = \left(\frac{ds^\lambda}{dt}(t) + \frac{d\alpha^\mu}{dt}(t)\, s^\nu(t)\,\Gamma^\lambda_{\nu\mu}(\alpha(t))\right)\varepsilon_\lambda(\alpha(t)) \tag{3.10}$$

válida para todo $t \in \alpha^{-1}(U)$, onde $\left(U, \psi = \left(u^1, \cdots, u^m\right)\right)$ é uma vizinhança coordenada de M, $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ é um referencial local sobre U, $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ são os símbolos de Christoffel de ∇ com relação a ψ e $\mathcal{E}$, $s(t) = s^\nu(t)\,\varepsilon_\nu(\alpha(t))$ e $\alpha^\mu(t) = u^\mu(\alpha(t))$ para todo $t \in \alpha^{-1}(U)$.

Algumas explicações se fazem necessárias. Em primeiro lugar, é preciso mostrar que a expressão local (3.10) é invariante. Ou seja, que dados um novo sistema de coordenadas $\bar{\psi} = \bar{u}^1, \cdots, \bar{u}^m$ em U e um outro referencial local $\overline{\mathcal{E}} = (\bar{\varepsilon}_1, \cdots, \bar{\varepsilon}_n)$ sobre U, temos, para cada $t \in \alpha^{-1}(U)$,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{ds^\lambda}{dt}(t) + \frac{d\alpha^\mu}{dt}(t)\, s^\nu(t)\, \Gamma^\lambda_{\nu\mu}(\alpha(t))\right)\varepsilon_\lambda(\alpha(t)) \\
&= \left(\frac{d\bar{s}^\lambda}{dt}(t) + \frac{d\bar{\alpha}^\mu}{dt}(t)\, \bar{s}^\nu(t)\, \bar{\Gamma}^\lambda_{\nu\mu}(\alpha(t))\right)\bar{\varepsilon}_\lambda(\alpha(t)),
\end{aligned}$$

onde $\bar{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$ são os símbolos de Christoffel de ∇ com relação a $\bar{\psi}$ e $\overline{\mathcal{E}}$, $s(t) = \bar{s}^\nu(t)\,\bar{\varepsilon}_\nu(\alpha(t))$ e $\bar{\alpha}^\mu(t) = \bar{u}^\mu(\alpha(t))$ para todo $t \in \alpha^{-1}(U)$. A primeira coisa que nos ocorre é usar a *regra dos índices alternados*, explicado parágrafos acima. Para isso, precisaremos saber como os símbolos de Christoffel se transformam sob mudanças de coordenadas. Escreva

$$\frac{\partial}{\partial u^\mu} = \frac{\partial \bar{u}^\nu}{\partial u^\mu}\frac{\partial}{\partial \bar{u}^\nu},$$

$$\varepsilon_\rho = f^\lambda_\rho \bar{\varepsilon}_\lambda$$

e

$$\bar{\varepsilon}_\lambda = g^\rho_\lambda \varepsilon_\rho.$$

Usando (3.8), temos

$$\nabla_\mu \varepsilon_\rho = \Gamma^\xi_{\rho\mu}\varepsilon_\xi$$

e, por outro lado,

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu \varepsilon_\rho &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^\mu}} \varepsilon_\rho \\
&= \nabla_{\frac{\partial \bar{u}^\nu}{\partial u^\mu}\frac{\partial}{\partial \bar{u}^\nu}} \left(f^\lambda_\rho \bar{\varepsilon}_\lambda\right) \\
&= \frac{\partial \bar{u}^\nu}{\partial u^\mu}\bar{\nabla}_\nu \left(f^\lambda_\rho \bar{\varepsilon}_\lambda\right) \\
&= \frac{\partial \bar{u}^\nu}{\partial u^\mu}\left(\frac{\partial f^\lambda_\rho}{\partial \bar{u}^\nu}\bar{\varepsilon}_\lambda + f^\lambda_\rho \bar{\nabla}_\nu \bar{\varepsilon}_\lambda\right) \\
&= \frac{\partial \bar{u}^\nu}{\partial u^\mu}\left(\frac{\partial f^\eta_\rho}{\partial \bar{u}^\nu} + f^\lambda_\rho \bar{\Gamma}^\eta_{\lambda\nu}\right)\bar{\varepsilon}_\eta \\
&= \left(\frac{\partial \bar{u}^\nu}{\partial u^\mu}\frac{\partial f^\eta_\rho}{\partial \bar{u}^\nu} + \frac{\partial \bar{u}^\nu}{\partial u^\mu} f^\lambda_\rho \bar{\Gamma}^\eta_{\lambda\nu}\right) g^\xi_\eta \varepsilon_\xi \\
&= \left(\frac{\partial f^\eta_\rho}{\partial u^\mu} g^\xi_\eta + \frac{\partial \bar{u}^\nu}{\partial u^\mu} f^\lambda_\rho g^\xi_\eta \bar{\Gamma}^\eta_{\lambda\nu}\right)\varepsilon_\xi
\end{aligned}$$

donde
$$\Gamma^{\xi}_{\rho\mu} = \frac{\partial \bar{u}^{\nu}}{\partial u^{\mu}} f^{\lambda}_{\rho} g^{\xi}_{\eta} \bar{\Gamma}^{\eta}_{\lambda\nu} + \frac{\partial f^{\eta}_{\rho}}{\partial u^{\mu}} g^{\xi}_{\eta} \tag{3.11}$$

Não fosse pelo termo $\frac{\partial f^{\eta}_{\rho}}{\partial u^{\mu}} g^{\xi}_{\eta}$ na lei de transformação das quantidades $\Gamma^{\xi}_{\rho\mu}$, estas poderiam ser encaradas como componentes de uma seção do fibrado tensorial $T^{*}M \otimes E \otimes E^{*}$. Nos casos em que este termo excedente não se anula, essa possibilidade deve ser descartada *in limine*.[3]. Portanto, uma aplicação da regra dos índices alternados está fora de questão.

Vamos então transformar a expressão

$$\left(\frac{ds^{\lambda}}{dt}(t) + \frac{d\alpha^{\mu}}{dt}(t)\, s^{\nu}(t)\, \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}(\alpha(t)) \right) \varepsilon_{\lambda}(\alpha(t))$$

termo-a-termo. Em primeiro lugar, é fácil ver que valem as leis de transformação

$$s^{\lambda}(t) = \bar{s}^{\eta}(t)\, g^{\lambda}_{\eta}(\alpha(t))$$

e
$$\frac{d\alpha^{\mu}}{dt}(t) = \frac{\partial u^{\mu}}{\partial \bar{u}^{\eta}}(\alpha(t))\, \frac{d\bar{\alpha}^{\eta}}{dt}(t)$$

donde segue (após alguns cálculos diretos, mas algo extensos) que

$$\frac{ds^{\lambda}}{dt}(t) = \frac{d}{dt}\left(\bar{s}^{\eta}\left(g^{\lambda}_{\eta} \circ \alpha\right)\right)(t)$$
$$= \frac{d\bar{s}^{\eta}}{dt}(t)\, g^{\lambda}_{\eta}(\alpha(t)) \tag{3.12}$$
$$+ \frac{\partial g^{\lambda}_{\eta}}{\partial \bar{u}^{\xi}}(\alpha(t))\, \frac{d\bar{\alpha}^{\xi}}{dt}(t)\, \bar{s}^{\eta}(t) \tag{3.13}$$

e
$$\frac{d\alpha^{\mu}}{dt}(t)\, s^{\nu}(t)\, \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}(\alpha(t))$$
$$= g^{\lambda}_{\xi}(\alpha(t))\, \frac{d\bar{\alpha}^{\gamma}}{dt}(t)\, \bar{s}^{\eta}(t)\, \bar{\Gamma}^{\xi}_{\eta\gamma}(\alpha(t)) \tag{3.14}$$

$$+ g^{\lambda}_{\rho}(\alpha(t))\, g^{\nu}_{\eta}(\alpha(t))\, \frac{\partial f^{\rho}_{\nu}}{\partial \bar{u}^{\xi}}(\alpha(t))\, \frac{d\bar{\alpha}^{\xi}}{dt}(t)\, \bar{s}^{\eta}(t) \tag{3.15}$$

Note que multiplicando a soma de (3.12) e (3.14) por $\varepsilon_{\lambda}(\alpha(t)) = f^{\tau}_{\lambda}(\alpha(t))\, \bar{\varepsilon}_{\tau}(\alpha(t))$, obtemos já expressão desejada

$$\left(\frac{d\bar{s}^{\tau}}{dt}(t) + \frac{d\bar{\alpha}^{\gamma}}{dt}(t)\, \bar{s}^{\eta}(t)\, \bar{\Gamma}^{\tau}_{\eta\gamma}(\alpha(t)) \right) \bar{\varepsilon}_{\tau}(\alpha(t)).$$

[3] Os livros de Física costumam (não sem trair uma certa perplexidade) destacar o fato de que os símbolos de Christoffel "não são tensores".

Assim, uma condição necessária e suficiente para a invariância da expressão local (3.10) é que a multiplicação por $\varepsilon_\lambda(\alpha(t)) = f_\lambda^\tau(\alpha(t))\,\bar{\varepsilon}_\tau(\alpha(t))$ da soma dos termos excedentes (3.13) e (3.15) dê zero. De fato, temos

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{c} \frac{\partial g_\eta^\lambda}{\partial \bar{u}^\xi}(\alpha(t))\,\frac{d\bar{\alpha}^\xi}{dt}(t)\,\bar{s}^\eta(t) \\ +g_\rho^\lambda(\alpha(t))\,g_\eta^\nu(\alpha(t))\,\frac{\partial f_\nu^\rho}{\partial \bar{u}^\xi}(\alpha(t))\,\frac{d\bar{\alpha}^\xi}{dt}(t)\,\bar{s}^\eta(t)\end{array}\right) f_\lambda^\tau(\alpha(t))\,\bar{\varepsilon}_\tau(\alpha(t)) \\
&= \left(\begin{array}{c} \frac{\partial g_\eta^\nu}{\partial \bar{u}^\xi}(\alpha(t))\,f_\nu^\tau(\alpha(t)) \\ +\underbrace{g_\rho^\lambda(\alpha(t))\,f_\lambda^\tau(\alpha(t))}_{\delta_\rho^\tau} g_\eta^\nu(\alpha(t))\,\frac{\partial f_\nu^\rho}{\partial \bar{u}^\xi}(\alpha(t))\end{array}\right)\frac{d\bar{\alpha}^\xi}{dt}(t)\,\bar{s}^\eta(t)\,\bar{\varepsilon}_\tau(\alpha(t)) \\
&= \left(\frac{\partial g_\eta^\nu}{\partial \bar{u}^\xi} f_\nu^\tau + g_\eta^\nu \frac{\partial f_\nu^\tau}{\partial \bar{u}^\xi}\right)(\alpha(t))\,\frac{d\bar{\alpha}^\xi}{dt}(t)\,\bar{s}^\eta(t)\,\bar{\varepsilon}_\tau(\alpha(t)) \\
&= \underbrace{\frac{\partial}{\partial \bar{u}^\xi}\underbrace{\left(g_\eta^\nu f_\nu^\tau\right)}_{\delta_\eta^\tau \equiv cte.}}_{\equiv 0}(\alpha(t))\,\frac{d\bar{\alpha}^\xi}{dt}(t)\,\bar{s}^\eta(t)\,\bar{\varepsilon}_\tau(\alpha(t)) = 0,
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Algumas propriedades óbvias da derivada covariante D_α são:

a) $D_\alpha(s+r) = D_\alpha s + D_\alpha r$, $\forall s, r \in \Gamma_\alpha(E)$

b) $D_\alpha(fs) = \frac{df}{dt}s + fD_\alpha s$, $\forall f \in C^\infty(\mathcal{I}, \mathbb{F})$, $s \in \Gamma_\alpha(E)$

c) se $s \in \Gamma_\alpha(E)$ é tal que existe $S \in \Gamma(E)$ para o qual vale $s = S \circ \alpha$ (nesse caso, dizemos que s é induzido por S sobre α), então temos $D_\alpha s(t) = \nabla_{\dot{\alpha}(t)} S(\alpha(t))$, $\forall t \in \mathcal{I}$.

Definição 66 *Sejam ∇ uma conexão num fibrado vetorial (E, M, π) e D_α a derivada covariante correspondente à curva $\alpha \in C^\infty(\mathcal{I}, M)$. Uma seção $s \in \Gamma_\alpha(E)$ ao longo da curva α é dita* paralela *quando valer $D_\alpha s(t) = 0$, para todo $t \in I$.*

Proposição 67 *Sejam ∇ uma conexão sobre um fibrado vetorial (E, M, π) e $\alpha : \mathcal{I} \longrightarrow M$ uma curva em M. Dados $t_0 \in \mathcal{I}$ e um vetor $s_0 \in E_{\alpha(t_0)}$ na fibra sobre $\alpha(t_0)$, existe uma única seção paralela $s \in \Gamma_\alpha(E)$ tal que $s(t_0) = s_0$.*

Prova. Mostraremos inicialmente que a proposição é verdadeira no caso em que a curva α está inteiramente contida numa vizinhança coordenada U de M equipada com um referencial local $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ de E, i.e., $\alpha(\mathcal{I}) \subset U$. Dada uma seção $s \in \Gamma_\alpha(E)$, podemos então, para cada $t \in I$, escrever

$$s(t) = s^\mu(t)\,\varepsilon_\mu(\alpha(t))$$

e a condição

$$D_\alpha s(t) = 0$$

pode ser enunciada em termos das coordenadas $s^1, \cdots, s^n \in C^\infty(\mathcal{I}, \mathbb{F})$ como

$$\frac{ds^\lambda}{dt}(t) + \frac{d\alpha^\mu}{dt}(t)\, s^\nu(t)\, \Gamma^\lambda_{\nu\mu}(\alpha(t)) = 0 \tag{3.16}$$

para todo $\lambda \in [n]$. Escrevendo ainda

$$s_0 = s_0^\mu \varepsilon_\mu(\alpha(t_0))$$

vemos que especular sobre a existência de uma seção paralela s sobre α satisfazendo à condição inicial $s(t_0) = s_0$ corresponde a estudar o problema de Cauchy dado pelo sistema linear de equações diferenciais ordinárias nas incógnitas $s^1, \cdots, s^n$

$$\frac{ds^\lambda}{dt}(t) + \frac{d\alpha^\mu}{dt}(t)\, s^\nu(t)\, \Gamma^\lambda_{\nu\mu}(\alpha(t)) = 0$$

definido em $\mathcal{I}$, com condições iniciais

$$s^\lambda(t_0) = s_0^\lambda\ ,$$

com $\lambda \in [n]$. Como esse sistema possui uma única solução[4], segue a proposição no caso particular especificado.

No caso geral, temos que, dado $t \in \mathcal{I}$, existem vizinhanças coordenadas $U_0, U_1, \cdots, U_N$ de M munidas de referenciais locais $\mathcal{E}(U_j)$ que cobrem o segmento (compacto) de curva[5] $\alpha([t_0, t])$. Podemos ainda supor, sem perda de generalidade, que exista uma cobertura de $[t_0, t]$ por subintervalos abertos $\mathcal{I}_0, \cdots, \mathcal{I}_N$ de $\mathcal{I}$ tais que $\alpha(\mathcal{I}_j) \subset U_j$ para todo $j \in [N]_0$. Diminuindo e reordenando esses intervalos, se necessário, podemos também supor que $t_0 \in \mathcal{I}_0$ e

$$\mathcal{I}_k \cap \mathcal{I}_j \neq \emptyset \Leftrightarrow |k - j| = 1.$$

Escolha então, para cada $j \in [N]$ um $t_j \in \mathcal{I}_{j-1} \cap \mathcal{I}_j$. Pelo caso particular que acabamos de provar, em cada intervalo $\mathcal{I}_j$ e em cada interseção não-vazia $\mathcal{I}_{j-1} \cap \mathcal{I}_j$ existe uma única seção paralela sobre a restrição $\alpha|(\mathcal{I}_{j-1} \cap \mathcal{I}_j)$ para cada valor inicial estipulado em t_j. Assim, seja $s_{(0)}$ a (única) seção paralela sobre a restrição $\alpha|\mathcal{I}_0$ com condição inicial $s_{(0)}(t_0) = s_0$.,e seja $s_{(1)}$ a (única) seção paralela sobre a restrição $\alpha|\mathcal{I}_1$ tal que $s_{(1)}(t_1) = s_{(0)}(t_1)$. É claro então que as seções $s_{(0)}$ e $s_{(1)}$ coincidem na interseção $I_0 \cap I_1$, e podem, portanto, ser "coladas", dando origem à seguinte seção paralela sobre a restrição $\alpha|(\mathcal{I}_0 \cup \mathcal{I}_1)$:

$$s_{(01)}(\tau) = \begin{cases} s_{(0)}(\tau)\,, \text{ se } \tau \in \mathcal{I}_0 \\ s_{(1)}(\tau)\,, \text{ se } \tau \in \mathcal{I}_1 \end{cases} .$$

Prosseguindo indutivamente, sejam $s_{(0)}, s_{(1)}, \cdots, s_{(k)}$ as únicas seções paralelas sobre as respectivas restrições $\alpha|\mathcal{I}_0, \alpha|\mathcal{I}_1, \cdots, \alpha|\mathcal{I}_k$ tais que $s_{(j-1)}(t_j) = s_{(j)}(t_j)$ para todo $j \in [k]$ e tome $s_{(k+1)}$ como a única seção paralela sobre a restrição

[4] Ver teorema (Picard) 4.2 e corolário 4.5 do capítulo I de [Sotomayor].

[5] Supomos, para fixar idéias, que $t_0 < t$. O outro caso se trata analogamente.

$\alpha|\mathcal{I}_{k+1}$ tal que $s_{(k)}(t_{k+1}) = s_{(k+1)}(t_{k+1})$. Temos então que há uma única seção paralela s ao longo da restrição $\alpha|\left(\cup_{j=0}^{N}\mathcal{I}_j\right)$ tal que $s(t_0) = s_0$, dada por

$$s(\tau) = s_{(j)}(\tau), \text{ se } \tau \in \mathcal{I}_j.$$

Assim, está bem definido o valor $s(t)$ para todo $t \in \mathcal{I}$, de tal modo que $t \in \mathcal{I} \mapsto s(t) \in E_{\alpha(t)}$ é uma seção paralela. ■

Definição 68 *Sejam ∇ uma conexão num $\mathbb{F}-$fibrado vetorial (E, M, π) e $\alpha : \mathcal{I} \to M$ uma curva. Dados $t_0 \in \mathcal{I}$ e um vetor $s_0 \in E_{\alpha(t_0)}$, designamos sob o nome de* transporte paralelo de s_0 ao longo da curva α *a única seção paralela $s \in \Gamma_\alpha(E)$ tal que $s(t_0) = s_0$.*

A noção de transporte paralelo fornece uma maneira canônica de fazer o chamado "levantamento" de curvas da variedade-base M para o fibrado vetorial E: basta notar que o transporte paralelo de um vetor s_0 ao longo de uma curva α é uma curva $s : \mathcal{I} \to E$ no fibrado tal que $\pi \circ s = \alpha$. Os vetores tangentes dessas curvas levantadas passando pelo ponto $s_0 \in E$ geram um subespaço vetorial H_{s_0} de $T_{s_0}E$ denominado *espaço horizontal*. A fibra $E_{\pi(s_0)}$, olhada como subariedade de E, possui, ela mesma, uma fibra tangente no ponto s_0, $T_{s_0}E_{\pi(s_0)}$, que pode ser vista naturalmente como subespaço vetorial V_{s_0} de $T_{s_0}E$, chamado *espaço vertical*. Ou por outra: $V_{s_0} = \ker d\pi(s_0)$. Não é difícil convencer-se da decomposição em soma direta

$$T_{s_0}E = H_{s_0} \oplus V_{s_0}.$$

Cumpre observar que o espaço vertical V_{s_0} é intrínseco ao fibrado E, pois só depende da projeção π, ao passo que a escolha de uma conexão ∇ fornece um modo canônico de escolher o complementar horizontal H_{s_0}.

Definição 69 *Sejam ∇ uma conexão num $\mathbb{F}-$fibrado vetorial (E, M, π) e $\alpha : \mathcal{I} \to M$ uma curva passando pelos pontos $x_0 = \alpha(t_0)$ e $x_1 = \alpha(t_1)$. A* conexão entre E_{x_0} e E_{x_1} ao longo da curva α *é o isomorfismo $\mathbb{F}-$linear*[6]

$$\begin{array}{rccc} \tau_\alpha : & E_{x_0} & \to & E_{x_1} \\ & s_0 & \mapsto & \tau_\alpha(s_0) \end{array}$$

definida do seguinte modo: seja s o transporte paralelo de s_0 ao longo de α, e ponha $\tau_\alpha(s_0) = s(t_1)$.

[6] Não é difícil aperceber-se da linearidade da aplicação de conexão que ora definimos: isso decorre trivialmente da linearidade das EDOs de paralelismo. O que requer um pouco mais de reflexão é sua injetividade. Isso decorre da unicidade da solução de sistemas de EDOs lineares: se dois vetores $s_0, r_0 \in E_{x_0}$ fossem conectados ao mesmo vetor $s_1 = \tau_\alpha(s_0) = \tau_\alpha(r_0) \in E_{x_1}$ pela conexão τ_α ao longo de α, teríamos o cruzamento de duas soluções da equação de paralelismo. Para o Teorema de Picárd de Existência e Unicidade de soluções de sistemas de EDOs, baseamo-nos em [Sotomayor].

Cumpre observar que a aplicação τ_α depende apenas da curva ligando as fibras e da conexão ∇. Eis aí a motivação para a aparentemente arbitrária denominação de ∇ – "conexão": vê-se que ela providencia uma maneira canônica de **conectar** fibras ligadas por uma curva.

Antes de passarmos aos próximos resultados, vamos introduzir alguns truques notacionais para tornar os cálculos menos enfadonhos. Entreguemo-nos à tarefa de reescrever a lei de transformação (3.11) em termos de matrizes convenientes[7]. Para isso, recuperemos a definição (3.3, 3.4) das 1-formas de Christoffel dada linhas acima.

Seja (E, M, π) um $\mathbb{F}-$fibrado vetorial $n-$dimensional munido de uma conexão ∇. Seja $\mathcal{U} = \{U, V, W, ...\}$ uma cobertura de M por vizinhanças coordenadas $\left(U, u^1, \cdots, u^m\right)$, $\left(V, v^1, \cdots v^m\right)$, etc. munidas de referenciais locais

$$\boldsymbol{\varepsilon}_U = \left(\varepsilon_{U,1}, \cdots, \varepsilon_{U,n}\right) \in M_{1\times n}\left(\Gamma\left(\pi^{-1}\left(U\right)\right)\right)$$

para todo $U \in \mathcal{U}$.

As 1-formas de Christoffel $\omega\left(U\right)_\mu^\lambda$ relacionam-se aos símbolos de Christoffel $\Gamma\left(U\right)_{\mu\nu}^\lambda$ da conexão ∇ segundo as coordenadas $u^1, \cdots, u^m$ e o referencial $\boldsymbol{\varepsilon}_U$ pela expressão (3.3)

$$\omega\left(U\right)_\mu^\lambda = \Gamma\left(U\right)_{\mu\nu}^\lambda du^\nu$$

para todos $\lambda, \mu \in [n]$. Definamos então para cada $U \in \mathcal{U}$ a *matriz de Christoffel*

$$\boldsymbol{\omega}_U = \left(\omega\left(U\right)_i^j\right)_{n\times n} \in M_{n\times n}\left(\Omega\left(U\right)\right)$$

Dados $U, V \in \mathcal{U}$, com $U \cap V \neq \emptyset$, existe

$$\boldsymbol{\Phi}_{VU} = \left(\phi\left(VU\right)_i^j\right)_{n\times n} \in M_{n\times n}\left(C^\infty\left(U \cap V\right)\right)$$

tal que

$$\varepsilon_{V,\mu}\left(x\right) = \phi\left(VU\right)\left(x\right)_\mu^\lambda \varepsilon_{U,\lambda}\left(x\right)$$

para todos $x \in U \cap V$ e $\mu \in [n]$, i.e., tal que vale a equação matricial

$$\boldsymbol{\varepsilon}_V^*\left(x\right) = \boldsymbol{\Phi}_{VU}\left(x\right)\boldsymbol{\varepsilon}_U^*\left(x\right)$$

para todo $x \in U \cap V$. Note-se que

$$\det \boldsymbol{\Phi}_{VU}\left(x\right) \neq 0$$

para todo $x \in U \cap V$ e, em particular,

$$\det \boldsymbol{\Phi}_{VU} \neq 0$$

[7]Para as convenções adotadas no trato com matrizes, ver capítulo 0 acima.

em $C^{\infty}(U \cap V)$. Temos obviamente

$$\mathbf{\Phi}_{VU}^{-1} = \mathbf{\Phi}_{UV}$$

e

$$\mathbf{\Phi}_{WU} = \mathbf{\Phi}_{WV} \mathbf{\Phi}_{VU}$$

Vamos mostrar que, com a notação acima, a lei de transformação (3.11) assume a forma amigável

$$\boldsymbol{\omega}_V(x) = d\mathbf{\Phi}_{VU}(x)\,\mathbf{\Phi}_{VU}^{-1}(x) + \mathbf{\Phi}_{VU}(x)\,\boldsymbol{\omega}_U(x)\,\mathbf{\Phi}_{VU}^{-1}(x)$$

ou ainda, mais mnemonicamente,

$$\boldsymbol{\omega}_V(x) = d\mathbf{\Phi}_{VU}(x)\,\mathbf{\Phi}_{UV}(x) + \mathbf{\Phi}_{VU}(x)\,\boldsymbol{\omega}_U(x)\,\mathbf{\Phi}_{UV}(x) \tag{3.17}$$

para todo $x \in U \cap V$.

Reescreva a equação (3.11) na forma

$$\Gamma(V)_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial u^{\gamma}}{\partial v^{\nu}} \phi(VU)_{\mu}^{\alpha}\,\Gamma(U)_{\alpha\gamma}^{\beta}\,\phi(UV)_{\beta}^{\lambda} + \frac{\partial}{\partial v^{\nu}} \phi(VU)_{\mu}^{\alpha}\,\phi(UV)_{\alpha}^{\lambda} \;,$$

multiplique ambos os membros por dv^{ν} e some-os com índice ν correndo no conjunto $[m]$. Temos então

$$\omega(V)_{\mu}^{\lambda} = \Gamma(V)_{\mu\nu}^{\lambda}\,dv^{\nu}$$

$$\begin{aligned}
&= \phi(VU)_{\mu}^{\alpha}\,\Gamma(U)_{\alpha\gamma}^{\beta}\left(\frac{\partial u^{\gamma}}{\partial v^{\nu}} dv^{\nu}\right)\phi(UV)_{\beta}^{\lambda} + \left(\frac{\partial}{\partial v^{\nu}} \phi(VU)_{\mu}^{\alpha}\,dv^{\nu}\right)\phi(UV)_{\alpha}^{\lambda} \\
&= \phi(VU)_{\mu}^{\alpha}\left(\Gamma(U)_{\alpha\gamma}^{\beta}\,du^{\gamma}\right)\phi(UV)_{\beta}^{\lambda} + d\phi(VU)_{\mu}^{\alpha}\,\phi(UV)_{\alpha}^{\lambda} \\
&= \phi(VU)_{\mu}^{\alpha}\,\omega(U)_{\alpha}^{\beta}\,\phi(UV)_{\beta}^{\lambda} + d\phi(VU)_{\mu}^{\alpha}\,\phi(UV)_{\alpha}^{\lambda}\,,
\end{aligned}$$

i.e.,

$$\omega(V)_{\mu}^{\lambda} = d\phi(VU)_{\mu}^{\alpha}\,\phi(UV)_{\alpha}^{\lambda} + \phi(VU)_{\mu}^{\alpha}\,\omega(U)_{\alpha}^{\beta}\,\phi(UV)_{\beta}^{\lambda}\,,$$

ou, matricialmente,

$$\boldsymbol{\omega}_V = d\mathbf{\Phi}_{VU}\mathbf{\Phi}_{UV} + \mathbf{\Phi}_{VU}\boldsymbol{\omega}_U\mathbf{\Phi}_{UV},$$

como afirmáramos.

Observação 70 *É óbvio que o conhecimento de uma família $\mathfrak{F} = \{\boldsymbol{\omega}_U\}_{U\in\mathcal{U}}$ de matrizes de Christoffel da conexão ∇ em (E, M, π) indexada sobre uma cobertura de M do tipo acima determina completamente a conexão ∇ em questão. De fato, dada uma seção $s \in \Gamma(E)$ expressa localmente por*

$$s|U = \mathbf{s}_U \boldsymbol{\varepsilon}_U^{*} = s_U^{\mu} \varepsilon_{U,\mu} \;,$$

a equação (3.5) acima nos dá

$$(\nabla s)\,|U = (d\mathbf{s}_U + \mathbf{s}_U \boldsymbol{\omega}_U) \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_U^{*} \;, \tag{3.18}$$

onde $\mathbf{s}_U = \left(s_U^1, \cdots, s_U^n\right) \in M_{1\times n}(C^{\infty}(U))$.

Proposição 71 *Seja E um $\mathbb{F}-$fibrado vetorial de dimensão n sobre a base M. Sejam $\mathcal{U}$ uma cobertura de M por vizinhanças coordenadas $\left(U, u^1, \cdots, u^m\right)$ munidas de referenciais locais*

$$\boldsymbol{\varepsilon}_U = (\varepsilon_{U,1}, \cdots, \varepsilon_{U,n}) \in M_{1\times n}\left(\Gamma\left(\pi^{-1}(U)\right)\right)$$

que se relacionam por

$$\boldsymbol{\varepsilon}_V^*(x) = \mathbf{\Phi}_{VU}(x)\,\boldsymbol{\varepsilon}_U^*(x)$$

para todos $U, V \in \mathcal{U}$ e $x \in U \cap V$ e

$$\mathfrak{F} = \{\boldsymbol{\omega}_U\}_{U\in\mathcal{U}}$$

uma família de matrizes $\boldsymbol{\omega}_U \in M_{n\times n}(\Omega(U))$ de 1-formas locais indexadas sobre $\mathcal{U}$. Uma condição necessária e suficiente para que a família $\mathfrak{F}$ determine uma conexão $\nabla_{\mathfrak{F}}$ em E no sentido da observação 70 acima é que valham as equações matriciais

$$\boldsymbol{\omega}_V(x) = d\mathbf{\Phi}_{VU}(x)\,\mathbf{\Phi}_{UV}(x) + \mathbf{\Phi}_{VU}(x)\,\boldsymbol{\omega}_U(x)\,\mathbf{\Phi}_{UV}(x)$$

para todos $U, V \in \mathcal{U}$ e $x \in U \cap V$.

Prova. A prova resume-se a verificar a coincidência dos objetos locais definidos pelas expressões (3.18) nas interseções dos domínios. Vamos a ela. Dados $U, V \in \mathcal{U}$ tais que $U \cap V \neq \emptyset$, temos, na interseção,

$$\mathbf{s}_V = \mathbf{s}_U\mathbf{\Phi}_{UV} \Rightarrow d\mathbf{s}_V = d\mathbf{s}_U\mathbf{\Phi}_{UV} + \mathbf{s}_U d\mathbf{\Phi}_{UV}\ ,$$

donde

$$(d\mathbf{s}_V + \mathbf{s}_V\boldsymbol{\omega}_V)\otimes\boldsymbol{\varepsilon}_V^* = (d\mathbf{s}_U\mathbf{\Phi}_{UV} + \mathbf{s}_U d\mathbf{\Phi}_{UV} + \mathbf{s}_U\mathbf{\Phi}_{UV}\boldsymbol{\omega}_V)\otimes\mathbf{\Phi}_{VU}\boldsymbol{\varepsilon}_U^*$$

$$\begin{aligned}
&= (d\mathbf{s}_U\mathbf{\Phi}_{UV}\mathbf{\Phi}_{VU} + \mathbf{s}_U d\mathbf{\Phi}_{UV}\mathbf{\Phi}_{VU} + \mathbf{s}_U\mathbf{\Phi}_{UV}\boldsymbol{\omega}_V\mathbf{\Phi}_{VU})\otimes\boldsymbol{\varepsilon}_U^* \\
&= [d\mathbf{s}_U + \mathbf{s}_U(d\mathbf{\Phi}_{UV}\mathbf{\Phi}_{VU} + \mathbf{\Phi}_{UV}\boldsymbol{\omega}_V\mathbf{\Phi}_{VU})]\otimes\boldsymbol{\varepsilon}_U^* \\
&= (d\mathbf{s}_U + \mathbf{s}_U\boldsymbol{\omega}_U)\otimes\boldsymbol{\varepsilon}_U^*.
\end{aligned}$$

Isso nos dá o direito de definir uma aplicação $\nabla_{\mathfrak{F}} : \Gamma(E) \to \Omega(M)\otimes\Gamma(E)$ pelas expressões locais

$$(\nabla_{\mathfrak{F}}s)\,|U = (d\mathbf{s}_U + \mathbf{s}_U\boldsymbol{\omega}_U)\otimes\boldsymbol{\varepsilon}_U^*.$$

Como a associação $s \in \Gamma(E) \mapsto \mathbf{s}_U \in M_{1\times n}(C^\infty(U))$ é $\mathbb{F}-$linear, vemos que, dadas seções $r, s \in \Gamma(E)$ e uma função $f \in C^\infty(M)$, temos

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathfrak{F}}(r+s)\,|U &= [d(\mathbf{r}_U + \mathbf{s}_U) + (\mathbf{r}_U + \mathbf{s}_U)\,\boldsymbol{\omega}_U]\otimes\boldsymbol{\varepsilon}_U^* \\
&= (d\mathbf{r}_U + \mathbf{r}_U\boldsymbol{\omega}_U)\otimes\boldsymbol{\varepsilon}_U^* + (d\mathbf{s}_U + \mathbf{s}_U\boldsymbol{\omega}_U)\otimes\boldsymbol{\varepsilon}_U^* \\
&= (\nabla_{\mathfrak{F}}r)\,|U + (\nabla_{\mathfrak{F}}s)\,|U \\
&= (\nabla_{\mathfrak{F}}r + \nabla_{\mathfrak{F}}s)\,|U
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathfrak{F}}(fs)|U &= [d(f\mathbf{s}_U)+(f\mathbf{s}_U)\boldsymbol{\omega}_U]\otimes\boldsymbol{\varepsilon}_U^* \\ &= [df\mathbf{s}_U+f(d\mathbf{s}_U+\mathbf{s}_U\boldsymbol{\omega}_U)]\otimes\boldsymbol{\varepsilon}_U^* \\ &= df\otimes\mathbf{s}_U\boldsymbol{\varepsilon}_U^*+f(d\mathbf{s}_U+\mathbf{s}_U\boldsymbol{\omega}_U)\otimes\boldsymbol{\varepsilon}_U^* \\ &= (df\otimes s+f\nabla_{\mathfrak{F}}s)|U\ ,\end{aligned}$$

donde seguem as regras

$$\nabla_{\mathfrak{F}}(r+s)=\nabla_{\mathfrak{F}}r+\nabla_{\mathfrak{F}}s$$

e

$$\nabla_{\mathfrak{F}}(fs)=df\otimes s+f\nabla_{\mathfrak{F}}s\ ,$$

que mostram que $\nabla_{\mathfrak{F}}$ é a conexão desejada. ■

Corolário 72 *Todo fibrado vetorial*[8] *admite uma conexão.*

Prova. Seja (E,M,π) um $\mathbb{F}-$fibrado vetorial $n-$dimensional. Basta providenciarmos uma cobertura $\mathcal{U}$ de M e uma família $\mathfrak{F}=\{\omega_U\}_{U\in\mathcal{U}}$ de 1-formas satisfazendo as condições da proposição anterior.

Sejam $\mathcal{U}$ um atlas de M e $\{\rho_U\}_{U\in\mathcal{U}}$ uma partição da unidade subordinada a $\mathcal{U}$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que cada vizinhança coordenada $U\in\mathcal{U}$ está munida de um referencial local $\boldsymbol{\varepsilon}_U$, e que estes se relacionam por

$$\boldsymbol{\varepsilon}_U^*(x)=\mathbf{\Phi}_{UV}(x)\,\boldsymbol{\varepsilon}_V^*(x)$$

para todo $x\in U\cap V$. Escolha **arbitrariamente** uma família $\mathfrak{M}=\{\mathbf{M}_U\}_{U\in\mathcal{U}}$ de matrizes $\mathbf{M}_U\in M_{n\times n}(\Omega(U))$ e defina, para cada $U\in\mathcal{U}$,

$$\boldsymbol{\omega}_U(x)=\sum_{\substack{V\in\mathcal{U}\\ x\in V}}\rho_V(x)\left(d\mathbf{\Phi}_{UV}(x)\,\mathbf{\Phi}_{VU}(x)+\mathbf{\Phi}_{UV}(x)\,\mathbf{M}_V(x)\,\mathbf{\Phi}_{VU}(x)\right)$$

para cada $x\in U$. Vamos mostrar que a família $\mathfrak{F}=\{\boldsymbol{\omega}_U\}_{U\in\mathcal{U}}$ satisfaz à lei de transformação (3.17). Dado $x\in U\cap V$, temos[9]

$$\begin{aligned}\mathbf{\Phi}_{UV}\boldsymbol{\omega}_V\mathbf{\Phi}_{VU} &= \sum_{\substack{W\in\mathcal{U}\\ x\in W}}\rho_W\left[\mathbf{\Phi}_{UV}d\mathbf{\Phi}_{VW}(\mathbf{\Phi}_{WV}\mathbf{\Phi}_{VU})+(\mathbf{\Phi}_{UV}\mathbf{\Phi}_{VW})\,\mathbf{M}_W(\mathbf{\Phi}_{WV}\mathbf{\Phi}_{VU})\right] \\ &= \sum_{\substack{W\in\mathcal{U}\\ x\in W}}\rho_W\left(\mathbf{\Phi}_{UV}d\mathbf{\Phi}_{VW}\mathbf{\Phi}_{WU}+\mathbf{\Phi}_{UW}\mathbf{M}_W\mathbf{\Phi}_{WU}\right)\end{aligned}$$

[8] Lembramos que estamos assumindo tacitamente que a variedade-base do fibrado em questão possui topologia Hausdorff de base enumerável.

[9] Omitiremos por simplicidade o argumento (x) das matrizes $\boldsymbol{\omega}_U,\mathbf{\Phi}_{UV}$, etc. ao longo dos cálculos.

Ocorre que

$$d\mathbf{\Phi}_{UW} = d\left(\mathbf{\Phi}_{UV}\mathbf{\Phi}_{VW}\right) = d\mathbf{\Phi}_{UV}\mathbf{\Phi}_{VW} + \mathbf{\Phi}_{UV}d\mathbf{\Phi}_{VW} \ ,$$

donde

$$\mathbf{\Phi}_{UV}\boldsymbol{\omega}_V\mathbf{\Phi}_{VU} = \sum_{\substack{W\in\mathcal{U}\\ x\in W}} \rho_W\left[d\mathbf{\Phi}_{UW}\mathbf{\Phi}_{WU} + \mathbf{\Phi}_{UW}\mathbf{M}_W\mathbf{\Phi}_{WU} - d\mathbf{\Phi}_{UV}\left(\mathbf{\Phi}_{VW}\mathbf{\Phi}_{WU}\right)\right]$$

$$= \sum_{\substack{W\in\mathcal{U}\\ x\in W}} \rho_W\left(d\mathbf{\Phi}_{UW}\mathbf{\Phi}_{WU} + \mathbf{\Phi}_{UW}\mathbf{M}_W\mathbf{\Phi}_{WU}\right) - \underbrace{\left(\sum_{\substack{W\in\mathcal{U}\\ x\in W}} \rho_W(x)\right)}_{1} d\mathbf{\Phi}_{UV}\mathbf{\Phi}_{VU}$$

$$= \boldsymbol{\omega}_U - d\mathbf{\Phi}_{UV}\mathbf{\Phi}_{VU} \ ,$$

ou seja,

$$\boldsymbol{\omega}_U(x) = d\mathbf{\Phi}_{UV}(x)\,\mathbf{\Phi}_{VU}(x) + \mathbf{\Phi}_{UV}(x)\,\boldsymbol{\omega}_V(x)\,\mathbf{\Phi}_{VU}(x) \, .$$

■

Cumpre observar de quanta liberdade gozamos, na demonstração do corolário anterior, para a construção de uma conexão em $E \to M$: tomamos uma família totalmente arbitrária de matrizes $\mathbf{M}_U \in M_{n\times n}(\Omega(U))$ para levar a cabo a empreitada. Isso significa que, em geral, é enorme a quantidade de conexões possíveis num fibrado vetorial. Começaremos a buscar uma expressão precisa desta impressão observando que a diferença entre duas conexões quaisquer é um objeto em $\Omega(M) \otimes \Gamma(E) \otimes \Gamma(E^*) \simeq \Omega(M) \otimes End(\Gamma(E))$. Mais precisamente, temos a

Proposição 73 *Sejam $\nabla, \Delta : \Gamma(E) \to \Omega(M) \otimes \Gamma(E)$ conexões num $\mathbb{F}-$fibrado vetorial (E, M, π). Existe*

$$C \in \Omega(M) \otimes End(\Gamma(E))$$

tal que

$$\nabla_X s = \Delta_X s + C(X, s)$$

para todos $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $s \in \Gamma(M)$, o que escreveremos simplesmente como

$$\nabla = \Delta + C$$

Prova. Sejam $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ os símbolos de Christoffel da conexão ∇ e $\gamma^\lambda_{\mu\nu}$ os da conexão Δ num mesmo aberto U de M. Temos

$$\left(\nabla_X s - \Delta_X s\right)|U = \nabla_{X^\mu \frac{\partial}{\partial u^\mu}}\left(s^\nu\varepsilon_\nu\right) - \Delta_{X^\mu \frac{\partial}{\partial u^\mu}}\left(s^\nu\varepsilon_\nu\right)$$

$$= \left(X\left(s^\lambda\right) + X^\mu s^\nu \Gamma^\lambda_{\nu\mu}\right)\varepsilon_\lambda - \left(X\left(s^\lambda\right) + X^\mu s^\nu \gamma^\lambda_{\nu\mu}\right)\varepsilon_\lambda$$

$$= \left(\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} - \gamma^{\lambda}_{\nu\mu}\right) X^{\mu} s^{\nu} \varepsilon_{\lambda}$$
$$= \left(C^{\lambda}_{\nu\mu} du^{\mu} \otimes \varepsilon^{\nu} \otimes \varepsilon_{\lambda}\right) (X, s),$$

onde

$$C^{\lambda}_{\nu\mu} = \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} - \gamma^{\lambda}_{\nu\mu}.$$

Para que a expressão local $C^{\lambda}_{\nu\mu} du^{\mu} \otimes \varepsilon^{\nu} \otimes \varepsilon_{\lambda}$ sirva como definição de um objeto global é necessário e suficiente que os coeficientes $C^{\lambda}_{\nu\mu}$ transformem-se de acordo com a lei

$$C^{\xi}_{\rho\mu} = \frac{\partial \bar{u}^{\nu}}{\partial u^{\mu}} f^{\lambda}_{\rho} g^{\xi}_{\eta} C^{\eta}_{\lambda\nu},$$

onde as funções $\frac{\partial \bar{u}^{\nu}}{\partial u^{\mu}}$, f^{λ}_{ρ} e g^{ξ}_{η} têm os mesmos significados que em (3.11). De fato, usando (3.11) para transformar os símbolos de Christoffel $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ e $\gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$, obtemos

$$C^{\xi}_{\rho\mu} = \Gamma^{\xi}_{\rho\mu} - \gamma^{\xi}_{\rho\mu}$$
$$= \left(\frac{\partial \bar{u}^{\nu}}{\partial u^{\mu}} f^{\lambda}_{\rho} g^{\xi}_{\eta} \bar{\Gamma}^{\eta}_{\lambda\nu} + \frac{\partial f^{\eta}_{\rho}}{\partial u^{\mu}} g^{\xi}_{\eta}\right) + \left(\frac{\partial \bar{u}^{\nu}}{\partial u^{\mu}} f^{\lambda}_{\rho} g^{\xi}_{\eta} \bar{\gamma}^{\eta}_{\lambda\nu} + \frac{\partial f^{\eta}_{\rho}}{\partial u^{\mu}} g^{\xi}_{\eta}\right)$$
$$= \frac{\partial \bar{u}^{\nu}}{\partial u^{\mu}} f^{\lambda}_{\rho} g^{\xi}_{\eta} \left(\bar{\Gamma}^{\eta}_{\lambda\nu} - \bar{\gamma}^{\eta}_{\lambda\nu}\right)$$
$$= \frac{\partial \bar{u}^{\nu}}{\partial u^{\mu}} f^{\lambda}_{\rho} g^{\xi}_{\eta} C^{\eta}_{\lambda\nu}.$$

Isso nos permite definir, a partir das expressões locais $C^{\lambda}_{\nu\mu} du^{\mu} \otimes \varepsilon^{\nu} \otimes \varepsilon_{\lambda}$, um campo tensorial

$$\begin{array}{rcl} C & \in & \Gamma\left(T^{*}M \otimes E^{*} \otimes E\right) \\ & \simeq & \Omega\left(M\right) \otimes \left(\Gamma\left(E\right) \otimes \Gamma\left(E\right)^{*}\right) \\ & \simeq & \Omega\left(M\right) \otimes End\left(\Gamma\left(E\right)\right), \end{array}$$

de tal maneira que valha $\nabla = \Delta + C$. ■

É trivial verificar a recíproca, i.e., que, dados $C \in \Omega(M) \otimes End(\Gamma(E))$ e uma conexão Δ em E, a aplicação $\nabla = \Delta + C$ é ainda uma conexão em E. Em suma, temos o seguinte

Corolário 74 *O conjunto $Conn(E)$ das conexões do $\mathbb{F}-$fibrado vetorial (E, M, π) está em bijeção com o $C^{\infty}(M, \mathbb{F})-$módulo $\Omega(M) \otimes End(\Gamma(E))$.*

Prova. Com efeito, fixemos de saída uma conexão $\nabla^{0} \in Conn(E)$ (que sabemos existir devido ao corolário 72) e definamos a bijeção

$$\begin{array}{ccc} \Omega\left(M\right) \otimes End\left(\Gamma\left(E\right)\right) & \rightarrow & Conn\left(E\right) \\ C & \mapsto & \nabla^{0} + C \end{array}$$

■

Isso dá uma idéia mais precisa de quantas conexões existem em E: tantas quantas são as seções do fibrado tensorial $T^*M \otimes E \otimes E^*$. A presença de uma estrutura bilinear não-degenerada, entretanto, nos levará a preferir algumas dentre essa miríade de conexões possíveis. Serão aquelas que, num sentido muito preciso – a ser definido adiante – preservam essa mesma estrutura. Num caso muito especial (o das conexões pseudo-riemannianas) nossa preferência recairá sobre uma única conexão[10].

3.2 Curvatura

Consideremos a lei de mudança de referencial (3.17) sob a forma

$$\boldsymbol{\omega}_V(x)\,\boldsymbol{\Phi}_{VU}(x) = d\boldsymbol{\Phi}_{VU}(x) + \boldsymbol{\Phi}_{VU}(x)\,\boldsymbol{\omega}_U(x). \tag{3.19}$$

Como já assinalamos nos comentários à equação (3.11), o que impede as expressões (3.17) de serem coladas coerentemente dando origem a um objeto global é a presença, na equação acima, do termo $d\boldsymbol{\Phi}_{VU}(x)$. Podemos nutrir a esperança de que, eliminando-o de alguma forma, possamos chegar à expressão local de um objeto globalmente definido. Ademais, se o conseguirmos, é claro que ele dependerá apenas da conexão ∇. Ora, não nos ocorre melhor forma de eliminar 1-formas exatas do que aplicando o operador de derivação exterior d, já que $d^2 = 0$. Obtemos assim

$$d\boldsymbol{\omega}_V\boldsymbol{\Phi}_{VU} - \boldsymbol{\omega}_V \wedge d\boldsymbol{\Phi}_{VU} = d\boldsymbol{\Phi}_{VU} \wedge \boldsymbol{\omega}_U + \boldsymbol{\Phi}_{VU} d\boldsymbol{\omega}_U.$$

Usando (3.19) outra vez, agora para substituir o termo $d\Phi_{VU}(x)$, obtemos

$$d\boldsymbol{\omega}_V\boldsymbol{\Phi}_{VU} - \boldsymbol{\omega}_V \wedge (\boldsymbol{\omega}_V\boldsymbol{\Phi}_{VU} - \boldsymbol{\Phi}_{VU}\boldsymbol{\omega}_U) = (\boldsymbol{\omega}_V\boldsymbol{\Phi}_{VU} - \boldsymbol{\Phi}_{VU}\boldsymbol{\omega}_U) \wedge \boldsymbol{\omega}_U + \boldsymbol{\Phi}_{VU} d\boldsymbol{\omega}_U,$$

i.e.,

$$(d\boldsymbol{\omega}_V - \boldsymbol{\omega}_V \wedge \boldsymbol{\omega}_V)\,\boldsymbol{\Phi}_{VU} + \boldsymbol{\omega}_V \wedge \boldsymbol{\Phi}_{VU}\boldsymbol{\omega}_U = \boldsymbol{\omega}_V\boldsymbol{\Phi}_{VU} \wedge \boldsymbol{\omega}_U + \boldsymbol{\Phi}_{VU}(d\boldsymbol{\omega}_U - \boldsymbol{\omega}_U \wedge \boldsymbol{\omega}_U).$$

Ora, afirmamos que

$$\boldsymbol{\omega}_V \wedge \boldsymbol{\Phi}_{VU}\boldsymbol{\omega}_U = \boldsymbol{\omega}_V\boldsymbol{\Phi}_{VU} \wedge \boldsymbol{\omega}_U.$$

Com efeito, efetuando as operações correspondentes nas entradas das matrizes envolvidas, e explorando a $C^\infty(U \cap V)-$bilinearidade do produto exterior $\wedge$, temos

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\omega}_V \wedge \boldsymbol{\Phi}_{VU}\boldsymbol{\omega}_U)^\mu_\nu &= \omega(V)^\alpha_\nu \wedge \left(\Phi(VU)^\beta_\alpha\,\omega(U)^\mu_\beta\right) \\
&= \left(\omega(V)^\alpha_\nu\,\Phi(VU)^\beta_\alpha\right) \wedge \omega(U)^\mu_\beta \\
&= (\boldsymbol{\omega}_V\boldsymbol{\Phi}_{VU} \wedge \boldsymbol{\omega}_U)^\mu_\nu.
\end{aligned}$$

[10] Ver teorema de Levi-Civita (corolário 88) mais adiante.

Assim, temos

$$(d\boldsymbol{\omega}_V - \boldsymbol{\omega}_V \wedge \boldsymbol{\omega}_V)\, \boldsymbol{\Phi}_{VU} = \boldsymbol{\Phi}_{VU}\,(d\boldsymbol{\omega}_U - \boldsymbol{\omega}_U \wedge \boldsymbol{\omega}_U)$$

ou

$$d\boldsymbol{\omega}_V - \boldsymbol{\omega}_V \wedge \boldsymbol{\omega}_V = \boldsymbol{\Phi}_{VU}\,(d\boldsymbol{\omega}_U - \boldsymbol{\omega}_U \wedge \boldsymbol{\omega}_U)\, \boldsymbol{\Phi}_{UV}\ , \tag{3.20}$$

o que nos diz que a expressão local $\boldsymbol{\Omega}_U = d\boldsymbol{\omega}_U - \boldsymbol{\omega}_U \wedge \boldsymbol{\omega}_U \in M_{n\times n}\left(\Omega^2(U)\right)$ define uma matriz de 2-formas globalmente definidas em M, que denotaremos por $\boldsymbol{\Omega} = \left(\Omega_i^j\right)_{n\times n}$ e denominaremos *a matriz de curvatura da conexão* ∇. Conexões com curvatura identicamente nula são chamadas *conexões planas*.

A matriz $\boldsymbol{\Omega}$ induz uma aplicação

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{R}: & \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\times\Gamma(E) & \longrightarrow & \Gamma(E) \\ & (X,Y;s) & \mapsto & \mathcal{R}(X,Y)\cdot s \end{array}$$

$C^\infty(M)-$linear em $\Gamma(E)$ (i.e., no terceiro argumento), definida do modo seguinte.

Sejam $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\boldsymbol{\varepsilon}_U = (\varepsilon_{U,1},\cdots,\varepsilon_{U,n}) \in M_{1\times n}\left(\Gamma\left(\pi^{-1}(U)\right)\right)$ um referencial local sobre $U \in \mathcal{U}$ e $s \in \Gamma(E)$ tal que $s|U = s_U^\mu \varepsilon_{U,\mu} = \mathbf{s}_U \boldsymbol{\varepsilon}_U^*$, onde $\mathbf{s}_U = \left(s_U^j\right)_{1\times n}$. Lembrando que $\boldsymbol{\Omega}_U \in M_{n\times n}\left(\Omega^2(U)\right)$, escrevamos

$$(\mathcal{R}(X,Y)\cdot s)(x) = \mathbf{s}_U(x)\,\boldsymbol{\Omega}_U(X|U,Y|U)(x)\,\boldsymbol{\varepsilon}_U^*(x)\ , \tag{3.21}$$

para todo $x \in U$, i.e.,

$$(\mathcal{R}(X,Y)\cdot s)\,|U = s_U^\alpha \Omega(U)_\alpha^\beta (X|U,Y|U)\,\varepsilon_{U,\beta} \in \Gamma\left(\pi^{-1}(U)\right)$$

Devemos verificar que a expressão (3.21) é invariante. Seja $x \in U\cap V$, com $\boldsymbol{\varepsilon}_U$ referencial local sobre U e $\boldsymbol{\varepsilon}_V$ referencial local sobre V. De fato, temos

$$\begin{aligned} & \mathbf{s}_U(x)\,\boldsymbol{\Omega}_U(x)\,(X(x),Y(x))\,\boldsymbol{\varepsilon}_U^*(x) \\ \\ =\ & \mathbf{s}_V(x)\,\boldsymbol{\Phi}_{VU}(x)\,\boldsymbol{\Omega}_U(x)\,(X(x),Y(x))\,\boldsymbol{\Phi}_{UV}(x)\,\boldsymbol{\varepsilon}_V^*(x) \\ =\ & \mathbf{s}_V(x)\,(\boldsymbol{\Phi}_{VU}\boldsymbol{\Omega}_U\boldsymbol{\Phi}_{UV})(x)\,(X(x),Y(x))\,\boldsymbol{\varepsilon}_V^*(x) \\ =\ & \mathbf{s}_V(x)\,\boldsymbol{\Omega}_V(x)\,(X(x),Y(x))\,\boldsymbol{\varepsilon}_V^*(x)\,. \end{aligned}$$

Decorre da $\mathbb{F}-$linearidade das aplicações $s \in \Gamma(E) \mapsto \mathbf{s}_U \in M_{1\times n}(C^\infty(U))$ a dependência $C^\infty(M)-$linear de $\mathcal{R}(X,Y)\cdot s$ em s. Denominamos $\mathcal{R}$ de *aplicação curvatura* de ∇ e de *operador de curvatura de* ∇ *para os campos vetoriais* X *e* Y ao endomorfismo $C^\infty(M)-$linear $\mathcal{R}(X,Y) \in Hom_{C^\infty(M)}(\Gamma(E),\Gamma(E))$.

Já de sua definição fica claro que $\mathcal{R}$ só depende de ∇. A forma precisa dessa dependência é dada pela seguinte

Proposição 75 $\mathcal{R}(X,Y) = \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$, $\forall X,Y \in \mathfrak{X}(M)$

Prova. Sejam $\left(U, u^1, \cdots, u^m\right)$ uma vizinhança coordenada de M, $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \in M_{1\times n}\left(\Gamma\left(\pi^{-1}(U)\right)\right)$ um referencial local sobre U, e $s \in \Gamma(E)$ com $s|U = s^\mu \varepsilon_\mu$. Em $x \in U$, temos

$$\begin{aligned}
\nabla_X \nabla_Y s &= \nabla_X \left(\left(Y(s^\mu) + s^\lambda \omega_\lambda^\mu (Y)\right)\varepsilon_\mu\right) \\
&= \nabla_X \left(Y(s^\mu)\varepsilon_\mu\right) + \nabla_X\left(s^\lambda \omega_\lambda^\mu (Y)\varepsilon_\mu\right) \\
&= XY(s^\mu)\varepsilon_\mu + Y(s^\mu)\left(\underbrace{X\underbrace{\left(\delta_\mu^\nu\right)}_{\text{constante}}}_{0} + \delta_\mu^\lambda \omega_\lambda^\rho (X)\right)\varepsilon_\rho \\
&\quad + X\left(s^\lambda \omega_\lambda^\mu (Y)\right)\varepsilon_\mu + s^\lambda\omega_\lambda^\mu (Y)\left(\underbrace{X\underbrace{\left(\delta_\mu^\nu\right)}_{\text{constante}}}_{0} + \delta_\mu^\lambda \omega_\lambda^\rho (X)\right)\varepsilon_\rho \\
&= \left[XY(s^\rho) + Y(s^\mu)\omega_\mu^\rho (X) + X\left(s^\mu\omega_\mu^\rho (Y)\right) + s^\mu \omega_\mu^\lambda (Y)\omega_\lambda^\rho (X)\right]\varepsilon_\rho
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\nabla_Y \nabla_X s = \left[YX(s^\rho) + X(s^\mu)\omega_\mu^\rho (Y) + Y\left(s^\mu\omega_\mu^\rho (X)\right) + s^\mu \omega_\mu^\lambda (X)\omega_\lambda^\rho (Y)\right]\varepsilon_\rho.$$

Por outro lado, temos em x

$$\begin{aligned}
\nabla_{[X,Y]} s &= \nabla_{[X,Y]}\left(s^\mu\varepsilon_\mu\right) \\
&= \left([X,Y](s^\mu) + s^\lambda \omega_\lambda^\mu ([X,Y])\right)\varepsilon_\mu \\
&= \left[XY(s^\rho) - YX(s^\rho) + s^\mu\omega_\mu^\rho ([X,Y])\right]\varepsilon_\rho.
\end{aligned}$$

Agora note que[11]

$$\omega_\mu^\rho ([X,Y]) = X\left(\omega_\mu^\rho (Y)\right) - Y\left(\omega_\mu^\rho (X)\right) - d\omega_\mu^\rho (X,Y),$$

[11] Isto é uma instância da conhecida fórmula

$$d\omega(X,Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X,Y]),$$

válida para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\omega \in \Omega(M)$. Como se trata de uma equação linear em ω, basta prová-la para $\omega = gdf$, onde $f, g \in C^\infty(M)$. Temos então $d\omega = dg \wedge df$ e

$$\omega(X,Y) = X(g)Y(f) - Y(g)X(f).$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
Y\omega(X) &= Y(g)X(f) + gYX(f), \\
X\omega(Y) &= X(g)Y(f) + gXY(f)
\end{aligned}$$

e

$$\omega([X,Y]) = g[X,Y](f) = gXY(f) - gYX(f).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
&X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X,Y]) \\
&= X(g)Y(f) - Y(g)X(f) = d\omega(X,Y).
\end{aligned}$$

donde segue que

$$\nabla_{[X,Y]}s = \left[XY\left(s^{\rho}\right) - YX\left(s^{\rho}\right) + s^{\mu}X\left(\omega_{\mu}^{\rho}\left(Y\right)\right) - s^{\mu}Y\left(\omega_{\mu}^{\rho}\left(X\right)\right) - s^{\mu}d\omega_{\mu}^{\rho}\left(X,Y\right)\right]\varepsilon_{\rho}$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned}
&\nabla_X\nabla_Y s - \nabla_Y\nabla_X s - \nabla_{[X,Y]}s \\
&= \begin{bmatrix} Y\left(s^{\mu}\right)\omega_{\mu}^{\rho}\left(X\right) + X\left(s^{\mu}\omega_{\mu}^{\rho}\left(Y\right)\right) \\ +s^{\mu}\omega_{\mu}^{\lambda}\left(Y\right)\omega_{\lambda}^{\rho}\left(X\right) - X\left(s^{\mu}\right)\omega_{\mu}^{\rho}\left(Y\right) \\ -Y\left(s^{\mu}\omega_{\mu}^{\rho}\left(X\right)\right) - s^{\mu}\omega_{\mu}^{\lambda}\left(X\right)\omega_{\lambda}^{\rho}\left(Y\right) \\ -s^{\mu}X\left(\omega_{\mu}^{\rho}\left(Y\right)\right) + s^{\mu}Y\left(\omega_{\mu}^{\rho}\left(X\right)\right) + s^{\mu}d\omega_{\mu}^{\rho}\left(X,Y\right) \end{bmatrix}\varepsilon_{\rho}
\end{aligned}$$

Note agora que

$$X\left(s^{\mu}\omega_{\mu}^{\rho}\left(Y\right)\right) = X\left(s^{\mu}\right)\omega_{\mu}^{\rho}\left(Y\right) + s^{\mu}X\left(\omega_{\mu}^{\rho}\left(Y\right)\right)$$

e, analogamente,

$$Y\left(s^{\mu}\omega_{\mu}^{\rho}\left(X\right)\right) = Y\left(s^{\mu}\right)\omega_{\mu}^{\rho}\left(X\right) + s^{\mu}Y\left(\omega_{\mu}^{\rho}\left(X\right)\right)$$

Efetuando os cancelamentos necessários, chegamos finalmente a

$$\begin{aligned}
&\nabla_X\nabla_Y s - \nabla_Y\nabla_X s - \nabla_{[X,Y]}s \\
&= s^{\mu}\left[d\omega_{\mu}^{\rho}\left(X,Y\right) - \underbrace{\left(\omega_{\mu}^{\lambda}\left(X\right)\omega_{\lambda}^{\rho}\left(Y\right) - \omega_{\mu}^{\lambda}\left(Y\right)\omega_{\lambda}^{\rho}\left(X\right)\right)}_{\omega_{\mu}^{\lambda}\wedge\omega_{\lambda}^{\rho}(X,Y)}\right]\varepsilon_{\rho} \\
&= s^{\mu}\left(d\omega_{\mu}^{\rho} - \omega_{\mu}^{\lambda}\wedge\omega_{\lambda}^{\rho}\right)\left(X,Y\right)\varepsilon_{\rho} \\
&= s^{\mu}\Omega_{\mu}^{\rho}\left(X,Y\right)\varepsilon_{\rho} \\
&= \mathcal{R}\left(X,Y\right)\cdot s,
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

Proposição 76 (Identidade de Bianchi) *Sejam Ω e ω expressões locais (sobre uma mesma vizinhança) respectivamente da matriz de curvatura e da matriz de Christoffel de uma conexão ∇ no fibrado $E \to M$. Vale a identidade*

$$d\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{\omega} \tag{3.22}$$

Prova.

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Omega} = d\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{\omega} \\
&\Rightarrow d\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}\wedge d\boldsymbol{\omega} - d\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{\omega} \\
&\Rightarrow d\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}\wedge d\boldsymbol{\omega} + \underbrace{\left(-\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{\omega}\right)}_{0} - d\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{\omega}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow d\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega} \wedge (d\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\omega}) - (d\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\omega}) \wedge \boldsymbol{\omega}$$

$$\Rightarrow d\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\omega}$$

■

Seja $\left(U, u^1, \cdots, u^m\right)$ um sistema de coordenadas locais sobre M e $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ um referencial local sobre U para E. Passamos agora a escrever a expressão local sobre U de cada entrada $\Omega^\nu_\mu \in \Omega^2(U)$ da matriz local de curvatura $\boldsymbol{\Omega}_U$.

Temos, por definição

$$\Omega^\nu_\mu = d\omega^\nu_\mu + \omega^\lambda_\mu \wedge \omega^\nu_\lambda,$$

donde, lembrando (3.3), vem

$$\begin{aligned} \Omega^\nu_\mu &= d\left(\Gamma^\nu_{\mu\lambda} du^\lambda\right) + \left(\Gamma^\lambda_{\mu\rho} du^\rho\right) \wedge \left(\Gamma^\nu_{\lambda\kappa} du^\kappa\right) \\ &= \left(\frac{\partial \Gamma^\nu_{\mu\rho}}{\partial u^\lambda} + \Gamma^\sigma_{\mu\lambda}\Gamma^\nu_{\sigma\rho}\right) du^\lambda \wedge du^\rho \end{aligned}$$

Faremos agora uma escolha que parecerá uma complicação inútil, mas que será explicada oportunamente. Trata-se de escrever o termo acima na forma equivalente

$$\begin{aligned} \Omega^\nu_\mu &= \left(\frac{\partial \Gamma^\nu_{\mu\lambda}}{\partial u^\rho} + \Gamma^\sigma_{\mu\rho}\Gamma^\nu_{\sigma\lambda}\right) du^\rho \wedge du^\lambda \\ &= -\left(\frac{\partial \Gamma^\nu_{\mu\lambda}}{\partial u^\rho} + \Gamma^\sigma_{\mu\rho}\Gamma^\nu_{\sigma\lambda}\right) du^\lambda \wedge du^\rho, \end{aligned}$$

apenas permutando os nomes dos índices de soma λ e ρ – o que é um procedimento inócuo –, e, em seguida somar os resultados obtendo

$$2\Omega^\nu_\mu = \left(\frac{\partial \Gamma^\nu_{\mu\rho}}{\partial u^\lambda} - \frac{\partial \Gamma^\nu_{\mu\lambda}}{\partial u^\rho} + \Gamma^\sigma_{\mu\lambda}\Gamma^\nu_{\sigma\rho} - \Gamma^\sigma_{\mu\rho}\Gamma^\nu_{\sigma\lambda}\right) du^\lambda \wedge du^\rho,$$

ou

$$\Omega^\nu_\mu = \frac{1}{2} R^\nu_{\mu\lambda\rho} du^\lambda \wedge du^\rho, \tag{3.23}$$

onde

$$R^\nu_{\mu\lambda\rho} = \frac{\partial \Gamma^\nu_{\mu\rho}}{\partial u^\lambda} - \frac{\partial \Gamma^\nu_{\mu\lambda}}{\partial u^\rho} + \Gamma^\sigma_{\mu\lambda}\Gamma^\nu_{\sigma\rho} - \Gamma^\sigma_{\mu\rho}\Gamma^\nu_{\sigma\lambda} \tag{3.24}$$

A estranha escolha aludida acima foi feita para que as funções $R^\nu_{\mu\lambda\rho}$ fossem antissimétricas com relação aos índices λ e ρ, i.e., para que valesse

$$R^\nu_{\mu\lambda\rho} = -R^\nu_{\mu\rho\lambda}, \tag{3.25}$$

e para que as funções $R^\nu_{\mu\lambda\rho}$ satisfizessem a lei de transformação apropriada às componentes de um tensor $3-$covariante e $1-$contravariante. Com efeito, segue de (3.20) que, sendo $\left(\Lambda_i^j\right)$ a matriz de mudança de referenciais locais sobre U e $\left(\tilde{\Lambda}_i^j\right)$, temos

$$\tilde{\Omega}_\mu^\nu = \Lambda_\mu^\alpha \tilde{\Lambda}_\beta^\nu \Omega_\alpha^\beta.$$

Escrevamos

$$\tilde{\Omega}_\mu^\nu = \frac{1}{2}\tilde{R}_{\mu\lambda\rho}^\nu du^\lambda \wedge du^\rho$$

e

$$\Omega_\mu^\nu = \frac{1}{2}R_{\mu\lambda\rho}^\nu du^\lambda \wedge du^\rho.$$

Temos então

$$\tilde{R}_{\mu\lambda\rho}^\nu = \Lambda_\mu^\lambda \tilde{\Lambda}_\rho^\nu R_{\alpha\lambda\rho}^\beta.$$

Agora façamos apenas uma mudança de coordenadas $u \to \bar{u}$ em U: escrevendo

$$\begin{aligned} \Omega_\mu^\nu &= \frac{1}{2}\bar{R}_{\mu\lambda\rho}^\nu d\bar{u}^\lambda \wedge d\bar{u}^\rho \\ &= \frac{1}{2}R_{\mu\lambda\rho}^\nu du^\lambda \wedge du^\rho, \end{aligned}$$

e obtemos

$$\bar{R}_{\mu\lambda\rho}^\nu = \frac{\partial u^\kappa}{\partial \bar{u}^\lambda}\frac{\partial u^\eta}{\partial \bar{u}^\rho} R_{\mu\kappa\eta}^\nu.$$

Assim, a lei de transformação para as funções $R_{\mu\lambda\rho}^\nu$, quando submetidas as mudanças simultâneas de coordenadas em M e de referenciais em E, fica

$$\bar{R}_{\mu\lambda\rho}^\nu = \frac{\partial u^\kappa}{\partial \bar{u}^\lambda}\frac{\partial u^\eta}{\partial \bar{u}^\rho} \Lambda_\mu^\lambda \bar{\Lambda}_\rho^\nu R_{\mu\kappa\eta}^\nu,$$

que é aquela satisfeita pelas componentes de uma seção do fibrado tensorial $T^*M \otimes T^*M \otimes E \otimes E^*$. Assim, podemos definir o *tensor de curvatura da conexão* ∇

$$R \in \Omega^2(M) \otimes \Gamma(E) \otimes \Gamma(E^*) \simeq \Omega^2(M) \otimes End\,(\Gamma(E))$$

pela expressão local

$$R|U = \frac{1}{2}R_{\mu\lambda\rho}^\nu \left(du^\lambda \wedge du^\rho\right) \otimes \varepsilon^\mu \otimes \varepsilon_\nu \tag{3.26}$$

Observe que a aplicação de curvatura $\mathcal{R} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ definida acima é dada exatamente por

$$\mathcal{R}(X,Y) \cdot s = R(X,Y) \cdot s,$$

onde usamos implicitamente as dualidades $\Omega^2(M) \times (\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)) \to C^\infty(M,\mathbb{F})$ e $\Gamma(E^*) \times \Gamma(E) \to C^\infty(M,\mathbb{F})$. De fato, localmente, temos

$$(\mathcal{R}(X,Y) \cdot s)\,|U = R_{\lambda\mu\nu}^\rho X^\mu Y^\nu s^\lambda \varepsilon_\rho.$$

Terminaremos esta breve seção com algumas considerações heurísticas que permitirão apreender o significado geométrico do conceito de curvatura. Sejam

$$\left(U, \varphi = \left(u^1, \cdots, u^m\right)\right)$$

um sistema de coordenadas locais para a variedade M em torno de $x_0 = \varphi^{-1}(0)$ e

$$\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$$

um referencial local sobre U para o fibrado (E, M, π), este munido de uma conexão ∇ com símbolos de Christoffel $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ sobre U com relação a $\mathcal{E}$. Tomemos uma quantidade $\epsilon > 0$ tão pequena que estejam inteiramente contidas em U as imagens das curvas $\alpha, \beta, \gamma, \delta : [0, \epsilon] \to M$ definidas por

$$\begin{array}{rcl}
\alpha(t) & = & \varphi^{-1}(t, 0, \cdots, 0) \\
\beta(t) & = & \varphi^{-1}(\epsilon, t, 0, \cdots, 0) \\
\gamma(t) & = & \varphi^{-1}(\epsilon - t, \epsilon, 0, \cdots, 0) \\
\delta(t) & = & \varphi^{-1}(0, \epsilon - t, 0, \cdots, 0)
\end{array}$$

Fixemos um vetor $s_0 = s_0^{\mu}\varepsilon_{\mu}(x_0) \in E_{x_0}$. A nossa idéia é transportar paralelamente o vetor s_0 ao longo das curvas α, β, γ e δ – sucessivamente, e nesta ordem – e em seguida compará-lo com o vetor obtido por esta operação. Queremos apontar a influência da curvatura na diferença entre esses dois vetores da fibra E_{x_0}. Com este intuito, fixemos mais alguma notação: $s_\alpha \in \Gamma_\alpha(E)$ é o transporte paralelo do vetor s_0 ao longo de α; $s_\beta \in \Gamma_\beta(E)$ é o transporte paralelo do vetor $s_1 = s_\alpha(\epsilon)$ ao longo de β; $s_\gamma \in \Gamma_\gamma(E)$ é o transporte paralelo do vetor $s_2 = s_\beta(\epsilon)$ ao longo de γ; $s_\delta \in \Gamma_\delta(E)$ é o transporte paralelo do vetor $s_3 = s_\gamma(\epsilon)$ ao longo de δ; e, finalmente definimos $s_4 = s_\delta(\epsilon)$. Como afirmamos, desejamos estimar o vetor diferença $\Delta(\epsilon) = s_4 - s_0$. Será suficiente para nossas pretensões heurísticas fazer uma aproximação de segunda ordem no parâmetro ϵ.

Podemos escrever

$$\begin{aligned}
\Delta(\epsilon) &= s_4 - s_0 \\
&= s_\delta(\epsilon) - s_\alpha(0) \\
&= [s_\delta(\epsilon) - s_\delta(0)] + [s_\gamma(\epsilon) - s_\gamma(0)] + [s_\beta(\epsilon) - s_\beta(0)] + [s_\alpha(\epsilon) - s_\alpha(0)].
\end{aligned}$$

Ora, a expansão de Taylor em torno do zero até segunda ordem no parâmetro ϵ da $\mu-$ésima coordenada com relação ao referencial E do vetor diferença $\Delta_\alpha(\epsilon) = s_\alpha(\epsilon) - s_\alpha(0)$ é

$$\begin{aligned}
\Delta^{\mu}_{\alpha}(\epsilon) &= s^{\mu}_{\alpha}(\epsilon) - s^{\mu}_{\alpha}(0) \\
&= \frac{d}{dt}s^{\mu}_{\alpha}(0)\,\epsilon + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}s^{\mu}_{\alpha}(0)\,\epsilon^2 + O\left(\epsilon^3\right)
\end{aligned}$$

A equação local do transporte paralelo (3.16) nos dá

$$\frac{d}{dt}s^{\mu}_{\alpha}(t) = -\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}(\alpha(t))\,\frac{d\alpha^{\lambda}}{dt}(t)\,s^{\nu}_{\alpha}(t),$$

donde
$$\frac{d}{dt}s_\alpha^\mu(0)=-\Gamma_{\nu 1}^\mu(x_0)\,s_0^\nu$$
e
$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}s_\alpha^\mu(t) &= -\frac{\partial\Gamma_{\nu\lambda}^\mu}{\partial u^\theta}(\alpha(t))\frac{d\alpha^\theta}{dt}(t)\frac{d\alpha^\lambda}{dt}(t)\,s_\alpha^\nu(t)\\ &\quad -\Gamma_{\nu\lambda}^\mu(\alpha(t))\frac{d^2\alpha^\lambda}{dt^2}(t)\,s_\alpha^\nu(t)\\ &\quad +\Gamma_{\eta\kappa}^\nu(\alpha(t))\,\Gamma_{\nu\lambda}^\mu(\alpha(t))\frac{d\alpha^\kappa}{dt}\frac{d\alpha^\lambda}{dt}(t)\,s_\alpha^\eta(t),\end{aligned}$$
donde
$$\frac{d^2}{dt^2}s_\alpha^\mu(0)=\left(-\frac{\partial\Gamma_{\nu 1}^\mu}{\partial u^1}(x_0)+\Gamma_{\nu 1}^\lambda(x_0)\,\Gamma_{\lambda 1}^\mu(x_0)\right)s_0^\nu.$$
Assim, temos
$$\Delta_\alpha^\mu(\epsilon)=-\Gamma_{\nu 1}^\mu(x_0)\,s_0^\nu\epsilon+\frac{1}{2}\left(-\frac{\partial\Gamma_{\nu 1}^\mu}{\partial u^1}(x_0)+\Gamma_{\nu 1}^\lambda(x_0)\,\Gamma_{\lambda 1}^\mu(x_0)\right)s_0^\nu\epsilon^2+O\left(\epsilon^3\right)$$
Cálculos totalmente análogos mostram que
$$\Delta_\gamma^\mu(\epsilon)=\Gamma_{\nu 1}^\mu(x_2)\,s_2^\nu\epsilon+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Gamma_{\nu 1}^\mu}{\partial u^1}(x_2)-\Gamma_{\nu 1}^\lambda(x_2)\,\Gamma_{\lambda 1}^\mu(x_2)\right)s_2^\nu\epsilon^2+O\left(\epsilon^3\right),$$
onde $x_2=\gamma(0)$; e que
$$\Delta_\beta^\mu(\epsilon)=-\Gamma_{\nu 2}^\mu(x_1)\,s_1^\nu\epsilon+\frac{1}{2}\left(-\frac{\partial\Gamma_{\nu 2}^\mu}{\partial u^2}(x_1)+\Gamma_{\nu 2}^\lambda(x_1)\,\Gamma_{\lambda 2}^\mu(x_1)\right)s_1^\nu\epsilon^2+O\left(\epsilon^3\right)$$
e
$$\Delta_\delta^\mu(\epsilon)=\Gamma_{\nu 2}^\mu(x_3)\,s_3^\nu\epsilon+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Gamma_{\nu 2}^\mu}{\partial u^2}(x_3)-\Gamma_{\nu 2}^\lambda(x_3)\,\Gamma_{\lambda 2}^\mu(x_3)\right)s_3^\nu\epsilon^2+O\left(\epsilon^3\right),$$
onde $x_1=\beta(0)$ e $x_3=\delta(0)$.

Somando as contribuições dos quatro arcos α,β,γ e δ a Δ^μ, após reordenamento das parcelas, obtemos
$$\Delta^\mu(\epsilon)=\left(\Gamma_{\nu 1}^\mu(x_2)\,s_2^\nu-\Gamma_{\nu 1}^\mu(x_0)\,s_0^\nu+\Gamma_{\nu 2}^\mu(x_3)\,s_3^\nu-\Gamma_{\nu 2}^\mu(x_1)\,s_1^\nu\right)\epsilon$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Gamma_{\nu 1}^\mu}{\partial u^1}(x_2)\,s_2^\nu-\frac{\partial\Gamma_{\nu 1}^\mu}{\partial u^1}(x_0)\,s_0^\nu+\Gamma_{\nu 1}^\lambda(x_0)\,\Gamma_{\lambda 1}^\mu(x_0)\,s_0^\nu-\Gamma_{\nu 1}^\lambda(x_2)\,\Gamma_{\lambda 1}^\mu(x_2)\,s_2^\nu\right)\epsilon^2$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Gamma_{\nu 2}^\mu}{\partial u^2}(x_3)\,s_3^\nu-\frac{\partial\Gamma_{\nu 2}^\mu}{\partial u^2}(x_1)\,s_1^\nu+\Gamma_{\nu 2}^\lambda(x_1)\,\Gamma_{\lambda 2}^\mu(x_1)\,s_1^\nu-\Gamma_{\nu 2}^\lambda(x_3)\,\Gamma_{\lambda 2}^\mu(x_3)\,s_3^\nu\right)\epsilon^2$$
$$+O\left(\epsilon^3\right).$$

Devido à suavidade das funções envolvidas, poderíamos escrever, para $x_0 \approx x_1 \approx x_2 \approx x_3$ (o que sugere um laço $\alpha * \beta * \gamma * \delta$ bem pequeno, ou $0 < \epsilon \ll 1$), de um modo bem pouco rigoroso, a seguinte aproximação:

$$\Delta^{\mu}(\epsilon) \approx \frac{1}{2}\left(R^{\mu}_{\nu 11}(x_0) + R^{\mu}_{\nu 22}(x_0)\right) s_0^{\nu} \epsilon^2,$$

para a qual fizemos uso de (3.24). De fato, vamos mostrar que vale rigorosamente

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{\Delta^{\mu}(\epsilon)}{\epsilon^2} = \frac{1}{2}\left(R^{\mu}_{\nu 11}(x_0) + R^{\mu}_{\nu 22}(x_0)\right) s_0^{\nu}$$

O que falta para estabelecer esse limite é mostrar que o termo de primeira ordem em ϵ

$$\Gamma^{\mu}_{\nu 1}(x_2)\, s_2^{\nu} - \Gamma^{\mu}_{\nu 1}(x_0)\, s_0^{\nu} + \Gamma^{\mu}_{\nu 2}(x_3)\, s_3^{\nu} - \Gamma^{\mu}_{\nu 2}(x_1)\, s_1^{\nu}$$

vai para zero pelo menos tão rápido quanto ϵ, quando este parâmetro tende pra zero. Ora, temos

$$\Gamma^{\mu}_{\nu 1}(x_2)\, s_2^{\nu} - \Gamma^{\mu}_{\nu 1}(x_0)\, s_0^{\nu} = \Gamma^{\mu}_{\nu 1}(x_2)\left(s_2^{\nu} - s_0^{\nu}\right) + \left(\Gamma^{\mu}_{\nu 1}(x_2) - \Gamma^{\mu}_{\nu 1}(x_0)\right) s_0^{\nu}$$

Como $\Gamma^{\mu}_{\nu 1}$ é suave, podemos apelar ao teorema do valor médio e obter

$$\begin{aligned} \Gamma^{\mu}_{\nu 1}(x_2) - \Gamma^{\mu}_{\nu 1}(x_0) &\leq C \left\|\varphi(x_2) - \varphi(x_0)\right\| = C \left\|\varphi(x_2)\right\| \\ &= C \left\|(\epsilon, \epsilon, 0, \cdots, 0)\right\| \leq \sqrt{2} C \epsilon, \end{aligned}$$

i.e.,

$$\Gamma^{\mu}_{\nu 1}(x_2) - \Gamma^{\mu}_{\nu 1}(x_0) \leq C' \epsilon,$$

onde C e C' são constantes positivas apropriadas. Além disso, é possível aproximar o efeito da sucessão de transportes paralelos ao longo de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ por um único transporte paralelo ao longo de uma curva suave que aproxima[12] $\alpha * \beta * \gamma * \delta$. Argumentos semelhantes nos darão também

$$\left|s_2^{\nu} - s_0^{\nu}\right| \leq C'' \epsilon.$$

Como o fecho do interior da curva $\alpha * \beta * \gamma * \delta$ é compacto em U, temos que o termo $\Gamma^{\mu}_{\nu 1}(x_2)$ é limitado aí. Isso comprova a nossa tese.

Assim, vemos que até segunda ordem num parâmetro de comprimento ϵ de uma curva fechada[13] λ com base num ponto x_0, o tensor de curvatura $R^{\lambda}_{\mu\nu\rho}$ controla a diferença entre um vetor $s_0 \in E_{x_0}$ arbitrário e seu transporte paralelo s ao longo de λ. Se, por exemplo, tivéssemos $R^{\lambda}_{\mu\nu\rho}(x_0) = 0$, então a diferença entre s e s_0 só apareceria na terceira ordem em ϵ.

[12] Podemos fazer uso de uma convolução para suavizar as cúspides da curva $\alpha * \beta * \gamma * \delta$.

[13] É claro que usamos uma curva muito especial, diferenciável por partes e cujos arcos suaves são segmentos de curvas coordenadas. Não teríamos a mesma facilidade sequer de formular a questão em termos de curvas fechadas arbitrárias.

3.3 Conexão induzida nos fibrados associados

Uma conexão ∇ num fibrado $E \to M$ induz, de maneira canônica, conexões nos fibrados tensoriais $T_p^q(E)$ associados a E. Mais precisamente, temos o seguinte

Teorema 77 (Willmore, 1959) *Dada uma conexão*

$$\nabla : \Gamma(E) \to \Omega(M) \otimes \Gamma(E)$$

num $\mathbb{F}-$*fibrado vetorial* (E, M, π), *e considerando os* $C^\infty(M, \mathbb{F})-$*módulos* $C^\infty(M, \mathbb{F})$, $\Gamma(E)$ *e* $\Gamma\left(T_p^q(E)\right) \simeq T_p^q(\Gamma(E))$ *com submódulos de* $T(\Gamma(E))$, *existe uma única aplicação*

$$D : T(\Gamma(E)) \to \Omega(M) \otimes T(\Gamma(E))$$

que estende d *(diferencial de funções) e* ∇, *é compatível com a dualidade* $\Gamma(E^*) \times \Gamma(E) \to C^\infty(M, \mathbb{F})$, *e faz da álgebra tensorial* $(T(\Gamma(E)), +, \otimes)$ *do* $C^\infty(M)-$*módulo* $\Gamma(E)$ *uma* $\mathbb{F}-$*álgebra diferencial*[14]. *Além disso, a restrição*

$$D : \Gamma\left(T_p^q(E)\right) \longrightarrow \Omega(M) \otimes \Gamma\left(T_p^q(E)\right)$$

desta aplicação ao $C^\infty(M, \mathbb{F})-$*submódulo* $\Gamma\left(T_p^q(E)\right) \simeq T_p^q(\Gamma(E))$ *fornece uma conexão no fibrado tensorial* $T_p^q(E)$, *quaisquer que sejam* $p, q \in \mathbb{N}$.

Prova. Primeiramente, procuremos induzir uma conexão

$$\Delta : \Gamma(E^*) \to \Omega(M) \otimes \Gamma(E^*)$$

no fibrado dual. A compatibilidade com a dualidade significa que Δ satisfaz

$$d(\omega \cdot s) = \Delta\omega \cdot s + \omega \cdot \nabla s. \tag{3.27}$$

Usaremos essa condição para tentar derivar Δ. Vamos aos cálculos. Sejam

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n), \boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \cdots, \phi_n) \in M_{1\times n}\left(\Gamma\left(\pi^{-1}(U)\right)\right)$$

dois referenciais locais de E relacionados por

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\phi}^*,$$

com $\boldsymbol{\Lambda} = \left(\Lambda_i^j\right) \in M_{n\times n}(C^\infty(U, \mathbb{F}))$. Escrevamos

$$\nabla\boldsymbol{\varepsilon}^* = \boldsymbol{\omega} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^*$$

[14] Seja $(A, +, \times)$ um anel. Uma *derivação* do anel A é uma aplicação $D : A \to A$ que satisfaz

$$1) \; D(a + b) = Da + Db$$

$$2) \; D(a \times b) = (Da) \times b + a \times (Db).$$

A quádrupla $(A, +, \times, D)$ é dita um *anel diferencial*. Se A for ainda uma $K-$álgebra, e D for $K-$linear, então dizemos que $(A, +, \times, \cdot, K, D)$ é uma *K-álgebra diferencial*.

e

$$\nabla\boldsymbol{\phi}^* = \boldsymbol{\eta}\otimes\boldsymbol{\phi}^*,$$

onde $\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\eta}\in M_{n\times n}(\Omega(U))$ são as matrizes de Christoffel de ∇ com relação a $\boldsymbol{\varepsilon}$ e $\boldsymbol{\phi}$, respectivamente. A lei de transformação (3.17) escreve-se

$$\boldsymbol{\omega} = d\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}^{-1} + \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}. \tag{3.28}$$

Sejam também

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\bar{\varepsilon}_1,\cdots,\bar{\varepsilon}_n), \bar{\boldsymbol{\phi}} = \left(\bar{\phi}_1,\cdots,\bar{\phi}_n\right) \in M_{1\times n}\left(\Gamma\left(\bar{\pi}^{-1}(U)\right)\right)$$

os referenciais locais de E^* duais a $\boldsymbol{\varepsilon}$ e $\boldsymbol{\phi}$, respectivamente, i.e., tais que

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^*\boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\boldsymbol{\phi}}^*\boldsymbol{\phi} = \mathbf{I}_n$$

Escrevendo

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^* = \bar{\boldsymbol{\Lambda}}\bar{\boldsymbol{\phi}}^*,$$

e multiplicando à direita por $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\Lambda}^*$, temos

$$\mathbf{I}_n = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^*\boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\boldsymbol{\Lambda}}\left(\bar{\boldsymbol{\phi}}^*\boldsymbol{\phi}\right)\boldsymbol{\Lambda}^* = \bar{\boldsymbol{\Lambda}}\boldsymbol{\Lambda}^*,$$

i.e.,

$$\bar{\boldsymbol{\Lambda}} = \left(\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\right)^* = \left(\boldsymbol{\Lambda}^*\right)^{-1}.$$

Suponhamos por ora que exista a tal conexão compatível Δ, e escrevamos

$$\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^* = \bar{\boldsymbol{\omega}}\otimes\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^*$$

e

$$\Delta\bar{\boldsymbol{\phi}}^* = \bar{\boldsymbol{\eta}}\otimes\bar{\boldsymbol{\phi}}^*$$

para suas matrizes de Chrsitoffel com relação a $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ e $\bar{\boldsymbol{\phi}}$. Nossa estratégia será escrever $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ e $\bar{\boldsymbol{\eta}}$ em função de $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{\eta}$, e então mostrar que (3.17) é satisfeita para aquelas matrizes. Em seguida, invocaremos a proposição 70 para afirmar que Δ tem de existir.

Fazendo $\omega = \bar{\varepsilon}_\mu$ e $s = \varepsilon_\nu$ na equação (3.27), obtemos

$$\Delta\bar{\varepsilon}_\mu\cdot\varepsilon_\nu + \bar{\varepsilon}_\mu\cdot\nabla\varepsilon_\nu = d\underbrace{(\bar{\varepsilon}_\mu\cdot\varepsilon_\nu)}_{\delta_{\mu\nu}} = 0$$

$$\Rightarrow \Delta\bar{\varepsilon}_\mu\cdot\varepsilon_\nu = -\bar{\varepsilon}_\mu\cdot\nabla\varepsilon_\nu$$
$$\Rightarrow \bar{\omega}_\mu^\lambda\underbrace{(\bar{\varepsilon}_\lambda\cdot\varepsilon_\nu)}_{\delta_{\lambda\nu}} = -\bar{\varepsilon}_\mu\cdot\left(\omega_\nu^\rho\otimes\varepsilon_\rho\right) = -\omega_\nu^\rho\underbrace{(\bar{\varepsilon}_\mu\cdot\varepsilon_\rho)}_{\delta_{\mu\rho}}$$
$$\Rightarrow \bar{\omega}_\mu^\nu = -\omega_\nu^\mu,$$

i.e.,

$$\bar{\boldsymbol{\omega}} = -\boldsymbol{\omega}^*.$$

De forma inteiramente análoga, obtemos

$$\bar{\boldsymbol{\eta}} = -\boldsymbol{\eta}^*.$$

Ora, aplicando a operação de transposição de matrizes a (3.28) e trocando sinais, obtemos

$$-\boldsymbol{\omega}^* = -\left(\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\right)^* d\boldsymbol{\Lambda}^* + \left(\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\right)^* \left(-\boldsymbol{\eta}^*\right) \boldsymbol{\Lambda}^*$$

$$\Rightarrow \bar{\boldsymbol{\omega}} = -\bar{\boldsymbol{\Lambda}} d\bar{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1} + \bar{\boldsymbol{\Lambda}} \bar{\boldsymbol{\eta}} \bar{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}.$$

Notando que

$$\mathbf{0}_n = d\mathbf{I}_n = d\left(\bar{\boldsymbol{\Lambda}}\bar{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\right) = d\bar{\boldsymbol{\Lambda}}\bar{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1} + \bar{\boldsymbol{\Lambda}} d\bar{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}$$

obtemos finalmente

$$\bar{\boldsymbol{\omega}} = d\bar{\boldsymbol{\Lambda}}\bar{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1} + \bar{\boldsymbol{\Lambda}} \bar{\boldsymbol{\eta}} \bar{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1},$$

ou seja: a instância correspondente da lei de transformação (3.17). Estamos, portanto, em condições de invocar a proposição 70 e ver que Δ de fato existe e é única.

Sejam agora (E, M, π) e (F, M, ρ) dois $\mathbb{F}-$fibrados vetoriais, ∇ uma conexão em E e ∂ uma conexão em F. Vamos mostrar que a regra de Leibniz

$$D\left(r \otimes s\right) = \nabla r \otimes s + r \otimes \partial s \tag{3.29}$$

define univocamente uma conexão D no fibrado tensorial $E \otimes F$. Sejam $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$, $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\tilde{\varepsilon}_1, \cdots, \tilde{\varepsilon}_n) \in M_{1\times n}\left(\Gamma\left(\pi^{-1}(U)\right)\right)$ e $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \cdots, \phi_k)$, $\tilde{\boldsymbol{\phi}} = \left(\tilde{\phi}_1, \cdots, \tilde{\phi}_k\right) \in M_{1\times n}\left(\Gamma\left(\rho^{-1}(U)\right)\right)$ referenciais locais de E e F, respectivamente, relacionados por

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \boldsymbol{\Lambda}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^* \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\phi}^* = \mathbf{M}\tilde{\boldsymbol{\phi}}^*.$$

É claro que[15] $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\varepsilon}\,[\otimes]\,\boldsymbol{\eta}$, $\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\,[\otimes]\,\tilde{\boldsymbol{\eta}} \in M_{1\times nk}\left(\Gamma\left(\Pi^{-1}(U)\right)\right)$ são referenciais locais do fibrado tensorial $E \otimes F$, relacionados por

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{N}\tilde{\boldsymbol{\tau}}^*,$$

onde

$$\mathbf{N} = \boldsymbol{\Lambda}\,[\cdot]\,\mathbf{M}.$$

Escrevendo

$$\nabla\boldsymbol{\varepsilon}^* = \boldsymbol{\omega} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^* \quad \text{e} \quad \nabla\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^* = \tilde{\boldsymbol{\omega}} \otimes \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*,$$

e

$$\partial\boldsymbol{\phi}^* = \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\phi}^* \quad \text{e} \quad \partial\tilde{\boldsymbol{\phi}}^* = \tilde{\boldsymbol{\eta}} \otimes \tilde{\boldsymbol{\phi}}^*,$$

[15] Os símbolos $[\otimes]$, $[\cdot]$, etc. denotam instâncias do produto de Krönecker de matrizes, definido no capítulo 0.

e fazendo $r = \varepsilon_\mu$ e $s = \phi_\nu$ em (3.29), obtemos

$$\begin{aligned} D\left(\varepsilon_\mu \otimes \phi_\nu\right) &= \nabla \varepsilon_\mu \otimes \phi_\nu + \varepsilon_\mu \otimes \partial \phi_\nu \\ &= \omega_\mu^\lambda \otimes \left(\varepsilon_\lambda \otimes \phi_\nu\right) + \eta_\nu^\rho \otimes \left(\varepsilon_\mu \otimes \phi_\rho\right) \\ &= \xi_{(\mu,\nu)}^{(\sigma,\rho)} \otimes \left(\varepsilon_\sigma \otimes \phi_\rho\right), \end{aligned}$$

onde

$$\xi_{(\mu,\nu)}^{(\sigma,\rho)} = \omega_\mu^\sigma \delta_\nu^\rho + \delta_\mu^\sigma \eta_\nu^\rho.$$

Definindo a matriz

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\omega}\left[\cdot\right]\mathbf{I}_k + \mathbf{I}_n\left[\cdot\right]\boldsymbol{\eta}$$

em $M_{nk\times nk}\left(\Omega\left(U\right)\right)$, passamos a poder escrever

$$D\boldsymbol{\tau}^* = \boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\tau}^*.$$

Analogamente, escreveremos

$$D\tilde{\boldsymbol{\tau}}^* = \tilde{\boldsymbol{\xi}} \otimes \tilde{\boldsymbol{\tau}}^*,$$

com

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}\left[\cdot\right]\mathbf{I}_k + \mathbf{I}_n\left[\cdot\right]\tilde{\boldsymbol{\eta}}.$$

Devemos mostrar então que vale a lei de transformação (3.17) das 1-formas de Christoffel, que, na presente situação, se escreve

$$\boldsymbol{\xi} = d\mathbf{N}\mathbf{N}^{-1} + \mathbf{N}\tilde{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{N}^{-1}.$$

Explorando as propriedades (3-6), temos

$$\begin{aligned} d\mathbf{N}\mathbf{N}^{-1} &= d\left(\boldsymbol{\Lambda}\left[\cdot\right]\mathbf{M}\right)\left(\boldsymbol{\Lambda}\left[\cdot\right]\mathbf{M}\right)^{-1} \\ &= \left(d\boldsymbol{\Lambda}\left[\cdot\right]\mathbf{M} + \boldsymbol{\Lambda}\left[\cdot\right]d\mathbf{M}\right)\left(\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\left[\cdot\right]\mathbf{M}^{-1}\right) \\ &= \left(d\boldsymbol{\Lambda}\left[\cdot\right]\mathbf{M}\right)\left(\boldsymbol{\Lambda}^{-\mathbf{1}}\left[\cdot\right]\mathbf{M}^{-\mathbf{1}}\right) + \left(\boldsymbol{\Lambda}\left[\cdot\right]d\mathbf{M}\right)\left(\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\left[\cdot\right]\mathbf{M}^{-1}\right) \\ &= \left(d\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\right)\left[\cdot\right]\left(\mathbf{M}\mathbf{M}^{-\mathbf{1}}\right) + \left(\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\right)\left[\cdot\right]\left(d\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1}\right) \\ &= \left(d\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\right)\left[\cdot\right]\mathbf{I}_k + \mathbf{I}_n\left[\cdot\right]\left(d\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1}\right) \end{aligned}$$

e, por outro lado,

$$\begin{aligned} \mathbf{N}\tilde{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{N}^{-1} &= \left(\boldsymbol{\Lambda}\left[\cdot\right]\mathbf{M}\right)\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}\left[\cdot\right]\mathbf{I}_k + \mathbf{I}_n\left[\cdot\right]\tilde{\boldsymbol{\eta}}\right)\left(\boldsymbol{\Lambda}\left[\cdot\right]\mathbf{M}\right)^{-1} \\ &= \left(\boldsymbol{\Lambda}\left[\cdot\right]\mathbf{M}\right)\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}\left[\cdot\right]\mathbf{I}_k + \mathbf{I}_n\left[\cdot\right]\tilde{\boldsymbol{\eta}}\right)\left(\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\left[\cdot\right]\mathbf{M}^{-1}\right) \\ &= \left(\boldsymbol{\Lambda}\left[\cdot\right]\mathbf{M}\right)\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}\left[\cdot\right]\mathbf{I}_k\right)\left(\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\left[\cdot\right]\mathbf{M}^{-1}\right) + \left(\boldsymbol{\Lambda}\left[\cdot\right]\mathbf{M}\right)\left(\mathbf{I}_n\left[\cdot\right]\tilde{\boldsymbol{\eta}}\right)\left(\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\left[\cdot\right]\mathbf{M}^{-1}\right) \\ &= \left(\boldsymbol{\Lambda}\left[\cdot\right]\mathbf{M}\right)\left[\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\Lambda}^{-\mathbf{1}}\right)\left[\cdot\right]\mathbf{M}^{-1}\right]\cdot + \left(\boldsymbol{\Lambda}\left[\cdot\right]\mathbf{M}\right)\left[\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\left[\cdot\right]\left(\tilde{\boldsymbol{\eta}}\mathbf{M}^{-1}\right)\right] \\ &= \left[\left(\boldsymbol{\Lambda}\tilde{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\Lambda}^{-\mathbf{1}}\right)\left[\cdot\right]\left(\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1}\right)\right] + \left[\left(\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\right)\left[\cdot\right]\left(\mathbf{M}\tilde{\boldsymbol{\eta}}\mathbf{M}^{-1}\right)\right] \end{aligned}$$

$$= \left(\mathbf{\Lambda}\tilde{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{\Lambda}^{-1}\right)[\cdot]\,\mathbf{I}_k + \mathbf{I}_n\,[\cdot]\left(\mathbf{M}\tilde{\boldsymbol{\eta}}\mathbf{M}^{-1}\right).$$

Somando, obtemos

$$\begin{aligned} d\mathbf{N}\mathbf{N}^{-1} + \mathbf{N}\tilde{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{N}^{-1} &= \left(d\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}^{-1} + \mathbf{\Lambda}\tilde{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{\Lambda}^{-1}\right)[\cdot]\,\mathbf{I}_k + \mathbf{I}_n\,[\cdot]\left(d\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1} + \mathbf{M}\tilde{\boldsymbol{\eta}}\mathbf{M}^{-1}\right) \\ &= \boldsymbol{\omega}\,[\cdot]\,\mathbf{I}_k + \mathbf{I}_n\,[\cdot]\,\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi}, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. Invocando a proposição 70, afirmamos então que D existe e é única.

É também muito simples induzir uma conexão δ no fibrado $E \oplus F$ a partir das conexões ∇ e ∂ dadas em E e F, respectivamente. É razoável exigir que

$$\begin{array}{cccc} \delta: & \Gamma(E \oplus F) & \longrightarrow & \Omega(M) \otimes \Gamma(E \oplus F) \\ & \| & & \| \\ & \Gamma(E) \oplus \Gamma(F) & & \Omega(M) \otimes (\Gamma(E) \oplus \Gamma(F)) \\ & \| & & \| \\ & \Gamma(E) \oplus \Gamma(F) & \longrightarrow & (\Omega(M) \otimes \Gamma(E)) \oplus (\Omega(M) \otimes \Gamma(F)) \end{array}$$

satisfaça à condição

$$\delta(r \oplus s) = \nabla r \oplus \partial s. \tag{3.30}$$

Ora, é claro que

$$\boldsymbol{\sigma} = (\varepsilon_1 \oplus 0, \ldots, 0 \oplus \phi_k), \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \left(\tilde{\varepsilon}_1 \oplus 0, \ldots, 0 \oplus \tilde{\phi}_k\right) \in M_{1\times(n+k)}\left(\Gamma\left(P^{-1}(U)\right)\right)$$

são referenciais locais para a soma de Whitney $E \oplus F$, e não é difícil convencer-se de que se relacionam por

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{R}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^*,$$

onde[16]

$$\mathbf{R} = \mathbf{\Lambda} \oplus \mathbf{M}.$$

Fazendo $r = \varepsilon_\mu$ e $s = \phi_\nu$ em (3.30), obtemos

$$\delta(\varepsilon_\mu \oplus \phi_\nu) = \nabla\varepsilon_\mu \oplus \partial\phi_\nu$$

$$= \left(\omega_\mu^\lambda \otimes \varepsilon_\lambda\right) \oplus \left(\eta_\nu^\rho \otimes \phi_\rho\right)$$

$$= \omega_\mu^\lambda \otimes (\varepsilon_\lambda \oplus 0) + \eta_\nu^\rho \otimes \left(0 \oplus \phi_\rho\right),$$

donde

$$\delta\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\chi} \otimes \boldsymbol{\sigma}^*,$$

com

$$\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\omega} \oplus \boldsymbol{\eta}.$$

Analogamente, temos

$$\delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \tilde{\boldsymbol{\chi}} \otimes \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^*,$$

[16] Ver soma direta de matrizes, capítulo 0.

onde

$$\tilde{\boldsymbol{\chi}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}} \oplus \tilde{\boldsymbol{\eta}}.$$

Para estabelecer a existência da conexão δ, resta verificar a lei de transformação (3.17) na forma particular

$$\boldsymbol{\chi} = d\mathbf{R}\mathbf{R}^{-1} + \mathbf{R}\tilde{\boldsymbol{\chi}}\mathbf{R}^{-1}.$$

Explorando as propriedades (1) e (2) da soma direta de matrizes, obtemos

$$\begin{aligned} d\mathbf{R}\mathbf{R}^{-1} &= d(\boldsymbol{\Lambda} \oplus \mathbf{M})(\boldsymbol{\Lambda} \oplus \mathbf{M})^{-1} \\ &= (d\boldsymbol{\Lambda} \oplus d\mathbf{M})\left(\boldsymbol{\Lambda}^{-1} \oplus \mathbf{M}^{-1}\right) \\ &= d\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}^{-1} \oplus d\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\tilde{\boldsymbol{\chi}}\mathbf{R}^{-1} &= (\boldsymbol{\Lambda} \oplus \mathbf{M})(\tilde{\boldsymbol{\omega}} \oplus \tilde{\boldsymbol{\eta}})(\boldsymbol{\Lambda} \oplus \mathbf{M})^{-1} \\ &= (\boldsymbol{\Lambda}\tilde{\boldsymbol{\omega}} \oplus \mathbf{M}\tilde{\boldsymbol{\eta}})\left(\boldsymbol{\Lambda}^{-1} \oplus \mathbf{M}^{-1}\right) \\ &= \boldsymbol{\Lambda}\tilde{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\Lambda}^{-1} \oplus \mathbf{M}\tilde{\boldsymbol{\eta}}\mathbf{M}^{-1}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} d\mathbf{R}\mathbf{R}^{-1} + \mathbf{R}\tilde{\boldsymbol{\chi}}\mathbf{R}^{-1} &= \left(d\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}^{-1} \oplus d\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1}\right) + \left(\boldsymbol{\Lambda}\tilde{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\Lambda}^{-1} \oplus \mathbf{M}\tilde{\boldsymbol{\eta}}\mathbf{M}^{-1}\right) \\ &= \left(d\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}^{-1} + \boldsymbol{\Lambda}\tilde{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\right) \oplus \left(d\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1} + \mathbf{M}\tilde{\boldsymbol{\eta}}\mathbf{M}^{-1}\right) \\ &= \boldsymbol{\omega} \oplus \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\chi}, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Explorando agora a associatividade do produto tensorial, podemos, a partir de uma conexão ∇ dada num fibrado vetorial E, e de modo unívoco, induzir recursivamente conexões[17] ∇_p^q em cada fibrado tensorial

$$T_p^q(E) = (((((E^* \otimes E^*) \otimes \cdots) \otimes E^*) \otimes E) \otimes \cdots) \otimes E.$$

Além disso, dados $p, q \in \mathbb{N}$, podemos também induzir, de modo unívoco, uma conexão $\bar{\nabla}_p^q$ em cada fibrado

$$\bar{T}_p^q(E) = \bigoplus_{i=0}^{p}\left(\bigoplus_{j=0}^{q} T_i^j(E)\right).$$

Por construção, se $k \leq p$ e $l \leq q$, então $\bar{\nabla}_k^l$ é a restrição de $\bar{\nabla}_p^q$ a $\Gamma\left(\bar{T}_k^l(E)\right) \subset \Gamma\left(\bar{T}_p^q(E)\right)$ e ∇_k^l é a restrição de $\bar{\nabla}_p^q$ a $\Gamma\left(T_k^l(E)\right) \subset \Gamma\left(\bar{T}_p^q(E)\right)$. Isso nos permite definir coerentemente uma aplicação

$$D : T(\Gamma(E)) \to \Omega(M) \otimes T(\Gamma(E))$$

[17] Note que, de acordo com essa notação, temos $\nabla_0^0 = d$, $\nabla_0^1 = \nabla$ e $\nabla_1^0 = \Delta$.

por
$$Dt = \bar{\nabla}_p^q t,$$
se $t \in \bar{T}_p^q(\Gamma(E))$, uma vez que, dado $t \in T(\Gamma(E))$, existem, pela definição mesma de soma direta de módulos, $p, q \in \mathbb{N}$ tais que $t \in \bar{T}_p^q(\Gamma(E))$. Por construção, D faz do anel $(T(\Gamma(E)), +, \otimes)$ uma $\mathbb{F}-$álgebra diferencial. ■

O que acabamos de provar é uma ligeira adaptação de um teorema atribuído[18] a T. J. Willmore (ver [Abraham-Marsden] ou [Willmore, 1959]). A versão que apresentamos é menos geral num certo sentido e mais geral num outro. A versão original parte de dois operadores diferenciais[19] sobre $C^\infty(M)$ e $\mathfrak{X}(M)$ e constrói um operador diferencial D sobre a álgebra tensorial $\mathfrak{T}(M)$ que estende a ambos e é compatível com contrações de tensores. Uma das vantagens dessa apresentação é que ela permite uma definição elegante e intrínseca da derivada de Lie de campos tensoriais, sem fazer referência a coordenadas locais. Nossa versão é mais modesta porque os operadores diferenciais iniciais são exatamente a diferencial de funções e uma conexão. Ela não se prestaria à definição das derivadas de Lie, por exemplo. Como não usamos tal conceito sequer uma vez nesta dissertação, pareceu-nos bem a restrição. Em compensação, a prova que oferecemos se aplica a fibrados vetoriais em geral, dos quais o fibrado tangente (contexto da versão original) é um caso particular.

Doravante nesta dissertação, usaremos o mesmo símbolo ∇ para uma conexão no fibrado E e para as conexões de Willmore induzidas por ela nos fibrados tensoriais associados a E.

Para encerrar esta seção, e como aplicação direta do teorema 77, vamos apresentar uma noção central em geometria diferencial.

Seja $b \in \Gamma\left(T_2^0(E)\right)$ uma estrutura bilinear não-degenerada no $\mathbb{F}-$fibrado vetorial E. Dizemos que uma conexão ∇ em E *preserva a estrutura* b quando a diferencial absoluta de b se anula, i.e., quando $\nabla b = 0$. Um exemplo trivial dessa situação é a preservação do produto de funções (uma estrutura bilinear não-degenerada e simétrica!) pela diferencial de funções d encarada como conexão do fibrado trivial $M \times \mathbb{R}$ (ver exemplo 64 acima). Em coordenadas locais, a equação $\nabla b = 0$ corresponde às seguintes condições sobre os símbolos de Christoffel de ∇, como se verifica sem dificuldades.

$$\frac{\partial b_{\mu\nu}}{\partial u^\lambda} - b_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\mu\lambda} - b_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\nu\lambda} = 0 \tag{3.31}$$

[18] O próprio Willmore é o primeiro a reconhecer (ver [Willmore, 1959]) que a autoria desse teorema é de certo modo contestável, uma vez que o espírito desse resultado era consabido por toda comunidade de geômetras e físicos. O que justifica o epônimo – a par do seu uso inovador por Willmore no trato das derividadas de Lie – é que não havia, até então, um enunciado claro do teorema na literatura.

[19] O uso que se faz aqui do termo "operador diferencial" (com o significado com que aparece em [Abraham-Marsden]) é distinto daquele estabelecido na parte II desta dissertação, que prevalecerá.

Não é claro (ao menos, não com esse grau de generalidade) se sempre existirá uma conexão preservando uma dada estrutura, i.e., se as equações acima podem ser resolvidas para $\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}$ de modo que essas quantidades satisfaçam ainda à lei de transformação (3.11), que sabemos, graças à proposição 71, ser necessária e suficiente para a definição de uma conexão ∇ a partir desses símbolos. No próximo capítulo, vamos estudar dois tipos de estrutura bilinear não-degenerada no fibrado tangente TM de uma variedade M: as estruturas pseudo-riemannianas g (simétricas) e as estruturas simpléticas ω (antissimétricas) de M, que serão definidas oportunamente. Veremos que, nesses casos particulares, é sempre possível encontrar conexões que preservem a estrutura bilinear em questão.

Capítulo 4

Geometria local do fibrado tangente

Neste capítulo, restringiremo-nos ao estudo dos fibrados vetoriais reais associados ao fibrado tangente de uma variedade M, sob o ponto de vista do relacionamento entre suas estruturas bilineares não-degeneradas e suas conexões. Mais precisamente, faremos $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ e $E = TM$ e tiraremos as conclusões cabíveis lançando mão dos resultados previamente demonstrados. O grande objetivo deste capítulo é a parametrização das ditas conexões simpléticas, a serem definidas oportunamente.

4.1 Conexões afins

As conexões do fibrado tangente TM de uma variedade M são designadas coletivamente sob o nome de *conexões afins*. Esta seção será dedicada especializar alguns teoremas e fórmulas vistas no capítulo anterior para o caso de conexões afins. Começaremos pela indução por uma conexão afim ∇ de uma conexão – para a qual usaremos o mesmo símbolo ∇ – nos fibrados tensoriais associados a TM Isso é o teorema de Willmore (teorema 77 acima) aplicado ao caso afim. O que faremos aqui é escrever explicitamente a expressão local para a diferencial absoluta ∇t de uma seção associada t. Para tanto, fixemos de uma vez por todas um sistema de coordenadas locais $\left(U, u^1, \cdots, u^m\right)$ para M onde faremos nossos cálculos.

diferencial absoluta de 1-formas

Comecemos calculando os símbolos de Christoffel $\bar{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}$ que tomam parte na diferenciação absoluta das 1-formas locais básicas $U_\mu = du^\mu$ via

$$\nabla U_\mu = \bar{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} du^\nu \otimes \omega_\lambda$$

em função dos símbolos de Christoffel $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ da conexão afim ∇. Como a conexão dada pelo teorema de Willmore é compatível com a dualidade $\Omega(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ e estende a diferencial de funções, temos

$$0 = d(\delta_{\mu\nu}) = d\left(U_\mu \cdot \frac{\partial}{\partial u^\nu}\right) = \nabla U_\mu \cdot \frac{\partial}{\partial u^\nu} + U_\mu \cdot \nabla \frac{\partial}{\partial u^\nu},$$

donde

$$\begin{aligned}
\nabla U_\mu \cdot \frac{\partial}{\partial u^\nu} &= -U_\mu \cdot \nabla \frac{\partial}{\partial u^\nu} \\
\Rightarrow \left(\bar{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\rho} du^\rho \otimes U_\lambda\right) \cdot \frac{\partial}{\partial u^\nu} &= -U_\mu \cdot \left(\Gamma^{\kappa}_{\nu\rho} du^\rho \otimes \frac{\partial}{\partial u^\kappa}\right) \\
\Rightarrow \underbrace{\left(U_\lambda \cdot \frac{\partial}{\partial u^\nu}\right)}_{\delta_{\lambda\nu}} \bar{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\rho} du^\rho &= -\underbrace{\left(U_\mu \cdot \frac{\partial}{\partial u^\kappa}\right)}_{\delta_{\mu\kappa}} \Gamma^{\kappa}_{\nu\rho} du^\rho \\
\Rightarrow \bar{\Gamma}^{\nu}_{\mu\rho} du^\rho &= -\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} du^\rho
\end{aligned}$$

Como as 1-formas du^ρ formam uma base para o $C^\infty(M)$ −módulo $\Omega(U)$, temos então

$$\bar{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} = -\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu},$$

donde segue que

$$\nabla(du^\mu) = -\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu} du^\nu \otimes du^\lambda. \tag{4.1}$$

Seja agora $\omega \in \Omega(M)$ com forma local

$$\omega|U = \omega_\mu du^\mu.$$

Temos então

$$\nabla\omega|U = \omega_{\lambda;\nu} du^\nu \otimes du^\lambda,$$

onde

$$\omega_{\lambda;\nu} = \frac{\partial \omega_\lambda}{\partial u^\nu} - \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}\omega_\mu$$

Para referência futura, escrevamos também a expressão local para a diferencial absoluta de um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$ como

$$\nabla X|U = X^{\mu}_{;\nu} du^\nu \otimes \frac{\partial}{\partial u^\mu},$$

onde

$$X^{\mu}_{;\nu} = \frac{\partial X^\mu}{\partial u^\nu} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu} X^\lambda$$

diferencial absoluta de campos tensoriais

Comecemos, para fixar idéias, com um campo tensorial 1−covariante e 2−contravariante $t \in \mathfrak{T}_1^2(M)$, cuja expressão local será dada por

$$t|U = t_\lambda^{\mu\nu} du^\lambda \otimes \frac{\partial}{\partial u^\mu} \otimes \frac{\partial}{\partial u^\nu}$$

e escrevamos

$$\nabla t|U = t_{\lambda;\rho}^{\mu\nu} du^\rho \otimes du^\lambda \otimes \frac{\partial}{\partial u^\mu} \otimes \frac{\partial}{\partial u^\nu}.$$

Nosso intuito é obter as componentes $t_{\lambda;\rho}^{\mu\nu}$ em termos das componentes $t_\lambda^{\mu\nu}$ e dos símbolos de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ da conexão afim ∇. Como a conexão dada pelo teorema de Willmore é uma derivação da álgebra tensorial de $\mathfrak{X}(M)$, temos

$$\begin{aligned}
\nabla t|U &= dt_\lambda^{\mu\nu} \otimes du^\lambda \otimes \frac{\partial}{\partial u^\mu} \otimes \frac{\partial}{\partial u^\nu} \\
&\quad + t_\lambda^{\mu\nu} \nabla\left(du^\lambda\right) \otimes \frac{\partial}{\partial u^\mu} \otimes \frac{\partial}{\partial u^\nu} \\
&\quad + t_\lambda^{\mu\nu} du^\lambda \otimes \nabla\left(\frac{\partial}{\partial u^\mu}\right) \otimes \frac{\partial}{\partial u^\nu} \\
&\quad + t_\lambda^{\mu\nu} du^\lambda \otimes \frac{\partial}{\partial u^\mu} \otimes \nabla\left(\frac{\partial}{\partial u^\nu}\right).
\end{aligned}$$

Escrevendo

$$dt_\lambda^{\mu\nu} = \frac{\partial t_\lambda^{\mu\nu}}{\partial u^\rho} du^\rho$$

e usando (3.2) e (4.1), obtemos

$$t_{\lambda;\rho}^{\mu\nu} = \frac{\partial t_\lambda^{\mu\nu}}{\partial u^\rho} - \Gamma_{\lambda\rho}^\sigma t_\sigma^{\mu\nu} + \Gamma_{\sigma\rho}^\mu t_\lambda^{\sigma\nu} + \Gamma_{\sigma\rho}^\nu t_\lambda^{\mu\sigma}$$

O caso especial que acabamos de tratar é assaz elucidativo do seguinte: a diferencial absoluta de um campo tensorial p−covariante e q−contravariante $t \in \mathfrak{T}_p^q(M)$ cuja expressão local é

$$t|U = t_{\nu_1\cdots\nu_p}^{\mu_1\cdots\mu_q} du^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes du^{\nu_p} \otimes \frac{\partial}{\partial u^{\mu_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial u^{\mu_q}}$$

é dada localmente por

$$\nabla t|U = t_{\nu_1\cdots\nu_p;\nu}^{\mu_1\cdots\mu_q} du^\nu \otimes du^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes du^{\nu_p} \otimes \frac{\partial}{\partial u^{\mu_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial u^{\mu_q}},$$

com

$$\begin{aligned}
t_{\nu_1\cdots\nu_p;\nu}^{\mu_1\cdots\mu_q} &= \frac{\partial t_{\nu_1\cdots\nu_p}^{\mu_1\cdots\mu_q}}{\partial u^\nu} - \sum_{j=1}^{p} \Gamma_{\nu_i\nu}^\sigma t_{\nu_1\cdots\nu_{j-1}\sigma\nu_{j+1}\cdots\nu_p}^{\mu_1\cdots\mu_q} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{q} \Gamma_{\sigma\nu}^{\mu_k} t_{\nu_1\cdots\nu_p}^{\mu_1\cdots\mu_{k-1}\sigma\mu_{k+1}\cdots\mu_q}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

4.2 Torção de uma conexão afim

No contexto de conexões afins, a lei de transformação (3.11) fica

$$\bar{\Gamma}^{\xi}_{\rho\mu} = \frac{\partial u^{\nu}}{\partial \bar{u}^{\mu}} \frac{\partial u^{\lambda}}{\partial \bar{u}^{\rho}} \frac{\partial \bar{u}^{\xi}}{\partial u^{\eta}} \Gamma^{\eta}_{\lambda\nu} + \frac{\partial^2 u^{\eta}}{\partial \bar{u}^{\mu} \partial \bar{u}^{\rho}} \frac{\partial \bar{u}^{\xi}}{\partial u^{\eta}} \tag{4.3}$$

Em razão da parcela contendo uma derivada de segunda ordem, os símbolos de Christoffel de uma conexão afim geralmente não se transformam como componentes de um campo tensorial 2−covariante e 1−contravariante. Mas a comutatividade das derivações parciais faz com que esta parcela seja simétrica no par de índices (μ, ρ), donde se vê que ela pode ser eliminada tomando a antissimetrização da expressão acima com relação ao referido par de índices. De fato, definindo[1]

$$T^{\lambda}_{\mu\nu} = 2\Gamma^{\lambda}_{[\nu\mu]} = \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \tag{4.4}$$

obtemos

$$\begin{aligned} \bar{T}^{\lambda}_{\mu\nu} &= \frac{\partial u^{\sigma}}{\partial \bar{u}^{\mu}} \frac{\partial u^{\tau}}{\partial \bar{u}^{\nu}} \frac{\partial \bar{u}^{\lambda}}{\partial u^{\rho}} \Gamma^{\rho}_{\tau\sigma} - \frac{\partial u^{\tau}}{\partial \bar{u}^{\nu}} \frac{\partial u^{\sigma}}{\partial \bar{u}^{\mu}} \frac{\partial \bar{u}^{\lambda}}{\partial u^{\rho}} \Gamma^{\rho}_{\sigma\tau} \\ &= \frac{\partial u^{\tau}}{\partial \bar{u}^{\nu}} \frac{\partial u^{\sigma}}{\partial \bar{u}^{\mu}} \frac{\partial \bar{u}^{\lambda}}{\partial u^{\rho}} \left(\Gamma^{\rho}_{\tau\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\sigma\tau}\right), \end{aligned}$$

i.e.,

$$\bar{T}^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial u^{\tau}}{\partial \bar{u}^{\nu}} \frac{\partial u^{\sigma}}{\partial \bar{u}^{\mu}} \frac{\partial \bar{u}^{\lambda}}{\partial u^{\rho}} T^{\rho}_{\sigma\tau} \tag{4.5}$$

Isso mostra que a expressão (4.4) define idoneamente um tensor $T \in \mathfrak{T}^1_2(M)$, que denominaremos o *tensor de torção da conexão* ∇. Localmente, temos

$$T|U = T^{\lambda}_{\mu\nu} du^{\mu} \otimes du^{\nu} \otimes \frac{\partial}{\partial u^{\lambda}}$$

para todo sistema de coordenadas $\left(U, u^1, \cdots, u^m\right)$ em M. Que o tensor $T^{\lambda}_{\mu\nu}$ é antissimétrico com relação ao par de índices (μ, ν) – i.e., que vale

$$T^{\lambda}_{\mu\nu} = -T^{\lambda}_{\nu\mu}$$

– é óbvio da sua definição por antissimetrização de $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$. Também é claro de sua definição mesma que a torção de uma conexão ∇ será nula se, e somente se, os símbolos de Christoffel desta forem simétricos com relação ao par de índices covariantes, i.e.,

$$T = 0 \iff \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} \tag{4.6}$$

[1] É muito comum em livros de Física escrever as componentes da antissimetrização com relação, por exemplo, à tripla de índices (ν, ρ, σ) de um objeto multi-indexado $\Delta^{\kappa\lambda}_{\mu\nu\rho\sigma}$ como $\Delta^{\kappa\lambda}_{\mu[\nu\rho\sigma]}$ e a sua simetrização com relação, digamos, aos índices $\mu\nu\rho$ como $\Delta^{\kappa\lambda}_{(\mu\nu\rho)\sigma}$. Não faremos uso sistemático desta notação, mas, vez por outra, ela será de grande ajuda.

Neste caso, diz-se que a conexão ∇ é *livre de torção* ou *simétrica*.

Lançando mão do isomorfismo

$$\mathfrak{T}_2^1(M) \simeq \mathcal{L}_2(\mathfrak{X}(M), \mathfrak{X}(M); \mathfrak{X}(M))$$

podemos definir a *aplicação de torção*

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{T}: & \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) & \rightarrow & \mathfrak{X}(M) \\ & (X, Y) & \mapsto & T(X, Y) \end{array}$$

por

$$\mathcal{T}(X, Y)(x) = T^{\lambda}_{\mu\nu}(x) X^{\mu}(x) Y^{\mu}(x) \left.\frac{\partial}{\partial u^{\lambda}}\right|_x$$

para todos $x \in U$, e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ com $X|U = X^{\mu}\frac{\partial}{\partial u^{\mu}}$ e $Y|U = Y^{\mu}\frac{\partial}{\partial u^{\mu}}$.

Proposição 78 $\mathcal{T}(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$, $\quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

Prova. Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\left(U, u^1, \cdots, u^m\right)$ um sistema de coordenadas locais para M tal que $X|U = X^{\mu}\frac{\partial}{\partial u^{\mu}}$ e $Y|U = Y^{\mu}\frac{\partial}{\partial u^{\mu}}$.

Comecemos notando que, dada uma função $f \in C^{\infty}(U)$, temos

$$\begin{aligned} [X, Y](f) &= X(Y(f)) - Y(X(f)) \\ &= X^{\mu}\frac{\partial}{\partial u^{\mu}}\left(Y^{\nu}\frac{\partial f}{\partial u^{\nu}}\right) - Y^{\nu}\frac{\partial}{\partial u^{\nu}}\left(X^{\mu}\frac{\partial f}{\partial u^{\mu}}\right) \\ &= X^{\mu}\frac{\partial Y^{\nu}}{\partial u^{\mu}}\frac{\partial f}{\partial u^{\nu}} + X^{\mu}Y^{\nu}\frac{\partial^2 f}{\partial u^{\mu}\partial u^{\nu}} \\ &\quad -Y^{\nu}\frac{\partial X^{\mu}}{\partial u^{\nu}}\frac{\partial f}{\partial u^{\mu}} - Y^{\nu}X^{\mu}\frac{\partial^2 f}{\partial u^{\nu}\partial u^{\mu}} \\ &= \left\{\left[\left(X^{\mu}\frac{\partial}{\partial u^{\mu}}\right)(Y^{\nu})\right] - \left[\left(Y^{\mu}\frac{\partial}{\partial u^{\mu}}\right)(X^{\nu})\right]\right\}\frac{\partial f}{\partial u^{\nu}} \\ &= (X(Y^{\nu}) - Y(X^{\nu}))\frac{\partial}{\partial u^{\nu}}(f), \end{aligned}$$

ou seja:

$$[X, Y]|U = \left(X\left(Y^{\lambda}\right) - Y\left(X^{\lambda}\right)\right)\frac{\partial}{\partial u^{\lambda}}$$

Agora,

$$(\nabla_X Y)|U = \nabla_{\left(X^{\mu}\frac{\partial}{\partial u^{\mu}}\right)}\left(Y^{\nu}\frac{\partial}{\partial u^{\nu}}\right)$$

$$= X^{\mu}\nabla_{\mu}\left(Y^{\nu}\frac{\partial}{\partial u^{\nu}}\right)$$

$$= X^{\mu}\left(dY^{\nu}\cdot\frac{\partial}{\partial u^{\mu}}\right)\frac{\partial}{\partial u^{\nu}} + X^{\mu}Y^{\nu}\Gamma^{\lambda}_{\nu\kappa}\left(du^{\kappa}\cdot\frac{\partial}{\partial u^{\mu}}\right)\frac{\partial}{\partial u^{\lambda}}$$

$$= X^{\mu}\frac{\partial Y^{\nu}}{\partial u^{\mu}}\frac{\partial}{\partial u^{\nu}} + X^{\mu}Y^{\nu}\Gamma^{\lambda}_{\nu\kappa}\delta^{\kappa}_{\mu}\frac{\partial}{\partial u^{\lambda}}$$

$$= \left(X\left(Y^\lambda\right) + X^\mu Y^\nu \Gamma^\lambda_{\nu\mu}\right)\frac{\partial}{\partial u^\lambda}$$

e, analogamente,

$$\left(\nabla_Y X\right)|U = \left(Y\left(X^\lambda\right) + X^\mu Y^\nu \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right)\frac{\partial}{\partial u^\lambda}$$

Subtraindo $\left(\nabla_Y X\right)|U$ de $\left(\nabla_X Y\right)|U$, vem

$$\begin{aligned}\left(\nabla_X Y - \nabla_Y X\right)|U &= \left(X\left(Y^\lambda\right) - Y\left(X^\lambda\right)\right)\frac{\partial}{\partial u^\lambda} \\ &\quad + \left(\Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right)X^\mu Y^\nu \frac{\partial}{\partial u^\lambda},\end{aligned}$$

i.e.,

$$\left(\nabla_X Y - \nabla_Y X\right)|U = \left(\left[X,Y\right] + \mathcal{T}\left(X,Y\right)\right)|U,$$

donde segue que

$$\mathcal{T}\left(X,Y\right) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - \left[X,Y\right],$$

$\forall X,Y \in \mathfrak{X}\left(M\right)$. ■

Proposição 79 *Toda variedade com topologia Hausdorff de base enumerável admite uma conexão afim livre de torção*

Prova. No contexto afim, a proposição 71 enuncia-se da seguinte forma.

Seja

$$\mathcal{U} = \left\{\left(U, u^1, \cdots, u^m\right), \left(V, v^1, \cdots, v^m\right), \cdots\right\}$$

um atlas de M tal que, para cada vizinhança coordenada $U \in U$ existam m^3 funções $\Gamma\left(U\right)^\lambda_{\mu\nu} \in C^\infty\left(U\right)$, $\lambda,\mu,\nu \in [m]$, tais que, para cada $x \in U \cap V$, tem-se

$$\Gamma\left(V\right)^\xi_{\rho\mu}\left(x\right) = \frac{\partial u^\nu}{\partial v^\mu}\left(x\right)\frac{\partial u^\lambda}{\partial v^\rho}\left(x\right)\frac{\partial v^\xi}{\partial u^\eta}\left(x\right)\Gamma\left(U\right)^\eta_{\lambda\nu}\left(x\right) + \frac{\partial^2 u^\eta}{\partial v^\mu \partial v^\rho}\left(x\right)\frac{\partial v^\xi}{\partial u^\eta}\left(x\right) \tag{4.7}$$

Então, existe uma conexão afim ∇ em M que tem símbolos de Christoffel $\left\{\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\left(U\right)\right\}^m_{\lambda,\mu,\nu=1}$ em $U \in U$.

Assim, à luz do comentário (4.6) basta provarmos que a simetrização $\Gamma^\lambda_{(\mu\nu)}$ de um símbolo de Christoffel $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ de uma conexão afim ∇ (que sempre existe, pelo corolário 72) arbitrária é ainda um símbolo de Christoffel para alguma conexão $\bar{\nabla}$, ou seja, transforma-se sob mudança de coordenadas segundo (4.7). A conexão $\bar{\nabla}$ será evidentemente livre de torção. Um cálculo direto mostra que

$$\bar{\Gamma}^\lambda_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}\left(\bar{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} + \bar{\Gamma}^\lambda_{\nu\mu}\right)$$

$$= \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\mu}\frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\nu}\frac{\partial \bar{u}^\lambda}{\partial u^\gamma}\left(\frac{1}{2}\left(\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} + \Gamma^\gamma_{\beta\alpha}\right)\right) + \frac{\partial^2 u^\gamma}{\partial \bar{u}^\nu \partial \bar{u}^\mu}\frac{\partial \bar{u}^\lambda}{\partial u^\gamma},$$

i.e., que

$$\bar{\Gamma}^{\lambda}_{(\mu\nu)} = \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial \bar{u}^{\mu}} \frac{\partial u^{\beta}}{\partial \bar{u}^{\nu}} \frac{\partial \bar{u}^{\lambda}}{\partial u^{\gamma}} \Gamma^{\gamma}_{(\alpha\beta)} + \frac{\partial^2 u^{\gamma}}{\partial \bar{u}^{\nu} \partial \bar{u}^{\mu}} \frac{\partial \bar{u}^{\lambda}}{\partial u^{\gamma}},$$

que é o que queríamos provar. ■

O método de prova da proposição anterior nos mostra que é sempre possível "subtrair" a torção de uma conexão afim. Mais precisamente, o que temos é que toda conexão afim se escreve como a soma de uma conexão afim livre de torção com um múltiplo de sua aplicação de torção. Esse é o espírito do seguinte

Corolário 80 (da prova) *Dada uma conexão afim ∇ em M com aplicação de torção $\mathcal{T}$, existe uma única conexão afim $\bar{\nabla}$ em M livre de torção tal que*

$$\nabla = \bar{\nabla} + \frac{1}{2}\mathcal{T}$$

Prova. Basta observar que

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} &= \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \left(\frac{1}{2}\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} - \frac{1}{2}\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} \right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}\right) + \frac{1}{2}\left(\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}\right) \\
&= \Gamma^{\lambda}_{(\mu\nu)} + \Gamma^{\lambda}_{[\mu\nu]},
\end{aligned}$$

donde

$$\left(\nabla_X Y\right)|U = \left(X\left(Y^{\lambda}\right) + \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} X^{\mu} Y^{\nu}\right) \frac{\partial}{\partial u^{\lambda}}$$

$$= \left(X\left(Y^{\lambda}\right) + \Gamma^{\lambda}_{(\nu\mu)} X^{\mu} Y^{\nu}\right) \frac{\partial}{\partial u^{\lambda}} + \Gamma^{\lambda}_{[\nu\mu]} X^{\mu} Y^{\nu} \frac{\partial}{\partial u^{\lambda}}$$

$$= \left(\bar{\nabla}_X Y + \frac{1}{2}\mathcal{T}\left(X, Y\right)\right)|U,$$

para todos campos vetorais $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e todo sistema de coordenadas locais $\left(U, u^1, \cdots, u^m\right)$ tal que $X|U = X^{\mu}\frac{\partial}{\partial u^{\mu}}$ e $Y|U = Y^{\mu}\frac{\partial}{\partial u^{\mu}}$. Concluimos assim que vale a identidade de aplicações

$$\nabla = \bar{\nabla} + \frac{1}{2}\mathcal{T},$$

como afirmáramos. ■

Dizemos que uma curva α em M é uma *geodésica*[2] para uma conexão ∇ quando seu campo de velocidades $\dot{\alpha} \in \Gamma_{\alpha}(TM)$ é paralelo, i.e., quando vale

[2] Para o significado geométrico das geodésicas, referimos o leitor ao clássico [do Carmo 2]. Não nos alongaremos no assunto porque ele não apresenta maior interesse para os fins desta dissertação.

$D_\alpha \dot{\alpha} \equiv 0$. Em coordenadas locais $\left(U, u^1, \cdots, u^m\right)$, temos que as funções $\alpha^\lambda = u^\lambda \circ \alpha$ satisfazem à EDO

$$\frac{d\alpha^\lambda}{dt^2}(t) + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}(\alpha(t)) \frac{d\alpha^\mu}{dt}(t) \frac{d\alpha^\nu}{dt}(t) \equiv 0$$

se e somente se α é uma geodésica de ∇. Notando a simetria da equação acima nos índices (somados) μ e ν, percebemos que a conexão ∇ possui o mesmo conjunto de geodésicas que a conexão $\bar{\nabla}$ dela obtida por subtração da torção. Isso nos diz que a operação de eliminar a torção de uma conexão é, em boa medida, um procedimento inócuo sob o ponto de vista geométrico.

4.3 A Identidade de Bianchi

Nesta seção mostraremos que se pode reescrever a identidade de Bianchi (3.22), no caso especial de uma conexão afim livre de torção, como

$$R^\nu_{\mu\lambda\rho;\eta} + R^\nu_{\mu\rho\eta;\lambda} + R^\nu_{\mu\eta\lambda;\rho} = 0, \tag{4.8}$$

ou, mais compactamente, como

$$R^\nu_{\mu[\lambda\rho;\eta]} = 0$$

Começaremos mostrando a equivalência entre as duas formas mensionadas acima. Temos, por definição de antissimetrização,

$$R^\nu_{\mu[\lambda\rho;\eta]} = \frac{1}{6}\left\{ \begin{array}{c} R^\nu_{\mu\lambda\rho;\eta} + R^\nu_{\mu\rho\eta;\lambda} + R^\nu_{\mu\eta\lambda;\rho} \\ -R^\nu_{\mu\rho\lambda;\eta} - R^\nu_{\mu\eta\rho;\lambda} - R^\nu_{\mu\lambda\eta;\rho} \end{array} \right\}$$

Mas como o tensor de curvatura é antissimétrico com relação aos seus dois últimos índices covariantes (ver equação 3.25), temos então

$$R^\nu_{\mu[\lambda\rho;\eta]} = \frac{1}{3}\left(R^\nu_{\mu\lambda\rho;\eta} + R^\nu_{\mu\rho\eta;\lambda} + R^\nu_{\mu\eta\lambda;\rho}\right)$$

Passemos agora ao estabelecimento da identidade (4.8) a partir de (3.22).

$$d\Omega^\nu_{\mu\lambda\rho} = \omega^\alpha_\mu \wedge \Omega^\nu_\alpha - \Omega^\beta_\mu \wedge \omega^\nu_\beta$$

$$\Rightarrow d\left(R^\nu_{\mu\lambda\rho} du^\lambda \wedge du^\rho\right) = \Gamma^\alpha_{\mu\eta} du^\eta \wedge \left(R^\nu_{\alpha\lambda\rho} du^\lambda \wedge du^\rho\right) - \left(R^\beta_{\mu\lambda\rho} du^\lambda \wedge du^\rho\right) \wedge \Gamma^\nu_{\beta\theta} du^\theta$$

$$\Rightarrow d\left(R^\nu_{\mu\lambda\rho} du^\lambda \wedge du^\rho\right) = \Gamma^\alpha_{\mu\eta} R^\nu_{\alpha\lambda\rho}\left(du^\eta \wedge du^\lambda \wedge du^\rho\right) - \Gamma^\nu_{\beta\eta} R^\beta_{\mu\lambda\rho}\left(du^\lambda \wedge du^\rho \wedge du^\eta\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial u^\eta} R^\nu_{\mu\lambda\rho} du^\eta \wedge du^\lambda \wedge du^\rho = \left(\Gamma^\alpha_{\mu\eta} R^\nu_{\alpha\lambda\rho} - \Gamma^\nu_{\beta\eta} R^\beta_{\mu\lambda\rho}\right) du^\eta \wedge du^\lambda \wedge du^\rho$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial u^\eta} R^\nu_{\mu\lambda\rho} = \Gamma^\alpha_{\mu\eta} R^\nu_{\alpha\lambda\rho} - \Gamma^\nu_{\beta\eta} R^\beta_{\mu\lambda\rho}$$

Por outro lado, aplicando (4.2), temos

$$R^\nu_{\mu\lambda\rho;\eta} = \frac{\partial}{\partial u^\eta} R^\nu_{\mu\lambda\rho} - \Gamma^\alpha_{\mu\eta} R^\nu_{\alpha\lambda\rho} - \Gamma^\alpha_{\lambda\eta} R^\nu_{\mu\alpha\rho} - \Gamma^\alpha_{\rho\eta} R^\nu_{\mu\lambda\alpha} + \Gamma^\nu_{\beta\eta} R^\beta_{\mu\lambda\rho}$$

Comparando as duas últimas expressões, obtemos

$$R^\nu_{\mu\lambda\rho;\eta} = -\Gamma^\alpha_{\lambda\eta} R^\nu_{\mu\alpha\rho} - \Gamma^\alpha_{\rho\eta} R^\nu_{\mu\lambda\alpha} \tag{4.9}$$

Notemos agora que

$$\begin{aligned}
& R^\nu_{\mu\lambda\rho;\eta} du^\lambda \wedge du^\rho \wedge du^\eta \\
&= -\Gamma^\alpha_{\lambda\eta} R^\nu_{\mu\alpha\rho} du^\lambda \wedge du^\rho \wedge du^\eta - \Gamma^\alpha_{\rho\eta} R^\nu_{\mu\lambda\alpha} du^\lambda \wedge du^\rho \wedge du^\eta \\
& \left(\begin{array}{c} \text{permutação par} \\ du^\lambda \wedge du^\rho \wedge du^\eta \mapsto du^\eta \wedge du^\lambda \wedge du^\rho \end{array} \right) \\
&= -\Gamma^\alpha_{\lambda\eta} R^\nu_{\mu\alpha\rho} du^\lambda \wedge du^\rho \wedge du^\eta - \Gamma^\alpha_{\rho\eta} R^\nu_{\mu\lambda\alpha} du^\rho \wedge du^\lambda \wedge du^\eta \\
& ((3.25) \text{ e } (4.6)) \\
&= -\Gamma^\alpha_{\lambda\eta} R^\nu_{\mu\alpha\rho} du^\lambda \wedge du^\rho \wedge du^\eta + \Gamma^\alpha_{\eta\rho} R^\nu_{\mu\alpha\lambda} du^\eta \wedge du^\lambda \wedge du^\rho \\
& \left(\begin{array}{c} \text{mudança dos nomes dos índices dos} \\ \text{somatórios implícitos na segunda parcela} \end{array} \right) \\
&= -\Gamma^\alpha_{\lambda\eta} R^\nu_{\mu\alpha\rho} du^\lambda \wedge du^\rho \wedge du^\eta + \Gamma^\alpha_{\lambda\eta} R^\nu_{\mu\alpha\rho} du^\lambda \wedge du^\rho \wedge du^\eta = 0,
\end{aligned}$$

i.e., que

$$R^\nu_{\mu\lambda\rho;\eta} du^\lambda \wedge du^\rho \wedge du^\eta = 0.$$

Tomando a soma dos termos (todos nulos) correspondentes às permutações pares da tripla (λ, ρ, η), temos

$$R^\nu_{\mu\lambda\rho;\eta} du^\lambda \wedge du^\rho \wedge du^\eta + R^\nu_{\mu\eta\lambda;\rho} du^\eta \wedge du^\lambda \wedge du^\rho + R^\nu_{\mu\rho\eta;\lambda} du^\rho \wedge du^\eta \wedge du^\lambda = 0,$$

i.e.,

$$\left(R^\nu_{\mu\lambda\rho;\eta} + R^\nu_{\mu\eta\lambda;\rho} + R^\nu_{\mu\rho\eta;\lambda} \right) du^\lambda \wedge du^\rho \wedge du^\eta = 0,$$

donde segue a tese.

Em suma, temos a seguinte

Proposição 81 (Identidade de Bianchi) *Sejam ∇ uma conexão afim* ***livre de torção*** *na variedade M e R seu tensor de curvatura, expresso num certo sistema de coordenadas $\left(U, u^1, \cdots, u^m\right)$ de M como*

$$R|U = \frac{1}{2} R^\nu_{\mu\lambda\rho} \left(du^\lambda \wedge du^\rho \right) \otimes du^\mu \otimes \frac{\partial}{\partial u^\nu},$$

e cuja diferencial absoluta se escreve localmente como

$$(\nabla R)|U = \frac{1}{2} R^\nu_{\mu\lambda\rho;\eta} du^\eta \otimes \left(du^\lambda \wedge du^\rho \right) \otimes du^\mu \otimes \frac{\partial}{\partial u^\nu}.$$

Vale a identidade

$$R^\nu_{\mu\lambda\rho;\eta} + R^\nu_{\mu\rho\eta;\lambda} + R^\nu_{\mu\eta\lambda;\rho} = 0$$

4.4 Geometria pseudo-riemanniana

Definição 82 *Uma* estrutura pseudo-riemanniana *numa variedade M é uma estrutura bilinear não-degenerada simétrica*

$$g \in \mathfrak{T}_2^0(M) = \Gamma\left(T_2^0(TM)\right)$$

no fibrado tangente $TM \to M$. Uma tal campo tensorial g é dito um tensor pseudométrico *em M. Se g é uma estrutura pseudo-riemanniana em M, dizemos que o par (M, g) é uma* variedade pseudo-riemanniana*.*

Uma estrutura pseudo-riemanniana positiva definida[3] *g em M é dita uma* estrutura riemanniana *em M. Nesse caso, dizemos que g é o* tensor métrico *da* variedade riemanniana *(M, g).*

Exemplo 83 *O* tensor métrico euclideano *do espaço $\mathbb{R}^n$ é dado pela matriz identidade de ordem n:*

$$\delta = \delta_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$$

Mais geralmente, qualquer matriz simétrica não-degenerada $\mathbf{g} = (g_{ij})_{n\times n}$ fornece um tensor pseudométrico para $\mathbb{R}^n$ via

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu.$$

Um caso especial muito importante em Física[4] *é o* tensor pseudométrico de Minkowski *η em $\mathbb{R}^4$, dado pela matriz*

$$\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 84 *Toda superfície $k-$dimensional S mergulhada no espaço $\mathbb{R}^n$ é uma variedade riemanniana, com tensor métrico g^S dado pela "restrição" do tensor euclideano à subvariedade em questão. Mais geralmente, toda subvariedade S de uma variedade riemanniana (M, g) é ainda uma variedade riemanniana com tensor métrico dado pela "restrição" do tensor g a S.*

[3] Dizemos que $g \in \mathfrak{T}_0^2(M)$ é positivo definido quando satisfaz

$$X \in T_x M,\ X \neq 0 \Rightarrow g(x)(X, X) > 0$$

para todo $x \in M$.

Uma formulação equivalente desta condição é que a matriz simétrica $\mathbf{g}_U = (g_{ij})$ das componentes locais do tensor g sobre $U \subset M$ possua n autovalores positivos (possivelmente não todos distintos).

[4] Na Teoria da Relatividade einsteiniana, este tensor determina a estrutura causal do espaço tempo na ausência de gravitação.

O que aqui queremos significar pelo termo "restrição", é o seguinte conceito: dado $t \in \mathfrak{T}_2^0(M)$, temos, para cada $x \in M$, uma aplicação bilinear

$$t(x) : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$$

A fibra tangente T_xS da subvariedade S sobre o ponto $x \in S$ pode ser encarada naturalmente como um subespaço vetorial de T_xM. O tensor restrito $t^S \in \mathfrak{T}_2^0(S)$ é aquele definido para cada $x \in S$ por

$$t^S(x) : \begin{array}{ccc} T_xS \times T_xS & \to & \mathbb{R} \\ (X,Y) & \mapsto & t^S(x)(X,Y) \end{array},$$

com

$$t^S(x)(X,Y) = t(x)(X,Y)$$

Devemos então mostrar que se g é um tensor métrico em M, então g^S é um tensor métrico em $S \subset M$. A simetria e a positividade definida são óbvias. Resta mostrar a não-degenerescência: devemos mostrar que

$$g^S(x)(X,Y) = 0 \ \forall Y \in T_xS \Rightarrow X = 0 \text{ em } T_xS.$$

Mas isso decorre da positividade definida, pois

$$g^S(x)(X,Y) = 0 \ \forall Y \in T_xS \Rightarrow g^S(x)(X,X) = 0 \Rightarrow X = 0 \text{ em } T_xS.$$

Exemplo 85 ***Não é verdade*** *que toda subvariedade S de uma variedade pseudo-riemanniana (M,g) é ainda uma subvariedade pseudo-riemanniana (S, g^S). Como contra exemplo, apresentamos o caso $M = \mathbb{R}^2$, $S = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{R}\}$ com tensor pseudométrico*

$$g = dx \otimes dx - dy \otimes dy$$

É fácil ver que $g^S \equiv 0$.

A proposição 58 acima nos diz que toda variedade com topologia Hausdorff de base enumerável admite estruturas pseudo-riemannianas, algumas das quais riemannianas.

Definição 86 *Uma conexão afim ∇ de uma variedade (pseudo-)riemanniana (M,g) é dita uma* conexão (pseudo-)riemanniana *quando preserva a estrutura (pseudo-)riemanniana, i.e., quando vale $\nabla g = 0$.*

Dada uma variedade pseudo-riemanniana, sempre se pode obter uma conexão pseudo-riemanniana com torção escolhida arbitrariamente. Mais precisamente, temos a

Proposição 87 *Sejam (M,g) uma variedade pseudo-riemanniana e $T \in \Omega^2(M) \otimes \mathfrak{X}(M)$ um tensor $2-$covariante e $1-$contravariante totalmente antissimétrico na parte covariante. Então, existe uma única conexão pseudo-riemanniana ∇ em (M,g) cujo tensor de torção é T.*

Prova. Seja $\left(U, u^1, \cdots, u^m\right)$ um sistema de coordenadas locais sobre M. Podemos escrever

$$T|U = T^\lambda_{\mu\nu} du^\mu \otimes du^\nu \otimes \frac{\partial}{\partial u^\lambda},$$

onde as funções $T^\lambda_{\mu\nu}$ são antissimétricas no par de índices covariantes (μ, ν), i.e., tem-se $T^\lambda_{\mu\nu} = -T^\lambda_{\nu\mu}$.

Queremos obter uma conexão ∇ em M tal que seus símbolos de Christoffel $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ satisfaçam às condições

$$T^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} = 2\Gamma^\lambda_{[\mu\nu]} \tag{4.10}$$

e

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial u^\lambda} = g_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\mu\lambda} + g_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\nu\lambda} \tag{4.11}$$

A última equação é a forma local da equação $\nabla g = 0$, obtida fazendo $b = g$ em (3.31). Escrevendo três cópias da equação (4.11), uma para cada permutação par da tripla (λ, μ, ν), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial u^\lambda} &= g_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\mu\lambda} + g_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\nu\lambda} \\
\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial u^\nu} &= g_{\rho\mu}\Gamma^\rho_{\lambda\nu} + g_{\lambda\rho}\Gamma^\rho_{\mu\nu} \\
\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial u^\mu} &= g_{\rho\lambda}\Gamma^\rho_{\nu\mu} + g_{\nu\rho}\Gamma^\rho_{\lambda\mu}
\end{aligned}$$

Somando as duas primeiras, subtraindo a última, e explorando a simetria das funções $g_{\mu\nu}$ nos seus índices covariantes (μ, ν), obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial u^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial u^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial u^\mu} \\
&= g_{\rho\nu}\left(\Gamma^\rho_{\mu\lambda} - \Gamma^\rho_{\lambda\mu}\right) + g_{\mu\rho}\left(\Gamma^\rho_{\nu\lambda} + \Gamma^\rho_{\lambda\nu}\right) + g_{\lambda\rho}\left(\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\nu\mu}\right) \\
&= 2\left(g_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{[\mu\lambda]} + g_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{(\nu\lambda)} + g_{\lambda\rho}\Gamma^\rho_{[\mu\nu]}\right) \\
&= g_{\rho\nu}T^\rho_{\mu\lambda} + g_{\lambda\rho}T^\rho_{\mu\nu} + 2g_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{(\nu\lambda)}
\end{aligned}$$

onde

$$\Gamma^\lambda_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \Gamma^\lambda_{\nu\mu}\right)$$

é a simetrização de $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ com relação ao par de índices (μ, ν). Resolvendo para $\Gamma^\rho_{(\nu\lambda)}$, obtemos

$$\Gamma^\rho_{(\nu\lambda)} = \frac{1}{2}g^{\rho\mu}\left[\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial u^\lambda} - g_{\lambda\theta}T^\theta_{\mu\nu}\right) + \left(\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial u^\nu} - g_{\nu\theta}T^\theta_{\mu\lambda}\right) - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial u^\mu}\right]$$

Colocando $g^{\rho\mu}$ em evidência, podemos escrever também

$$\Gamma^\rho_{[\nu\lambda]} = \frac{1}{2}T^\rho_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}g^{\rho\mu}g_{\mu\theta}T^\theta_{\nu\lambda}.$$

Ora, como

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} &= \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} + \left(\frac{1}{2}\Gamma^{\rho}_{\lambda\nu} - \frac{1}{2}\Gamma^{\rho}_{\lambda\nu}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} + \Gamma^{\rho}_{\lambda\nu}\right) + \frac{1}{2}\left(\Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} - \Gamma^{\rho}_{\lambda\nu}\right) \\
&= \Gamma^{\rho}_{(\nu\lambda)} + \Gamma^{\rho}_{[\nu\lambda]},
\end{aligned}$$

temos então

$$\Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\rho\mu} \left[\begin{array}{l} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial u^{\lambda}} - g_{\lambda\theta} T^{\theta}_{\mu\nu}\right) \\ + \left(\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial u^{\nu}} - g_{\nu\theta} T^{\theta}_{\mu\lambda}\right) \\ - \left(\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial u^{\mu}} - g_{\mu\theta} T^{\theta}_{\nu\lambda}\right) \end{array} \right] \tag{4.12}$$

Claramente, esta é a única solução simultânea das equações (4.10) e (4.11). Resta saber se, de fato, as funções $\Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}$ encontradas podem ser tomadas como símbolos de Christoffel para uma conexão ∇. Como já sabemos, uma condição necessária e suficiente para isso é que valha a lei de transformação (4.7). Passamos a verificá-la.

Vejamos como se transforma cada parcela $\frac{1}{2} g^{\rho\mu}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial u^{\lambda}} - g_{\lambda\theta} T^{\theta}_{\mu\nu}\right)$. Pela regra dos índices alternados, sabemos que o termo $-g^{\rho\mu} g_{\lambda\theta} T^{\theta}_{\mu\nu}$ transforma-se como um tensor $1-$contravariante e $2-$covariante. Vejamos agora como se transforma o termo restante $g^{\rho\mu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial u^{\lambda}}$.

$$\begin{aligned}
g^{\rho\mu}\frac{\partial}{\partial u^{\lambda}} g_{\mu\nu} &= \left(\frac{\partial u^{\rho}}{\partial \bar{u}^{\alpha}}\frac{\partial u^{\mu}}{\partial \bar{u}^{\beta}}\bar{g}^{\alpha\beta}\right)\left(\frac{\partial \bar{u}^{\eta}}{\partial u^{\lambda}}\frac{\partial}{\partial \bar{u}^{\eta}}\right)\left(\frac{\partial \bar{u}^{\gamma}}{\partial u^{\mu}}\frac{\partial \bar{u}^{\delta}}{\partial u^{\nu}}\bar{g}_{\gamma\delta}\right) \\
&= \frac{\partial u^{\rho}}{\partial \bar{u}^{\alpha}}\frac{\partial \bar{u}^{\eta}}{\partial u^{\lambda}}\underbrace{\frac{\partial u^{\mu}}{\partial \bar{u}^{\beta}}\frac{\partial \bar{u}^{\gamma}}{\partial u^{\mu}}}_{\delta^{\gamma}_{\beta}}\frac{\partial \bar{u}^{\delta}}{\partial u^{\nu}}\bar{g}^{\alpha\beta}\frac{\partial \bar{g}_{\gamma\delta}}{\partial \bar{u}^{\eta}} \\
&\quad + \frac{\partial u^{\rho}}{\partial \bar{u}^{\alpha}}\underbrace{\frac{\partial u^{\mu}}{\partial \bar{u}^{\beta}}\frac{\partial \bar{u}^{\gamma}}{\partial u^{\mu}}}_{\delta^{\gamma}_{\beta}}\bar{g}^{\alpha\beta}\bar{g}_{\gamma\delta}\frac{\partial^2 \bar{u}^{\delta}}{\partial u^{\lambda}\partial u^{\nu}} \\
&\quad + \underbrace{\frac{\partial u^{\rho}}{\partial \bar{u}^{\alpha}}\frac{\partial u^{\mu}}{\partial \bar{u}^{\beta}}\bar{g}^{\alpha\beta}}_{g^{\rho\mu}}\underbrace{\frac{\partial \bar{u}^{\delta}}{\partial u^{\nu}}\bar{g}_{\gamma\delta}}_{\frac{\partial u^{\theta}}{\partial \bar{u}^{\gamma}} g_{\theta\nu}}\frac{\partial^2 \bar{u}^{\gamma}}{\partial u^{\lambda}\partial u^{\mu}} \\
&= \frac{\partial u^{\rho}}{\partial \bar{u}^{\alpha}}\frac{\partial \bar{u}^{\eta}}{\partial u^{\lambda}}\frac{\partial \bar{u}^{\delta}}{\partial u^{\nu}}\left(\bar{g}^{\alpha\beta}\frac{\partial \bar{g}_{\beta\delta}}{\partial \bar{u}^{\eta}}\right) \\
&\quad + \frac{\partial u^{\rho}}{\partial \bar{u}^{\alpha}}\underbrace{\bar{g}^{\alpha\beta}\bar{g}_{\beta\delta}}_{\delta^{\alpha}_{\delta}}\frac{\partial^2 \bar{u}^{\delta}}{\partial u^{\lambda}\partial u^{\nu}} + g^{\rho\mu} g_{\theta\nu}\frac{\partial u^{\theta}}{\partial \bar{u}^{\gamma}}\frac{\partial^2 \bar{u}^{\gamma}}{\partial u^{\lambda}\partial u^{\mu}},
\end{aligned}$$

ou seja

$$g^{\rho\mu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial u^{\lambda}} = \frac{\partial u^{\rho}}{\partial \bar{u}^{\alpha}}\frac{\partial \bar{u}^{\eta}}{\partial u^{\lambda}}\frac{\partial \bar{u}^{\delta}}{\partial u^{\nu}}\left(\bar{g}^{\alpha\beta}\frac{\partial \bar{g}_{\beta\delta}}{\partial \bar{u}^{\eta}}\right)$$

$$+\frac{\partial u^{\rho}}{\partial \bar{u}^{\alpha}}\frac{\partial^2 \bar{u}^{\alpha}}{\partial u^{\lambda}\partial u^{\nu}} + g^{\rho\mu}g_{\theta\nu}\frac{\partial u^{\theta}}{\partial \bar{u}^{\gamma}}\frac{\partial^2 \bar{u}^{\gamma}}{\partial u^{\lambda}\partial u^{\mu}}$$

Fosse pela primeira parcela apenas, $g^{\rho\mu}\frac{\partial}{\partial u^{\lambda}}g_{\mu\nu}$ transformar-se-ia como um $(2,1)$ −tensor. Mas há ainda duas parcelas: a primeira delas, altamente desejável para que valha (4.7); a restante, indesejável, mas possivelmente cancelável com aquelas provenientes das demais parcelas em (4.12). A propósito, temos para estas as leis de transformação

$$g^{\rho\mu}\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial u^{\nu}} = \frac{\partial u^{\rho}}{\partial \bar{u}^{\alpha}}\frac{\partial \bar{u}^{\eta}}{\partial u^{\nu}}\frac{\partial \bar{u}^{\delta}}{\partial u^{\lambda}}\left(\bar{g}^{\alpha\beta}\frac{\partial \bar{g}_{\beta\delta}}{\partial \bar{u}^{\eta}}\right)$$

$$+\frac{\partial u^{\rho}}{\partial \bar{u}^{\alpha}}\frac{\partial^2 \bar{u}^{\alpha}}{\partial u^{\lambda}\partial u^{\nu}} + g^{\rho\mu}g_{\theta\lambda}\frac{\partial u^{\theta}}{\partial \bar{u}^{\gamma}}\frac{\partial^2 \bar{u}^{\gamma}}{\partial u^{\nu}\partial u^{\mu}}$$

(de fato, basta permutar λ e ν na equação anterior) e

$$g^{\rho\mu}\frac{\partial}{\partial u^{\mu}}g_{\lambda\nu} = \left(\frac{\partial u^{\rho}}{\partial \bar{u}^{\alpha}}\frac{\partial u^{\mu}}{\partial \bar{u}^{\beta}}\bar{g}^{\alpha\beta}\right)\left(\frac{\partial \bar{u}^{\eta}}{\partial u^{\mu}}\frac{\partial}{\partial \bar{u}^{\eta}}\right)\left(\frac{\partial \bar{u}^{\gamma}}{\partial u^{\lambda}}\frac{\partial \bar{u}^{\delta}}{\partial u^{\nu}}\bar{g}_{\gamma\delta}\right)$$

$$= \frac{\partial u^{\rho}}{\partial \bar{u}^{\alpha}}\underbrace{\frac{\partial u^{\mu}}{\partial \bar{u}^{\beta}}\frac{\partial \bar{u}^{\eta}}{\partial u^{\mu}}}_{\delta^{\eta}_{\beta}}\frac{\partial \bar{u}^{\gamma}}{\partial u^{\lambda}}\frac{\partial \bar{u}^{\delta}}{\partial u^{\nu}}\bar{g}^{\alpha\beta}\frac{\partial \bar{g}_{\gamma\delta}}{\partial \bar{u}^{\eta}}$$

$$+\underbrace{\frac{\partial u^{\rho}}{\partial \bar{u}^{\alpha}}\frac{\partial u^{\mu}}{\partial \bar{u}^{\beta}}\bar{g}^{\alpha\beta}}_{g^{\rho\mu}}\underbrace{\frac{\partial \bar{u}^{\gamma}}{\partial u^{\lambda}}\bar{g}_{\gamma\delta}}_{\frac{\partial u^{\theta}}{\partial \bar{u}^{\delta}}g_{\theta\lambda}}\frac{\partial^2 \bar{u}^{\delta}}{\partial u^{\mu}\partial u^{\nu}}$$

$$+\underbrace{\frac{\partial u^{\rho}}{\partial \bar{u}^{\alpha}}\frac{\partial u^{\mu}}{\partial \bar{u}^{\beta}}\bar{g}^{\alpha\beta}}_{g^{\rho\mu}}\underbrace{\frac{\partial \bar{u}^{\delta}}{\partial u^{\nu}}\bar{g}_{\gamma\delta}}_{\frac{\partial u^{\theta}}{\partial \bar{u}^{\gamma}}g_{\theta\nu}}\frac{\partial^2 \bar{u}^{\gamma}}{\partial u^{\mu}\partial u^{\lambda}}$$

$$= \frac{\partial u^{\rho}}{\partial \bar{u}^{\alpha}}\frac{\partial \bar{u}^{\gamma}}{\partial u^{\lambda}}\frac{\partial \bar{u}^{\delta}}{\partial u^{\nu}}\left(\bar{g}^{\alpha\beta}\frac{\partial \bar{g}_{\gamma\delta}}{\partial \bar{u}^{\beta}}\right)$$

$$+g^{\rho\mu}g_{\theta\lambda}\frac{\partial u^{\theta}}{\partial \bar{u}^{\delta}}\frac{\partial^2 \bar{u}^{\delta}}{\partial u^{\mu}\partial u^{\nu}} + g^{\rho\mu}g_{\theta\nu}\frac{\partial u^{\theta}}{\partial \bar{u}^{\gamma}}\frac{\partial^2 \bar{u}^{\gamma}}{\partial u^{\lambda}\partial u^{\mu}},$$

ou seja

$$g^{\rho\mu}\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial u^{\mu}} = \frac{\partial u^{\rho}}{\partial \bar{u}^{\alpha}}\frac{\partial \bar{u}^{\gamma}}{\partial u^{\lambda}}\frac{\partial \bar{u}^{\delta}}{\partial u^{\nu}}\left(\bar{g}^{\alpha\beta}\frac{\partial \bar{g}_{\gamma\delta}}{\partial \bar{u}^{\beta}}\right)$$

$$+g^{\rho\mu}g_{\theta\lambda}\frac{\partial u^{\theta}}{\partial \bar{u}^{\delta}}\frac{\partial^2 \bar{u}^{\delta}}{\partial u^{\mu}\partial u^{\nu}} + g^{\rho\mu}g_{\theta\nu}\frac{\partial u^{\theta}}{\partial \bar{u}^{\gamma}}\frac{\partial^2 \bar{u}^{\gamma}}{\partial u^{\lambda}\partial u^{\mu}}.$$

Note que as duas últimas parcelas são exatamente iguais aos termos indesejados das leis de transformação anteriores. Assim, temos que

$$\Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\rho\mu} \left[\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial u^{\lambda}} - g_{\lambda\theta} T^{\theta}_{\mu\nu} \right) + \left(\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial u^{\nu}} - g_{\nu\theta} T^{\theta}_{\mu\lambda} \right) - \left(\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial u^{\mu}} - g_{\mu\theta} T^{\theta}_{\nu\lambda} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial u^{\rho}}{\partial \bar{u}^{\alpha}} \frac{\partial \bar{u}^{\eta}}{\partial u^{\lambda}} \frac{\partial \bar{u}^{\delta}}{\partial u^{\nu}} \left(\bar{g}^{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{g}_{\beta\delta}}{\partial \bar{u}^{\eta}} \right) + \frac{\partial u^{\rho}}{\partial \bar{u}^{\alpha}} \frac{\partial^2 \bar{u}^{\alpha}}{\partial u^{\lambda} \partial u^{\nu}} \\ + \frac{\partial u^{\rho}}{\partial \bar{u}^{\alpha}} \frac{\partial \bar{u}^{\eta}}{\partial u^{\lambda}} \frac{\partial \bar{u}^{\delta}}{\partial u^{\nu}} \left(\bar{g}^{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{g}_{\eta\beta}}{\partial \bar{u}^{\delta}} \right) + \frac{\partial u^{\rho}}{\partial \bar{u}^{\alpha}} \frac{\partial^2 \bar{u}^{\alpha}}{\partial u^{\lambda} \partial u^{\nu}} \\ - \frac{\partial u^{\rho}}{\partial \bar{u}^{\alpha}} \frac{\partial \bar{u}^{\eta}}{\partial u^{\lambda}} \frac{\partial \bar{u}^{\delta}}{\partial u^{\nu}} \left(\bar{g}^{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{g}_{\eta\delta}}{\partial \bar{u}^{\beta}} \right) \end{pmatrix}$$

+termos que se transformam
corretamente como campos
$(2,1) -$ tensoriais

$$= \frac{\partial u^{\rho}}{\partial \bar{u}^{\alpha}} \frac{\partial \bar{u}^{\eta}}{\partial u^{\lambda}} \frac{\partial \bar{u}^{\delta}}{\partial u^{\nu}} \left\{ \frac{1}{2} \bar{g}^{\alpha\beta} \left[\begin{array}{c} \left(\frac{\partial \bar{g}_{\beta\delta}}{\partial \bar{u}^{\eta}} - g_{\eta\theta} T^{\theta}_{\beta\delta} \right) \\ + \left(\frac{\partial \bar{g}_{\eta\beta}}{\partial \bar{u}^{\delta}} - g_{\delta\theta} T^{\theta}_{\beta\eta} \right) \\ - \left(\frac{\partial \bar{g}_{\eta\delta}}{\partial \bar{u}^{\beta}} - g_{\beta\theta} T^{\theta}_{\eta\delta} \right) \end{array} \right] \right\}$$

$$+ \frac{\partial u^{\rho}}{\partial \bar{u}^{\alpha}} \frac{\partial^2 \bar{u}^{\alpha}}{\partial u^{\lambda} \partial u^{\nu}}$$

$$= \frac{\partial u^{\rho}}{\partial \bar{u}^{\alpha}} \frac{\partial \bar{u}^{\eta}}{\partial u^{\lambda}} \frac{\partial \bar{u}^{\delta}}{\partial u^{\nu}} \bar{\Gamma}^{\alpha}_{\eta\delta} + \frac{\partial u^{\rho}}{\partial \bar{u}^{\alpha}} \frac{\partial^2 \bar{u}^{\alpha}}{\partial u^{\lambda} \partial u^{\nu}},$$

o que nos dá exatamente a eq. (4.7):

$$\Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} = \frac{\partial u^{\rho}}{\partial \bar{u}^{\alpha}} \frac{\partial \bar{u}^{\eta}}{\partial u^{\lambda}} \frac{\partial \bar{u}^{\delta}}{\partial u^{\nu}} \bar{\Gamma}^{\alpha}_{\eta\delta} + \frac{\partial u^{\rho}}{\partial \bar{u}^{\alpha}} \frac{\partial^2 \bar{u}^{\alpha}}{\partial u^{\lambda} \partial u^{\nu}}$$

Isso conclui a prova. ■

Corolário 88 (Teorema de Levi-Civita) *Numa variedade pseudo-riemanniana, existe uma única conexão pseudo-riemanniana livre de torção.*

Prova. Resulta da proposição anterior tomando a seção nula $T = 0$ em $\Omega^2(M) \otimes \mathfrak{X}(M)$. ■

À única conexão pseudo-riemanniana livre de torção em (M, g) dada pelo corolário anterior chamamos *a conexão de Levi-Civita* de (M, g). Seus símbolos de Christoffel $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ são dados, em função das coordenadas locais $g_{\mu\nu}$ do tensor pseudométrico, por

$$\Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\rho\mu} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial u^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial u^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial u^{\mu}} \right) \qquad (4.13)$$

Exemplo 89 (conexão euclideana livre de torção) *Há uma única conexão de Levi-Civita em $\mathbb{R}^n$ para todas as estruturas pseudo-riemannianas introduzidas no exemplo 83, com tensores pseudo-métricos constantes. Com efeito, em vista da eq. (4.13), todos os símbolos de Christoffel de uma tal conexão são nulos. Esta conexão, que chamaremos* conexão euclideana livre de torção, *é dada por*

$$\nabla : \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \to \Omega(\mathbb{R}^n) \otimes \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$$

$$\nabla X = dX^\mu \otimes \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu}\left(du^\nu \otimes \frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)$$

para todo $X = X^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$. Como valem o isomorfismo de $C^\infty(\mathbb{R}^n)-$módulos

$$\begin{aligned}
\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) &= span\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right) \\
&\simeq \underbrace{C^\infty(\mathbb{R}^n) \oplus \cdots \oplus C^\infty(\mathbb{R}^n)}_{n\ parcelas} \\
&\simeq (C^\infty(\mathbb{R}^n))^n,
\end{aligned}$$

temos, pelas proposições 9 e 10, que também valem os isomorfismos

$$\begin{aligned}
\Omega(\mathbb{R}^n) \otimes \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) &\simeq \Omega(\mathbb{R}^n) \otimes (C^\infty(\mathbb{R}^n) \oplus \cdots \oplus C^\infty(\mathbb{R}^n)) \\
&\simeq (\Omega(\mathbb{R}^n) \otimes C^\infty(\mathbb{R}^n)) \oplus \cdots \oplus (\Omega(\mathbb{R}^n) \otimes C^\infty(\mathbb{R}^n)) \\
&\simeq \Omega(\mathbb{R}^n) \oplus \cdots \oplus \Omega(\mathbb{R}^n) \simeq (\Omega(\mathbb{R}^n))^n
\end{aligned}$$

donde segue que podemos escrever a conexão euclideana livre de torção como

$$\nabla : (C^\infty(\mathbb{R}^n))^n \to (\Omega(\mathbb{R}^n))^n$$

$$\nabla\left(X^1, \cdots, X^n\right) = \left(dX^1, \cdots, dX^n\right) \in (\Omega(\mathbb{R}^n))^n \tag{4.14}$$

Exemplo 90 (conexão riemanniana numa superfície) *Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície $k-$dimensional mergulhada em $\mathbb{R}^n$. Vimos no exemplo 84 que S herda a estrutura riemanniana de $\mathbb{R}^n$ determinada pelo tensor métrico euclideano constante*

$$\delta = \delta_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$$

Usando a conexão euclideana livre de torção do $\mathbb{R}^n$ podemos dar uma caracterização igualmente simples e intuitiva para a conexão de Levi-Civita ∇^S de S. Trata-se de, em cada ponto $x \in S$, "projetar" a conexão euclideana ∇ do exemplo anterior ao espaço tangente a S em x, T_xS, que pode ser encarado naturalmente como subespaço vetorial $k-$dimensional de $T_x\mathbb{R}^n$: definimos

$$\nabla^S : \mathfrak{X}(S) \to \Omega(S) \otimes \mathfrak{X}(S)$$

por

$$\left(\nabla^S Y\right)(x) = dY^\mu(x) \otimes T_x\pi^S\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_x\right)$$

para todo campo vetorial $Y = Y^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \in \mathfrak{X}(S)$ *tangente a* S*, onde* $Y^1, \cdots, Y^n \in C^{\infty}(S)$*. A aplicação*

$$T_x\pi^S : T_x\mathbb{R}^n \twoheadrightarrow T_xS$$

é apenas a derivada em $x \in S$ *da projeção* $\pi^S : V \subset \mathbb{R}^n \to S$ *de uma vizinhança tubular* V *de* S *em* S*. É claro da própria definição que* ∇^S *define mesmo uma conexão em* S*. Mas falta mostrar que se tem de fato* $\nabla^S\delta^S = 0$*.*

4.5 Geometria simplética

Diferentemente do caso pseudo-riemanniano tratado acima, exigiremos uma condição analítica adcional da estrutura bilinear em questão: que ela seja dada por uma forma fechada. Embora à primeira vista não seja claro o por quê dessa exigência, ela dá testemunho da história da geometria simplética, que nasceu em conexão com a Mecânica Clássica, onde a condição aparece naturalmente, e é equivalente à identidade de Jacobi para os colchetes de Poisson derivados da estrutura simplética em questão[5]. Além disso, como veremos linhas abaixo, uma estrutura bilinear antissimétrica no fibrado tangente de uma variedade admite uma conexão livre de torção que a preserve se, e somente se, for uma forma fechada.

Definição 91 *Uma estrutura simplética numa variedade* M *é uma estrutura bilinear não-degenerada antissimétrica no fibrado tangente* $TM \to M$*, dada por uma 2-forma*

$$\omega \in \Omega^2(M)$$

fechada, i.e., tal que

$$d\omega = 0.$$

Uma tal forma ω *é dita uma* forma simplética *em* M*. Se* ω *é uma forma simplética em* M*, dizemos que o par* (M, ω) *é uma* variedade simplética*.*

Exemplo 92 *Dado* $n \in \mathbb{N}$*, o espaço* $\mathbb{R}^{2n}$ *admite uma estrutura simplética natural, dada por*

$$\omega = dx^1 \wedge dy^1 + \cdots + dx^n \wedge dy^n,$$

onde nomeamos as coordenadas de $\mathbb{R}^{2n}$ *como* $x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^n$*.*

[5] Ver capítulo (lecture) 4 de [Cannas].

Exemplo 93 *Toda variedade bidimensional orientável admite estrutura simplética. Com efeito, sua forma de volume ω é, ela mesma, uma forma simplética. Em particular, toda superfície orientável mergulhada no $\mathbb{R}^3$ admite estrutura simplética. Por exemplo, a esfera $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ possui estrutura simplética.*

Exemplo 94 (estrutura simplética do fibrado cotangente) *Seja M uma variedade. Seu fibrado cotangente $(T^*M, M, \bar{\pi})$ admite uma estrutura simplética dada pela expressão local invariante*

$$\omega| \left(\bar{\pi}^{-1}(U)\right) = du^\mu \wedge dp_\mu,$$

onde $\left(U, u^1, \cdots, u^m\right)$ é um sistema de coordenadas locais para M e

$$\left(\bar{\pi}^{-1}(U), u^1, \cdots, u^m, p_1, \cdots, p_m\right)$$

é o sistema de coordenadas correspondente em T^*M, construído segundo o exemplo 26 acima. Para a invariância, basta notar que $du^\mu \wedge dp_\mu$ é a derivada exterior de $-p_\mu du^\mu$. Esta é uma 1-forma globalmente definida, como se infere por mera inspeção usando a regra dos índices alternados.

A pergunta natural aqui é: e por que não o fibrado tangente de M? É certo que a forma local sobre U

$$v^\mu du^\mu$$

fornece, por diferenciação exterior, uma forma simplética em $\pi^{-1}(U)$. Mas ocorre que, em geral, aquelas formas locais não se colam adequadamente para formar um objeto global. Com efeito, temos as leis de transformação

$$du^\mu = \frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^\nu} d\bar{u}^\nu$$

e

$$v^\mu = \frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^\lambda} \bar{v}^\lambda,$$

donde segue que

$$v^\mu du^\mu = \frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^\nu} \frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^\lambda} \bar{v}^\lambda d\bar{u}^\nu,$$

e não é claro que tenhamos

$$\frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^\nu} \frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^\lambda} = \delta_{\nu\lambda}.$$

De fato, isso significaria que a matrizes jacobianas das mudanças de coordenadas são ortogonais, o que nem sempre se verifica.

Não obstante, se M possui topologia Hausdorff de base enumerável, o isomorfismo ψ de fibrados entre TM e T^*M dado pelo corolário 62 (que, em particular, é um difeomorfismo) permite fazer o pullback da forma simplética canônica ω de T^*M para TM. A 2-forma $\psi^*\omega \in \Omega^2(TM)$ é obviamente não-degenerada, e é fechada porque a diferenciação exterior comuta com pull-backs. Portanto, $(TM, \psi^*\omega)$ é uma variedade simplética.

Já sabemos, da proposição 58 via proposição 57, que uma obstrução à existência de uma estrutura simplética numa variedade M é a imparidade de sua dimensão. Ou por outra: só possuem formas simpléticas variedades com dimensão par. Mas nem toda variedade de dimensão par possui estrutura simplética: há ainda obstruções de natureza topológica. Vejamos do que se trata.

Proposição 95 *Variedades não-orientáveis não admitem estruturas simpléticas.*

Prova. Isso decorre do fato de que toda forma simplética ω numa variedade M de dimensão $2n$ tem $n-$potência alternada $\wedge^n\omega \in \Omega^{2n}(M)$ que não se anula em nenhum ponto de M, servindo portanto de forma de volume e fornecendo uma orientação para M. De fato, seja $\left(U, x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^n\right)$ uma vizinhança coordenada de M e escreva a expressão local de ω como

$$\omega|U = \omega_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dy^\nu$$

e tome sua $n-$ésima potência, lembrando que

$$(\wedge^n\omega)|U = \wedge^n(\omega|U).$$

Desse modo, obtemos

$$(\wedge^n\omega)|U = \sum_{\sigma,\rho\in S_n} \omega_{\sigma(1)\rho(1)} \cdots \omega_{\sigma(n)\rho(n)} \left(dx^{\sigma(1)} \wedge dy^{\rho(1)} \wedge \cdots \wedge dx^{\sigma(n)} \wedge dy^{\rho(n)}\right)$$

$$= \sum_{\sigma,\rho\in S_n} \omega_{\sigma(1)\rho(1)} \cdots \omega_{\sigma(n)\rho(n)} \left(dx^{\sigma(1)} \wedge dy^{\rho(1)} \wedge \cdots \wedge dx^{\sigma(n)} \wedge dy^{\rho(n)}\right)$$

$$= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \left(\sum_{\sigma,\rho\in S_n} sgn\ \sigma sgn\ \rho\ \omega_{\sigma(1)\rho(1)} \cdots \omega_{\sigma(n)\rho(n)}\right) \left(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \wedge dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n\right)$$

Ora,

$$\sum_{\sigma,\rho\in S_n} sgn\ \sigma sgn\ \rho\ \omega_{\sigma(1)\rho(1)} \cdots \omega_{\sigma(n)\rho(n)}$$

$$= \sum_{\rho\in S_n} \sum_{\sigma\in S_n} sgn\ \left(\sigma\rho^{-1}\right)\ \omega_{\sigma\rho^{-1}(\rho(1))\rho(1)} \cdots \omega_{\sigma\rho^{-1}(\rho(n))\rho(n)}$$

$$= \sum_{\rho\in S_n} \left(\sum_{\tau\in S_n} sgn\ \tau\ \omega_{\tau(\rho(1))\rho(1)} \cdots \omega_{\tau(\rho(n))\rho(n)}\right)$$

$$= \sum_{\rho\in S_n} \det(\omega_{ij}) = n! \det(\omega_{ij}) \neq 0,$$

pois ω é não-degenerada. Logo,

$$(\wedge^n\omega)|U = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\ n! \det(\omega_{ij})\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \wedge dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n$$

não se anula em nenhum ponto $x \in U$. Assim, vemos que $\wedge^n\omega$ é uma forma de volume para M. ■

Exemplo 96 *A faixa de Möebius*[6] $\mathcal{M}$ *não admite estrutura simplética.*

Proposição 97 *Uma condição necessária para que uma variedade compacta* M *admita estrutura simplética é que seu segundo grupo de cohomologia de Rham* $H^2_{dR}(M)$ *seja não-trivial.*

Prova. Seja (M, ω) uma variedade simplética e suponha que ω seja exata, i.e., que exista $\eta \in \Omega(M)$ tal que $\omega = d\eta$. Dito de outra forma, a classe de cohomologia de Rham de ω é trivial. Vimos na prova da proposição anterior que a $n-$ésima potência exterior de ω (onde $\dim M = 2n$) é uma forma de volume para M. A saber,

$$\begin{aligned} \wedge^n \omega &= \wedge^n d\eta = \underbrace{d\eta \wedge \cdots \wedge d\eta}_{n \text{ fatores}} \\ &= d\left(\eta \wedge \underbrace{d\eta \wedge \cdots \wedge d\eta}_{n-1 \text{ fatores}}\right). \end{aligned}$$

Como M é compacta, o teorema de Stokes nos dá

$$\begin{aligned} \int_M \wedge^n \omega &= \int_M d(\eta \wedge d\eta \wedge \cdots \wedge d\eta) \\ &= \int_{\partial M = \emptyset} \eta \wedge d\eta \wedge \cdots \wedge d\eta = 0, \end{aligned}$$

o que é absurdo pois $\wedge^n \omega$ não se anula jamais. ■

Corolário 98 *Uma esfera* $m-$*dimensional* $\mathbb{S}^m$ *pode ser munida de uma estrutura simplética se, e somente se,* $m = 2$.

Um resultado clássico em topologia simplética, que citaremos sem prova[7], é o seguinte

Teorema 99 (Darboux) *Seja* (M, ω) *uma variedade simplética de dimensão* $2n$ *e* $x \in M$. *Existe um sistema de coordenadas locais* $\left(U, x^1, \cdots, x^n, y_1, \cdots, y_n\right)$ *em torno de* x *tal que*

$$\omega | U = dx^\mu \wedge dy_\mu.$$

Um sistema de coordenadas do tipo dado pelo teorema acima é dito uma *carta de Darboux* para a variedade simplética (M, ω). Evidentemente, pode-se formar um atlas $\mathcal{U}$ para M com tais sistemas de coordenadas, o qual será chamado um *atlas de Darboux* para (M, ω). Lançaremos mão de um atlas de Darboux com alguma freqüência no restante deste capítulo e na parte III desta dissertação.

[6] Ver exemplo 20.11 de [Tu].

[7] Referimos o leitor interessado à seção 1.9 de [Cannas da Silva].

Definição 100 *Uma conexão afim ∇ de uma variedade simplética (M,ω) é dita uma* conexão simplética *quando preserva a estrutura simplética, i.e., quando vale $\nabla\omega = 0$.*

Proposição 101 *Toda variedade simplética (M,ω) com topologia Hausdorff de base enumerável admite uma conexão simplética ∇ livre de torção.*

Prova. Seja $\mathcal{U}$ um atlas de Darboux para (M,ω). Dado um sistema de coordenadas $\left(U, \varphi_U = \left(u^1, \cdots, u^{2n}\right)\right)$ neste atlas, defina uma conexão afim trivial ∇^U no aberto $\varphi_U(U)$ de $\mathbb{R}^{2n}$ pela fórmula usual

$$\nabla^U X = dX^\mu \otimes \frac{\partial}{\partial u^\mu}$$

Esta conexão, nota-se, possui símbolos de Christoffel todos nulos e preserva a forma simplética canônica $\left(\varphi_U^{-1}\right)^* \omega = \omega_{\mu\nu} du^\mu \wedge du^\nu$, pois esta tem coordenadas locais $\omega_{\mu\nu} \in \mathbb{R}$ constantes. Trata-se, portanto, de uma conexão simplética livre de torção. A idéia é fazer o *pull-back* de ∇^U por φ_U e colar as conexões locais assim obtidas por meio de uma partição da unidade[8] $\{\rho_U\}_{U \subset \mathcal{U}}$ subordinada a $\mathcal{U}$. De fato, defina

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \to \Omega(M) \otimes \mathfrak{X}(M)$$

por

$$\nabla_X Y\ (x) = \sum_{\substack{U \in \mathcal{U} \\ x \in U}} \rho_U(x)\, \varphi_{U,*}^{-1} \left(\nabla^U_{\varphi_{U,*}(Y|U)} \varphi_{U,*}(X|U)\right)(x),$$

para todo $x \in M$ e todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, onde $\varphi_{U,*}$ responde pela aplicação de *push-forward* de campos vetoriais. Verifica-se sem dificuldades que ∇, assim definida, é mesmo uma conexão em M. Que ela preserva a forma simplética é inteiramente óbvio. Falta ver que tem torção nula. Para isso, lancemos mão da proposição 78 e escrevamos

$$\mathcal{T}(X,Y)(x) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

$$= \sum_{\substack{U \in \mathcal{U} \\ x \in U}} \rho_U(x)\, \varphi_{U,*}^{-1} \left(\nabla^U_{\varphi_{U,*}(Y|U)} \varphi_{U,*}(X|U) - \nabla^U_{\varphi_{U,*}(X|U)} \varphi_{U,*}(Y|U)\right)(x) - [X,Y](x)$$

$$= \sum_{\substack{U \in \mathcal{U} \\ x \in U}} \rho_U(x)\, \varphi_{U,*}^{-1} \left(\begin{array}{c} \mathcal{T}^U\left(\varphi_{U,*}(X|U), \varphi_{U,*}(Y|U)\right) \\ + \left[\varphi_{U,*}(X|U), \varphi_{U,*}(Y|U)\right] \end{array}\right)(x) - [X,Y](x),$$

[8] É aqui que entra a hipótese sobre a topologia de M.

onde $\mathcal{T}^U$ representa a torção da conexão ∇^U, que sabemos ser nula. Portanto, e como o *push-forward* preserva o colchete de Lie de vetores, temos

$$\mathcal{T}(X,Y)(x) = \underbrace{\sum_{\substack{U\in\mathcal{U}\\ x\in U}} \rho_U(x)}_{1} \underbrace{[X|U, Y|U](x)}_{[X,Y](x)} - [X,Y] = 0$$

■

Diferentemente do que ocorre com variedades pseudo-riemannianas, existem, em geral, várias conexões livres de torção que preservam a forma simplética. A proposição seguinte fornece uma parametrização delas

Proposição 102 *Dadas duas conexões simpléticas livres de torção ∇ e Δ em (M,ω), existe um tensor covariante $C \in \mathfrak{T}_3^0(M)$ totalmente simétrico tal que*

$$\nabla = \Delta + C$$

Prova. Sejam $\left(U, u^1, \cdots, u^{2n}\right)$ um sistema de coordenadas de Darboux par (M,ω) e $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ e $\gamma^\lambda_{\mu\nu}$ os símbolos de Christoffel da conexões ∇ e Δ, respectivamente, sobre U. Como essas conexões são supostas livres de torção, temos

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \quad \text{e} \quad \gamma^\lambda_{\mu\nu} = \gamma^\lambda_{\nu\mu}.$$

Como preservam ω, temos, a partir da equação (3.31)

$$\frac{\partial\omega_{\mu\nu}}{\partial u^\lambda} + \omega_{\nu\rho}\Gamma^\rho_{\mu\lambda} - \omega_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\nu\lambda} = 0$$

e

$$\frac{\partial\omega_{\mu\nu}}{\partial u^\lambda} + \omega_{\nu\rho}\gamma^\rho_{\mu\lambda} - \omega_{\mu\rho}\gamma^\rho_{\nu\lambda} = 0$$

Usando o fato de que, em coordenadas de Darboux, as componentes $\omega_{\mu\nu}$ são contantes e lançando mão do “abaixamento de ínidices” (explicado no fim da seção 2.3), podemos escrever também

$$\Gamma_{\nu\mu\lambda} = \Gamma_{\mu\nu\lambda} \quad \text{e} \quad \Gamma_{\nu\mu\lambda} = \Gamma_{\mu\nu\lambda}$$

Juntamente com a condição de isenção de torção escrita como

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu} = \Gamma_{\lambda\nu\mu} \quad \text{e} \quad \gamma_{\lambda\mu\nu} = \gamma_{\lambda\nu\mu}$$

vemos que a versão totalmente covariante dos símbolos de Christoffel das conexões ∇ e Δ são totalmente simétricos.

Já vimos na prova da proposição 73 que as diferenças entre símbolos de Christoffel correspondentes de duas conexões são componentes de um tensor globalmente definido. Essa observação, juntamente com as simetrias apontadas acima encerram a questão. ■

É trivial verificar que, dados um tensor covariante totalmente simétrico $C \in \mathfrak{T}_3^0(M)$ e uma conexão simplética livre de torção ∇ em (M,ω) a soma $\nabla + C$ fornece ainda uma conexão simplética livre de torção. Essa observação, aliada às duas proposições anteriores, dá o seguinte

Corolário 103 *Existe uma bijeção entre o conjunto das conexões sumpléticas livres de torção em uma variedade simplética* (M,ω) *e* $Pol^3(M) = \Gamma\left(\vee^3 T^* M\right)$.

Para encerrarmos esta seção, provemos uma afirmação feita em seu início, a respeito da necessidade da condição analítica imposta sobre a forma diferencial $\omega \in \Omega^2(M)$.

Proposição 104 *Existe uma conexão* ∇ *livre de torção preservando uma estrutura bilinear não-degenerada antissimétrica* $\omega \in \Omega^2(M)$ *no fibrado tangente* TM *de uma variedade* M *com topologia Hausdorff de base enumerável se, e somente se, a forma* ω *é fechada.*

Prova. Se ω for fechada, é simplética: basta tomar uma das conexões dadas pela proposição 110. Para a recíproca, basta escrever a condição de horizontalidade de ω localmente, num sistema de coordenadas $\left(U, u^1, \cdots, u^{2n}\right)$ qualquer – não necessariamente de Darboux –, como

$$\frac{\partial \omega_{\mu\nu}}{\partial u^\lambda} + \Gamma_{\nu\mu\lambda} - \Gamma_{\mu\nu\lambda} = 0$$

e mais as duas outras correspondentes a permutações simétricas da tripla $(\lambda\mu\nu)$:

$$\frac{\partial \omega_{\lambda\mu}}{\partial u^\nu} + \Gamma_{\lambda\nu\mu} - \Gamma_{\lambda\mu\nu} = 0$$

e

$$\frac{\partial \omega_{\nu\lambda}}{\partial u^\mu} + \Gamma_{\mu\lambda\nu} - \Gamma_{\nu\lambda\mu} = 0,$$

que somadas dão

$$\frac{\partial \omega_{\mu\nu}}{\partial u^\lambda} + \frac{\partial \omega_{\lambda\mu}}{\partial u^\nu} + \frac{\partial \omega_{\lambda\mu}}{\partial u^\nu} =$$
$$\Gamma_{\nu\mu\lambda} - \Gamma_{\mu\nu\lambda} + \Gamma_{\lambda\nu\mu} - \Gamma_{\lambda\mu\nu} + \Gamma_{\mu\lambda\nu} - \Gamma_{\nu\lambda\mu} = 0,$$

pois os símbolos de Christoffel de ∇ são simétricos nos seus dois últimos índices, já que supomos ∇ livre de torção. Ora, a condição $d\omega$ se escreve localmente exatamente como

$$\frac{\partial \omega_{\mu\nu}}{\partial u^\lambda} + \frac{\partial \omega_{\lambda\mu}}{\partial u^\nu} + \frac{\partial \omega_{\lambda\mu}}{\partial u^\nu} = 0$$

■

Por consistir exatamente nos dados iniciais da quantização de Fedosov de uma variedade simplética, recebeu um epônimo a tripla (M, ω, ∇), onde ∇ é uma conexão simplética e livre de torção.

Definição 105 *Seja* ∇ *uma conexão simplética livre de torção numa variedade simplética* (M,ω). *Dizemos que a tripla* (M, ω, ∇) *é uma* variedade de Fedosov.

Parte II

Uma abordagem pedestre da Cohomologia de Hochschild

"Um todo é aquilo que tem começo, meio e fim."
(Aristóteles, *Poética*, Seção I, Parte VII)

Esta segunda parte contém uma apresentação elementar da cohomologia de Hochschild, com ênfase no caso diferencial, por meio da qual se procurou remediar a relativa escassez de literatura introdutória ao tema. Por essa razão, não se limitou o autor ao essencial: o cálculo dos grupos de cohomologia de Hochschild diferencial de uma variedade vai algo além das necessidades desta dissertação. Com efeito, o leitor atento do capítulo 9 perceberá que, para fins de classificação dos produtos-estrela de uma variedade simplética, basta o conhecimento do segundo dos seus grupos de cohomologia de Hochschild, cujo cálculo explícito (e fácil) se encontra em [Bertelson-Cahen-Gutt, 1997]. A menos de referências esparsas à Parte I da presente dissertação, também este tomo é totalmente autocontido.

Capítulo 5

Definições básicas

Sejam $\mathbb{F}$ um corpo, A uma $\mathbb{F}-$álgebra, e B um $A-$bimódulo.

Nesta seção, estudaremos a cohomologia do complexo de cocadeias de Hochschild $\mathcal{C} = \{(C^p(A;B), \delta_p)\}_{p=0}^{\infty}$, dado pelas definições abaixo. Estaremos interessados principalmente no caso em que $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ e $A = B = C^\infty(M) \equiv C^\infty(M;\mathbb{C})$ é a $\mathbb{C}$-álgebra das funções suaves a valores complexos definidas numa variedade diferenciável M. Identificaremos o corpo dos números complexos com o subespaço das funções constantes em M.

Sendo p um número natural, o espaço de $p-$cocadeias de Hochschild de B sobre A é o espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$

$$C^p(A;B) \equiv \mathcal{L}_{\mathbb{F},p}(A, \cdots, A; B)$$

das aplicações $p-$lineares de A em B.

Para cada $p \in \mathbb{N}$, definimos o homomorfismo $\mathbb{F}-$linear

$$\delta_p : C^p(A;B) \longrightarrow C^{p+1}(A;B)$$

por

$$\begin{aligned} \delta_p C(a_1, \cdots, a_{p+1}) &= a_1 C(a_2, \cdots, a_{p+1}) \\ &+ \sum_{j=1}^{p} (-1)^j C\left(a_1, \cdots, \underbrace{a_j a_{j+1}}_{j-\text{ésimo argumento}}, \cdots, a_{p+1}\right) \\ &+ (-1)^{p+1} C(a_1, \cdots, a_p)\, a_{p+1}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Por exemplo, temos

$$\delta_1 C(a,b) = aC(b) - C(ab) + C(a)\, b \tag{5.2}$$

e

$$\delta_2 C(a,b,c) = aC(b,c) - C(ab,c) + C(a,bc) - C(a,b)\, c. \tag{5.3}$$

Convencionaremos também

$$C^0(A;B) \equiv B, \text{ com } \delta_0 \equiv 0.$$

O espaço dos $p-$cociclos de Hochschild é

$$Z^p(A;B) \equiv \ker \delta_p$$

e o espaço dos $p-$cobordos de Hochschild é

$$B^p(A;B) \equiv im\ \delta_{p-1}.$$

Para podermos falar em cohomologia de Hochschild, devemos mostrar que os homomorfismos δ_p constituem de fato um operador de cobordo. Ou seja, temos que provar a seguinte

Proposição 106 *O espaço dos $p-$cobordos é um subespaço vetorial do espaço dos $p-$cociclos.*

Prova. É evidente que $Z^p(A;B)$ e $B^p(A;B)$ são subespaços vetoriais do espaço das cocadeias, pois as aplicações δ são lineares.

Resta mostrar a inclusão $B^p(A;B) \subset Z^p(A;B)$, i.e., $im\ \delta_{p-1} \subset \ker \delta_p$. Ou seja, devemos verificar a igualdade

$$\delta_p \circ \delta_{p-1} = 0.$$

Podemos supor $p \in \mathbb{N}$. Então,

$$\delta_p(\delta_{p-1}C)(a_1, \cdots, a_{p+1}) = \sum_{j=0}^{p+1} D_j \quad ,$$

onde

$$D_j = \begin{cases} a_1\delta_{p-1}C(a_2, \cdots, a_{p+1}), \text{ se } j = 0 \\ (-1)^j \delta_{p-1}C(a_1, \cdots, a_j a_{j+1}, \cdots, a_{p+1}), \text{ se } j \in [p] \\ (-1)^{p+1} \delta_{p-1}C(a_1, \cdots, a_p) a_{p+1}, \text{ se } j = p+1 \end{cases} .$$

Por sua vez,

$$D_j = \sum_{k=1}^{p+1} D_{j,k} \quad ,$$

onde

$$D_{0,k} = \begin{cases} a_1 a_2 C(a_3, \cdots, a_{p+1}), \text{ se } k = 1. \\ (-1)^{k-1} a_1 C(a_2, \cdots, a_k a_{k+1}, \cdots, a_{p+1}), \text{ se } k \in [p]_2 \\ (-1)^p a_1 C(a_2, \cdots, a_p) a_{p+1}, \text{ se } k = p+1. \end{cases} , \tag{5.4}$$

$$D_{p+1,k} = \begin{cases} (-1)^{p+1} a_1 C(a_2, \cdots, a_p) a_{p+1}, \text{ se } k = 1. \\ (-1)^{p+k} C(a_1, \cdots, a_{k-1}a_k, \cdots, a_p) a_{p+1}, \text{ se } k \in [p]_2 \\ -C(a_1, \cdots, a_{p-1}) a_p a_{p+1}, \text{ se } k = p+1. \end{cases} \tag{5.5}$$

e

$$D_{j,k}=\begin{cases}(-1)^{j}\, b_1^{(j)}C\left(b_2^{(j)},\cdots,b_p^{(j)}\right), \text{ se } k=1\\ (-1)^{j+k-1}\, C\left(b_1^{(j)},\cdots,b_{k-1}^{(j)}b_k^{(j)},\cdots,b_p^{(j)}\right), \text{ se } k\in[p]_2\\ (-1)^{p+j}\, C\left(b_1^{(j)},\cdots,b_{p-1}^{(j)}\right)b_p^{(j)}, \text{ se } k=p+1.\end{cases}, \tag{5.6}$$

para $j\in[p]$, onde $b_1^{(j)},\cdots,b_p^{(j)}\in A$ são dados por

$$b_m^{(j)}=\begin{cases}a_m, \text{ se } m<j\\ a_ja_{j+1}, \text{ se } m=j\\ a_{m+1}, \text{ se } m>j.\end{cases}. \tag{5.7}$$

Afirmamos que, para cada $k\in[p+1]$, vale

$$D_{k,k}=-D_{k-1,k}. \tag{5.8}$$

Com efeito, se $k=1$, comparando (5.6) com (5.4) via (5.7), vem

$$\begin{aligned} D_{1,1} &= (-1)^1\, b_1^{(1)}C\left(b_2^{(1)},\cdots,b_p^{(1)}\right)\\ &= -a_1a_2C\left(a_3,\cdots,a_{p+1}\right)\\ &= -D_{0,1}. \end{aligned}$$

Se $k\in[p]_2$, usam-se (5.6) e (5.7):

$$\begin{aligned} D_{k,k} &= (-1)^{k+k-1}\, C\left(b_1^{(k)},\cdots,b_{k-1}^{(k)}b_k^{(k)},\cdots,b_p^{(k)}\right)\\ &= -C\left(a_1,\cdots,a_{k-1}a_ka_{k+1},\cdots,a_{p+1}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{k-1,k} &= (-1)^{(k-1)+k-1}\, C\left(b_1^{(k-1)},\cdots,b_{k-1}^{(k-1)}b_k^{(k-1)},\cdots,b_p^{(k-1)}\right)\\ &= C\left(a_1,\cdots,a_{k-1}a_ka_{k+1},\cdots,a_{p+1}\right). \end{aligned}$$

Finalmente, se $k=p+1$, usam-se (5.5) e (5.6):

$$D_{p+1,p+1}=-C\left(a_1,\cdots,a_{p-1}\right)a_pa_{p+1}$$

$$\begin{aligned} D_{p,p+1} &= (-1)^{p+p}\, C\left(b_1^{(p)},\cdots,b_{p-1}^{(p)}\right)b_p^{(p)}\\ &= C\left(a_1,\cdots,a_{p-1}\right)a_pa_{p+1}. \end{aligned}$$

Se $k>j+1$, afirmamos que

$$D_{j,k}=-D_{k,j+1}. \tag{5.9}$$

Com efeito, para $j=1$ e $k=2$, temos, por (5.6) e (5.7),

$$\begin{aligned} D_{1,2} &= (-1)^{1+2-1}\, C\left(b_1^{(1)}b_2^{(1)},\cdots,b_p^{(1)}\right)\\ &= C\left(a_1a_2a_3,\cdots,a_{p+1}\right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} D_{2,2} &= (-1)^{2+2-1} C\left(b_1^{(2)} b_2^{(2)}, \cdots, b_p^{(2)}\right) \\ &= -C\left(a_1 a_2 a_3, \cdots, a_{p+1}\right), \end{aligned}$$

enquanto para $j = 1$ e $k \in [p]_3$, usando (5.6) e (5.7), vem

$$\begin{aligned} D_{1,k} &= (-1)^{1+k-1} C\left(b_1^{(1)}, \cdots, b_{k-1}^{(1)} b_k^{(1)}, \cdots, b_p^{(1)}\right) \\ &= (-1)^k C\left(a_1 a_2, \cdots, a_k a_{k+1}, \cdots, a_{p+1}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{k,2} &= (-1)^{k+2-1} C\left(b_1^{(k)} b_2^{(k)}, \cdots, b_k^{(k)}, \cdots b_p^{(k)}\right) \\ &= -(-1)^k C\left(a_1 a_2, \cdots, a_k a_{k+1}, \cdots, a_{p+1}\right). \end{aligned}$$

Para $j = 1$ e $k = p + 1$, (5.6) e (5.5) nos dão

$$\begin{aligned} D_{1,p+1} &= (-1)^{p+1} C\left(b_1^{(1)}, \cdots, b_{p-1}^{(1)}\right) b_p^{(1)} \\ &= (-1)^{p+1} C\left(a_1 a_2, \cdots, a_p\right) a_{p+1} \end{aligned}$$

$$D_{p+1,2} = (-1)^{p+2} C\left(a_1 a_2, \cdots, a_p\right) a_{p+1}.$$

Agora, se $j \in [p-2]_2$ e $k \in [p]_4$, usam-se (5.6) e (5.7):

$$\begin{aligned} D_{j,k} &= (-1)^{j+k-1} C\left(b_1^{(j)}, \cdots, b_j^{(j)}, \cdots, b_{k-1}^{(j)} b_k^{(j)}, b_p^{(j)}\right) \quad (k-1 > j) \\ &= -(-1)^{j+k} C\left(a_1, \cdots, a_j a_{j+1}, \cdots, a_k a_{k+1}, \cdots, a_{p+1}.\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{k,j+1} &= (-1)^{k+(j+1)-1} C\left(b_1^{(k)}, \cdots, b_j^{(k)} b_{j+1}^{(k)}, \cdots, b_k^{(k)}, \cdots, b_p^{(k)}\right) \quad (k > j+1) \\ &= (-1)^{j+k} C\left(a_1, \cdots, a_j a_{j+1}, \cdots, a_k a_{k+1}, \cdots, a_{p+1}\right). \end{aligned}$$

Finalmente, se $j \in [p-2]_2$ e $k = p + 1$, (5.6) e (5.5) nos dão

$$\begin{aligned} D_{j,p+1} &= (-1)^{p+j} C\left(b_1^{(j)}, \cdots, b_j^{(j)}, \cdots, b_{p-1}^{(j)}\right) b_p^{(j)} \\ &= (-1)^{p+j} C\left(a_1, \cdots, a_j a_{j+1}, \cdots, a_p\right) a_{p+1} \end{aligned}$$

$$D_{p+1,j+1} = -(-1)^{p+j} C\left(a_1, \cdots, a_j a_{j+1}, \cdots, a_p\right) a_{p+1}.$$

Retomando o cálculo principal, escrevemos

$$\delta_p\left(\delta_{p-1} C\right)\left(a_1, \cdots, a_{p+1}\right) = \sum_{j=0}^{p+1} \sum_{k=1}^{p+1} D_{j,k}$$

$$= \sum_{k=1}^{p+1} (D_{k,k} + D_{k-1,k}) + \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k \\ j \neq k-1}}^{p+1} D_{j,k}.$$

As identidades (5.8) garantem a nulidade do primeiro somatório. Como $j \notin \{k-1, k\}$ significa que $k > j+1$ ou que $j+1 > k+1$, podemos reordenar as parcelas restantes obtendo

$$\delta_p (\delta_{p-1} C) (a_1, \cdots, a_{p+1}) = \sum_{k > j+1} (D_{j,k} + D_{k,j+1}) = 0,$$

graças a (5.9). Isso mostra que $\delta_p \circ \delta_{p-1} = 0$, como queríamos mostrar. ■

Faz sentido agora falar nos *grupos de cohomologia de Hochschild* de B sobre A, o $p-$ésimo dos quais é o quociente

$$H^p (A; B) \equiv \frac{Z^p (A; B)}{B^p (A; B)}.$$

Suponhamos a partir de agora que B, além de ser um $A-$bimódulo, é também uma $\mathbb{F}-$álgebra que satisfaz à seguinte propriedade: para todo $a \in A$ e quaisquer $\beta, \gamma \in B$, tem-se

$$(\beta a) \cdot \gamma = \beta \cdot (a \gamma),$$

onde o ponto responde pelo produto $B \times B \to B$.

O produto tensorial de aplicações $\mathbb{F}, p-$lineares (estendido linearmente às somas finitas) faz do espaço vetorial

$$C^{\bullet} (A; B) \equiv \oplus_{p=0}^{\infty} C^p (A; B)$$

uma álgebra graduada. O operador de cobordo ao qual nos referimos acima é mais propriamente o operador linear

$$\delta : C^{\bullet} (A; B) \longrightarrow C^{\bullet} (A; B)$$

dado por

$$\delta (C_0 \oplus C_1 \oplus \cdots \oplus C_p) = \delta_0 C_0 \oplus \delta_1 C_1 \oplus \cdots \oplus \delta_p C_p,$$

onde $C_j \in C^j (A; B)$, $\forall j \in [p]_0$. Evidentemente, δ satisfaz à equação

$$\delta^2 = \delta \circ \delta = 0.$$

Além disso, a proposição a seguir nos diz que a álgebra tensorial das cocadeias de Hochschild $(C^{\bullet} (A; B), +, \otimes, \delta)$ é uma álgebra (anti)diferencial sobre $\mathbb{F}$.

Proposição 107 *O operador de cobordo δ é uma antiderivação de grau 1 da álgebra graduada $(C^{\bullet} (A; B), +, \otimes)$.*

Prova. O que precisamos mostrar é que δ satisfaz à regra de Leibniz

$$\delta\left(C\otimes D\right)=\delta C\otimes D+\left(-1\right)^{p}C\otimes\delta D, \tag{5.10}$$

onde $C\in C^{p}\left(A;B\right)$ e $D\in C^{q}\left(A;B\right)$.

Ora,

$$\delta\left(C\otimes D\right)\left(a_{1},\cdots,a_{p+q+1}\right)=$$

$$\begin{aligned}
&a_{1}C\left(a_{2},\cdots,a_{p+1}\right)\cdot D\left(a_{p+2},\cdots,a_{p+q+1}\right)\\
&+\sum_{j=1}^{p}\left(-1\right)^{j}C\left(a_{1},\cdots,a_{j}a_{j+1},\cdots,a_{p+1}\right)\cdot D\left(a_{p+2},\cdots,a_{p+q+1}\right)\\
&+\sum_{j=p+1}^{p+q}\left(-1\right)^{j}C\left(a_{1},\cdots,a_{p}\right)\cdot D\left(a_{p+1},\cdots,a_{j}a_{j+1},\cdots,a_{p+q+1}\right)\\
&+\left(-1\right)^{p+q+1}C\left(a_{1},\cdots,a_{p}\right)\cdot D\left(a_{p+1},\cdots,a_{p+q}\right)a_{p+q+1}.
\end{aligned}$$

Somando e subtraindo o termo

$$\begin{aligned}
&\left(-1\right)^{p+1}\left(C\left(a_{1},\cdots,a_{p}\right)a_{p+1}\right)\cdot D\left(a_{p+2},\cdots,a_{p+q+1}\right)\\
=\;&\left(-1\right)^{p+1}C\left(a_{1},\cdots,a_{p}\right)\cdot\left(a_{p+1}D\left(a_{p+2},\cdots,a_{p+q+1}\right)\right)
\end{aligned}$$

e reunindo os termos convenientes, obtemos

$$\delta\left(C\otimes D\right)\left(a_{1},\cdots,a_{p+q+1}\right)=$$

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{c}a_{1}C\left(a_{2},\cdots,a_{p+1}\right)\\+\sum_{j=1}^{p}\left(-1\right)^{j}C\left(a_{1},\cdots,a_{j}a_{j+1},\cdots,a_{p+1}\right)\\+\left(-1\right)^{p+1}C\left(a_{1},\cdots,a_{p}\right)a_{p+1}\end{array}\right)\cdot D\left(a_{p+2},\cdots,a_{p+q+1}\right)\\
&+\left(-1\right)^{p}C\left(a_{1},\cdots,a_{p}\right)\cdot\left(\begin{array}{c}a_{p+1}D\left(a_{p+2},\cdots,a_{p+q+1}\right)\\+\sum_{k=1}^{q}\left(-1\right)^{k}D\left(a_{p+1},\cdots,a_{p+k}a_{p+k+1},\cdots,a_{p+q+1}\right)\\+\left(-1\right)^{q+1}D\left(a_{p+1},\cdots,a_{p+q}\right)a_{p+q+1}\end{array}\right)\\
&=\delta C\left(a_{1},\cdots,a_{p+1}\right)\cdot D\left(a_{p+2},\cdots,a_{p+q+1}\right)\\
&+\left(-1\right)^{p}C\left(a_{1},\cdots,a_{p}\right)\cdot\delta D\left(a_{p+1},\cdots,a_{p+q+1}\right)\\
&=\left(\delta C\otimes D+\left(-1\right)^{p}C\otimes\delta D\right)\left(a_{1},\cdots,a_{p+q+1}\right).
\end{aligned}$$

■

Observação 108 *Se $A=B$, então $Z^{1}\left(A\right)\equiv Z^{1}\left(A;A\right)=Der\ A$, i.e., os 1-cociclos são exatamente as derivações da $\mathbb{F}-$álgebra A.*

Com efeito,

$$C\in Z^{1}\left(A\right)\Leftrightarrow\delta C=0\Leftrightarrow C\left(ab\right)=aC\left(b\right)+C\left(a\right)b,\forall a,b\in A.$$

Capítulo 6

Cohomologia de variedades diferenciáveis

Seja M uma variedade diferenciável e façamos $A = B = C^{\infty}(M)$ e $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ acima.

Usaremos as seguintes abreviaturas.

$$C^p_{Hoch}(M) \equiv C^p\left(C^{\infty}(M); C^{\infty}(M)\right)$$

$$Z^p_{Hoch}(M) \equiv Z^p\left(C^{\infty}(M); C^{\infty}(M)\right)$$

$$B^p_{Hoch}(M) \equiv B^p\left(C^{\infty}(M); C^{\infty}(M)\right)$$

$$H^p_{Hoch}(M) \equiv H^p\left(C^{\infty}(M); C^{\infty}(M)\right)$$

A observação 108 significa que

$$Z^1_{Hoch}(M) = \mathfrak{X}(M).$$

Como $B^1_{Hoch}(M) = \delta C^0_{Hoch}(M) = (0)$, temos ainda

$$H^1_{Hoch}(M) = \mathfrak{X}(M).$$

6.1 Invariância sob difeomorfismos

A cohomologia de Hochschild de uma variedade diferenciável é um conceito que se comporta bem sob difeomorfismos. A saber,

Proposição 109 *Variedades difeomorfas possuem cohomologias de Hochschild isomorfas.*

Prova. Dado um difeomorfismo $\varphi : M \to N$, definimos sua ação covariante nas cocadeias por

$$\varphi_{\#} : C^p_{Hoch}(M) \to C^p_{Hoch}(N)$$
$$\varphi_{\#} C(g_1, \cdots, g_p) \equiv C(g_1 \circ \varphi, \cdots, g_p \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}, \tag{6.1}$$

para quaisquer funções $g_1, \cdots, g_p \in C^\infty(N)$. Trata-se claramente de uma aplicação $\mathbb{C}-$linear.

É claro que $(id_M)_{\#} = id_{C^p_{Hoch}(M)}$. Além disso, se $\varphi : M \to N$ e $\psi : N \to P$, temos

$$\begin{aligned}
(\psi \circ \varphi)_{\#} C(h_1, \cdots, h_p) &= C(h_1 \circ (\psi \circ \varphi), \cdots, h_p \circ (\psi \circ \varphi)) \circ (\psi \circ \varphi)^{-1} \\
&= C((h_1 \circ \psi) \circ \varphi, \cdots, (h_p \circ \psi) \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} \circ \psi^{-1} \\
&= \varphi_{\#} C(h_1 \circ \psi, \cdots, h_p \circ \psi) \circ \psi^{-1} \\
&= \psi_{\#} \varphi_{\#} C(h_1, \cdots, h_p),
\end{aligned}$$

quaisquer que sejam $C \in C^p_{Hoch}(M)$ e $h_1, \cdots, h_p \in C^\infty(P)$. Portanto, $\#$ exibe o comportamento covariante

$$(\psi \circ \varphi)_{\#} = \psi_{\#} \circ \varphi_{\#}. \tag{6.2}$$

Em particular, vemos que $\left(\varphi^{-1}\right)_{\#} = \left(\varphi_{\#}\right)^{-1}$. Com efeito, temos

$$\left(\varphi^{-1}\right)_{\#} \circ \varphi_{\#} = \left(\varphi^{-1} \circ \varphi\right)_{\#} = (id_M)_{\#} = id_{C^p_{Hoch}(M)}$$

e

$$\varphi_{\#} \circ \left(\varphi^{-1}\right)_{\#} = \left(\varphi \circ \varphi^{-1}\right)_{\#} = (id_N)_{\#} = id_{C^p_{Hoch}(N)}.$$

Portanto, $\varphi_{\#}$ é um isomorfismo $\mathbb{C}-$linear.

Afirmamos que o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{array}{ccccc}
 & M & \overset{\varphi}{\longrightarrow} & N & \\
C^p_{Hoch}(\bullet) & \downarrow & & \downarrow & C^p_{Hoch}(\bullet) \\
 & C^p_{Hoch}(M) & \overset{\varphi_{\#}}{\longrightarrow} & C^p_{Hoch}(N) & \\
\delta & \downarrow & & \downarrow & \delta \\
 & C^{p+1}_{Hoch}(M) & \overset{\varphi_{\#}}{\longrightarrow} & C^{p+1}_{Hoch}(N) &
\end{array}$$

De fato, dados $C \in C^p_{Hoch}(M)$, $g_1, \cdots, g_{p+1} \in C^\infty(N)$, e $y \in N$, temos pela definição (5.1) que

$$\delta \varphi_{\#} C(g_1, \cdots, g_{p+1})(y) =$$

$$\begin{gathered} g_1(y)\,\varphi_\# C(g_2,\cdots,g_{p+1})(y) \\ +\sum_{j=1}^{p}(-1)^j\,\varphi_\# C(g_1,\cdots,g_jg_{j+1},\cdots,g_{p+1})(y) \\ +(-1)^{p+1}\,\varphi_\# C(g_1,\cdots,g_p)(y)\,g_{p+1}(y)\,. \end{gathered}$$

Usando agora a definição (6.1) e escrevendo $y=\varphi\left(\varphi^{-1}(y)\right)$, vem

$$\begin{gathered} \delta\varphi_\# C(g_1,\cdots,g_{p+1})(y)= \\ (g_1\circ\varphi)\left(\varphi^{-1}(y)\right)C(g_2\circ\varphi,\cdots,g_{p+1}\circ\varphi)\left(\varphi^{-1}(y)\right) \\ +\sum_{j=1}^{p}(-1)^j\,C(g_1\circ\varphi,\cdots,(g_j\circ\varphi)(g_{j+1}\circ\varphi),\cdots,g_{p+1}\circ\varphi)\left(\varphi^{-1}(y)\right) \\ +(-1)^{p+1}\,C(g_1\circ\varphi,\cdots,g_p\circ\varphi)\left(\varphi^{-1}(y)\right)(g_{p+1}\circ\varphi)\left(\varphi^{-1}(y)\right) \\ =\delta C(g_1\circ\varphi,\cdots,g_{p+1}\circ\varphi)\left(\varphi^{-1}(y)\right) \\ =\varphi_\#\delta C(g_1,\cdots,g_{p+1})(y)\,. \end{gathered}$$

Portanto,

$$\delta\circ\varphi_\#=\varphi_\#\circ\delta. \tag{6.3}$$

Ou seja, $\varphi_\#$ é um isomorfismo de complexos de cocadeias:

$$\varphi_\#\left(Z^p_{Hoch}(M)\right)=Z^P_{Hoch}(N)$$

$$\varphi_\#\left(B^p_{Hoch}(M)\right)=B^P_{Hoch}(N)\,.$$

Portanto, $\varphi_\#$ induz um isomorfismo $\mathbb{C}-$linear

$$\begin{array}{cccc} \varphi_*: & H^p_{Hoch}(M) & \longrightarrow & H^p_{Hoch}(N) \\ & [C+\delta B] & \mapsto & \left[\varphi_\# C+\delta\varphi_\# B\right] \end{array}.$$

Isso encerra a prova. ■

Observação 110 *Dado um difeomorfismo $\varphi: M\to N$, o isomorfismo $\mathbb{C}-$linear $\varphi_\#$ definido na demonstração da proposição anterior é chamado* push-forward *de cocadeias. A cocadeia $\varphi_\# C\in C^p_{Hoch}(N)$ é dita o* push-forward *(via φ) da cocadeia $C\in C^p_{Hoch}(M)$, ou a* cocadeia induzida por C via *φ. É imediato de (6.1) que $\varphi_\#$ é um isomorfismo entres as álgebras tensoriais $C^\bullet_{Hoch}(M)$ e $C^\bullet_{Hoch}(N)$, i.e.,*

$$\varphi_\#(C\otimes D)=\varphi_\# C\otimes\varphi_\# D.$$

Juntamente com (6.3), isso nos diz que o push-forward é um isomorfismo de álgebras (anti)diferenciais:

$$\left(C^\bullet_{Hoch}(M),+,\otimes,\delta\right)\overset{\varphi_\#}{\rightleftarrows}\left(C^\bullet_{Hoch}(N),+,\otimes,\delta\right).$$

O *suporte* $supp\ C \subset M$ de uma cocadeia $C \in C^p_{Hoch}(M)$ é definido por

$$supp\ C \equiv \overline{\{x \in M;\ \exists f_1, \cdots f_p \in C^\infty(M);\ C(f_1, \cdots, f_p)(x) \neq 0\}}. \quad (6.4)$$

Esta é uma noção que também se comporta muito bem sob a ação de difeomorfismos. De fato, vale a seguinte

Proposição 111 *Sejam $\varphi : M \to N$ um difeomorfismo e $C \in C^p_{Hoch}(M)$. Então,*

$$supp\ \varphi_\# C = \varphi(supp\ C).$$

Prova. Temos

$$\varphi_\# C(g_1, \cdots, g_p)(x) = 0,\ \forall g_1, \cdots, g_p \in C^\infty(N)$$

$$\Leftrightarrow C(g_1 \circ \varphi, \cdots, g_p \circ \varphi)\left(\varphi^{-1}(x)\right) = 0,\ \forall g_1, \cdots, g_p \in C^\infty(N)$$

$$\Leftrightarrow C(f_1, \cdots, f_p)\left(\varphi^{-1}(x)\right) = 0,\ \forall f_1, \cdots, f_p \in C^\infty(M).$$

Logo,

$$x \in supp\ \varphi_\# C \Leftrightarrow \varphi^{-1}(x) \in supp\ C \Leftrightarrow x \in \varphi(supp\ C).$$

■

Decorre imediatamente das definições (5.1) e (6.4) que o operador de cobordo preserva suportes, i.e.,

$$supp\ \delta C = supp\ C. \quad (6.5)$$

O grupo $S_p = (Bij([p], [p]), \circ)$ das permutações de p elementos possui uma ação sobre $C^p_{Hoch}(M)$

$$\begin{array}{ccc} S_p \times C^p_{Hoch}(M) & \longrightarrow & C^p_{Hoch}(M) \\ (\sigma, C) & \mapsto & C^\sigma \end{array}$$

dada por

$$C^\sigma(f_1, \cdots, f_p) = C\left(f_{\sigma^{-1}(1)}, \cdots, f_{\sigma^{-1}(p)}\right).$$

De fato, temos

$$\begin{aligned} (C^\sigma)^\rho(f_1, \cdots, f_p) &= C^\sigma\left(f_{\rho^{-1}(1)}, \cdots, f_{\rho^{-1}(p)}\right) \\ &= C\left(f_{\rho^{-1}\sigma^{-1}(1)}, \cdots, f_{\rho^{-1}\sigma^{-1}(p)}\right) \\ &= C\left(f_{(\sigma\rho)^{-1}(1)}, \cdots, f_{(\sigma\rho)^{-1}(p)}\right) \\ &= C^{\sigma\rho}(f_1, \cdots, f_p), \end{aligned}$$

i.e.,

$$(C^\sigma)^\rho = C^{\sigma\rho}.$$

Seja $C \in C^p_{Hoch}(M)$. A *simetrização* de C é definida pela fórmula usual

$$symm\ C(f_1, \cdots, f_p) \equiv \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} C\left(f_{\sigma^{-1}(1)}, \cdots, f_{\sigma^{-1}(p)}\right),$$

i.e.,

$$symm\ C \equiv \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} C^\sigma.$$

Analogamente, a *antissimetrização* de C é definida por

$$skew\ C \equiv \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} sgn\ \sigma C^\sigma,$$

onde a função $sgn : S_p \to \{\pm 1\}$ é o *homomorfismo* (considere $\{\pm 1\}$ como grupo multiplicativo) *de paridade* (-1 elevado ao número de inversões exibidas pela permutação).

É claro que lidamos aqui com dois endomorfismos do $C^\infty(M)-$módulo $C^p_{Hoch}(M)$:

$$symm,\ skew : C^p_{Hoch}(M) \to C^p_{Hoch}(M).$$

Dizemos que uma cocadeia $C \in C^p_{Hoch}(M)$ é *alternada* ou *antissimétrica* (respectivamente, *simétrica*) quando $skew\ C = C$ (resp., quando $symm\ C = C$). Nesse caso, temos $symm\ C = 0$ (resp., $skew\ C = 0$). Com efeito,

Proposição 112 *Os operadores skew e symm são idempotentes e além disso* $skew \circ symm = symm \circ skew = 0$.

Prova. Mostraremos primeiro que $skew \circ skew = skew$. Seja $C \in C^p_{Hoch}(M)$. Temos

$$\begin{aligned}
skew\,(skew\ C) &= skew\left(\frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p} sgn\ \sigma C^\sigma\right)\\
&= \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p} sgn\ \sigma skew\ C^\sigma\\
&= \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p} sgn\ \sigma \frac{1}{p!}\sum_{\rho\in S_p} sgn\ \rho\,(C^\sigma)^\rho\\
&= \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p} \frac{1}{p!}\sum_{\rho\in S_p} sgn\ (\sigma\rho)\, C^{\sigma\rho}\\
&= \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p}\left(\frac{1}{p!}\sum_{\tau\in S_p} sgn\ \tau C^\tau\right)\\
&= \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p} skew\ C\\
&= skew\ C.
\end{aligned}$$

Na quinta igualdade, usamos o fato de que, para cada $\sigma \in S_p$, a aplicação $\rho \mapsto \sigma\rho$ é uma bijeção.

De forma inteiramente análoga, vê-se que $symm \circ symm = symm$.

Por fim, calculamos

$$\begin{aligned}
symm\,(skew\ C) &= symm\left(\frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p} sgn\ \sigma C^{\sigma}\right) \\
&= \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p} sgn\ \sigma symm\ C^{\sigma} \\
&= \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p} sgn\ \sigma \frac{1}{p!}\sum_{\rho\in S_p} (C^{\sigma})^{\rho} \\
&= \left(\frac{1}{p!}\right)^2 \sum_{\sigma\in S_p}\sum_{\rho\in S_p} sgn\ \sigma C^{\sigma\rho}.
\end{aligned}$$

Seja $\tau \in S_p$ uma transposição de dois elementos (p.ex., $\tau = (12)$). Tem-se $sgn\ \tau = -1$. Usando o fato de que as aplicações $\xi \mapsto \tau\xi$ e $\eta \mapsto \eta\tau$ são ambas automorfismos de S_p, obtemos então

$$symm\,(skew\ C) = \left(\frac{1}{p!}\right)^2 \sum_{\sigma\in S_p}\sum_{\rho\in S_p} sgn\ \sigma C^{\sigma\rho}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{p!}\right)^2 \frac{1}{2}\sum_{\sigma\in S_p}\sum_{\rho\in S_p}\left(sgn\ \sigma C^{\sigma(\tau\rho)} + sgn\ \sigma\tau C^{(\sigma\tau)\rho}\right) \\
&= \left(\frac{1}{p!}\right)^2 \frac{1}{2}\sum_{\sigma\in S_p}\sum_{\rho\in S_p}\left(sgn\ \sigma C^{\sigma\tau\rho} - sgn\ \sigma C^{\sigma\tau\rho}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

De modo inteiramente análogo se vê que $skew \circ symm = 0$. ∎

Cumpre observar que o operador *skew* não é um endomorfismo do complexo de cocadeias de Hochschild, i.e., não comuta com o operador de cobordo δ. Mais precisamente,

Lema 113 *Os cobordos de Hochschild têm antissimetrização nula, i.e.,*

$$skew \circ \delta = 0 \tag{6.6}$$

ou seja

$$B^p_{Hoch}\,(M) \subset \ker skew, \quad \forall p \in \mathbb{N}_0.$$

Prova. Sejam $C \in C^{p-1}_{Hoch}(M)$ e $f_1, \cdots, f_p \in C^\infty(M)$. Calculemos $skew\ \delta C(f_1, \cdots, f_p)$.

$$skew\ \delta C(f_1, \cdots, f_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} sgn\ \sigma\ \delta C\left(f_{\sigma^{-1}(1)}, \cdots, f_{\sigma^{-1}(p)}\right)$$

$$= \frac{1}{p!} \left(\begin{array}{c} \sum_{\sigma \in S_p} sgn\ \sigma f_{\sigma^{-1}(1)} C\left(f_{\sigma^{-1}(2)}, \cdots, f_{\sigma^{-1}(p)}\right) \\ + \sum_{j=1}^{p-1} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^j\ sgn\ \sigma C \left(f_{\sigma^{-1}(1)}, \cdots, \underbrace{f_{\sigma^{-1}(j)} f_{\sigma^{-1}(j+1)}}_{j-\text{ésimo argumento}}, \cdots, f_{\sigma^{-1}(p)} \right) \\ + (-1)^p \sum_{\sigma \in S_p} sgn\ \sigma C\left(f_{\sigma^{-1}(1)}, \cdots, f_{\sigma^{-1}(p-1)}\right) f_{\sigma^{-1}(p)} \end{array} \right).$$

O somatório em j é nulo. Com efeito, dado $j \in [p-1]$, seja $\tau = (j, j+1) \in S_p$ a transposição dos elementos j e $j+1$ de $[p]$. Temos

$$sgn\ \tau = -1,$$

$$\tau(i) = i, \quad \forall i \notin \{j, j+1\},$$

e, para cada $\sigma \in S_p$,

$$sgn\ \tau\sigma = sgn\ \tau\ sgn\ \sigma = -sgn\ \sigma$$

e

$$(\tau\sigma)^{-1} = \sigma^{-1}\tau^{-1} = \sigma^{-1}\tau,$$

donde segue que

$$(-1)^j\ sgn\ \sigma C\left(f_{\sigma^{-1}(1)}, \cdots, f_{\sigma^{-1}(j)} f_{\sigma^{-1}(j+1)}, \cdots, f_{\sigma^{-1}(p)}\right) =$$

$$(-1)^j\ sgn\ \sigma C\left(f_{\sigma^{-1}(1)}, \cdots, f_{\sigma^{-1}(j+1)} f_{\sigma^{-1}(j)}, \cdots, f_{\sigma^{-1}(p)}\right) =$$

$$(-1)^j\ sgn\ \sigma C\left(f_{\sigma^{-1}\tau(1)}, \cdots, f_{\sigma^{-1}\tau(j)} f_{\sigma^{-1}\tau(j+1)}, \cdots, f_{\sigma^{-1}\tau(p)}\right) =$$

$$-(-1)^j\ sgn\ \tau\sigma C\left(f_{(\tau\sigma)^{-1}(1)}, \cdots, f_{(\tau\sigma)^{-1}(j)} f_{(\tau\sigma)^{-1}(j+1)}, \cdots, f_{(\tau\sigma)^{-1}(p)}\right).$$

Como $\tau\sigma = \tau\rho \Rightarrow \sigma = \rho$, a parcela devida a σ possui exatamente uma contrapartida, devida a $\tau\sigma$, e esses termos se cancelam, como acabamos de mostrar. Portanto, a soma em $\sigma \in S_p$ para $j \in [p-1]$ é zero, e, *a fortiori*, é nula a soma em $j \in [p-1]$.

Agrupando os termos restantes, temos então

$$skew\ \delta C(f_1, \cdots, f_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \left(\begin{array}{c} sgn\ \sigma f_{\sigma^{-1}(1)} C\left(f_{\sigma^{-1}(2)}, \cdots, f_{\sigma^{-1}(p)}\right) \\ + (-1)^p\ sgn\ \sigma C\left(f_{\sigma^{-1}(1)}, \cdots, f_{\sigma^{-1}(p-1)}\right) f_{\sigma^{-1}(p)} \end{array} \right).$$

Ocorre que, sendo $\rho = (1, 2, \cdots, p-1, p) = (3, 2)(4, 3) \cdots (p, p-1)(1, p) \in S_p$, temos

$$sgn\ \rho^{-1} = sgn\ \rho = (-1)^{p-1},$$

donde

$$sgn\ \sigma f_{\sigma^{-1}(1)} C\left(f_{\sigma^{-1}(2)}, \cdots, f_{\sigma^{-1}(p)}\right) =$$

$$sgn\ \sigma f_{\sigma^{-1}\rho(p)} C\left(f_{\sigma^{-1}\rho(1)}, \cdots, f_{\sigma^{-1}\rho(p-1)}\right) =$$

$$sgn\ \rho^{-1}\ \underbrace{sgn\ \rho^{-1}\ sgn\ \sigma}_{sgn\ \rho^{-1}\sigma} f_{\sigma^{-1}\rho(p)} C\left(f_{\sigma^{-1}\rho(1)}, \cdots, f_{\sigma^{-1}\rho(p-1)}\right) =$$

$$(-1)^{p-1}\ \ sgn\ \rho^{-1}\sigma\ f_{\sigma^{-1}\rho(p)} C\left(f_{\sigma^{-1}\rho(1)}, \cdots, f_{\sigma^{-1}\rho(p-1)}\right).$$

Assim, a parcela devida a σ possui exatamente uma contrapartida, devida a $\rho^{-1}\sigma$, que a cancela. Portanto, temos

$$skew\ \delta C\left(f_1, \cdots, f_p\right) = 0,$$

como queríamos mostrar. ■

6.2 Caso diferencial

As cocadeias de Hochschild não são objetos locais. Com isso, queremos dizer que o valor de $C\left(f_1, \cdots, f_p\right)(x)$ pode depender do comportamento das funções $f_1, \cdots, f_p \in C^{\infty}(M)$ em regiões distantes (num sentido topológico) de x. Mais precisamente, diremos que uma cocadeia $C \in C^p_{Hoch}(M)$ é *local* quando, dados $i \in [p]$ e funções $f_1, \cdots, f_p, g_i \in C^{\infty}(M)$ tais que $f_i|U = g_i|U$ para um certo aberto $U \subset M$, tivermos sempre

$$C\left(f_1, \cdots, f_i, \cdots, f_p\right)(x) = C\left(f_1, \cdots, g_i, \cdots, f_p\right)(x)$$

para todo $x \in U$.

Por exemplo, a $1-$cocadeia $I \in C^1_{Hoch}(\mathbb{R})$ dada por

$$I(f)(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

é não-local. Com efeito, duas funções suaves f e g podem coincidir no intervalo aberto $(1, 3)$ e diferir radicalmente fora dele, de modo a termos

$$I(f)(2) \neq I(g)(2).$$

Por outro lado, a $1-$cocadeia $D = \frac{d}{dx} \in C^1_{Hoch}(\mathbb{R})$ é claramente local.

Nem é preciso dizer que geralmente os objetos locais são mais facilmente tratáveis que os globais. A cocadeia $\frac{d}{dx}$ acima nos dá uma pista de como restringir nosso complexo de modo a lidar somente com cocadeias locais.

Observação 114 *No que segue, faremos uso intenso da chamada notação de multi-índices. Para evitar confusões, um multi-índice será sempre representado por uma letra maiúscula, sendo I, J, K as preferidas para essa função.*

Um $p-$multi-índice é uma $p-$upla

$$I = (i_1, \cdots, i_p) \in \mathbb{N}_0^p$$

de números naturais (zero incluído). A norma de um multi-índice é a soma de suas entradas, denotada por

$$|I| = \sum_{r=1}^{p} i_r.$$

Denotaremos o conjunto dos $p-$multi-índices por $\mathcal{I}_p$ e o subconjunto daqueles de norma k por $\mathcal{I}_{p,k}$. Sempre que efetuarmos uma operação com objetos com (multi-)índices em $\mathcal{I}_{p,k}$ (um somatório, por exemplo), tomaremos a liberdade de usar o rótulo $|I| = k$, sem fazer menção ao número de entradas (comprimento) de I, desde que este possa ser inferido do contexto. Assim,

$$\sum_{|I|=k} \mathcal{O}_I \equiv \sum_{I \in I_{p,k}} \mathcal{O}_I \ ,$$

para um certo p dado pelo contexto.

Definição 115 *Um operador $D \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(C^\infty(M); C^\infty(M))$ é dito um* operador diferencial de ordem k *sobre M se para cada $p \in M$ existirem uma vizinhança $U \subset M$ de p e campos de vetores locais $X_1, \cdots, X_r \in \mathfrak{X}(U)$ e funções $d_I^{(j)} \in C^\infty(U)$, para $I \in \mathcal{I}_{r,j}$ e $j \in [k]_0$, tais que*

$$Df(q) = \sum_{j=0}^{k} \sum_{|I|=j} d_I^{(j)}(q) \left(X^I f\right)(q), \quad \forall q \in U,$$

onde

$$X^I f(q) = \left(X_1^{i_1}\left(\cdots\left(X_r^{i_r} f\right)\right)\right)(q), \quad \forall I = (i_1, \cdots, i_r) \in \mathcal{I}_r, \forall q \in U.$$

Observação 116 *Ao longo de todo este texto, adotamos a convenção de que um operador elevado a zero é igual à identidade. Deve-se manter isso em mente ao ler definições tais como a anterior. Note que pode haver termos de ordem zero na expressão local de um operador diferencial.*

Observação 117 *Diminuindo U, se necessário, podemos supô-la munida de coordenadas $x^1, \cdots, x^m : U \to \mathbb{R}$, onde $m = \dim M$. Escreva*

$$X_\mu = X_\mu^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}.$$

Graças à comutatividade das derivadas parciais, podemos então reescrever a expressão local

$$D=\sum_{j=0}^{k}\sum_{|I|=j}d_I^{(j)}X^I$$

de um operador diferencial como

$$D=\sum_{j=0}^{k}\sum_{|I|=j}\tilde{d}_I^{(j)}\partial_U^I\ ,$$

onde

$$\partial_U^I\equiv\frac{\partial^{i_1}}{\partial\left(x^1\right)^{i_1}}\cdots\frac{\partial^{i_m}}{\partial\left(x^m\right)^{i_m}},\quad \forall I=(i_1,\cdots,i_m)\in\mathcal{I}_{m,j}.$$

Logo, todo operador diferencial D de ordem k sobre M se escreve localmente como

$$D=\sum_{|I|\leq k}d_I\frac{\partial^{i_1}}{\partial\left(x^1\right)^{i_1}}\cdots\frac{\partial^{i_m}}{\partial\left(x^m\right)^{i_m}}.$$

Denotamos o conjunto dos operadores diferenciais de ordem k sobre M por $Diff_k(M)$. É claro que se trata de um espaço vetorial complexo. Definimos ainda o espaço vetorial (note que $Diff_{k-1}(M)\subsetneq Diff_k(M)\,,\ \forall k\in\mathbb{N}$)

$$Diff(M)\equiv\cup_{k=0}^{\infty}Diff_k(M)\,.$$

Dizemos que um operador diferencial $D\in Diff(M)$ *anula constantes* quando $\mathbb{C}\subset\ker D$. O subespaço dos operadores diferenciais que anulam constantes será indicado por $Diff^{(0)}(M)$. Escreveremos também $Diff_k^{(0)}(M)\equiv Diff^{(0)}(M)\cap Diff_k(M)$. Evidentemente, uma condição necessária e suficiente para que um operador diferencial D anule constantes é que exista uma cobertura de M por abertos tal que as expressões locais de D segundo essa cobertura não apresentem termos de ordem zero.

É óbvio que podemos encarar o espaço $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}\left(C^\infty(M);C^\infty(M)\right)$ dos operadores $\mathbb{C}-$lineares em $C^\infty(M)$ como um $C^\infty(M)-$módulo, do qual são submódulos os espaços $Diff(M)$, $Diff_k(M)$, $Diff^{(0)}(M)$ e $Diff_k^{(0)}(M)$. Defina então o $C^\infty(M)-$módulo das $p-$cocadeias diferenciais de Hochschild sobre M como o produto tensorial

$$C_{diff}^p(M)\equiv\underbrace{Diff^{(0)}(M)\otimes\cdots\otimes Diff^{(0)}(M)}_{p\text{ fatores}}\subset C_{Hoch}^p(M)\,,$$

e analogamente o subespaço das $p-$cocadeias diferenciais de ordem k de Hochschild sobre M por

$$C_{diff,k}^p(M)\equiv\underbrace{Diff_k^{(0)}(M)\otimes\cdots\otimes Diff_k^{(0)}(M)}_{p\text{ fatores}}.$$

Note que
$$C^p_{diff}(M) = \cup_{k=1}^{\infty} C^p_{diff,k}(M),$$
pois $C^p_{diff,k-1}(M) \subsetneq C^p_{diff,k}(M)$, para todo $k \in \mathbb{N}$ (convencionamos $C^p_{diff,0}(M) = (0)$).

Note que as cocadeias diferenciais *anulam constantes*, no seguinte sentido. Dizemos que uma $p-$cocadeia de Hochschild C sobre M *anula constantes* quando a condição seguinte for satisfeita.
$$\exists\ i \in [p]\,;\ f_i \in \mathbb{C} \Rightarrow C(f_1, \cdots, f_p) \equiv 0.$$
Ou seja, sempre que pusermos uma função constante num dos argumentos de tal cocadeia, o resultado será a função identicamente nula.

Além disso, as cocadeias diferenciais são, por construção, cocadeias de Hochschild locais.

Dedicaremo-nos agora a mostrar que as cocadeias diferenciais constituem um subcomplexo do complexo de cocadeias de Hochschild. O restante desta seção será dedicada ao estudo da cohomologia associada a esse subcomplexo.

Lema 118 *Seja $(U, x^1, \cdots, x^m)$ um sistema de coordenadas locais de uma variedade diferenciável $m-$dimensional M. Os operadores diferenciais locais (i.e., definidos em U) dados por*
$$\partial^I = \frac{\partial^{i_1}}{\partial (x^1)^{i_1}} \cdots \frac{\partial^{i_m}}{\partial (x^m)^{i_m}}$$
$$(I = (i_1, \cdots, i_m) \in \mathcal{I}_m)$$
satisfazem à regra
$$\partial^I (fg) = \sum_{J+K=I} \partial^J f\ \partial^K g$$
para quaisquer funções $f, g \in C^\infty(U)$.

Prova. A prova se faz por indução em $|I|$. O caso $|I| = 1$ é apenas a regra de Leibniz para derivadas parciais.

Suponha agora que $|I| > 1$. Escolha um $r \in [m]$ tal que $i_r > 0$. Então,
$$\partial^I (fg) = \frac{\partial}{\partial x^r} \partial^J (fg).$$
Usando a hipótese de indução, temos
$$\partial^I (fg) = \frac{\partial}{\partial x^r} \sum_{K+M=J} \partial^K f\ \partial^M g$$
$$= \sum_{K+M=J} \left(\partial^M g \frac{\partial}{\partial x^r} \partial^K f + \partial^K f \frac{\partial}{\partial x^r} \partial^M g \right)$$
$$= \sum_{K+M=J} \left(\partial^{K'} f\ \partial^M g + \partial^K f\ \partial^{M'} g \right)$$

onde $K' = K + e_r$, e $M' = M + e_r$ e

$$e_r = \left(0, \cdots, 0, \underbrace{1}_{r-\text{ésima entrada}}, 0, \cdots, 0\right) \in \mathbb{N}_0^m.$$

Ora, como

$$\begin{aligned} I &= J + e_r \\ &= K + M + e_r \\ &= K' + M = K + M', \end{aligned}$$

temos então

$$\partial^I (fg) = \sum_{K+M=I} \partial^K f \; \partial^M g,$$

como afirmamos. ■

Lema 119 $\delta\left(C^1_{diff,k}(M)\right) \subset C^2_{diff,k-1}(M)$.

Prova. Sejam $D \in C^1_{diff,k}(M)$.e $f, g \in C^\infty(M)$. Temos

$$\delta D(f,g) = f \; D(g) - D(fg) + D(f) \; g.$$

Localmente, podemos escrever

$$D = \sum_{0<|I|\leq k} d_I \partial^I.$$

Usando o lema anterior, temos

$$\begin{aligned} D(fg) &= \sum_{0<|I|\leq k} d_I \sum_{J+K=I} \partial^J f \; \partial^K g \\ &= \sum_{0<|I|\leq k} d_I \left(\sum_{\substack{J+K=I \\ J,K\neq 0}} \partial^J f \; \partial^K g + \underbrace{f \; \partial^I g}_{J=0} + \underbrace{g \partial^I f}_{K=0} \right) \\ &= \sum_{0<|I|\leq k} \sum_{\substack{J+K=I \\ J,K\neq 0}} d_I \partial^J f \; \partial^K g + f \; D(g) + D(f) g, \end{aligned}$$

donde $(|I| = |J+K| = |J| + |K| = k,\ |K| > 0 \Rightarrow |J| \leq k-1)$

$$\delta D(f,g) = -\sum_{\substack{0<|J|\leq k-1 \\ 0<|K|\leq k-1}} d_{J+K} \partial^J f \; \partial^K g,$$

i.e.,

$$\delta D = -\sum_{\substack{0<|J|\leq k-1 \\ 0<|K|\leq k-1}} d_{J+K} \partial^J \otimes \partial^K \in C^2_{diff,k-1}(M)$$

(note que não há termos de ordem zero em qualquer dos dois argumentos, pois somamos apenas para $|J|, |K| > 0$). ■

Proposição 120 $\delta\left(C^p_{diff,k}(M)\right)\subset C^{p+1}_{diff,k}(M)$.

Prova. Por linearidade de δ, basta mostrar o resultado para as $p-$cocadeias da forma

$$C=D_1\otimes\cdots\otimes D_p,$$

onde os D_j são operadores diferenciais de ordem k que anulam constantes. Lembrando que o operador de cobordo é uma antiderivação da álgebra tensorial de Hochschild, temos

$$\delta C=\sum_{j=1}^{p}(-1)^{j+1}D_1\otimes\cdots\otimes\delta D_j\otimes\cdots\otimes D_p.$$

Invocando o lema anterior, como $D_j\in C^1_{diff,k}(M)$, temos que $\delta D_j\in C^2_{diff,k-1}(M)$, donde se vê que δC opera diferencialmente em cada argumento, com ordem não superior a k, anulando constantes. ■

Podemos agora definir

$$Z^p_{diff}(M)\equiv\ker\delta_p\cap C^p_{diff}(M),$$

$$Z^p_{diff,k}(M)\equiv\ker\delta_p\cap C^p_{diff,k}(M),$$

$$B^p_{diff}(M)\equiv\delta_{p-1}\left(C^{p-1}_{diff}(M)\right)$$

e

$$B^p_{diff,k}(M)\equiv\delta_{p-1}\left(C^{p-1}_{diff,k}(M)\right),$$

com a certeza de que temos $B^p_{diff,k}(M)\subset Z^p_{diff,k}(M)$, donde $B^p_{diff}(M)\subset Z^p_{diff}(M)$. Ou seja, as cocadeias diferenciais constituem de fato um subcomplexo do complexo de cocadeias de Hochschild, o que nos permite falar da *cohomologia diferencial de Hochschild* sobre M, cujo $p-$ésimo grupo é dado por

$$H^p_{diff}(M)\equiv\frac{Z^p_{diff}(M)}{B^p_{diff}(M)}.$$

A observação 108 acima já nos diz qual é o primeiro desses grupos:

$$H^1_{diff}(M)=Z^1_{diff}(M)=\mathfrak{X}(M).$$

Encontramos um cálculo elementar dos grupos seguintes em [Gutt-Rawnsley, 1999], que passamos a reproduzir. O que os autores provam é que todo $p-$cociclo diferencial é cohomólogo a um $p-$cociclo diferencial alternado de ordem 1, i.e., a um campo de $p-$tensores contravariantes totalmente antissimétricos. Invocando alguns dos resultados já provados, concluiremos facilmente que

$$H^p_{diff}(M)\simeq skew\ Z^p_{diff,1}(M)\simeq\Gamma\left(\wedge^pTM\right).$$

Capítulo 7

Cálculo dos grupos $H^p_{diff}(M)$

Inicialmente, provaremos esse resultado para $M = \mathbb{R}^m$. Para isso, serão necessários alguns resultados preliminares.

7.1 Caso especial: o espaço $\mathbb{R}^m$

Lema 121 (Gutt-Rawnsley, 1999) *Dada uma $p-$cocadeia diferencial de ordem 1 $C \in C^p_{diff,1}(\mathbb{R}^m)$, existe uma $(p-1)-$cocadeia diferencial de ordem 2 $B \in C^{p-1}_{diff,2}(\mathbb{R}^m)$ tal que*

$$C = \delta B + skew\ C$$

e supp $B \subset$ supp C.

Prova. Existem funções $C_{i_1,\cdots,i_p} \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ que nos possibilitam escrever

$$C = \sum_{i_1,\cdots,i_p=1}^{m} C_{i_1,\cdots,i_p} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}}. \tag{7.1}$$

Seja $j \in [p]$ e $\tau = (j, j+1) \in S_p$. Defina a $(p-1)-$cocadeia diferencial de ordem 2 $\varphi_\tau(C) \in C^{p-1}_{diff,2}(\mathbb{R}^m)$ por

$$\varphi_\tau(C)(f_1,\cdots,f_{p-1}) = (-1)^j \sum_{r,s=1}^{m} C(f_1,\cdots,f_{j-1},x^r,x^s,f_{j+1},\cdots,f_{p-1}) \frac{\partial^2 f_j}{\partial x^r \partial x^s}.$$

Substituindo (7.1) na definição acima, obtemos

$$\varphi_\tau(C)(f_1,\cdots,f_{p-1}) =$$

$$= (-1)^j \sum_{r,s=1}^{m} \sum_{i_1,\cdots,i_p=1}^{m} C_{i_1,\cdots,i_p} \frac{\partial f_1}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial f_{j-1}}{\partial x^{i_{j-1}}} \frac{\partial x^r}{\partial x^{i_j}} \frac{\partial x^s}{\partial x^{i_{j+1}}} \frac{\partial f_{j+1}}{\partial x^{i_{j+2}}} \cdots \frac{\partial f_{p-1}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial^2 f_j}{\partial x^r \partial x^s}$$

$$= (-1)^j \sum_{i_1,\cdots,i_p=1}^{m} C_{i_1,\cdots,i_p} \sum_{r,s=1}^{m} \frac{\partial f_1}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial f_{j-1}}{\partial x^{i_{j-1}}} \delta^r_{i_j} \delta^s_{i_{j+1}} \frac{\partial f_{j+1}}{\partial x^{i_{j+2}}} \cdots \frac{\partial f_{p-1}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial^2 f_j}{\partial x^r \partial x^s},$$

donde, somando em r e s, vem

$$\varphi_\tau(C)(f_1,\cdots,f_{p-1}) =$$

$$(-1)^j \sum_{i_1,\cdots,i_p=1}^{m} C_{i_1,\cdots,i_p} \frac{\partial f_1}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial f_{j-1}}{\partial x^{i_{j-1}}} \frac{\partial^2 f_j}{\partial x^{i_j} \partial x^{i_{j+1}}} \frac{\partial f_{j+1}}{\partial x^{i_{j+2}}} \cdots \frac{\partial f_{p-1}}{\partial x^{i_p}}. \quad (7.2)$$

Passamos agora a provar a fórmula

$$\delta\varphi_\tau(C) = C + C^\tau. \quad (7.3)$$

Calculando o cobordo de $\varphi_\tau(C)$ pela definição (5.1), podemos escrever

$$\delta\varphi_\tau(C)(f_1,\cdots,f_p) = \sum_{k=0}^{p} C_k,$$

onde

$$C_0 = f_1 \varphi_\tau(C)(f_2,\cdots,f_p)$$
$$C_p = (-1)^p \varphi_\tau(C)(f_1,\cdots,f_{p-1}) f_p$$

e

$$C_k = (-1)^k \varphi_\tau(C)(f_1,\cdots,f_k f_{k+1},\cdots,f_p),$$

para todo $k \in [p-1]$.

Subsituindo (7.2), obtemos que C_k é igual a:

$$(-1)^j \sum_{i_1,\cdots,i_p=1}^{m} C_{i_1,\cdots,i_p} \, f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial f_j}{\partial x^{i_{j-1}}} \frac{\partial^2 f_{j+1}}{\partial x^{i_j} \partial x^{i_{j+1}}} \frac{\partial f_{j+2}}{\partial x^{i_{j+2}}} \cdots \frac{\partial f_p}{\partial x^{i_p}},$$

se $k=0$; ou

$$(-1)^{j+k} \sum_{i_1,\cdots,i_p=1}^{m} C_{i_1,\cdots,i_p} \left(\begin{array}{c} \frac{\partial f_1}{\partial x^{i_1}} \cdots f_k \frac{\partial f_{k+1}}{\partial x^{i_k}} \cdots \frac{\partial^2 f_{j+1}}{\partial x^{i_j} \partial x^{i_{j+1}}} \cdots \frac{\partial f_p}{\partial x^{i_p}} \\ + \frac{\partial f_1}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial f_k}{\partial x^{i_k}} f_{k+1} \cdots \frac{\partial^2 f_{j+1}}{\partial x^{i_j} \partial x^{i_{j+1}}} \cdots \frac{\partial f_p}{\partial x^{i_p}} \end{array} \right),$$

se $1 \le k < j$ (aplique a regra de Leibniz ao termo $\frac{\partial}{\partial x^{i_k}}(f_k f_{k+1})$); ou

$$\sum_{i_1,\cdots,i_p=1}^{m} C_{i_1,\cdots,i_p} \frac{\partial f_1}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial f_{j-1}}{\partial x^{i_{j-1}}} f_j \frac{\partial^2 f_{j+1}}{\partial x^{i_j} \partial x^{i_{j+1}}} \frac{\partial f_{j+2}}{\partial x^{i_{j+2}}} \cdots \frac{\partial f_p}{\partial x^{i_p}} \quad (a)$$

$$+\sum_{i_1,\cdots,i_p=1}^{m} C_{i_1,\cdots,i_p} \frac{\partial f_1}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial f_{j-1}}{\partial x^{i_{j-1}}} \frac{\partial^2 f_j}{\partial x^{i_j} \partial x^{i_{j+1}}} f_{j+1} \frac{\partial f_{j+2}}{\partial x^{i_{j+2}}} \cdots \frac{\partial f_p}{\partial x^{i_p}} \qquad (b)$$

$$+\sum_{i_1,\cdots,i_p=1}^{m} C_{i_1,\cdots,i_p} \frac{\partial f_1}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial f_{j-1}}{\partial x^{i_{j-1}}} \frac{\partial f_j}{\partial x^{i_j}} \frac{\partial f_{j+1}}{\partial x^{i_{j+1}}} \frac{\partial f_{j+2}}{\partial x^{i_{j+2}}} \cdots \frac{\partial f_p}{\partial x^{i_p}} \qquad (c)$$

$$+\sum_{i_1,\cdots,i_p=1}^{m} C_{i_1,\cdots,i_p} \frac{\partial f_1}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial f_{j-1}}{\partial x^{i_{j-1}}} \frac{\partial f_j}{\partial x^{i_{j+1}}} \frac{\partial f_{j+1}}{\partial x^{i_j}} \frac{\partial f_{j+2}}{\partial x^{i_{j+2}}} \cdots \frac{\partial f_p}{\partial x^{i_p}} \qquad (d)$$

se $k = j$ (use o Lema 118 para calcular $\frac{\partial^2}{\partial x^{i_j} \partial x^{i_{j+1}}} (f_j f_{j+1})$); ou

$$(-1)^{j+k} \sum_{i_1,\cdots,i_p=1}^{m} C_{i_1,\cdots,i_p} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial^2 f_j}{\partial x^{i_j} \partial x^{i_{j+1}}} \cdots f_k \frac{\partial f_{k+1}}{\partial x^{i_{k+1}}} \cdots \frac{\partial f_p}{\partial x^{i_p}} \\ + \frac{\partial f_1}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial^2 f_j}{\partial x^{i_j} \partial x^{i_{j+1}}} \cdots \frac{\partial f_k}{\partial x^{i_{k+1}}} f_{k+1} \cdots \frac{\partial f_p}{\partial x^{i_p}} \end{pmatrix},$$

se $j < k < p$ (aplique a regra de Leibniz ao termo $\frac{\partial}{\partial x^{i_{k+1}}} (f_k f_{k+1})$); ou

$$(-1)^{j+p} \sum_{i_1,\cdots,i_p=1}^{m} C_{i_1,\cdots,i_p} \frac{\partial f_1}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial f_{j-1}}{\partial x^{i_{j-1}}} \frac{\partial^2 f_j}{\partial x^{i_j} \partial x^{i_{j+1}}} \frac{\partial f_{j+1}}{\partial x^{i_{j+2}}} \cdots \frac{\partial f_{p-1}}{\partial x^{i_p}} f_p,$$

se $k = p$. Note que os termos rotulados com c e d na expressão que obtivemos acima para C_j são exatamente

$$c = C(f_1, \cdots, f_p)$$

e

$$d = C^\tau (f_1, \cdots, f_p).$$

Note também que $\sum_{k=1}^{j-2} C_k$ e $\sum_{k=j+1}^{p-1} C_k$ são somas telescópicas:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{j-1} C_k &= (-1)^{j+1} \sum_{i_1,\cdots,i_p=1}^{m} C_{i_1,\cdots,i_p} f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial^2 f_{j+1}}{\partial x^{i_j} \partial x^{i_{j+1}}} \cdots \frac{\partial f_p}{\partial x^{i_p}} \\ &\quad - \sum_{i_1,\cdots,i_p=1}^{m} C_{i_1,\cdots,i_p} \frac{\partial f_1}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial f_{j-1}}{\partial x^{i_{j-1}}} f_j \frac{\partial^2 f_{j+1}}{\partial x^{i_j} \partial x^{i_{j+1}}} \cdots \frac{\partial f_p}{\partial x^{i_p}} \\ &= -C_0 - a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=j+1}^{p-1} C_k &= -\sum_{i_1,\cdots,i_p=1}^{m} C_{i_1,\cdots,i_p} \frac{\partial f_1}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial^2 f_j}{\partial x^{i_j} \partial x^{i_{j+1}}} f_{j+1} \frac{\partial f_{j+2}}{\partial x^{i_{j+2}}} \cdots \frac{\partial f_p}{\partial x^{i_p}} \\ &\quad + (-1)^{j+p-1} \sum_{i_1,\cdots,i_p=1}^{m} C_{i_1,\cdots,i_p} \frac{\partial f_1}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial^2 f_j}{\partial x^{i_j} \partial x^{i_{j+1}}} \cdots \frac{\partial f_{p-1}}{\partial x^{i_p}} f_p \\ &= -b - C_p. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\delta\varphi_\tau(C)(f_1,\cdots,f_p) =$$

$$\sum_{k=0}^{p} C_k = C_0 + \sum_{k=1}^{j-1} C_k + C_j + \sum_{k=j+1}^{p-1} C_k + C_p =$$

$$C_0 + (-C_0 - a) + (a+b+c+d) + (-b - C_p) + C_p =$$

$$c + d = C(f_1,\cdots,f_p) + C^\tau(f_1,\cdots,f_p),$$

como afirmamos.

Suponha agora que τ_1 e τ_2 são transposições de inteiros consecutivos. Iterando (7.3) vemos que

$$\begin{aligned} \delta\left(\varphi_{\tau_2}(C) - \varphi_{\tau_1}(C^{\tau_2})\right) &= \delta\varphi_{\tau_2}(C) - \delta\varphi_{\tau_1}(C^{\tau_2}) \\ &= C + C^{\tau_2} - C^{\tau_2} - (C^{\tau_2})^{\tau_1} \\ &= C - C^{\tau_2\tau_1}. \end{aligned}$$

Mais geralmente, se $\tau_1,\cdots,\tau_k$ são transposições de inteiros consecutivos, uma indução mostra que

$$\delta\left(\varphi_{\tau_k}(C) - \varphi_{\tau_{k-1}}(C^{\tau_k}) + \varphi_{\tau_{k-2}}(C^{\tau_k\tau_{k-1}}) - \cdots + (-1)^{k+1}\varphi_{\tau_1}(C^{\tau_k\cdots\tau_2})\right) =$$

$$C - (-1)^k C^{\tau_k\cdots\tau_1}. \tag{7.4}$$

Toda permutação se escreve como composição de transposições de elementos consecutivos. A paridade do número das transposições requeridas para tanto é uma constante que só depende da permutação em questão. De fato, se $\sigma\in S_p$ se decompõe como

$$\sigma = \tau_k\cdots\tau_1,$$

temos que

$$sgn\ \sigma = (-1)^k.$$

Assim, podemos fixar uma decomposição em transposições de elementos consecutivos $\sigma = \tau_k\cdots\tau_1$ para cada $\sigma\in S_p$ e definir

$$\varphi_\sigma(C) \equiv \varphi_{\tau_k}(C) - \varphi_{\tau_{k-1}}(C^{\tau_k}) + \varphi_{\tau_{k-2}}(C^{\tau_k\tau_{k-1}}) - \cdots + (-1)^{k+1}\varphi_{\tau_1}(C^{\tau_k\cdots\tau_2}).$$

Reescrevendo (7.4), vem

$$\delta\varphi_\sigma(C) = C - sgn\ \sigma\ C^\sigma. \tag{7.5}$$

Finalmente, definindo a $(p-1)$ −cocadeia diferencial de ordem 2

$$B \equiv \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p}\varphi_\sigma(C),$$

obtemos, por meio de (7.5),

$$\begin{aligned} \delta B &= \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p}\delta\varphi_\sigma(C) \\ &= C-\frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p} sgn\ \sigma C^\sigma, \end{aligned}$$

ou seja,

$$C=\delta B+skew\ C.$$

Por construção, temos $supp\ B\subset supp\ C$. ■

Seja $(U,x^1,\cdots,x^m)$ um sistema de coordenadas locais de uma variedade diferenciável $m-$dimensional M, e considere os operadores diferenciais locais (i.e., definidos em U) de ordem k dados por

$$\partial_I=\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial x^{i_k}}$$

para

$$I=(i_1,\cdots,i_k)\in[m]^k=[m]\times\cdots\times[m]\subset\mathcal{I}_k.$$

Não se deve confundi-los com os operadores ∂^I do lema 118. Lá, o multi-índice I diz respeito ao número de vezes que cada derivada parcial é aplicada, ao passo que o multi-índice I de ∂_I nos diz com relação a quais coordenadas x^i devemos tomar derivadas.

Graças à comutatividade das derivadas parciais, temos que

$$\partial_I=\partial_{\sigma(I)}$$

para todo $I=(i_1,\cdots,i_k)\in[m]^k$ e toda permutação $\sigma\in S_k$, que age sobre $[m]^k$ segundo a regra

$$\sigma(I)\equiv\left(i_{\sigma(1)},\cdots,i_{\sigma(k)}\right).$$

Diremos que $I,J\in[m]^k$ são equivalentes, e escreveremos $I\sim J$, se existir uma permutação $\sigma\in S_k$ tal que $\sigma(I)=J$. Claramente, isto define uma relação de equivalência em $[m]^k$, e, pela observação acima, vemos que

$$I\sim J\Rightarrow\partial_I=\partial_J.$$

Na verdade, temos

$$I\sim J\Leftrightarrow\partial_I=\partial_J.$$

Com efeito, definindo para cada $k-$upla $I=(i_1,\cdots,i_k)\in[m]^k$ a função $x^I\equiv x^{i_1}\cdots x^{i_k}\in C^\infty(U)$, vemos que $\partial_I\ x^I$ é uma constante não nula, ao passo que $\partial_J x^I$ é zero ou é mútiplo de alguma coordenada x^i se $I\nsim J$ (i.e., se não vale $I\sim J$).

Definindo a operação $\sqcup$ de justaposição de $k-$uplas pela fórmula natural

$$(i_1,\cdots,i_r)\sqcup(j_1,\cdots,j_s)\equiv(i_1,\cdots,i_r,j_1,\cdots,j_s),$$

temos que

$$\partial_I = \partial_J \circ \partial_K,$$

se, e somente se, $J \sqcup K \sim I$. Convencionaremos também que $\emptyset$ é uma (na verdade, a única) $0-$upla e satisfaz

$$I \sqcup \emptyset = \emptyset \sqcup I = I$$

para qualquer $k-$upla I. Definimos então

$$\partial_\emptyset \equiv id_{C^\infty(M)}.$$

Fixadas estas notações, podemos enunciar o seguinte

Lema 122 *Dados $I \in [m]^k$ e funções $f, g \in C^\infty(U)$, valem as regras*

$$\partial_I(fg) = \sum_{J \sqcup K \sim I} \partial_J f \; \partial_K g \tag{7.6}$$

e

$$\delta \partial_I = -\sum_{\substack{J \sqcup K \sim I \\ J,K \neq \emptyset}} \partial_J \otimes \partial_K. \tag{7.7}$$

Prova. Seja $I \in [m]^k$. Provaremos (7.6) por indução em k. Para $k = 1$, (7.6) é apenas a regra de Leibniz. Para $k > 1$, temos

$$\begin{aligned}
\partial_I(fg) &= \underbrace{\partial_{(i_1,\cdots,i_{k-1})}}_{J} \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}(fg) \\
&= \partial_J\left(\frac{\partial f}{\partial x^{i_k}} g\right) + \partial_J\left(f \frac{\partial g}{\partial x^{i_k}}\right) \\
&= \sum_{K \sqcup L \sim J} \partial_K\left(\frac{\partial f}{\partial x^{i_k}}\right) \partial_L g + \sum_{K \sqcup L \sim J} \partial_K f \; \partial_L\left(\frac{\partial g}{\partial x^{i_k}}\right) \\
&= \sum_{K \sqcup N \sim J} \left(\partial_K \circ \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\right) f \; \partial_N g + \sum_{M \sqcup L \sim J} \partial_M f \; \left(\partial_L \circ \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\right) g \\
&= \sum_{K \sqcup N \sim J} \partial_{K \sqcup (i_k)} f \; \partial_N g + \sum_{M \sqcup L \sim J} \partial_M f \; \partial_{L \sqcup (i_k)} g \\
&= \sum_{M \sqcup N \sim I} \partial_M f \; \partial_N g
\end{aligned}$$

usando a regra de Leibniz na segunda igualdade e a hipótese de indução na terceira. A última igualdade decorre das seguintes equivalências.

$$I = J \sqcup (i_k) \sim M \sqcup N$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{gathered}\exists K \text{ tal que } M \sim K \sqcup (i_k) \text{ e } J \sim K \sqcup N \\ \text{ou} \\ \exists L \text{ tal que } N \sim L \sqcup (i_k) \text{.e } J \sim M \sqcup L \\ \Updownarrow \\ \exists K \text{ tal que } \partial_M = \partial_{K \sqcup (i_k)} \text{ e } J \sim K \sqcup N \\ \text{ou} \\ \exists L \text{ tal que } \partial_N = \partial_{L \sqcup (i_k)} \text{.e } J \sim M \sqcup L\end{gathered}$$

A fórmula (7.7) é uma conseqüência imediata da identidade (7.6), que acabamos de provar. Com efeito, explicitando os termos extremos $J = \emptyset, K = I$ e $J = I, K = \emptyset$ na expressão (7.6), escrevemos

$$\partial_I (fg) = f(\partial_I g) + \sum_{\substack{J \sqcup K \sim I \\ J,K \neq \emptyset}} \partial_J f \; \partial_K g + (\partial_I f)\, g.$$

Substituindo na definição (5.2), vem

$$\begin{aligned}\delta \partial_I (f,g) &= f(\partial_I g) - \partial_I (fg) + (\partial_I f)\, g \\ &= -\sum_{\substack{J \sqcup K \sim I \\ J,K \neq \emptyset}} \partial_J f \; \partial_K g,\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ∎

Teorema 123 (Gutt-Rawnsley, 1999) *Dado um $p-$cociclo diferencial $C \in Z^p_{diff}(\mathbb{R}^m)$, existem uma $(p-1)-$cocadei diferencial $B \in C^{p-1}_{diff}(\mathbb{R}^m)$ e um $p-$cociclo diferencial alternado de ordem 1 $A \in skew\ Z^p_{diff,1}(\mathbb{R}^m)$ tais que*

$$C = \delta B + A$$

e supp A, supp $B \subset$ supp C.

Prova. Vamos por indução em p.

O caso $p = 1$ é trivial, pois nesse caso, $C = A \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^m)$, de acordo com a observação 108. Podemos portanto considerar $p \geq 2$.

Fixemos por ora $f_2, \cdots, f_p \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ e olhemos para $C(f_1, \cdots, f_p)$ como um operador diferencial de ordem k em $\mathbb{R}^m$ aplicado em f_1. A idéia é mostrar que C é cohomólogo a um cociclo diferencial que atua no primeiro argumento com ordem $k-1$. Então, *a fortiori*, C será cohomólogo a um cociclo diferencial que atua no primeiro argumento com ordem 1. Usando a hipótese de indução, concluiremos então que C é cohomólogo a um cociclo diferencial de ordem 1, o que nos colocará em condições de apelar ao lema 121. Aos cálculos.

Destacando os termos de maior ordem (ou seja, k) em f_1 e valendo-nos da comutatividade das derivadas parciais, escrevemos

$$C(f_1, \cdots, f_p) = \sum_{i_1, \cdots, i_k = 1}^{m} \frac{\partial^k f_1}{\partial x^{i_1} \cdots \partial x^{i_k}} D_{(i_1, \cdots, i_k)}(f_2, \cdots, f_p) + \cdots,$$

onde os $D_{(i_1,\cdots,i_k)} \in C^{p-1}_{diff}(\mathbb{R}^m)$ são simétricos com relação a $(i_1,\cdots,i_k)$, i.e., tem-se

$$D_{(i_1,\cdots,i_k)} = D_{\left(i_{\sigma(1)},\cdots,i_{\sigma(k)}\right)},\ \forall\sigma \in S_k.$$

Ou seja,

$$C = \sum_I \partial_I \otimes D_I + \cdots,$$

onde o multi-índice $I = (i_1,\cdots,i_k)$ varre o subconjunto $[m]^k = [m]\times\cdots\times[m]$ de $\mathcal{I}_k$, e definimos

$$\partial_I = \frac{\partial^k}{\partial x^{i_1}\cdots\partial x^{i_k}}.$$

Aplicando o operador de cobordo e usando a propriedade (5.10), vem

$$\delta C = \sum_I \delta\partial_I \otimes D_I - \sum_I \partial_I \otimes \delta D_I + \cdots$$

Como $\partial_I \in C^1_{diff,k}(\mathbb{R}^m)$, o lema 119 garante que $\delta\partial_I \in C^2_{diff,k-1}$. Assim, destacando apenas os termos de maior ordem no primeiro argumento, temos

$$\delta C = -\sum_I \partial_I \otimes \delta D_I + \cdots$$

Isso mostra que, sendo C um cociclo, os coeficientes D_I dos termos de maior ordem k em f_1 também são cociclos.

Com efeito, a função $x^I\left(x^1,\cdots,x^m\right) \equiv x^{i_1}\cdots x^{i_k}$ é tal que

$$\partial_I x^I \in \mathbb{C} - \{0\}$$

e, se D é um operador diferencial de ordem menor do que k, então existe $i \in [m]$ tal que

$$Dx^I\left(x^1,\cdots,x^m\right) = x^i g\left(x^1,\cdots,x^m\right),$$

para alguma função $g \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$. Ora, $\delta C = 0$ implica

$$\sum_I \partial_I \otimes \delta D_I = \begin{array}{c}\text{termos de ordem menor}\\ \text{do que } k \text{ no primeiro argumento}\end{array},$$

e podemos escrever

$$\delta D_I\left(f_2,\cdots,f_{p+1}\right)\left(x^1,\cdots,x^m\right) = \frac{1}{\partial_I x^I}\sum_{i=1}^m x^i g_i\left(x^1,\cdots,x^m\right),$$

para certas funções $g_1,\cdots,g_m \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ que dependem apenas das funções $f_2,\cdots,f_{p+1}$. Avaliando na origem, obtemos

$$\delta D_I\left(f_2,\cdots,f_{p+1}\right)(0,\cdots,0) = 0,$$

para quaisquer funções $f_2, \cdots, f_{p+1} \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$. Afirmamos que isso é suficiente para $\delta D_I = 0$. Com efeito, dado $x \in \mathbb{R}^m$, temos

$$\delta D_I(f_2, \cdots, f_{p+1})(x) = 0$$

se e somente se

$$\delta D_I\left(f_2^x, \cdots, f_{p+1}^x\right)(0) = 0,$$

onde as funções $f_2^x, \cdots, f_{p+1}^x \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ são definidas por

$$f_j^x(y) \equiv f_j(x-y), \quad \forall j \in [p+1]_2.$$

Assim, concluimos a prova de que os coeficientes D_I são mesmo $(p-1)$ −cociclos diferenciais.

Pela hipótese de indução, existem cocadeias

$$E_I \in C_{diff}^{p-2}(\mathbb{R}^m)$$

e cociclos

$$F_I \in skew\ Z_{diff,1}^{p-1}(\mathbb{R}^m)$$

com suportes em *supp* $D_I \subset$ *supp* C tais que vale

$$D_I = \delta E_I + F_I. \tag{7.8}$$

Defina agora

$$G \equiv \sum_I \partial_I \otimes E_I.$$

Levando em conta apenas os termos de maior ordem no primeiro argumento (use a proposição 107 e o lema 119), usando (7.8) temos que

$$C + \delta G =$$

$$\sum_I \partial_I \otimes \delta E_I + \sum_I \partial_I \otimes F_I - \sum_I \partial_I \otimes \delta E_I + \cdots$$

$$= \sum_I \partial_I \otimes F_I + \cdots,$$

ou seja, o cociclo

$$C' \equiv C + \delta G \tag{7.9}$$

pode ser escrito como

$$C' = \sum_I \partial_I \otimes F_I + H, \tag{7.10}$$

onde $H \in C_{diff}^p(\mathbb{R}^m)$ é uma cocadeia diferencial que opera com ordem $k-1$ no primeiro argumento.

Tomando cobordos e levando em conta o fato de que F_I é um cociclo diferencial de ordem 1, vemos que

$$\delta H = -\sum_I \delta\partial_I \otimes F_I, \tag{7.11}$$

e logo que δH opera diferencialmente com ordem $k-1$ no primeiro argumento (pelo lema 119) e com ordem 1 nos demais.

Existem funções

$$H_{I_1\cdots I_p} \in C^\infty\left(\mathbb{R}^m\right)$$

que nos permitem escrever

$$H = \sum_{I_1,\cdots,I_p} H_{I_1\cdots I_p}\partial_{I_1}\otimes\cdots\otimes\partial_{I_p},$$

como soma finita cujos índices $I_1,\cdots,I_p$ são $r-$uplas em $[m]^r$ com comprimento r variável mas sempre menor que a ordem de H. Graças à comutatividade das derivadas parciais, podemos supor sem perda de generalidade que as funções $H_{I_1\cdots I_p}$ são simétricas com relação aos índices inteiros que compõem cada subíndice I_j tomado separadamente, i.e., que vale a regra

$$H_{I_1\cdots\sigma(I_j)\cdots I_p} = H_{I_1\cdots I_p}$$

para quaisquer $j\in[p]$ e $\sigma\in S_r$, onde convencionamos

$$\sigma(I) \equiv \left(i_{\sigma(1)},\cdots,i_{\sigma(r)}\right)\in[m]^r,$$

$$\forall I = (i_1,\cdots,i_r)\in[m]^r.$$

O cobordo de H é dado então pela prop. 107 como

$$\delta H = \sum_{I_1,\cdots,I_p} H_{I_1\cdots I_p}\sum_{t=1}^{p}(-1)^{t+1}\,\partial_{I_1}\otimes\cdots\otimes\delta\partial_{I_t}\otimes\cdots\otimes\partial_{I_p}, \tag{7.12}$$

donde se vê que os termos que operam com ordem extamente $k-1$ no primeiro argumento provêm de multi-índices $I_1,\cdots,I_p$ tais que

$$I_1\in[m]^{k-1} \tag{7.13}$$

e tais que existe $t_0\in[p]_2$ tal que

$$I_t \in \left\{\begin{array}{c}[m]^2,\ \text{se } t=t_0\\ [m],\ \text{se } t\neq t_0\end{array}\right., \tag{7.14}$$

se $t\in[p]_2$.

Cada uma dos cociclos diferenciais (de ordem 1) alternados F_I pode ser escrito como

$$F_I = \sum_{j_2,\cdots,j_p=1}^{m} F_{I[j_2,\cdots,j_p]}\frac{\partial}{\partial x^{j_2}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{j_p}} \tag{7.15}$$

para certas funções $F_{I[j_2,\cdots,j_p]}\in C^\infty\left(\mathbb{R}^m\right)$, antissimétricas com relação aos índices entre colchetes.

Substituindo (7.12), (7.15) e usando (7.7) na equação (7.11) temos que

$$\sum_{I}\sum_{j_2,\cdots,j_p=1}^{m}\sum_{\substack{J\sqcup K\sim I\\ J,K\neq\emptyset}} F_{I[j_2,\cdots,j_p]}\partial_J\otimes\partial_K\otimes\frac{\partial}{\partial x^{j_2}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{j_p}}$$

$$+\sum_{t=1}^{p}\sum_{I_1,\cdots,I_p}\sum_{\substack{M\sqcup N\sim I_t\\ M,N\neq\emptyset}}(-1)^{t+1}H_{I_1\cdots I_p}\partial_{I_1}\otimes\cdots\otimes\partial_M\otimes\partial_N\otimes\cdots\otimes\partial_{I_p}=0.$$

Reunindo os termos que operam com ordem exatamente igual a $k-1$ no primeiro argumento e 1 nos demais, e levando em conta as condições (7.13) e (7.14), obtemos, para cada $I=(i_1,\cdots,i_{k-1})\in[m]^k$,

$$\sum_{\substack{i_1,\cdots,i_{k-1}=1\\ j_1,\cdots,j_p=1}}^{m} A_{i_1\cdots i_{k-1}j_1\cdots j_p}\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{i_1}\cdots\partial x^{i_{k-1}}}\otimes\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{j_p}}=0,$$

onde

$$\begin{aligned} A_{i_1\cdots i_{k-1}j_1\cdots j_p} &= kF_{(i_1,\cdots,i_{k-1},j_1)[j_2,\cdots,j_p]}+2H_{(i_1,\cdots,i_{k-1})(j_1,j_2)j_3\cdots j_p}\\ &\quad -\cdots+(-1)^{p+1}2H_{(i_1,\cdots,i_{k-1})j_1j_2,\cdots(j_pj_{p+1})}\end{aligned}$$

e os coeficientes $F_{(i_1,\cdots,i_{k-1},j_1)[j_2,\cdots,j_p]}$ e $H_{(i_1,\cdots,i_{k-1})j_1\cdots(j_q,j_{q+1})\cdots j_p}$ são simétricos com relação a cada grupo de índices confinados por um par de parênteses. Portanto, obtemos as equações

$$\begin{aligned} &kF_{(i_1,\cdots,i_{k-1},j_1)[j_2,\cdots,j_p]}+2H_{(i_1,\cdots,i_{k-1})(j_1,j_2)j_3\cdots j_p}\\ &-\cdots+(-1)^{p+1}2H_{(i_1,\cdots,i_{k-1})j_1j_2\cdots(j_p,j_{p+1})}=0 \end{aligned}\tag{7.16}$$

válidas para todos $i_1,\cdots,i_{k-1},j_1,\cdots,j_p\in[m]$.

Tomando a antissimetrização de (7.16) com relação aos índices $j_1,\cdots,j_p$, não é difícil ver que os termos em H se cancelam, resultando

$$\sum_{\sigma\in S_p} sgn\ \sigma F_{\left(i_1,\cdots,i_{k-1},j_{\sigma(1)}\right)\left[j_{\sigma(2)},\cdots,j_{\sigma(p)}\right]}=0.\tag{7.17}$$

Seja $\sigma\in S_p$ uma permutação que fixa 1. Nesse caso, as possíveis inversões ocorrerão entre os índices $j_{\sigma(2)},\cdots,j_{\sigma(p)}$, segundo os quais os coeficientes de F são antissimétricos. Ora, a menos da permutação inversa σ^{-1}, de mesma paridade que σ, esses índices são exatamente $2,3,\cdots,p$. Portanto, temos

$$F_{\left(i_1,\cdots,i_{k-1},j_{\sigma(1)}\right)\left[j_{\sigma(2)},\cdots,j_{\sigma(p)}\right]}=sgn\ \sigma\ F_{(i_1,\cdots,i_{k-1},j_1)[j_2,\cdots,j_p]}.\tag{7.18}$$

As permutações que fixam 1 são uma representação do grupo S_{p-1} em S_p (com efeito, permutam os $p-1$ elementos $2,\cdots,p$). Logo, há exatamente $(p-1)!$ permutações que fixam p em S_p.

Fixemos por ora $s \in [p]_2$ e consideremos uma permutação $\sigma \in S_p$ que leva 1 em s, i.e., t.q. $\sigma(1) = s$. A menos de uma permutação ρ que fixa s, temos que os índices $j_{\sigma(2)}, \cdots, j_{\sigma(p)}$ são exatamente $1, \cdots, s-1, s+1, \cdots, p$, que denotaremos com o símbolo de omissão $\hat{}$ por $1, \cdots, \widehat{s}, \cdots, p$. Portanto, temos

$$F_{\left(i_1,\cdots,i_{k-1},j_{\sigma(1)}\right)\left[j_{\sigma(2)},\cdots,j_{\sigma(p)}\right]} = sgn\ \rho\ F_{(i_1,\cdots,i_{k-1},j_s)\left[j_1,\cdots,\widehat{j_s},\cdots j_p\right]}.$$

Das imagens

$$(1,\cdots,p) \overset{\sigma}{\mapsto} (s,\sigma(2),\cdots,\sigma(p)) \overset{\rho}{\mapsto} (s,1,\cdots,\widehat{s},\cdots p)$$

vemos que a premutação $\rho \circ \sigma$ provoca exatamente $s-1$ inversões, donde segue que

$$sgn\ \rho \cdot sgn\ \sigma = sgn\ (\rho\sigma) = (-1)^{s-1},$$

e logo

$$sgn\ \rho = (-1)^{s-1}\, sgn\ \sigma.$$

Portanto, se $\sigma \in S_p$ leva 1 em $s \in [p]_2$, vale a identidade

$$F_{\left(i_1,\cdots,i_{k-1},j_{\sigma(1)}\right)\left[j_{\sigma(2)},\cdots,j_{\sigma(p)}\right]} = (-1)^{s-1}\, sgn\ \sigma\ F_{(i_1,\cdots,i_{k-1},j_s)\left[j_1,\cdots,\widehat{j_s},\cdots j_p\right]}. \tag{7.19}$$

Considere a seguinte decomposição disjunta de S_p.

$$S_p = \cup_{r=1}^{p}\{\sigma \in S_p;\ \sigma(1) = r\}.$$

É claro que, para todos $r, s \in [p]_2$, temos

$$n \equiv \#\{\sigma \in S_p;\ \sigma(1) = s\} = \#\{\sigma \in S_p;\ \sigma(1) = r\}.$$

Também já sabemos que

$$\#\{\sigma \in S_p;\ \sigma(1) = 1\} = (p-1)!$$

Então, temos

$$p! = \#S_p = (p-1)! + (p-1)\,n,$$

donde segue que

$$n = (p-1)!$$

Parcelando a soma em (7.17) segundo a decomposição de S_p dada acima, e substituindo (7.18) e (7.19), obtemos

$$0 = \left(\sum_{\substack{\sigma\in S_p\\ \sigma(1)=1}} + \sum_{s=2}^{p}\sum_{\substack{\sigma\in S_p\\ \sigma(1)=s}}\right) sgn\ \sigma\ F_{(i_1,\cdots,i_{k-1},j_1)[j_2,\cdots,j_p]} =$$

$$\sum_{\substack{\sigma\in S_p\\ \sigma(1)=1}} \underbrace{(sgn\ \sigma)^2}_{1}\underbrace{F_{(i_1,\cdots,i_{k-1},j_1)[j_2,\cdots,j_p]}}_{\text{não depende de } \sigma}$$

$$+\sum_{s=2}^{p}\sum_{\substack{\sigma\in S_p\\ \sigma(1)=s}}\underbrace{(sgn\ \sigma)^2}_{1}\underbrace{(-1)^{s-1}F_{(i_1,\cdots,i_{k-1},j_s)\left[j_1,\cdots,\widehat{j_s},\cdots j_p\right]}}_{\text{não depende de }\sigma}$$

$$=(p-1)!\left(F_{(i_1,\cdots,i_{k-1},j_1)[j_2,\cdots,j_p]}+\sum_{s=2}^{p}(-1)^{s-1}F_{(i_1,\cdots,i_{k-1},j_s)\left[j_1,\cdots,\widehat{j_s},\cdots j_p\right]}\right),$$

donde

$$F_{(i_1,\cdots,i_{k-1},j_1)[j_2,\cdots,j_p]}=\sum_{s=2}^{p}(-1)^{s}F_{(i_1,\cdots,i_{k-1},j_s)\left[j_1,\cdots,\widehat{j_s},\cdots j_p\right]},\tag{7.20}$$

ou, pondo $i_k\equiv j_1$,

$$F_{(i_1,\cdots,i_k)[j_2,\cdots,j_p]}=\sum_{s=2}^{p}(-1)^{s}F_{(i_1,\cdots,i_{k-1},j_s)\left[i_k,j_2,\cdots,\widehat{j_s},\cdots j_p\right]}.\tag{7.21}$$

Considere agora uma permutação $\sigma\in S_k$. Graças à comutatividade dos primeiros k índices dos coeficientes de F, temos

$$F_{(i_1,\cdots,i_k)[j_2,\cdots,j_p]}=F_{\left(i_{\sigma(1)},\cdots,i_{\sigma(k)}\right)[j_2,\cdots,j_p]},$$

que substituida em (7.21) dá

$$F_{(i_1,\cdots,i_k)[j_2,\cdots,j_p]}=\sum_{s=2}^{p}(-1)^{s}F_{\left(i_{\sigma(1)},\cdots,i_{\sigma(k-1)},j_s\right)\left[i_{\sigma(k)},j_2,\cdots,\widehat{j_s},\cdots j_p\right]}.$$

Chamando $\sigma(k)$ de r, vemos que a seqüência $\sigma(1),\cdots,\sigma(k-1)$ é, a menos de uma permutação, a seqüência $1,\cdots,\widehat{r},\cdots,k$. Da comutatividade que acabamos de mencionar, vem então a identidade

$$F_{(i_1,\cdots,i_k)[j_2,\cdots,j_p]}=\sum_{s=2}^{p}(-1)^{s}F_{\left(i_1,\cdots,\widehat{i_r},\cdots i_k,j_s\right)\left[i_r,j_2,\cdots,\widehat{j_s},\cdots j_p\right]}\tag{7.22}$$

Escolha, em S_k, uma permutação que leva k em 1, uma que leva k em 2, e assim sucessivamente, até uma que fixa k. Somando as equações (7.22) correspondentes a essas k permutações fixadas, obtemos

$$kF_{(i_1,\cdots,i_k)[j_2,\cdots,j_p]}=\sum_{r=1}^{k}\sum_{s=2}^{p}(-1)^{s}F_{\left(i_1,\cdots,\widehat{i_r},\cdots i_k,j_s\right)\left[i_r,j_2,\cdots,\widehat{j_s},\cdots j_p\right]}.\tag{7.23}$$

Por outro lado, somando em $s\in[p]_2$ a igualdade óbvia

$$F_{(i_1,\cdots,i_k)[j_2,\cdots,j_p]}=(-1)^{s}F_{(i_1,\cdots,i_k)\left[j_s,j_2,\cdots,\widehat{j_s},\cdots,j_p\right]},$$

temos

$$(p-1)\,F_{(i_1,\cdots,i_k)[j_2,\cdots,j_p]}=\sum_{s=2}^{p}(-1)^{s}F_{(i_1,\cdots,i_k)\left[j_s,j_2,\cdots,\widehat{j_s},\cdots,j_p\right]}.\tag{7.24}$$

Somando agora (7.23) e (7.24), vem

$$(k+p-1)\,F_{(i_1,\cdots,i_k)[j_2,\cdots,j_p]} = \sum_{s=2}^{p} (-1)^s\, K_{(i_1,\cdots,i_k,j_s)j_2\cdots\widehat{j_s}\cdots,j_p}, \tag{7.25}$$

onde definimos

$$\begin{aligned} K_{(i_1,\cdots,i_k,j_s)j_2\cdots\widehat{j_s}\cdots,j_p} \quad &\equiv \quad \sum_{r=1}^{k} F_{\left(i_1,\cdots,\widehat{i_r},\cdots i_k,j_s\right)\left[i_r,j_2,\cdots,\widehat{j_s},\cdots j_p\right]} \\ &\quad + F_{(i_1,\cdots,i_k)\left[j_s,j_2,\cdots,\widehat{j_s},\cdots j_p\right]}. \end{aligned} \tag{7.26}$$

Tomamos a liberdade de já colocar os primeiros $k+1$ índices dos kas entre parênteses porque, como se vê claramente de (7.26), essas funções são mesmo simétricas com relação a eles.

Usando a soma telescópica

$$\sum_{t=3}^{s} (-1)^t \left(K_{(i_1,\cdots,i_k,j_t)j_2\cdots\widehat{j_t}\cdots,j_p} + K_{(i_1,\cdots,i_k,j_{t-1})j_2\cdots\widehat{j_{t-1}}\cdots,j_p}\right)$$
$$= (-1)^s\, K_{(i_1,\cdots,i_k,j_s)j_2\cdots\widehat{j_s}\cdots,j_p} - K_{(i_1,\cdots,i_k,j_2)j_3\cdots,j_p},$$

podemos reescrever (7.25) como

$$(k+p-1)\,F_{(i_1,\cdots,i_k)[j_2,\cdots,j_p]} =$$
$$\sum_{s=2}^{p} \left(\begin{array}{c} K_{(i_1,\cdots,i_k,j_2)j_3\cdots,j_p} + \\ \sum_{t=3}^{s} (-1)^t \left(K_{(i_1,\cdots,i_k,j_t)j_2\cdots\widehat{j_t}\cdots,j_p} + K_{(i_1,\cdots,i_k,j_{t-1})j_2\cdots\widehat{j_{t-1}}\cdots,j_p}\right) \end{array} \right).$$

Efetuando a soma em $s \in [p]_2$, obtemos finalmente

$$F_{(i_1,\cdots,i_k)[j_2,\cdots,j_p]} =$$
$$\frac{p-1}{k+p-1} K_{(i_1,\cdots,i_k,j_2)j_3\cdots,j_p} \tag{7.27}$$
$$+\sum_{t=3}^{p} (-1)^t\, \frac{p+1-t}{k+p-1} \left(K_{(i_1,\cdots,i_k,j_t)j_2\cdots\widehat{j_t}\cdots,j_p} + K_{(i_1,\cdots,i_k,j_{t-1})j_2\cdots\widehat{j_{t-1}}\cdots,j_p}\right). \tag{7.28}$$

Considere agora as $p-$cocadeias diferenciais

$$K_I \equiv K_{(i_1,\cdots,i_k,j_2)j_3\cdots,j_p} \partial_{(i_1,\cdots,i_k,j_2)} \otimes \partial_{(j_3)} \otimes \cdots \otimes \partial_{(j_p)}$$

e, para cada $t \in [p]_3$,

$$K_I^t \equiv \left(\begin{array}{c} K_{(i_1,\cdots,i_k,j_t)j_2\cdots\widehat{j_t}\cdots,j_p} \\ + \\ K_{(i_1,\cdots,i_k,j_{t-1})j_2\cdots\widehat{j_{t-1}}\cdots,j_p} \end{array} \right) \partial_{(i_1,\cdots,i_k)} \otimes \partial_{(j_2)} \otimes \cdots \otimes \partial_{(j_{t-1},j_t)} \otimes \cdots \otimes \partial_{(j_p)}.$$

Tomando os cobordos de K_I e $K_I^3, \cdots, K_I^p$ e comparando com (7.15), (7.27) e (7.28), vemos que existem números $\alpha^I, \beta_3^I, \cdots, \beta_p^I \in \mathbb{C}$ tais que

$$\partial_I \otimes F_I = \delta\left(\alpha^I K_I + \sum_{t=3}^{p} \beta_t^I K_I^t\right) + \begin{array}{c}\text{cocadeias que operam}\\ \text{no primeiro argumento}\\ \text{com ordem } k-1\end{array}.$$

Substituindo em (7.10) e depois em (7.9), vem

$$C = \delta\left(\sum_I \left(\alpha^I K_I + \sum_{t=3}^{p} \beta_t^I K_I^t\right) - G\right) + \begin{array}{c}\text{cocadeias que operam}\\ \text{no primeiro argumento}\\ \text{com ordem } k-1\end{array},$$

ou seja, o cociclo C é cohomólogo a um cociclo diferencial que opera no primeiro argumento com ordem $k-1$. Iterando essa argumentação, concluimos que C é cohomólogo a um cociclo diferencial que opera no primeiro argumento com ordem 1.

Podemos assumir, portanto, que

$$C = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes D_i,$$

onde $D_1, \cdots, D_m \in Z_{diff}^{p-1}(\mathbb{R}^m)$. De fato, colocando no primeiro argumento do cobordo nulo

$$0 = \delta C = -\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \delta D_i,$$

a função $f_1^{(j)}\left(x^1, \cdots, x^m\right) = x^j$, obtemos $\delta D_j = 0$, mostrando que os des são mesmo cociclos. Invocando a hipótese de indução sobre p, afirmamos que existem cocadeias $E_1, \cdots, E_m \in C_{diff}^{p-2}(\mathbb{R}^m)$ e cociclos alternados $F_1, \cdots, F_m \in$ *skew* $Z_{diff,1}^{p-1}(\mathbb{R}^m)$ com suportes em *supp* C tais que

$$D_i = \delta E_i + F_i$$

para todo $i \in [m]$. Segue então que

$$\begin{aligned} C &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \delta E_i + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes F_i \\ &= \delta\left(-\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes E_i\right) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes F_i. \end{aligned}$$

Como a cocadeia diferencial $F = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes F_i$ opera com ordem 1 em todos os seus argumentos, podemos invocar sobre ela o lema 121, que garante a existência de uma cocadeia $R \in C_{diff,2}^{p-1}(\mathbb{R}^m)$ com suporte em *supp* C tal que

$$F = \delta R + \textit{skew } F.$$

Tomando

$$B = R - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes E_i,$$

segue que

$$C = \delta B + skew\ F.$$

Aplicando o operador de cobordo a essa última equação, vemos que $\delta\left(skew\ F\right) = 0$, o que mostra que $A \equiv skew\ F$ é mesmo um cociclo. ■

7.2 Caso geral

Agora provaremos o mesmo resultado com uma variedade diferenciável arbitrária[1] M no lugar de $\mathbb{R}^m$. A idéia é fazer uso de uma partição da unidade para decompor o cociclo diferencial C numa soma localmente finita de cociclos com suportes em vizinhanças coordenadas. Cada um desses cociclos induz um cociclo num aberto de $\mathbb{R}^m$ via sistema de coordenadas correspondente. Esse cociclo pode ser naturalmente estendido a um cociclo em $\mathbb{R}^m$. Aplica-se então o teorema anterior. Mas para isso, devemos provar que o cociclo induzido em $\mathbb{R}^m$ é diferencial, o que ainda não sabemos.

Proposição 124 *Cocadeias diferenciais induzem cocadeias diferenciais de mesma ordem via difeomorfismos. Ou seja, dados um difeomorfismo*

$$\varphi : M \to N$$

e uma $p-$cocadeia $k-$diferencial $C \in C^p_{diff,k}(M)$, temos

$$\varphi_{\#}\left(C^p_{diff,k}(M)\right) \subset C^p_{diff,k}(N).$$

Prova. Pela linearidade do push-forward $\varphi_{\#}$, basta verificar a afirmação em cocadeias da forma

$$C = D_1 \otimes \cdots \otimes D_p,$$

onde $D_1, \cdots, D_p$ são operadores $k-$diferenciais em M que anulam constantes. Agora, a observação 110 nos diz que basta provar a proposição para $p = 1$ (i.e., para cada operador D_j acima). Já a observação 117 nos diz que um operador $k-$diferencial D admite a expressão local

$$D = \sum_{|I| \leq k} d_I \frac{\partial^{i_1}}{\partial\left(x^1\right)^{i_1}} \cdots \frac{\partial^{i_m}}{\partial\left(x^m\right)^{i_m}}, \tag{7.29}$$

[1] Exigimos aqui que M possua topologia Hausdorff de base enumerável.

onde $\left(U, \phi = \left(x^1, \cdots, x^m\right)\right)$ é um sistema de coordenadas para M. Vejamos, portanto, qual é a ação de $\varphi_\#$ numa derivada parcial $\frac{\partial}{\partial x^\mu} \in C^1_{diff}(U)$. Dados $g \in C^\infty(N)$ e $y \in \varphi(U)$, temos

$$\begin{aligned}
\varphi_\# \frac{\partial}{\partial x^\mu} g(y) &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} (g \circ \varphi)\left(\varphi^{-1}(y)\right) \\
&= \partial_\mu \left((g \circ \varphi) \circ \phi^{-1}\right)\left(\phi\left(\varphi^{-1}(y)\right)\right) \\
&= \partial_\mu \left(g \circ \left(\varphi \circ \phi^{-1}\right)\right)\left(\left(\phi \circ \varphi^{-1}\right)(y)\right) \\
&= \partial_\mu \left(g \circ \left(\phi \circ \varphi^{-1}\right)^{-1}\right)\left(\left(\phi \circ \varphi^{-1}\right)(y)\right) \\
&= \partial_\mu \left(g \circ \psi^{-1}\right)(\psi(y)) \\
&= \frac{\partial}{\partial y^\mu} g(y),
\end{aligned}$$

onde $\left(\varphi(U), \psi = \phi \circ \varphi^{-1} = \left(y^1, \cdots, y^m\right)\right)$ é um sistema de coordenadas para N. Portanto, vale

$$\varphi_\# \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial y^\mu}.$$

Um pouco de reflexão nos convencerá de que vale a expressão local

$$\varphi_\# D = \sum_{|I| \leq k} \left(d_I \circ \varphi^{-1}\right) \frac{\partial^{i_1}}{\partial \left(y^1\right)^{i_1}} \cdots \frac{\partial^{i_m}}{\partial \left(y^m\right)^{i_m}}$$

em $\varphi(U)$, para D localmente expresso por (7.29). Isso encerra a prova. ■

Corolário 125 *Variedades diferenciáveis difeomorfas possuem cohomologias diferenciais isomorfas. Mais precisamente, as aplicações de push-forward induzem isomorfismos dos subcomplexos de cocadeias diferenciais.*

Prova. Ora,

$$\varphi_\# \left(C^p_{diff}(M)\right) \subset C^p_{diff}(N)$$

e

$$\varphi_\#^{-1} \left(C^p_{diff}(N)\right) \subset C^p_{diff}(M)$$

implicam

$$\varphi_\# \left(C^p_{diff}(M)\right) = C^p_{diff}(N).$$

Isso mostra que $C^p_{diff}(M) \simeq C^p_{diff}(N)$. Agora, a comutatividade (6.3) nos diz que

$$\varphi_\# \left(Z^p_{diff}(M)\right) = Z^p_{diff}(N)$$

e

$$\varphi_\# \left(B^p_{diff}(M)\right) = B^p_{diff}(N).$$

Basta então definir o isomorfismo $\mathbb{C}-$linear

$$\begin{array}{cccc} \varphi_*: & H^p_{diff}(M) & \longrightarrow & H^p_{diff}(N) \\ & [C+\delta B] & \mapsto & [\varphi_\# C + \delta\varphi_\# B] \end{array}$$

nas cohomologias. ■

Na demonstração do teorema a seguir, lidaremos o tempo todo com restrições e extensões de cocadeias diferenciais, dois conceitos puramente operacionais cujas definições se apóiam no seguinte resultado de Análise.

Lema 126 *Sejam M uma variedade diferenciável, $U \subsetneq M$ um aberto próprio de M, e F um fechado de M contido em U. Então, existem uma vizinhança aberta V de F propriamente contida em U cujo fecho não-intersecta a fronteira ∂U e uma função $\eta \in C^\infty(M)$ tais que*

$$\eta(x) = 1, \ \forall x \in F$$

e

$$\eta(x) = 0, \ \forall x \notin V.$$

Prova. Todo $x \in F$ admite uma vizinhança coordenada B_x contida em U cujo fecho em M não intersecta a fronteira ∂U. Tome então

$$V = \cup_{x\in F} B_x.$$

É claro que temos $F \subsetneq V \subsetneq U$ e $\bar{V} \cap \partial U = \emptyset$. Agora, considere uma partição da unidade $\{\rho_V, \rho_{M-F}\}$ subordinada à cobertura aberta $\{V, M-F\}$ de M. Como *supp* $\rho_V \subset V$, então $\rho_V(x) = 0$ se $x \notin V$. Como *supp* $\rho_{M-F} \subset M-F$, então $\rho_{M-F}(x) = 0$ se $x \in F$. Como

$$\rho_V + \rho_{M-F} \equiv 1,$$

temos então que $\rho_V(x) = 1$ se $x \in F$. Podemos portanto tomar $\eta = \rho_V$. ■

Seja $C \in C^p_{diff}(M)$ uma cocadeia com suporte contido num aberto próprio $U \subsetneq M$. Seja $\eta \in C^\infty(M)$ uma função dada pelo lema anterior para $F =$ *supp* C. Dada uma função $g \in C^\infty(U)$, definimos a $\eta-$extensão de g a M como a função

$$g^{(\eta)}: M \to \mathbb{C}$$

$$g^{(\eta)}(x) = \begin{cases} \eta(x) g(x), \text{ se } x \in U \\ 0, \text{ se } x \notin U. \end{cases}.$$

É claro que $g^{(\eta)} \in C^\infty(M)$. Cumpre ressaltar que

$$g^{(\eta)}(x) = g(x), \ \forall x \in \textit{supp}\ C. \tag{7.30}$$

Definimos a *restrição* de C a U como a cocadeia $C|U \in C^p_{diff}(U)$ dada por

$$(C|U)(g_1, \cdots, g_p)(x) = C\left(g_1^{(\eta)}, \cdots, g_p^{(\eta)}\right)(x), \tag{7.31}$$

para todo $x \in U$ (a preservação do caráter diferencial da cocadeia sob restrição é imediata).

Vamos mostrar que, para quaisquer $f_1, \cdots, f_p \in C^\infty(M)$ e $x \in U$, tem-se

$$C(f_1, \cdots, f_p)(x) = (C|U)(f_1|U, \cdots, f_p|U)(x). \tag{7.32}$$

De fato, se $x \notin int\ (supp\ C)$, então a igualdade acima é trivialmente satisfeita. Por outro lado, (7.30) nos diz que $(f_j|U)^{(\eta)}$ coincide com f_j em $int\ (supp\ C)$, donde, por localidade, segue a igualdade para $x \in int\ (supp\ C)$:

$$\begin{aligned}(C|U)(f_1|U, \cdots, f_p|U)(x) &= C\left((f_1|U)^{(\eta)}, \cdots, (f_p|U)^{(\eta)}\right)(x)\\ &= C(f_1, \cdots, f_p)(x).\end{aligned}$$

A restrição a U de uma cocadeia C não depende da função η escolhida. Com efeito, dada $g \in C^\infty(U)$, as extensões a M $g^{(\eta)}$ e $g^{(\xi)}$ coincidem com g no interior do suporte de C (vide (7.30)), fora de onde C, e logo $C|U$, se anula identicamente.

A restrição comporta-se bem sob a ação do operador de cobordo. De fato, dadas funções $g_1, \cdots, g_{p+1} \in C^\infty(U)$ e $x \in U$, tem-se

$$\delta(C|U)(g_1, \cdots, g_{p+1})(x) =$$

$$g_1(x)(C|U)(g_2, \cdots, g_{p+1})(x)$$

$$+\sum_{j=1}^{p}(-1)^j (C|U)(g_1, \cdots, g_j g_{j+1}, \cdots, g_{p+1})(x)$$

$$+(-1)^{p+1}(C|U)(g_1, \cdots, g_p)(x)\, g_{p+1}(x)$$

$$= g_1(x)\, C\left(g_2^{(\eta)}, \cdots, g_{p+1}^{(\eta)}\right)(x)$$

$$+\sum_{j=1}^{p}(-1)^j C\left(g_1^{(\eta)}, \cdots, (g_j g_{j+1})^{(\eta)}, \cdots, g_{p+1}^{(\eta)}\right)(x)$$

$$+(-1)^{p+1} C\left(g_1^{(\eta)}, \cdots, g_p^{(\eta)}\right)(x)\, g_{p+1}(x),$$

que só não se anula para $x \in int\ supp\ C$, caso no qual, graças a (7.30) e à localidade das cocadeias diferenciais, podemos escrever

$$\delta(C|U)(g_1, \cdots, g_{p+1})(x) =$$

$$= g_1^{(\eta)}(x)\, C\left(g_2^{(\eta)}, \cdots, g_{p+1}^{(\eta)}\right)(x)$$

$$+\sum_{j=1}^{p}(-1)^j C\left(g_1^{(\eta)}, \cdots, g_j^{(\eta)} g_{j+1}^{(\eta)}, \cdots, g_{p+1}^{(\eta)}\right)(x)$$

$$+(-1)^{p+1} C\left(g_1^{(\eta)}, \cdots, g_p^{(\eta)}\right)(x)\, g_{p+1}^{(\eta)}(x)$$

$$= \delta C\left(g_1^{(\eta)}, \cdots, g_{p+1}^{(\eta)}\right)(x)$$
$$= (\delta C)\,|U\,(g_1, \cdots, g_{p+1})\,(x)\,,$$

pois $(g_j g_{j+1})^{(\eta)}$ e $g_j^{(\eta)} g_{j+1}^{(\eta)}$ coincidem com $g_j g_{j+1}$em *int supp* C. É trivial verificar que $(\delta C)\,|U$ também se anula fora de *int supp* C. Portanto, mostramos que vale a equação

$$\delta\,(C|U) = (\delta C)\,|U. \tag{7.33}$$

Em particular, vemos que

$$C \in Z^p_{diff}(M) \Rightarrow C|U \in Z^p_{diff}(U)$$

e

$$C \in B^p_{diff}(M) \Rightarrow C|U \in B^p_{diff}(U)\,.$$

Vamos agora ao conceito dual de extensão de uma cocadeia.

Sejam U um aberto de M e $D \in C^p_{diff}(U)$ tal que *supp* $D \cap \partial U = \emptyset$. Seja $\eta \in C^\infty(M)$ uma função dada pelo lema anterior para $F =$ *supp* D.

Definimos a *extensão* de D a M como a cocadeia $\bar{D} \in C^p_{diff}(M)$ dada por

$$\bar{D}\,(f_1, \cdots, f_p)\,(x) = \begin{cases} \eta\,(x)\,D\,(f_1|U, \cdots, f_p|U)\,(x)\,, & \text{se } x \in U \\ 0, & \text{se } x \notin U \end{cases}$$

para todo $x \in M$.

Assim como as restrições, as extensões são únicas, não dependendo da escolha particular da função η.

Vamos mostrar que, para quaisquer $g_1, \cdots, g_p \in C^\infty(U)$ e $x \in U$, tem-se

$$D\,(g_1, \cdots, g_p)\,(x) = \bar{D}\left(g_1^{(\eta)}, \cdots, g_p^{(\eta)}\right)(x)\,. \tag{7.34}$$

De fato, se $x \notin$ *int* (*supp* D), então a igualdade acima é trivialmente satisfeita. Por outro lado, (7.30) nos diz que $g_j^{(\eta)}$ coincide com g_j em *int* (*supp* C), donde, por localidade, segue a igualdade para $x \in$ *int* (*supp* C).

A dualidade a que nos referimos acima é expressa pelas identidades

$$\overline{(C|U)} = C$$

e

$$\bar{D}|U = D,$$

aplicáveis a quaisquer cocadeias diferenciais C e D cujos domínios e suportes têm as propriedades exigidas acima, e cuja validade resulta imediatamente de (7.32) e (7.34).

Cumpre destacar o fato óbvio de que restrições e extensões preservam suportes, i.e.,

$$supp\ C|U = supp\ C \text{ e } supp\ \bar{D} = supp\ D. \tag{7.35}$$

Assim como a restrição, a extensão comporta-se bem sob a ação do operador de cobordo. De fato, dadas $f_1, \cdots, f_{p+1} \in C^{\infty}(M)$ e $x \notin U$, temos

$$\delta \bar{D}(f_1, \cdots, f_{p+1})(x) = \overline{\delta D}(f_1, \cdots, f_{p+1})(x) = 0,$$

pois (6.5) e (7.35) garantem que *supp* $\delta \bar{D} =$ *supp* $\overline{\delta D} =$ *supp* $\delta D \subset U$. Além disso,

$$\left(\delta \bar{D}\right)|U = \delta\left(\bar{D}|U\right) = \delta D = \left(\overline{\delta D}\right)|U$$

mostra a igualdade das restrições a U, que era o que faltava para concluir que

$$\delta \bar{D} = \overline{\delta D}. \tag{7.36}$$

Ademais, é claro que a ordem k de uma cocadeia diferencial $C \in C^p_{diff,k}(M)$ (respectivamente $D \in C^p_{diff,k}(U)$) é preservada por restrições (resp., extensões).

Teorema 127 *Seja M uma variedade diferenciável. Dado um $p-$cociclo diferencial $C \in Z^p_{diff}(M)$, existem uma $(p-1)-$cocadeia diferencial $B \in C^{p-1}_{diff}(M)$ e um $p-$cociclo diferencial alternado de ordem 1 $A \in$ skew $Z^p_{diff,1}(M)$ tais que*

$$C = \delta B + A$$

e supp A, supp $B \subset$ supp C.

Prova. Tratemos primeiro o caso particular em que C tem suporte numa vizinhança coordenada (U, ϕ) onde $U \subsetneq M$.

Temos

$$\phi_{\#}(C|U) \in Z^p_{diff}(\phi(U)).$$

Estenda agora a $\mathbb{R}^m$, obtendo

$$C^{(0)} \equiv \overline{\phi_{\#}(C|U)} \in Z^p_{diff}(\mathbb{R}^m).$$

Aplique o teorema anterior para obter cocadeias $B^{(0)} \in C^{p-1}_{diff}(\mathbb{R}^m)$ e $A^{(0)} \in$ *skew* $Z^p_{diff}(\mathbb{R}^m)$ tais que

$$C^{(0)} = \delta B^{(0)} + A^{(0)}$$

e *supp* $B^{(0)}$, *supp* $A^{(0)} \subset$ *supp* $C^{(0)} = \phi($*supp* $C) \subset \phi(U)$.

Restringindo a $\phi(U)$, vem

$$\begin{aligned}\left(C^{(0)}|\phi(U)\right) &= \left(\delta B^{(0)}\right)|\phi(U) + A^{(0)}|\phi(U) \\ &= \delta\left(B^{(0)}|\phi(U)\right) + \left(A^{(0)}|\phi(U)\right).\end{aligned}$$

Fazendo o push-forward para U via ϕ^{-1}, temos

$$\begin{aligned}(\phi)^{-1}_{\#}\left(C^{(0)}|\phi(U)\right) &= \left(\phi^{-1}\right)_{\#}\delta\left(B^{(0)}|\phi(U)\right) + \left(\phi^{-1}\right)_{\#}\left(A^{(0)}|\phi(U)\right) \\ &= \delta\left(\phi^{-1}\right)_{\#}\left(B^{(0)}|\phi(U)\right) + \left(\phi^{-1}\right)_{\#}\left(A^{(0)}|\phi(U)\right).\end{aligned}$$

Finalmente, estendemos a M para obter

$$\begin{aligned}\overline{(\phi)^{-1}_{\#}\left(C^{(0)}|\phi(U)\right)} &= \overline{\delta\left(\phi^{-1}\right)_{\#}\left(B^{(0)}|\phi(U)\right)} + \overline{\left(\phi^{-1}\right)_{\#}\left(A^{(0)}|\phi(U)\right)} \\ &= \delta\overline{\left(\phi^{-1}\right)_{\#}\left(B^{(0)}|\phi(U)\right)} + \overline{\left(\phi^{-1}\right)_{\#}\left(A^{(0)}|\phi(U)\right)}.\end{aligned}$$

Ora, substituindo a definição de $C^{(0)}$, vemos que

$$\begin{aligned}\overline{(\phi)^{-1}_{\#}\left(C^{(0)}|\phi(U)\right)} &= \overline{(\phi)^{-1}_{\#}\left(\overline{\phi_{\#}(C|U)}|\phi(U)\right)} \\ &= \overline{(\phi)^{-1}_{\#}\,\phi_{\#}(C|U)} \\ &= \overline{C|U} = C.\end{aligned}$$

Pondo

$$B \equiv \overline{\left(\phi^{-1}\right)_{\#}\left(B^{(0)}|\phi(U)\right)}$$

e

$$A \equiv \overline{\left(\phi^{-1}\right)_{\#}\left(A^{(0)}|\phi(U)\right)},$$

concluimos que $B \in C^{p-1}_{diff}(M)$, $A \in \mathit{skew}\ Z^{p}_{diff,1}(M)$; $\mathit{supp}\ B$, $\mathit{supp}\ A \subset \mathit{supp}\ C$; e

$$C = \delta B + A,$$

como queríamos demonstrar.

No caso geral, tome uma cobertura $\{(U_i, \phi_i)\}_{i\in\mathcal{I}}$ de M por vizinhanças coordenadas próprias ($U_i \subsetneq M$) e uma partição da unidade $\{\rho_i\}_{i\in I}$ subordinada a essa cobertura.

Podemos então escrever o $p-$cociclo diferencial

$$C = \sum_{i\in\mathcal{I}} \rho_i C$$

como soma localmente finita de $p-$cociclos diferenciais $C_i \equiv \rho_i C$ com suportes $\mathit{supp}\ C_i \subset \mathit{supp}\ \rho_i \subset U_i$.

Pelo caso particular, temos

$$C_i = \delta B_i + A_i$$

para todo $i \in \mathcal{I}$, onde $B_i \in C^{p-1}_{diff}(M)$, $A_i \in \mathit{skew}\ Z^{p-1}_{diff,1}(M)$ e $\mathit{supp}\ B_i$, $\mathit{supp}\ A_i \subset \mathit{supp}\ C_i$.

Somando em $i \in \mathcal{I}$ (soma localmente finita), obtemos então

$$C = \delta B + A,$$

onde

$$B = \sum_{i\in\mathcal{I}} B_i \in C^{p-1}_{diff}(M),$$

$$A = \sum_{i\in\mathcal{I}} A_i \in \mathit{skew}\ Z^{p-1}_{diff,1}(M)$$

e *supp* B, *supp* $A \subset$ *supp* C, como queríamos demonstrar. ■

É claro que o cociclo alternado A obtido pelo teorema acima é tão-somente a antissimetrização de C. Com efeito, aplicando o operador de antissimetrização à equação $C = \delta B + A$, e recordando a proposição 112 e o lema 113, temos

$$\begin{aligned} skew\ C &= skew\ \delta B + skew\ A \\ &= 0 + skew\,(skew\ D) \quad (A = skew\ D) \\ &= skew\ D = A. \end{aligned}$$

Ou seja, podemos parafrasear o teorema anterior declarando que todo cociclo é cohomólogo à sua antissimetrização. E ainda obtemos a seguinte inesperada propriedade do operador de antissimetrização.

Corolário 128 *Cociclos diferenciais alternados têm sempre grau 1, i.e.,*

$$skew\ Z^p_{diff}(M) \subset Z^p_{diff,1}(M).$$

Corolário 129 $H^p_{diff}(M) \simeq skew\ Z^p_{diff,1}(M) \simeq \Gamma(\wedge^p TM)$.

Prova. O lema 8 nos permite definir o epimorfismo $\mathbb{C}-$linear

$$\begin{array}{cccc} \Psi: & H^p_{diff}(M) & \to & skew\ Z^p_{diff,1}(M) \\ & [C] & \mapsto & skew\ C \end{array}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} skew\,(C + \delta D) &= skew\ C + skew\ \delta D \\ &= skew\ C \end{aligned}$$

mostra que a aplicação Ψ está bem definida, enquanto a proposição 112 prova a sobrejetividade: $\Psi\,[skew\ D] = skew\ D$.

Por outro lado, o teorema anterior mostra que Ψ é injetivo. Com efeito, sabemos que

$$[C] = [skew\ C],$$

donde segue que

$$\Psi\,[C] = \Psi\,[D]$$

$$\Rightarrow skew\ C = skew\ D$$

$$\Rightarrow [C] = [D].$$

Portanto, Ψ é um $\mathbb{C}-$isomorfismo linear.

Para o segundo isomorfismo, começamos notando que, por definição, todo $p-$cociclo $1-$diferencial alternado $C \in Z^p_{diff,1}(M)$ é da forma

$$C = skew\left(\sum_{j=1}^{N} D^j_1 \otimes \cdots \otimes D^j_p\right),$$

onde

$$D_i^j \in Diff_1^{(0)}(M) = Z^1_{diff}(M) \simeq \mathfrak{X}(M) \equiv \Gamma(TM).$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} Z^p_{diff,1}(M) &\simeq skew\ (\Gamma(TM) \otimes \cdots \otimes \Gamma(TM)) \\ &= \Gamma(skew\ (TM \otimes \cdots \otimes TM)) \\ &\equiv \Gamma(\wedge^p TM). \end{aligned}$$

■

Se M é uma variedade pseudo-riemanniana ou simplética, então temos ainda o ismorfismo

$$H^p_{diff}(M) \simeq \Omega^p(M).$$

Com efeito, uma estrutura pseudo-riemanniana ou simplética numa variedade põe à nossa disposição um isomorfismo natural entre seus fibrados tangente e cotangente (ver seção 2.3), e logo, também um isomorfismo entre os espaços de seções associados. Nesse caso, podemos afirmar que

$$\Gamma(\wedge^p TM) \simeq \Gamma(\wedge^p T^* M) \equiv \Omega^p(M).$$

É o que diz o seguinte enunciado alternativo do teorema 127, que se mostrará melhor adaptado aos nossos propósitos.

Teorema 130 *Seja (M,ω) uma variedade simplética. Dado um cociclo diferencial $C \in Z^p_{diff}(M)$, existem uma cocadeia diferencial $B \in C^{p-1}_{diff}(M)$ e uma $p-$forma diferencial $\alpha \in \Omega^p(M)$ tais que supp B, supp $\alpha \subset$ supp C e, para quaisquer funções $f_1, \cdots, f_p \in C^\infty(M)$, temos*

$$C(f_1, \cdots, f_p) = \delta B(f_1, \cdots, f_p) + \alpha(\nabla_\omega f_1, \cdots, \nabla_\omega f_p),$$

onde $\nabla_\omega f$ é o campo de vetores hamiltoniano associado a f.

Prova. Sejam B e A cocadeias dadas pelo teorema 127. Podemos escrever $A \in skew\ Z^p_{diff,1}(M)$ como

$$A = skew\left(\sum_{j=1}^N X_1^j \otimes \cdots \otimes X_p^j\right) \equiv \sum_{j=1}^N X_1^j \wedge \cdots \wedge X_p^j,$$

para certos campos de vetores $X_1^j, \cdots, X_p^j \in \mathfrak{X}(M)$. Lançando mão do isomorfismo de $C^\infty(M)-$módulos (ver seção 2.3)

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}(M) & \overset{\flat}{\underset{\#}{\rightleftarrows}} & \Omega(M) \\ X & \rightarrow & X^\flat \\ \eta_\# & \leftarrow & \eta \end{array},$$

defina

$$\alpha \equiv (-1)^p \sum_{j=1}^{N} \left(X_1^j\right)^\flat \wedge \cdots \wedge \left(X_p^j\right)^\flat \in \Omega(M).$$

Vamos mostrar que, dadas funções , vale a igualdade

$$\alpha(\nabla_\omega f_1, \cdots, \nabla_\omega f_p) = A(f_1, \cdots, f_p).$$

Por linearidade, basta provar a igualdade acima para os monômios da forma

$$A = X_1 \wedge \cdots \wedge X_p$$

e

$$\alpha = (-1)^p X_1^\flat \wedge \cdots \wedge X_p^\flat.$$

Ora, pelas definições mesmas de $\flat$ e do gradiente simplético[2] ∇_ω temos

$$X^\flat(\nabla_\omega f) = \omega(X, \nabla_\omega f) = -X(f),$$

donde segue que

$$(-1)^p X_1^\flat \wedge \cdots \wedge X_p^\flat (\nabla_\omega f_1, \cdots, \nabla_\omega f_p)$$

$$\begin{aligned} &= (-1)^p \det\left[X_i^\flat(\nabla_\omega f_j)\right] \\ &= (-1)^p \det[-X_i(f_j)] \\ &= \det[X_i(f_j)] \end{aligned}$$

$$= X_1 \wedge \cdots \wedge X_p(f_1, \cdots, f_p),$$

como queríamos demonstar. ■

[2] Ver capítulo (lecture) 4 de [Cannas].

Parte III

Uma introdução elementar à Quantização por deformação

"Est autem homini connaturale ut per sensibilia perveniat in cognitionem intelligibilium[3]"
Santo Tomás de Aquino (*Summa Theologica*, Tertia Pars, Quaestio LX, Articulus IV)

Seja M uma variedade diferenciável. Nesta terceira parte, o símbolo $C^\infty(M)$ designará o anel das funções suaves a valores complexos de M, que possui uma óbvia estrutura de espaço vetorial complexo. Identificaremos o subespaço das funções constantes com o corpo de escalares $\mathbb{C}$.

A fim de que M sirva de modelo clássico para o espaço de fase de um sistema mecânico, forçoso é que, ao lado da multiplicação pontual $\cdot$ de funções, $C^\infty(M)$ esteja munido também de uma estrutura de álgebra de Lie dada por um colchete de Poisson $\{\cdot\,,\cdot\}$. Ao arranjo $\mathcal{O}_{class}(M) = (C^\infty(M), \cdot, \{\cdot\,,\cdot\})$ denominamos *álgebra de observáveis clássicos*[4] *de* M. Neste capítulo, discorreremos sobre aspectos gerais do *programa de quantização por deformação*, que especula a possibilidade de se derivar a álgebra de observáveis quânticos de um sistema mecânico a partir de sua contrapartida clássica (processo a que os físicos denominam *quantização*) substituindo apenas as estruturas algébricas envolvidas em $\mathcal{O}_{class}(M)$, mas preservando em larga medida a natureza matemática dos observáveis.

[3] "É da natureza do homem chegar ao conhecimento das coisas inteligíveis por meio das coisas sensíveis", em tradução livre.

[4] Os observáveis clássicos propriamente ditos são as funções a valores reais. Notem que elas constituem uma subálgebra de $\mathcal{O}_{class}(M)$.

Capítulo 8

Produtos-estrela

8.1 Primeiras definições

O anel $C^{\infty}(M)[[\hbar]]$ das séries de potências numa indeterminada[1] $\hbar$ com coeficientes em $C^{\infty}(M)$ (cujo óbvio caráter de $\mathbb{C}[[\hbar]]-$módulo será fortemente solicitado na definição 1 abaixo) terá um papel central na noção de quantização que temos em mente. Os elementos $f(\hbar) \in C^{\infty}(M)[[\hbar]]$ serão freqüentemente chamados de *funções formais*. Dada uma função formal $f(\hbar) = \sum_{k=0}^{\infty} \hbar^k f_k$, seu *valor* num ponto $x \in M$ é definido como a série de potências a coeficientes constantes $f(x,\hbar) = \sum_{k=0}^{\infty} \hbar^k f_k(x) \in \mathbb{C}[[\hbar]]$. Sua função formal *conjugada* é obtida pela conjugação complexa das funções coeficientes: $\bar{f}(x,\hbar) = \sum_{k=0}^{\infty} \hbar^k \overline{f_k(x)}$.

Apesar desse protagonismo das funções formais, jamais as examinaremos sob o prisma da Análise. Ou seja, questões concernentes à convergência ou divergência dessas séries de potências não são da alçada da presente dissertação. Lidamos aqui com objetos deliberadamente formais.

Definição 131 *Seja* $(M, \{\cdot\ ,\cdot\})$ *uma variedade de Poisson. Um* produto-estrela $\star$ *em* M *é uma aplicação* $\mathbb{C}[[\hbar]]-$*bilinear*

$$\begin{array}{rccc} \star: & C^{\infty}(M)[[\hbar]] \times C^{\infty}(M)[[\hbar]] & \longrightarrow & C^{\infty}(M)[[\hbar]] \\ & (f(\hbar), g(\hbar)) & \mapsto & f(\hbar) \star g(\hbar) \end{array}$$

que, considerada como estrutura multiplicativa da $\mathbb{C}-$*álgebra* $(C^{\infty}(M)[[\hbar]], +, \star, \mathbb{C})$, *faz desta uma*

[1] O símbolo $\hbar$ aqui não responde pelo valor numérico da constante de Planck, como é comum em textos de Física. Entretanto, $\hbar$ representará *formalmente* o papel dessa constante, no sentido muito particular de hierarquizar as correções quânticas devidas à medida clássica de um observável, como se verá mais adiante na discussão do Princípio da Correspondência para quantizações por deformação. A escolha do símbolo $\hbar$ tem ainda a vantagem de liberar as letras mais comumente usadas como indeterminadas $(X, Y, T, x, z, \nu$, etc) para papéis menos fixos.

a) álgebra formal, no sentido de que o produto $\star$ seja distributivo com relação às somas, infinitas inclusive; i.e., valem as igualdades

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=0}^{\infty} f_j(\hbar)\right)\star\left(\sum_{k=0}^{\infty} g_k(\hbar)\right) &= \sum_{j=0}^{\infty}\left(f_j(\hbar)\star\left(\sum_{k=0}^{\infty} g_k(\hbar)\right)\right)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\left(\sum_{j=0}^{\infty} f_j(\hbar)\right)\star g_k(\hbar)\right)\\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left(f_j(\hbar)\star g_k(\hbar)\right)\end{aligned}$$

quaisquer que sejam as funções formais $f_j(\hbar)$ e $g_k(\hbar)$, $j,k\in\mathbb{N}_0$.

b) álgebra unital, com $1\in\mathbb{C}$ por elemento neutro da multiplicação $\star$, i.e., para todo $f(\hbar)\in C^{\infty}(M)[[\hbar]]$ vale

$$f(\hbar)\star 1 = 1\star f(\hbar) = f(\hbar)$$

c) álgebra associativa, i.e., quaisquer que sejam $f(\hbar), g(\hbar), h(\hbar)\in C^{\infty}(M)[[\hbar]]$, vale a regra

$$f(\hbar)\star(g(\hbar)\star h(\hbar)) = (f(\hbar)\star g(\hbar))\star h(\hbar)$$

d) deformação da álgebra de observáveis clássicos de M, i.e., dadas funções $f,g\in C^{\infty}(M)$, temos

$$f\star g = fg + O(\hbar)$$

e

$$[f,g]_{\star}\overset{def.}{\equiv} f\star g - g\star f = \hbar i\{f,g\} + O\left(\hbar^2\right)$$

Quando as condições (a),(b), (c) e (d) são todas satisfeitas por $\star$, nos referimos à $\mathbb{C}-$álgebra.$(C^{\infty}(M)[[\hbar]],+,\star,\mathbb{C})$ como a $\star-$álgebra de M.

Outras definições de produto-estrela, ligeiramente diferentes desta que demos, são freqüentes na literatura disponível sobre o assunto. A que escolhemos é mais consentânea aos propósitos desta dissertação.

Pedimos ao leitor ainda alguma paciência, porque pretendemos explorar algumas conseqüência óbvias da definição antes de explicar onde exatamente ela se insere no contexto da quantização.

Em primeiro lugar, notemos que, graças à $\mathbb{C}[[\hbar]]-$bilinearidade de $\star$ e à condição (b), podemos ver uma $\star-$álgebra como uma extensão da $\mathbb{C}-$álgebra $\mathbb{C}[[\hbar]]$ das séries de potências a coeficientes complexos. De fato, dado $f(\hbar)\in\mathbb{C}[[\hbar]]\subset C^{\infty}(M)[[\hbar]]$, temos

$$f(\hbar)\star g(\hbar) = f(\hbar)\cdot(1\star g(\hbar)) = f(\hbar)\,g(\hbar)$$

para toda função formal $g(\hbar)\in C^{\infty}(M)[[\hbar]]$, e em particular para as séries a coeficientes constantes $g(\hbar)\in\mathbb{C}[[\hbar]]$.

Dadas duas funções $f, g \in C^{\infty}(M)$, escrevamos

$$f \star g = \sum_{k=0}^{\infty} \hbar^k C_k(f, g).$$

Afirmamos que as funções $C_k : C^{\infty}(M) \times C^{\infty}(M) \longrightarrow C^{\infty}(M)$ assim definidas para $k \in \mathbb{N}_0$ são aplicações $\mathbb{C}-$bilineares. De fato, temos

$$\begin{aligned}
(f_1 + z f_2) \star g &= (f_1 \star g) + z (f_2 \star g) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \hbar^j C_j(f_1, g) + z \sum_{k=0}^{\infty} \hbar^k C_k(f_2, g) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \hbar^k \left(C_k(f_1, g) + z C_k(f_2, g) \right),
\end{aligned}$$

donde se vê que valem, para todos $f_1, f_2, g \in C^{\infty}(M)$ e $z \in \mathbb{C}$, e em cada ordem $k \in \mathbb{N}_0$, as igualdades

$$C_k(f_1 + z f_2, g) = C_k(f_1, g) + z C_k(f_2, g)$$

$$C_k(g, f_1 + z f_2) = C_k(g, f_1) + z C_k(g, f_2).$$

Assim, devido à distributividade formal (a), um produto-estrela $\star$ determina, de modo único, uma seqüência $\{C_k(\star)\}_{k=0}^{\infty}$ de aplicações $\mathbb{C}-$bilineares em $C^{\infty}(M)$. De fato, dadas seqüências arbitrárias de funções $f_j, g_k \in C^{\infty}(M)$, temos

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=0}^{\infty} \hbar^j f_j \right) \star \left(\sum_{k=0}^{\infty} \hbar^k g_k \right) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \hbar^{j+k} (f_j \star g_k) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \hbar^{j+k} \sum_{l=0}^{\infty} \hbar^l C_l(f_j, g_k) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \hbar^{j+k+l} C_l(f_j, g_k) \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \hbar^r \sum_{s=0}^{r} \sum_{j=0}^{s} C_{r-s}(f_{s-j}, g_j).
\end{aligned}$$

Em termos da seqüência de cocadeias de Hochschild[2] $\{C_k\}_{k=0}^{\infty} \subset C^2_{Hoch}(M)$ induzida por $\star$, a associatividade (c) pode ser parafraseada pelas identidades

$$\sum_{j=0}^{n} C_j(f, C_{n-j}(g, h)) = \sum_{j=0}^{n} C_j(C_{n-j}(f, g), h), \tag{8.1}$$

[2] Ver capítulo 6.

válidas para todos $n \in \mathbb{N}$, $f, g, h \in C^{\infty}(M)$. Com efeito, temos

$$\begin{aligned} f \star (g \star h) &= f \star \left(\sum_{k=0}^{\infty} \hbar^k C_k(g,h) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \hbar^k \left(f \star C_k(g,h) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \hbar^k \left(\sum_{l=0}^{\infty} \hbar^l C_l(f, C_k(g,h)) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \hbar^{k+l} C_l(f, C_k(g,h)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n \left(\sum_{j=0}^{n} C_j(f, C_{n-j}(g,h)) \right), \end{aligned}$$

e cálculos análogos conduzem a

$$(f \star g) \star h = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n \left(\sum_{j=0}^{n} C_j(C_{n-j}(f,g), h) \right),$$

donde seguem-se as referidas identidades por comparação, ordem por ordem, das séries obtidas. Além disso, a condição (d) fica mais sucintamente enunciada por

$$C_0(f,g) = fg \tag{8.2}$$

e

$$C_1(f,g) - C_1(g,f) = i\{f,g\}, \tag{8.3}$$

para todas $f, g \in C^{\infty}(M)$.

O conceito de produto-estrela nasce das investigações levadas a efeito por Moshé Flato e colaboradores acerca da aplicabilidade do conceito de deformação de álgebras (ver [Gerstenhaber, 1964]) ao entendimento da quantização de sistemas clássicos. Essa idéia parece ser parte de um projeto epistemológico mais abrangente acalentado pelo matemático israelense, como se infere das seguintes palavras de Simone Gutt.

> "[...] Moshé has pursued, for more than 25 years, a research program based on the idea that physics progresses in stages, and one goes from one level of the theory to the next one by a deformation, in the mathematical sense of the word, to be defined in an appropriate category. His study of deformation theory applied to mechanics started in 1974 and led to spetacular developments with the deformation quantization programme." [Gutt, 1999]

Os primeiros desses desenvolvimentos vieram à luz nos trabalhos seminais [Flato et al., 1978, 1] e [Flato et al., 1978, 2], no segundo dos quais se lê o seguinte.

> "[...] Nonrelativistic physics (more precisely: Galilei-relativistic physics) can be viewed as a 'contraction' of relativity theory (Lorentz- or Poincaré-relativistic theory). [...] the Poincaré group contracts to the Galilei group in the limit $c \to \infty$ (contraction parameter $c =$ velocity of light). A *deformation* is a sort of inverse to contraction: one determines, in a precise mathematical sense, all groups that are 'close' to the Galilei group and finds the Poincaré group (among a small number of possibilities). In this sense, relativity theory is a deformation of nonrelativistic physics.
>
> Another instance of contraction is the passage from quantum theory to the classical limit $\hbar \to 0$ (contraction parameter $\hbar =$ Planck 's constant). Here, the inverse process of deformation is nothing but the general problem of *quantization*. The radical change in interpretation that accompanies the passage to quantum theory might discourage attempts to apply the concepts and techniques of deformation theory; nevertheless it is our aim to show that it can be done." [Flato et al., 1978, 2]

Os autores prosseguem:

> "It is our intention to demonstrate that *quantum mechanics can be replaced by a deformation of classical mechanics*: a description of quantum phenomena in terms of ordinary functions on phase space, *including a complete and autonomous physical interpretation*." [Flato et al., 1978, 2]

Exceto talvez pela condição (d), a definição de produto-estrela não deixa entrever qual seja a sua relação com a quantização. Para entendê-la melhor, faremos uma pequena digressão, ao longo da qual apresentaremos os primeiros exemplos de produto-estrela, pelos quais certamente aguarda, já impaciente, o leitor. Esse é o assunto da próxima seção. Daremos aqui apenas algumas idéias gerais.

Recordemos que a álgebra de observáveis quânticos tradicional é constituída de operadores lineares[3] atuando num espaço de Hilbert, cuja projetivização faz as vezes de espaço de fase do sistema. A natureza matemática exata desses operadores é de somenos[4]. O que importa são as relações – por assim dizer –

[3] Os observáveis quânticos propriamente ditos são os operadores autoadjuntos dessa álgebra. Note que não se trata de uma subálgebra de $\mathcal{O}_{quant}(\mathcal{H})$, pois a composição de operadores autoadjuntos não é, em geral, autoadjunta. No entanto, o comutador $\frac{1}{i\hbar}[F, G]$ é autoadjunto se F e G o são.

[4] Historicamente, a velha (semiclássica) Física Quântica de Bohr só foi superada quando Heisenberg decidiu abdicar provisoriamente da prerrogativa de fixar a natureza dos observáveis. Procedendo assim, e procurando manter-se coerente com fatos experimentais prove-

aritméticas entre eles (as relações de comutação, por exemplo) e caracterísicas algébrico-analíticas, como seus espectros de autovalores.

A proposta que se insinua na última citação é a de tentarmos implementar a descrição quântica de um sistema mecânico sem destituir de seu papel de observáveis as funções suaves do espaço de fase M: fazemos uma ligeira generalização, e passamos a usar séries de funções suaves como observáveis. O que muda são as estruturas algébricas. Mas essa mudança não pode ser arbitrária: temos como modelo a bem-sucedida descrição quântica em termos de operadores lineares. Então buscamos um produto que mimetize as características desejáveis da composição de operadores, reproduzindo as relações de comutação fundamentais da mecânica quântica, que são similares aos colchetes de Poisson fundamentais da mecânica clássica.

Recordemos que os espaços de fase clássicos M de sistemas de partículas são sempre dados pelos fibrados cotangentes dos respectivos espaços de configuração N: $M = T^*N$. Assim, temos à disposição um colchete de Poisson dado pela estrutura simplética canônica de T^*N e coordenadas canonicamente conjugadas $q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n : T^*U \longrightarrow \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (onde $n = \dim N$ e U é um aberto de N) satisfazendo

$$\{q^\mu, p_\nu\} \equiv \delta^\mu_\nu$$

e

$$\{q^\mu, q^\nu\} = \{p_\mu, p_\nu\} \equiv 0.$$

A quantização canônica de um sistema como esse, produz operadores lineares autoadjuntos $Q^1, \cdots, Q^n, P_1, \cdots, P_n \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ atuando num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, e satisfazendo às relações de comutação básicas

$$[Q^\mu, P_\nu] = i\hbar\delta^\mu_\nu \; id_{\mathcal{H}}$$

e

$$[Q^\mu, Q^\nu] = [P_\mu, P_\nu] = \mathbb{O}_{\mathcal{H}}.$$

Se for possível obter um produto-estrela $\star$ em T^*N, a quantização por deformação desse sistema produzirá as relações de comutação básicas

$$[q^\mu, p_\mu]_\star = i\hbar\delta^\mu_\nu + O\left(\hbar^2\right)$$

e

$$[q^\mu, q^\nu]_\star = [p_\mu, p_\nu]_\star = O\left(\hbar^2\right),$$

que, em primeira ordem na deformação, são similares às exigidas dos operadores Q^μ e P_μ.

A dinâmica de um sistema mecânico é ditada pela sua energia: na descrição clássica, desempenha esse papel a função hamiltoniana $h : T^*N \longrightarrow \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$; na descrição quântica, o operador (autoadjunto) hamiltoniano $H \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. As

nientes da espectroscopia atômica, pôde inferir por exemplo que, qualquer que fosse a natureza exata dos observáveis, a sua multiplicação deveria ser em geral não-comutativa. Para uma narrativa histórica bem enxuta, ver o capítulo inicial de [Piza]. Uma seleção de artigos pioneiros, com uma primorosa introdução, encontra-se em [van der Waerden].

equações que descrevem a evolução do valor esperado da medida de um observável efe no tempo são, respectivamente

$$\frac{d}{dt} f(x(t)) = \{f, h\}(x(t))$$

e

$$\frac{d}{dt} \langle \psi(t)| F |\psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} \langle \psi(t)| [F, H] |\psi(t)\rangle,$$

onde as curvas $x : \mathbb{R} \longrightarrow T^*N$ e $|\psi(\cdot)\rangle : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{H}$ representam a mudança de estado do sistema ao longo do tempo. Costuma-se abreviar a segunda delas atribuindo a variação no tempo ao observável em vez de ao estado, de modo a obtermos a equação de Heisenberg

$$\frac{d}{dt} F = -\frac{i}{\hbar} [F, H].$$

Com algum abuso de notação, podemos também escrever

$$\frac{d}{dt} f = \{f, h\},$$

sem fazer menção ao estado x em que se mede o observável f. De posse de um produto-estrela $\star$ em T^*N, a semelhança formal entre essas duas equações sugere que escrevamos uma versão análoga[5] à equação de Heisenberg em termos de $\star$:

$$\frac{d}{dt} f = -\frac{i}{\hbar} [f, h]_\star. \tag{8.4}$$

Lançando mão da condição (d) da definição 1, podemos reescrever (8.4) como

$$\frac{d}{dt} f = \{f, h\} + O(\hbar).$$

Grosso modo, temos então que a dinâmica clássica de um observável f é recuperada como limite formal da versão (8.4) quando o parâmetro de deformação $\hbar$ tende a zero. Ou por outra: a quantização por deformação obedece – à sua maneira – o *Princípio da Correspondência* de Bohr, condição *sine qua non* para que qualquer esquema dinâmico dispute o *status* de teoria quântica.

Levando mais adiante o desejo de que o produto-estrela mimetize as propriedades da composição de operadores, podemos exigir dele que se comporte adequadamente sob conjungação complexa, assim como, sendo $F^\dagger$ o operador adjunto a F no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, vale a regra de $\mathbb{C}-$involução

$$(F \circ G)^\dagger = G^\dagger \circ F^\dagger.$$

[5] Note o leitor que, tacitamente, passamos a trabalhar no anel das séries de Laurent $C^\infty(M)\{\{\hbar\}\}$. A extensão de $\star$ a esse anel é imediata.

Definição 132 *Dizemos que um produto-estrela* $\star$ *numa variedade de Poisson* M *é* hermiteano *ou* $\mathbb{C}-$involutivo *quando vale a regra*

$$\overline{f(\hbar) \star g(\hbar)} = \overline{g(\hbar)} \star \overline{f(\hbar)}$$

para todas funções formais $f(\hbar), g(\hbar)$.

A $\mathbb{C}-$involutividade de um produto-estrela se traduz pela seguinte condição sobre a seqüência de cocadeias $\{C_k(\star)\}_{k=0}^{\infty}$ por ele induzida:

$$\overline{C_k(f,g)} = C_k(\bar{g}, \bar{f}),$$

para todos $f, g \in C^{\infty}(M)$ e $k \in \mathbb{N}_0$.

Veremos na próxima seção por que esta condição é desejável do ponto de vista físico.

Para encerrar esta seção, daremos mais algumas definições.

Como vimos, um produto-estrela $\star$ determina, de modo único, uma seqüência $\{C_k(\star)\}_{k=0}^{\infty}$ de $2-$cocadeias de Hochschild sobre M. Uma classe especialmente importante de $2-$cocadeias de Hochschild sobre M é aquela dos chamados *operadores bidiferenciais*, com os quais lidaremos em todo o restante deste trabalho. Os operadores bidiferenciais nada mais são do que as $2-$cocadeias diferenciais de M.

Definição 133 *Dizemos que um produto-estrela* $\star$ *numa variedade de Poisson* M *é* diferencial *quando a seqüência de cocadeias* $\{C_k(\star)\}_{k=0}^{\infty}$ *por ele induzida é constituída por operadores bidifenrenciais, i.e., quando*

$$\{C_k(\star)\}_{k=0}^{\infty} \subset C_{diff}^{2}(M).$$

Temos então que um produto-estrela $\star$ numa variedade de Poisson $(M, \{\cdot\ ,\cdot\})$ é univocamente determinado por uma seqüência $\{C_k(\star)\}_{k=0}^{\infty}$ de cocadeias de Hochschild sobre M satisfazendo as condições (8.2) e (8.3). No caso diferencial definido acima, as cocadeias de Hochschild C_k são diferenciais. Por isso, os produtos-estrela diferenciais são objetos locais, no seguinte sentido: o produto-estrela $f \star g$ de duas funções $f, g \in C^{\infty}(M)$ avaliado num ponto $x \in M$ dá uma série de potências no parâmetro de deformação $\hbar$ cujos coeficientes só dependem dos valores de f e g numa vizinhança arbitrariamente pequena de x. Ou, de forma mais precisa: se existe uma vizinhança U onde duas funções g e h coincidem, temos

$$(f \star g)(x) = (f \star h)(x) \quad \text{e} \quad (g \star f)(x) = (h \star f)(x)$$

em $\mathbb{C}[[\hbar]]$, quaisquer que sejam $f \in C^{\infty}(M)$ e $x \in U$, no caso em que $\star$ é um produto-estrela diferencial.

Desnecessário dizer que, como objetos locais, os produtos-estrela diferenciais são mais facilmente tratáveis do que outros que não gozam desta propriedade. Mas há outras razões, além do menor esforço, para preferi-los aos demais. Uma delas é que os operadores diferenciais, ferramentas caras à Física desde Newton e Leibniz, assumiram naturalmente um papel importante na mecânica quântica, sobretudo devido ao método heurístico da quantização canônica, que serviu de inspiração, como veremos na próxima seção, aos primeiros produtos-estrela.

8.2 Os primeiros produtos-estrela

A quantização canônica na representação Schrödinger sugeriu o caminho para os primeiros produtos-estrela, ambientados em $\mathbb{R}^{2n} \simeq T^*\mathbb{R}^n$.

Denotemos por $x = (q,p) = \left(q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n\right)$ as coordenadas dos pontos de $\mathbb{R}^{2n}$, onde consideramos a estrutura de poisson canônica dada por

$$\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial q^\mu}\frac{\partial g}{\partial p_\mu} - \frac{\partial g}{\partial q^\mu}\frac{\partial f}{\partial p_\mu}.$$

Esse será o espaço de fase clássico que procuraremos quantizar.

Como espaço de fase quântico usaremos $\mathcal{H} = C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right) \subset L^2\left(\mathbb{R}^n, dq^1 \cdots dq^n\right)$, o conjunto das funções suaves de suporte compacto (nas n variáveis espaciais), que chamaremos funções de onda.

A quantização canônica em Física corresponde à atribuição de um novo significado às funções constituintes da álgebra de observáveis clássicos $C^\infty\left(\mathbb{R}^{2n}\right)$. Elas são substituídas por operadores diferenciais atuando no espaço $\mathcal{H}$ das funções de onda, a começar pelas funções mais simples de todas: as funções constantes e as coordenadas espaciais $q^1, \cdots, q^n$ e de momento $p_1, \cdots, p_n$, segundo a seguinte prescrição.

$$1 \in C^\infty\left(\mathbb{R}^{2n}\right) \mapsto id_{\mathcal{H}} \in \mathcal{L}\left(\mathcal{H}\right),$$

$$q^\mu \in C^\infty\left(\mathbb{R}^{2n}\right) \mapsto Q^\mu \in \mathcal{L}\left(\mathcal{H}\right),$$

onde[6]

$$Q^\mu\psi\left(q\right) = q^\mu\psi\left(q\right),$$

e

$$p_\mu \in C^\infty\left(\mathbb{R}^{2n}\right) \mapsto P_\mu \in \mathcal{L}\left(\mathcal{H}\right),$$

onde

$$P_\mu\psi\left(q\right) = -i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial q^\mu}\left(q\right).$$

[6] na equação imediatamente abaixo da inserção desta nota, q^μ não é uma função, mas a $\mu-$ésima coordenada de $q = \left(q^1, \cdots, q^n\right) \in \mathbb{R}^n$.

Essa prescrição é concebida de modo a que os operadores $Q^1, \cdots, Q^n, P_1, \cdots, P_n \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ sejam autoadjuntos e satisfaçam às relações de comutação canônicas

$$[Q^\mu, P_\nu] = i\hbar\delta^\mu_\nu \; id_{\mathcal{H}}$$

e

$$[Q^\mu, Q^\nu] = [P_\mu, P_\nu] = \mathbb{O}_{\mathcal{H}},$$

análogas formais das correspondentes clássicas

$$\{q^\mu, p_\nu\} \equiv \delta^\mu_\nu$$

e

$$\{q^\mu, q^\nu\} = \{p_\mu, p_\nu\} \equiv 0,$$

onde $\mu, \nu \in [n]$. De fato, dada uma função teste $\psi \in \mathcal{H}$, temos

$$\begin{aligned} [Q^\mu, P_\nu]\,\psi(q) &= (Q^\mu P_\nu \psi - P_\nu Q^\mu \psi)(q) \\ &= -i\hbar q^\mu \frac{\partial\psi}{\partial q^\nu}(q) + i\hbar\frac{\partial}{\partial q^\nu}(q^\mu\psi)(q) \\ &= -i\hbar q^\mu \frac{\partial\psi}{\partial q^\nu}(q) + i\hbar\frac{\partial q^\mu}{\partial q^\nu}\psi(q) + i\hbar q^\mu\frac{\partial\psi}{\partial q^\nu}(q) \\ &= i\hbar\delta^\mu_\nu\psi(q), \end{aligned}$$

enquanto os outros comutadores são óbvios.

A unidade imaginária $i = \sqrt{-1}$, aparecendo na definição dos operadores P_μ de momento, assegura que estes sejam autoadjuntos[7], o que se verifica com uma integração por partes:

$$\begin{aligned} \langle P_\mu\psi, \varphi\rangle &\equiv \int_{\mathbb{R}^n} dq^1 \cdots dq^n \, P_\mu\psi(q)\,\bar\varphi(q) \\ &= -i\hbar\int dq^1\cdots\widehat{dq^\mu}\cdots dq^n \int dq^\mu \frac{\partial\psi}{\partial q^\mu}(q)\,\bar\varphi(q) \\ &= -i\hbar\int dq^1\cdots\widehat{dq^\mu}\cdots dq^n \left[\psi(q)\,\bar\varphi(q)\right]_{q^\mu=-\infty}^{q^\mu=+\infty} \\ &\quad + i\hbar\int dq^1\cdots\widehat{dq^\mu}\cdots dq^n \int dq^\mu\psi(q)\,\frac{\partial\bar\varphi}{\partial q^\mu}(q) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} dq^1\cdots dq^n\psi(q)\,\overline{\left(-i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial q^\mu}\right)}(q) \end{aligned}$$

[7] O produto interno hermiteano de $L^2\left(\mathbb{R}^n, dq^1\cdots dq^n\right)$ é dado por

$$\langle\psi,\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} dq^1\cdots dq^n\psi(q)\,\overline{\varphi(q)}.$$

É hábito comum em Física escrever-se a medida antes do integrando. Adotaremo-lo neste trabalho.

$$= \int_{\mathbb{R}^n} dq^1 \cdots dq^n \psi(q)\, \overline{P_\mu \varphi}(q)$$

$$\equiv \langle \psi, P_\mu \varphi \rangle .$$

O anulamento do termo de fronteira

$$-i\hbar \int dq^1 \cdots \widehat{dq^\mu} \cdots dq^n \left[\psi(q)\, \bar{\varphi}(q)\right]_{q^\mu=-\infty}^{q^\mu=+\infty}$$

decorre da compacidade dos suportes de nossas funções de onda (e, logo, também de suas derivadas). Os operadores Q^μ de posição são trivialmente autoadjuntos.

O programa para a construção de um produto-estrela em $\mathbb{R}^{2n}$ é o seguinte: obtemos, inspirados pela quantização canônica, uma representação

$$\rho : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

de uma subálgebra $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_{class}\left(\mathbb{R}^{2n}\right)$ em termos de operadores diferenciais, e então usamos a álgebra de operadores em $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ para induzir uma nova estrutura de $\mathbb{C}-$álgebra em $\mathcal{O}$ (ou por outra: fazemos o pull-back da composição de operadores, via ρ). Definimos então um novo produto associativo em $\mathcal{O}$, dado por

$$f \star g = \rho^{-1}\left(\rho(f) \circ \rho(g)\right).$$

Em seguida, estendemo-lo à álgebra $C^\infty\left(\mathbb{R}^{2n}\right)[[\hbar]]$, obtendo um produto-estrela em $\mathbb{R}^{2n}$.

Pois bem: tomaremos por subálgebra $\mathcal{O}$ a $\mathbb{C}-$subálgebra de $C^\infty\left(\mathbb{R}^{2n}\right)$ gerada pelas funções coordenadas[8], i.e., a álgebra das funções polinomiais nas coordenadas:

$$\mathcal{O} = \mathbb{C}\left[q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n\right].$$

E procuraremos obter ρ pela extensão das regras de quantização canônica:

$$\begin{array}{rccc} \rho : & \mathbb{C}\left[q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n\right] & \longrightarrow & Diff\left(\mathbb{R}^n\right) \\ & 1 & \mapsto & id \\ & q^\mu & \mapsto & Q^\mu = q^\mu \cdot \\ & p_\mu & \mapsto & P_\mu = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q^\mu} \end{array}$$

Um problema que se apresenta de pronto é a questão da ordenação dos operadores: que valor atribuir à imagem do monômio $\left(q^1\right)^2 p_1$ pela representação ρ, por exemplo? Há três candidatos bem naturais: $Q^1 Q^1 P_1$, $Q^1 P_1 Q^1$ e $P_1 Q^1 Q^1$.

Ora, a escolha da representação corresponde então à escolha da ordenação.

[8] Também nisso somos guiados pela Física: os exemplos mais freqüentes de observáveis são dessa forma.

8.2.1 Ordenação padrão

A ordenação padrão consiste em escrever sempre os operadores de momento à direita dos operadores de posição. É claramente a ordenação mais simples dentre todas as possíveis. Escreva então

$$\rho_{st}\left(q^{\mu_1}\cdots q^{\mu_r}p_{\nu_1}\cdots p_{\nu_s}\right)=\left(\frac{\hbar}{i}\right)^s Q^{\mu_1}\circ\cdots\circ Q^{\mu_r}\circ P_{\nu_1}\circ\cdots\circ P_{\nu_s},$$

i.e.,

$$\rho_{st}\left(q^{\mu_1}\cdots q^{\mu_r}p_{\nu_1}\cdots p_{\nu_s}\right)(\psi)(q)=\left(\frac{\hbar}{i}\right)^s q^{\mu_1}\cdots q^{\mu_r}\frac{\partial^s\psi}{\partial q^{\nu_1}\cdots\partial q^{\nu_s}}(q)\,.$$

Estendendo $\mathbb{C}-$linearmente esta definição, obtemos o monomorfismo de $\mathbb{C}-$álgebras

$$\rho_{st}:\mathbb{C}\left[q^1,\cdots,q^n,p_1,\cdots,p_n\right]\hookrightarrow Diff\left(\mathbb{R}^n\right)$$

dado por

$$\rho_{st}(f)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{\hbar}{i}\right)^k\left.\frac{\partial^k f}{\partial p_{\mu_1}\cdots\partial p_{\mu_k}}\right|_{p=0}\frac{\partial^k}{\partial q^{\mu_1}\cdots\partial q^{\mu_k}},$$

i.e.,

$$\rho_{st}(f)\,\psi(q)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{\hbar}{i}\right)^k\frac{\partial^k f}{\partial p_{\mu_1}\cdots\partial p_{\mu_k}}(q,0)\,\frac{\partial^k\psi}{\partial q^{\mu_1}\cdots\partial q^{\mu_k}}(q)\,.$$

Note que a soma acima é finita, já que f é polinomial.

A forma explícita da representação ρ_{st} – obtida acima a partir da série de Taylor de f com relação às coordenadas de momento – sugere que estendamos seu domínio para

$$\begin{aligned} Pol^{\bullet}\left(\mathbb{R}^n\right) &= \oplus_{k=0}^{\infty}\Gamma\left(\vee^k T^*\mathbb{R}^n\right)\\ &\simeq C^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)\left[p_1,\cdots,p_n\right], \end{aligned}$$

i.e., à álgebra das funções suaves em $T^*\mathbb{R}^n\simeq\mathbb{R}^{2n}$ com dependência polinomial nas coordenadas de momento. Com essa extensão de domínio, ganhamos uma bijeção

$$\rho_{st}:Pol^{\bullet}\left(\mathbb{R}^n\right)\to Diff\left(\mathbb{R}^n\right)$$

Podemos então, por meio dessa bijeção, fazer o pull-back da composição de operadores diferenciais $\circ$ para $Pol^{\bullet}\left(\mathbb{R}^n\right)$, definindo assim um produto $\star_{st}$ por

$$f\star_{st}g=\rho_{st}^{-1}\left(\rho_{st}(f)\circ\rho_{st}(g)\right)$$

Ora, este produto é dado explicitamente por

$$f \star_{st} g = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\hbar}{i} \right)^k \frac{\partial^k f}{\partial p_{\mu_1} \cdots \partial p_{\mu_k}} \frac{\partial^k g}{\partial q^{\mu_1} \cdots \partial q^{\mu_k}}$$

Esta expressão nada deve à dependência polinomial de f e g nas coordenadas de momento, a não ser a finitude da soma no índice k: ela pode ser aplicada a quaisquer duas funções $f, g \in C^\infty\left(\mathbb{R}^{2n}\right)$ dando origem a uma série de potências no parâmetro $\hbar$ (que agora trataremos como indeterminada) com coeficientes no anel $C^\infty\left(\mathbb{R}^{2n}\right)$. Mais: podemos estendê-la $\hbar-$linearmente obtendo um produto-estrela

$$\star_{st} : C^\infty\left(\mathbb{R}^{2n}\right)[[\hbar]] \times C^\infty\left(\mathbb{R}^{2n}\right)[[\hbar]] \to C^\infty\left(\mathbb{R}^{2n}\right)[[\hbar]]$$

em $\mathbb{R}^{2n}$ segundo a estrutura simplética canônica dada no exemplo 92. A verificação das condições da definição 131 é imediata. Deve-se observar, entretanto, que $\star_{st}$ não é um produto-estrela hermiteano. Com efeito, calcula-se o operador adjunto a $\rho_{st}(f)$ no espaço $\mathcal{H} = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ por integrações parciais sucessivas, obtendo-se, para $\psi, \phi \in \mathcal{H}$,

$$\langle \psi, \rho_{st}(f)\, \phi \rangle = \left\langle \rho_{st}\left(N^2 \bar{f}\right) \psi, \phi \right\rangle,$$

onde

$$\begin{aligned} N &= \exp\left(\frac{\hbar}{2i}\Delta\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{\hbar}{2i}\right)^k \underbrace{\Delta \circ \cdots \circ \Delta}_{k \text{ fatores}} \\ &= id - \hbar\frac{i}{2}\Delta + O\left(\hbar^2\right), \end{aligned}$$

com

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial q^\mu \partial p_\mu}.$$

Ou seja,

$$\rho_{st}(f)^\dagger = \rho_{st}\left(N^2 \bar{f}\right) \tag{8.5}$$

Do ponto de vista físico, não ser hermiteano é um defeito para um produto-estrela, uma vez que desejamos que valha

$$\rho_{st}(f)^\dagger = \rho_{st}(f)$$

para toda função f a valores reais, já que os observáveis quânticos são operadores autoadjuntos. A forma obtida para $\rho_{st}(f)^\dagger$ sugere o caminho para o conserto: podemos usar N para obter um produto-estrela hermiteano. Note que

$$N : Pol^\bullet(\mathbb{R}^n) \to Pol^\bullet(\mathbb{R}^n)$$

é um isomorfismo $\mathbb{C}-$linear.

8.2.2 Ordenação de Weyl

Defina $\rho_W : Pol^\bullet(\mathbb{R}^n) \to Diff(\mathbb{R}^n)$ por $\rho_W = \rho_{st} \circ N$. Temos então

$$\begin{aligned}
\rho_W(f)^\dagger &= \rho_{st}(Nf)^\dagger \quad \text{(por definição)} \\
&= \rho_{st}\left(N^2\overline{Nf}\right) \quad \text{(por (8.5))} \\
&= \rho_{st}\left(N^2 N^{-1} f\right) \\
&= \rho_{st}\left(N\bar{f}\right) \\
&= \rho_W\left(\bar{f}\right)
\end{aligned}$$

para toda função $f \in Pol^\bullet(\mathbb{R}^n)$, e, logo,

$$\rho_W(f)^\dagger = \rho_W(f)$$

para toda função a valores reais $f \in Pol^\bullet(\mathbb{R}^n)$, como queríamos. Induzindo um produto $\star_W$ em $Pol^\bullet(\mathbb{R}^n)$ por meio da representação de Weyl ρ_W, temos

$$\begin{aligned}
f \star_W g &= \rho_W^{-1}(\rho_W(f) \circ \rho_W(g)) \\
&= N^{-1}\rho_{st}^{-1}(\rho_{st}(Nf) \circ \rho_{st}(Ng)) \\
&= N^{-1}(Nf \star_{st} Ng),
\end{aligned}$$

donde

$$N(f \star_W g) = Nf \star_{st} Ng, \tag{8.6}$$

i.e., N é um isomorfismo[9] entre as $\mathbb{C}-$álgebras $(Pol^\bullet(\mathbb{R}^n), +, \star_W)$ e $(Pol^\bullet(\mathbb{R}^n), +, \star_{st})$. Pode-se usar (8.6) para calcular a expressão explícita de $\star_W$, como fizemos para $\star_{st}$. Os cálculos envolvidos são diretos, mas um pouco longos. À guisa de ilustração, exibimos abaixo a expressão no caso $n = 1$, com $x = (q, p) \in \mathbb{R}^2$.

$$f \star_W g = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\hbar}{2i}\right)^k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \frac{\partial^k f}{\partial q^j \partial p^{k-j}} \frac{\partial^k g}{\partial q^{k-j} \partial p^j}$$

Como antes, vemos que esta expressão nada deve à dependência polinomial de f e g nas coordenadas de momento, exceto a finitude do primeiro somatório. Ela pode ser aplicada a quaisquer duas funções $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ dando origem a uma série de potências no parâmetro $\hbar$ (que agora trataremos como indeterminada) com coeficientes no anel $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Mais: podemos estendê-la $\hbar-$linearmente obtendo um produto-estrela

$$\star_W : C^\infty(\mathbb{R}^2)[[\hbar]] \times C^\infty(\mathbb{R}^2)[[\hbar]] \to C^\infty(\mathbb{R}^2)[[\hbar]]$$

[9] Quando estendermos o domínio da representação de Weyl a $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, como fizemos para a representação padrão, N terá de ser encarado como um *operador formal*, conceito que definiremos no capítulo seguinte. De fato, N é a primeira *equivalência de produtos-estrela* que encontramos nesta dissertação. Para definição de equivalência, ver capítulo seguinte.

em $\mathbb{R}^2$ segundo a estrutura simplética canônica $dq \wedge dp$. A verificação das condições da definição de produto-estrela não é difícil, mas tornar-se-á desnecessária tão logo entendermos a noção de equivalência entre produtos-estrela introduzida no capítulo seguinte.

Pode-se mostrar que a ordenação determinada pela representação de Weyl é a simetrização total de monômios, i.e.,

$$\rho_W\left(q^{j_1}\cdots q^{j_r}p_{k_1}\cdots p_{k_s}\right) = -\hbar^s i\frac{1}{r!s!}\sum_{\substack{\sigma\in S_r\\ \tau\in S_s}} Q^{\sigma(1)}\circ\cdots\circ Q^{\sigma(r)}\circ P_{\tau(1)}\circ\cdots\circ P_{\tau(s)}$$

Por exemplo, $\rho_W\left(q^2p\right) = \frac{1}{3}\left(Q^2P + QPQ + PQ^2\right) = -\hbar i q\left(q\frac{\partial}{\partial q} - id\right)$.

8.2.3 O produto-estrela de Weyl-Moyal

Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita n munido de uma estrutura de Poisson P dada, segundo uma base $(e_1,\cdots,e_n)$, por

$$P = P^{\mu\nu}e_\mu\otimes e_\nu,$$

com $P^{\mu\nu} = -P^{\nu\mu}\in\mathbb{R}$ fixos. Defina, para[10] $f,g\in C^\infty(V)$,

$$\begin{aligned}(f\star_M g)(x) &= \exp\left(-\hbar\frac{i}{2}P^{\mu\nu}\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_x\otimes\left.\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right|_x\right)(f,g)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\hbar^k\frac{1}{k!}\left(\frac{-i}{2}\right)^k P^{\mu_1\nu_1}\cdots P^{\mu_k\nu_k}\frac{\partial^k f(x)}{\partial x^{\mu_1}\cdots\partial x^{\mu_k}}\frac{\partial^k g(x)}{\partial x^{\nu_1}\cdots\partial x^{\nu_k}}\end{aligned}$$

Verifica-se por inspeção que $\star_M$ define, por extensão $\hbar-$linear, um produto-estrela hermiteano para a variedade de Poisson (V,P).

Se a matriz $\mathbf{P} = \left(P^{ij}\right)$ tem posto máximo, então a estrutura de Poisson P advém de uma forma simplética $\omega = \omega_{\mu\nu}dx^\mu\wedge dy^\nu$. Nesse caso, temos

$$P^{\mu\lambda}\omega_{\lambda\nu} = \delta^\mu_\nu$$

Usando a tradicional notação $P^{\mu\nu} = \omega^{\mu\nu}$, temos, nesse caso,

$$\star_M = \sum_{k=0}^{\infty}\hbar^k\frac{1}{k!}\left(\frac{-i}{2}\right)^k\omega^{\mu_1\nu_1}\cdots\omega^{\mu_k\nu_k}\frac{\partial^k}{\partial x^{\mu_1}\cdots\partial x^{\mu_k}}\otimes\frac{\partial^k}{\partial x^{\nu_1}\cdots\partial x^{\nu_k}}$$

Restringindo-nos ao caso $V = \mathbb{R}^{2n}$, com estrutura de Poisson dada pela forma simplética canônica, o produto de Weyl-Moyal é obtido pelo *pull-back*

[10] A introdução da base $(e_1,\cdots,e_n)$ dota V de um isomorfismo canônico φ com $\mathbb{R}^n$, que permite fazer o pull-back da estrutura diferenciável desta variedade para V. Passamos assim a tratar V como variedade diferenciável com atlas composto de um único sistema de coordenadas, a saber, (V,φ).

da composição de operadores pela representação de Weyl $\rho_W : Pol^\bullet(\mathbb{R}^n) \to Diff(\mathbb{R}^n)$,

$$f \star_M g = \rho_W^{-1}\left(\rho_W(f) \circ \rho_W(g)\right),$$

convenientemente estendido a $C^\infty\left(\mathbb{R}^{2n}\right)[[\hbar]]$ como antes.

O produto de Weyl-Moyal deve sua origem a considerações bastante razoáveis, do ponto de vista físico, a respeito de transformadas de Fourier de funções de onda. Uma descrição mais abrangente de sua história requereria uma digressão assaz longa, e uma incursão por áreas da Matemática e da Física cujo conhecimento é francamente prescindível para a compreensão do que segue. Assim, referimos o leitor interessado a [Fedosov] ou [Waldmann].

O produto-estrela de Weyl-Moyal fornecerá as bases para o método geométrico de construção de produtos-estrela em variedades simpléticas exposto no último capítulo desta dissertação.

Capítulo 9

Equivalência de produtos-estrela

Podemos encarar um operador $\mathbb{C}-$linear T sobre $C^{\infty}(M)$ como um operador sobre $C^{\infty}(M)[[\hbar]]$ de maneira óbvia, por extensão $\hbar-$linear:

$$T\left(\sum_{k=0}^{\infty}\hbar^{k}f_{k}\right)\equiv\sum_{k=0}^{\infty}\hbar^{k}T(f_{k}).$$

É nesse sentido que deve ser interpretada a ação de um operador $T\in\mathcal{L}(C^{\infty}(M))$ numa função formal. Analogamente, podemos estender $\hbar-$linearmente operadores $\mathbb{C},q-$lineares de modo a aplicá-los a funções formais. Por exemplo, uma aplicação $\mathbb{C}-$bilinear

$$B:C^{\infty}(M)\times C^{\infty}(M)\longrightarrow C^{\infty}(M)$$

atua em funções formais segundo a regra

$$\begin{aligned}B\left(\sum_{j=0}^{\infty}\hbar^{j}f_{j},\sum_{k=0}^{\infty}\hbar^{k}g_{k}\right) &\equiv \sum_{j,k=0}^{\infty}\hbar^{j+k}B(f_{j},g_{k})\\ &= \sum_{r=0}^{\infty}\hbar^{r}\sum_{s=0}^{r}B(f_{s},g_{r-s})\end{aligned}$$

Nesse sentido, escreveremos um produto-estrela $\star$ dado por uma seqüência de cocadeias de Hochschild $\{C_{k}\}_{k=0}^{\infty}$ como

$$\star=\sum_{k=0}^{\infty}\hbar^{k}C_{k}$$

Um *operador formal* é uma série de potências numa indeterminada $\hbar$ com coeficientes no anel[1] $\mathcal{L}(C^\infty(M))$. Operadores formais atuam sobre funções formais segundo a regra natural

$$\begin{aligned} T(f(\hbar)) &= \left(\sum_{r=0}^{\infty} \hbar^r T_r\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \hbar^k f_k\right) \\ &= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \hbar^{r+k} T_r(f_k) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \hbar^j \left(\sum_{k=0}^{j} T_{j-k}(f_k)\right). \end{aligned}$$

Os operadores formais do tipo

$$T = id + \sum_{r=1}^{\infty} \hbar^r T_r$$

serão chamados *equivalências-estrela*, ou de modo abreviado, *equivalências*. No caso particular em que os coeficientes T_r são operadores diferenciais (i.e., $T_r \in C^1_{diff}(M)$, $\forall r \in \mathbb{N}$), dizemos que T é uma *equivalência diferencial*.

Proposição 134 *As equivalências-estrela constituem um grupo multiplicativo (não-comutativo), do qual as equivalências diferenciais constituem um subgrupo.*

Prova. Seja $E \subset \mathcal{L}(C^\infty(M))[[\hbar]]$ o conjunto das equivalências e $D \subset E$ o subconjunto das equivalências diferenciais. Queremos mostrar que a composição de operadores lineares faz de E e D grupos. Mas isso é um caso particular do seguinte resultado mais geral. ■

Proposição 135 *Seja A um anel com unidade (não necessariamente comutativo). Então, o subconjunto $G \subset A[[X]]$ das séries cujo termo de ordem zero é a unidade de A é um grupo multiplicativo.*

Prova. Dadas séries $f(X) = \sum_{j=0}^{\infty} X^j f_j$ e $g(X) = \sum_{k=0}^{\infty} X^k g_k$ em $A[[X]]$, sua multiplicação $f(X)g(X)$ é a série $\sum_{l=0}^{\infty} X^l h_l$ tal que

$$h_l = \sum_{r=0}^{l} f_r g_{l-r}.$$

Daí se vê que, se $f_0 = g_0 = 1$, então $h_0 = 1$, ou seja: $f(X), g(X) \in G \Rightarrow f(X)g(X) \in G$. A multiplicação em G herda a associatividade da multiplicação em $A[[X]]$. Resta mostrar que todo elemento de G possui um inverso em G.

[1] A multiplicação é dada pela composição de operadores. Trata-se de um anel não comutativo.

Vamos começar mostrando que, fixado $f(X) \in G$, a equação

$$f(X)\, g(X) = 1$$

possui uma única solução $g(X) \in G$. De fato, escrevendo $f(X) = \sum_{j=0}^{\infty} X^j f_j$ e $g(X) = \sum_{k=0}^{\infty} X^k g_k$, essa equação equivale à seqüência infinita de equações lineares nos coeficientes $g_0, \cdots, g_k, \cdots$ da série incógnita $g(X)$

$$\sum_{r=0}^{l} f_r g_{l-r} = \delta_{0l} \ , \quad l \in \mathbb{N}_0 \tag{9.1}$$

A primeira delas é

$$f_0 g_0 = 1,$$

que dá $g_0 = 1$, já que $f(X) \in G$. Já sabemos então que a solução $g(X)$, se existir, estará em G. Suponha por indução que já conhecemos os coeficientes $g_0, g_1, \cdots, g_{k-1}$ em função dos coeficientes de $f(X)$, onde $k \in \mathbb{N}$. Como a $k-$ésima equação (9.1) é

$$f_0 g_k + f_1 g_{k-1} + \cdots + f_{k-1} g_1 + f_k g_0 = 0,$$

então, pela hipótese de indução,

$$g_k = -f_1 g_{k-1} - \cdots - f_{k-1} g_1 - f_k g_0 \tag{9.2}$$

é univocamente determinada pelos coeficientes de $f(X)$.

De modo inteiramente análogo, mostramos que também admite solução única $h(X) \in G$ a equação

$$h(X)\, f(X) = 1$$

para $f(X) \in G$ dado. Resta mostrar que $g(X) = h(X)$. Ora,

$$\begin{aligned} f(X)\, g(X) &= 1 \Rightarrow h(X)\,(f(X)\, g(X)) = h(X) \\ &\Rightarrow (h(X)\, f(X))\, g(X) = h(X) \\ &\Rightarrow 1 \cdot g(X) = h(X) \Rightarrow g(X) = h(X)\,. \end{aligned}$$

■

Definição 136 *Dizemos que dois produtos-estrela* $\star_1$ *e* $\star_2$ *em* M *são* equivalentes*, e escrevemos* $\star_1 \sim \star_2$*, quando existe uma equivalência-estrela* T *tal que vale*

$$T(f(\hbar) \star_1 g(\hbar)) = T(f(\hbar)) \star_2 T(g(\hbar))$$

para todas funções formais $f(\hbar)$ *e* $g(\hbar)$*. Quando a equivalência* T *é diferencial, dizemos que* $\star_1$ *e* $\star_2$ *são* diferencialmente equivalentes.

Às vezes, indicaremos explicitamente o operador formal T na notação, escrevendo $\star_1 \overset{T}{\sim} \star_2$.

A relação $\sim$ constitui de fato uma equivalência no conjunto dos produtos-estrela. De fato, verificam-se por inspeção as propriedades seguintes.

Reflexividade: $\star \overset{id}{\sim} \star$
Transitividade: $\star_1 \overset{T}{\sim} \star_2$ e $\star_2 \overset{U}{\sim} \star_3 \Rightarrow \star_1 \overset{UT}{\sim} \star_3$
Simetria: $\star_1 \overset{T}{\sim} \star_2 \Rightarrow \star_2 \overset{T^{-1}}{\sim} \star_1$

Proposição 137 *Dado um produto estrela $\star$ e uma equivalência-estrela T, é um produto-estrela $T-$equivalente a $\star$ a multplicação $\star_T$ definida por*

$$f(\hbar) \star_T g(\hbar) = T^{-1}\left(T\left(f(\hbar)\right) \star T\left(g(\hbar)\right)\right).$$

Prova. Basta provar que cada uma das condições da definição 131 é satisfeita por $\star_T$ definido como acima.

(a) resulta da maneira como definimos a ação das equivalências sobre funções formais.

(b) a associatividade prova-se assim:

$$\begin{aligned}
\left(f(\hbar) \star_T g(\hbar)\right) \star_T h(\hbar) &= T^{-1}\left(T\left(f(\hbar) \star_T g(\hbar)\right) \star T\left(h(\hbar)\right)\right) \\
&= T^{-1}\left(T\left(T^{-1}\left(T\left(f(\hbar)\right) \star T\left(g(\hbar)\right)\right)\right) \star T\left(h(\hbar)\right)\right) \\
&= T^{-1}\left(\left(T\left(f(\hbar)\right) \star T\left(g(\hbar)\right)\right) \star T\left(h(\hbar)\right)\right) \\
&= T^{-1}\left(T\left(f(\hbar)\right) \star \left(T\left(g(\hbar)\right) \star T\left(h(\hbar)\right)\right)\right) \\
&= T^{-1}\left(T\left(f(\hbar)\right) \star T\left(T^{-1}\left(T\left(g(\hbar)\right) \star T\left(h(\hbar)\right)\right)\right)\right) \\
&= T^{-1}\left(T\left(f(\hbar)\right) \star T\left(g(\hbar) \star_T h(\hbar)\right)\right) \\
&= f(\hbar) \star_T \left(g(\hbar) \star_T h(\hbar)\right)
\end{aligned}$$

c) como os termos de ordem zero em $\hbar$ de T e de T^{-1} são ambos iguais à identidade, temos que

$$f \star_T g = fg + O(\hbar).$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned}
[f,g]_{\star_T} &= f \star_T g - g \star_T f \\
&= T^{-1}\left(T(f) \star T(g)\right) - T^{-1}\left(T(g) \star T(f)\right) \\
&= T^{-1}\left(T(f) \star T(g) - T(g) \star T(f)\right) \\
&= T^{-1}\left(i\hbar\left\{T(f), T(g)\right\} + O\left(\hbar^2\right)\right) \\
&= T^{-1}\left(i\hbar\left\{f + O(\hbar), g + O(\hbar)\right\} + O\left(\hbar^2\right)\right) \\
&= T^{-1}\left(i\hbar\{f,g\} + O\left(\hbar^2\right)\right) \\
&= \left(id + \hbar T_1 + \cdots\right)\left(i\hbar\{f,g\} + O\left(\hbar^2\right)\right) \\
&= i\hbar\{f,g\} + O\left(\hbar^2\right).
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Exemplo 138 *O operador diferencial* $N : Pol^{\bullet}(\mathbb{R}^n) \to Pol^{\bullet}(\mathbb{R}^n)$ *definido por*

$$N = \exp\left(\frac{\hbar}{2i}\frac{\partial^2}{\partial q^\mu \partial p_\mu}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{\hbar}{2i}\right)^k \frac{\partial^{2k}}{\partial q^{\mu_1}\partial p_{\mu_1}\partial q^{\mu_k}\partial p_{\mu_k}}$$

$$= id - \hbar\frac{i}{2}\frac{\partial^2}{\partial q^\mu \partial p_\mu} + O\left(\hbar^2\right)$$

na seção 8.2.1 pode ser visto naturalmente como um operador formal

$$N : C^\infty\left(\mathbb{R}^{2n}\right)[[\hbar]] \to C^\infty\left(\mathbb{R}^{2n}\right)[[\hbar]]$$

Mais especificamente, trata-se de um equivalência-estrela. Fazendo uso da proposição 137, comprovamos que o produto de Weyl

$$\star_W : C^\infty\left(\mathbb{R}^{2n}\right)[[\hbar]] \times C^\infty\left(\mathbb{R}^{2n}\right)[[\hbar]] \to C^\infty\left(\mathbb{R}^{2n}\right)[[\hbar]]$$

é, de fato, um produto-estrela em $\mathbb{R}^{2n}$ *segundo a estrutura simplética canônica* $dq^\mu \wedge dp_\mu$*, uma vez que, não havendo dúvidas de que* $\star_{st}$ *seja um produto-estrela, vale ademais*

$$N\left(f \star_W g\right) = Nf \star_{st} Ng$$

Em particular, vemos que os produtos-estrela padrão e de Weyl são (diferencialmente) equivalentes.

Proposição 139 *Sejam* $\star_1$ *e* $\star_2$ *dois produtos-estrela em* M *diferencialmente equivalentes. Se* $\star_1$ *é um produto-estrela diferencial, então* $\star_2$ *também é.*

Prova. Seja

$$\star_1 = \sum_{j=0}^{\infty} \hbar^j C_j^{(1)}$$

um produto-estrela diferencial (i.e., $C_j^{(1)} \in C^2_{diff}(M), \forall j \in \mathbb{N}_0$) diferencialmente equivalente a

$$\star_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \hbar^k C_k^{(2)}.$$

Ou seja, existe uma equivalência diferencial $T = id + \sum_{r=1}^{\infty} \hbar^r T_r$ (i.e., $T_r \in C^1_{diff}(M)$) tal que

$$f \star_2 g = T^{-1}\left(T(f) \star_2 T(g)\right). \tag{9.3}$$

Escreva

$$T^{-1} = id + \sum_{s=1}^{\infty} \hbar^s G_s.$$

Das equações (9.2), que nos dão recursivamente os coeficientes de T^{-1} a partir dos coeficientes de ordem menor de T, vemos que $G_s \in C^1_{diff}(M)$ para todo $s \in \mathbb{N}$. Comparando ordem-a-ordem no parâmetro de deformação os membros da equação (9.3), obtemos

$$C_k^{(2)}(f,g) = \sum_{s=0}^{k}\sum_{j=0}^{s}\sum_{r=0}^{j} G_{k-s}\left(C_{s-j}^{(1)}\left(T_{j-r}(f), T_r(g)\right)\right),$$

donde se vê que $C_k^{(2)} \in C^2_{diff}(M)$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$. ■

Corolário 140 *Sejam $\star$ um produto-estrela diferencial e T uma equivalência diferencial. Então, o produto-estrela $\star_T$ definido por*

$$f \star_T g = T^{-1}\left(T(f) \star T(g)\right)$$

é um produto-estrela diferencial (diferencialmente equivalente a $\star$).

Em termos das seqüências de cocadeias induzidas $\{C_k(\star)\}_{k=0}^{\infty}$, a $T-$equivalência entre produtos-estrela pode ser parafraseada pelas condições

$$\sum_{j=0}^{n}\left\{T_j\left(C_{n-j}^{(1)}(f,g)\right) - \sum_{k=0}^{j} C_{n-j}^{(2)}\left(T_k(f), T_{j-k}(g)\right)\right\} = 0 \tag{9.4}$$

para todos $n \in \mathbb{N}$, $f, g \in C^{\infty}(M)$, onde $T = \sum_{r=0}^{\infty} \hbar^r T_r$, com $T_0 = id$. Com efeito, escrevendo

$$\star_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \hbar^k C_k^{(1)} \quad \text{e} \quad \star_2 = \sum_{j=0}^{\infty} \hbar^j C_j^{(2)},$$

temos,

$$\begin{aligned} T(f \star_1 g) &= \sum_{r=0}^{\infty} \hbar^r T_r\left(\sum_{k=0}^{\infty} \hbar^k C_k^{(1)}(f,g)\right) \\ &= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \hbar^{k+r} T_r\left(C_k^{(1)}(f,g)\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n \sum_{j=0}^{n} T_j\left(C_{n-j}^{(1)}(f,g)\right) \end{aligned}$$

enquanto

$$\begin{aligned} T(f) \star_2 T(g) &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \hbar^{l+r+s} C_k^{(2)}\left(T_r(f), T_s(g)\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j} C_{n-j}^{(2)}\left(T_k(f), T_{j-k}(g)\right). \end{aligned}$$

Comparando ordem-a-ordem no parâmetro $\hbar$, seguem as condições (9.4).

Já provamos que equivalências diferenciais ligam produtos-estrela diferenciais a produtos-estrela diferenciais (proposição 139). Vamos agora mostrar que dois produtos-estrela diferenciais equivalentes, o são por meio de uma equivalência diferencial (proposição 142). O espírito desses resultados é mostrar-nos que, restringindo-nos a produtos-estrela diferenciais, a distinção das equivalências diferenciais entre as demais prova-se desnecessária. Tudo de que precisaremos então é o conhecimento dos fatos básicos relativos à cohomologia de Hochschild diferencial da variedade M. Faremos uso intenso especialmente do teorema 127 do capítulo 7, a cuja aplicação devemos o seguinte

Lema 141 (Gutt-Rawnsley, 1999) *Todo produto-estrela diferencial é diferencialmente equivalente a um produto estrela $\star$ da forma*

$$f \star g = fg + \frac{i\hbar}{2} \{f, g\} + O\left(\hbar^2\right).$$

Prova. Seja $\star = \sum_{k=0}^{\infty} \hbar^k C_k$ um produto-estrela. Por definição, temos

$$skew\ C_1(f, g) = \frac{C_1(f, g) - C_1(g, f)}{2} = \frac{i}{2} \{f, g\}.$$

Por outro lado, a associatividade (8.1) em ordem 1 dá

$$\underbrace{fC_1(g, h) - C_1(fg, h) + C_1(f, gh) - C_1(f, g)\, h}_{\delta C_1(f,g,h)} = 0,$$

para todas $f, g, h \in C^{\infty}(M)$. Portanto, $\delta C_1 = 0$, i.e., $C_1 \in Z^2_{diff}(M)$ é um cociclo. Logo, invocando o teorema 7 do capítulo 7, temos que existe $B \in C^1_{diff}(M)$ tal que

$$C_1 = \delta B + skew\ C,$$

i.e., para todas $f, g \in C^{\infty}(M)$, temos

$$C_1(f, g) = fB(g) - B(fg) + B(f)\, g + \frac{i}{2} \{f, g\}. \tag{9.5}$$

Considere agora a equivalência diferencial

$$T = id - \hbar B,$$

cuja inversa (também diferencial) satisfaz

$$T^{-1} = id + \hbar B + O\left(\hbar^2\right),$$

e o produto-estrela $\star_T$ dado por

$$f \star_T g = T^{-1}\left(T(f) \star T(g)\right)$$

$$= \left(id + \hbar B + O\left(\hbar^2\right)\right)\left(\left(f - \hbar B\left(f\right)\right) \star \left(g - \hbar B\left(g\right)\right)\right)$$
$$= \left(id + \hbar B + O\left(\hbar^2\right)\right)\left(f \star g - \hbar B\left(f\right) \star g - \hbar f \star B\left(g\right) + O\left(\hbar^2\right)\right)$$
$$= \left(id + \hbar B + O\left(\hbar^2\right)\right)\left(fg + \hbar C_1\left(f,g\right) - \hbar B\left(f\right) g - \hbar f B\left(g\right) + O\left(\hbar^2\right)\right)$$
$$= fg + \hbar\left(B\left(fg\right) - fB\left(g\right) - B\left(f\right) g + C_1\left(f,g\right)\right) + O\left(\hbar^2\right).$$

Substituindo a equação (9.5) na última igualdade acima, vem

$$f \star_T g = fg + \frac{i\hbar}{2}\left\{f,g\right\} + O\left(\hbar^2\right).$$

■

Proposição 142 (Gutt-Rawnsley, 1999) *Dois produtos-estrela diferenciais $T-$equivalentes são T- diferencialmente equivalentes.*

Prova. Dados dois produtos-estrela

$$\star \ = \sum_{j=0}^{\infty} \hbar^j C_j \quad \text{e} \quad \star' = \sum_{k=0}^{\infty} \hbar^k C'_k$$

tais que $\star \overset{T}{\sim} \star'$, com $T = \sum_{r=0}^{\infty} \hbar^r T_r$, $T_0 = id$, vamos mostrar por indução que $T_r \in C^1_{diff}\left(M\right)$ para todo $r \in \mathbb{N}$.

Pelo lema anterior, podemos supor que

$$C_1 = C'_1 = \frac{i}{2}\left\{\cdot\ ,\cdot\right\}.$$

Logo, a equivalência

$$T\left(f \star g\right) = T\left(f\right) \star' T\left(g\right)$$

dá, na primeira ordem do parâmetro da deformação[2],

$$\frac{i}{2}\left\{f,g\right\} + T_1\left(fg\right) = \frac{i}{2}\left\{f,g\right\} + fT_1\left(g\right) + T_1\left(f\right) g,$$

ou seja

$$T_1\left(fg\right) = fT_1\left(g\right) + T_1\left(f\right) g,$$

donde se vê o operador T_1 é uma derivação da álgebra $C^\infty\left(M\right)$, i.e., um campo vetorial, e, portanto, $T_1 \in C^1_{diff}\left(M\right)$.

Suponha agora que tenhamos provado que $T_1, \cdots, T_n \in C^1_{diff}\left(M\right)$. Defina então a equivalência diferencial

$$T' = id + \sum_{r=1}^{n} \hbar^r T_r\ ,$$

[2] Veja equação (9.4) para $n = 1$.

e o produto-estrela diferencial[3] ($T'-$equivalente a $\star'$)

$$f \ \star'' \, g = (T')^{-1} \left(T'(f) \star' T'(g)\right).$$

Note que

$$T = T' + \sum_{r=n+1}^{\infty} \hbar^r T_r.$$

Como $\star \overset{T}{\sim} \star'$ e $\star'' \overset{T'}{\sim} \star'$, temos $\star \overset{T''}{\sim} \star''$, com $T'' = (T')^{-1} T$. Ora,

$$\begin{aligned} T''(f) &= (T')^{-1} (T(f)) \\ &= (T')^{-1} \left(T'(f) + \sum_{r=n+1}^{\infty} \hbar^r T_r(f) \right) \\ &= f + \hbar^{n+1} (T')^{-1} (T_{n+1}(f)) + O\left(\hbar^{n+2}\right) \\ &= f + \hbar^{n+1} (id + O(\hbar)) (T_{n+1}(f)) + O\left(\hbar^{n+2}\right) \\ &= f + \hbar^{n+1} T_{n+1}(f) + O\left(\hbar^{n+2}\right) \end{aligned}$$

Ou seja, o primeiro termo não-nulo depois da identidade na expansão de T'' aparece na ordem $n+1$:

$$T'' = id + \sum_{r=n+1}^{\infty} \hbar^r T''_r,$$

e é exatamente

$$T''_{n+1} = T_{n+1}. \tag{9.6}$$

Portanto, em ordem $n+1$ a equivalência

$$T''(f \star g) = T''(f) \star'' T''(g)$$

nos dá

$$T_{n+1}(fg) + C_{n+1}(f,g) = fT_{n+1}(g) + T_{n+1}(f)\, g + C''_{n+1}(f,g),$$

onde pusemos $\star'' = \sum_{l=0}^{\infty} \hbar^l C''_l$.

Logo, usando o operador de cobordo $\delta : C^{\bullet}_{diff}(M) \to C^{\bullet+1}_{diff}(M)$, temos

$$\begin{aligned} \delta T_{n+1}(f,g) &\equiv fT_{n+1}(g) - T_{n+1}(fg) + T_{n+1}(f)\, g \\ &= C_{n+1}(f,g) - C''_{n+1}(f,g), \end{aligned}$$

donde

$$\delta T_{n+1} = C_{n+1} - C''_{n+1} \in C^2_{diff}(M),$$

uma vez que $C_{n+1}, C''_{n+1} \in C^2_{diff}(M)$: o primeiro por hipótese, e o segundo, por ser coeficiente de um produto-estrela diferencial. Ora, δT_{n+1} é um cobordo, e

[3] Ver corolário 140.

logo, um cociclo: $\delta T_{n+1} \in Z^2_{diff}(M)$. Estamos, portanto, em condições de invocar o teorema 127 do capítulo 7 e afirmar que existem cocadeias $B \in C^1_{diff}(M)$ e $A \in skew\ Z^2_{diff}(M)$ tais que vale

$$\delta T_{n+1} = \delta B + A.$$

Observe agora que, como

$$A = \delta (T_{n+1} - B)$$

é ao mesmo tempo um cociclo simétrico[4] e antissimétrico, resta-nos admitir que

$$\delta (T_{n+1} - B) = 0,$$

donde $T_{n+1} - B$ é um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(M) = Z^1_{diff}(M)$. Logo,

$$T_{n+1} = B + X \in C^1_{diff}(M).$$

Isso conclui a prova. ■

Estamos agora em condições de provar o resultado mais importante deste capítulo. Ele produzirá uma parametrização dos produtos-estrela diferenciais de uma variedade simplética em termos do segundo grupo de cohomologia desta, como ficará claro nos desenvolvimentos posteriores.

Teorema 143 (Bertelson-Cahen-Gutt, 1997) *Sejam $\star = \sum_{j=0}^{\infty} \hbar^j C_j$ e $\star' = \sum_{k=0}^{\infty} \hbar^k C'_k$ produtos-estrela diferenciais numa variedade simplética (M, ω) que coincidem até a ordem $n-1$ no parâmetro de deformação $\hbar$, i.e., tais que*

$$C_j = C'_j,\ \forall j \in [n-1]_0 .$$

A antissimetrização de sua diferença em ordem n fornece uma 2-forma fechada ω_n. Se essa forma for exata, então existe um produto-estrela $\star''$ equivalente a $\star'$ tal que $\star''$ e $\star$ coincidem até a ordem n.

Prova. Considere a equação da associatividade (8.1) em ordem n. Podemos reescrevê-la em forma ligeiramente diferente colecionando os termos extremos ($j = 0$ e $j = n$), que compõem o cobordo de C_n. A saber, temos, para todas $f, g, h \in C^\infty(M)$,

$$\delta C_n (f, g, h) = \sum_{j=1}^{n-1} \left[C_j (C_{n-j} (f, g), h) - C_j (f, C_{n-j} (g, h)) \right],$$

[4] 2-cobordos são sempre simétricos, pois

$$\delta C (f, g) = f C (g) - C (fg) + C (f) g = g C (f) - C (gf) + C (g) f = \delta C (g, f).$$

e equação análoga para $\delta C'_n$. Agora, como $\star$ e $\star'$ coincidem até a ordem $n-1$, temos

$$\delta\left(C_n - C'_n\right) = 0,$$

i.e., $C_n - C'_n$ é um cociclo em $Z^2_{diff}(M)$. Invocando o teorema 130, temos que existem uma cocadeia $B_n \in C^1_{diff}(M)$ e uma $2-$forma diferencial $\omega_n \in \Omega^2(M)$ tal que vale a equação

$$\left(C_n - C'_n\right)(f,g) = \delta B_n(f,g) + \omega_n\left(\nabla_\omega f, \nabla_\omega g\right) \tag{9.7}$$

para todas funções $f,g \in C^\infty(M)$.

Use agora a equação de associatividade (8.1) em ordem $n+1$ para, colecionando os termos que compõem o cobordo de C_{n+1} ($j=0$ e $j=n+1$), escrever

$$\delta C_{n+1}(f,g,h) = \sum_{j=1}^{n}\left[C_j\left(C_{n-j+1}(f,g),h\right) - C_j\left(f, C_{n-j+1}(g,h)\right)\right].$$

Como $\star$ e $\star'$ coincidem até a ordem $n-1$, temos que

$$\delta\left(C_{n+1} - C'_{n+1}\right)(f,g,h) =$$

$$\begin{aligned}
&= C_1\left(C_n(f,g),h\right) - C_1\left(f, C_n(g,h)\right) + C_n\left(C_1(f,g),h\right) - C_n\left(f, C_1(g,h)\right) \\
&-C_1\left(C'_n(f,g),h\right) + C_1\left(f, C'_n(g,h)\right) - C'_n\left(C_1(f,g),h\right) + C'_n\left(f, C_1(g,h)\right),
\end{aligned}$$

i.e.,

$$\begin{aligned}
&\delta\left(C_{n+1} - C'_{n+1}\right)(f,g,h) = \\
&C_1\left(\left(C_n - C'_n\right)(f,g),h\right) - C_1\left(f,\left(C_n - C'_n\right)(g,h)\right) \\
&+\left(C_n - C'_n\right)\left(C_1(f,g),h\right) - \left(C_n - C'_n\right)\left(f, C_1(g,h)\right)
\end{aligned}$$

Tomemos agora a antissimetrização da equação acima, obtendo

$$\begin{aligned}
&C_1\left(\left(C_n - C'_n\right)(f,g),h\right) - C_1\left(f,\left(C_n - C'_n\right)(g,h)\right) \\
&+C_1\left(\left(C_n - C'_n\right)(h,f),g\right) - C_1\left(h,\left(C_n - C'_n\right)(f,g)\right) \\
&+C_1\left(\left(C_n - C'_n\right)(g,h),f\right) - C_1\left(g,\left(C_n - C'_n\right)(h,f)\right) \\
&+C_1\left(g,\left(C_n - C'_n\right)(f,h)\right) - C_1\left(\left(C_n - C'_n\right)(g,f),h\right) \\
&+C_1\left(f,\left(C_n - C'_n\right)(h,g)\right) - C_1\left(\left(C_n - C'_n\right)(f,h),g\right) \\
&+C_1\left(h,\left(C_n - C'_n\right)(g,f)\right) - C_1\left(\left(C_n - C'_n\right)(h,g),f\right) \\
&+\left(C_n - C'_n\right)\left(C_1(f,g),h\right) - \left(C_n - C'_n\right)\left(f, C_1(g,h)\right) \\
&+\left(C_n - C'_n\right)\left(C_1(h,f),g\right) - \left(C_n - C'_n\right)\left(h, C_1(f,g)\right) \\
&+\left(C_n - C'_n\right)\left(C_1(g,h),f\right) - \left(C_n - C'_n\right)\left(g, C_1(h,f)\right) \\
&+\left(C_n - C'_n\right)\left(g, C_1(f,h)\right) - \left(C_n - C'_n\right)\left(C_1(g,f),h\right)
\end{aligned}$$

$$+\left(C_n - C_n'\right)\left(f, C_1\left(h, g\right)\right) - \left(C_n - C_n'\right)\left(C_1\left(f, h\right), g\right)$$
$$+\left(C_n - C_n'\right)\left(h, C_1\left(g, f\right)\right) - \left(C_n - C_n'\right)\left(C_1\left(h, g\right), f\right)$$
$$= 6\ skew\ \delta\left(C_{n+1} - C_{n+1}'\right)\left(f, g, h\right) = 0,$$

devido ao lema 113 (*nulidade da antissimetrização de cobordos*) do capítulo 6, ou, reagrupando os termos,

$$C_1\left(\left(C_n - C_n'\right)\left(f, g\right), h\right) - C_1\left(h, \left(C_n - C_n'\right)\left(f, g\right)\right)$$
$$+C_1\left(\left(C_n - C_n'\right)\left(h, f\right), g\right) - C_1\left(g, \left(C_n - C_n'\right)\left(h, f\right)\right)$$
$$+C_1\left(\left(C_n - C_n'\right)\left(g, h\right), f\right) - C_1\left(f, \left(C_n - C_n'\right)\left(g, h\right)\right)$$
$$+C_1\left(g, \left(C_n - C_n'\right)\left(f, h\right)\right) - C_1\left(\left(C_n - C_n'\right)\left(f, h\right), g\right)$$
$$+C_1\left(f, \left(C_n - C_n'\right)\left(h, g\right)\right) - C_1\left(\left(C_n - C_n'\right)\left(h, g\right), f\right)$$
$$+C_1\left(h, \left(C_n - C_n'\right)\left(g, f\right)\right) - C_1\left(\left(C_n - C_n'\right)\left(g, f\right), h\right)$$
$$+\left(C_n - C_n'\right)\left(C_1\left(f, g\right) - C_1\left(g, f\right), h\right)$$
$$+\left(C_n - C_n'\right)\left(C_1\left(h, f\right) - C_1\left(f, h\right), g\right)$$
$$+\left(C_n - C_n'\right)\left(C_1\left(g, h\right) - C_1\left(h, g\right), f\right)$$
$$+\left(C_n - C_n'\right)\left(g, C_1\left(f, h\right) - C_1\left(h, f\right)\right)$$
$$+\left(C_n - C_n'\right)\left(f, C_1\left(h, g\right) - C_1\left(g, h\right)\right)$$
$$+\left(C_n - C_n'\right)\left(h, C_1\left(g, f\right) - C_1\left(f, g\right)\right)$$
$$= 0.$$

Usando agora a propriedade

$$C_1\left(f, g\right) - C_1\left(g, f\right) = i\left\{f, g\right\}$$

do produto-estrela, podemos reescrever a equação acima como

$$0 = \left\{\left(C_n - C_n'\right)\left(f, g\right), h\right\} + \left\{\left(C_n - C_n'\right)\left(h, f\right), g\right\}$$
$$+\left\{\left(C_n - C_n'\right)\left(g, h\right), f\right\} + \left\{g, \left(C_n - C_n'\right)\left(f, h\right)\right\}$$
$$+\left\{f, \left(C_n - C_n'\right)\left(h, g\right)\right\} + \left\{h, \left(C_n - C_n'\right)\left(g, f\right)\right\}$$
$$+\left(C_n - C_n'\right)\left(\left\{f, g\right\}, h\right) + \left(C_n - C_n'\right)\left(\left\{h, f\right\}, g\right)$$
$$+\left(C_n - C_n'\right)\left(\left\{g, h\right\}, f\right) + \left(C_n - C_n'\right)\left(g, \left\{f, h\right\}\right)$$
$$+\left(C_n - C_n'\right)\left(f, \left\{h, g\right\}\right) + \left(C_n - C_n'\right)\left(h, \left\{g, f\right\}\right)$$

Substituindo (9.7) na equação acima, temos

$$0 = \left\{\delta B_n\left(f, g\right), h\right\} + \left\{\delta B_n\left(h, f\right), g\right\}$$
$$+\left\{\delta B_n\left(g, h\right), f\right\} + \left\{g, \delta B_n\left(f, h\right)\right\}$$

$$+\{f,\delta B_n(h,g)\}+\{h,\delta B_n(g,f)\}$$
$$+\{\omega_n(\nabla_\omega f,\nabla_\omega g),h\}+\{\omega_n(\nabla_\omega h,\nabla_\omega f),g\}$$
$$+\{\omega_n(\nabla_\omega g,\nabla_\omega h),f\}+\{g,\omega_n(\nabla_\omega f,\nabla_\omega h)\}$$
$$+\{f,\omega_n(\nabla_\omega h,\nabla_\omega g)\}+\{h,\omega_n(\nabla_\omega g,\nabla_\omega f)\}$$
$$+\delta B_n(\{f,g\},h)+\delta B_n(\{h,f\},g)$$
$$+\delta B_n(\{g,h\},f)+\delta B_n(g,\{f,h\})$$
$$+\delta B_n(f,\{h,g\})+\delta B_n(h,\{g,f\})$$
$$+\omega_n(\nabla_\omega\{f,g\},\nabla_\omega h)+\omega_n(\nabla_\omega\{h,f\},\nabla_\omega g)$$
$$+\omega_n(\nabla_\omega\{g,h\},\nabla_\omega f)+\omega_n(\nabla_\omega g,\nabla_\omega\{f,h\})$$
$$+\omega_n(\nabla_\omega f,\nabla_\omega\{h,g\})+\omega_n(\nabla_\omega h,\nabla_\omega\{g,f\}),$$

ou, reagrupando os termos e explorando a antissimetria do colchete de Poisson e da 2-forma ω_n e a simetria do 2-cobordo δB,

$$0=\{\delta B_n(f,g),h\}-\{\delta B_n(f,g),h\}$$
$$+\{\delta B_n(h,f),g\}-\{\delta B_n(h,f),g\}$$
$$+\{f,\delta B_n(h,g)\}-\{f,\delta B_n(h,g)\}$$
$$+\{\omega_n(\nabla_\omega f,\nabla_\omega g),h\}+\{\omega_n(\nabla_\omega f,\nabla_\omega g),h\}$$
$$+\{\omega_n(\nabla_\omega h,\nabla_\omega f),g\}+\{\omega_n(\nabla_\omega h,\nabla_\omega f),g\}$$
$$+\{\omega_n(\nabla_\omega g,\nabla_\omega h),f\}+\{\omega_n(\nabla_\omega g,\nabla_\omega h),f\}$$
$$+\delta B_n(\{f,g\},h)-\delta B_n(\{f,g\},h)$$
$$+\delta B_n(g,\{f,h\})-\delta B_n(g,\{f,h\})$$
$$+\delta B_n(f,\{h,g\})-\delta B_n(f,\{h,g\})$$
$$+\omega_n(\nabla_\omega\{f,g\},\nabla_\omega h)+\omega_n(\nabla_\omega\{f,g\},\nabla_\omega h)$$
$$+\omega_n(\nabla_\omega\{h,f\},\nabla_\omega g)+\omega_n(\nabla_\omega\{h,f\},\nabla_\omega g)$$
$$+\omega_n(\nabla_\omega\{g,h\},\nabla_\omega f)+\omega_n(\nabla_\omega\{g,h\},\nabla_\omega f),$$

donde segue que

$$\{\omega_n(\nabla_\omega f,\nabla_\omega g),h\}+\{\omega_n(\nabla_\omega h,\nabla_\omega f),g\}+\{\omega_n(\nabla_\omega g,\nabla_\omega h),f\}$$
$$+\omega_n(\nabla_\omega\{f,g\},\nabla_\omega h)+\omega_n(\nabla_\omega\{h,f\},\nabla_\omega g)+\omega_n(\nabla_\omega\{g,h\},\nabla_\omega f)=0.$$

Vamos provar que essa última equação equivale ao fato de a forma α ser fechada. Para quaisquer funções $f,g\in C^\infty(M)$, tem-se

$$\{f,g\}=\nabla_\omega f(g)$$

e

$$\nabla_\omega \{f,g\} = -[\nabla_\omega f, \nabla_\omega g].$$

Usando essas identidades, reescrevemos a equação acima como

$$\nabla_\omega h(\omega_n(\nabla_\omega f, \nabla_\omega g)) + \nabla_\omega g(\omega_n(\nabla_\omega h, \nabla_\omega f)) + \nabla_\omega f(\omega_n(\nabla_\omega g, \nabla_\omega h))$$

$$+\omega_n([\nabla_\omega f, \nabla_\omega g], \nabla_\omega h) + \omega_n([\nabla_\omega h, \nabla_\omega f], \nabla_\omega g) + \omega_n([\nabla_\omega g, \nabla_\omega h], \nabla_\omega f) = 0,$$

ou seja[5],

$$d\omega_n(\nabla_\omega f, \nabla_\omega g, \nabla_\omega h) = 0$$

para quaisquer funções $f, g, h \in C^\infty(M)$. Isso é suficiente para afirmarmos que $d\omega_n = 0$.

Vamos agora provar, por indução em n, que se ω_n é fechada, i.e., que se existe $\eta_n \in \Omega(M)$ tal que $\omega_n = d\eta_n$, então existe um produto-estrela equivalente a $\star'$ que coincide com $\star$ até a ordem n.

Suponha $\omega_n = d\eta_n$ e defina uma equivalência T por

$$T(f) = f + \hbar^{n-1} i\eta_n(\nabla_\omega f)$$

para toda função $f \in C^\infty(M)$, e seja $\star'' = \sum_{k=0}^\infty \hbar^k C_k''$ o produto estrela $T-$equivalente a $\star'$ dado pela proposição 137, i.e., tal que

$$T(f \star'' g) = T(f) \star' T(g)$$

É claro, comparando ordem-a-ordem no parâmetro de deformação $\hbar$, que $\star$, $\star'$ e $\star''$ coincidem até a ordem $n-2$. Em ordem $n-1$, temos

$$\begin{aligned} C_{n-1}''(f,g) &= iC_0'(\eta_n(\nabla_\omega f), g) + iC_0'(f, \eta_n(\nabla_\omega g)) \\ &\quad + i\eta_n(\nabla_\omega C_0'(f,g)) + C_{n-1}'(f,g), \end{aligned}$$

ou seja[6]

$$\begin{aligned} C_{n-1}''(f,g) &= i\eta_n(\nabla_\omega f)g + if\eta_n(\nabla_\omega g) \\ &\quad + i\eta_n(\nabla_\omega(fg)) + C_{n-1}'(f,g) \\ &= 2i\eta_n(\nabla_\omega(fg)) + C_{n-1}'(f,g), \end{aligned}$$

[5] Usamos aqui a identidade

$$\begin{aligned} d\alpha(X,Y,Z) &= X\alpha(Y,Z) + Y\alpha(Z,X) + Z\alpha(X,Y) \\ &\quad + \alpha([X,Y],Z) + \alpha([Y,Z],X) + \alpha([Z,X],Y) \end{aligned}$$

Ela é provada de maneira análoga àquela da nota de rodapé 11 à página 100.

[6] Na segunda igualdade, usamos o isomorfismo $C^\infty(M)-$linear canonicamente induzido pela forma simplética ω entre $\Omega(M)$ e $\mathfrak{X}(M)$, para escrever

$$\begin{aligned} \nabla_\omega(fg) &= d(fg)_\sharp = (gdf + fdg)_\sharp \\ &= gdf_\sharp + fdg_\sharp = g\nabla_\omega f + f\nabla_\omega g, \end{aligned}$$

donde

$$\left(C''_{n-1} - C_{n-1}\right)(f,g) = 2i\eta_n\left(\nabla_\omega(fg)\right) + \left(C'_{n-1} - C_{n-1}\right)(f,g)$$

Como a primeira parcela do membro direito é simétrica no par (f,g), temos

$$skew\ \left(C''_{n-1} - C_{n-1}\right)(f,g) = skew\ \left(C'_{n-1} - C_{n-1}\right)(f,g) = 0$$

Pela hipótese indutiva, podemos supor, a menos de uma equivalência, que temos também $C''_{n-1} = C_{n-1}$.

Em ordem n, temos

$$\begin{aligned} C''_n(f,g) + i\eta_n\left(\nabla_\omega C''_1(f,g)\right) &= iC'_1\left(\eta_n(\nabla_\omega f), g\right) + iC'_1\left(f, \eta_n(\nabla_\omega g)\right) \\ &\quad + C'_n(f,g), \end{aligned}$$

donde, como $C''_1 = C'_1$, vem

$$\begin{aligned} skew\ \left(C''_n - C_n\right)(f,g) &= i\begin{pmatrix} \left[C'_1\left(\eta_n(\nabla_\omega f), g\right) - C'_1\left(g, \eta_n(\nabla_\omega f)\right)\right] \\ +\left[C'_1\left(f, \eta_n(\nabla_\omega g)\right) - C'_1\left(\eta_n(\nabla_\omega g), f\right)\right] \\ -\eta_n \cdot \nabla_\omega\left(C'_1(f,g) - C'_1(g,f)\right) \end{pmatrix} \\ &\quad + skew\ \left(C'_n - C_n\right)(f,g) \\ &= \begin{pmatrix} \{\eta_n(\nabla_\omega f), g\} - \{\eta_n(\nabla_\omega g), f\} \\ +\eta_n \cdot \nabla_\omega\{f,g\} \end{pmatrix} + \omega_n\left(\nabla_\omega f, \nabla_\omega g\right) \\ &= -d\eta_n\left(\nabla_\omega f, \nabla_\omega g\right) + \omega_n\left(\nabla_\omega f, \nabla_\omega g\right) \\ &= \omega_n\left(\nabla_\omega f, \nabla_\omega g\right) - \omega_n\left(\nabla_\omega f, \nabla_\omega g\right) = 0, \end{aligned}$$

i.e.,

$$skew\ \left(C''_n - C_n\right) = 0.$$

Como no começo da prova, considere a equação da associatividade (8.1) em ordem n, reescrita com os termos extremos ($j = 0$ e $j = n$) que compõem o cobordo de C''_n agrupados:

$$\delta C''_n(f,g,h) = \sum_{j=1}^{n-1}\left[C''_j\left(C''_{n-j}(f,g), h\right) - C''_j\left(f, C''_{n-j}(g,h)\right)\right],$$

$\forall . f,g,h \in C^\infty(M)$. e equação análoga para $\delta C'_n$. Como conseguimos coincidência de termos até ordem $n-1$, temos então que $C''_n - C_n$ é também um cociclo em $Z^2_{diff}(M)$, ou seja:

$$\delta\left(C''_n - C_n\right) = 0$$

Invocando agora o teorema 127, temos que existem uma cocadeia $B \in C^1_{diff}(M)$ tal que

$$C''_n - C_n = \delta B,$$

pois, como vimos acima, $skew\ \left(C''_n - C_n\right) = 0$.Assim, temos

$$\left(C''_n - C_n\right)(f,g) = fB(g) - B(fg) + B(f)g$$

para todas $f, g \in C^{\infty}(M)$.

Defina agora a equivalência

$$U = id - \hbar^n B$$

e o produto-estrela $\star''' = \sum_{k=0}^{\infty} \hbar^k C_k'''$, $U-$equivalente a $\star''$, dado por

$$U(f \star''' g) = U(f) \star'' U(g).$$

É evidente que $\star'''$, $\star''$ (e, logo, $\star$) coincidem até a ordem $n-1$ no parâmetro de deformação $\hbar$. Em ordem n, temos

$$C_k'''(f,g) - B(fg) = C_n''(f,g) - fB(g) - B(f)g,$$

donde

$$\begin{aligned} (C_k''' - C_n'')(f,g) &= -fB(g) + B(fg) - B(f)g \\ &= (C_n - C_n'')(f,g), \end{aligned}$$

para todas $f, g \in C^{\infty}(M)$, i.e.,

$$C_k''' - C_n'' = C_n - C_n''.$$

Portanto, chegamos a $C_k''' = C_n$. Por transitividade, $\star'''$ é um produto-estrela equivalente a $\star'$ que coincide com $\star$ até ordem n. Isso encerra a prova. ∎

Evidentemente, se todas as 2-formas fechadas da variedade M forem exatas, então podemos prosseguir indutivamente, obtendo, no limite, uma equivalência entre $\star''$ e $\star$ *lui-même*. É o que diz o seguinte

Corolário 144 *Se o segundo grupo de cohomologia de Rham $H_{dR}^2(M)$ de uma variedade simplética M é trivial, então todos os produtos-estrela diferenciais em M são equivalentes.*

Exemplo 145 *Todos os produtos-estrela diferenciais em $\mathbb{R}^{2n}$ são equivalentes. Logo, são equivalentes entre si todos os produtos estrela mencionados na seção 8.2.*

Além disso, todos os produtos-estrela diferenciais de uma variedade são localmente equivalentes. Mais precisamente, sejam $\star$ um produto-estrela numa variedade M e U um aberto de M. A *restrição de $\star$ a U* é a aplicação

$$\star|U : C^{\infty}(U)[[\hbar]] \times C^{\infty}(U)[[\hbar]] \to C^{\infty}(U)[[\hbar]]$$

definida da seguinte forma: dado $x \in U$, tome uma *bump-function* $\eta : M \to \mathbb{R}$ em torno de x com suporte em U e ponha

$$f(\star|U)g(x) = (f^{\eta} \star g^{\eta})(x),$$

onde $f^{\eta}, g^{\eta} \in C^{\infty}(M)$ são dadas por

$$f^{\eta}(y) = \begin{cases} \eta(y) f(y), \text{ se } y \in U \\ 0, \text{ se } y \notin U \end{cases} \quad \text{e } g^{\eta}(y) = \begin{cases} \eta(y) g(y), \text{ se } y \in U \\ 0, \text{ se } y \notin U \end{cases} .$$

Como $\star$ é definido em termos de operadores diferenciais, temos que $\star|U$ define coerentemente um produto-estrela em U. Temos então o seguinte

Corolário 146 *Sejam $\star$ e $\star'$ dois produtos-estrela numa variedade simplética (M, ω). Dado $x \in M$, existe uma vizinhança U de x em M tal que os produtos-estrela restritos $\star|U$ e $\star'|U$ são equivalentes.*

Vale também a recíproca do teorema 143, a saber

Teorema 147 (Bertelson-Cahen-Gutt, 1997) *Sejam $\star = \sum_{j=0}^{\infty} \hbar^j C_j$ e $\star' = \sum_{k=0}^{\infty} \hbar^k C'_k$ produtos-estrela diferenciais numa variedade simplética (M, ω) que são equivalentes e coincidem até a ordem $n-1$ no parâmetro de deformação $\hbar$, i.e., tais que*

$$C_j = C'_j, \; \forall j \in [n-1]_0 .$$

Então, a antissimetrização de sua diferença em ordem n fornece uma 2-forma exata ω_n.

Prova. Seja

$$\begin{aligned} T &= id + \sum_{k \geq r}^{\infty} \hbar^k T_k \\ &= id + \hbar^r T_r + O\left(\hbar^{r+1}\right) \end{aligned}$$

(para um certo $r \leq n$) a equivalência entre $\star = \sum_{k=0}^{\infty} \hbar^k C_k$ e $\star' = \sum_{k=0}^{\infty} \hbar^k C'_k$, i.e.,

$$T(f \star' g) = T(f) \star T(g)$$

Supondo que tenhamos $C'_k = C_k$ para todo $k \in [n-1]_0$, em ordem r no parâmetro de deformação $\hbar$, a equação de acima fica

$$T_r(fg) = fT_r(g) + T_r(f) g,$$

donde

$$\delta T_r(f, g) = fT_r(g) - T_r(fg) + T_r(f) g = 0$$

Assim, T_r é um 1-cociclo diferencial de Hochschild, e, portanto, um campo vetorial $T_r \in \mathfrak{X}(M)$. Assim, dadas funções $f, g \in C^{\infty}(M)$, vale a regra de Leibniz

$$T_r(fg) = T_r(f) g + fT_r(g)$$

Agora, se $r < n-1$, então, em ordem $r+1$, a equação de equivalência acima se escreve

$$\begin{aligned} T_r(C_1(f, g)) + T_{r+1}(fg) &= C_1(f, T_r(g)) + C_1(T_r(f), g) \\ &\quad + T_{r+1}(f) g + fT_{r+1}(g), \end{aligned}$$

donde

$$T_r\left(C_1\left(f,g\right)\right) = C_1\left(f, T_r\left(g\right)\right) + C_1\left(T_r\left(f\right), g\right)$$

Tomando agora a antissimetrização com relação ao par (f,g) e explorando a linearidade de T_r, obtemos

$$T_r\left\{f,g\right\} = \left\{f, T_r\left(g\right)\right\} + \left\{T_r\left(f\right), g\right\}$$

Vamos agora mostrar que T_r é um campo vetorial tal que sua contração[7] com a forma simplética ω produz uma 1-forma fechada[8], i.e., que

$$dC_2^1\left(T_r \otimes \omega\right) = 0$$

De fato, dados campos hamiltonianos $X = \nabla_\omega f$ e $Y = \nabla_\omega g \in \mathfrak{X}\left(M\right)$, onde $f, g \in C^\infty\left(M\right)$, temos[9]

$$\begin{aligned} dC_2^1\left(T_r \otimes \omega\right)\left(X,Y\right) &= XC_2^1\left(T_r \otimes \omega\right)\left(Y\right) - YC_2^1\left(T_r \otimes \omega\right)\left(X\right) \\ &\quad - C_2^1\left(T_r \otimes \omega\right)\left(\left[X,Y\right]\right) \\ &= X\omega\left(T_r, Y\right) - Y\omega\left(T_r, X\right) - \omega\left(T_r, \left[X,Y\right]\right) \\ &= -\left\{f, T_r\left(g\right)\right\} + \left\{g, T_r\left(f\right)\right\} - T_r\left\{f,g\right\} = 0 \end{aligned}$$

Como toda forma fechada é localmente exata, temos que, para todo $x \in M$ existem uma vizinhança U de x em M e uma função $f_r^U \in C^\infty\left(U\right)$ tais que

$$C_2^1\left(T_r \otimes \omega\right) = df_r^U,$$

ou seja, para todo $X \in \mathfrak{X}\left(M\right)$, tem-se

$$\omega\left(T_r, X\right) = X\left(f_r^U\right).$$

Portanto, $T_r|U$ é o gradiente simplético da função f_r^U:

$$T_r|U = \nabla_{\omega|U} f_r^U.$$

Assim, dada uma função $g \in C^\infty\left(M\right)$ qualquer, temos

$$T_r\left(g\right)|U = \left\{f_r^U, g|U\right\}$$

Definindo

$$D_r : C^\infty\left(M\right) \to C^\infty\left(M\right)\left[\left[\hbar\right]\right]$$

por

$$D_r\left(g\right)|U = -\frac{i}{\hbar}\left[f_r^U, g|U\right]_{\star|U}$$

[7] Ver definição de contração de tensores na seção 1.2.

[8] Nesse caso, dizemos que T_r é um *campo vetorial simplético* de (M,ω). Ver seção 4.1 de [Cannas].

[9] Aqui, usamos a mesma identidade provada na nota de rodapé 11 à página 100, i.e.,

$$d\alpha\left(X,Y\right) = X\alpha\left(Y\right) - Y\alpha\left(X\right) - \alpha\left(\left[X,Y\right]\right)$$

temos

$$D_r(f \star g) = D_r(f) \star g + f \star D_r(g),$$

donde se vê que D_r define por extensão $\hbar-$linear uma derivação no anel das funções formais $C^\infty(M)[[\hbar]]$. Definindo agora

$$\begin{aligned} S_r &= \exp(\hbar^r i D_r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\hbar^r i D_r)^k \\ &= id + \hbar^r i D_r - \hbar^{2r} \frac{1}{2} D_r D_r + \cdots \end{aligned}$$

temos

$$S_r(f \star g) = S_r(f) \star S_r(g),$$

ou seja, que S_r (e, portanto, também S_r^{-1}) é uma auto-equivalência de $\star$; e

$$S_r = id + \hbar^r i T_r + O\left(\hbar^{r+1}\right),$$

pois

$$\begin{aligned} S_r(g)(x) &= g(x) + \hbar^r i D_r(g)(x) + O\left(\hbar^{r+1}\right) \\ &= g(x) + \hbar^{r-1}\left[f_r^U, g|U\right]_{\star|U}(x) + O\left(\hbar^{r+1}\right) \\ &= g(x) + \hbar^r i\left\{f_r^U, g|U\right\}(x) + O\left(\hbar^{r+1}\right) \\ &= g(x) + \hbar^r i T_r(g)(x) + O\left(\hbar^{r+1}\right), \end{aligned}$$

para todo $x \in U \subset M$.

Afirmamos que o operador formal $\tilde{T} = S_r^{-1} \circ T$ é também uma equivalência entre os produtos-estrela $\star$ e $\star'$. Com efeito, tem-se

$$\begin{aligned} \tilde{T}(f \star' g) &= S_r^{-1}(T(f \star' g)) \\ &= S_r^{-1}(T(f) \star T(g)) \quad (\star \overset{T}{\sim} \star') \\ &= S_r^{-1}(T(f)) \star S_r^{-1}(T(g)) \quad (\star \overset{S_r^{-1}}{\sim} \star) \\ &= \tilde{T}(f) \star \tilde{T}(g) \end{aligned}$$

Claramente, temos

$$\tilde{T} = id + \hbar^{r+1} i T_{r+1} + O\left(\hbar^{r+2}\right)$$

Aplicando o método recorrentemente enquanto for $r < n$, vemos que qualquer equivalência $\bar{T}$ entre $\star$ e $\star'$ é da forma

$$\bar{T} = \exp(\hbar i D_1) \circ \cdots \circ \exp\left(\hbar^{n-1} i D_{n-1}\right) \circ \left(id + \hbar^{n-1} i \tilde{T}_{n-1} + O(\hbar^n)\right),$$

onde as aplicações $D_1, \cdots, D_{n-1} : C^\infty(M) \to C^\infty(M)[[\hbar]]$ são $\star-$derivações, e, portanto, $\exp \hbar D_1, \cdots, \exp \hbar^{n-1} D_{n-1}$ são $\star-$endomorfismos. Assim, temos

$$\left(id + \hbar^{n-1} i \tilde{T}_{n-1} + O(\hbar^n)\right)(f \star' g) = \left(\exp(-\hbar i D_1)\left(\cdots\left(\exp\left(-\hbar^{n-1} i D_{n-1}\right)\left(\bar{T}(f \star' g)\right)\right)\right)\right)$$

$$= \left(\exp\left(-\hbar i D_1\right)\left(\cdots\left(\exp\left(-\hbar^{n-1} i D_{n-1}\right)\left(\bar{T}\left(f\right)\star\bar{T}\left(g\right)\right)\right)\right)\right)$$
$$= \exp\left(-\hbar i D_1\right)\cdots\exp\left(-\hbar^{n-1} i D_{n-1}\right)\bar{T}\left(f\right)\star\exp\left(-\hbar i D_1\right)\cdots\exp\left(-\hbar^{n-1} i D_{n-1}\right)\bar{T}\left(g\right)$$
$$= \left(id + \hbar^{n-1} i\tilde{T}_{n-1} + O\left(\hbar^n\right)\right)\left(f\right)\star\left(id + \hbar^{n-1} i\tilde{T}_{n-1} + O\left(\hbar^n\right)\right)\left(g\right),$$

i.e.,

$$\left(id + \hbar^{n-1} i\tilde{T}_{n-1} + O\left(\hbar^n\right)\right)\left(f \star' g\right)$$
$$= \left(id + \hbar^{n-1} i\tilde{T}_{n-1} + O\left(\hbar^n\right)\right)\left(f\right)\star\left(id + \hbar^{n-1} i\tilde{T}_{n-1} + O\left(\hbar^n\right)\right)\left(g\right)$$

Em ordem $n-1$ no parâmetro $\hbar$, a equação de equivalência acima fica

$$\tilde{T}_{n-1}\left(fg\right) = f\tilde{T}_{n-1}\left(g\right) + \tilde{T}_{n-1}\left(f\right)g,$$

donde, como antes, concluimos que $\tilde{T}_{n-1} \in Z^1_{diff}\left(M\right) = \mathfrak{X}\left(M\right)$. Como $\tilde{T}_{n-1}$ é um campo vetorial, podemos escrever, para toda função $g \in C^\infty\left(M\right)$,

$$\tilde{T}_{n-1}\left(g\right) = \alpha_{n-1}\left(\nabla_\omega g\right)$$

para $\alpha_{n-1} = C^1_3\left(T_{n-1}\otimes\omega\right) \in \Omega\left(M\right)$.

Em ordem n, temos

$$C'_n\left(f,g\right) + i\tilde{T}_{n-1}\left(C'_1\left(f,g\right)\right) + i\tilde{T}_n\left(fg\right) = C_n\left(f,g\right) + iC_1\left(\tilde{T}_{n-1}\left(f\right),g\right) + iC_1\left(f,\tilde{T}_{n-1}\left(g\right)\right),$$

i.e.,

$$\left(C'_n - C_n\right)\left(f,g\right) = i\left[C_1\left(\tilde{T}_{n-1}\left(f\right),g\right) + C_1\left(f,\tilde{T}_{n-1}\left(g\right)\right) - \tilde{T}_{n-1}\left(C_1\left(f,g\right)\right) - \tilde{T}_n\left(fg\right)\right]$$

Note que a última parcela do lado direito é simétrica no par (f,g). Antissimetrizando nesse par de funções, vem

$$\begin{aligned} skew\ \left(C'_n - C_n\right)\left(f,g\right) &= -\left\{\tilde{T}_{n-1}\left(f\right),g\right\} - \left\{f,\tilde{T}_{n-1}\left(g\right)\right\} + T_{n-1}\left\{f,g\right\} \\ &= -\nabla_\omega g\left(\alpha_{n-1}\left(\nabla_\omega f\right)\right) + \nabla_\omega f\left(\alpha_{n-1}\left(\nabla_\omega g\right)\right) + \alpha_{n-1}\left(\left[\nabla_\omega f,\nabla_\omega g\right]\right) \\ &= -d\alpha_{n-1}\left(\nabla_\omega f,\nabla_\omega g\right) = d\left(-\alpha_{n-1}\right)\left(\nabla_\omega f,\nabla_\omega g\right), \end{aligned}$$

o que encerra a prova. ■

Em suma, temos o seguinte

Teorema 148 (Bertelson-Cahen-Gutt, 1997) *Sejam* $\star = \sum_{j=0}^\infty \hbar^j C_j$ *e* $\star' = \sum_{k=0}^\infty \hbar^k C'_k$ *produtos-estrela diferenciais numa variedade simplética* (M,ω) *que coincidem até a ordem* $n-1$ *no parâmetro de deformação* $\hbar$*, i.e., tais que*

$$C_j = C'_j,\ \forall j \in [n-1]_0\,.$$

A antissimetrização de sua diferença em ordem n *fornece uma 2-forma fechada* ω_n*. Se os produtos-estrela* $\star$ *e* $\star'$ *são equivalentes, então essa 2-forma* ω_n *é exata. Por outro lado, se essa 2-forma* ω_n *for exata, então existe um produto-estrela* $\star''$ *equivalente a* $\star'$ *tal que* $\star''$ *e* $\star$ *coincidem até a ordem* n*.*

Com isso, chegaremos, no fim do capítulo seguinte, a uma classificação completa dos produtos-estrela diferenciais admitidos por uma variedade simplética. Suas classes de equivalência aparecerão parametrizadas por séries de potências na indeterminada $\hbar$ com coeficientes no segundo grupo de cohomologia de Rham da variedade em questão. Mais exatamente, se houver algum produto-estrela $\star$ na variedade simplética (M, ω), cada série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \hbar^k [\omega_k] \in H^2_{dR}(M)[[\hbar]]$$

determinará uma única classe de equivalência de produtos-estrela. Para alcançarmos esse objetivo, uma das peças faltantes é a certeza de que existe pelo menos um produto-estrela em uma variedade simplética qualquer. Chegaremos a essa certeza no próximo capítulo, por meio de um método geométrico muito elegante concebido por Bóris V. Fedosov na década de 1990. Esse método ainda possui o mérito de prover os demais ingredientes faltantes para a classificação.

Capítulo 10

A construção geométrica de Fedosov

Fixemos de uma vez por todas uma variedade simplética (M, ω) $2n-$dimensional. Vamos procurar demonstrar – construtivamente – a existência de produtos-estrela em (M, ω). Diremos que procuramos *quantizações* da variedade simplética (M, ω).

Dado $x \in M$, $(T_x M, \omega(x))$ é um espaço vetorial simplético. Como tal, ele admite um produto-estrela de Weyl-Moyal, como o que descrevemos no exemplo, com $P^{\mu\nu} = \omega^{\mu\nu}(x)$.

Fixemos também de uma vez por todas um atlas de Darboux

$$\mathcal{U} = \{(U, \varphi_U), (V, \varphi_V), (W, \varphi_W), \cdots\}$$

para M, i.e., um atlas $\mathcal{U}$ como acima tal que

$$\varphi_U = \left(u^1, \cdots, u^{2n}\right) : U \subset M \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

é um sistema de coordenadas de Darboux, com relação ao qual, sabemos, as coordenadas locais da forma simplética são constantes:

$$\omega^{\mu\nu}(y) = \omega^{\mu\nu}, \forall y \in U$$

Será requisitado ao longo de toda a construção o que chamaremos de *produto não-deformado* da álgebra supersimétrica[1]

$$\begin{aligned} S(M) &= \oplus_{r,s=0}^{\infty} S^{r,s}(M) \\ &= \Gamma(\vee^{\bullet} T^* M) \otimes \Gamma(\wedge^{\bullet} T^* M) \\ &= Pol^{\bullet}(M) \otimes \Omega^{\bullet}(M), \end{aligned}$$

[1] Ver seção 1.3 para definição e propriedades da superálgebra $S(M) = S(\Gamma(T^* M))$.

dado por

$$m\left(a\otimes\alpha,b\otimes\beta\right)=\left(a\vee b\right)\otimes\left(\alpha\wedge\beta\right)$$

para todos $a,b\in Pol^{\bullet}\left(M\right)$ e $\alpha,\beta\in\Omega^{\bullet}\left(M\right)$. Mais freqüentemente usaremos sua versão tensorial, o homomorfismo $C^{\infty}\left(M\right)-$linear μ dado por

$$\mu\left(A\otimes B\right)=m\left(A,B\right).$$

Às vezes, μ será visto como um homomorfismo $\mathbb{C}-$linear $\mu:S\left(T_xM\right)\otimes S\left(T_xM\right)\rightarrow S\left(T_xM\right)$ (como na definição 149 abaixo, onde ele se reduz ao produto simétrico $\vee$) e, às vezes, como homomorfismo $C^{\infty}\left(M\right)[[\hbar]]-$linear, a depender do contexto.

Introduziremos também uma notação especial para a contração de um campo de vetores X com um tensor covariante t (respectivamente, para a contração de um vetor com um tensor covariante, a depender do contexto): em vez de escrevermos $C_2^1\left(X\otimes t\right)$, como na seção 1.2, poremos simplesmente $i\left(X\right)t$, querendo significar o mesmo: dado $X\in\mathfrak{X}\left(M\right)$, temos, para cada $p\in\mathbb{N}$, um homomorfismo $C^{\infty}\left(M\right)-$linear

$$\begin{array}{cccc} i\left(X\right): & \mathfrak{T}_p^0\left(M\right) & \rightarrow & \mathfrak{T}_{p-1}^0\left(M\right) \\ & t & \mapsto & i\left(X\right)t \end{array}$$

dado por

$$i\left(X\right)t\left(X_2,\cdots,X_p\right)=t\left(X,X_2,\cdots,X_p\right).$$

Convencionaremos ainda, para o caso $p=0$,

$$i\left(X\right)f=0$$

para toda função $f\in C^{\infty}\left(M\right)$ (ou escalar $f\in\mathbb{C}$, a depender do caso).

10.1 O fibrado (formal) das álgebras de Weyl

Definição 149 *A álgebra de Weyl W_x associada ao espaço simplético $\left(T_xM,\omega\left(x\right)\right)$ é definido pelo $\mathbb{C}[[\hbar]]-$módulo das séries formais*

$$W_x=\left(\vee^{\bullet}T_x^{*}M\right)[[\hbar]]$$

munido do produto

$$a\left(x\right)\circ b\left(x\right)=\mu\left(\exp\left(-\frac{i\hbar}{2}\omega^{\mu\nu}i\left(\left.\frac{\partial}{\partial u^{\mu}}\right|_x\right)\otimes i\left(\left.\frac{\partial}{\partial u^{\nu}}\right|_x\right)\right)\left(a\left(x\right)\otimes b\left(x\right)\right)\right), \tag{10.1}$$

onde $a\left(x\right)\in\vee^{r}\left(T_x^{*}M\right)$, e $b\left(x\right)\in\vee^{s}\left(T_x^{*}M\right)$, estendida linearmente a todas as ordens r e s (nos coeficientes da série) e termo-a-termo a todas as ordens do parâmetro $\hbar$.

É claro que a definição acima está longe de ser clara, e requer alguns esclarecimentos. Vamos a eles.

Um elemento típico de W_x é

$$a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{p_k} a_k^{(l)}(x) \right) \hbar^k,$$

onde

$$a_k^{(l)}(x) = a_{k,\mu_1 \cdots \mu_l}(x)\, du^{\mu_1}|_x \vee \cdots \vee du^{\mu_l}|_x \in \vee^l T_x^* M.$$

Às vezes será útil escrever

$$a_k^{(l)}(x, y) = a_{k,\mu_1 \cdots \mu_l}(x)\, y^{\mu_1} \cdots y^{\mu_l} \in \mathbb{C}\left[y^1, \cdots, y^{2n}\right], \tag{10.2}$$

onde

$$y = y^{\mu} \left. \frac{\partial}{\partial u^{\mu}} \right|_x \in T_x M,$$

i.e., contraímos $a_k^{(l)}(x)$ com k cópias de um vetor típico $y \in T_x M$, para que suas componentes apareçam como argumentos de uma função polinomial, que pode portanto ser multiplicada, derivada, etc. Isso tornará a notação menos fastidiosa em algumas passagens, ou facilitará as contas em outras. É a notação original de Fedosov.

Com esta notação, o produto de Weyl pode ser escrito como

$$(a \circ b)(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{i\hbar}{2} \right)^k \omega^{\mu_1 \nu_1} \cdots \omega^{\mu_k \nu_k} \frac{\partial^k a(x, y)}{\partial y^{\mu_1} \cdots \partial y^{\mu_k}} \frac{\partial^k b(x, y)}{\partial y^{\nu_1} \cdots \partial y^{\nu_k}}, \tag{10.3}$$

onde $a(x, y), b(x, y) \in \mathbb{C}\left[y^1, \cdots, y^{2n}\right]$.

A regra dos índices alternados é suficiente para mostrar que a definição (10.1) [ou mesmo sua versão notacionalmente mais amigável (10.3)] é covariante, no sentido de que não depende da particular escolha de coordenadas de Darboux tomadas para escrevê-las. É graças e esse fato trivial que poderemos estender essa definição de produto fibra-a-fibra (i.e., para todas as álgebras W_x, para todos $x \in M$) de maneira consistente.

A associatividade da álgebra de Weyl se verifica por meio de cálculos um pouco longos, mas diretos.

Definimos o *fibrado (formal) das álgebras de Weyl* sobre (M, ω) pela união disjunta

$$W = \cup_{x \in M} \{x\} \times W_x$$

com projeção

$$\begin{array}{cccc} \pi: & W & \longrightarrow & M \\ & (x, a) & \mapsto & x \end{array}.$$

Definimos também a $C^{\infty}(M)[[\hbar]]-$álgebra de *seções do fibrado de Weyl* W por

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= Pol^{\bullet}(M)[[\hbar]] \\ &= \left(\oplus_{r=0}^{\infty} \Gamma\left(\vee^r T^* M\right)\right)[[\hbar]] \end{aligned}$$

Uma vez mais, alguns esclarecimentos fazem-se necessários, principalmente no que concerne às seções, que são os objetos mais importantes na construção de Fedosov.

Um elemento típico de $\mathcal{W} = Pol^{\bullet}(M)[[\hbar]]$ é dado por

$$a = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{p_k} a_k^{(l)} \right) \hbar^k : x \in M \mapsto a(x) \in W_x,$$

onde $a_k^{(l)} \in Pol^l(M) = \Gamma\left(\vee^l T^* M\right)$ é um $l-$tensor covariante totalmente simétrico, dado localmente por

$$a_k^{(l)} |U = a_{k,\mu_1 \cdots \mu_l} du^{\mu_1} \vee \cdots \vee du^{\mu_l}.$$

$\mathcal{W}$ é uma $C^{\infty}(M)[[\hbar]]-$álgebra associativa com unidade (função identicamente igual a 1) segundo o produto dado pela extensão fibra-a-fibra do produto de Weyl (10.1), i.e., dado localmente por

$$(a \circ b)|U = \mu \left(\exp\left(-\frac{i\hbar}{2} \omega^{\mu\nu} i \left(\frac{\partial}{\partial u^{\mu}} \right) \otimes i \left(\frac{\partial}{\partial u^{\nu}} \right) \right) (a \otimes b) \right) |U \tag{10.4}$$

Como já dissemos, verifica-se por inspeção que esta expressão local é invariante, e, portanto, define um objeto global.

Nos referiremos a $\mathcal{W}$ doravante como *a álgebra de Weyl* sobre (M, ω).

O centro $\mathcal{Z} < \mathcal{W}$ da álgebra de Weyl corresponde exatamente a

$$\mathcal{Z} = Pol^0(M)[[\hbar]] = C^{\infty}(M)[[\hbar]],$$

como nos mostra um pouco de reflexão sobre a fórmula (10.4). De fato, é inteiramente óbvia a inclusão

$$C^{\infty}(M)[[\hbar]] \subset \mathcal{Z}.$$

Para a outra, suponha que

$$a = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{p_k} a_k^{(l)} \right) \hbar^k \in \mathcal{Z}$$

e compare, ordem-por-ordem, os produtos $a \circ du^{\rho}$ e $du^{\rho} \circ a$, para todo $\rho \in [m]$. Veremos assim, que $a(x, y, \hbar)$ não pode depender de y.

Um elemento central típico é dado por

$$a = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \hbar^k,$$

onde $a_k \in C^{\infty}(M)$ (na notação polinomial (10.2), os coeficiente da série formal que representa um elemento central não dependem do argumento y).

Atribuindo grau $2k$ ao termo em $\hbar^k$ da série formal e grau l aos termos cujos coeficientes $a^{(l)}$ são $l-$tensores, obtemos uma filtração da álgebra de Weyl com relação ao grau total $2k+l$:

$$\begin{array}{cccccccc} \mathcal{W} & \supset & \mathcal{W}_1 & \supset & \cdots & \supset & \mathcal{W}_g & \supset \cdots \\ & & \text{seções com termo} & & & & \text{seções com termo} & \\ & & \text{de grau mais baixo} & & & & \text{de grau mais baixo} & \\ & & 2k+l \geq 1 & & & & 2k+l \geq g & \end{array}$$

Observação 150 *A introdução do grau total* $\deg a = (2k+l)\, a$ *deve-se ao fato de que este sim é uma derivação com relação ao produto (10.4), ao passo que o grau da parte simétrica,* $\deg a = la$*, é uma derivação com relação ao produto simétrico. A filtração obtida acima será usada de maneira importante na construção do produto-estrela de Fedosov.*

No que segue, precisaremos também de formas diferenciais definidas em M tomando valores na álgebra de Weyl. Denotaremos o espaço de tais objetos por $\Omega^{\bullet}(M, W)$.

Temos[2]

$$\begin{aligned} \Omega^{\bullet}(M;W) &\equiv \mathcal{W} \otimes \Omega^{\bullet}(M) \\ &= Pol^{\bullet}(M)[[\hbar]] \otimes \Omega^{\bullet}(M) \\ &= \left(\oplus_{r=0}^{\infty} \Gamma\left(\vee^r T^*M\right)\right)[[\hbar]] \otimes \left(\oplus_{s=0}^{2n} \Gamma\left(\wedge^s T^*M\right)\right) \\ &\simeq \oplus_{r=0}^{\infty} \oplus_{s=0}^{2n} \left(\Gamma\left(\vee^r T^*M\right) \otimes \Gamma\left(\wedge^s T^*M\right)\right)[[\hbar]] \\ &= \oplus_{r,s=0}^{\infty} S^{r,s}(M)[[\hbar]], \end{aligned}$$

i.e.,

$$\Omega^{\bullet}(M;W) = S(M)[[\hbar]]$$

cujo elemento típico pode ser escrito como

$$a = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^{p_k} \sum_{q=0}^{q_k} a_k^{(p)[q]} \right) \hbar^k,$$

onde $a_k^{(p)[q]} \in S^{p,q}(M)$ é um supertensor $p-$simétrico e $q-$antissimétrico, que pode ser escrito localmente como

$$a_k^{(p)[q]}|U = a_{k,\left(\mu_1 \cdots \mu_p\right)[\nu_1 \cdots \nu_q]} du^{\mu_1} \vee \cdots \vee du^{\mu_p} \otimes du^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge du^{\nu_q}$$

ou, na notação de Fedosov (10.2),

$$a_k^{(p)[q]}(x,y) = a_{k,\left(\mu_1 \cdots \mu_p\right)[\nu_1 \cdots \nu_q]}(x)\, y^{\mu_1} \cdots y^{\mu_p} du^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge du^{\nu_q},$$

[2] Ver seção 1.3 para definição e propriedades da superálgebra $S(M) = S(\Gamma(T^*M))$.

onde

$$y = y^{\mu} \frac{\partial}{\partial u^{\mu}} \in \mathfrak{X}(U),$$

é um campo local genérico de vetores que serve como argumento de $a_k^{(p)[q]}$.

$\Omega^{\bullet}(M, W)$ estende a $C^{\infty}(M)[[\hbar]]$ −álgebra $\mathcal{W} = \Omega^0(M, W)$, com produto estendido pela regra

$$\underbrace{\underbrace{(a \otimes \alpha)}_{A} * \underbrace{(b \otimes \beta)}_{B}}_{A \circ B} = (a \circ b) \otimes \alpha \wedge \beta.$$

Com este produto estendido, $\Omega^{\bullet}(M, W)$ torna-se uma *superálgebra* $\mathbb{Z}_2$−graduada.

A superálgebra $\Omega^{\bullet}(M, W)$ herda de $\mathcal{W}$ uma filtração com respeito ao *grau total da parte simétrica* $2k + p$:

$$\Omega^{\bullet}(M, W) = \mathcal{W} \otimes \Omega^{\bullet}(M) \supset \mathcal{W}_1 \otimes \Omega^{\bullet}(M) \supset \mathcal{W}_2 \otimes \Omega^{\bullet}(M) \supset \cdots \tag{10.5}$$

Define-se um colchete (*supercomutador*) $[\cdot\ , \cdot]_*$ para a superálgebra $\Omega^{\bullet}(M, W)$ pela extensão $C^{\infty}(M)[[\hbar]]$ −linear e termo-a-termo da regra

$$[A, B]_* = A \circ B - (-1)^{q_1 q_2} B \circ A,$$

onde $A \in \mathcal{W} \otimes \Omega^{q_1}(M)$ e $B \in \mathcal{W} \otimes \Omega^{q_2}(M)$. Esta definição visa à validade da fórmula

$$[a \otimes \alpha, b \otimes \beta]_* = [a, b]_{\circ} \otimes \alpha \wedge \beta.$$

É claro que o centro de $\Omega^{\bullet}(M, W)$ segundo o supercomutador é dado por

$$\mathcal{Z} \otimes \Omega^{\bullet}(M) \simeq C^{\infty}(M)[[\hbar]] \otimes \Omega^{\bullet}(M) \simeq \Omega^{\bullet}(M)[[\hbar]].$$

No que segue, será essencial que se definam certas projeções aos centros das $C^{\infty}(M)[[\hbar]]$ −álgebras envolvidas. Elas são dadas operacionalmente pela regra abaixo.

$$\begin{array}{rcc} A = & A(x, y, dx, \hbar) & \in \Omega^{\bullet}(M, W) \\ & \downarrow & \begin{array}{c}\text{contraia a parte simétrica}\\ \text{com o campo } y = 0 \in \mathfrak{X}(M)\end{array} \\ A_0 = & A(x, 0, dx, \hbar) & \in \mathcal{Z} \otimes \Omega^{\bullet}(M) \\ & \downarrow & \begin{array}{c}\text{contraia a parte antissimétrica}\\ \text{com o campo } y = 0 \in \mathfrak{X}(M)\end{array} \\ A_{00} = & A(x, 0, 0, \hbar) & \in \mathcal{Z} \end{array}$$

A projeção mais importante é a *aplicação símbolo*

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & \Omega^{\bullet}(M, W) & \twoheadrightarrow & \mathcal{Z} \simeq C^{\infty}(M)[[\hbar]] \\ & a = a(x, y, dx, \hbar) & \mapsto & \sigma(a) = a_{00} = a(x, 0, 0, \hbar) \end{array} . \tag{10.6}$$

Denominamos a série $\sigma(a) = a_{00}$ o *símbolo* da superseção $a \in \Omega^{\bullet}(M, W)$. Note que a restrição da aplicação símbolo a $\mathcal{W}$ é tal que $\sigma(a) = a_0$ para toda seção $a \in \mathcal{W}$.

A idéia agora é encontrar uma $\mathbb{C}[[\hbar]]$ −subálgebra $\mathcal{O}$ de $\mathcal{W}$ em bijeção com $\mathcal{Z}$ (a bijeção será dada pela restrição de σ a $\mathcal{O}$, cuja inversa denotaremos por σ^{-1}), e então usar o produto de Weyl $\circ$ para induzir em $\mathcal{Z} \simeq C^{\infty}(M)[[\hbar]]$ um produto-estrela $\star$ dado por

$$a(\hbar) \star b(\hbar) = \sigma\left(\sigma^{-1}(a(\hbar)) \circ \sigma^{-1}(b(\hbar))\right),$$

para todas as séries formais

$$a(\hbar) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \hbar^k, \quad b(\hbar) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \hbar^j \in C^{\infty}(M)[[\hbar]].$$

Para isso, lançaremos mão de uma conexão simplética ∇ livre de torção em M, a qual induzirá naturalmente uma conexão ∂ no fibrado de Weyl W, e procuraremos modificá-la a uma conexão plana D (i.e., com curvatura nula).

A $\mathbb{C}[[\hbar]]$ −subálgebra $\mathcal{O} < \mathcal{W}$ procurada será a das seções horizontais com relação a D, i.e.,

$$\mathcal{O} = \mathcal{W}_D \equiv \{a \in \mathcal{W}\ ; Da = 0\}.$$

10.2 Alguma análise no fibrado de Weyl

Será útil diferenciarmos a partir daqui dois tipos de contração: entre um campo de vetores X e a parte simétrica de uma superseção de Weyl A, que denotaremos por $i_{\vee}(X) A$; e entre um campo de vetores X e a parte antissimétrica de uma superseção de Weyl A, que denotaremos por $i_{\wedge}(X) A$

Consideremos dois importantes operadores,

$$\delta : \mathcal{W}_p \otimes \Omega^q(M) \longrightarrow \mathcal{W}_{p-1} \otimes \Omega^{q+1}(M)$$

e

$$\delta^* : \mathcal{W}_p \otimes \Omega^q(M) \longrightarrow \mathcal{W}_{p+1} \otimes \Omega^{q-1}(M)$$

dados localmente por

$$\delta A|U = du^{\mu} \wedge i_{\vee}\left(\frac{\partial}{\partial u^{\mu}}\right) A|U$$

e ,

$$\delta^* A|U = du^{\mu} \vee i_{\wedge}\left(\frac{\partial}{\partial u^{\mu}}\right) A,$$

ou, na notação de Fedosov,

$$\delta A(x, y) = du^{\mu} \wedge \frac{\partial A(x, y)}{\partial y^{\mu}}$$

e

$$\delta^* A(x,y) = y^\mu i_\wedge \left(\frac{\partial}{\partial u^\mu}\right) A(x,y)$$

Ainda aqui, a regra dos índices alternados deixa-nos despreocupados quanto à boa-definição global desses operadores.

Observação 151 *O operador δ degrada uma superseção de uma unidade.(segundo a filtração pelo grau total da parte simétrica (10.5), estabelecida na seção anterior). Sua contrapartida δ^* gradua em uma unidade a superseção sobre a qual atua.*

É bem ilustrativa a ação da restrição desses operadores a U em monômios da forma

$$du^{\left(\mu_1 \cdots \mu_p\right)\left[\nu_1 \cdots \nu_q\right]} \equiv du^{\mu_1} \vee \cdots \vee du^{\mu_p} \otimes du^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge du^{\nu_q}. \tag{10.7}$$

A saber,

$$\delta du^{\left(\mu_1 \cdots \mu_p\right)\left[\nu_1 \cdots \nu_q\right]} = \sum_{j=1}^{p} du^{\left(\mu_1 \cdots \widehat{\mu_j} \cdots \mu_p\right)\left[\mu_j \nu_1 \cdots \nu_q\right]}, \tag{10.8}$$

e

$$\delta^* du^{\left(\mu_1 \cdots \mu_p\right)\left[\nu_1 \cdots \nu_q\right]} = \sum_{k=1}^{q} (-1)^{k+1} du^{\left(\mu_1 \cdots \mu_p \nu_k\right)\left[\nu_1 \cdots \widehat{\nu_k} \cdots \nu_q\right]}. \tag{10.9}$$

Lema 152 *Os operadores δ e δ^*.possuem as propriedades*

(1) $\delta^2 = (\delta^*)^2 = 0$

(2) $(\delta\delta^* + \delta^*\delta)\, du^{\left(\mu_1 \cdots \mu_p\right)\left[\nu_1 \cdots \nu_q\right]} = (p+q)\, du^{\left(\mu_1 \cdots \mu_p\right)\left[\nu_1 \cdots \nu_q\right]}$

(3) *δ é uma antiderivação da superálgebra de Weyl, i.e.,*

$$\delta(A \circ B) = \delta A \circ B + (-1)^q A \circ \delta B,$$

onde $A \in \Omega^q(M, W)$.

(4) *δ admite a representação*

$$\delta A = -\left[\left(\frac{i}{\hbar}\right)\omega_{\mu\nu} du^\mu \otimes du^\nu, A\right]_*. \tag{10.10}$$

A prova dessas propriedades envolve apenas cálculos combinatórios diretos, que omitiremos por brevidade.

Sobre monômios da forma (10.7), defina o operador δ^{-1}, dado por

$$\delta^{-1} = \begin{cases} \frac{1}{p+q}\delta^* & , \text{se } p+q>0 \\ 0 & , \text{se } p+q=0 \end{cases},$$

e estenda-o $C^\infty(M)[[\hbar]]$ −linearmente e termo-a-termo.

Pela propriedade 2 do Lema acima, temos que toda superseção $A \in \Omega^\bullet(M,W)$ admite uma decomposição da forma

$$A = \delta\delta^{-1}A + \delta^{-1}\delta A + A_{00}, \tag{10.11}$$

que, por analogia, denominaremos doravante *decomposição de Hodge-de Rham* de A. Escrevendo (10.11) sob a forma

$$\delta\delta^{-1} + \delta^{-1}\delta = id - \sigma,$$

e lembrando que $\delta^2 = 0$, vemos que a aplicação δ^{-1} é uma homotopia algébrica entre a identidade e a aplicação símbolo na $\delta-$cohomologia.

10.3 Alguma geometria no fibrado de Weyl

Seja ∇ uma conexão simplética livre de torção em (M,ω).

O teorema 77 permite induzir de maneira canônica uma conexão

$$\partial : \Omega^\bullet(M,W) \longrightarrow \Omega^{\bullet+1}(M,W)$$

no *superfibrado (formal) de Weyl* $W \otimes \wedge^\bullet T^*M$ pela extensão $\mathbb{C}[[\hbar]]$ −linear da regra

$$\partial A = dx^\mu \wedge \nabla_\mu A, \tag{10.12}$$

onde $A \in \Omega^q(M,W)$, e $\nabla_\mu A$ refere-se à derivação covariante da parte simétrica da seção A com relação ao campo local de vetores $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$.

Mais uma vez, a regra dos índices alternados vem em nosso socorro estabelecer a invariância da expressão (10.12).

Lema 153 *A conexão ∂ possui as seguintes propriedades.*

(1) $\partial(A \circ B) = \partial A \circ B + (-1)^{q_1} A \circ \partial B, \quad \forall A \in \Omega^{q_1}(M,W)$

(2) $\partial(\alpha \wedge A) = d\alpha \wedge A + (-1)^q \alpha \wedge \partial A, \quad \forall \alpha \in \Omega^q(M)$

(3) em coordenadas locais (de Darboux), podemos escrever

$$\partial A|U = dA|U + \left[\left(\frac{i}{\hbar}\right)\Gamma, A|U\right]_*, \tag{10.13}$$

onde

$$dA|U = du^\mu \wedge \frac{\partial A}{\partial u^\mu}$$

e

$$\Gamma = \frac{1}{2}\Gamma_{\mu\nu\rho}du^\mu \vee du^\nu \otimes du^\rho \in \Omega^1(U, W),$$

onde os coeficientes $\Gamma_{\mu\nu\rho} = \omega_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\rho}$ *são símbolos de Christoffel da conexão* ∇ *sobre* $U \subset M$*.*

A propriedade (1) significa que ∂ é uma antiderivação da superálgebra de Weyl $(\Omega^\bullet(M, W), \circ)$.

A propriedade (2) significa que ∂ é uma extensão da derivada exterior de formas diferenciais.

A propriedade (3) fornece uma representação local especialmente propícia às correções que nos darão a conexão plana desejada.

Prova. Cálculos diretos, mas muito longos. Omitiremos-los por brevidade. ■

Lema 154 *Valem as identidades*

(1) $\partial\delta + \delta\partial = 0$

(2) $\partial^2 = \frac{i}{\hbar}ad_* R,$ *onde*

$$R = \frac{1}{4}R_{\kappa\lambda\mu\nu}dx^\kappa \vee dx^\lambda \otimes dx^\mu \wedge dx^\nu,$$

e $R_{\kappa\lambda\mu\nu} = \omega_{\kappa\rho}R^\rho_{\lambda\mu\nu}$ *são componentes do tensor de curvatura da conexão simplética* ∇*.*

Prova. Conseqüências diretas das fórmulas locais (10.10) e (10.13). ■

A seguir, trabalharemos com conexões D obtidas a partir de ∂ por meio de uma "correção" $\gamma \in \Omega^1(M, W)$.

$$D = \partial + \frac{i}{\hbar}ad_*\gamma. \tag{10.14}$$

A fórmula acima claramente nos dá uma conexão no superfibrado de Weyl $W \otimes \wedge^\bullet T^*M$ (veja que γ é uma 1-forma globalmente definida e que $ad_*\left(\left(\frac{i}{\hbar}\right)\gamma\right) \equiv \left[\left(\frac{i}{\hbar}\right)\gamma, \cdot\right]_*$ é uma superderivação).

Essa correção é determinada pela superseção γ apenas a menos de uma superseção central

$$\bar{\gamma} \in \mathcal{Z} \otimes \Omega^1(M) \simeq C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \Omega^1(M),$$

uma vez que a correção γ aparece no interior de um supercomutador. Dessa forma, temos liberdade para introduzir alguma "condição de calibre" sobre γ. É uma boa escolha dessa condição que permitirá que obtenhamos uma conexão plana D univocamente determinada a partir de ∇.

Em coordenadas de Darboux, lançando mão da representação local (10.13) de ∂, podemos escrever a forma local da fórmula acima como

$$(DA)\,|U = dA|U + \left[\left(\frac{i}{\hbar}\right)(\Gamma + \gamma|U)\,, A|U\right]_* . \qquad (10.15)$$

Um cálculo direto a partir de (10.14) mostra que a curvatura D^2 de uma conexão corrigida D é dada pela fórmula

$$D^2 = \frac{i}{\hbar} ad_* \left(R + \partial\gamma + \frac{i}{\hbar}\gamma^2\right) \qquad (10.16)$$

Definição 155 *Seja D uma conexão da forma (10.14), satisfazendo à seguinte* condição de calibre de Weyl

$$\gamma_0 = 0$$

(lembrando: γ_0 é a primeira projeção da superseção γ).

A superseção $\Omega \in \Omega^2(M, W)$.dada pela fórmula

$$\Omega = R + \partial\gamma + \frac{i}{\hbar}\gamma^2 \qquad (10.17)$$

é chamada curvatura de Weyl *da conexão D.*

Com a definição acima, podemos reescrever (10.16) como

$$D^2 = \frac{i}{\hbar} ad_* \Omega, \qquad (10.18)$$

donde fica claro que a curvatura de Weyl de uma conexão plana é uma superseção central

$$\Omega \in \mathcal{Z} \otimes \Omega^2(M) \simeq C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \Omega^2(M) \simeq \Omega^2(M)[[\hbar]] .$$

10.4 O produto-estrela de Fedosov

Seja (M, ω, ∇) uma variedade de Fedosov[3].

O pequeno arsenal técnico desenvolvido na seção anterior é a hipótese tácita dos dois seguintes teoremas, os principais da construção de Fedosov. O primeiro deles fornece um método construtivo para a obtenção da tão desejada conexão plana D no fibrado de Weyl a partir de ∇ e de uma série $\Omega = \sum_{k=1}^{\infty} \hbar^k \omega_k \in \Omega^2(M)[[\hbar]]$ de 2-formas fechadas ω_k arbitrárias. Antes de partir para a prova, tentemos motivar as hipóteses.

Nosso *ansatz* é que D tenha a forma

$$D = \partial - \delta + \frac{i}{\hbar} ad_*(r)\,,$$

[3] Ver definição e existência na seção 4.5.

onde $r \in \mathcal{W} \otimes \Omega^1(M)$ é alguma superseção adequada. Como ∂ preserva a filtração com relação ao grau total, mas δ degrada de uma unidade este mesmo grau, para que a expressão acima seja idônea, devemos esperar que o termo $\frac{i}{\hbar} ad_* (r)$ gradue as seções em que atuar de, no mínimo, 1 unidade. Lembrando que a contribuição do parâmetro $\hbar$ para o grau total é de 2 unidades, vemos que a seção r só pode possuir termos de grau total maior que 2. Ou seja, devemos exigir que $r \in \mathcal{W}_3 \otimes \Omega^1(M)$ seja da forma

$$r = \sum_{k=3}^{\infty} r_k,$$

com $r_k \in \mathcal{W}_k \otimes \Omega^1(M)$ para todo $k \geq 3$.

Usando o Lema 154, calculamos a curvatura $D^2 = D \circ D$ para uma conexão D da forma acima como

$$D^2 = \frac{i}{\hbar} ad_* \left(-\omega + R - \delta r + \partial r + \frac{i}{\hbar} r^2 \right),$$

onde $r^2 = r \circ r$. Como já consignamos oportunamente, D será plana se, e somente se, o termo

$$-\omega + R - \delta r + \partial r + \frac{i}{\hbar} r^2$$

for uma seção central, i.e., se, e somente se, não tiver parte simétrica. Considerada como elemento da superálgebra de Weyl $\Omega^\bullet(M, W)$, a forma simplética $\omega \in \mathcal{W}_0 \otimes \Omega^2(M)$ é central (por ser totalmente antissimétrica). Logo, a condição necessária e suficiente para que D seja plana é que a seção

$$\Omega = R - \delta r + \partial r + \frac{i}{\hbar} r^2 \in \mathcal{W} \otimes \Omega^2(M)$$

seja central, i.e., que

$$\Omega \in \Omega^2(M)[[\hbar]]$$

Já concordamos que r possui grau total maior do que 2. A definição de Ω acima mostra então que Ω deve ter grau total maior do que 1. Ora, como Ω não possui parte simétrica, a única contribuição para os graus de seus termos vem das potências $\hbar^k$ do parâmetro de deformação $\hbar$, cada uma contribuindo com $2k$ unidades. Portanto, podemos escrever

$$\Omega = \sum_{k=1}^{\infty} \hbar^k \omega_k \in \Omega^2(M)[[\hbar]].$$

É claro que temos, independentemente de D ser plana ou não,

$$D^2 = \frac{i}{\hbar} ad_* \Omega,$$

donde se vê, graças à segunda identidade do lema 154, que Ω é o tensor de curvatura da conexão D. A *identidade de Bianchi*[4] nos diz então que

$$D\Omega = 0,$$

donde

$$\partial\Omega - \delta\Omega + \frac{i}{\hbar}[r, \Omega]_* = 0$$

No caso em que $\Omega \in \Omega^2(M)[[\hbar]]$ é central, temos então

$$\partial\Omega = 0,$$

donde

$$\begin{aligned} \partial\Omega &= \sum_{k=1}^{\infty} \hbar^k \partial\omega_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \hbar^k d\omega_k = 0, \end{aligned}$$

i.e.,

$$d\omega_k = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$$

Assim, $\Omega = \sum_{k=1}^{\infty} \hbar^k \omega_k$ é uma série de 2-formas fechadas no parâmetro $\hbar$. O resultado seguinte é um teorema de existência e unicidade para a solução r da equação

$$\partial r - \delta r + \frac{i}{\hbar} r^2 = \Omega - R$$

com r e Ω satisfazendo às condições necessárias que deduzimos para que $D = \partial - \delta + \frac{i}{\hbar} ad_*(r)$ seja plana, com r submetida a uma condição de calibre sabiamente escolhida. Graças à filtração pelo grau total (10.5), poderemos resolver este problema crucial por argumentos recursivos.

Teorema 156 (Fedosov, 1994) *Dada uma série $\Omega = \sum_{k=1}^{\infty} \hbar^k \omega_k$ de 2-formas fechadas, existe uma única solução $r \in \mathcal{W}_3 \otimes \Omega^1(M)$ da equação*

$$\partial r - \delta r + \frac{i}{\hbar} r^2 = \Omega - R \tag{10.19}$$

satisfazendo a condição de calibre

$$\delta^{-1} r = 0$$

A prescrição

$$D^{\Omega} = -\delta + \partial + \left[\frac{i}{\hbar} r, \cdot\right]_* \tag{10.20}$$

define uma conexão plana $D^{\Omega} : \Omega^{\bullet}(M, W) \to \Omega^{\bullet+1}(M, W)$.

[4] Ver proposição 81, seção 4.3.

Prova. Primeiramente, note que a condição de calibre $\delta^{-1}r = 0$ implica a condição de calibre de Weyl $r_0 = 0$, pela observação 151.

Suponha que $r \in \mathcal{W}_3 \otimes \Omega^1(M)$ ($\Rightarrow r_{00} = 0$) seja solução da equação diferencial (10.19) e satisfaça $\delta^{-1}r = 0$. Essa condição de calibre simplifica a decomposição de Hodge-de Rham (10.11) de r a

$$r = \delta^{-1}\delta r \tag{10.21}$$

(agora fica claro o porquê da notação δ^{-1}). Aplicando o operador δ^{-1} a (10.19), vem

$$r = \delta^{-1}R + \delta^{-1}\left(\partial r + \frac{i}{\hbar}r^2 - \Omega\right). \tag{10.22}$$

Agora faremos uso fundamental da observação 151. Veja que ∂ preserva a filtração (10.5), ao passo que δ^{-1}, assim como δ^*, gradua de uma unidade a superseção em que atua. Dessa forma, iterando a equação (10.22), obtemos cada termo de r a partir do termo de grau imediatamente inferior, a começar do termo de grau 3, que denotaremos por r_3 e calcularemos de uma vez, a título de ilustração.

Como assumimos $r \in \mathcal{W}_3 \otimes \Omega^1(M)$, temos que r_3 é dado simplesmente por $r_3 = \delta^{-1}R$. Usando a definição do operador δ^{-1}, e lembrando a ação de δ^* em monômios, dada por (10.9), vem

$$\begin{aligned}
r_3|U &= \frac{1}{2+2}\delta^*\left(\frac{1}{4}R_{\kappa\lambda\mu\nu}du^\kappa \vee du^\lambda \otimes du^\mu \wedge du^\nu\right) \\
&= \frac{1}{16}R_{\kappa\lambda\mu\nu}\delta^*\left(du^\kappa \vee du^\lambda \otimes du^\mu \wedge du^\nu\right) \\
&= \frac{1}{16}R_{\kappa\lambda\mu\nu}\left(du^\kappa \vee du^\lambda \vee du^\mu \otimes du^\nu - du^\kappa \vee du^\lambda \vee du^\nu \otimes du^\mu\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(R_{\kappa\lambda\mu\nu} - R_{\kappa\lambda\nu\mu}\right)du^\kappa \vee du^\lambda \vee du^\mu \otimes du^\nu \\
&= \frac{1}{8}R_{\kappa\lambda\mu\nu}du^\kappa \vee du^\lambda \vee du^\mu \otimes du^\nu,
\end{aligned}$$

pois o tensor de curvatura é antissimétrico nos dois últimos argumentos vetoriais (ver eq. (3.25)).

Isso garante a existência da solução do "problema de Cauchy não-homogêneo"

$$\left\{\begin{array}{c}
\delta^{-1}\left(\partial r + \frac{i}{\hbar}r^2\right) - r = \delta^{-1}(\Omega - R) \\
r \in \mathcal{W}_3 \otimes \Omega^1(M) \\
\delta^{-1}r = 0
\end{array}\right. \tag{10.23}$$

Para unicidade, suponha que haja duas soluções, e seja w a sua diferença.

Então, w será solução do seguinte "problema de Cauchy homogêneo"

$$\begin{cases} \delta^{-1}\left(\partial w + \frac{i}{\hbar}w^2\right) - w = 0 \\ w \in \mathcal{W}_3 \otimes \Omega^1(M) \\ \delta^{-1} w = 0 \end{cases}.$$

Ocorre que a única solução possível para esse último problema é a seção identicamente nula. Com efeito, se o termo não-nulo de grau mais baixo de uma solução w tivesse grau $g < \infty$, então o termo não-nulo de grau mais baixo de $\delta^{-1}\partial w$ teria grau $g+1$, ao passo que o termo não-nulo de grau mais baixo de $\delta^{-1}w^2$ teria grau $2g+1$. Absurdo.

Reciprocamente, admita que r é solução de (10.22). Nesse caso, a nilpotência do operador δ^{-1} (vide identidade (1) do Lema 152) garante que toda solução de (10.22) satisfaz automaticamente a condição de calibre $\delta^{-1}r = 0$. Vamos mostrar que r é solução de (10.19). Isso equivale a mostrar que a seção A definida pela diferença dos dois membros de (10.19), i.e., por

$$A = \delta r - \partial r - \frac{i}{\hbar}r^2 - R + \Omega \tag{10.24}$$

é a seção identicamente nula.

Primeiramente, vejamos que a seção A definida acima é solução do seguinte "problema de Cauchy homogêneo"

$$\begin{cases} \delta A - \partial A - \left[\frac{i}{\hbar}r, A\right]_* = 0 \\ \delta^{-1}A = 0 \end{cases}. \tag{10.25}$$

De fato, aplicando δ^{-1} a (10.24), obtemos

$$\begin{aligned} \delta^{-1}A &= \delta^{-1}\delta r - \delta^{-1}\left(R + \partial r + \frac{i}{\hbar}r^2\right) \\ &= \delta^{-1}\delta r - r \quad \text{por (10.22)} \\ &= 0 \quad \text{por (10.21)}, \end{aligned}$$

ao passo que, aplicando δ a (10.24), obtemos

$$\begin{aligned} \delta A &= \delta\delta r - \delta\left(R + \partial r + \frac{i}{\hbar}r^2\right) \\ &= -\delta R - \delta\partial r - \frac{i}{\hbar}\delta\left(r^2\right) \quad \text{pelo lema 152, id. (1)} \\ &= -\delta R - \delta\partial r - \frac{i}{\hbar}\left[\delta r, r\right]_* \quad \text{lema 152, id. (3)} \\ &= -\delta R + \partial\delta r + \frac{i}{\hbar}\left[r, \delta r\right]_* \quad \text{lema 154, id. (1).} \end{aligned}$$

Ora, calculando δR (use a ação do operador δ em monômios, dada por (10.8)), obtemos

$$
\begin{aligned}
\delta R|U &= \delta\left(\frac{1}{4}R_{\kappa\lambda\mu\nu}du^\kappa \vee du^\lambda \otimes du^\mu \wedge du^\nu\right) \\
&= \frac{1}{4}R_{\kappa\lambda\mu\nu}\delta\left(du^\kappa \vee du^\lambda \otimes du^\mu \wedge du^\nu\right) \\
&= \frac{1}{4}R_{\kappa\lambda\mu\nu}\left(du^\lambda \otimes du^\kappa \wedge du^\mu \wedge du^\nu + du^\kappa \otimes du^\lambda \wedge du^\mu \wedge du^\nu\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(R_{\kappa\lambda\mu\nu} + R_{\lambda\kappa\mu\nu}\right)du^\kappa \otimes du^\lambda \wedge du^\mu \wedge du^\nu \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

pois as componentes do tensor de curvatura satisfazem

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = -R_{\lambda\kappa\mu\nu}.$$

Assim, temos

$$\delta A = \partial\delta r + \frac{i}{\hbar}\left[r, \delta r\right]_* . \tag{10.26}$$

Calculemos agora os termos ∂A e $\left[\frac{i}{\hbar}r, A\right]_*$ a partir da definição (10.24).

$$\partial A = \partial\delta r - \partial R - \partial^2 r - \frac{i}{\hbar}\partial\left(r^2\right).$$

Temos:

$$\partial R = 0 \text{ (conseqüência da identidade de Bianchi, eq. (4.8))}$$

$$\partial^2 r = \left[\frac{i}{\hbar}R, r\right]_* \qquad \text{(pelo Lema 154, id. (2))}$$

e

$$\frac{i}{\hbar}\partial\left(r^2\right) = \left[\partial r, \frac{i}{\hbar}r\right]_* \qquad \text{(pelo Lema 153, id. (1)),}$$

donde segue que

$$\partial A = \partial\delta r - \left[\frac{i}{\hbar}R, r\right]_* - \left[\partial r, \frac{i}{\hbar}r\right]_* . \tag{10.27}$$

Temos ainda:

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{i}{\hbar}r, A\right]_* &= \left[\frac{i}{\hbar}r, \delta r - R - \partial r - \frac{i}{\hbar}r^2\right]_* \\
&= \left[\frac{i}{\hbar}r, \delta r\right]_* - \left[\frac{i}{\hbar}r, R\right]_* - \left[\frac{i}{\hbar}r, \partial r\right]_* - \left[\frac{i}{\hbar}r, \frac{i}{\hbar}r^2\right]_* \\
&= \left[\frac{i}{\hbar}r, \delta r\right]_* + \left[\frac{i}{\hbar}R, r\right]_* + \left[\partial r, \frac{i}{\hbar}r\right]_* ,
\end{aligned}
$$

donde segue que

$$\partial A + \left[\frac{i}{\hbar} r, A\right]_* = \partial\delta r + \left[\frac{i}{\hbar} r, \delta r\right]_*,$$

que, juntamente com (10.26), dá

$$\delta A - \left(\partial A + \left[\frac{i}{\hbar} r, A\right]_*\right) = \partial\delta r + \frac{i}{\hbar}\left[r, \delta r\right]_* - \partial\delta r - \left[\frac{i}{\hbar} r, \delta r\right]_* = 0,$$

i.e.,

$$\delta A - \partial A - \left[\frac{i}{\hbar} r, A\right]_* = 0, \tag{10.28}$$

que é o que faltava para verificar (10.25).

Estamos agora em condições de mostrar que A é a seção identicamente nula.

Aplicando δ^{-1} a (10.28), obtemos

$$\delta^{-1}\delta A - \delta^{-1}\left(\partial A + \left[\frac{i}{\hbar} r, A\right]_*\right) = 0,$$

donde, usando a decomposição de Hodge-de Rham (10.11) de A juntamente com a condição $\delta^{-1}A = 0$ ($\Rightarrow A_{00} = 0$), vem

$$A = \delta^{-1}\left(\partial A + \left[\frac{i}{\hbar} r, A\right]_*\right).$$

Vemos então recursivamente que cada termo da seção A se anula, como queríamos mostrar.

Isso encerra a prova do teorema. ■

Segue de simples considerações de grau na fórmula recursiva (10.22) o seguinte

Lema 157 *Seja $r \in \mathcal{W}_3 \otimes \Omega^1(M)$ dada pelo teorema 156 com $\Omega = \sum_{k=1}^{\infty} \hbar^k \omega_k$. Então, r_j depende apenas das 2-formas fechadas $\omega_1, \cdots, \omega_{\frac{j-1}{2}}$, se j é ímpar, ou $\omega_1, \cdots, \omega_{\frac{j}{2}}$, se j é par. Ademais, o termo de menor grau a depender de forma não-trivial de ω_k é da forma*

$$r_{2k+1} = \delta^{-1}\left(\hbar^k \omega_k\right) + s_{2k+1},$$

onde a seção $s_{2k+1} \in \mathcal{W}_3 \otimes \Omega^1(M)$ não depende de ω_k.

A conexão plana D^Ω dada pelo teorema 156 acima é chamada *a conexão de Fedosov associada a Ω.*

Definição 158 *O conjunto das seções horizontais com relação a D^Ω é denotado por $\mathcal{W}_\Omega$ e chamado* álgebra horizontal *de D^Ω.*

O fato de que $\mathcal{W}_\Omega$ é uma $\mathbb{C}[[\hbar]]$ −subálgebra de $\mathcal{W}$ decorre do fato trivial de ser D uma derivação da $\mathbb{C}[[\hbar]]$ −álgebra $\mathcal{W}$.

Teorema 159 (Fedosov, 1994) *Seja $D^\Omega : \Omega^\bullet(M,W) \to \Omega^{\bullet+1}(M,W)$ a conexão de Fedosov associada a Ω no superfibrado de Weyl.*

Para cada seção central $b \in \mathcal{Z} \simeq C^\infty(M)[[\hbar]]$ existe uma unica seção horizontal $a \in \mathcal{W}_\Omega$ tal que $b = \sigma(a)$.

Prova. Lançaremos mão novamente de argumentos de recursão.

Seja $b \in \mathcal{Z} \simeq C^\infty(M)[[\hbar]]$ uma seção central.

Desejamos mostrar que o problema

$$\begin{cases} Da = 0 \\ a_0 = b \end{cases} \tag{10.29}$$

tem uma única solução.

Uma tal solução certamente satisfará $\delta^{-1}a = 0$, pois não tem parte antissimétrica, por hipótese.

A condição de horizontalidade $Da = 0$ pode ser reescrita como

$$\delta a = \partial a + \left[\frac{i}{\hbar} r, a\right]_*,$$

por causa de (10.20).

Aplicando δ^{-1}, obteríamos, devido à decomposição de Hodge-de Rham (10.11) e às condições $\delta^{-1}a = 0$ e $a_0 = b$,

$$a = b + \delta^{-1}\left(\partial a + \left[\frac{i}{\hbar} r, a\right]_*\right). \tag{10.30}$$

Suponha que o problema (10.29) admita duas soluções, e seja w a diferença entre elas. De (10.30) segue que

$$w = \delta^{-1}\left(\partial w + \left[\frac{i}{\hbar} r, w\right]_*\right).$$

Por um argumento recursivo idêntico ao utilizado na prova do teorema anterior concluimos que $w = 0$.

Portanto, se existir, a solução de (10.29) é mesmo única.

Resolvendo (10.30) recursivamente para a, obtemos os termos de grau maior a partir dos termos de grau menor, reconstruindo a seção plana $a \in \mathcal{W}_D$ a partir de seu símbolo $\sigma(a) = a_0 = b$,de modo unívoco:

$$\begin{aligned} a|U \quad = \quad & b|U + \frac{\partial b}{\partial u^\mu} du^\mu + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 b}{\partial u^\mu \partial u^\nu} du^\mu \vee du^\nu \\ & + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 b}{\partial u^\mu \partial u^\nu \partial u^\rho} du^\mu \vee du^\nu \vee du^\rho \\ & - \frac{1}{24} R_{\lambda\mu\nu\kappa}\omega^{\kappa\rho}\frac{\partial b}{\partial u^\rho} du^\lambda \vee du^\mu \vee du^\nu + \cdots \end{aligned} \tag{10.31}$$

O fato de que $A \equiv Da = 0$ segue de cálculos análogos aos desenvolvidos na demonstração do teorema anterior, mostrando-se que a superseção $A \in \Omega^1(M, W)$ satisfaz às condições $\delta^{-1}A = 0$ e $DA = D^2a = 0$. ■

Este último teorema nos diz que a aplicação símbolo σ (10.6) induz uma bijeção entre $\mathcal{W}_\Omega$ e $C^\infty(M)[[\hbar]]$, que denotaremos pelo mesma letra σ. Podemos usar essa bijeção para transportar a estrutura algébrica de $\mathcal{W}_\Omega$ para $C^\infty(M)[[\hbar]]$. O pull-back do produto de Weyl $\circ$ em $\mathcal{W}_\Omega$ para $C^\infty(M)[[\hbar]]$ via σ, que denotaremos por $\star_\Omega$, é o que chamamos *produto de Fedosov associado a* Ω, dado por

$$a(\hbar) \star_\Omega b(\hbar) \equiv \sigma\left(\sigma^{-1}(a(\hbar)) \circ \sigma^{-1}(b(\hbar))\right).$$

Verifica-se facilmente, com auxílio dos primeiros termos calculados em (10.31), que $\star_\Omega$ é um produto-estrela, segundo a definição 132.

Exemplo 160 *Consideremos o produto-estrela de Fedosov $\star_0$ obtido pela construção acima com $\Omega = 0$ para a variedade de Fedosov $\left(\mathbb{R}^{2n}, \omega, \nabla\right)$, onde*

$$\omega = \omega_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$$

tem coeficientes constantes $\omega_{\mu\nu} \in \mathbb{R}$ e ∇ é a conexão trivial, i.e., com símbolos de Christoffel todos nulos. A conexão

$$D = \partial - \delta = \partial + \frac{i}{\hbar} ad_* \tilde{\omega}$$

já é plana, uma vez que sua curvatura é a seção central $-\omega$. Logo, $D = D^0$ é a conexão de Fedosov procurada. A álgebra horizontal $\mathcal{W}_{\mathbb{O}}$ de D^0 é dada pelas seções $a = a(x, y, \hbar)$ tais que

$$\frac{\partial a}{\partial x^\mu} = \frac{\partial a}{\partial y^\mu}$$

Logo, dada $a \in W_{\mathbb{O}}$, existe uma função formal $a_0(x, \hbar) \in C^\infty\left(\mathbb{R}^{2n}\right)[[\hbar]]$ tal que

$$a(x, y, \hbar) = a_0(x + y, \hbar) = \sum_{|\mathcal{I}|=0}^{\infty} \frac{1}{|\mathcal{I}|!} \partial_{\mathcal{I}} a_0(x, \hbar) y^{\mathcal{I}}$$

se escreve como uma série de Taylor de a_0. Note que esse mesmo resultado poderia ser obtido pela continuação de (10.31), uma vez que a curvatura de ∇ é nula. Calculando o símbolo σ do produto de Weyl $\circ$ de duas seções horizontais $a = a(x, y, \hbar)$ e $b = b(x, y, \hbar)$, obtemos o produto-estrela de seus símbolos:

$$\begin{aligned} a_0 \star_0 b_0 &= \sigma(a \circ b) \\ &= \exp\left(-\hbar \frac{i}{2} \omega^{\mu\nu} \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_x \otimes \left.\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right|_x\right)(a_0, b_0), \end{aligned}$$

que vemos ser exatamente o produto-estrela de Weyl-Moyal $\star_M$ apresentado na seção 8.2.3.

Lema 161 (Bertelson-Cahen-Gutt, 1997) *O produto-estrela de Fedosov* $\star_\Omega = \sum_{r=0}^{\infty} \hbar^r C_r^\Omega$ *associado à série de 2-formas fechadas* $\Omega = \sum_{k=1}^{\infty} \hbar^k \omega_k$ *é tal que, para todo* $r \in \mathbb{N}$*, a cocadeia* C_r^Ω *só depende das 2-formas fechadas* $\omega_1, \cdots, \omega_{r-1}$*. Tem-se, para todo* $r \in \mathbb{N}$ *e todas as funções* $f, g \in C^\infty(M)$*,*

$$C_{r+1}^\Omega(f,g) = \omega_r(\nabla_\omega f, \nabla_\omega g) + D_{r+1}(f,g),$$

onde $D_{r+1} \in C_{diff}^2(M)$ *depende apenas das 2-formas fechadas* $\omega_1, \cdots, \omega_{r-1}$*.*

Prova. Dada uma função $f_0 \in C^\infty(M) \subset C^\infty(M)[[\hbar]]$, reconstrua a seção horizontal

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \in \mathcal{W}_\Omega,$$
$$f_k \in \mathcal{W}_k, \ \forall k \in \mathbb{N}$$

que tem como símbolo $\sigma(F) = f_0$. Apelando ao lema 157, temos que o termo de menor grau em f que depende de ω_k é f_{2k+1}, e que essa dependência é proveniente do termo

$$\delta^{-1}\left[\frac{i}{\hbar} r_{2k+1}, f_1\right]_*$$

na equação recursiva (10.30). Ainda o lema 157 nos diz que f_{2k+1} é da forma

$$f_{2k+1} = \frac{i}{\hbar}\delta^{-1}\left[\delta^{-1}\left(\hbar^k \omega_k\right), f_1\right]_* + \tilde{f},$$

onde $\tilde{f}$ não depende de ω_k. Desse modo, dadas funções arbitrárias $f, g \in C^\infty(M)$, o termo de grau mais baixo em

$$f_0 \star_\Omega g_0 = \sigma\left(\sigma^{-1}(f_0) \circ \sigma^{-1}(g_0)\right) = \sigma(f \circ g)$$

a depender não-trivialmente de ω_k provém de

$$\sigma(f_{2k+1} \circ g_1 + f_1 \circ g_{2k+1}),$$

que é um termo de grau total $2(k+1)$ e, portanto (lembre-se de que $\hbar$ contribui com grau 2), está em $\hbar^{k+1} C_{k+1}^\Omega(f_0, g_0)$. ■

Os produtos-estrela de Fedosov estão espalhados por todas as classes de equivalência-estrela da variedade simplética (M, ω). Com isso, queremos dizer que todo produto-estrela diferencial de (M, ω) é equivalente a um produto-estrela de Fedosov. Mais precisamente, temos o seguinte

Teorema 162 (Bertelson-Cahen-Gutt, 1997) *Seja* (M, ω, ∇) *uma variedade de Fedosov*[5]*. Seja* $\mathfrak{C}$ *um sistema de representantes de classe para* $H_{dR}^2(M)$*, i.e.,*

[5] Não há perda de generalidade aqui: toda variedade simplética pode ser munida de uma conexão simplética livre de torção, como vimos na proposição 101, na seção 4.5. Precisamos fixar ∇ no enunciado apenas para deixar claro de que produtos de Fedosov estamos falando.

um conjunto de 2-formas fechadas em M tal que toda 2-forma fechada em M é cohomóloga a exatamente um elemento de $\mathfrak{C}$. Então, dado um produto-estrela diferencial $\star$ em M, existe uma seqüência $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{C}$ tal que $\star$ é equivalente ao produto de Fedosov associado a

$$\Omega = \Omega(\mathfrak{C}, \star) = \sum_{k=1}^{\infty} \hbar^k \omega_k$$

Prova. A prova segue por indução em $r \in \mathbb{N}$, assumindo como hipótese de indução que temos $\omega_1, \cdots, \omega_r \in \mathfrak{C}$ tais que existe um produto-estrela $\star' = \sum_{k=0}^{\infty} \hbar^k C'_k$ equivalente a $\star = \sum_{k=0}^{\infty} \hbar^k C_k$ que coincide com o produto de Fedosov $\star_r = \sum_{k=0}^{\infty} \hbar^k C_k^{(r)}$ associado a $\Omega_r = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \hbar^k \omega_k$ até a ordem $r+1$ no parâmetro de deformação $\hbar$. Pelo teorema 148, a antissimetrização da diferença entre $\star'$ e $\star_r$ em ordem $r+2$ fornece uma 2-forma fechada cohomóloga a, digamos, $\omega_{r+1} \in \mathfrak{C}$, i.e., existe $\alpha \in \Omega(M)$ tal que vale

$$skew\left(C'_{r+2} - C_{r+2}^{(r)}\right)(f,g) = (d\alpha + \omega_{r+1})(\nabla_\omega f, \nabla_\omega g)$$

quaisquer que sejam as funções $f, g \in C^\infty(M)$. Em vista do lema 161, sabemos que os produtos-estrela $\star_r$ e $\star_{r+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \hbar^k C_k^{(r+1)}$ – este último associado a $\Omega_{r+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{r+1} \hbar^k \omega_k$ – coincidem até a ordem $r+1$, e que sua diferença em ordem $r+2$ é exatamente ω_{r+1}. Portanto, $\star'$ e $\star_{r+1}$ também coincidem até a ordem $r+1$.

Note agora que temos

$$\begin{aligned}
skew\left(C'_{r+2} - C_{r+2}^{(r+1)}\right)(f,g) &= skew\left(C'_{r+2} - C_{r+2}^{(r)} + C_{r+2}^{(r)} - C_{r+2}^{(r+1)}\right)(f,g) \\
&= skew\left(C'_{r+2} - C_{r+2}^{(r)}\right)(f,g) + skew\left(C_{r+2}^{(r)} - C_{r+2}^{(r+1)}\right)(f,g) \\
&= (d\alpha + \omega_{r+1})(\nabla_\omega f, \nabla_\omega g) - \omega_{r+1}(\nabla_\omega f, \nabla_\omega g) \\
&= d\alpha(\nabla_\omega f, \nabla_\omega g),
\end{aligned}$$

ou seja: a antissimetrização da diferença entre $\star'$ e $\star_{r+1}$ fornece uma 2-forma exata $d\alpha$. Em vista do teorema 148, existe então um produto-estrela $\star'' = \sum_{k=0}^{\infty} \hbar^k C''_k$ equivalente a $\star'$, e – por transitividade – a $\star$, que coincide com $\star_{r+1}$ até a ordem $r+2$. Isso prova a indutividade do argumento e conclui a demonstração do teorema. ■

Como conseqüência do teorema acima, obtemos a prometida parametrização dos produtos-estrela diferenciais de uma variedade simplética (M, ω) pelas séries de potênciais numa indeterminada $\hbar$ com coeficientes no segundo grupo de cohomologia de Rham de M. Mais precisamente, temos o seguinte

Corolário 163 *A aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & H^2_{dR}(M)\,[[\hbar]] & \longrightarrow & Star\,(M,\omega)\ /\sim \\ & [\Omega] = \sum_{k=1}^{\infty} \hbar^k\,[\omega_k] & \mapsto & [\star_\Omega] \end{array}$$

é uma bijeção.

Prova. A sobrejetividade decorre do teorema anterior. Falta mostrar que Ψ está bem definida e que é injetiva, i.e., que duas séries Ω e Ω' induzem produtos-estrela de Fedosov associados $\star_\Omega$ e $\star_{\Omega'}$equivalentes se, e somente se, são cohomólogas. Isso decorrerá do teorema 148 juntamente com o lema 161. Com efeito, se $\star_\Omega = \sum_{j=0}^{\infty} \hbar^j C_j^{\Omega}$ e $\star_{\Omega'} = \sum_{j=0}^{\infty} \hbar^j C_j^{\Omega'}$ coincidem até a ordem r, então o teorema 148 nos diz que a antissimetrização de sua diferença em ordem $r+1$ produz uma 2-forma fechada, que, pelo lema 161 é exatamente $\omega_r - \omega'_r$. Agora, invocando outra vez o teorema 148, temos que se $[\omega_r] = [\omega'_r]$ (ou seja, se $\omega_r - \omega'_r$ é exata) então $\star_\Omega$ é equivalente a um produto-estrela que coincide com $\star_{\Omega'}$ até a ordem $r+1$. Prosseguindo indutivamente, no caso $[\Omega] = [\Omega']$, construiremos uma equivalência entre $\star_\Omega$ e $\star_{\Omega'}$. Por outro lado, o mesmo teorema 161 nos diz que se Ω e Ω' não são cohomólogas, então $\star_\Omega$ e $\star_{\Omega'}$ não podem ser equivalentes. ■

Vemos assim que, em geral (numa variedade simplética compacta, por exemplo), há uma plêiade (a palavra vem bem a calhar) de classes de equivalência de produtos-estrela numa dada variedade simplética. Qual delas merece o *status* de "quantização canônica" desta variedade, se é que alguma merece? Essa questão é decidida – quando o é – pela consideração das simetrias clássicas do problema, caso a caso. Importantes teoremas já foram provados nesse sentido, e esta seria uma continuação natural dos estudos iniciados nesta dissertação.

Referências

[Abraham-Marsden] Abraham, Ralph; Marsden, Jerrold. **Foundations of Mechanics**. New York: W. A. Benjamin, 1967.

[Arfken-Weber] Arfken, George B.; Weber, Hans J. **Mathematical Methods for Physicists**. 6. ed. London: Academic Press, 2005.

[Arnold] Arnold, Vladimir I. **Mathematical Methods of Classical Mechanics**. 2. ed. New York: Springer, 2010.

[Bertelson-Cahen-Gutt, 1997] Bertelson, Mélanie; Cahen, Michel; Gutt, Simone. **Equivalence of Star Products**. Classical and Quantum Gravity, **14** (1997) A93-A107.

[Cannas] Cannas da Silva, Ana. **Introduction to Symplectic and Hamiltonian Geometry**. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

[do Carmo, 1] do Carmo, Manfredo Perdigão. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

[do Carmo, 2] do Carmo, Manfredo Perdigão. **Geometria Riemanniana**. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

[Chern] Chern, Shiing-Shen et al. **Lectures on Differential Geometry**. Singapore: World Scientific, 2000.

[Dirac] Dirac, P.A.M. **The Principles of Quantum Mechanics**. 4. ed. Oxford: Oxford University, 1958.

[Fedosov, 1994] Fedosov, Boris V. **A simple Geometric Construction of Deformation Quantization**. Journal Differential Geometry, **40**.(1994) 213-238.

[Fedosov] Fedosov, Boris V. **Deformation Quantization and Index Theory**. Berlin: Akademie Verlag, 1996.

[Flato et al., 1978, 1] Flato, Moshé et al. **Deformation Theory and Quantization I**. Annals of Physics, **111** (1978) 61-110.

[Flato et al., 1978, 2] Flato, Moshé et al. **Deformation Theory and Quantization II**. Annals of Physics, **113** (1978) 51-111.

[Garcia-Lequain] Garcia, Arnaldo; Lequain, Yves. **Elementos de Álgebra.**3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

[Gelfand et al., 1997] Gelfand, Israel et al. **Fedosov Manifolds**. Symplectic Geometry Workshop, Toronto, junho de 1997.

[Gerstenhaber, 1964] Gerstenhaber, Murray. **On the deformation of rings and algebras**. The Annals of Mathematics, 2nd series, vol. 79, no.

1, january 1964, 59-113.

[Goldstein] Goldstein, Herbert. **Classical Mechanics**. Massachussets: Addison-Wesley, 1950.

[Greub] Greub, Werner. **Connections, Curvature and Cohomology, vol. 1**. New York: Academic Press, 1972.

[Gutt, 1999] Gutt, Simone. **Variations on Deformation Quantization**. Moshé Flato Conference, Dijon, setembro de 1999.

[Gutt-Rawnsley, 1999] Gutt, Simone; Rawnsley, John. **Equivalence of Star Products on a Symplectic Manifold:** *an introduction to Deligne' s Cech Cohomology classes*. Journal of Geometry and Physics, **29** (1999) 347-392.

[Halmos] Halmos, Paul R. **Teoria Ingênua dos Conjuntos**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2001.

[Jech] Jech, Thomas J. **Set Theory**. London: Academic Press, 1978.

[Lang] Lang, Serge. **Algebra**. 3. ed. New York: Springer-Verlag, 2002.

[Lima, 1] Lima, Elon Lages. **Curso de Análise, vol. 2**. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

[Lima, 2] Lima, Elon Lages. **Análise Real, vol. 3**. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

[Pierce] Pierce, Richard S. **Associative Algebras**. New York: Springer-Verlag, 1982.

[Piza] Piza, A.F.R. de Toledo. **Mecânica Quântica**. São Paulo: EDUSP, 2003.

[Sotomayor] Sotomayor Tello, Jorge. **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias**. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.

[Steenrod, 1951] Steenrod, Norman. **The Topology of Fibre Bundles**. New York: Princeton, 1951.

[Tu] Tu, Loring W. **An Introduction to Manifolds**. New York: Springer-Verlag, 2008.

[van der Waerden] van der Waerden, B.L. **Sources of Quantum Mechanics**. New York: Dover, 1968.

[Waldmann] Waldmann, Stefan. **Poisson-Geometrie und Deformationsquantisierung**. Berlin: Springer-Verlag, 2007.

[Willmore, 1959] Willmore, T.J. **The definition of Lie Derivative**. Cambridge: Cambridge Journals, 1959.