

À ESTRUTURA A TERMO DE TAXAS DE JUROS BRASILEIRA DO PONTO DE VISTA DOS
PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

por:

Daniel Tonholo

Dissertação de Mestrado submetida ao Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada
como um dos requerimentos para a conclusão do Curso de Mestrado Profissional em Métodos
Matemáticos em Finanças

Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA

Rio de Janeiro

Agosto de 2011

IMPA - INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA APLICADA

DANIEL TONHOLO

**A ESTRUTURA A TERMO DE TAXAS DE JUROS BRASILEIRA DO PONTO DE
VISTA DOS PROCESSOS ESTOCÁSTICOS**

Dissertação apresentada ao Instituto Nacional de Matemática Pura Aplicada como um dos requerimentos para conclusão do curso de Mestrado em Métodos Matemáticos Aplicados a Finanças.

Orientador: Dr. Jorge Passamani Zubelli

Rio de Janeiro

Agosto de 2011

Autor: Daniel H. Tonholo

A estrutura a termo de taxas de juros brasileira do ponto de vista dos processos estocásticos

Dissertação (Mestrado Profissional) - Instituto Nacional de Matemática Pura Aplicada

1. Taxa de Juros Spot
2. Modelos HJM
3. A Estrutura a termo brasileira
4. Métodos de estimação

Agradecimentos

Agradeço a todos os professores e colegas do curso. Aos professores Jorge Passamani Zubelli e Max Oliveira Souza pelo tempo e atenção dedicados em acompanhar este trabalho e a todos que contribuem para a manutenção e expansão desta incrível fonte do conhecimento que é o IMPA. Agradeço aos meus familiares, minha namorada Renata pelo apoio e incentivo, aos meus grandes parceiros de Itajubá, aos amigos e colegas de trabalho, à Gávea Investimentos pelo incentivo e por me liberar para assistir às aulas e a todos que me ajudaram até aqui, desde a graduação. Muito obrigado.

Resumo

Este trabalho se propõe a encontrar métodos precisos do ponto de vista da teoria de finanças para modelar a estrutura a termo de taxas de juros do mercado interbancário brasileiro. Modelamos as taxas de juros ao longo de todas as maturidades sem deixar de levar em conta as decisões da autoridade monetária brasileira. Para isto, escrevemos a taxa *spot* DI-*overnight* como uma soma de dois processos mais simples: a meta Selic vista como um processo de Markov e o *spread* entre as duas grandezas citadas, meta Selic e taxa interbancária, tratado como um processo de Ornstein-Uhlenbeck com reversão à média. A parte longa da curva de juros foi descrita segundo o modelo HJM que aplica as condições de não arbitragem sobre os *bonds* para estabelecer um vínculo entre as taxas em diferentes maturidades. O *framework* HJM tem como entradas a taxa *spot* e a volatilidade da taxa *forward*. A taxa *spot* foi utilizada como descrito anteriormente e para a volatilidade da taxa *forward* desenvolvemos duas aplicações particulares bastante interessantes: sob a hipótese da volatilidade da taxa *forward* ser uma constante e posteriormente segundo a volatilidade do modelo de Vasicek. Estimamos todos os parâmetros, em ambos os exemplos, com os dados do mercado interbancário brasileiro lançando mão do método da Máxima Verossimilhança. Ao final do trabalho, realizamos técnicas tradicionais como *backtesting* para avaliação dos resultados encontrados.

Palavras-chave: *bonds*, taxa *spot*, taxa *forward*, estrutura a termo de taxa de juros.

Lista de Figuras

3.1	Meta Selic	29
3.2	Taxa DI-overnight	30
3.3	Spread	31
3.4	Erro da previsão 1d x observações	32
3.5	Expectativas da taxa DI-overnight(13-out-2010)	34
3.6	Expectativas da taxa DI-overnight acumulado (13-out-2010)	34
6.1	Mudanças de regimes nas taxas de juros	62
6.2	Evolução das taxas de longo prazo	63
6.3	Evolução das taxas de médio prazo	63
6.4	Evolução das volatilidades de médio prazo	64
6.5	Evolução das volatilidades de longo prazo	65
6.6	Diferença modelo volatilidade constante e taxa observadas - 1 Mês	67
6.7	Diferença modelo volatilidade constante e taxa observadas - 6 Mês	67
6.8	Diferença modelo volatilidade de Vasicek e taxa observadas - 1 Mês	68
6.9	Diferença modelo volatilidade de Vasicek e taxa observadas - 6 Mês	69

Conteúdo

1	Introdução	2
1.1	A estrutura da dissertação	4
2	Conceitos Preliminares e Notação	5
2.1	Cálculo estocástico	5
2.1.1	Integral de Itô	9
2.1.2	O Teorema de Girsanov	10
2.1.3	Teorema de representação de Feynman-Kac	11
2.2	Conceitos de finanças	14
2.2.1	Definições básicas	14
2.2.2	Mercados completos	17
2.2.3	Arbitragem	18
2.2.4	Contratos futuros	18
3	Taxa de Juros <i>Spot</i>	22
3.1	Taxa de juros	22
3.2	Modelo para taxa curta	23
3.2.1	Expectativa da meta Selic	26
3.3	Estimação dos parâmetros para o <i>Spread</i>	27
3.3.1	Estimadores de máxima verossimilhança	27

3.3.2	Dados para estimação do modelo OU que descreve o <i>spread</i>	29
3.3.3	Resultados das estimações	30
3.4	Comparação com método da interpolação linear	32
4	O Modelo HJM para a Taxa <i>Forward</i>	35
4.1	Introdução	35
4.2	Taxa <i>forward</i>	36
4.3	A dinâmica da taxa <i>forward</i>	37
4.4	Condição de não arbitragem	39
4.5	HJM na medida neutra ao risco	41
4.6	Como deve ser a função de volatilidade?	42
4.7	Calibragem utilizada para futuros de <i>commodities</i>	43
4.8	Calibragem utilizada para futuros de taxa	45
5	A Estrutura a Termo de Taxa de Juros	47
5.1	Volatilidade da taxa <i>forward</i> constante	47
5.1.1	A esperança do preço do <i>bond</i>	50
5.2	Volatilidade Segundo o modelo de Vasicek	53
5.2.1	A esperança do preço do <i>bond</i> para volatilidade do modelo de Vasicek	55
6	Dados e Resultados	57
6.1	Dados	57
6.1.1	O Contrato de DI futuro	58
6.1.2	Dados coletados para a calibragem	61
6.2	Resultados	65
6.2.1	Resultados para volatilidade constante	65
6.2.2	<i>Backtesting</i>	66
6.2.3	Volatilidade segundo o modelo de Vasicek	66

6.2.4	<i>Backtesting</i> volatilidade dado pelo modelo de Vasicek	68
7	Considerações Finais	70
7.1	Problemas em aberto	70
7.2	Conclusão	71
	Bibliografia	73
A	Solução do modelo OU	76
B	Os Contratos Futuros de DI e sua Época	78

Capítulo 1

Introdução

O entendimento da evolução da estrutura a termo de taxa de juros é do interesse de macroeconomistas, gestores financeiros e gerentes de risco. Isto motivou significativos avanços na abordagem teórica e empírica deste assunto nos últimos anos. Os principais modelos desenvolvidos nesse período podem ser classificados em dois tipos: modelos de não arbitragem e modelos paramétricos. Os modelos de não arbitragem se subdividem em: uma abordagem com os trabalhos de Vasicek (1977), Cox et al. (1985) e Black et al. (1990), em que o comportamento de muito curto prazo é modelado e nos modelos que adotam a taxa *forward* como ponto principal na construção da Estrutura a Termos de Taxas de Juros (ETTJ) cujo relevante modelo proposto foi de Heath et al. (1992). Os modelos paramétricos ou estatísticos são compostos pelos modelos de fatores, componentes principais e interpolações. Dentre os modelos de fatores encontram-se Nelson and Siegel (1987), Diebold and Li (2006) e Svensson (1994) nos quais se procura explicar a dinâmica da estrutura a termos com base em três e quatro parâmetros propostos pelos modelos.

No presente trabalho estudaremos os modelos de não arbitragem, mais especificamente, aquele proposto por Heath et al. (1992) para construir a curva de juros de longo prazo para o mercado brasileiro. A publicação de David Heath, Robert A. Jarrow e Andrew Morton nos anos 90 foi uma das pioneiras na direção de compreender a estrutura dos juros em diferentes maturidades sob o ponto de vista teórico. Os autores analisam a curva de juros como um objeto abstrato

possuidor de propriedades próprias, porém relacionadas com os demais ativos da economia no sentido de existência de uma medida neutra ao risco. Na verdade, Os autores de Heath et al. (1992) constroem um *framework* que comporta inúmeras interpretações para a ETTJ fazendo uso apenas dos pressupostos citados anteriormente.

Algumas variáveis e funções são necessárias para a completa determinação da estrutura a termo dentro do quadro em questão. No caso do modelo HJM, a função de volatilidade da taxa *forward* e a taxa de juros *spot* não são especificadas. Portanto, precisaremos estudar suas características para, posteriormente, integrá-las ao modelo e determinar a ETTJ completamente.

A taxa de curto prazo tem sido alvo de muito estudo nos últimos anos. No Brasil os estudos se concentram, sobretudo, na tentativa de prever as decisões da autoridade monetária como feito em Muller (2009). Nós, no entanto, não temos este intuito. Desejamos modelar a taxa de curto prazo do ponto de vista dos processos estocásticos de maneira simples e bem ajustada para anexá-la ao modelo HJM e escrever a curva de juros nominais ao longo das maturidades. Nessa linha de trabalho, proporemos uma solução nova e muito potente para descrever a taxa de curto prazo considerando as decisões do Banco Central; sem, para isso, fazer uso dos modelos com saltos. Escreveremos a taxa *spot* como a soma de dois processos bastante conhecidos: um processo de Markov para a meta Selic e o modelo de Ornstein-Uhlenbeck para o *spread* entre meta Selic e taxa DI-*overnight*. Alguns exemplos da modelagem de processos com saltos podem ser visto em Piazzesi (2005), Das (2002), Johannes (2004) e Cavalcante (2010).

A volatilidade da taxa de juros brasileira já foi estudada anteriormente em La Roque and Garcia (1996). Aqui, nosso foco se restringe a dois casos bem particulares para o segundo momento da estrutura de taxas *forward*: supor que a volatilidade é constante e também seguindo a função de volatilidade do modelo de Vasicek.

1.1 A estrutura da dissertação

A presente dissertação está dividida em sete capítulos seguidos de Referências e os Anexos. O breve resumo sobre cada capítulo pode ser visto como segue:

1. Introdução: Breve abordagem histórica dos tópicos que são tratados no texto e contextualização com a literatura relacionada;
2. Taxa de Juros *Spot*: Exploramos os conceitos da taxa de juros de curto prazo, apresentamos um modelo para descrevê-la e calibramos os parâmetros do mesmo passando rapidamente pelos resultados da estimação;
3. O Modelo HJM para a Taxa *Forward*: Detalhamos o modelo HJM e apresentamos alguns métodos bastante comuns na literatura para estimação dos parâmetros;
4. A Estrutura a Termo de Taxa de Juros: Este capítulo é o principal do trabalho do ponto de vista teórico. Nele, integramos os modelos para taxa de curto prazo e taxa *forward* para obter a ETTJ completa e adaptada ao mercado brasileiro. Estudamos dois casos particulares para a volatilidade da taxa *forward*: supondo constante nas maturidade e seguindo o modelo de Vasicek;
5. Dados e Resultados: Apresentamos os dados para as calibragem com uma detalhada seção sobre os futuros de DI que são os principais insumos para as estimações propostas. Dedicamos uma seção para apresentação e discussão dos resultados;
6. Conclusão: Aqui avaliamos o presente trabalho e deixamos diversos assuntos para estudos futuros. Na última seção concluimos baseados nos resultados e na abordagem teórica;
7. Referências Bibliográficas.
8. Apêndice A - Solução do modelo OU.
9. Apêndice B - Os contratos futuros de DI e sua época.

Capítulo 2

Conceitos Preliminares e Notação

Neste capítulo faremos uma revisão dos conceitos básicos de cálculo estocástico, estatística e outros tópicos de matemática e finanças que serão usados ao longo do texto. As principais referências para este capítulo podem ser facilmente encontradas em Korn and Korn (2001), Oksendal (2002), James (1981), Shreve (2004) e Zubelli (2005).

2.1 Cálculo estocástico

Começaremos definindo conceitos básicos de cálculo estocástico e extraíndo os principais resultados.

Definição 2.1 (Espaço de Probabilidade) *Um espaço de probabilidade é a tripla $(\Omega, \mathbb{A}, \mathbb{P})$ em que:*

Ω é um conjunto não vazio,

\mathbb{A} é uma σ -álgebra de subconjuntos de Ω , e

\mathbb{P} é uma probabilidade em \mathbb{A} .

Definição 2.2 (Filtração) *Seja $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathcal{I}}$ uma coleção de σ -álgebras de \mathcal{F} e \mathcal{I} um conjunto de números ordenados tal que, dados \mathcal{F}_s e $\mathcal{F}_t \in \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathcal{I}}$ e $s < t$, vale $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$. A coleção $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathcal{I}}$*

é chamada de *Filtração*.

Definição 2.3 (Processo Estocástico) *O conjunto $\{(X_t, \mathcal{F}_t)\}_{t \in \mathcal{I}}$ formado pela filtração $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathcal{I}}$ e uma família de variáveis aleatórias, X_t , tomando valores no \mathbb{R}^n com $X_t - \mathcal{F}_t$ mensurável, é chamado de processo estocástico com filtração $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathcal{I}}$.*

Ao longo deste texto, por vezes usaremos \mathcal{I} sem especificação, porém fica subentendido que $\mathcal{I} = [0, T]$.

Definição 2.4 (Movimento Browniano) *Seja o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Definiremos um movimento Browniano como sendo o processo $\{W_t\}_{t \geq 0}$ com caminhos contínuos tal que:*

$$W_0 = 0, \mathbb{P} - q.t.p.$$

$$W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s), s < t, e$$

$$W_t - W_s \text{ independentes de } W_u - W_v \text{ para } 0 \leq r \leq u \leq s \leq t.$$

Definição 2.5 (Browniano d-dimensional) *Um movimento Browniano d-dimensional é um processo estocástico com valores em \mathbb{R}^n , $W(t) = (W_1(t), W_2(t), \dots, W_d(t))$ tal que cada componente é um movimento Browniano unidimensional e W_i é independente de W_j se $i \neq j$.*

Definição 2.6 (Martingal) *Dado o par $\{X_t, \mathcal{F}_t\}_{t \in \mathcal{I}}$, definido por um processo com valores reais tal que $\mathbb{E}[X_t] < \infty$ para todo $t \in \mathcal{I}$ e \mathcal{F}_t , uma filtração, onde \mathcal{I} é um conjunto ordenado, então:*

(X_t) é um super-martingal, se para todo $s, t \in \mathcal{I}$, $s < t$ temos:

$$\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) \leq X_s, \mathbb{P} - q.t.p. \quad (2.1)$$

(X_t) é um sub-martingal, se para todo $s, t \in \mathcal{I}$, $s < t$ temos:

$$\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) \geq X_s, \mathbb{P} - q.t.p. \quad (2.2)$$

(X_t) é um martingal, se para todo $s, t \in \mathcal{I}$, $s < t$ temos:

$$\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s, \quad \mathbb{P} - q.t.p. \quad (2.3)$$

Teorema 2.1 *O movimento Browniano $\{W_t\}_{t \geq 0}$ é um martingal.*

A demonstração pode ser encontrada em Korn and Korn (2001).

Definição 2.7 (Variação quadrática) *Dado o processo estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathcal{I}}$, definiremos a variação quadrática $\langle X \rangle_t$, como*

$$\langle X \rangle_t = \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})^2 \quad (2.4)$$

onde $\Pi = \{0 = t_0^n < \dots < t_n^n = T\}$.

Definição 2.8 (Processo Simples) *Um processo estocástico $\mathbf{X} = \{X_t\}_{t \in \mathcal{I}}$ é chamado processo simples se existem números reais $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p = T$, $p \in \mathbb{N}$, e variáveis aleatórias $\Phi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, p$ com $\Phi_0 - \mathcal{F}_0$ mensurável e $\Phi_i - \mathcal{F}_{t_{i-1}}$ mensurável tal que valha a seguinte representação:*

$$X_i(w) = \Phi_0(w)1_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^p \Phi_i(w)1_{(t_{i-1}, t_i]}(t) \quad (2.5)$$

para cada $\omega \in \Omega$.

Definição 2.9 (Integral Estocástica) *Para um processo simples $\mathbf{X} = \{X_t\}_{t \in \mathcal{I}}$ a integral estocástica $I(X)$, para cada $t \in [0, T]$, é dada por*

$$I_t(X) = \int_0^t X_s dW_s = \sum_{1 \leq i \leq n} \Phi_i(W_{t_i \wedge t} - W_{t_{i-1} \wedge t}) \quad (2.6)$$

Definição 2.10 (Processos Progressivamente Mensuráveis) *Um processo estocástico $\{X_t, \mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$*

é dito progressivamente mensurável se, $\forall t > 0$, a função

$$\begin{aligned} [0, T] \times \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (s, \omega) &\rightarrow X_s(\omega) \end{aligned} \tag{2.7}$$

é $\mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{F}_t$ mensurável.

Definição 2.11 (Espaços L^2) Definimos o espaço $L^2[0, T]$ como o conjunto dos processos estocásticos $\{X_t, \mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ tais que, $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$ é progressivamente mensurável e

$$\mathbb{E} \left(\int_0^t X_t^2 dt \right) < \infty. \tag{2.8}$$

Definimos ainda a norma de $\mathbf{X} = \{X_t\}_{t \in \mathcal{I}}$ em $L^2[0, T]$ como o valor finito dado pelo lado esquerdo da Equação (2.8) e denotamos este valor por $\{L^2[0, T]\}$.

Teorema 2.2 Dado um processo estocástico arbitrário, $\mathbf{X} \in L^2[0, T]$ ele pode ser aproximado por uma sequência de processos simples $\mathbf{X}^{(n)}$. Ou seja, existe uma sequência $\mathbf{X}^{(n)}$ de processos simples com

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \int_0^t \left(X_s - X_s^{(n)} \right)^2 ds = 0. \tag{2.9}$$

A demonstração precisa deste resultado por ser encontrada em Korn and Korn (2001).

Teorema 2.3 (Isometria de Itô) Existe uma única aplicação linear J , definida em $L^2[0, T]$, com valores no espaço dos martingais contínuos definidas em $[0, T]$ com relação à $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ que satisfaz as condições:

Se $\mathbf{X} = \{X_t\}_{t \in \mathcal{I}}$ é um processo simples então $\mathbb{P}(J_t(\mathbf{X}) = I_t(\mathbf{X}); \forall t \in [0, T]) = 1$.

O processo satisfaz a isometria de Itô,

$$\mathbb{E} (J_t(\mathbf{X})^2) = \mathbb{E} \left(\int_0^t X_s^2 ds \right). \tag{2.10}$$

Esta aplicação linear é única. Detalhes podem ser vistos em Korn and Korn (2001).

Definição 2.12 (Integral Estocástica) Para $\mathbf{X} \in L^2[0, T]$ e J como no Teorema 2.3, definimos a integral estocástica do processo \mathbf{X} com relação à $\{W_t\}_{t \in [0, T]}$ como sendo:

$$\int_0^t X_s dW_s = J_t(X). \quad (2.11)$$

Teorema 2.4 Para qualquer $\mathbf{X} \in L^2[0, T]$ a integral de Itô,

$$\int_0^t X_s dW_s, \quad (2.12)$$

é um \mathcal{F}_t martingal em $[0, T]$. Em particular, a integral dada em (2.12) tem esperança igual a zero.

Demonstração deste resultado encontra-se em Korn and Korn (2001).

2.1.1 Integral de Itô

Definição 2.13 (Processo de Itô) Seja $\{\mathbf{W}(t), \mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ um movimento Browniano m -dimensional, $m \in \mathbb{N}$. $\{X(t), \mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ é chamado um processo de Itô se $\forall t \geq 0$, $X(t)$ pode ser representado como

$$X(t) = X(0) + \int_0^t K(s) ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t H_j(s) dW_j(s) \quad \mathbb{P} - q.c. \quad (2.13)$$

Onde, $\{K(t)\}_{t \geq 0}$ e $\{\mathbf{H}(t)\}_{t \geq 0}$ são processos estocásticos progressivamente mensuráveis e satisfazem

$$\begin{aligned} \int_0^t |K(s)| ds &< \infty \\ \int_0^t H_i^2(s) ds &< \infty \end{aligned} \quad (2.14)$$

$\forall t \geq 0, i = 1, \dots, m$. Além disso, um processo de Itô d -dimensional $\mathbf{X} = (X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(d)})$ consiste de um vetor, tal que cada componente é um processo de Itô a valores reais.

Definição 2.14 (Variação Cruzada) *Sejam \mathbf{X} e \mathbf{Y} dois processos de Itô tomando valores reais com representação,*

$$\begin{aligned} X(t) &= X(0) + \int_0^t K(s)ds + \int_0^t \mathbf{H}(s)dW_s \\ X(t) &= X(0) + \int_0^t L(s)ds + \int_0^t \mathbf{M}(s)dW_s \end{aligned} \quad (2.15)$$

então,

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{j=1}^m \int_0^t H_j(s)M_j(s)ds. \quad (2.16)$$

2.1.2 O Teorema de Girsanov

Seja $\{X(t), \mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ um processo m -dimensional, progressivamente mensurável; seja ainda $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ a filtração Browniana com

$$\int_0^t X_i^2(s)ds < \infty, \quad (2.17)$$

$\forall t \geq 0$ e $i = 1, 2, \dots, m$. Considere também

$$Z(t, \mathbf{X}) = \exp \left(- \sum_{i=1}^m \int_0^t X_i(s)dW_i(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \|\mathbf{X}(s)\|^2 ds \right). \quad (2.18)$$

Em geral, $Z(t, \mathbf{X})$ não é um martingal. Porém, nos casos em que é, temos $\mathbb{E}[Z(t, \mathbf{X})] = 1, \forall t \geq 0$. Vamos considerar inicialmente que $Z(t, \mathbf{X})$ é um martingal (posteriormente daremos condições para que isso aconteça). Supondo a condição anterior podemos definir uma nova medida de probabilidade \mathbb{Q}_T sobre \mathcal{F}_T da forma:

$$\mathbb{Q}_T(A) = \mathbb{E}[1_A \cdot Z(t, \mathbf{X})], \quad \forall A \in \mathcal{F}_T. \quad (2.19)$$

Vamos assim ao teorema.

Teorema 2.5 *Suponha que $Z(t, \mathbf{X})$ seja um martingal e defina $\{(W^{\mathbb{Q}}(t), \mathcal{F}_t)\}_{t \geq 0}$ por:*

$$W_i^{\mathbb{Q}}(t) = W_i(t) + \int_0^t X_i(s) ds \quad (2.20)$$

para $i = 1, 2, \dots, m$ e $t \geq 0$. Então, para cada $t \in [0, T]$, o processo $W_i^{\mathbb{Q}}(t)$, é um movimento Browniano m -dimensional definido em $(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{Q}_T)$, onde a medida de probabilidade \mathbb{Q}_T é definida pela Equação (2.19).

A demonstração do resultado acima pode ser vista em Korn and Korn (2001).

Na aplicação do Teorema de Girsanov enunciado acima precisamos garantir, sob determinadas condições que, $Z(t, \mathbf{X})$ é um martingal.

Teorema 2.6 *Uma condição suficiente para que $Z(t, \mathbf{X})$ seja um martingal é*

$$\mathbb{E} \left(\exp \left[\frac{1}{2} \int_0^t \|\mathbf{X}(s)\|^2 ds \right] \right) < \infty. \quad (2.21)$$

A demonstração do resultado acima pode ser encontrada em Shreve (2004).

2.1.3 Teorema de representação de Feynman-Kac

Definição 2.15 (Solução Forte) *Se sobre o espaço amostral $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ existir um processo contínuo d -dimensional $\{\mathbf{X}(t), \mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ e*

$$X_i(t) = x_i + \int_0^t b_i(s, X(s)) ds + \sum_{j=1}^m \sigma_{ij}(s, X(s)) dW_j(s)$$

que satisfaz,

$$\int_0^t \left(|b_i(s, X(s))| + \sum_{j=1}^m \sigma_{ij}^2(s, X(s)) \right) ds < \infty$$

$$\forall t \geq 0, i = 1, 2, \dots, d$$

Então $X(t)$ é chamado uma solução forte da Equação diferencial estocástica,

$$\begin{aligned} dX(t) &= b(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t) \\ X(0) &= (x_1, x_2, \dots, x_d), \end{aligned} \tag{2.22}$$

onde $b : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ e $\sigma : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d,m}$ são funções dadas.

Teorema 2.7 *Sejam $b(t, x)$ e $\sigma(t, x)$ da EDE (2.22) funções contínuas satisfazendo*

$$\begin{aligned} \|b(t, x) - b(t, y)\| + \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\| &\leq K\|x - y\| \\ \|b(t, x)\|^2 + \|\sigma(t, x)\|^2 &\leq K^2(1 + \|x\|^2) \end{aligned} \tag{2.23}$$

$\forall t \geq 0, x, y \in \mathbb{R}^d$ e $K > 0$. Então, existe uma solução forte de (2.22) que satisfaz

$$\mathbb{E}(\|X(t)\|^2) \leq C(1 + \|x\|^2) \exp(CT) \tag{2.24}$$

$\forall t \in [0, T]$, para alguma constante $C = C(K, T)$ e $T > 0$. Além disso, a menos de um conjunto de medida nula, $X(t)$ será única.

A demonstração deste resultado pode ser vista em Korn and Korn (2001).

Definição 2.16 (Operador Infinitesimal) *Seja $X(t)$ a única solução da Equação diferencial estocástica (2.22). Suponhamos que valha a condição (2.23). Para $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$,*

definiremos o operador infinitesimal associado à $X(t)$ como:

$$(A_t f)(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^d a_{ik}(t, x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(x) + \sum_{i=1}^d b_i(t, x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \quad (2.25)$$

onde

$$a_{ik}(t, x) = \sum_{j=1}^m \sigma_{ij}(t, x) \sigma_{kj}(t, x).$$

Descrição do problema de Cauchy associado ao operador A_t definido em (2.25). Seja $T > 0$ fixo.

Devemos encontrar a função $v(t, x) : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, tal que,

$$\begin{aligned} -v_t + kv &= A_t v + g & (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d \\ v(T, x) &= f(x) & x \in \mathbb{R}^d. \end{aligned} \quad (2.26)$$

onde $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $g : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ e $k : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$. Para garantir a unicidade da solução de (2.26), precisamos adicionar uma condição que consiste em:

$$\max_{0 \leq t \leq T} |v(t, x)| \leq M (1 + \|x\|^{2\nu}) \quad M > 0, \quad \nu \geq 1. \quad (2.27)$$

Ainda será requerido de v

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq L (1 + \|x\|^{2\lambda}) & L > 0, \lambda \geq 1 \quad \text{ou} \quad f(x) \geq 0 \\ |g(t, x)| &\leq L (1 + \|x\|^{2\lambda}) & \lambda \geq 1 \quad \text{ou} \quad g(t, x) \geq 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Teorema 2.8 (Representação de Feynman-Kac) *Sendo válidas as condições (2.28), seja $v(t, x) : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ uma solução do problema de Cauchy (2.26) com $v \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$.*

Se $v(t, x)$ satisfaz a condição (2.27), então temos a seguinte representação:

$$\begin{aligned} v(t, x) = & \mathbb{E}^{t,x} \left(f(\mathbf{X}(t)) \exp \left(- \int_t^T k(\theta, \mathbf{X}(\theta)) d\theta \right) \right) + \\ & + \mathbb{E}^{t,x} \left(\int_t^T g(s, \mathbf{X}(s)) \exp \left(- \int_t^s k(\theta, \mathbf{X}(\theta)) d\theta \right) ds. \right) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Onde $\mathbb{E}^{t,x}$ denota $\mathbb{E}(\cdot / \mathbf{X}(t) = x)$.

Em particular, $v(t, x)$ descrito acima, é a única solução de (2.26) que satisfaz (2.28).

Prova do Teorema em Korn and Korn (2001).

2.2 Conceitos de finanças

Nesta seção trataremos os principais conceitos de finanças necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Maiores detalhes sobre esta revisão podem ser encontrados em Korn and Korn (2001) e Shreve (2004).

2.2.1 Definições básicas

Definição 2.17 (Estratégia de trade) Uma estratégia de trading φ é um processo estocástico progressivamente mensurável de \mathbb{R}^{d+1} com respeito à $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$, tal que

$$\varphi(t) = (\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_d(t))'$$

satisfazendo

$$\int_0^T |\varphi_0(t)| dt < \infty$$

\mathbb{P} , quase certamente e

$$\sum_{j=1}^d \int_0^T \varphi_j(t) \cdot P_j(t)^2 dt < \infty$$

\mathbb{P} quase certamente para $i = 1, 2, \dots, d$. O valor $x = \sum_{i=0}^d \varphi_i(0) \cdot p_i$ é chamado de valor inicial de φ .

Definição 2.18 (Processo de Riqueza) *Seja φ uma estratégia com valor inicial $x > 0$. O processo*

$$X(t) = \sum_{i=0}^d \varphi_i(t) P_i(t)$$

é chamado **processo de riqueza** correspondente à φ com riqueza inicial x .

Definição 2.19 (Processo de Consumo) *O processo estocástico progressivamente mensurável $c(t)$ com respeito à $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ com*

$$\int_0^T c(t) dt < \infty$$

\mathbb{P} , quase certamente, é chamado de **processo de consumo**.

Definição 2.20 (Par auto-financiado) *Um par (φ, c) , consistindo de uma estratégia φ e um processo de consumo c é chamado de par autofinanciado correspondente ao processo de riqueza $X(t)$, $t \in [0, t]$, satisfazendo:*

$$X(t) = x + \sum_{i=0}^d \int_0^t \varphi_i(s) dP_i(s) - \int_0^t c(s) ds.$$

Ou seja, “riqueza hoje” = “riqueza inicial” + “ganhos/perdas” - “consumo”.

Observamos que temos

$$\begin{aligned} \int_0^t \varphi_0(s) dP_0(s) &= \int_0^t \varphi_0(s) P_0(s) r(s) ds \\ \int_0^t \varphi_i(s) dP_i(s) &= \int_0^t \varphi_i(s) P_i(s) b_i(s) ds + \\ &\quad + \sum_{j=1}^m \int_0^t \varphi_i(s) P_i(s) \sigma_{i,j}(s) dW_j(s), \end{aligned}$$

para $i = 1, \dots, d$.

Definição 2.21 (Portfólio auto-financiado) *Seja (φ, c) um par auto-financiado consistindo de uma estratégia e um processo de consumo com correspondente processo de riqueza $X(t) > 0$ $-\mathbb{P}$ quase certamente para todo $t \in [0, T]$. Então, o processo*

$$\pi(t) = (\pi_1(t), \dots, \pi(d))', \quad t \in [0, T]$$

com $\pi_i(t) = \frac{\varphi_i(t) \cdot P_i(t)}{X(t)}$, é chamado de portfólio auto-financiado correspondente ao par (φ, c) .

[Equação do processo de riqueza]

Com as definições que apresentamos é fácil concluir que:

$$\begin{aligned} dX(t) &= [r(t)X(t) - c(t)]dt + \\ &\quad + X(t)\pi(t)'((b(t) - r(t)\mathbf{1})dt + \sigma(t)dW(t)) \\ X(0) &= x. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Definição 2.22 (Processos admissíveis) *Um par auto financiado, (φ, c) , ou (π, c) consistindo de uma estratégia de trade φ ou um processo de portfólio ϕ e um processo de consumo, c , será chamado **admissível** para uma dada riqueza inicial $x > 0$, se o processo de riqueza correspondente satisfizer:*

$$X(t) \geq 0, \quad \forall t \in [0, T], \quad \mathbb{P} - q.t.p. \tag{2.31}$$

O conjunto dos pares admissíveis, (π, c) será denotado por $\mathcal{A}(x)$.

Vamos fixar a notação:

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= \exp\left(-\int_0^t r(s)ds\right) \\ \theta(t) &= \sigma^{-1}(t)(b(t) - r(t)1) \\ Z(t) &= \exp\left(-\int_0^t \theta(s)'dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \|\theta(s)\|^2 ds\right) \\ H(t) &= \gamma(t).Z(t)\end{aligned}$$

O processo $\gamma(t)$ será chamado de processo de desconto. Nos próximos capítulos deste trabalho iremos nos referir à $\gamma(t)$ por $D(t)$.

2.2.2 Mercados completos

Teorema 2.9 (Mercados completos) (1) *Seja o par auto financiado (π, c) consistindo de um processo de portfólio, π e um processo de consumo c , ambos admissíveis para alguma condição inicial do processo de riqueza $x > 0$, i.e., $(\omega, c) \in \mathcal{A}$. Então o correspondente processo de riqueza, $X(t)$, satisfaz:*

$$E\left(H(t)X(t) + \int_0^t H(s)c(s)ds\right) \leq x \text{ para todo } t \in [0, T]. \quad (2.32)$$

(2) *Seja $B \geq 0$ uma variável aleatória \mathcal{F}_t mensurável e $c(t)$, $t \in [0, T]$, o processo de consumo satisfazendo*

$$x = E\left(H(T)B + \int_0^T H(s)c(s)ds\right) < \infty. \quad (2.33)$$

Então existe um processo de portfólio $\pi(t)$, $t \in [0, T]$, com $(\pi, c) \in \mathcal{A}(x)$ e o correspondente processo de riqueza $X(t)$ que satisfaz

$$X(T) = B \quad - \mathbb{P}, \text{ quase certamente}$$

2.2.3 Arbitragem

Definição 2.23 (Arbitragem) *Um par auto financiado e admissível (φ, c) , consistindo de uma estratégia φ e um processo de consumo c , é chamado de uma oportunidade de arbitragem se o processo de riqueza correspondente satisfaz:*

$$\begin{aligned} X(0) &= 0; & X(T) &\geq 0; \\ P(X(T) > 0) &> 0 & \text{ou} \\ P\left(\int_0^T c(t)dt > 0\right) &> 0. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Corolário 2.1 *Nos mercados completos de tempo contínuo não há oportunidade de arbitragem.*

Veja Korn and Korn (2001).

2.2.4 Contratos futuros

Seguindo Shreve (2004) adotaremos que sempre haverá uma única medida neutra ao risco, \mathbb{Q} , e que todos os ativos satisfazem a fórmula de precificação neutra ao risco¹.

Considerando o intervalo de tempo $t \in [0, T]$, seja a partição do intervalo tal que, $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$. Cada subintervalo $[t_k, t_{k+1})$, representa "um dia".

Suponhamos que a taxa de juros é constante ao longo de cada dia. Então, o processo de desconto é dado por $D(0) = 1$ e, para $k = 0, 1, \dots, n - 1$, teremos

$$D(t_{k+1}) = \exp\left(-\int_0^{t_{k+1}} R(u)du\right) = \exp\left(-\sum_{j=0}^k R(t_j)(t_{j+1} - t_j)\right)$$

que é $\mathcal{F}(t_k)$ -mensurável.

Sob a hipótese do *bond* valer uma unidade monetário no vencimento T, escrevemos seu preço

¹detalhes sobre a fórmula de precificação neutra ao risco podem ser obtidos em Shreve (2004)

no tempo t_k de acordo com a fórmula de precificação

$$B(t_k, T) = \frac{1}{D(t_k)} \tilde{\mathbb{E}} [D(T) | \mathcal{F}(t_k)]. \quad (2.35)$$

Seja o preço de um ativo no tempo t , $S(t)$. Então o preço *forward* fica:

$$For_S(t_k, T) = \frac{S(t_k)}{B(t_k, T)},$$

$\mathcal{F}(t_k)$ –mensurável.

Estratégia para replicar os contratos futuros

Suponha que tomamos uma posição comprada no contrato *forward* no tempo t_k . O valor desta posição no tempo $t_j \geq t_k$ é

$$\begin{aligned} V_{k,j} &= \frac{1}{D(t_j)} \tilde{\mathbb{E}} \left[D(T) \left(S(T) - \frac{S(t_k)}{B(t_k, T)} \right) \middle| \mathcal{F}(t_j) \right] = \\ &= S(t_j) - S(t_k) \frac{B(t_j, T)}{B(t_k, T)}. \end{aligned}$$

Se $t_j = t_k$, então $V_{k,j}$ será zero, como esperávamos. Entretanto para $t_j > t_k$ o valor pode ser diferente de zero. Por exemplo, se a taxa de juros é constante, então $B(t, T) = e^{-r(t-T)}$, e ainda,

$$V_{k,j} = S(t_j) - e^{r(t_j-t_k)} S(t_k).$$

Se o ativo cresce mais rápido do que a taxa de juros, o contrato *forward* tem valor positivo. Nos outros casos tem valor negativo. Com o objetivo de minimizar o problema do risco de *default* dos contratos *forward* os agentes poderiam concordar em acertar as diferenças monetárias um dias após o contrato ser lançado. Neste caso teríamos:

$$V_{0,1} = S(t_1) - S(t_0) \frac{B(t_1, T)}{B(t_0, T)} = S(t_1) - S(0) \frac{B(t_0, T)}{B(t_1, T)}$$

e,

$$V_{1,2} = S(t_2) - S(1) \frac{B(t_1, T)}{B(t_2, T)}. \quad (2.36)$$

Generalizando

$$V_{n-1,n} = S(t_n) - S(t_{n-1}) \frac{B(t_n, T)}{B(t_{n-1}, T)} = S(T) - \frac{S(t_{n-1})}{B(t_{n-1}, T)}. \quad (2.37)$$

Existem dois problemas com este desenvolvimento: o primeiro é que todos os ajustes do contrato *forward* pressupõem que os agentes estão dispostos a pagar o ajuste mesmo perdendo o que teriam lucrado com o ativo; Segundo é que este processo de compra e vendas diárias requer liquidez no mercado.

A melhor idéia relacionada aos ajustes diários de um contrato *forward* é a criação de um *preço futuro*, $F_S(t, T)$. Assim, se um agente possui uma posição comprada em um futuro entre os tempos t_k e t_{k+1} , então no tempo t_{k+1} ele recebe o pagamento

$$F_S(t_{k+1}, T) - F_S(t_k, T),$$

chamado de ajuste diário. O processo estocástico $F_S(t, T)$ é construído de forma que $F_S(t, T)$ seja $\mathcal{F}(t_k)$ -mensurável para cada t e

$$F_S(T, T) = S(T).$$

Além disso, a soma dos pagamentos recebidos diariamente pelo agente que adquire um contrato

futuro no tempo zero, e leva até o vencimento é

$$\begin{aligned}
 & (F_S(t, T) - F_S(t_0, T)) + (F_S(t_2, T) - F_S(t_1, T)) + \dots \\
 & \dots + (F_S(t_n, T) - F_S(t_{n-1}, T) - F_S(t_{n-1}, T)) \\
 & = F_S(T, T) - F_S(0, T) \\
 & = S(T) - F_S(0, T).
 \end{aligned}$$

Feita a discussão acima estamos prontos para definição dos contratos futuros.

Preço futuro

Definição 2.24 (Preço futuro) *O preço futuro de um ativo que vale no tempo T , $S(T)$, é dado pela fórmula:*

$$F_S(t, T) = \tilde{\mathbb{E}}[S(T)|\mathcal{F}(t)], \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.38)$$

Uma posição comprada nos contratos futuros será um acordo de trocar fluxos de caixa no preço futuro (que pode ser negativo ou positivo) durante o tempo que o agente possuir o contrato. Uma posição vendida nos contratos futuros recebe o fluxo de caixa oposto.

Teorema 2.10 *O preço futuro de um contrato é um martingal na medida neutra ao risco, \mathbb{Q} , que satisfaz: $F_S(T, T) = S(T)$. E mais, o valor de uma posição comprada (ou vendida) de um futuro por um intervalo de tempo é zero.*

A demonstração pode ser vista em Shreve (2004).

Capítulo 3

Taxa de Juros *Spot*

Neste capítulo discorreremos sobre a taxa de juros *spot* de curto prazo detalhando sua importância na política monetária. Proporemos equações capazes de explicar sua estrutura sob um ponto de vista pouco explorado na literatura. Aplicaremos o modelo ao mercado brasileiro porém, antes disso, revisaremos brevemente o funcionamento do mercado de taxa de juros de curto prazo no Brasil. Maiores detalhes sobre essa revisão podem ser encontrados em FORTUNA (2007).

3.1 Taxa de juros

Nas principais economias do mundo os governos controlam as taxas de juros de curto prazo dos papéis públicos. Na maioria dos casos o fazem constantemente para manutenção de diversos fatores macroeconômicos extremamente relevantes para os países. Alguns exemplos são: inflação, taxa de desemprego, taxa de câmbio, etc.

Nos Estados Unidos o órgão responsável pelo controle da taxa de juros é o Federal Reserve (FED). As decisões referentes às taxas de curto prazo são tomadas nas reuniões do Federal Open Market Committee (FOMC). Já no Brasil o controle é feito pelo Banco Central (BC), e as reuniões são realizadas pelo Comitê de Política Monetária (COPOM). Em ambos os casos, as reuniões acontecem em datas previamente determinadas, sendo que no Brasil, a frequência é de

aproximadamente um vez a cada 45 dias.

O Banco central brasileiro atua ativamente na formação da taxa de curto prazo. O mecanismo de controle é a taxa *overnight* do Sistema Especial de Liquidação e de Custódia (Selic) - que é a taxa média ponderada das operações de financiamento por um dia, lastreadas em títulos públicos federais e realizadas no Selic, na forma de operações compromissadas ¹. A outra taxa formadora do mercado de juros de curto prazo brasileiro é dada pelos Certificados de Depósitos Interbancários (CDIs)- que consistem em títulos emitidos pelos bancos com prazo de 1 dia. A taxa média diária do CDI é utilizada para determinação do custo do dinheiro no país.

Neste capítulo apresentaremos um modelo para a taxa DI-*overnight*, utilizando informações da meta Selic determinada pelo BC nas reuniões do COPOM.

3.2 Modelo para taxa curta

Alguns trabalhos já foram feitos com objetivo de incorporar as decisões das autoridades monetárias sobre os modelos de taxa de juros como processo de puro salto. Um exemplo pode ser visto em Piazzesi (2005). Em uma abordagem diferente, Jackwerth and Rubinstein (1996) utilizam os dados de mercado para estimar as probabilidades da taxa em cada reunião. Nossa proposta é levar em conta as decisões da autoridade monetária, porém de uma maneira mais simples e apropriada para o mercado brasileiro.

Tomando com base o que foi feito em Muller (2009), conciliaremos dois modelos estocásticos com intuito de explicar a taxa DI-*overnight* de forma consistente e bem ajustada. Vamos escrever a taxa em estudo como uma soma de um processo de Markov que representa a meta Selic e o *spread* entre meta Selic e a taxa DI-*overnight* como um processo de Ornstein-Uhlenbeck.

Nosso modelo se limitará em pressupor que os cenários com respectivas probabilidades das reuniões futuras do COPOM existam e sejam dados. Entendemos que isso torna o modelo mais flexível e adequado para o mercado brasileiro. Como discutido em Bonomo and Lowenkron

¹detalhes podem ser vistos em [http : //www3.bcb.gov.br/selic/html/help_taxaSelic.html](http://www3.bcb.gov.br/selic/html/help_taxaSelic.html)

(2006), variáveis exógenas podem ter mais influência nas decisões monetárias em países emergentes², o que compromete as previsões econométricas. Portanto, se houver intuição subjetiva do leitor relacionada às reuniões, ainda assim, o modelo proposto é apropriado.

Seja r_m^d a meta da taxa de juros de curto prazo decidida pelo COPOM e r_m a meta convertida em taxa contínua³ anualizada. As decisões do COPOM sobre a meta Selic sempre são múltiplas de 25 basis points⁴. Portanto $r_m = \ln(1 + l.25bps)$, sendo l um número inteiro ($\frac{e^{r_m}-1}{25.10^{-4}} \in \mathbb{N}$).

Seja τ_j o tempo da j -ésima reunião, sendo $j = 1, 2, \dots$

Definição 3.1 (Modelo para a Meta Selic) *A taxa referente à meta Selic, $r_m \in (\Omega_1, \mathcal{F}^1, \mathbb{P}_1)$, é dada por um processo de Markov da forma:*

$$r_m(t) = \ln \left(1 + H_0 \chi_{[t_0, \tau_1)} + \sum_{j=1}^N H_j \chi_{(\tau_j, \tau_{j+1}]}(t) \right), \quad (3.1)$$

onde, H_j é a meta da taxa de juros do país anualizada, decidida na j -ésima reunião e $\chi_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}$ é a função indicadora no intervalo $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ e $j = 1, 2, \dots$

Seja $r_{DI}(t)$ a média da taxa dos depósitos interbancários de um dia (*overnight*) expressa em taxa contínua. Ou seja, $r_{DI} = \ln(r_{DI}^d + 1)$ e r_{DI}^d a taxa discreta observada diariamente no mercado.

Definição 3.2 (Spread entre Meta Selic e DI *overnight*) *Diremos que r_s é o spread entre a meta Selic e a taxa DI over. Precisamente teremos $r_s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$*

$$r_s(t) = r_m(t) - r_{DI}(t). \quad (3.2)$$

onde $t \in [0, T]$, m refere-se à m -ésima reunião do COPOM e r_{DI} corresponde à taxa DI-*overnight* no tempo t .

²O artigo foi escrito em 2006. Hoje, muitos estudiosos afirmam que a dependência dos mercados externos reduziu consideravelmente.

³Seja r^d a taxa observada no mercado referente à um determinado prazo discreto (isto inclui: dias, meses, anos etc). A taxa contínua referente ao mesmo período, ou seja, a taxa que acumulada continuamente resultaria na mesma rentabilidade depois do período a qual a primeira se refere. De uma forma mais precisa temos: $r^c = \ln(1 + r^d)$.

⁴1 basis point equivale a 0.01%.

Existem muitos trabalhos que se propõem a testar ou fazem uso do resultado das taxas de juros reverterem à média. Isso é verificado principalmente nas taxas de juros de países desenvolvidos. Nesse trabalho faremos uma hipótese diferente; proporemos que a diferença entre a taxa de juros e a meta Selic reverte à média. Na abordagem que estamos seguindo, esta hipótese é mais genérica do que a primeira e, portanto, se adequa melhor ao mercado local, o qual sofre constante intervenção do COPOM.

Hipótese 3.1 (*Spread* é um processo estocástico com reversão à média) *O spread entre a meta Selic e a taxa DI overnight pode ser modelado por uma equação diferencial estocástica de Ornstein-Uhlenbeck definido na filtração e espaços de probabilidade $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_2)$ com a seguinte dinâmica, para $t > 0$:*

$$dr_s(t) = \eta(\mu - r_s(t))dt + \sigma dW(t). \quad (3.3)$$

Cuja solução para $0 < t$ é (ver apêndice A),

$$r_s(t) = r_s(0)e^{-\eta t} + \mu(1 - e^{-\eta t}) + \sigma \int_0^t e^{-\eta(t-u)} dW(u) \quad (3.4)$$

onde, μ é a média do processo, σ a volatilidade e η é a “velocidade” com que o processo estocástico reverte à média.

Até o momento, trabalhamos com as medidas reais \mathbb{P}_1 e \mathbb{P}_2 . Como estamos abordando o problema para a taxa de juros *spot*, admitiremos o prêmio de risco igual a zero. Mais tarde, quando estudarmos a estrutura a termo de taxa de juros, veremos que esta hipótese não é verdadeira para maturidades diferentes de um dia.

Momentos do processo estocástico do *Spread*

Partindo da solução para o modelo OU em (3.4) e da normalidade da variável aleatória que descreve o modelo, temos

$$E[r_t|r_0] = \mu + (r_0 - \mu)e^{-\eta t}. \quad (3.5)$$

Dado que a esperança do último termo de (3.4) é igual a zero.

Para o segundo momento escrevemos,

$$\begin{aligned}
 E \left[(r(t))^2 \right] &= E \left[\left(\int_0^t e^{-\eta(t-s)} \sigma dW(s) \right)^2 \right] = \\
 &= \int_0^t \left(e^{-\eta(t-s)} \sigma \right)^2 ds = \\
 &= \int_0^t e^{-2\eta(t-s)} \sigma^2 ds = \\
 &= \frac{\sigma^2}{2\eta} (1 - e^{-2\eta t}).
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Finalmente,

$$\text{VAR}[r_t | r_0] = \frac{\sigma^2}{2\eta} (1 - e^{-2\eta t}). \tag{3.7}$$

3.2.1 Expectativa da meta Selic

Como já foi dito no texto, não estimaremos as probabilidades dos cenários para reuniões do COPOM entre as datas t e T . Dentro das hipóteses discutidas ao longo deste capítulo desenvolveremos as relações da meta com a estrutura a termo de taxas de juros (ETTJ) como função das probabilidades e dos cenários. Deixaremos as mesmas como informação de entrada no modelo.

Faremos algumas definições antes de tratar a expectativa da meta Selic

- N número de reuniões entre t_0 e t ;
- l_j é número de cenários para a j -ésima reunião: $j = 1, 2, \dots, N$;
- $c_{i,j}$ é o i -ésimo cenário correspondente à j -ésima reunião;
- $\mathbb{P}(c_{ij})$ é a probabilidade associada ao i -ésimo cenário na j -ésima reunião;
- $H(c_{ij})$ é o valor da meta Selic na reunião j avaliada no i -ésimo cenário;

Uma observação importante é que $\{c_{ij}\}$ não formam uma matriz, pois o número de cenários pode variar a cada reunião. Enfatizamos que os cenários são, além de discretos e múltiplos de 25bps, finitos. Adotaremos essa hipótese (que é bastante razoável) - supor que as decisões do COPOM variem em um espectro finito.

Assim, a expectativa da meta Selic em função dos cenários plausível e das probabilidades pode ser calculada de forma explícita:

$$\begin{aligned} E[R_m | \mathcal{F}_{t_0}] &= \\ &= \sum_{j=1}^N \left[\sum_{i=0}^{l_j} \ln \left[1 + H(c_{ij}) + \sum_{k=1, k \neq j}^N H(c_{jk}) \right] \mathbb{P}(c_{ij}) \prod_{k=1, k \neq j}^N \mathbb{P}(c_{jk}) \right] + \\ &+ \ln [1 + R_m(t_0)]. \end{aligned}$$

3.3 Estimação dos parâmetros para o *Spread*

O método adotado por nós para estimação dos parâmetros do modelo de reversão à média que descreve o *spread* entre a meta Selic e a taxa DI-*overnight* foi o estimador de máxima verossimilhança. Este será o tópico da Seção 3.3.1. Maiores detalhes sobre o método podem ser encontrados em Gouriéroux and Jasiak (2001).

3.3.1 Estimadores de máxima verossimilhança

Os estimadores baseados na máxima verossimilhança são métodos estatísticos muito utilizados para calibragem de modelos descritos por variáveis aleatórias e, em particular, os processos estocásticos. Em geral, dado um modelo estocástico e um conjunto fixo de dados, o método da máxima verossimilhança vai selecionar os valores dos parâmetros que produzem a distribuição mais provável que resultaria nos dados observados. Ou seja, os parâmetros que maximizam a função de verossimilhança. Estas estimativas de probabilidades máximas convergem para as soluções de otimização tratando-se de distribuições normais, T e muitas outras. Porém,

em alguns casos complexos podem ocorrer problemas com a probabilidade dos estimadores e, eventualmente, essas probabilidades podem não existir.

No nosso caso de interesse, modelo OU, os estimadores de máxima verossimilhança não trarão problemas de convergência, portanto não precisamos nos preocupar por hora.

Considere uma amostra de n realizações da variável aleatória r_s . Seja \hat{r}_s^i os valores das realizações para $i = 1, 2, \dots, n$. Segundo Gouriéroux and Jasiak (2001), os estimadores de máxima verossimilhança, para o modelo OU, podem aproximados por funções analíticas como segue. Primeiro definimos

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{r}_s^i. \quad (3.8)$$

Seja $\rho = \exp(-\eta)$, então $\hat{\rho}$ é dado por

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{r}_s^i - \hat{\mu})(\hat{r}_s^{i-1} - \hat{\mu})}{\sum_{i=1}^n (\hat{r}_s^i - \hat{\mu})^2}. \quad (3.9)$$

Os estimadores para os resíduos, ϵ_i , ficam

$$\hat{\epsilon}_i = \hat{r}_s^i - \hat{\mu} - \hat{\rho}(\hat{r}_s^{i-1} - \hat{\mu}). \quad (3.10)$$

Seja $\hat{\nu}$ da forma

$$\hat{\nu}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\epsilon}_i^2. \quad (3.11)$$

Por fim temos $\hat{\sigma}$ e $\hat{\eta}$ escritos de forma analítica

$$\hat{\eta} = -\ln(\hat{\rho}) \quad (3.12)$$

e

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{-2 \ln(\hat{\rho})}{1 - \hat{\rho}}} \hat{\nu}. \quad (3.13)$$

3.3.2 Dados para estimação do modelo OU que descreve o *spread*

Os dados utilizados para ajustar os parâmetros do modelo para o *spread*, r_s , foram as cotações da taxa DI-*overnight*, liberados diariamente pela CETIP⁵, e a meta do COPOM fornecida pelo BC⁶.

O período escolhido para o ajuste do modelo foi de janeiro de 2004 a outubro de 2010. Este período é o maior disponível sem mudanças substanciais de regime nas séries históricas da taxa DI-*overnight*. Desde 2004, a autoridade monetária do Brasil tem adotado medidas muito semelhantes relacionadas ao controle da taxa de curto prazo, o que nos conduz à constatação de coerência na amostra. O número de dados é de 1786 observações.

Nas Figuras 3.1 e 3.2 podemos visualizar a evolução da Selic e da taxa DI-*overnight*. Note-mos que há uma tendência de redução dos juros de curto prazo no período escolhido, embora existam ciclos de alta de menor magnitude. Estas amostras podem ser utilizadas para estimar as probabilidades em cada reunião, porém, como foi dito no início deste capítulo, não o faremos neste trabalho.

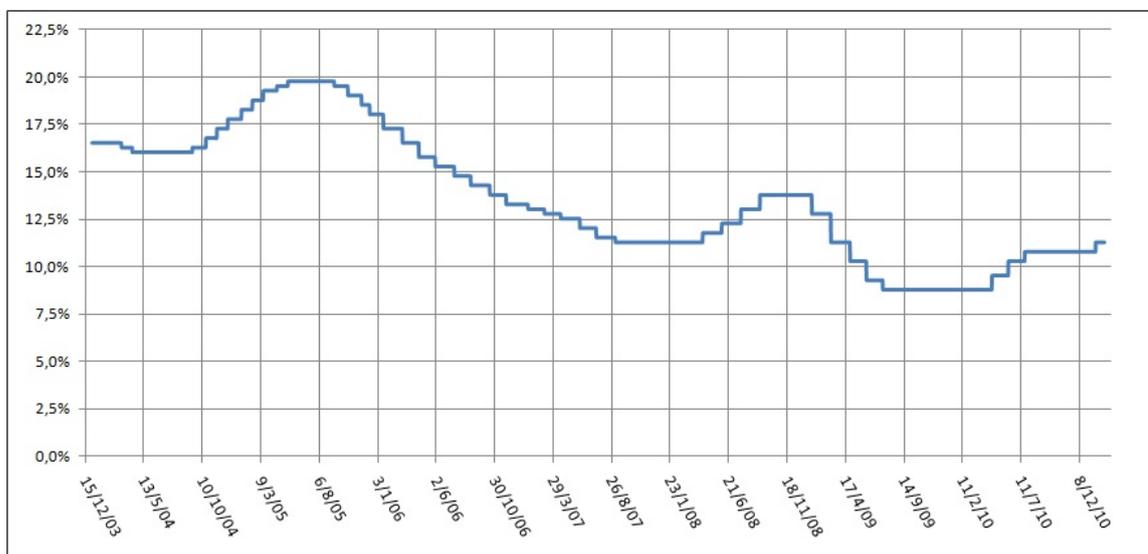


Figura 3.1: Meta Selic

⁵Maiores informações podem ser encontradas no website: <http://www.cetip.com.br/>

⁶Metas em cada decisão do COPOM, disponíveis em: <http://www.bcb.gov.br/Pec/Copom/Port/taxaSelic.asp#notas>

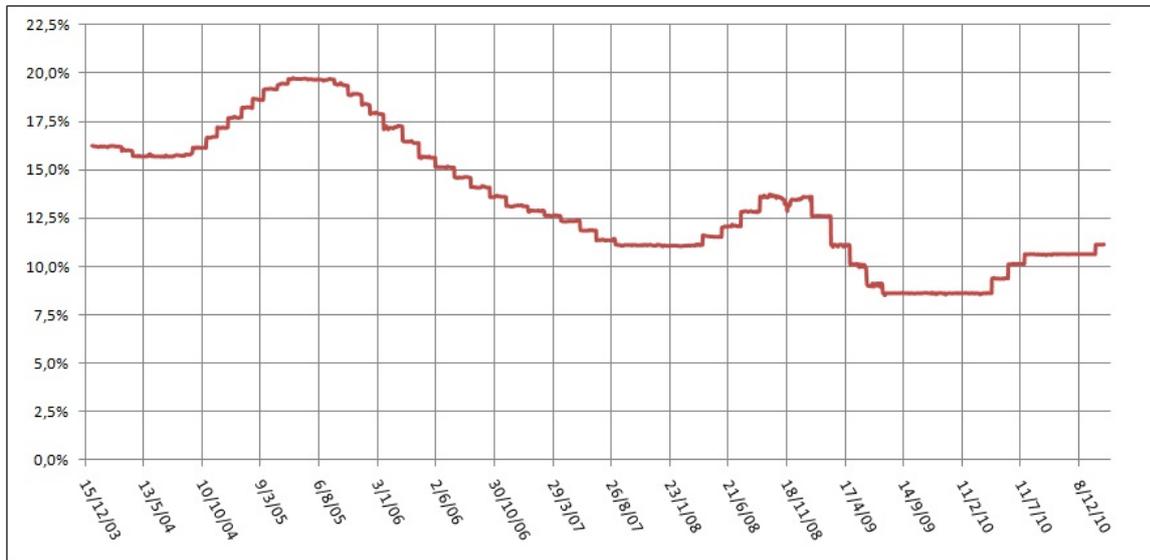


Figura 3.2: Taxa DI-overnight

Achamos interessante exibir o evolução do *Spread* no tempo. A variável aleatório cujas realizações encontram-se na Figura 3.3, é $r_s(t)$, ou seja, a taxa do *spread* anualizada, convertida para taxa contínua com média zero.

3.3.3 Resultados das estimações

Os resultados das estimações dos parâmetros pelo método da máxima verossimilhança, descritos anteriormente, foram:

$$\hat{\mu} = 0.125\%, \hat{\sigma} = 0.0299\% \text{ e } \hat{\eta} = 0.055.$$

O período médio para o processo reverter à média é feito sobre o número de dados e o período da amostra. Aqui, a velocidade de reversão foi igual à 99 dias úteis ou 0.39 anos. Este resultado é muito coerente com os períodos dos pequenos ciclos que ocorrem com o *spread*, como podem

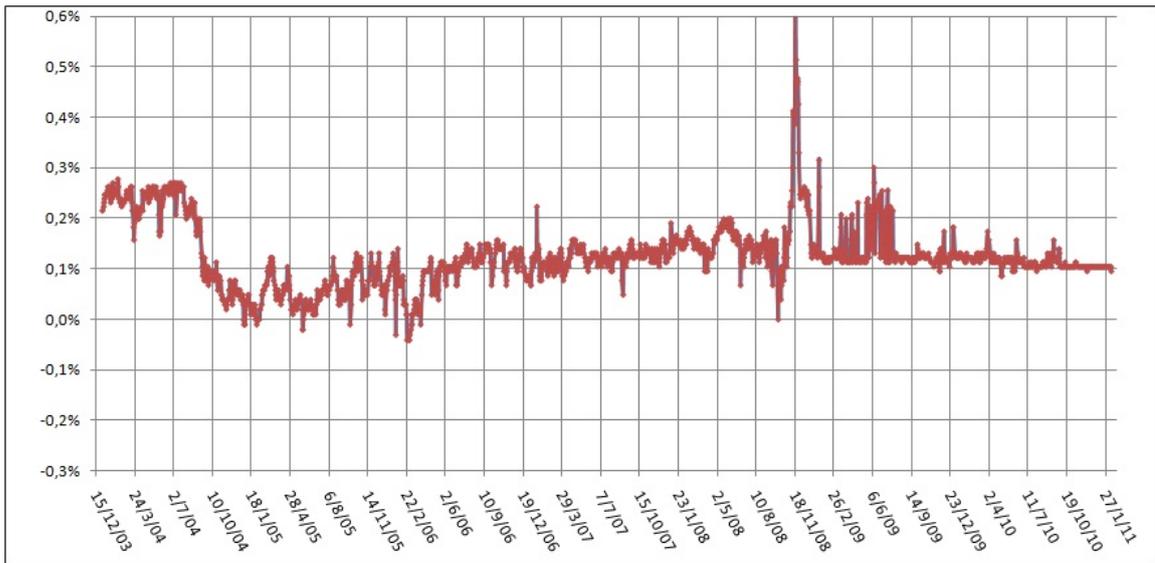


Figura 3.3: Spread

ser visto na Figura 3.3.

Backtesting do modelo OU que descreve o *spread*

Para a calibragem, fizemos uso da previsão do modelo em 1 dia com a esperança calculada em (3.5). Assim, uma vez que estimamos os parâmetros, foi natural desenvolver a comparação com outros métodos. A primeira comparação é feita com os dados em $d - 1$. Ou seja, verificar se a capacidade de previsão do modelo supera a hipótese de realizações em d serem as mesmas de $d - 1$. Esse teste foi feito por meio do mínimos quadrados sobre os erros. O resultado do modelo OU é 30% mais previsivo do que o método citado acima.

Na Figura 3.4 é possível visualizar a capacidade de ajuste do modelo

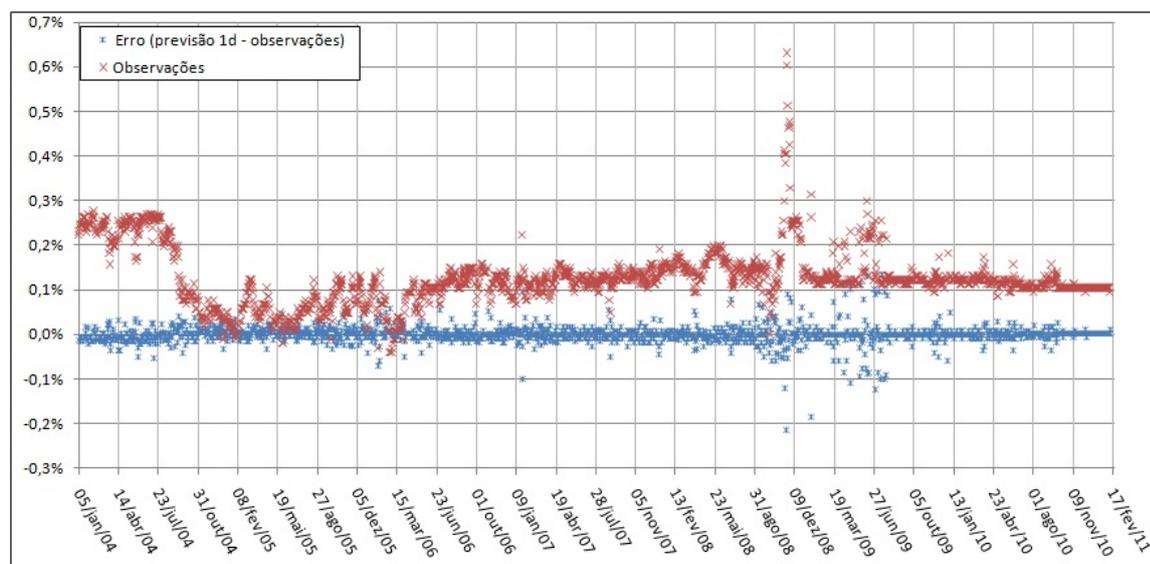


Figura 3.4: Erro da previsão 1d x observações

3.4 Comparação com método da interpolação linear

Desenvolvemos uma comparação entre o modelo proposto neste capítulo e o método da interpolação linear para as expectativas da taxa de curto prazo DI-*overnight* ao longo do tempo. A interpolação linear é extensamente utilizada no mercado; as taxas interpoladas são extraídas dos futuros de DI mais líquidos negociados no mercado. Em geral, fatores como: prêmio de risco, prêmio de liquidez e a segmentação do mercado não são levados em conta na interpolação, embora possam influenciar nas taxas negociadas dos futuros de DI.

A comparação será feita para uma data específica; deste modo, será possível visualizar as diferenças nos métodos para todo o horizonte em estudo e não apenas para determinados vértices. A data escolhida não contém nenhuma particularidade com relação às demais. Sendo assim, a comparação dá uma idéia bastante clara das diferenças desses dois métodos na prática.

É importante salientar que não é objetivo deste trabalho estimar as probabilidades das reuniões do COPOM. Usaremos um exemplo baseado nas expectativas do mercado⁷ para os valores esperados das reuniões.

⁷As expectativas aqui apresentadas foram extraídas dos futuros de DI negociados no dia 13-out-2010

Datas das reuniões	Variações na Meta (bps)
20-out-10	0
8-dez-10	0
19-jan-11	25
2-mar-11	0
20-abr-11	25
8-jun-11	75
31-ago-11	25
19-out-11	0
30-nov-11	0
18-jan-12	0
7-mar-12	0
18-abr-12	0
30-mai-12	0
11-jul-12	0
29-ago-12	-50
10-out-12	-25

Tabela 3.1: Expectativas do mercado para variações da Meta Selic em 13-out-2010

A Tabela 3.1 contém as expectativas do mercado para as reuniões do COPOM no horizonte de dois anos. Assim, para um tempo, $t > 0$, a expectativa para a taxa DI-*overnight* pode ser calculada isolando r_{DI} na Equação (3.2) e tomando o valor esperado. A taxa DI-*overnight*, segundo a sensibilidade do mercado no dia 13-outubro-2010, pode ser vista na Figura 3.5 para horizonte de dois anos.

O método da interpolação linear é aplicado diretamente nas taxas dos Futuros de DI mais líquidos, que consiste nas taxas acumuladas da data inicial até o vencimento do contrato futuro. Assim, para comparar o modelo proposto com este método é necessário calcular a taxas acumuladas em cada dia do horizonte em estudo. Na Figura 3.6 apresentamos os dois métodos. Fica bastante evidente que a interpolação pode conduzir aos erros significativos sobre as expectativas do mercado, independente das estimações para a meta Selic.

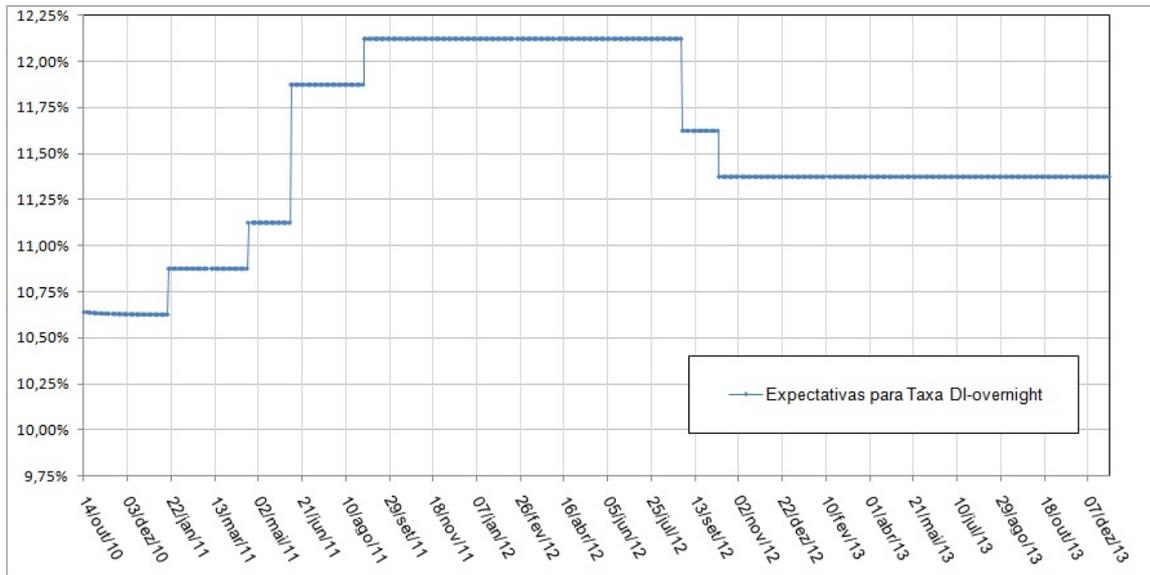


Figura 3.5: Expectativas da taxa DI-overnight(13-out-2010)

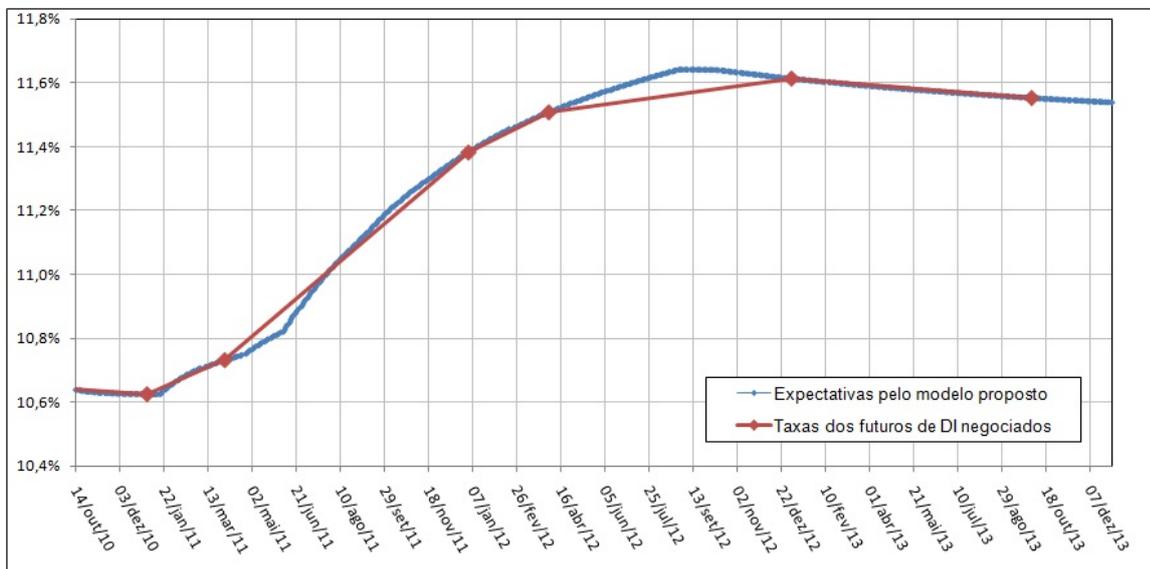


Figura 3.6: Expectativas da taxa DI-overnight acumulado (13-out-2010)

Capítulo 4

O Modelo HJM para a Taxa *Forward*

No presente capítulo desenvolvemos o modelo HJM segundo Shreve (2004) e Brigo and Mercurio (2001) comentando suas vantagens e limitações. Apresentaremos também dois métodos de calibragem utilizados na literatura.

4.1 Introdução

Historicamente, a primeira alternativa importante para a parte curta (*short-rate*) da curva de juros foi proposta por Ho and Lee (1986), modelando a evolução da curva de taxa baseada nas propriedades da árvore binomial. Suas intuições básicas foram trabalhadas em um modelo contínuo por Heath et al. (1992). Mais tarde, os mesmos desenvolveram um ambiente simples para modelar a dinâmica de diversas curvas de juros partindo de princípios de não arbitragem e relações entre taxas *forward* – *spot*. A primeira hipótese desse modelo parte da Equação abaixo para a taxa de curto prazo:

$$dr_t = \theta dt + \sigma dW_t.$$

Este pode ser considerado um caso bem particular dos modelos de Hull and White (1990) com coeficientes constantes θ e σ . Neste caso, o preço do *bond* que paga uma unidade no vencimento

pode ser escrito como:

$$B(t, T) = \exp \left[\frac{\sigma^2}{6}(T-t)^3 - \frac{\theta}{2}(T-t)^2 - (T-t)r_t \right] \quad t \in [0, T].$$

A taxa *forward* instantânea toma a forma,

$$f(t, T) = -\frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T} = -\frac{\sigma^2}{2}(T-t)^2 + \theta(T-t) + r_t.$$

Diferenciando e substituindo na dinâmica da taxa de curto prazo fica,

$$df(t, T) = (\sigma^2(T-t) - \theta)dt + \theta dt + \sigma dW_t$$

ou melhor escrevendo

$$df(t, T) = \sigma^2(T-t)dt + \sigma dW_t.$$

Notemos que o termo de arraste, $\sigma^2(T-t)$, na dinâmica de f , é determinado pelo parâmetro σ . Uma direção desejada para os modelos instantâneo de taxas *forward* é não deixar o termo de arraste indeterminado, ou seja, encontrar um processo para que o termo de arraste seja completamente determinado pela escolha do coeficiente de volatilidade.

4.2 Taxa *forward*

Vamos fixar o horizonte de tempo $\bar{T} = 50$ anos. Para nossos propósitos, todos os *bonds* citados serão de maturidades menores ou iguais a \bar{T} . Teremos as relações, $0 \leq t < T \leq \bar{T}$ e $B(t, T)$ é o preço do *bond zero-cupom* de maturidade T no tempo t .

Vamos agora definir a *taxa forward* no tempo t por um investimento no tempo T como sendo:

$$\begin{aligned} f(t, T) &= -\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log B(t, T + \delta) - \log B(t, T)}{\delta} \\ &= -\frac{\partial \log B(t, T)}{\partial T}. \end{aligned}$$

Dessa forma, se nós conhecemos $f(t, T)$ para todos os valores de $0 \leq t < T \leq \bar{T}$, então podemos precificar $B(t, T)$ sendo, $t \in [0, T]$ e conseqüentemente temos a fórmula:

$$\int_t^T f(t, v)dv = -\log[B(t, T) - B(t, t)] = -\log B(t, T),$$

onde $B(T, T) = 1$. Além disso,

$$B(t, T) = \exp \left[- \int_t^T f(t, v)dv \right], \quad 0 \leq t < T \leq \bar{T}.$$

Com a equação acima construímos a relação entre preço do *bond* e taxa *forward*. Para uso futuro, definamos a *taxa de juros* no tempo t por,

$$R(t) = f(t, t).$$

4.3 A dinâmica da taxa *forward*

O modelo HJM parte apenas das hipóteses que existam funções $\alpha(t, T)$ e $\sigma(t, T)$, possivelmente estocásticas, \mathcal{F}_t -adaptados, integráveis e cuja integral do quadrado seja finita. Assim a dinâmica da taxa *forward* fica,

$$df(t, T) = \alpha(t, T)dt + \sigma(t, T)dW_t, \quad 0 \leq t < T. \quad (4.1)$$

onde W_t é um movimento Browniano geométrico com relação à medida \mathbb{P} . Nesta seção, sempre consideraremos a diferencial "d" com relação à variável t , sendo que T será sempre um parâmetro fixo.

Como vimos anteriormente, a taxa *forward* está relacionada com os preços dos *bonds*. Portanto, vamos desenvolver a dinâmica apresentada em (4.1) para os preços desses contratos.

Fazendo uso da dinâmica da taxa *forward* e substituindo,

$$d\left(-\int_t^T f(t, v)dv\right) = R(t) - \int_t^T [\alpha(t, v)dt + \sigma(t, v)dW_t]dv.$$

E com (4.1) teremos

$$d\left(-\int_t^T f(t, v)dv\right) = f(t, t) - \int_t^T [\alpha(t, v)dt + \sigma(t, v)dW_t]dv.$$

Mudando a ordem da integração,

$$\begin{aligned} \int_t^T \alpha(t, v)dt dv &= \int_t^T \alpha(t, v)dv dt = \alpha^*(t, T)dt \\ \int_t^T \sigma(t, v)dW_t dv &= \int_t^T \sigma(t, v)dv dW_t = \sigma^*(t, T)dW_t \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde

$$\alpha^*(t, T) = \int_t^T \alpha(t, v)dv \quad \text{e} \quad \sigma^*(t, T) = \int_t^T \sigma(t, v)dv.$$

Portanto temos:

$$d\left(-\int_t^T f(t, v)dv\right) = f(t, t)dt - \alpha^*(t, T)dt - \sigma^*(t, T)dW_t.$$

Denotando por g a função $x \mapsto e^x$, o preço do *bond* toma a forma: $B(t, T) = g\left(-\int_t^T f(t, v)dv\right)$.

Aplicando a fórmula de Itô,

$$\begin{aligned} dB(t, T) &= g'(x)dx + \frac{1}{2}g''(x) \langle dx, dx \rangle = \\ &= B(t, T)[R(t)dt - \alpha^*(t, T)dt - \sigma^*(t, T)dW_t] + \frac{1}{2}B(t, T)(\sigma(t, T))^2 dt = \\ &= B(t, T) \left[R(t) - \alpha^*(t, T) + \frac{1}{2}(\sigma^*(t, T))^2 \right] dt - \sigma^*(t, T)B(t, T)dW_t. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$dB(t, T) = B(t, T) \left[R(t) - \alpha^*(t, T) + \frac{1}{2}(\sigma^*(t, T))^2 \right] dt - \sigma^*(t, T)B(t, T)dW_t. \quad (4.3)$$

4.4 Condição de não arbitragem

O Modelo *HJM* tem o *bond zero-cupom* em cada tempo t com maturidade $T \in [0, \bar{T}]$. Precisamos garantir que não haverá oportunidade de arbitragem para precificação desses contratos. Vamos utilizar o Teorema Fundamental da Precificação dos ativos para desenvolver nossas relações. Do Teorema, temos que

$$D(t)B(t, T) = \exp \left[- \int_0^t R(u)du \right] B(t, T)$$

é um martingal e $0 \leq t < T$. Portanto,

$$d(D(t)B(t, T)) = -R(t)D(t)B(t, T)dt + D(t)dB(t, T) = \quad (4.4)$$

$$= D(t)B(t, T) \left[\left(-\alpha^*(t, T) + \frac{1}{2}(\sigma^*(t, T))^2 \right) dt - \sigma^*(t, T)dW_t \right]. \quad (4.5)$$

Gostaríamos de escrever o termo entre colchetes como

$$-\sigma^*(t, T)[\Theta(t)dt + dW_t].$$

Usando o Teorema de Girsanov para mudar para a medida neutra ao risco,

$$\tilde{W}_t = \int_t^T \Theta(u)du + W_t.$$

Reescrevemos a Equação (4.5) como,

$$d(D(t)B(t, T)) = -D(t)B(t, T)\sigma^*(t, T)d\tilde{W}_t.$$

Assim, deve existir um processo $\Theta(t)$ que satisfaça

$$-\alpha^*(t, T) + \frac{1}{2}(\sigma^*(t, T))^2 = -\sigma^*(t, T)\Theta(t). \quad (4.6)$$

Recorrendo às definições de α^* e σ^* ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha^*(t, T)}{\partial T} &= \alpha(t, T), \\ \frac{\partial \sigma^*(t, T)}{\partial T} &= \sigma(t, T). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Derivando a Equação (4.6) com relação à T obtemos

$$\alpha(t, T) = \sigma(t, T) [\alpha^*(t, T) + \Theta(t)]. \quad (4.8)$$

Teorema 4.1 (Condições de não Arbitragem de Heath-Jarrow-Morton) *Um modelo de estrutura a termo para os preços dos bonds zero-cupom cujas maturidades estejam em $[0, \bar{T}]$ e tenha estocasticidade descrita por um movimento Browniano será livre de arbitragem se existir um processo $\Theta(t)$ tal que (4.8) valha para todo $0 \leq t < T \leq \bar{T}$, onde $\alpha(t, T)$ e $\sigma(t, T)$ são os termos de arraste e difusão, respectivamente, da taxa forward. Com,*

$$\sigma^*(t, T) = \int_t^T \sigma(t, v) dv \quad (4.9)$$

e $\Theta(t)$ na medida neutra ao risco.

4.5 HJM na medida neutra ao risco

Vamos atentar ao fato de $d\left(\frac{1}{D(t)}\right) = \frac{R(t)}{D(t)}$. A dinâmica do preço do *bond* fica

$$\begin{aligned} dB(t, T) &= d\left(\frac{1}{D(t)}D(t)B(t, T)\right) = \\ &= \frac{R(t)}{D(t)}D(t)B(t, T)dt - \sigma^*(t, T)\frac{1}{D(t)}D(t)B(t, T)d\tilde{W}_t \\ &= R(t)B(t, T)dt - \sigma^*(t, T)B(t, T)d\tilde{W}_t. \end{aligned}$$

Considerando a dinâmica de f e a condição de não arbitragem do modelo HJM, vamos ao teorema:

Teorema 4.2 (Evolução da Estrutura a Termo na medida neutra ao risco) *Em um modelo para a estrutura a termo satisfazendo a condição de não arbitragem de HJM do Teorema (4.1), a taxa forward evolui de acordo com a Equação,*

$$df(t, T) = \sigma(t, T)\sigma^*(t, T)dt + \sigma(t, T)d\tilde{W}_t, \quad (4.10)$$

$$dB(t, T) = R(t)B(t, T)dt - \sigma^*(t, T)B(t, T)d\tilde{W}_t, \quad (4.11)$$

onde \tilde{W}_t é um movimento Browniano na medida neutra ao risco \mathbb{Q}_t . $\sigma^*(t) = \int_t^T \sigma(t, v)dv$ e $R(t) = f(t, t)$ é a taxa de juros no tempo t . O preço descontado do *bond* satisfaz,

$$d(D(t)B(t, T)) = -\sigma^*(t, T)D(t)B(t, T)d\tilde{W}_t, \quad (4.12)$$

e $D(t) = e^{-\int_0^t R(u)du}$ é o processo de desconto. A solução para a Equação diferencial estocástica

(4.11) é,

$$\begin{aligned}
 B(t, T) &= \\
 &= B(0, T) \exp \left[\int_0^t R(u) du - \int_0^t \sigma^*(u, T) d\tilde{W}_t - \frac{1}{2} \int_0^t (\sigma^*(u, T))^2 du \right] = \\
 &= \frac{B(0, T)}{D(t)} \exp \left[- \int_0^t \sigma^*(u, T) d\tilde{W}_t - \frac{1}{2} \int_0^t (\sigma^*(u, T))^2 du \right] \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

4.6 Como deve ser a função de volatilidade?

Vimos no Teorema 4.2 que para um modelo livre de arbitragem para a estrutura a termo, as taxas *forward* devem possuir a dinâmica da Equação (4.10),

$$df(t, T) = \sigma(t, T) \sigma^*(t, T) dt + \sigma(t, T) d\tilde{W}_t.$$

Heath et al. (1992) mostram que para a obtenção da fórmula de *Black* a partir da Equação acima é necessário que, $\sigma(t, T) = \sigma f(t, T)$, onde σ é uma constante. Dessa forma teríamos:

$$\sigma^*(t, T) = \int_t^T \sigma(t, v) dv = \sigma \int_t^T f(t, v) dv, \quad (4.14)$$

e o termo em dt na Equação (4.10) seria

$$\sigma^2 f(t, T) \int_t^T f(t, v) dv. \quad (4.15)$$

No entanto, os próprios autores concluíram que esta formulação conduz ao problema da taxa *forward* explodir quando T é próximo de t .

Podemos observar que (4.15) pode ser aproximado por $(\sigma^2(T-t)f^2(t, T))$ e o quadrado da taxa *forward* causa um problema. O termo do arraste da Equação (4.10) satisfaz a Equação

diferencial ordinário determinística

$$f'(t, T) = \sigma^2 f^2(t, T), \quad (4.16)$$

para a qual, dado uma condição inicial positiva, $f(0)$, a solução é

$$f(t, T) = \frac{\sigma^2 f^2(0)}{1 - \sigma^2 f(0)t}. \quad (4.17)$$

A função $f(t)$ explode quando o tempo $t = \frac{1}{\sigma^2 f(0)}$. E portanto, este modelo apresenta problemas.

4.7 Calibragem utilizada para futuros de *commodities*

Neste trabalho pretendemos construir a estrutura a termo de taxas de juros dos certificados de depósitos interbancários (DI). Não se trata da estrutura a termo de taxas de juros extraída dos títulos públicos, embora no mercado brasileiro ambas tenham o comportamento muito similar. Suporemos que a volatilidade da taxa *forward* é constante. Portanto, precisamos apenas estimar o parâmetro σ . Mostraremos uma maneira utilizada para estimar a volatilidade para os contratos de futuro de *commodity* e, posteriormente, aplicaremos as mesmas técnicas ao modelo proposto neste capítulo. Procedendo analogamente a Lamberton and Lapeyre (1996), encontraremos uma fórmula direta de determinar $\hat{\sigma}$ a partir dos preços dos próprios contratos de DI futuro que serão precisamente definidos no Capítulo 6.

Aqui, $\pi(t, T)$ será tratado com o preço dos *bonds* como mostra a Equação (4.10), depois o interpretaremos com o *PU* dos contratos futuros de *commodity*. Assim, a primeira relação que obtemos de (4.10) é:

$$\frac{d\pi(t, T)}{\pi(t, T)} = f(t, t)dt + \sigma(t, T)dW_t$$

Aplicando a fórmula de Itô para o logaritmo de $\pi(t, T)$, temos

$$\pi(t, T) = \pi(0, T) \exp \left(\int_0^t \left(f(u, u) - \frac{1}{2}(\sigma(u, T))^2 \right) du + \int_0^t \sigma(u, T)dW_u \right).$$

Lembrando que $\pi(t, t) = 1$ e calculado $\frac{d\pi(t, T)}{\pi(t, T)}$, obteremos :

$$\pi(t, T) = \frac{\pi(0, T)}{\pi(0, t)} \exp \left(-\frac{\sigma^2}{2} tT(T-t) - \int_0^t \sigma(T-u) dW_u \right) \quad (4.18)$$

para $t \in [0, T]$. Suponhamos que $T_1 < T_2$. Daqui vem

$$\frac{\pi(t, T_2)}{\pi(t, T_1)} = \frac{\pi(0, T_2)}{\pi(0, T_1)} \exp \left(-\frac{\sigma^2}{2} t(T_2(T_2-t)) - T_1(T_1-t) + \sigma(T_2 - T_1)W_t \right).$$

Faremos uma hipótese adicional que dispomos dos preços dos contratos de DI futuro no tempos $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ e com maturidades em T_1 e T_2 , com $T_1 < T_2$. Logo, para $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Podemos escrever

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{\pi(t_{i+1}, T_1) \pi(t_i, T_2)}{\pi(t_{i+1}, T_2) \pi(t_i, T_1)} \right) &= \frac{\sigma^2}{2} (T_2 - T_1) ((T_1 + T_2)(t_{i+1} - t_i) - t_{i+1}^2 + t_i^2) \\ &+ \sigma(T_2 - T_1)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}). \end{aligned} \quad (4.19)$$

de onde concluímos que,

$$\begin{aligned} B_i &= \frac{\ln \left(\frac{\pi(t_{i+1}, T_1) \pi(t_i, T_2)}{\pi(t_{i+1}, T_2) \pi(t_i, T_1)} \right)}{(T_2 - T_1)\sqrt{t_{i+1} - t_i}} \sim N(\sigma^2 a_i, \sigma^2) \\ &e \\ a_i &= \frac{(T_1 + T_2)(t_{i+1} - t_i) - t_{i+1}^2 + t_i^2}{2\sqrt{t_{i+1} - t_i}}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Devido ao fato dos incrementos do Browniano serem disjuntos, temos que B_0, B_1, \dots, B_{n-1} , são independentes. Por último, maximizando o logaritmo da função de verossimilhança, sendo b_0, b_1, \dots, b_{n-1} as realizações de B_0, B_1, \dots, B_{n-1} , teremos que $L(\sigma) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que,

$$\ln(L(\sigma)) = \frac{n}{2} \ln(\pi) - n \ln(\sigma) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(b_i - \sigma^2 a_i)^2}{2\sigma^2}$$

e portanto,

$$\hat{\sigma} = \frac{-n + \sqrt{n^2 + 4 \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i^2 \right) \left(\sum_{i=0}^{n-1} b_i^2 \right)}}{2 \sum_{i=0}^{n-1} a_i^2}. \quad (4.21)$$

4.8 Calibragem utilizada para futuros de taxa

Seguindo a hipótese da volatilidade da taxa *forward* constante e observando a Equação (4.17), verificamos que

$$f(t, T) \sim N(A(t), \sigma^2 t),$$

onde $A(t) = f(0, T) + \sigma^2 t (T - \frac{t}{2})$.

Para desenvolver essa solução, suporemos que a taxa *forward*, f , é conhecida nos tempos t_1, t_2, \dots, t_n em cada uma das maturidades T_1, T_2, \dots, T_m sendo n e $m \in \mathbb{N}$. Desta forma, podemos estimar $\hat{\sigma}$ estudando os valores que maximizam a função de verossimilhança. Vejamos como este cálculo pode ser simples.

Considere uma variável aleatória y com distribuição normal, média $\bar{\mu}$ e variância $\bar{\sigma}^2$.

$$y \sim N(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2).$$

A função de densidade de probabilidade é

$$f(y_{t_k}, \bar{\mu}, \bar{\sigma}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{\sigma}^2}} \exp\left(\frac{-1}{2\bar{\sigma}^2}(y_{t_k} - \bar{\mu})^2\right)$$

e a função de densidade conjunta

$$\prod_{t_k=1}^T f(y_{t_k}, \bar{\mu}, \bar{\sigma}^2).$$

Logo, a função de verossilhança é

$$L = \prod_{t_k=1}^T f(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2, y_{t_k})$$

e o logaritmo natural de L é,

$$\begin{aligned} \ln L(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2, y_{t_k}) &= \prod_{t_k=1}^T \ln f(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2, y_{t_k}) = \\ &= \sum_{t_k=1}^T \left(-\ln \sqrt{2\pi\bar{\sigma}^2} - \frac{1}{2\bar{\sigma}^2} \sum_{t_k=1}^T y_{t_k} - \bar{\mu}^2 \right) \end{aligned}$$

Assim,

$$\ln L = -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{T}{2} \ln(\bar{\sigma}) - \frac{1}{2\bar{\sigma}^2} \sum_{t_k=1}^T (y_{t_k} - \bar{\mu})^2. \quad (4.22)$$

A Equação (4.22) é a forma mais usual de apresentação do $\ln L$. Vamos agora encontrar os estimadores da máxima verossimilhança da variância, isto é, vamos encontrar um valor para $\bar{\sigma}$ que maximiza a Equação (4.22).

Derivando e igualando a zero obtemos,

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \bar{\sigma}^2} = -\frac{T}{2\bar{\sigma}^2} + \frac{1}{2(\bar{\sigma}^2)^2} \sum_{t_k=1}^T (y_{t_k} - \bar{\mu})^2 = 0 \quad (4.23)$$

que resolvendo leva à

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{T} \sum_{t_k=1}^T (y_{t_k} - \bar{\mu})^2. \quad (4.24)$$

Substituindo $\bar{\mu}$ por $(f(0, T) + \sigma^2 t(T - \frac{t}{2}))$ e $\bar{\sigma}^2$ por $\sigma^2 t$, ficamos com:

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{Tt} \sum_{t_k=1}^{t_n} f(t_k, T) - f(0, T) + \sigma^2 t \left(T - \frac{t}{2} \right)^2. \quad (4.25)$$

Portanto, para uma dada taxa *forward*, $f(t, T)$ nos tempos t_1, t_2, \dots, t_n , os parâmetros podem ser devidamente calibrados. Em nosso caso será necessário utilizar parte das idéias aqui desenvolvidos, porém teremos que considerar o modelo para a taxa de juros *spot*, abordado do Capítulo 3.

Capítulo 5

A Estrutura a Termo de Taxa de Juros

Segundo o modelo HJM a total determinação da ETTJ não é possível sem o conhecimento da função de volatilidade da taxa *forward* e da taxa de curto prazo. No presente capítulo conciliamos¹ o modelo de taxa *forward* para a parte longa da curva de juros desenvolvido no Capítulo 4 com um tratamento bastante preciso para a parte curta que leva em conta as decisões da autoridade monetário do país construído no capítulo 3. Aqui, trataremos dois casos particulares da função de volatilidade da taxa *forward*: supondo a mesma constante e de acordo com o modelo de Vasicek.

5.1 Volatilidade da taxa *forward* constante

Como vimos no capítulo anterior, segundo o Teorema 4.2, o modelo HJM nos dá a seguinte expressão para o preço do *bond*

$$B(t, T) = \frac{B(0, T)}{D(t)} \cdot \exp \left(- \int_0^t \sigma_2^*(u, T) d\tilde{W}_u - \frac{1}{2} \int_0^t (\sigma_2^*(u, T))^2 du \right)$$

¹Uma das premissas do modelo HJM consiste nas funções α e σ serem \mathbb{F}_t -adaptadas. O processo que descreve a meta Selic que é influenciado pelas decisões do COPOM que não satisfaz essa condição, porém, neste trabalho, não exploraremos este problema.

onde, $D(t) = \exp\left(-\int_0^t r(s)ds\right)$ e $\sigma_2^* = \int_t^T \sigma_2(t, v)dv$ sendo $\sigma_2(t, T)$ a função da volatilidade da taxa *forward*.

Para esta aplicação, escrevemos:

$$\sigma_2(t, T) = \sigma_2 = cte$$

e por consequência,

$$\sigma_2^*(t, T) = \sigma_2(T - t).$$

A integral não estocástica que aparece na expressão do preço do *bond* fica:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_0^T (\sigma_2^*(u, T))^2 du &= -\frac{1}{2} \int_0^T \sigma_2^2(T - u)^2 du \\ &= -\frac{1}{6} \sigma_2^2 T^3 \\ &= F(t, T). \end{aligned}$$

Vamos agora tratar a taxa de curto prazo, $r(t)$, que é necessária para a precificação do *bond*. No Capítulo 3 modelamos $r(t)$ da forma,

$$r(t) = r_{DI}(t) = r_m(t) - r_s(t).$$

Na Equação (3.1) escrevemos

$$r_m(t) = \ln \left(1 + H_0 \chi_{[t_0, \tau_1]} + \sum_{j=1}^N H_j \chi_{(\tau_j, \tau_{j+1}]}(t) \right). \quad (5.1)$$

Aqui, consideraremos $r_m(t)$ independente das variações do browniano \tilde{W}_t . A taxa do *spread* foi:

$$r_s(t) = r_s(0)e^{-\eta t} + \mu(1 - e^{-\eta t}) + \sigma_1 \int_0^t e^{-\eta(t-u)} d\tilde{W}_u \quad (5.2)$$

Chamaremos a parte determinística de $r_s(t)$ de $g(t)$. Ou seja:

$$g(t) = r_s(0)e^{-\eta t} + \mu(1 - e^{-\eta t}).$$

Para nós, o movimento Browniano da parcela estocástica do *spread* da taxa *spot* e o movimento Browniano da parcela estocástica da volatilidade da taxa de longo prazo serão os mesmos. Assim, o preço do *bond* fica da forma:

$$B(t, T) = B(0, T) \exp \left[F(t, T) - \int_t^T r_m(s) ds + \int_t^T g(s) ds \right] \cdot \exp \left[- \int_t^T \left(\sigma_1 \int_0^t e^{-\eta(s-u)} d\tilde{W}_u \right) ds - \int_0^t \sigma_2(u, T) d\tilde{W}_u \right].$$

A primeira exponencial da expressão acima é não estocástica no Browniano \tilde{W} e a segunda pode ser escrita em termos de apenas uma integral, como veremos a seguir. Definamos, antes disso, funções que nos ajudarão a escrever o preço do *bond* de forma concisa.

Seja,

$$\begin{aligned} L_1(t, T) &= \exp \left[- \int_0^t \left(\sigma_1 \int_0^s e^{-\eta(s-u)} d\tilde{W}_u \right) ds - \int_0^t \sigma_2(u, T) d\tilde{W}_u \right] \\ L_2(t, T) &= \exp \left[- \int_0^t r_m(s) ds \right] \\ L_3(t, T) &= \exp \left[\int_0^t g(s) ds \right] \\ L_4(t, T) &= \exp [F(t, T)]. \end{aligned} \tag{5.3}$$

e portanto,

$$B(t, T) = B(0, T) \prod_{i=1}^4 L_i.$$

5.1.1 A esperança do preço do *bond*

Vamos à esperança do preço do *bond* dado que há informação disponível até a data t_0 .

$$\begin{aligned} E(B(t, T)|\mathcal{F}_{t_0}) &= E\left(B(0, T) \prod_{i=1}^4 L_i \middle| \mathcal{F}_{t_0}\right) \\ &= B(0, T)L_3(t, T)L_4(t, T)E(L_2(t, T)|\mathcal{F}_{t_0})E(L_1(t, T)|\mathcal{F}_{t_0}). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Lembrando que estamos utilizando a hipótese de que r_m e \tilde{W}_t serem independentes. Agora, trabalharemos nas expressões de $L_3(t, T)$ e $L_4(t, T)$ e nos valores esperados das funções estocásticas $L_1(t, T)$ e $L_2(t, T)$. Começaremos por $L_4(t, T)$ que é obtido de maneira mais simplificada,

$$L_4(t, T) = \exp\left[-\frac{1}{2}\sigma_2^2 T^2 \left(\frac{4}{3}T - 1\right)\right]$$

$$\begin{aligned} L_3(t, T) &= \exp\left(r_s(0) \int_0^t e^{-\eta s} ds + \int_0^t \mu ds - \mu \int_0^t e^{-\eta s} ds\right) \\ &= \exp\left[\frac{1}{\eta} (e^{-\eta t} - 1) (r_s(0) + \mu) - \mu t\right]. \end{aligned}$$

No mesmo contexto das definições e notações do Capítulo 3 relacionadas à meta Selic, calcularemos o valor esperado de $L_2(t, T)$.

Seja N_t o número de reuniões até a data t . Usaremos as notações de $r_m(t)$ e $r_m(N_t)$ para a meta Selic no tempo t (ou a meta Selic posterior a N_t -ésima reunião). Para $t < t_0$,

$$r_m(t) = r_m(N_t) = \ln \left[1 + \sum_{i=0}^{N_0} h_i + \sum_{i=N_0+1}^{N_t} H_t \right]$$

aqui, $N_0 \leq N_t$. Facilmente calculamos que,

$$\int_0^t r_m(s) ds = \sum_{i=0}^{N_t} r_m(i) I(i+1, i)$$

sendo $I(i+1, i)$ o intervalo de tempo entre as reuniões i e $(i+1)$. Assim,

$$\begin{aligned} \int_0^t r_m(s) ds &= \sum_{j=0}^{N_0} \ln \left(1 + \sum_{i=1}^j h_i \right) I(j+1, j) + \\ &\quad \sum_{i=N_0+1}^{N_t} \ln \left(1 + \sum_{i=0}^{N_0} h_i + \sum_{i=N_0+1}^j H_i \right) I(j+1, j) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Para $i = 1, 2, \dots$

Estamos interessado no valor esperado da exponencial da expressão acima. Notemos que a primeira exponencial é não estocástica, pois se refere às reuniões do COPOM que já ocorreram. Para simplificar o desenvolvimento, definiremos,

$$\begin{aligned} l_{2,1} &= \sum_{j=0}^{N_0} \ln \left[1 + \sum_{i=0}^j h_i \right] I(j+1, j) \\ \Rightarrow \exp(l_{2,1}) &= \prod_{j=0}^{N_0} \left[\left(1 + \sum_{i=0}^j h_i \right)^{I(j+1, j)} \right] \end{aligned} \quad (5.6)$$

que é determinístico, e

$$\begin{aligned} l_{2,2} &= \sum_{j=N_0+1}^{N_t} \ln \left(1 + r_m(t_0) + \sum_{N_0}^j H_i \right) I(j+1, j) \\ \Rightarrow \exp(l_{2,2}) &= \prod_{j=N_0+1}^{N_t} \left[\left(1 + r_m(t_0) + \sum_{i=N_0+1}^j H_i \right)^{I(j+1, j)} \right] \end{aligned} \quad (5.7)$$

estocástico. Portanto,

$$E[L_2(t, T)] = \exp(l_{2,1}) E[\exp(l_{2,2})].$$

Dado que r_m assume um conjunto discreto de valores (por hipótese finito), a esperança acima sempre pode ser calculada como função dos cenários plausíveis e das probabilidades que são informações de entrada na abordagem aqui proposta. Por fim, desenvolveremos $L_1(t, T)$.

Vamos trabalhar na integral dupla que aparece na expressão de $L_1(t, T)$ na primeira Equação de (5.3),

$$-\sigma_1 \int_0^t \left(\int_0^s e^{-\eta(s-u)} d\tilde{W}_u \right) ds. \quad (5.8)$$

Seja, $f(W_s) = \int_0^s e^{\eta u} d\tilde{W}_u$. A integral de (5.8) fica

$$-\sigma_1 \int_0^t e^{-\eta s} f(W_s) ds. \quad (5.9)$$

Integrando por partes, (5.8) pode ser escrito como

$$\frac{\sigma_1}{\eta} \int_0^t \left(e^{-\eta(t-s)} - 1 \right) d\tilde{W}_s. \quad (5.10)$$

Substituindo em $L_1(t, T)$, como definido em (5.3), teremos

$$L_1(t, T) = \int_0^t \left(\frac{\sigma_1}{\eta} \left(e^{-\eta(t-s)} - 1 \right) - \sigma_2(T-t) \right) d\tilde{W}_s.$$

Definamos,

$$f(u) = \frac{\sigma_1}{\eta} \left(e^{-\eta(t-s)} - 1 \right) - \sigma_2(T-t),$$

segundo Shreve (2004)

$$E \left[\exp \left(\int_0^t f(u) d\tilde{W} \right) \right] = \exp \left(\frac{1}{2} \int_0^t f(u)^2 du \right).$$

substituindo e resolvendo teremos

$$E[L_1(t, T)|\mathcal{F}_{t_0}] = \exp \left[\frac{1}{2} \left(\frac{a_1}{2\eta} (e^{2\eta t} - 1) + \frac{a_2}{\eta} (e^{\eta t} - 1) \right) \right] \cdot \exp \left[\frac{1}{2} \left(\frac{a_3}{\eta} \left(te^{\eta t} - \frac{1}{\eta} e^{\eta t} + \frac{1}{\eta} \right) + \frac{a_4}{2} t^2 + \frac{a_5}{3} t^3 + a_6 t \right) \right]$$

onde,

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\sigma_1^2}{\eta^2} e^{-2\eta t} \\ a_2 &= \frac{2\sigma_1}{\eta} e^{-\eta t} \left(\frac{\sigma_1}{\eta} - \sigma_2 \right) \\ a_3 &= \frac{2\sigma_2\sigma_1}{\eta} e^{-\eta t} \\ a_4 &= -2\sigma_2 \left(\frac{\sigma_1}{\eta} + \sigma_2 T \right) \\ a_5 &= -\sigma_2^2 \\ a_6 &= \frac{\sigma_1^2}{\eta^2} + \sigma_2^2 T^2 + \frac{2\sigma_1\sigma_2}{\eta} T. \end{aligned}$$

5.2 Volatilidade Segundo o modelo de Vasicek

Nesta seção desenvolveremos os preço do *bond* similarmente ao que foi feito na seção anterior diferindo apenas na função da volatilidade da taxa *forward*.

Hipótese 5.1 (Volatilidade proveniente do modelo de Vasicek)

$$\sigma_2(t, T) = \sigma_2 e^{-b(T-t)} \tag{5.11}$$

aqui, σ_2 e b são constantes.

Segue que,

$$\begin{aligned}\sigma_2^*(t, T) &= \int_t^T \sigma_2(t, v) dv \\ &= -\frac{\sigma_2}{b} \left(e^{-b(T-t)} - 1 \right).\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2} \int_0^T (\sigma_2^*(u, T))^2 du &= \frac{\sigma_2^2}{b^2} \left[e^{-2bT} \int_0^T e^{2bu} du + \int_0^T du - 2e^{-bT} \int_0^T e^{bu} du \right] \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\sigma_2^2}{b^2} \left(-\frac{1}{2b} e^{-2bT} + \frac{1}{2b} + 2e^{-bT} + T - 2 \right) \\ &= G(t, T)\end{aligned}\tag{5.12}$$

O preço do *bond* fica

$$\begin{aligned}B(t, T) &= B(0, T) \exp \left[G(t, T) - \int_t^T r_m(s) ds + \int_t^T g(s) ds \right] \\ &\quad \exp \left[- \int_t^T \left(\sigma_1 \int_0^t e^{-\eta(s-u)} d\tilde{W}_u \right) ds - \int_0^t \sigma_2(u, T) d\tilde{W}_u \right]\end{aligned}$$

Como fizemos na seção anterior, definiremos:

$$\begin{aligned}M_1(t, T) &= \exp \left[- \int_0^t \left(\frac{\sigma_1}{\eta} e^{-\eta(t-u)} - \frac{\sigma_1}{\eta} + \frac{\sigma_2}{b} e^{-b(t-u)} - \frac{\sigma_2}{b} \right) d\tilde{W}_u \right] \\ M_2(t, T) &= \exp \left[- \int_0^t r_m(s) ds \right] \\ M_3(t, T) &= \exp \left[\int_0^t g(s) ds \right] \\ M_4(t, T) &= \exp [G(t, T)].\end{aligned}$$

(5.13)

Assim,

$$B(t, T) = B(0, T) \prod_{i=1}^4 M_i.$$

5.2.1 A esperança do preço do *bond* para volatilidade do modelo de Vasicek

$$\begin{aligned} E(B(t, T)|\mathcal{F}_{t_0}) &= E\left(B(0, T) \prod_{i=1}^4 M_i | \mathcal{F}_{t_0}\right) \\ &= B(0, T) L_3(t, T) M_4(t, T) E(M_2(t, T)|\mathcal{F}_{t_0}) E(M_1(t, T)|\mathcal{F}_{t_0}). \end{aligned}$$

Por construção,

$$\begin{aligned} M_2(t, T) &= L_2(t, T) \Rightarrow E[M_2(t, T)|\mathcal{F}_{t_0}] = E[L_2(t, T)|\mathcal{F}_{t_0}] \\ M_3(t, T) &= L_3(t, T) \end{aligned} \tag{5.14}$$

e

$$M_4 = \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{\sigma_2^2}{b^2} \left(-\frac{1}{2b} e^{-2bT} + \frac{1}{2b} + 2e^{-bT} + T - 2\right)\right].$$

Resta, assim, determinar $E[M_1(t, T)|\mathcal{F}_{t_0}]$.

Integrando por partes e agrupando teremos,

$$M_1(t, T) = \exp\left[\int_0^t \left(\frac{\sigma_1}{\eta} e^{-\eta(t-u)} - \frac{\sigma_1}{\eta} + \frac{\sigma_2}{b} e^{-b(T-u)} - \frac{\sigma_2}{b}\right) d\tilde{W}_u\right].$$

Seja,

$$f(u) = \frac{\sigma_1}{\eta} e^{-\eta(t-u)} - \frac{\sigma_1}{\eta} + \frac{\sigma_2}{b} e^{-b(T-u)} - \frac{\sigma_2}{b}.$$

Então

$$\begin{aligned}
 E[M_1(t, T)|\mathcal{F}_{t_0}] &= \frac{d_1}{2\eta} (e^{2\eta t} - 1) + \frac{d_2}{(\eta + b)} (e^{t(\eta+b)} - 1) + \frac{d_3}{2b} (e^{2bt} - 1) \\
 &+ \frac{d_4}{\eta} (e^{\eta t} - 1) + \frac{d_5}{b} (e^{bt} - 1) + d_6 t.
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

onde,

$$\begin{aligned}
 d_1 &= \frac{\sigma_1^2}{\eta^2} e^{-2\eta t} \\
 d_2 &= \frac{2\sigma_1\sigma_2}{\eta^2} e^{-(\eta t + bT)} \\
 d_3 &= \frac{\sigma_2^2}{b^2} e^{-2bT} \\
 d_4 &= -\frac{2\sigma_1}{\eta} e^{-\eta t} \left(\frac{\sigma_1}{\eta} + \frac{\sigma_2}{\eta} \right) \\
 d_5 &= -\frac{2\sigma_2}{b} e^{-bT} \left(\frac{\sigma_1}{\eta} - \frac{\sigma_2}{b} \right) \\
 d_6 &= \frac{\sigma_1^2}{\eta^2} + \frac{\sigma_2^2}{b^2} + \frac{2\sigma_1\sigma_2}{\eta b}.
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

Concluimos que a esperança da taxa *forward* está determinada a menos de dois parâmetros, σ_2 e b que serão estimados e apresentados no próximo capítulo.

Capítulo 6

Dados e Resultados

No Capítulo que segue discutiremos detalhadamente os dados empregados nas calibrações e os resultados das estimações aqui também expostos. Inicialmente, falaremos dos contratos de DI futuro, definindo-os de forma precisa. Posteriormente, trataremos das amostras escolhidas para a calibração e das maneiras de estimação empregadas e, finalmente, dos resultados para os casos particulares estudados: volatilidade constante e segundo o modelo de Vasicek.

6.1 Dados

Nosso objeto principal de estudo é a estrutura a termo de taxa de juros dos certificados interbancários brasileiro. Assim sendo, os principais contratos formadores desse mercado são os futuros de DI. Dedicamos uma seção para apresentar detalhadamente seu funcionamento e suas peculiaridades. Logo após esta importante seção, apresentaremos as amostras utilizadas nas calibrações e discutiremos regimes monetários do Brasil bem como limites de aplicação da teoria aqui abordada.

6.1.1 O Contrato de DI futuro

Introdução

¹No final dos anos 70 os Estados Unidos experimentaram um quadro de instabilidade econômica sem precedentes. Os principais motivos foram o aumento da dívida federal e o processo inflacionário crescente. Nesse momento as instituições financeiras sentiram a necessidade de novos instrumentos financeiros para gerenciarem suas carteiras. Em 1975, a Chicago Board of Trade (CBOT) desenvolveu o primeiro contrato futuro de taxa de juros, sobre os certificados lastreados em hipoteca emitidos. Em 1977, lançou o mais popular dos contratos de taxa de juro, o contrato futuro de títulos do Tesouro dos Estados Unidos (U.S. Treasury bonds). Pouco tempo depois diversos derivativos de taxa de juros entraram no mercado internacional para limitar ou cobrir a exposição às mudanças nas taxas, como desejado por diversas instituições. A BMF, com o objetivo de aperfeiçoar os instrumentos de proteção de risco, lançou, em junho de 1991, o contrato Futuro de Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia. Ao atender à demanda por *hedge* de entidades comerciais e bancárias e da indústria de fundos de investimento, esse instrumento tornou-se rapidamente uma das maiores inovações da indústria de derivativos no Brasil.

Principais características dos futuros de DI

Objeto de Negociação - O ativo objeto dos contratos futuros de DI é um *bond zero cupom*, fictício, que paga, na data T , o valor de cem mil reais.

$$B(T, T) = R\$100.000,00.$$

O método de desconto para precificar este contrato, segundo a BMF², é supor que a taxa

¹A introdução mais completa pode ser encontrada no Apêndice B

²Ver folheto em, [http : //www.bmfbovespa.com.br/pt - br/a - bmfbovespa/download/series - mercados_futuro - de - di.pdf](http://www.bmfbovespa.com.br/pt-br/a-bmfbovespa/download/series-mercados_futuro-de-di.pdf)

não varie ao longo de cada dia. Além disso, apenas dias úteis devem ser considerados. A BMF utiliza, por convenção, a fórmula que segue para converter os negócios realizados em taxa para PU . Assim, é comum dizer que o *bond* subjacente possui o preço,

$$PU(t_k) = \frac{100.000}{(1 + R(t_k))^{\left(\frac{T-t_k}{252}\right)}}. \quad (6.1)$$

Para nós, $PU(t_k)$ será o preço do *bond* fictício no dia t_k que matura na data T ; $R(t_k)$ é a taxa de juros discreta e anualizada entre as datas t_k e T . O número que aparece no quociente, 252, é convencionado como o número de dias úteis em um ano. O numerador, $(t_k - T)$, é o número de dias úteis entre as duas datas, t e T .

Os contratos de DI futuro foram inspirados nos futuros de taxas, *Treasury bonds Futures*, por isso utilizam um *bond* como ativo subjacente. Isso os tornam intuitivos e fáceis de operar. Exploraremos a principal diferença entre eles: nos *Treasuries bonds Futures* os participantes que negociam um futuro de um título de 3 meses estão tentando prever a taxa de juros dos três meses posteriores à data do vencimento do contrato. Já no mercado de DI os participantes tentam "prever" qual será taxa de juros que se acumula sobre o preço unitário (PU) desde a data de negociação do contrato até seu vencimento.

No começo dos anos 90, quando esses contratos entraram no mercado, os preços dos papéis públicos eram muito voláteis e não refletiam com precisão a taxa de juros interna do país (prêmio de risco alto). Neste contexto, a BMF lançou o futuro sobre o subjacente fictício. De forma que o preço desses contratos sempre representasse as expectativas do mercado com relação à taxa de juros interna do país. Naturalmente, não era possível haver entrega física do subjacente, portanto ocorria apenas o ajuste financeiro na data de liquidação.

Pelo modo que os contratos de DI foram definidos, a formula de conversão de taxa para PU apresentada na Equação (6.1), tem apenas a utilidade de tornar o ativo objeto mais intuitivo, pois na verdade o que realmente está sendo negociado é a taxa de juros acumulada entre a data de liberação do contrato até seu vencimento.

Como os negócios são realizados - Até 2002, os negócios eram realizados em *PU*, isto é, os agentes realizam suas operações baseados no preço do *bond* subjacente. A forma atual de negociação do contrato de DI Futuro foi introduzida pela BMF em 2002 quando os contratos passaram a ser negociados em taxa ao invés de *PU*. É fácil notar que $R(t_k)$ e *PU* estão inversamente relacionados em (6.1). Consequentemente, os negócios comprados em taxa implicam em vendidos em *PU* e vice-versa.

Os ajustes diários - No dia que ocorre o negócio, as operações de compra e de venda, originalmente contratadas em taxa, são convertidas para operações de venda e compra de *PU* utilizando a seguinte expressão:

$$PO(t_k) = \frac{100.000}{(1 + R(t_k))^{\left(\frac{T-t_k}{252}\right)}}, \quad (6.2)$$

aqui, $PO(t_k)$ é o preço da operação em *PU*, calculado após o fechamento do negócio. Os ajustes referentes à um contrato futuro são calculados com as seguintes fórmulas: no dia da operação

$$AD_t = (PA_t - PO). \quad (6.3)$$

ajuste das posições em aberto no dia anterior

$$AD_t = (PA_t - PA_{t-1} \cdot FC_t) \quad (6.4)$$

onde,

- AD_t é valor do ajuste diário, em reais, referentes à data t ;
- PA_t é preço do ajuste do contrato na data t , para o vencimento respectivo;
- FC_t é fator de correção do dia t , definido pela formula:

$$PU(t_k) = \frac{100.000}{(1 + R(t_k))^{\left(\frac{T-t_k}{252}\right)}}$$

Na data de vencimento do contrato o preço de ajuste será R\$ 100.000,00.

Feita a discussão acima, observamos que a precificação dos contratos de DI é completamente determinada pelo entendimento da estrutura a termo dos certificados interbancários brasileira. Neste contexto, nosso estudo se concentra em fazer o raciocínio inverso: usar os contratos de DI futuro para estudar a ETTJ interbancária brasileira.

6.1.2 Dados coletados para a calibragem

Nesta seção, apresentaremos os dados utilizados na calibragem dos modelos descritos ao longo do texto e discutiremos as principais informações contidas nos mesmos.

O período escolhido para as estimações foi de janeiro de 2004 a outubro de 2010. Embora contássemos com dados disponíveis em um período maior (2000 - 2010), entendemos que as mudanças de regime na política monetária brasileira ocorridas fora do período 2004-2010 mudaram a natureza dos processos estocásticos que descrevem a ETTJ em estudo.

Na figura 6.1 é possível visualizar as diferenças nas taxas (discretas) para os períodos janeiro de 2000 a janeiro de 2004 e janeiro de 2004 a outubro de 2010. O mesmo acontece com a taxa *spot* e com as demais maturidades (na Figura, estão as maturidades de 3 e 6 meses).

Nosso modelo de taxa *forward* deve ser estimado para todas as maturidades. Com este propósito escolhemos os principais vértices da curva para a calibragem sendo eles de curto, médio e longo prazos. Abaixo, faremos algumas definições que vão facilitar as análises no decorrer deste capítulo.

Definição 6.1 (Taxas de curto, médio e longo prazo)

- *Taxa de curto prazo é referente à taxa DI-overnight.*
- *Taxa de médio prazo são as taxas implícitas dos contratos que maturam de dois dias úteis até um ano.*

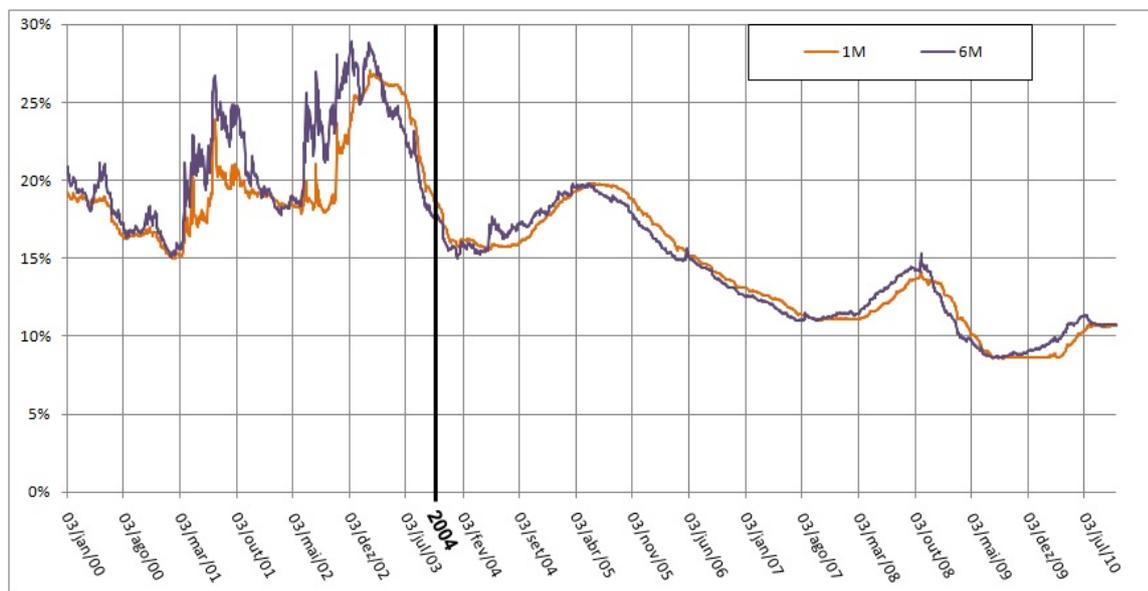


Figura 6.1: Mudanças de regimes nas taxas de juros

- *Taxa de longo prazo são as taxas implícitas dos contratos que maturam em prazos maiores ou iguais a um ano.*

Taxas

Nas Figuras 6.2 e 6.3 podemos observar as flutuações da taxa (discreta) para maturidades de 1,3 e 6 meses compondo o grupo de médio prazo e 1,2 e 5 anos para as taxas de longo prazo. A taxa de curto prazo já foi apresentada no Capítulo 3 na Figura 3.2.

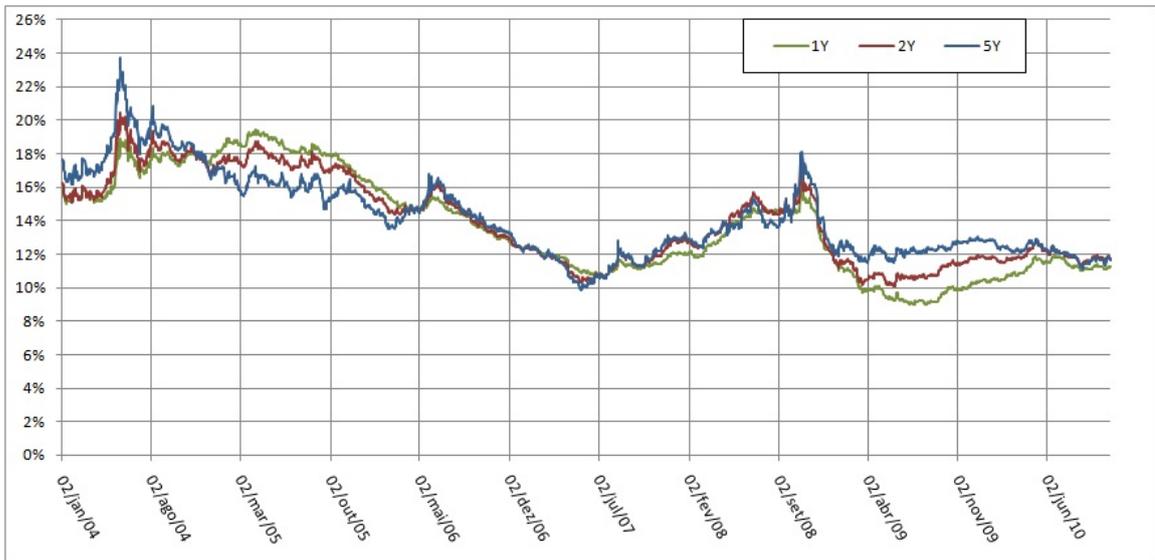


Figura 6.2: Evolução das taxas de longo prazo

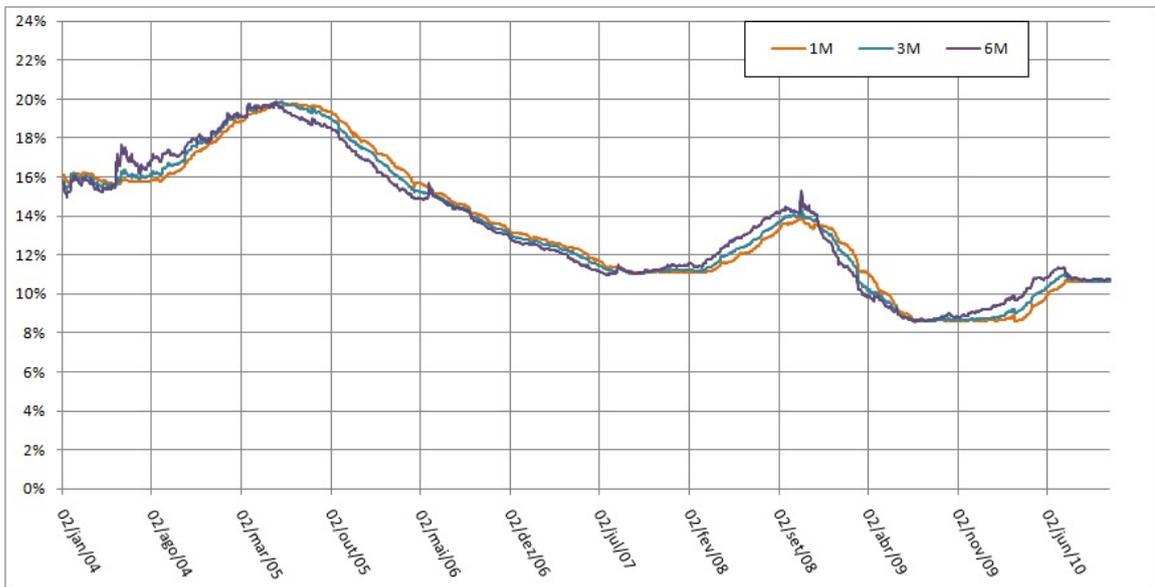


Figura 6.3: Evolução das taxas de médio prazo

Volatilidade

Consideramos relevante para este estudo apresentar a volatilidade realizada da taxa de juros para as maturidades analisadas anteriormente. Definiremos volatilidade realizada como segue

$$\hat{\sigma}_t^2 = \frac{\sum_{i=1}^{Nu} (r_{DI}^d)^2}{(Nu - 1)}, \tag{6.5}$$

onde Nu é igual a 35 dias úteis e r_{DI}^d é a taxa *DI overnight* observada no mercado (portanto taxa discreta).

Nas figuras 6.4 e 6.5 verificamos as volatilidades referentes às taxas de médio ou longo prazo. Notemos que não há nenhum tratamento para retirar o efeito das decisões da autoridade monetária. Isto implica em aumento significativo da volatilidade em períodos de maior variação da meta Selic - o que não está associado ao aumento no risco das taxas de juros. Observamos que fica evidente a necessidade de um tratamento especial para a meta; exatamente o que será apresentado na próxima seção. Outro ponto relevante que podemos observar nas figuras citadas anteriormente é que a volatilidade cresce com o aumento das maturidades.

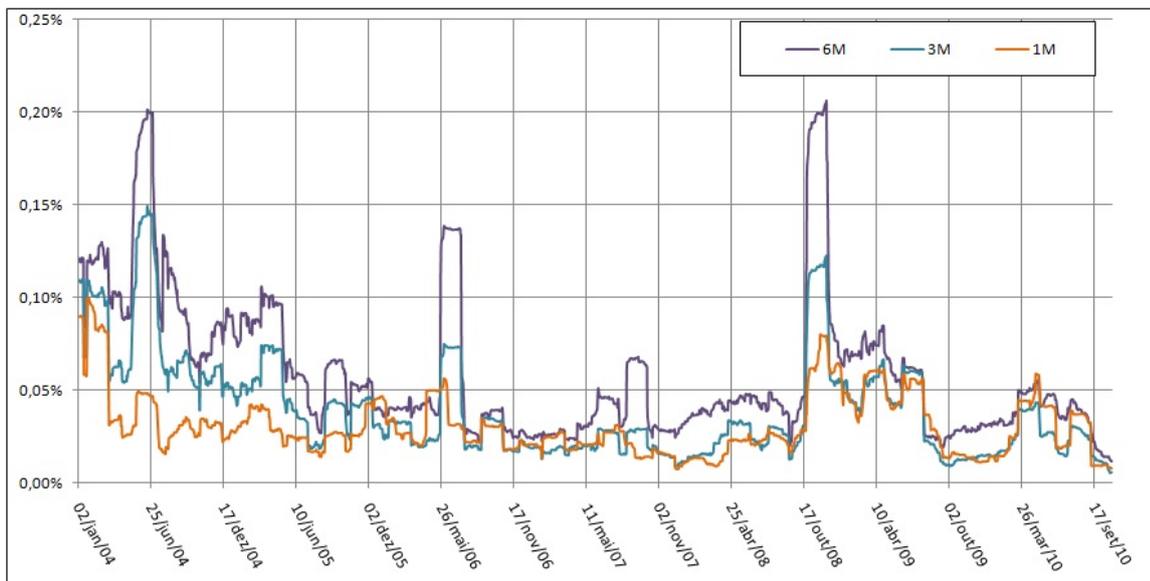


Figura 6.4: Evolução das volatilidades de médio prazo

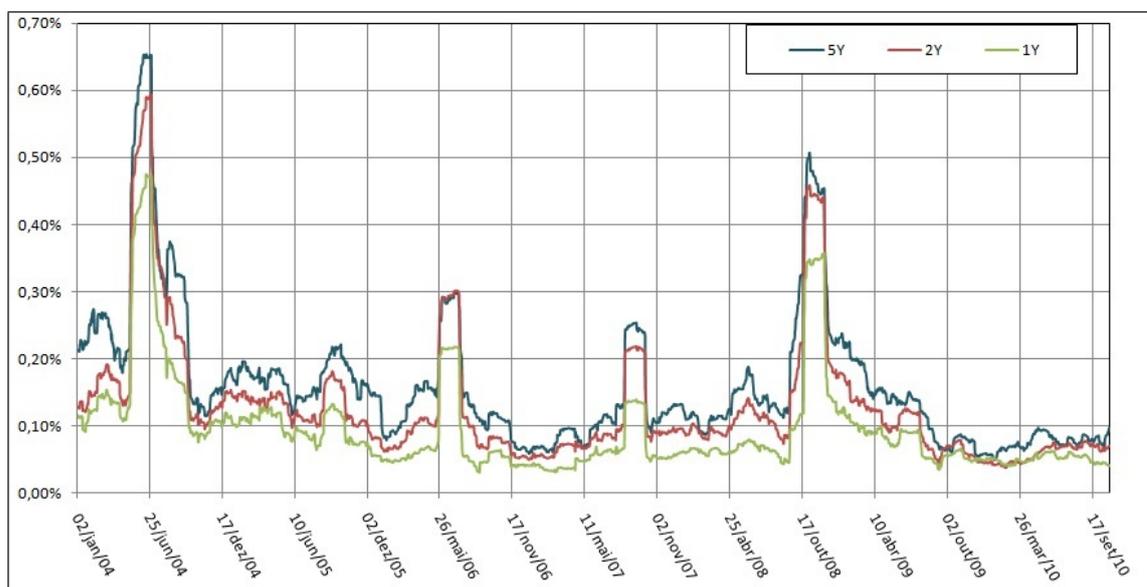


Figura 6.5: Evolução das volatilidades de longo prazo

6.2 Resultados

Parte dos resultados deste trabalho já foram apresentados no Capítulo 3 no qual estimamos os parâmetros do modelo Ornstein Uhlenbeck. Aqui, apresentaremos os resultados e discussões para a estimação da ETTJ com volatilidade igual a uma constante e seguindo o modelo de Vasicek.

6.2.1 Resultados para volatilidade constante

Neste ponto da estimação reunimos as informações obtidas no Capítulo 2 referente à taxa *spot* com o modelo de HJM sob a hipótese de volatilidade constante como desenvolvido no Capítulo 5.

Integramos o modelo descrito para a taxa *spot* com o HJM sem reestimar os parâmetros referentes à primeira taxa. Assim, para a calibragem, restou apenas o parâmetro σ_2 que está

relacionado com a volatilidade da taxa *forward*. Isto é, o coeficiente do termo estocástico no modelo HJM é σ_2 - para uma data t , a volatilidade da taxa *forward* é σ_2 .

Com a ajuda do software Matlab, como procedemos nas estimações anteriores, calibramos o modelo através do método de Máxima Verossimilhança. Em (5.4) calculamos as esperanças do preço do *bond* nas datas t_i dado que as informações até t_{i-1} são conhecidas para $i = 1, 2, \dots, n$. Neste sentido, avaliamos a capacidade de previsão do modelo para um dia.

O valor obtido para $\hat{\sigma}_2$ foi: $\hat{\sigma}_2 = 2\%$. Entendemos que este número está de acordo com o esperado.

6.2.2 *Backtesting*

Uma maneira bastante comum de avaliar a capacidade dos modelos é através do *backtesting*. Procedemos similarmente ao que foi feito no processo de estimação do parâmetro σ_1 em que calculamos a previsão das taxas para um dia, porém comparando o modelo com os resultados observados no mercado.

Convertemos para taxa os PU's dos contratos de DI-futuro observados no mercado segundo a Equação (6.1). Nas Figuras 6.6 e 6.7 apresentamos a diferença entre o modelo proposto e a taxa observada para as maturidades de 1 mês e 6 meses.

6.2.3 Volatilidade segundo o modelo de Vasicek

O segundo exemplo apresentado no Capítulo 5 para a construção da ETTJ brasileira foi pressupor que a volatilidade da taxa *forward* é descrita pela mesma função de volatilidade do modelo de Vasicek. Neste caso há dois parâmetros a serem estimados; são eles σ_2 e b . A função de volatilidade é dada pela Equação 5.11, a saber

$$\sigma_2(t, T) = \sigma_2 e^{-b(T-t)}. \quad (6.6)$$

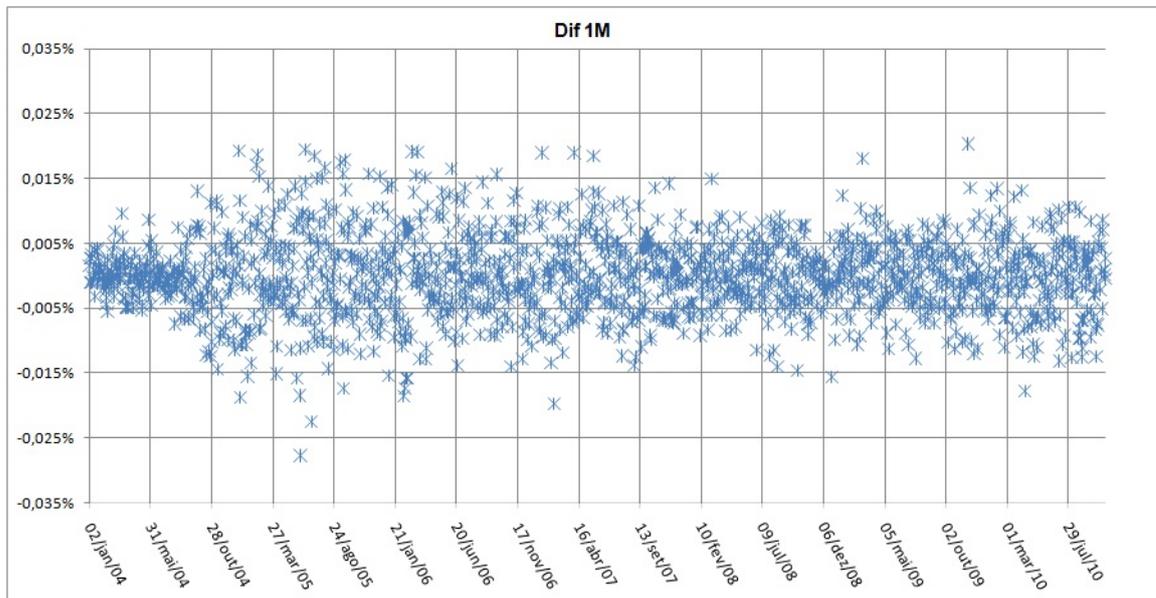


Figura 6.6: Diferença modelo volatilidade constante e taxa observadas - 1 Mês

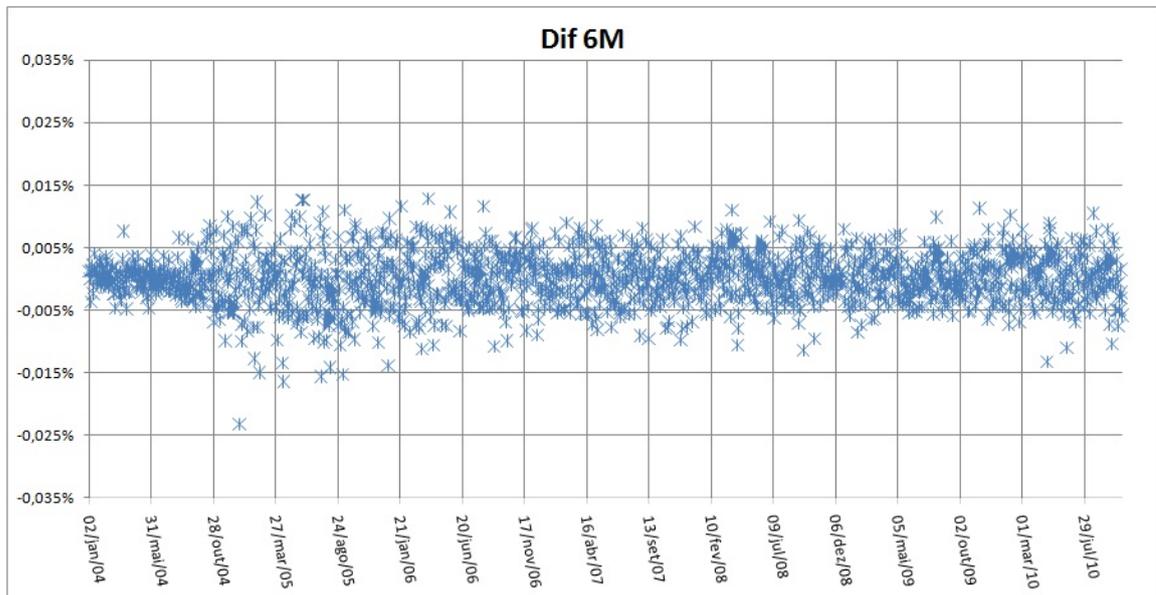


Figura 6.7: Diferença modelo volatilidade constante e taxa observadas - 6 Mês

No processo de estimação, mais uma vez, utilizamos a máxima verossimilhança e encontramos os valores: $\hat{\sigma}_2 = 0.2\%$ e $\hat{b} = 4$.

6.2.4 *Backtesting* volatilidade dado pelo modelo de Vasicek

Nas Figuras 6.8 e 6.9 é possível verificar o *backtesting* para as maturidades de 1 e 6 meses. Os resultados para ambos os exemplos, volatilidade da taxa *forward* sendo constate ou dada pelo modelo de Vasicek, são muito similares. Podemos observar que nos períodos de maior variação da meta Selic os modelos apresentam menor capacidade de previsão das taxas para essas maturidades. Isto acontece devido ao fato de considerarmos todos os cenários para a meta como sendo iguais a zero. Por fim, concluímos que o modelo cuja volatilidade é dada por Vasicek (segundo exemplo) teve capacidade de previsão 5% melhor do que o primeiro exemplo.

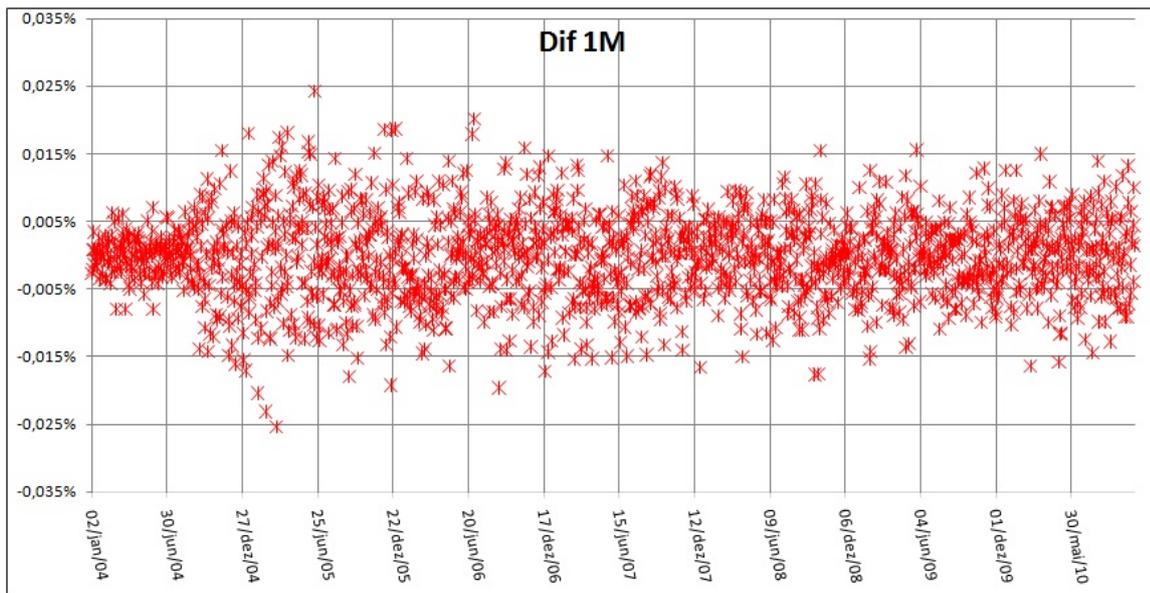


Figura 6.8: Diferença modelo volatilidade de Vasicek e taxa observadas - 1 Mês

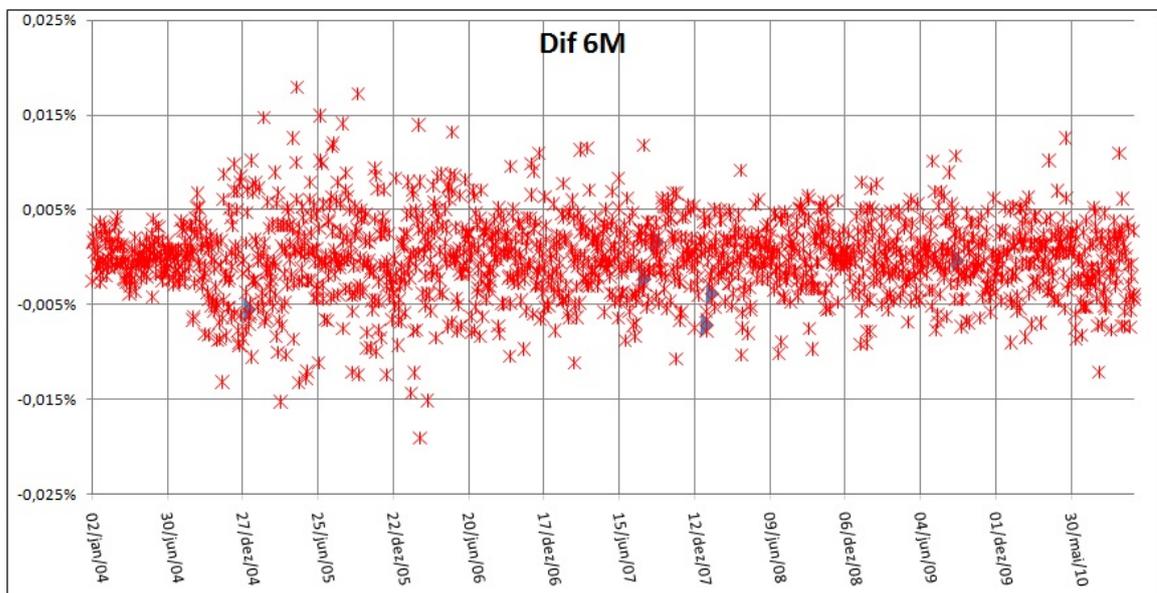


Figura 6.9: Diferença modelo volatilidade de Vasicek e taxa observadas - 6 Mês

Capítulo 7

Considerações Finais

7.1 Problemas em aberto

Certamente há muito a ser feito nessa linha que aqui iniciamos; sobretudo estudar funções de volatilidade mais descritivas da realidade para as taxas de longo prazo. Os dois casos aqui tratados - volatilidade da taxa *forward* constante e seguindo o modelo de Vasicek - podem descrever grande parte dos movimentos da estrutura a termo, como foi demonstrado. Mesmo assim, faz muito sentido dedicar mais atenção a este ponto.

Outra consideração importante é que não entramos na estimação dos cenários plausíveis para a meta Selic nas reuniões que estão no período de estudo da taxa *forward*. Mesmo acreditando não ser uma missão puramente econométrica, como dissemos, existem alguns estudos que podem ser desenvolvidos. Por exemplo, poderíamos simular cenários baseados nos dados históricos e avaliar a capacidade do modelo através de *backtesting*.

Entendemos que uma das hipóteses feitas por nós pode ser reavaliada e melhor discutida. Supomos que os movimentos Brownianos que descrevem o *spread* e a taxa *forward* são os mesmo. Talvez, tratar como dois modelos (independentes ou não) deixaria a estruturação teórica mais bem fundamentada com relação ao que realmente acontece na prática. Também é importante analisar se apenas um Browniano seria capaz de conter as incertezas que influenciam a taxa

foward. Identificar os fatores de risco que, de fato, contém estocasticidade nesse mercado idios-sincrático complementaria bem as idéias aqui trabalhadas.

7.2 Conclusão

Entendemos que o presente trabalho tem muito a agregar para a literatura de taxas de juros do Brasil. Na nossa concepção os avanços principais são: a abordagem da taxa *spot* como a soma de dois processo - o *spread* que reverte à media e a meta Selic vista como um processo de Markov. Outro ponto que possui pioneirismo é a conciliação de um modelo bem conhecido na literatura, HJM, para explicar a parte longa da curva com o modelo para a taxa curta.

Os resultados obtidos reforçam a tese de que a ETTJ brasileira, com suas peculiaridades, merece um estudo aprofundado no que diz respeito aos processos estocásticos. O tratamento aqui apresentado não faz uso de técnicas inovadoras ou complexas - como é o caso, por exemplo, dos processos com saltos que são alvo de controvérsias na literatura - As ferramentas que empregamos para a construção deste modelo são extensamente utilizadas na literatura e podem ser consideradas clássicas. No entanto, a abordagem é nova e abre caminhos para muitos avanços.

Vamos detalhar um pouco mais os resultados: as estimações para a taxa *spot* tiveram uma capacidade de previsão muito acima de diversos modelos em uso no mercado. Isso, mesmo sem considerar as influências dos cenários possíveis para as decisões do COPOM. Notamos que a medida que nos afastamos da uma data da reunião, a capacidade de previsão do modelo aqui apresentado, melhora. Isto é, em períodos de menor intervenção do BC na taxas de juros, a capacidade do modelo é maior. É o que ocorre nos períodos de agosto de 2007 a março de 2008 e julho de 2009 a abril de 2010 nos quais o BC optou por manter a meta em 11,25% e 8.75%. Portanto reforça a idéia de que estudar os cenários plausíveis para a meta Selic poderiam melhorar ainda mais os resultados.

A velocidade de reversão foi estimada em aproximadamente 100 dias para o *Spread*. Isso está bem em conformidade com o que pode ser observado nos dados de mercado. O *Spread* oscila em

torno da média, aqui estimada em 0.125%, e, em média, a cada 100 dias, reverte.

Os parâmetros estimado para a taxa *foward* estão dentro do esperado uma vez que há uma disparidade muito pequena com relação àqueles medidos empiricamente com os dados observados no mercado.

Bibliografia

- Black, F., E. Derman, and W. Toy (1990). A one-factor model of interest rates and its application to treasury bond options. *Financial Analysts Journal* 46(1), 33–39.
- Bonomo, M. and A. Lowenkron (2006). A term structure model for emerging economy bonds. *IV Encontro da Sociedade Brasileira de Finanças*.
- Brigo, D. and F. Mercurio (2001). *Interest rate models: theory and practice*. Springer finance. Springer.
- Cavalcante, J. (Abril de 2010). Modelagem de processo estocástico para a taxa de juros de curto prazo no Brasil. Master's thesis, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.
- Cox, J. C., J. Ingersoll, Jonathan E, and S. A. Ross (1985). A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica* 53(2), 385–407.
- Das, S. R. (2002). The surprise element: jumps in interest rates. *Journal of Econometrics* 106(1), 27–65.
- Diebold, F. X. and C. Li (2006). Forecasting the term structure of government bond yields. *Journal of Econometrics* 130(2), 337–364.
- FORTUNA, E. (2007). *Mercado financeiro : produtos e serviços*. Qualitymark Ed.
- Gouriéroux, C. and J. Jasiak (2001). *Financial econometrics: problems, models, and methods*. Princeton series in finance. Princeton University Press.

- Heath, D., R. Jarrow, and A. Morton (1992). Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation. *Econometrica* 60(1), 77–105.
- Ho, T. S. Y. and S.-b. Lee (1986). Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. *Journal of Finance* 41(5), 1011–29.
- Hull, J. and A. White (1990). Pricing interest-rate-derivative securities. *Review of Financial Studies* 3(4), 573–92.
- Jackwerth, J. C. and M. Rubinstein (1996). Recovering probability distributions from option prices. *Journal of Finance* 51(5), 1611–32.
- James, B. (1981). *Probabilidade: um curso em nível intermediário*. Projeto Euclides. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq.
- Johannes, M. (2004). The statistical and economic role of jumps in continuous-time interest rate models. *Journal of Finance* 59(1), 227–260.
- Korn, E. and R. Korn (2001). *Option Pricing and Portfolio Optimization*, Volume 31. American Mathematical Society.
- La Roque, E. and M. Garcia (1996). Um estudo sobre a volatilidade do mercado futuro de taxa de juros no brasil. *Department of Economics PUC-Rio (Brazil)*.
- Lamberton, D. and B. Lapeyre (1996). *Introduction to stochastic calculus applied to finance*. Chapman & Hall.
- Muller, L. (2009). *Mathematical Methods in Finance: Modeling and Numerical Analysis*. Ph. D. thesis, Instituto de Matematica Pura e Aplicada.
- Nelson, C. R. and A. F. Siegel (1987). Parsimonious modeling of yield curves. *Journal of Business* 60(4), 473–89.

- Oksendal, B. K. (2002). *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications* (5th ed.). Springer.
- Piazzesi, M. (2005). Bond yields and the federal reserve. *Journal of Political Economy* 113(2), 311–344.
- Shreve, S. (2004). *Stochastic Calculus for Finance: The binomial asset pricing model*. Springer finance. Springer.
- Svensson, L. E. O. (1994). Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994. IMF Working Papers 94/114, International Monetary Fund.
- Vasicek, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics* 5(2), 177–188.
- Zubelli, J. (2005). *Notas de Aula de Metodos Matematicos em Financas*. Technical Report IMPA.

Apêndice A

Solução do modelo OU

Considere um processo com reversão à média de Ornstein-Uhlenbeck que é descrito pela Equação diferencial estocástica

$$dr(t) = \eta(\mu - r(t))dt + \sigma dW(t);$$

onde $r(0) = r_0$.

Primeiramente, notemos que

$$d(e^{\eta t} r(t)) = r(t)\eta e^{\eta t} dt,$$

e além disso nós temos

$$e^{\eta t} dr(t) = d(e^{\eta t} r(t)) - r(t)\eta e^{\eta t} dt.$$

Multiplicando ambos os membros da Equação acima por $e^{\eta t}$, teremos

$$e^{\eta t} dr(t) = e^{\eta t} \eta(\mu - r(t))dt + e^{\eta t} \sigma dW(t).$$

Isto implica em

$$d(e^{\eta t} r(t)) = \eta e^{\eta t} \mu dt + e^{\eta t} \sigma dW(t).$$

Assim, podemos resolver a EDE como:

$$e^{\eta t} r(t) = r_0 + \int_0^t \eta e^{\eta s} \mu ds + \int_0^t e^{\eta s} \sigma dW(t),$$

ou equivalentemente

$$r(t) = r_0 e^{-\eta t} + \int_0^t \eta e^{-\eta(t-s)} \mu ds + \int_0^t e^{-\eta(t-s)} \sigma dW(t).$$

Apêndice B

Os Contratos Futuros de DI e sua Época

O seguinte texto, extraído do Folheto da BMF. Disponível em: http://www.bmfbovespa.com.br/pt-br/a-bmfbovespa/download/series-mercados_futuro-de-di.pdf

A década de 1970 trouxe nova realidade para os agentes econômicos nos Estados Unidos. Instabilidade econômica sem precedência, quadro crescente de dívida federal, processo inflacionário também ascendente e taxas de juro voláteis. Diante do risco maior criado pela economia em transformação, esses fatores provocaram nas instituições financeiras a necessidade de buscar novos instrumentos para o gerenciamento dinâmico de suas carteiras.

Em resposta às contínuas demandas da comunidade financeira, em 1975, a Chicago Board of Trade (CBOT) desenvolveu o primeiro contrato futuro de taxa de juro, sobre os certificados lastreados em hipoteca emitidos pela Government National Mortgage Association (GNMA). Em 1977, lançou o mais popular dos contratos de taxa de juro, o contrato futuro de títulos do Tesouro dos Estados Unidos (U.S. Treasury bonds).

Por sua vez, a Chicago Mercantile Exchange (CME), em 1981, introduziu o contrato

futuro de eurodólar, cuja grande inovação foi a ausência de entrega física, ou seja, sua liquidação no vencimento ocorria por diferença financeira, sem necessidade de entregar o ativo-objeto de negociação.

Os futuros financeiros revolucionaram não somente a indústria de futuros e opções, como também os mercados financeiros globais. As instituições, que, em dado momento, assistiam inesperadamente ao declínio de suas margens de lucro e, sob ameaça, a sua própria viabilidade a longo prazo, tinham agora a oportunidade de limitar ou cobrir sua exposição às mudanças nas taxas de juro. De repente, manter posições no mercado a vista sem a proteção proporcionada pelo contrato futuro significava especular acerca da direção futura da taxa de juro. Por esse motivo, o conhecimento desses instrumentos passou a ser necessidade em todos os setores da economia.

Criado em 1986 com a decretação do Plano Cruzado, o mercado de CDI ou mercado interbancário foi inspirado nos moldes do mercado interbancário londrino, em que as instituições financeiras trocam entre si valores, segundo suas necessidades de caixa, estabelecendo o nível das taxas de juro interbancárias privadas. No Brasil, consiste na realização de operações de troca de disponibilidades de recursos entre instituições financeiras que são liquidadas financeiramente pela Câmara de Custódia e Liquidação (Cetip), mediante crédito e débito nas contas “reservas bancárias” mantidas no Banco Central.

Apenas aos bancos comerciais - ou seja, às instituições que possuem conta reservas bancárias - é permitida a participação nesse mercado. Além de constituir-se em fonte de captação e aplicação de recursos, o mercado interbancário redistribui a liquidez dentro do próprio sistema, sem o envolvimento do Banco Central. Nessas operações, os bancos transferem recursos aos outros bancos sem, com isso, influir na base monetária ou na criação de moeda. O fato concreto é que, quando o mercado negocia depósitos interfinanceiros, transfere ativos e liquidez de uma instituição para outra

do sistema.

Além dos limites legais das operações, o mercado possui sistemática própria para definir o nível de taxas para cada tomador. Dependendo do risco de crédito do tomador, são balizados o nível da taxa de juro e os limites de recursos alocados para cada instituição. A pulverização de recursos mais equilibrada pode ser observada à medida que o mercado se sente mais seguro.

As operações com Depósitos Interfinanceiros compõem o universo que é a base de cálculo da taxa média de DI da Cetip. Nesse universo, as operações entre bancos grandes ou pequenos, públicos ou privados, estrangeiros ou nacionais formam uma das taxas referenciais mais importantes do sistema financeiro nacional para várias operações bancárias. Essa taxa é apurada por meio de metodologia estatística definida e divulgada diariamente pela Cetip, como uma taxa de juro ao ano, com base em 252 dias úteis, representando o custo básico de captação bancária para aquele dia específico. De maneira resumida, pode-se dizer que o Depósito Interfinanceiro representa uma operação de empréstimo entre bancos e que a taxa média DI da Cetip representa a taxa referencial básica do custo das operações interbancárias.

A BMF, com o objetivo de aperfeiçoar os instrumentos de proteção de risco, lançou, em junho de 1991, o Contrato Futuro de Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia. Ao atender à demanda por hedge de entidades comerciais e bancárias e da indústria de fundos de investimento, esse instrumento tornou-se rapidamente uma das maiores inovações da indústria de derivativos no Brasil.

O contrato futuro de DI baseia-se nas taxas médias calculadas pela Cetip, que espelham o custo médio praticado nas operações de troca de disponibilidade de recursos entre instituições financeiras para curtíssimo prazo.