Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Hipersuperfícies com Curvatura Média Constante, Índice Finito e Volume com Crescimento Polinomial

Dayse Haime Pastore

Rio de Janeiro

Janeiro 2001

Dedico este trabalho aos meus pais.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por sua luz durante todos esses anos, aos meus pais e meu irmão por seu carinho e apoio, ao meu orientador Manfredo P. do Carmo por sua confiança, compreensão e amizade.

Aos meus amigos que me apoiaram, me ouviram, me compreenderam durante todo esse tempo, em especial agradeço a Patricia Helena Nogueira que me ajudou enumeras vezes com as minhas vírgulas. E é claro não poderia deixar de agradecer a Ronaldo Freire por sua ajuda.

A Jorge Vitório Pereira não sei como agradecer, pelo seu carinho, pelo seu amor e também por seus puxões de orelha.

Aos meus professores durante o mestrado e aqueles da graduação, como Flôrencio Guimarães, Luzia Casatti, Walmecir Bayer, e outros que me ensinaram a gostar de aprender matemática.

Ao IMPA e seus funcionários de um modo geral, pelas condições tão favoráveis.

A Capes por seu apoio financeiro deste a minha graduação.

Por fim agradeço a todos que de uma forma ou de outra me ajudaram na realização deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho, seguindo um artigo do Hilário Alencar e Manfredo P. do Carmo, estudaremos uma estimativa para a curvatura média de hipersuperfícies completas, não compactas, de volume com crescimento polinomial, índice finito, em função da sua curvatura de Ricci.

Antes daremos uma pequena noção de variedade Riemanniana e de outros conceitos de Geometria Riemanniana.

Palavras-chave: hipersuperfícies, volume e índice.

Sumário

Introdução

Superfícies de curvatura média constante são objetos de grande importância na Matemática. A sua importância provém do fato que ela aparece naturalmente em vários contextos. Historicamente a curvatura média apareceu nos trabalhos de físicos-matemáticos que queriam achar explicações para problemas de capilaridade; por exemplo: tem curvatura média constante a superfície de um líquido que é ponto critico da área e faz ângulo constante com as paredes do reservatório esférico que o contém.

Verificou-se posteriormente que a curvatura média constante estava relacionada com o problema isoperimétrico. Dado um domínio limitado D em $\mathbb{R}^n$, com fronteira ∂D diferenciável, este domínio é uma solução do problema isoperimétrico, isto é, ele tem a menor área possível, envolvendo um volume fixo, se e somente se, a curvatura média de ∂D for constante.

Os exemplos mais simples de superfícies em $\mathbb{R}^3$ de curvatura média constante são o plano, o cilindro e a esfera. Esses exemplos fazem parte de uma família de superfícies de curvatura média constante invariantes por rotações que inclui o onduloide, o catenoide e o nodoide (ver figura 1). O perfil de uma tal superfície é gerado por um foco de uma seção cônica (elipses para o caso do onduloide, parábolas para o catenoide e hipérboles para o nodoide) que rolam sem escorregarem ao longo do eixo de rotação . Essa construção foi descoberta por Delaunay em 1841 [De], e estas superfícies de rotação são simplesmente chamadas de Superfícies de Delaunay.

Vale observar citar que o cilindro é a única superfície regrada com curvatura média constante $H \neq 0$ (ver Darboux [Da]).

A próxima série de exemplos são as superfícies helicoidais, tais superfícies são invariantes por movimentos helicoidais, com $H = const.$. Elas foram explicitamente descritas por do Carmo e Dajczer [DdC].

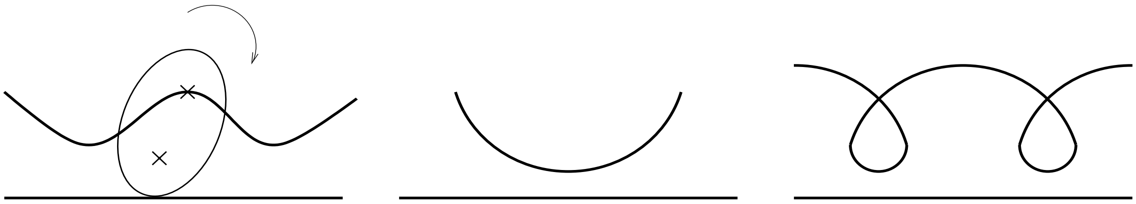


Figura 1: Algumas curvas perfil de Superfícies de Delaunay

Note que nos exemplos citados acima a única superfície compacta com curvatura média constante é a esfera. Isso levou Heinz Hopf, a fazer a seguinte pergunta:

"Toda superfície compacta M com $H = constante$ é uma esfera?"

A primeira resposta parcial a essa peguntа, dada pelo próprio Hopf em 1951, foi a seguinte:

"Sim, se M for homeomorfa à esfera."

Uma segunda resposta parcial foi dada por Alexandroff em 1956:

"Sim, se M é mergulhada."

Em 1984, João Lucas Barbosa e Manfredo do Carmo responderam pela terceira vez essa pergunta:

"Sim, se M é estável."

A pergunta foi finalmente respondida em toda a generalidade por Wente [W] que apresentou toros (não mergulhados) que possuem curvatura média constante.

A noção de estabilidade se relaciona com a noção de índice de uma certa forma quadrática, como veremos no Capítulo 2 (em verdade a estabilidade significa dizer que o índice é zero, pois o índice é o numero de direções linearmente independentes segundo as quais a área diminui), com isso estudaremos superfícies com índice finito.

Neste trabalho, seguindo um artigo do Hilário Alencar e Manfredo do Carmo, estudaremos uma estimativa para a curvatura média de hipersuperfícies completas, não-compactas, em função da sua curvatura de Ricci, admitidas certas condições sobre o seu volume e seu índice.

Uma conseqüência interessante do resultado obtido é a seguinte:

"Se índice de M é finito, M tem volume de crescimento polinomial, curvatura de Ricci do espaço ambiente é maior ou igual a zero e M tem curvatura média constante, então M é mínima."

Em particular, se obtém um resultado de Chern:

"Gráficos completos de um espaço euclidiano com curvatura média constante são mínimos". O que será visto com detalhes no Capítulo 2.

As superfícies de curvatura média constante são objetos interessantes a serem estudados, por sua raridade e complexidade e contemplados, pelas suas belas formas.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Noções básicas

Veremos neste capítulo noções básicas de Geometria Riemanniana. Toda a Geometria Riemanniana é construída em cima do conceito de variedade diferenciável. Intuitivamente, uma variedade diferenciável é um espaço topológico onde cada ponto possui uma vizinhança "equivalente" a um aberto de $I\!R^n$.

Definição 1.1.1 Uma *variedade diferenciável de dimensão n* é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas $x_\alpha : U_\alpha \subset I\!R^n \to M$ de conjuntos abertos U_α de $I\!R^n$ em M tais que

1. $\bigcup_\alpha x_\alpha(U\alpha) = M$;
2. Para qualquer par α e β, com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, o conjunto $x_\alpha^{-1}(W)$ e $x_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $I\!R^n$ e as aplicações $x_\alpha^{-1} \circ x_\beta$ são diferenciáveis;
3. A família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ é máxima em relação as condições (1) e (2).

O par (U_α, x_α) (ou a aplicação x_α) com $p \in x_\alpha(U_\alpha)$ é chamada uma *parametrização* (ou *sistema de coordenadas*) de M em p; $x_\alpha(U_\alpha)$ é dita uma *vizinhança coordenada em p*.

Para evitar complicações com notação, sempre que falarmos diferenciável queremos dizer infinitamente diferenciável.

Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : M_1 \to M_2$ é *diferenciável* em $p \in M_1$, se dada uma parametrização $y : V \subset I\!R^m \to M_2$ de uma vizinhança de $\varphi(p)$, existe uma parametrização $x : U \subset I\!R^n \to M_1$ de uma vizinhança de p tal que $\varphi(x(U)) \subset y(V)$ e a aplicação

$$y^{-1} \circ \varphi \circ x : U \subset I\!R^n \to I\!R^m$$

é diferenciável em $x^{-1}(p)$. A aplicação φ é diferenciável em um conjunto aberto de M_1, se for diferenciável em todos os pontos deste aberto.

Dado uma variedade diferenciável M e $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ uma família máxima em relação a definição 1.1.1. Dizemos que M é uma variedade suave se toda x_α for C^∞.

Seja M uma variedade diferenciável. Uma função diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ é dita uma *curva diferenciável em M*. Suponha que $\alpha(0) = p \in M$, e seja $\mathcal{D}(p)$ o conjunto das funções em M que são diferenciáveis em p. O *vetor tangente à curva α em $t = 0$* é a função

$$\alpha'(0)(f) = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}|_{t=0}, \qquad f \in \mathcal{D}(p).$$

Ou seja, associamos à curva α, a aplicação

$$\alpha'(0) : F(p) \to I\!R\,.$$

E é esta última que entendemos como um *vetor tangente* a $p = \alpha(0)$.

O conjunto de todos os vetores tangentes a M em p forma um espaço vetorial indicado por T_pM, *o espaço tangente de M em p.*

Definição 1.1.2 Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $\varphi : M \to N$ é dita uma *imersão* se $d\varphi_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$ é injetiva para todo $p \in M$.

Observação 1.1.1 No caso particular em que a codimensão da imersão for 1, ou seja, $\varphi : M^n \to N^{n+1}$, $\varphi(M) \subset N$ é chamada uma *hipersuperfície.*

Definição 1.1.3 Seja M uma variedade diferenciável. Dizemos que M é *orientável* se ela admite uma família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ satisfazendo (1) e (2) da definição 1.1.1 tal que, para todo par α e β, com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, a diferencial da mudança de coordenadas $x_\beta \circ x_\alpha^{-1}$ tem determinante positivo.

Seja M^n uma variedade diferenciável e considere o conjunto

$$TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_pM\}.$$

Temos que TM possui uma estrutura de variedade diferenciável de dimensão $2n$ (Ver [dC1]). A variedade diferenciável TM é chamada o *fibrado tangente* de M.

Definição 1.1.4 Um *campo vetorial* X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um vetor $X(p) \in T_pM$. Em termos de aplicação, X é uma aplicação de M em seu fibrado tangente TM. Dizemos que o campo vetorial é diferenciável se a aplicação $X : M \to TM$ for diferenciável.

Proposição 1.1.1 *Sejam X e Y campos vetoriais diferenciáveis em uma variedade diferenciável M. Então existe um único campo vetorial Z tal que, para toda $f \in \mathcal{D}$, $Zf = (XY - YX)f$. Aqui, $\mathcal{D}$ denota o conjunto das funções diferenciáveis em M.*

Prova: Para provarmos a existência de Z, defina Z_α em cada vizinhança coordenada $x_\alpha(U_\alpha)$ de uma família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ satisfazendo (1) e (2) da definição 1.1.1 em M pela expressão prevista, se provarmos a unicidade teremos que $Z_\alpha = Z_\beta$ em $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$, o que define Z em toda variedade M. Para a unicidade, seja $p \in M$ e $x : U \to M$ uma parametrização em p, e tome

$$X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$
$$Y = \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

as expressões de X e Y nessas parametrizações. Então para todo $f \in \mathcal{D}$,

$$X(Y(f)) = X(\sum_j b_j \frac{\partial f}{\partial x_j}) = \sum_{i,j} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},$$
$$Y(X(f)) = Y(\sum_i a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}) = \sum_{i,j} b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Portanto na parametrização x, Z é dado por

$$Z(f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) = \sum_{i,j} (a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i}) \frac{\partial f}{\partial x_j},$$

o que prova a Proposição. ∎

Definição 1.1.5 O campo vetorial Z dado pela proposição acima é chamado o *colchete* de X e Y e é denotado por $[X,Y] = XY - YX$.

Definição 1.1.6 Uma *métrica Riemanniana* em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto p de M um produto interno $\langle , \rangle_p$ (que é, uma forma bilinear, simétrica e definida positiva) no espaço tangente T_pM. Pedimos que a métrica varie diferenciavelmente; mais precisamente: se $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ é um sistema de coordenadas locais em p, com $x(x_1, ..., x_n) = q \in X(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx_q(0, ..., 1, ..., 0)$, então $\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \rangle_q = g_{ij}(x_1, ..., x_n)$ é uma função diferenciável em U.

Definição 1.1.7 Uma *variedade Riemanniana* é uma variedade diferenciável com uma métrica Riemanniana dada.

A prova da próxima proposição pode ser encontrada na página 43 de [dC1].

Proposição 1.1.2 *Uma variedade diferenciável M (Hausdorff com base enumerável) possui uma métrica Riemanniana.*

Definição 1.1.8 Sejam M e N variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $f : M \to N$ (f é uma bijeção diferenciável com inversa diferenciável) é chamada uma *isometria* se

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)},$$

para todo $p \in M$ e $u, v \in T_pM$.

Observação 1.1.2 Denotaremos por $\chi(M)$ o conjunto de todos os campos vetoriais de classe C^∞ em M e por $\mathcal{D}(M)$ o anel das funções que assumem valores reais de classe C^∞ definidas em M.

Um outro conceito muito importante em Geometria Riemanniana é o de conexão afim. Essencialmente, uma conexão nos diz como derivar campos de vetores. Após definirmos uma conexão afim, particularizaremos o conceito para termos a noção de conexão Riemanniana. Com ela estaremos aptos a trabalhar formalmente com conceitos como curvatura, transporte paralelo, etc.

Definição 1.1.9 Uma *conexão afim* ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação :

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

que é denotada por $(X, Y) \stackrel{\nabla}{\to} \nabla_X Y$ e que satisfaz as seguintes propriedades

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$;
2. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$;
3. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$.

Aqui $X, Y, Z \in \chi(M)$ e $f, g \in D(M)$.

Como havíamos dito, a conexão é uma forma de derivar campos, como nos mostra a proposição abaixo. De fato, através dela temos garantida a existênica e unicidade da derivada covariante de uma campo ao longo da curva. Para uma demostração, veja página 50 de [dC1].

Proposição 1.1.3 *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Então existe um único campo vetorial V ao longo de uma curva diferenciável $c : I \to M$ associado a um campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c, chamado derivada covariante de V ao longo de c, tal que*

1. $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$;
2. $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}(V) + f\frac{DV}{dt}$, *onde W é um campo vetorial ao longo de c e f é uma função diferenciável em I;*
3. *Se V é induzido pelo campo vetorial $Y \in \chi(M)$, i.e., $V(t) = Y(c(t))$, então* $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y$.

Definição 1.1.10 Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Um campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \to M$ é dito *paralelo* quando $\frac{DV}{dt} = 0$, para todo $t \in I$.

Com a proposição a seguir, cuja prova pode ser encontrada na página 52 de [dC1], verificamos a existência e unicidade do transporte paralelo de vetores ao longo de uma curva.

Proposição 1.1.4 *Sejam M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇, $c : I \to M$ uma curva diferenciável em M e V_0 um campo vetorial tangente a M em $c(t_0)$, $t_0 \in I$(i.e.,$V_0 \in T_{c(t_o)}M$). Então existe um único campo vetorial paralelo V ao longo de c, tal que $V(t_0) = V_0$ ($V(t)$ é chamado o transporte paralelo de $V(t_0)$ ao longo de c).*

Definição 1.1.11 Sejam M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ e uma métrica Riemanniana $\langle , \rangle$. Uma conexão é dita *compatível* com a métrica $\langle , \rangle$, quando para qualquer curva suave c e qualquer par de campos paralelos P e P' ao longo de c, temos $\langle P, P' \rangle = const.$

Definição 1.1.12 Uma conexão afim ∇ em uma variedade suave M é *simétrica* quando:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \; para \; todo \; X, Y \in \chi(M).$$

O próximo resultado é devido ao geômetra italiano Levi–Civita. Para uma prova deste resultado ver [dC1].

Teorema 1.1.1 *[Levi-Cevita] Dada uma variedade Riemanniana M, existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições*

1. *∇ é simétrica;*

2. *∇ é compatível com a métrica Riemanniana.*

A conexão dada pelo teorema acima é denominada *conexão de Levi-Civita (ou Riemanniana) de M*. A partir de agora sempre que nos referirmos a uma conexão em uma variedade Riemanniana, estaremos nos referindo a esta conexão.

A seguir, veremos as definições de gradiente e divergente em termos intrínsicos. Estas generalizam as definições clássicas que são feitas em termos de coordenadas no espaço Euclidiano com a métrica canônica.

Definição 1.1.13 Seja $X \in \chi(M)$ e $f \in \mathcal{D}(M)$. O *divergente de* X é a função $\text{div}X : M \to I\!R$, tal que para cada $p \in M$, temos $\text{div}X(P) =$ traço da aplicação linear $Y(p) \to \nabla_Y X(p)$, para todo $Y \in \chi(M)$.

Definição 1.1.14 O *gradiente de* f é o campo vetorial *grad* f em M definido por:

$$\langle \text{grad } f(p), v\rangle = df_p(v); \ p \in M, \ v \in T_pM.$$

Definição 1.1.15 O *laplaciano de* M é um operador $\triangle : \mathcal{D}(M) \to \mathcal{D}(M)$ definido por:

$$\triangle f = \text{div grad } f, \ f \in \mathcal{D}(M).$$

Considere um ponto $p \in M$, onde M é uma variedade Riemanniana de dimensão n. Existe uma vizinhança aberta $U \subset M$ de p e n campos de vetores $E_1, E_2, \ldots, E_n \in \chi(U)$, que são ortonormais em cada ponto de U. Além disto estes campos são tais que, em p, $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$, para quaisquer i, j.

A uma tal família $E_i, \ i = 1, \ldots, n$, de campos de vetores, damos o nome de *referencial (local) geodésico em* p.

Dado qualquer referencial geodésico, $E_i, \ i = 1, \ldots, n$ em uma vizinhança de $p \in M$, valem as seguintes identidades:

1. $\text{grad } f(p) = \sum_{i=1}^n (E_i(f))E_i$;
2. $\text{div } X(p) = \sum_{i=1}^n (E_i(f_i))(p)$, onde $X = \sum_{i=1}^n f_i E_i$;
3. $\triangle f(p) = \sum_{i=1}^n \ E_i(E_i(f))(p)$.

Observamos que a partir destas igualdades pode-se ver claramente que as definições feitas anteriormente realmente generalizam as definições clássicas.

Proposição 1.1.5 *Sejam* $f, g : M \to I\!R$ *funções suaves. Então*

$$\triangle fg = g\triangle f + f\triangle g + 2\langle \text{grad } f, \text{grad } g\rangle.$$

Prova: Seja $E_1, \ldots, E_n$ um referencial geodésico. Das fórmulas apresentadas anteriormente, temos que

$$\triangle fg = \sum_{i=1}^{n} E_i(E_i(f.g)) = \sum_{i=1}^{n} (E_i(gE_i(f)) + E_i(fE_i(g)))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (E_i(f)E_i(g) + gE_i(E_i(f)) + E_i(f)E_i(g) + fE_i(E_i(g)))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (gE_i(E_i(f)) + fE_i(E_i(g)) + 2E_i(f)E_i(g)).$$

Como $\langle E_i, E_i \rangle = 1$, temos que

$$\triangle(f.g) = g\triangle f + f\triangle g + 2\langle \text{grad } f, \text{grad } g\rangle \ .$$

■

Corolário 1.1.1 *Sejam $f, g : M \to I\!R$ funções suaves não nulas. Então*

$$\triangle(\frac{1}{f}) = -\frac{\triangle f}{f^2} + 2\frac{\|\text{grad } f\|^2}{f^3} \,;$$

$$\triangle(\frac{g}{f}) = (\frac{\triangle g}{g} - \frac{\triangle f}{f})\frac{g}{f} - (\frac{2}{f})\langle \text{grad } f, \text{grad } (\frac{g}{f})\rangle \,.$$

Prova: Como $f\frac{1}{f} = 1$, temos que $0 = \frac{1}{f}\triangle f + f\triangle(\frac{1}{f}) + 2\langle \text{grad } f, \text{grad } (\frac{1}{f})\rangle$. Usando que grad $(\frac{1}{f}) = -\frac{grad\ f}{f^2}$, obtemos a primeira fórmula. Para provar a segunda observe que

$$\triangle(\frac{g}{f}) = \triangle(g \cdot \frac{1}{f}) = \frac{1}{f}\triangle g + g\triangle(\frac{1}{f}) - \frac{2}{f^2}\langle \text{grad } f, \text{grad } g\rangle$$

$$= \frac{1}{f}\triangle g + g(-\frac{\triangle f}{f^2} + 2\frac{\|\text{grad } f\|^2}{f^3}) - \frac{2}{f^2}\langle \text{grad } f, \text{grad } g\rangle$$

$$= (\frac{\triangle g}{g} - \frac{\triangle f}{f})\frac{g}{f} + \frac{2}{f}\langle \text{grad } f, \frac{g\text{grad } f}{f^2}\rangle - \frac{2}{f}\langle \text{grad } f, \frac{\text{grad } g}{f}\rangle$$

$$= (\frac{\triangle g}{g} - \frac{\triangle f}{f})\frac{g}{f} + \frac{2}{f}\langle \text{grad } f, \frac{g.\text{grad } f}{f^2} - \frac{f.\text{grad } g}{f^2}\rangle$$

$$= (\frac{\triangle g}{g} - \frac{\triangle f}{f})\frac{g}{f} - (\frac{2}{f})\langle \text{grad } f, \text{grad } (\frac{g}{f})\rangle.$$

■

Definiremos agora a curvatura de uma variedade Riemanniana. Intuitivamente, a curvatura representa o quanto uma variedade deixa de ser Euclidiana.

Definição 1.1.16 A *curvatura* R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \chi(M)$ uma aplicação $R(X,Y) : \chi(M) \to \chi(M)$ dada por

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, \ Z \in \chi(M),$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M.

Definição 1.1.17 Seja $x = z_n$ um vetor unitário em T_pM, e tome uma base ortonormal $\{z_1, z_2, ..., z_{n-1}\}$ do hiperplano em T_pM ortogonal a x, a *curvatura de Ricci* na direção x é definida por

$$\text{Ric}_p(x) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\langle R(x, z_i)x, z_i\rangle,$$

e a *curvatura escalar em p* é definida por

$$K(p) = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i,j=1}^{n}\langle R(z_i, z_j)z_i, z_j\rangle.$$

Vamos provar que as expressões acima não dependem da escolha das correspondentes bases ortonormais. Para isso daremos uma caracterização intrínsica das expressões acima. Sejam $x, y \in T_pM$, defina a forma bilinear

$$Q(x,y) = \text{traço da aplicação } z \to R(x,z)y.$$

Escolhendo uma base ortonormal $\{z_1 \dots, z_{n-1}, z_n = x\}$ de T_pM, temos

$$Q(x,y) = \sum_i \langle R(x, z_i)y, z_i\rangle = \sum_i \langle R(y, z_i)x, z_i\rangle = Q(y,x).$$

Isto prova, que Q é simétrica e satisfaz $Q(x,x) = (n-1)\mathrm{Ric}_p(x)$, demonstrando assim que Ric_p está intrinsicamente definida.

Por outro lado, à forma bilinear Q em T_pM corresponde a uma aplicação linear auto-adjunta K, dada por

$$\langle K(x), y\rangle = Q(x,y).$$

Tomando uma base ortonormal $\{z_1, \ldots, z_n\}$, temos

$$\text{traço de } K = \sum_j \langle K(z_j), z_j\rangle = \sum_j Q(z_j, z_j) = (n-1)\sum_j \mathrm{Ric}_p(z_j) = n(n-1)K(p),$$

o que demonstra a afirmação .

Seja $f : M^n \to \overline{M}^{n+m=k}$ uma imersão de variedade diferenciável M em uma variedade Riemanniana $\overline{M}$. Para cada $p \in M$, o produto interno em $T_p\overline{M}$ decompõe $T_p\overline{M}$ na soma direta

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp},$$

onde $(T_pM)^{\perp}$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$.

A conexão Riemanniana de $\overline{M}$ será indicada por $\overline{\nabla}$.

Se X e Y são campos vetoriais locais em M, e $\overline{X}$, $\overline{Y}$ são extensões locais para $\overline{M}$, defina

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^T,$$

onde $(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^T$ é a componente tangencial de $\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}$.

Observação 1.1.3 Observe que essa é a conexão Riemanniana relativa à métrica induzida em M.

Proposição 1.1.6 *Se $X, Y \in \chi(M)$, a aplicação $B : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)^{\perp}$ dada por*

$$B(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$$

é bilinear e simétrica.

Prova: Da propriedade de linearidade de uma conexão temos que B é aditiva em X e Y e

$$B(fX,Y) = fB(X,Y), \; f \in D(U).$$

Agora, mostraremos que

$$B(X,fY) = fB(X,Y), \; f \in D(U).$$

Denotando a extensão de f em $\overline{U}$ por $\overline{f}$, temos que

$$B(X,fY) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{f}\overline{Y} - \nabla_X fY = \overline{f}\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} + \overline{X}(\overline{f})\overline{Y} - f\nabla_X Y - X(f)Y.$$

Como $f = \overline{f}$, $\overline{X}(\overline{f}) = X(f)$ e $Y = \overline{Y}$ em M, concluímos que

$$B(X,fY) = fB(X,Y)$$

como queríamos.

Para mostrar que B é simétrica, usamos a simetria da conexão Riemanniana, para obter

$$B(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y = \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X} + [\overline{X},\overline{Y}] - \nabla_Y X - [X,Y].$$

Como $[\overline{X},\overline{Y}] = [X,Y]$ em M, segue-se o resultado. ∎

Como B é bilinear, podemos escrever B em um sistema de coordenadas o que mostra que o valor de $B(X,Y)(p)$ só dependa dos valores de $X(p)$ e $Y(p)$.

Sejam $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$. A aplicação $H_\eta : T_pM \times T_pM \to I\!R$ dada por

$$H_\eta(x,y) = \langle B(x,y), \eta \rangle, \; x, y \in T_pM,$$

pela Proposição 1.1.6, é uma forma bilinear simétrica.

Definição 1.1.18 A forma quadrática Π_η definida em T_pM por

$$\Pi_\eta(x) = H_\eta(x,x)$$

é chamada *a segunda forma fundamental de f em p* ao longo do vetor normal η.

Observação 1.1.4 Como H_η é uma forma bilinear simétrica, podemos sempre associar a ela um operador auto-adjunto $S_\eta : T_pM \to T_pM$ dado por

$$\langle S_\eta(x), y \rangle = H_\eta(x,y) = \langle B(x,y), \eta \rangle.$$

A proposição seguinte expressa o operador linear associado à segunda forma em termos da derivada covariante.

Proposição 1.1.7 *Seja $p \in M$, $x \in T_pM$ e $\eta \in (T_pM)^\perp$. Seja N uma extensão local de η normal a M. Então*

$$S_\eta(x) = -(\overline{\nabla}_x N)^\perp.$$

Prova: Sejam $x, y \in T_pM$ e X, Y extensões locais de x, y, respectivamente, tangentes a M. Então $\langle N, Y\rangle = 0$, e portanto

$$\langle S_\eta(x), y\rangle = \langle B(X,Y)(p), N\rangle = \langle \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, N\rangle(p) = \langle \overline{\nabla}_X Y, N\rangle(p)$$

$$= -\langle Y, \overline{\nabla}_X N\rangle(p) = \langle -\overline{\nabla}_x N, y\rangle, \quad \text{para todo } y \in T_pM.$$

■

Seja $f : M^n \to \overline{M}^{n+1=k}$ uma imersão . Sejam $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^\perp$, $\|\eta\| = 1$. Como $S_\eta : T_pM \to T_pM$ é linear simétrica, existe uma base ortonormal de auto-vetores $\{e_1, ..., e_n\}$ de T_pM com auto-valores reais $\lambda_1, ..., \lambda_n$, i.e., $S_\eta(e_i) = \lambda_i e_i$, $1 \leq i \leq n$. Se M e $\overline{M}$ são orientáveis, então o vetor η é unicamente determinado, se pedimos que $\{e_1, ..., e_n\}$ seja uma base na orientação de M e $\{e_1, ..., e_n, \eta\}$ uma base na orientação de $\overline{M}$. Neste caso, dizemos que os $e_i^\prime s$ são as *direções principais* e que $\lambda_i = k_i$ são as *curvaturas principais de f*.

Definição 1.1.19 Chamamos de *curvatura média de f* a função

$$H = \frac{\text{traço } S_\eta}{n} = \frac{1}{n}(\lambda_1 + ... + \lambda_n).$$

Definição 1.1.20 Uma hipersuperfície é dita *mínima* se sua curvatura média for constante e igual a zero, i.e., $H = 0$.

Exemplo 1.1.1 Tome $\overline{M} = \mathbb{R}^{n+1}$ e $M = \{x \in \mathbb{R}^n | / \ \|x\| = 1\}$. Sabemos que $M = S^n$ a esfera de raio 1 em $\mathbb{R}^{n+1}$ de dimensão n. A curvatura média de S^n é constante igual a 1. De fato, tome $N(x) = -x \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\|x\| = 1$ e $c(t)$ uma curva em S^n tal que $c(0) = p$ e $C'(0) = p$, então

$$-x = \frac{dN \circ c}{dt}(t) = \overline{\nabla}_x N = (\overline{\nabla} x N)^T = -S_N(x),$$

para todo $p \in S^n$ e para todo $x \in T_pM$. Daí, resulta que todos os valores próprios de S^n são iguais a 1, ou seja, $k_i = 1$, onde $1 \leq i \leq n$, as curvaturas principais de S^n são todas iguais a 1, o que nos dá, $H = 1$.

Proposição 1.1.8 *No caso em que $f(M^n)$ é uma hipersuperfície, temos $\|B\|^2 \geq nH^2$. Vale a igualdade em um ponto $p \in M$ se, e somente se, p é umbílico, ou seja, as curvaturas principais de M em p são todas iguais.*

Prova: Sejam $k_1, ..., k_n$ as curvaturas principais de f em $p \in M$. Então, $\|B\|^2 = \sum_{i=1}^n {k_i}^2$ e

$$(*) \quad \|B\|^2 - n^2H^2 = \sum_{i=1}^n {k_i}^2 - \frac{n^2(\sum_{i=1}^n k_i)^2}{n^2}$$

$$= \sum_{i=1}^n {k_i}^2 - (\sum_{i=1}^n k_i)^2 = -2\sum_{i<j}^n k_ik_j, \quad i, j = 1, ..., n.$$

Vamos provar por indução que

$$\sum_{i<j}^n ({k_i}^2 + {k_j}^2) = (n-1)\sum_{i=1}^n {k_i}^2.$$

De fato, se $n = 2$,

$$\sum_{i<j}^{n=2} ({k_i}^2 + {k_j}^2) = {k_1}^2 + {k_2}^2.$$

Considere válido para $n = m$ e vamos provar para $m + 1$, isto é,

$$\sum_{i<j}^{m+1} ({k_i}^2 + {k_j}^2) = \sum_{i<j}^{m} ({k_i}^2 + {k_j}^2) + \sum_{i=1}^{m} ({k_i}^2 + {k_{m+1}}^2).$$

Pela hipótese de indução, temos

$$\sum_{i<j}^{m} ({k_i}^2 + {k_j}^2) = (m-1)\sum_{i=1}^{m} {k_i}^2 + \sum_{i=1}^{m} ({k_i}^2 + {k_{m+1}}^2)$$

$$= (m-1)\sum_{i=1}^{m} {k_i}^2 + m{k_{m+1}}^2 + \sum_{i=1}^{m} {k_i}^2$$

$$= m\sum_{i=1}^{m} {k_i}^2 - \sum_{i=1}^{m} {k_i}^2 + m{k_{m+1}}^2 + \sum_{i=1}^{m} {k_i}^2 = m\sum_{i=1}^{m+1} {k_i}^2.$$

Agora,

$$\sum_{i<j}^{n} (k_i - k_j)^2 = \sum_{i<j}^{n} ({k_i}^2 + {k_j}^2) - 2\sum_{i<j}^{n} k_i k_j.$$

Assim,

$$\sum_{i<j}^{n} (k_i - k_j)^2 = (n-1)\sum_{i=1}^{n} {k_i}^2 - 2\sum_{i<j}^{n} k_i k_j$$

$$= (n-1)\|B\|^2 - 2\sum_{i<j}^{n} k_i k_j.$$

Por (*) temos

$$n(\|B\|^2 - nH^2) = \sum_{i<j}^{n} (k_i - k_j)^2 \geq 0,$$

o que prova o resultado. ∎

1.2 Caso particular do ambiente $I\!\!R^{n+1}$

Consideremos agora o caso particular em que $\overline{M} = I\!\!R^{n+1}$. Mostraremos que algumas das definições acima, quando reduzidas a este caso são bem mais simples e já conhecidas.

Definição 1.2.1 Dizemos que uma variedade diferencial $M \subset I\!\!R^{n+1}$ é uma *superfície regular* se

1. $X_\alpha : U_\alpha \subset I\!R^n \to M$ é um homeomorfismo sobre sua imagem;
2. A diferencial $dX_\alpha(p) : I\!R^n \to I\!R^{n+1}$ é uma bijeção .

Tome $X, Y \in \chi(I\!R^{n+1})$ e defina a aplicação $\tilde{\nabla} : \chi(I\!R^{n+1}) \times \chi(I\!R^{n+1}) \to \chi(I\!R^{n+1})$ como

$$\tilde{\nabla}_X Y(p) = \frac{dY}{dt}(p).X(p),$$

onde $\frac{d}{dt}$ é a derivada usual do $I\!R^{n+1}$.

Considere $c : I \to I\!R^{n+1}$ uma curva diferenciável, V e W dois campos vetoriais ao longo de c, $f, g \in \mathcal{D}(I\!R^{n+1})$ e $Z, X, Y \in \chi(I\!R^{n+1})$. Observe que

$$\frac{d(V+W)}{dt} = \frac{dV}{dt} + \frac{dW}{dt}, \tag{1.1}$$

$$\frac{d(fV)}{dt} = \frac{df}{dt}.V + f\frac{dV}{dt}, \tag{1.2}$$

Pela definição de $\tilde{\nabla}$, temos:

$$\tilde{\nabla}_{c'(t)} Y = \frac{dY}{dt}(p).c'(t) = \frac{d(Y \circ c)}{dt}(t); \tag{1.3}$$

$$\tilde{\nabla}_{fX+gY} Z = f\tilde{\nabla}_X Z + g\tilde{\nabla}_Y Z; \tag{1.4}$$

$$\tilde{\nabla}_X(Y+Z) = \frac{d(Y+Z)}{dt}.X = \frac{dY}{dt}.X + \frac{dZ}{dt}.X = \tilde{\nabla}_X Y + \tilde{\nabla}_X Z; \tag{1.5}$$

$$\tilde{\nabla}_X(fY) = \frac{dfY}{dt}.X = (\frac{df}{dt}.X).Y + f\frac{dY}{dt}X = X(f).y + f\tilde{\nabla}_X Y. \tag{1.6}$$

Usando as equações 1.4, 1.5 e 1.6 temos que $\widetilde{\nabla}$ é uma conexão e, pela Proposição 1.1.3, a derivada covariante e a derivada usual do $\mathbb{R}^{n+1}$ coincidem. Além disso,

$$\frac{d\langle V, W\rangle}{dt} = \langle \frac{dV}{dt}, W\rangle + \langle V, \frac{dW}{dt}\rangle.$$

Pela Proposição 1.1.4, temos que essa conexão $\widetilde{\nabla}$ é a conexão compatível com a métrica do $\mathbb{R}^{n+1}$.

Tome $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma superfície regular e $p \in M$. Temos que a conexão compatível com a métrica induzida pela métrica do $\mathbb{R}^{n+1}$ de M, será a projeção da conexão do $\mathbb{R}^{n+1}$ no espaço tangente de M em p, T_pM. Da mesma forma a derivada covariante de M será a projeção da derivada usual do $\mathbb{R}^{n+1}$ em T_pM.

Seja $X \in \chi(U)$ um campo vetorial diferenciável em U, onde $U \subset M$ aberto e $p \in U$. Tome $v \in T_pM$ e considere a curva parametrizada $\alpha : I \to U$ com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = x$. Seja $X(t),\ t \in I$, a restrição do campo vetorial X à curva α.

Considere a aplicação $N : M \to S^n$, onde S^n é a esfera unitária do $\mathbb{R}^{n+1}$ e N é a aplicação normal de Gauss. Sabemos que N é um campo vetorial normal a M. Pela Proposição 1.1.7, temos

$$S_N(x) = -(\widetilde{\nabla}_x N)_\perp = -(\widetilde{\nabla}_x N) = \frac{dN}{dt}|_{t=0},$$

onde $x \in \chi(M)$. Ou seja, temos que a segunda forma fundamental de M coincide com a derivada da aplicação normal de Gauss.

Capítulo 2

Resultado Principal

Neste capítulo introduziremos alguns conceitos necessários para enunciar o resultado principal. Começaremos com a definição de primeiro auto-valor em um variedade e provaremos alguns resultados que serão úteis na demonstração do teorema principal.

Comece fixando um ponto $p \in M$, onde M é uma variedade Riemanniana e denote por $B(r)$ a bola geodésica em M de centro p e raio r. Seja $r_0 > 0$ uma constante e denote por $A(r_0, r)$ o *anel* $B(r) - B(r_0)$.

Definição 2.0.2 O *primeiro autovalor* $\lambda_1(A(r_0, r))$ é definido como o menor $\lambda \in I\!R$ que satisfaz

$$\triangle g + \lambda g = 0,$$

para alguma função g não identicamente nula em M com $g(\partial A(r_0, r)) = 0$. O primeiro autovalor de $M - B(r_0)$ é definido por

$$\lambda_1(M - B(r_0)) = \inf_{r > r_0} \lambda_1(A(r_0, r)).$$

A demonstração do próximo resultado pode ser encontrada em [B], p. 25 à 34.

Proposição 2.0.1 - *Para toda função $u \in H(D)$, onde $H(D)$ é o conjunto das funções C^∞ em D não identicamente nulas, que se anulam no bordo (∂D) de D, temos*

$$\lambda_1(D) \leq \frac{\int_{D \cup \partial D} \| \; grad \; u\|^2 dM}{\int_{D \cup \partial D} u^2 dM},$$

e a igualdade só vale se $\triangle u + \lambda u = 0$.

Proposição 2.0.2 - *Sejam D e D' domínios tais que $D' \subset D$. Então, $\lambda_1(D') \geq \lambda_1(D)$, valendo a igualdade somente quando $D = D'$.*

Prova: Seja $u \in H(D')$. Estenda u para $H(D)$ fazendo $u = 0$ em $D - D'$. Assim, temos $H(D') \subset H(D)$ o que nos dá $\lambda_1(D') \geq \lambda_1(D)$. Suponha agora que $\lambda_1(D') = \lambda_1(D)$ e considere $u' \in H(D')$ uma função satisfazendo $\triangle u' + \lambda u' = 0$.

Defina $\widetilde{u} \in H(D)$ como $\widetilde{u} = u'$ em D' e $\widetilde{u} = 0$ em $D - D'$.

Então, temos $\int_{D\cup\partial D} \| \, grad \; \widetilde{u}\|^2 dM = \lambda_1 \int_{D\cup\partial D} \widetilde{u}^2 dM$ e pela Proposição 2.0.1 temos $\triangle\widetilde{u} + \lambda\widetilde{u} = 0$ em D. Por um resultado de equações elípticas temos que $\widetilde{u}$ é analítica em D, e $D - D'$ não tem ponto interior. ∎

O teorema a seguir pode ser encontrado em [dC1], p. 85.

Teorema 2.0.1 *[Hopf] Seja M uma variedade Riemanniana orientável, compacta e conexa. Seja f uma função suave em M com $\triangle f \geq 0$. Então, f é constante.*

Os resultados seguintes são devidos a Cheng e Yau ([CY], Teorema 4 e Corolário1, p. 345).

Teorema 2.0.2 *[Cheng-Yau] Sejam f e g duas funções suaves definidas em uma variedade Riemanniana compacta M (com bordo). Suponha $f > 0$ e $g \geq 0$ em M e $g(\partial M) = 0$. Então, temos que*

$$g \equiv 0 \quad ou \ \inf_{x\in M} \left(\frac{\triangle g}{g} - \frac{\triangle f}{f}\right) \leq 0.$$

Prova: Suponha, por absurdo, que

$$g \neq 0 \ \text{ e } \ \inf_{x\in M} \left(\frac{\triangle g}{g} - \frac{\triangle f}{f}\right) > 0.$$

Defina a função $h = \frac{g}{f} \geq 0$ em M. Sabemos que:

$$\triangle h = \triangle\left(\frac{g}{f}\right) = \left(\frac{\triangle g}{g} - \frac{\triangle f}{f}\right)\frac{g}{f} - \left(\frac{2}{f}\right)\langle grad\ f, grad\ \left(\frac{g}{f}\right)\rangle$$

$$= \left(\frac{\triangle g}{g} - \frac{\triangle f}{f}\right) h - \left(\frac{2}{f}\right) \langle grad\ f, grad\ h\rangle.$$

Como $g(\partial M) = 0$ e g não é identicamente nula, temos que $h\,(\partial M) = 0$ e h não é identicamente nula. Assim existe um ponto $p \in M$ com $h\,(p) = \sup_{q\in M} h\,(q) > 0$ (logo, $p \in int\,(M)$), mas isso nos diz que p é ponto crítico de h, ou seja, $grad\ h = 0$. Portanto

$$\triangle h\,(p) = \left(\frac{\triangle g}{g}\,(p) - \frac{\triangle f}{f}\,(p)\right) h\,(p) > 0$$

e p é ponto de mínimo de h. Como $h\,(\partial M) = 0$ e $h \geq 0$ temos que $h \equiv 0$ e, consequentemente, $g \equiv 0$. Isto nos dá uma contradição. ■

Um corolário desse resultado nos dará uma cota inferior para o primeiro autovalor, em uma variedade menos uma bola.

Corolário 2.0.1 *Seja u uma função positiva suave definida em M uma variedade completa não-compacta, e seja $r_0 > 0$ uma constante. Então,*

$$\lambda_1(M - B(r_0)) \geq \inf_{M-B(r_0)} \left(-\frac{\triangle u}{u}\right).$$

Prova: Temos por definição que

$$\lambda_1(M - B(r_0)) = \inf_{r>r_0} \lambda_1(A(r_0, r)).$$

Tome uma função $g \geq 0$ em M, não identicamente nula, com $g(\partial M) = 0$ e satisfazendo $\triangle g + \lambda_1(A(r_0, r))g = 0$, o que nos dá

$$\lambda_1(A(r_0, r)) = -\frac{\triangle g}{g}.$$

Pelo Teorema 2.0.2,

$$\inf_{x\in A(r_0,r)} \left(\frac{\triangle g}{g}(x) - \frac{\triangle u}{u}(x)\right) \leq 0.$$

Então,

$$\inf_{x\in A(r_0,r)} \left(-\lambda_1(A(r_0, r)) - \frac{\triangle u}{u}(x)\right) \leq 0.$$

Assim,

$$\lambda_1(A(r_0, r)) \geq \inf_{x \in A(r_0,r)} \left(-\frac{\triangle u}{u}(x) \right).$$

Tomando o ínfimo para $r > r_0$ temos

$$\lambda_1(M - B(r_0)) \geq \inf_{M - B(r_0)} \left(-\frac{\triangle u}{u} \right).$$

■

2.1 Volume e Índice

Apresentamos alguns conceitos relacionados a variações de área que preservam volume.

Seja $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana de dimensão n, completa, de dimensão n+1 e com curvatura média constante, H. Seja $D \subset M$ um domínio, com bordo ∂D suave. Considere N o campo vetorial unitário suave ao longo de M. Denotaremos por $A_D(x)$ a *área de* D na métrica induzida, e

$$V_D(x) = \frac{1}{n+1} \int_D \langle x, N \rangle_p \, dM,$$

o *volume* de D em x, onde dM é a forma elemento de área induzida pela métrica.

Seja $X : (-\epsilon, \epsilon) \times \overline{D} \to \overline{M}^{n+1}$, com $X_t(p) = X(t,p)$ e $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, e tal que a aplicação $X_t : \overline{D} \to \overline{M}$ seja uma imersão para cada t, e $X_0 = x$. Chamamos a aplicação X de uma *variação* de D. Considere $A_D(t) = A_D(X_t)$ e $V_D(t) = V_D(X_t)$ como definidos acima para uma imersão . Dizemos que uma *variação preserva volume* se $V_D(t) = V_D(0)$, para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ e que a *fixa o bordo* se $X_t(p) = X_0(p)$, para todo $p \in \partial D$ e para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Denotaremos por

$$V(p) = \frac{dX_t}{dt}(p)|_{t=0}, \qquad p \in \overline{D},$$

o *vetor variacional* de x_t. Uma variação é *normal* se para todo $p \in \overline{D}$, $V(p) = f(p)N(p)$, onde $f(p)$ é uma função real.

Dada uma variação $X_t : \overline{D}^n \to \overline{M}^{n+1}$ que fixa o bordo, temos (Ver [H])

$$A_D'(0) = -\int_D nHf dM, \qquad V_D'(0) = \int_D f dM,$$

onde as derivadas são tomadas em relação a t, H é a curvatura média de X_0 e fN é o vetor variacional de X_t.

Uma fórmula para a segunda variação de área pode ser encontrada em [dC3] e é a seguinte

$$A''_D(0) = -\int (f\triangle f + \|B\|^2 f^2 + nf\overline{Ric}(N))dM,$$

onde $\triangle$ é o laplaciano de M, B é a segunda forma fundamental de x e $\overline{Ric}(N)$ é o valor da curvatura de Ricci de $\overline{M}^{n+1}$ no campo vetorial unitário suave N ao longo de M.

Definição 2.1.1 Dizemos que um domínio D é *estável* se $A''_D(0) > 0$, para toda variação que preserva volume e fixa o bordo de D. A imersão x é *estável* se todo domínio D é estável.

Seja $X_t : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ como definida anteriormente e seja $D \subset M$ um domínio compacto com bordo suave.

Definição 2.1.2 Um *campo de Jacobi* é um campo vetorial normal $J = fN$, onde $f \in D(M)$,

$$f = 0 \quad em \ \ \partial D, \qquad \int_D f dM = 0$$

e satifaz a *equação de Jacobi*

$$\triangle f + \|B\|^2 f + n\overline{Ric}(N) = 0.$$

Definição 2.1.3 Um bordo ∂D de um domínio $D \subset M$ é um *bordo conjugado* se existe um campo de Jacobi em $\overline{D}$ não nulo tal que $J|_{\partial D} = 0$. Se além disso não existir um domínio $D' \subset D$, $D' \neq D$, tal que $\partial D'$ é um bordo conjugado, dizemos que ∂D é o *primeiro bordo conjugado* de D. A *multiplicidade* de um bordo conjugado ∂D é o número de campos de Jacobi linearmente independentes em $\overline{D}$ que se anulam em ∂D.

Seja o operador $L = \triangle + \|B\|^2 + n\overline{Ric}(N)$, como na Definição 2.1.2. A forma quadrática

$$I(f) = -\int_M fLf \ dM$$

está definida no espaço das funções suaves $f : M \to I\!R$ com suporte compacto. Para cada compacto $K \subset M$ considere a restrição da forma quadrática I ao espaço vetorial das funções suaves com suporte em K. Definimos o índice de L em K, $ind_L K$, como sendo a dimensão máxima do subespaço das funções suaves com suporte em K, onde I é definida negativa.

Definição 2.1.4 O *índice* de M é definido por

$$indM = \sup_{K \subset M} ind_L K,$$

onde o supremo é tomado para todos os domínios compactos $K \subset M$.

O teorema a seguir nos dá uma relação fundamental entre índice e campos de Jacobi. Sua demonstração pode ser encontrada em [S].

Teorema 2.1.1 *[Índice de Morse] - Se M é uma hipersuperfície mínima, então $ind_L K < \infty$ para todo $K \subset M$ compacto. Além disso,*

$$ind_L K = \textit{ número de bordos conjugados contados com suas multiplicidades.}$$

No caso em que a curvatura média de M é constante, porém diferente de zero, o teorema do índice de Morse é análogo e foi demonstrado num trabalho de H. Frid e F. J. Thayer [FT].

Outro resultado útil é a proposição de Fischer-Colbrie. Ela nos mostra que índice finito e estabilidade estão fortemente relacionados. A demonstração dessa proposição pode ser encontrada em [FC].

Proposição 2.1.1 *[Fischer-Colbrie] Se $indM < \infty$ e a curvatura média for constante então existe um compacto $K \subset M$ e uma função positiva u em M tal que $M - K$ é estável e $Lu = 0$ em $M - K$.*

Para o caso $H = const \neq 0$, ao invés de considerarmos a forma quadrática I definida nas funções suaves, consideraremos a sua restrição I_0, às funções suaves com suporte em um compacto K e que tenham média zero, isto é, $\int_M f dM = 0$. Definimos então o índice em relação a I_0 de L em K, $ind_{L_O} K$, como a dimensão máxima do espaço das funções suaves com suporte em K onde I_0 é definida negativa. Da mesma forma que definimos $indM$, defina:

$$ind_0 M = \sup_{K \subset M} ind_{L_0} K.$$

Afirmamos que

$$ind_L K - 1 \leq ind_{L_0} K \leq ind_L K.$$

De fato, a segunda desigualdade é óbvia.
Para provarmos a primeira desigualdade, seja V o subespaço de funções suaves, com suporte em K um compacto onde I é definida negativa. Tome ϕ_V uma aplicação linear dada por

$$\phi_V : V \rightarrow I\!R, \qquad onde \qquad \phi_V(f) = \int_M f dM.$$

Então, $Ker\phi_V$ é um subespaço de funções com suporte compacto e média zero, onde I é definida negativa.
Como $indM < \infty$, temos que $dim\ V < \infty$. Além disso, como a dimensão de $I\!R$ é 1, temos que $dim\ Im\phi_V \leq 1$.
Visto que $dim\ Ker\phi_V + dim\ Im\phi_V = dim\ V$ temos que $dim\ Ker\phi_V \geq dimV - 1$.
Com isso temos a primeira desigualdade.

Uma das hipóteses fundamentais do teorema é a de volume com crecimento polinomial. A idéia dessa definição é que as bolas da variedade cresçam polinomialmente.

Definição 2.1.5 Uma variedade Riemanniana M *tem volume com crescimento polinomial* se para todo $p \in M$, existem $\alpha, c \in I\!R^+$ tais que

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{Vol(B_p(r))}{r^\alpha} = c,$$

onde $B_p(r) \subset M$ é uma bola geodésica de centro p e raio r.

Um exemplo de uma superfície que tem volume com crescimento polinomial e índice infinito é o *cilindro*, $S \times I\!R \subset I\!R^3$. Considere a parametrização

$$X(t, \theta) = (cos\theta, sen\theta, t).$$

Temos que $X_t = (0,0,1)$ e $X_\theta = (-sen\theta, cos\theta, 0)$. Tome $J = fN$ onde $f(t) = sent$ e $N = \frac{X_t \times X_\theta}{|X_t \times X_\theta|}$ é a aplicação Normal de Gauss. Calculando:

$$X_t \times X_\theta = (cos\theta, sen\theta, 0) = N$$

Assim, temos que o volume de uma faixa, C, do cilindro é dado por

$$Vol(C) = \frac{1}{n+1}\int_C \langle X, N\rangle_p \, dM = \frac{1}{n+1}\int_C \langle (cos\theta, sen\theta, t), (cos\theta, sen\theta, 0)\rangle_p \, dM =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_{-h}^{h} dt d\theta = \frac{4}{3}h\pi.$$

Daí resulta que o cilindro tem volume de crescimento linear.

Sabemos que as curvaturas principais do cilindro são $k_1 = 1$ e $k_2 = 0$, daí obtemos que $H = \frac{1}{2}$. Além disso, $\overline{Ric}N = 0$, pois estamos em $I\!R^3$, e $\|B\|^2 = \|DN\| = 1$. Logo, $\nabla f + f = 0$. Tome $D \subset S \times I\!R$ um domínio limitado pelos círculos $t = 0$, $t = 2\pi$. Pelos cálculos feito acima temos que J é um campo de Jacobi em D. Observe que os círculos $t = 0$ e $t = 2\pi$ são bordos conjugados de D; pelo teorema do índice de Morse, o índice do cilindro é infinito.

Agora, daremos um exemplo de superfície cujo volume não cresce polinomialmente.

Exemplo 2.1.1 Considere a superfície de rotação de uma curva perfil com parametrização

$$X(t,\theta) = (e^t cos\theta, e^t sen\theta, t), \quad t \in I\!R \ \ e \ \ \theta \in (0, 2\pi).$$

O volume de X será:

$$Vol(X) = \int_0^{2\pi}\int_{-r}^{r} (EG - F^2)^{\frac{1}{2}} dt d\theta,$$

onde $E = \langle X_\theta, X_\theta\rangle$, $G = \langle X_t, X_t\rangle$ e $F = \langle X_t, X_\theta\rangle$. Calculando

$$X_\theta = (-e^t sen\theta, e^t cos\theta, 0),$$

$$X_t = (e^t cos\theta, e^t sen\theta, 1),$$

e mais, $E = e^{2t}$, $G = e^{2t} + 1$ e $F = 0$, e temos que

$$Vol(X|_{-r}^{r}) = \int_0^{2\pi} \int_{-r}^{r} (e^{2t}(e^{2t}+1))^{\frac{1}{2}} dt d\theta.$$

Tome $e^t = tg\theta$. Então, $e^t dt = sec^2\theta d\theta$. Logo,

$$I = \int sec^2\theta(tg^2\theta + 1)^{\frac{1}{2}} d\theta = \int sec^3\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{sen\theta}{cos^2\theta} + \frac{1}{2}.ln\ (sec\theta + tg\theta).$$

Voltanto as variáveis iniciais, temos

$$I = \frac{1}{2}.\frac{\frac{e^t}{(e^t+1)^{\frac{1}{2}}}}{\frac{1}{((e^t+1)^{\frac{1}{2}})^2}} + \frac{1}{2}.ln\ ((e^t+1)^{\frac{1}{2}} + e^t)$$

$$= \frac{1}{2}.e^t.(e^t+1)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}.ln\ ((e^t+1)^{\frac{1}{2}} + e^t).$$

Então,

$$Vol(X|_{-r}^{r}) = 2\pi \int_{-r}^{r} (e^{2t}(e^{2t}+1))^{\frac{1}{2}} dt$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{2}.(e^r.(e^r+1)^{\frac{1}{2}} - e^{-r}.(e^{-r}+1)^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}.ln\ \left(\frac{(e^r+1)^{\frac{1}{2}} + e^r}{(e^{-r}+1)^{\frac{1}{2}} + e^{-r}} \right) \right)$$

$$= \pi \left(e^r.(e^r+1)^{\frac{1}{2}} - e^{-r}.(e^{-r}+1)^{\frac{1}{2}} + ln\ \left(\frac{(e^r+1)^{\frac{1}{2}} + e^r}{(e^{-r}+1)^{\frac{1}{2}} + e^{-r}} \right) \right).$$

Isso nos dá que o volume dessa superfície cresce exponencialmente.

Provaremos agora um lema que será fundamental para a demonstração do teorema principal.

Lema 2.1.1 *Suponha que uma variedade Riemanniana M tenha volume com crescimento polinomial e seja $r_0 > 0$ uma constante. Então*

$$\lambda_1(M - B(r_0)) = 0.$$

Prova: Seja r a função distância para o ponto $p \in M$. Fixe um número $r_1 > r_0$ e defina a função radial $f : B(r_1) \to I\!R$ por

$$f(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le r \le r_0, \\ r - r_0 & \text{se } r_0 \le r \le r_0 + \frac{1}{8}r_1, \\ \frac{1}{8}r_1 & \text{se } r_0 + \frac{1}{8}r_1 \le r \le \frac{7}{8}r_1, \\ r_1 - r & \text{se } \frac{7}{8}r_1 \le r \le r_1. \end{cases}$$

Pela Proposição 2.0.1

$$\lambda_1(A(r_0, r_1)) \le \frac{\int_{A(r_0,r_1)} \| \, grad \ f\|^2 dM}{\int_{A(r_0,r_1)} f^2 dM}.$$

Agora, como

$$\int_{A(r_0,r_1)} \| \, grad \ f\|^2 dM = Vol\,(A(r_0, r_1)) - Vol\left(A\left(r_0 + \frac{r_1}{8}, \frac{7r_1}{8}\right)\right) \le Vol\,(A(r_0, r_1))$$

e

$$\int_{A(r_0,r_1)} f^2 dM$$

$$= \int_{A(r_0, r_0 + \frac{r_1}{8})} (r - r_0)^2 \, dM + \int_{A(\frac{7r_1}{8}, r_1)} (r_1 - r)^2 \, dM + \frac{r_1^2}{64} Vol\left(A\left(r_0 + \frac{r_1}{8}, \frac{7r_1}{8}\right)\right)$$

$$\ge \frac{r_1^2}{64} Vol\left(A\left(r_0 + \frac{r_1}{8}, \frac{7}{8}r_1\right)\right),$$

temos que

$$\frac{\int_{A(r_0,r_1)} \| \, grad \ f\|^2 dM}{\int_{A(r_0,r_1)} f^2 dM} \le \frac{Vol\,(A(r_0, r_1))}{\frac{r_1^2}{64} Vol\left(A\left(r_0 + \frac{1}{8}r_1, \frac{7}{8}r_1\right)\right)}.$$

Logo,

$$\frac{1}{64}r_1^2\lambda_1\left(A\left(r_0,r_1\right)\right) \leq \frac{Vol\left(A(r_0,r_1)\right)}{Vol\left(A\left(r_0+\frac{1}{8}r_1,\frac{7}{8}r_1\right)\right)} = \frac{Vol\left(B\left(r_1\right)\right)-Vol\left(B\left(r_0\right)\right)}{Vol\left(B\left(\frac{7}{8}r_1\right)\right)-Vol\left(B\left(r_0+\frac{1}{8}r_1\right)\right)}.$$

Pela Proposição 2.0.2, temos que se $r > s$, então $\lambda_1(A(r_0,r)) < \lambda_1(A(r_0,s))$.

Assim, para toda seqüência $\{r_i\}$ onde $r_i < r_{i+1}$ e $r_i \to \infty$ temos que $\lim\limits_{r_i\to\infty}\lambda_1(A(r_0,r_i))$ existe. Se provarmos que

$$Q_i := \frac{Vol\left(B\left(r_i\right)\right)-Vol\left(B\left(r_0\right)\right)}{Vol\left(B\left(\frac{7}{8}r_i\right)\right)-Vol\left(B\left(r_0+\frac{1}{8}r_i\right)\right)} \tag{2.1}$$

é limitado quando $r_i \to \infty$, teremos

$$\lim_{r_i}\lambda_1\left(A\left(r_0,r_i\right)\right) \leq \lim_{r_i}\frac{64Q_i}{r_i^2} = 0,$$

para qualquer seqüência de $\{r_i\}$, onde $r_i < r_{i+1}$. Então,

$$\lambda_1(M - B(r_0)) = 0.$$

Provaremos agora que a expressão (2.1) é limitada. Como M tem volume com crescimento polinomial, fixado $p \in M$, existem $\alpha, c \in I\!R^+$ tais que

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{Vol(B_p(r))}{r^\alpha} = c. \tag{2.2}$$

Assim existe uma seqüência não-decrescente $\{q_i\}$ de raios, com $q_i \to \infty$,, satisfazendo

$$\limsup_{q_i\to\infty}\frac{Vol(B_p(q_i))}{q_i^\alpha} = c. \tag{2.3}$$

Agora, considere a seqüência $r_i = \frac{8}{7}q_i$ e tome r_0 e r_1 tais que $r_0 < \left(\frac{3}{4}-\varepsilon\right)r_1$, para algum $\varepsilon > 0$ fixo. Como $r_i < r_{i+1}$ temos que

$$r_0 + \frac{1}{8}r_i < \left(\frac{3}{4}-\varepsilon\right)r_1 + \frac{1}{8}r_i < \left(\frac{3}{4}-\varepsilon\right)r_i + \frac{1}{8}r_i < \left(\frac{7}{8}-\varepsilon\right)r_i, \quad i = 1,2,...$$

o que nos dá

$$Vol\left(B\left(r_0+\frac{1}{8}r_i\right)\right) < Vol\left(B\left(\left(\frac{7}{8}-\varepsilon\right)r_i\right)\right).$$

Então

$$Q_i = \frac{Vol\left(B\left(r_i\right)\right) - Vol\left(B\left(r_0\right)\right)}{Vol\left(B\left(\frac{7}{8}r_i\right)\right) - Vol\left(B\left(r_0 + \frac{1}{8}r_i\right)\right)} < \frac{Vol\left(B\left(r_i\right)\right)}{Vol\left(B\left(\frac{7}{8}r_i\right)\right) - Vol\left(B\left(r_0 + \frac{1}{8}r_i\right)\right)}$$

$$< \frac{Vol\left(B\left(r_i\right)\right)}{Vol\left(B\left(\frac{7}{8}r_i\right)\right) - Vol\left(B\left(\left(\frac{7}{8} - \varepsilon\right) r_i\right)\right)}.$$

Ou seja, ficamos reduzidos a provar que

$$\frac{Vol\left(B\left(r_i\right)\right)}{Vol\left(B\left(\frac{7}{8}r_i\right)\right) - Vol\left(B\left(\left(\frac{7}{8} - \varepsilon\right) r_i\right)\right)}$$

é limitado quando $r_i \to \infty$. Agora, visto que

$$\limsup_{r_i \to \infty} \frac{Vol(B_p(r_i))}{r_i^\alpha} \leq c,$$

vemos que, para todo $\delta > 0$, $Vol\left(B\left(r_i\right)\right) \leq c\left(1+\delta\right) r_i^\alpha$, a menos de um número finito de $r_i's$. Seja $d = (1+\delta)\, c$. Então, a menos de um número finito de $r_i's$,

$$\frac{Vol\left(B\left(r_i\right)\right)}{Vol\left(B\left(\frac{7}{8}r_i\right)\right) - Vol\left(\left(\frac{7}{8} - \varepsilon\right) r_i\right)} \leq \frac{dr_i^\alpha}{Vol\left(B\left(\frac{7}{8}r_i\right)\right) - d\left(\frac{7}{8} - \varepsilon\right)^\alpha r_i^\alpha}.$$

Então,

$$\lim_{r_i \to \infty} \frac{Vol\left(B\left(r_i\right)\right)}{Vol\left(B\left(\frac{7}{8}r_i\right)\right) - Vol\left(\left(\frac{7}{8} - \varepsilon\right) r_i\right)} \leq \lim_{r_i \to \infty} \frac{dr_i^\alpha}{Vol\left(B\left(\frac{7}{8}r_i\right)\right) - d\left(\frac{7}{8} - \varepsilon\right)^\alpha r_i^\alpha}$$

$$\leq \lim_{r_i \to \infty} \frac{\frac{dr_i^\alpha}{d\left(\frac{7}{8}\right)^\alpha r_i^\alpha}}{\frac{Vol\left(B\left(\frac{7}{8}r_i\right)\right)}{d\left(\frac{7}{8}\right)^\alpha r_i^\alpha} - \frac{d\left(\frac{7}{8}-\varepsilon\right) r_i^\alpha}{d\left(\frac{7}{8}\right)^\alpha r_i^\alpha}} = \lim_{r_i \to \infty} \frac{\frac{1}{\left(\frac{7}{8}\right)^\alpha}}{\frac{Vol\left(B\left(\frac{7}{8}r_i\right)\right)}{d\left(\frac{7}{8}\right)^\alpha r_i^\alpha} - \frac{\left(\frac{7}{8}-\varepsilon\right)^\alpha}{\left(\frac{7}{8}\right)^\alpha}}.$$

Como $r_i = \frac{8}{7}q_i$ temos

$$\lim_{q_i \to \infty} \frac{Vol\left(B\left(\frac{7}{8}r_i\right)\right)}{d\left(\frac{7}{8}\right)^\alpha r_i^\alpha} = \lim_{q_i \to \infty} \frac{Vol\left(B\left(q_i\right)\right)}{dq_i^\alpha} = \frac{c}{d},$$

onde na última igualdade usamos a expressão (2.3). Então,

$$\lim_{r_i \to \infty} \frac{\frac{1}{\left(\frac{7}{8}\right)^\alpha}}{\frac{Vol\left(B\left(\frac{7}{8}r_i\right)\right)}{d\left(\frac{7}{8}\right)^\alpha r_i^\alpha} - \frac{\left(\frac{7}{8}-\varepsilon\right)^\alpha}{\left(\frac{7}{8}\right)^\alpha}} = \frac{\frac{1}{\left(\frac{7}{8}\right)^\alpha}}{\frac{c}{d} - \frac{\left(\frac{7}{8}-\varepsilon\right)^\alpha}{\left(\frac{7}{8}\right)^\alpha}}$$

$$= \frac{\frac{1}{\left(\frac{7}{8}\right)^\alpha}}{\frac{c\left(\frac{7}{8}\right)^\alpha - d\left(\frac{7}{8}-\varepsilon\right)^\alpha}{\left(\frac{7}{8}\right)^\alpha d}} = \frac{d}{c\left(\frac{7}{8}\right)^\alpha - d\left(\frac{7}{8}-\varepsilon\right)^\alpha}$$

$$= \frac{(1+\delta)\, c}{c\left(\frac{7}{8}\right)^\alpha - (1+\delta)\, c\left(\frac{7}{8}-\varepsilon\right)^\alpha} = \frac{(1+\delta)}{\left(\frac{7}{8}\right)^\alpha - (1+\delta)\left(\frac{7}{8}-\varepsilon\right)^\alpha}.$$

Como ε é fixo, posso tomar δ tão pequeno que o denominador seja estritamente positivo. Isto mostra que a expressão (2.1) é limitada, demonstrando o lema. ■

2.2 Teorema Principal

Como dito na Introdução, provaremos agora um teorema de Alencar - do Carmo, que nós dá uma cota superior para a curvatura média de uma hipersuperfície, quando esta for constante admitindo certas hipóteses sobre seu volume e índice.

Seja M^n uma variedade Riemanniana de dimensão n, completa, não compacta e $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade Riemanniana de dimensão $n+1$, orientável e completa.

Teorema 2.2.1 *[Alencar - do Carmo] Seja M^n e $\overline{M}^{n+1}$ como acima e $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica com curvatura média constante H. Suponha que M tem volume com crescimento polinomial e $indM < \infty$. Então, existe uma constante $r_0 > 0$ tais que*

$$H^2 \leq -\inf_{M-B(r_0)} \overline{Ric}(N),$$

onde $\overline{Ric}(N)$ é o valor da curvatura de Ricci de $\overline{M}^{n+1}$ no campo vetorial unitário suave N ao longo de M.

Prova: Visto que $indM < \infty$ temos, usando o resultado de Fischer-Colbrie que existe um compacto $K \subset M$ e uma função positiva u em M tal que

$$Lu = \triangle u + \|B\|^2 u + n\overline{Ric}(N)u = 0$$

em $M - K$. Assim,

$$\|B\|^2 + n\overline{Ric}(N) = -\frac{\triangle u}{u}.$$

Fixe $p \in K$ e $r_0 > 0$ tal que $K \subset B\,(r_0)$. Pelo Lema 2.1.1, $\lambda_1(M - B(r_0)) = 0$ e pelo Corolário 2.0.1, temos que

$$0 = \lambda_1(M - B(r_0)) \geq \inf_{M-B(r_0)} \left(-\frac{\triangle u}{u}\right) = \inf_{M-B(r_0)} \{\|B\|^2 + n\overline{Ric}(N)\}.$$

Então, usando a Proposição 1.1.8, obtemos:

$$0 \geq \inf_{M-B(r_0)} \{\|B\|^2 + n\overline{Ric}(N)\} \geq \inf_{M-B(r_0)} \{nH^2 + n\overline{Ric}(N)\},$$

e, como H é constante,

$$nH^2 \leq -\inf_{M-B(r_0)} n\overline{Ric}(N) = -n \inf_{M-B(r_0)} \overline{Ric}(N),$$

o que nos dá

$$H^2 \leq -\inf_{M-B(r_0)} \overline{Ric}(N).$$

■

Este teorema tem conseqüêcias interessantes. O corolário à seguir mostra que se a curvatura de Ricci de $\overline{M}^{n+1}$ não é negativa, qualquer hipersuperfície completa, não-compacta, de curvatura média constante com índice finito e volume com crescimento polinomial, é mínima.

Corolário 2.2.1 *Seja $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ como no Teorema 2.2.2. Se $\overline{Ric} \geq 0$, então $H \equiv 0$.*

Prova: Se $\beta = \inf_{M-B(r_0)} \overline{Ric}(N) \geq 0$, pelo Teorema 2.2.2, temos que

$$0 \leq H^2 \leq -\inf_{M-B(r_0)} \overline{Ric}(N) = -\beta \leq 0.$$

Logo, $H \equiv 0$. ■

Observação 2.2.1 No caso em que $\overline{M}^{n+1} = I\!R^{n+1}$, o Corolário anterior generaliza um teorema de Chern [C], que diz: "Gráficos completos M, com curvatura média constante em $I\!R^{n+1}$ são mínimos."
Isto segue do fato que gráficos são fortemente estáveis (isto é, $indM = 0$) e o volume de M cresce polinomialmente. Isso mostra que a finitude do índice e o fato do volume de M crescer polinomialmente são suficientes para a conclusão do teorema de Chern.

Afirmação 2.2.1 Gráficos completos M, com curvatura média constante em $I\!R^{n+1}$ são fortemente estáveis.

Seja M dada pelo gráfico de $y = f(x)$, onde $x \in I\!R^n$. Se tomarmos uma variação M_t de M (Figura 2.1), onde essa variação é uma translação ao longo do eixo y, teremos que a derivada dessa variação com relação a t será uma função que satisfaz a equação de Jacobi e, portanto, sua projeção normal $fN = J$ será um campo de Jacobi de M não-nulo.

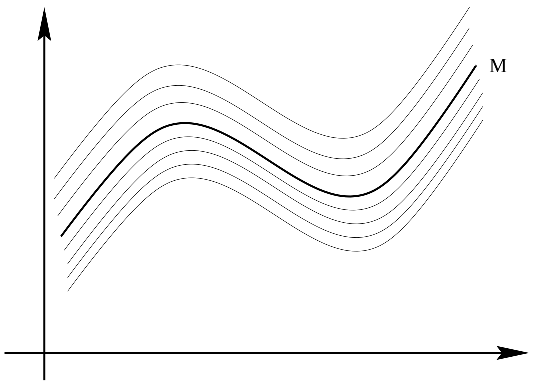


Figura 2.1: Variações do gráfico M

Agora suponha que exista um domínio $D \subset M$ tal que D é não-vazio e não é estável. Então existirá uma função g, tal que $gN = \tilde{J}$ é um campo de Jacobi de M não-nulo, tal que $\tilde{J}|_{\partial D} = 0$. Faça contrações ou dilatações em gN que continuem se anulando no bordo de D até que este tangencie fN pela primeira vez (Figura 2.2). Como contrações , dilatações e diferenças de campo de Jacobi são campos de Jacobi, temos que $\overline{J} = fN - gN$ será um campo de Jacobi de M que se anula num ponto do interior de D. Pelo princípio do máximo de Hopf, $g = f$. Isto é um absurdo, pois $J|_{\partial D} \neq 0$ e $\tilde{J}|_{\partial D} = 0$.

Afirmação 2.2.2 Gráficos completos M em $I\!R^{n+1}$, com curvatura média constante, têm volume com crescimento polinomial.

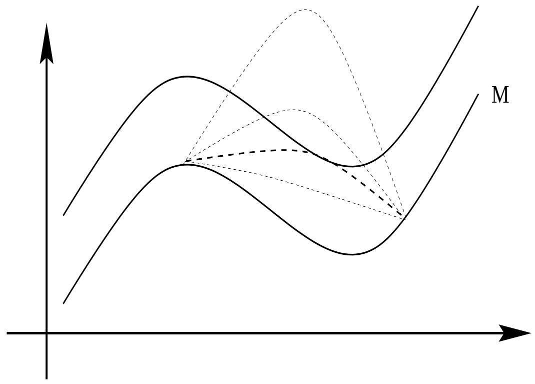


Figura 2.2: Campo de Jacobi de M

Seja u qualquer função suave definida em um conjunto aberto de $I\!R^n$. Defina

$$\delta_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{n} v_i v_j \frac{\partial u}{\partial x_j},$$

neste conjunto aberto, onde

$$(v_1, ..., v_n) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial u}{\partial x_i})^2}} (\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}),$$

é o vetor normal unitário à superficie S dada por $u(x) = 0$.

A prova da proposição seguinte pode ser encontrada em [Bo].

Proposição 2.2.1 - *(Bombieri) - Seja S uma hipersuperfície em $I\!R^n$ e u uma função suave em R^n. Então, se $u|_S$ tem suporte compacto*

$$\int_S \delta_i u = (n-1) \int_S u H v_i,$$

onde H é a curvatura média de S.

Agora seja M um gráfico em $I\!R^{n+1}$ dado por $x_{n+1} = v(x_1, ..., x_n)$ isto é, M é dada por $u(x_1, ..., x_n) = x_{n+1} - v(x_1, ..., x_n) = 0$. O vetor

$$(v_1, ..., v_{n+1}) = -\frac{1}{\sqrt{1 + |grad\ v|^2}} (\frac{\partial v}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial v}{\partial x_n}, -1)$$

é normal e unitário à M. Assim a curvatura média H de M é dada por

$$H = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{1}{n} div\ V,$$

onde $V = (v_1, ..., v_n)$. Observe que $|V| \leq 1$.

Seja $D(r)$ o disco de raio r em $I\!R^n$. Usando o teorema da divergência, temos que

$$\int_{D(r)} H = \frac{1}{n}\int_{D(r)} div\ V = \frac{1}{n}\int_{\partial D(r)} < V, \eta > \leq \frac{1}{n} Vol(S^{n-1}(r)) = \frac{1}{n} w_n r^{n-1},$$

onde η é o vetor normal unitário a $\partial D(r)$ apontando para fora e w_n é o volume da esfera unitária do $I\!R^n$ $(S^{n-1}(1))$, ver figura 2.3.

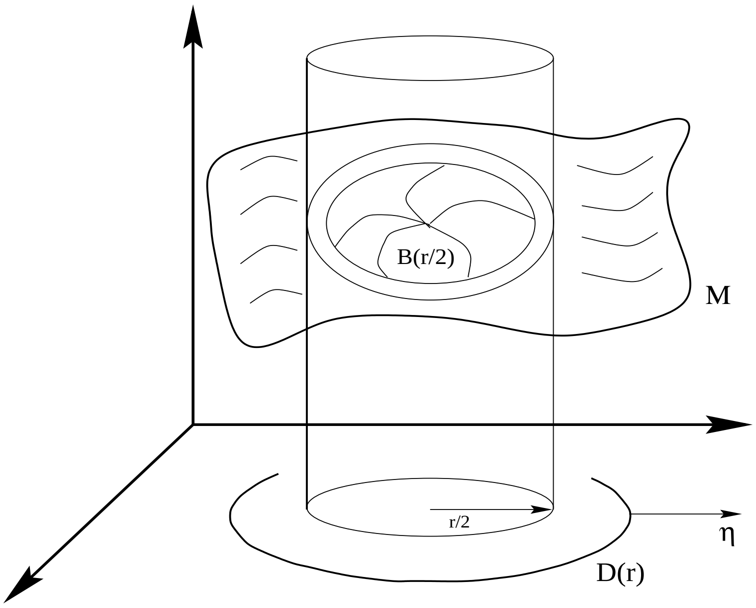
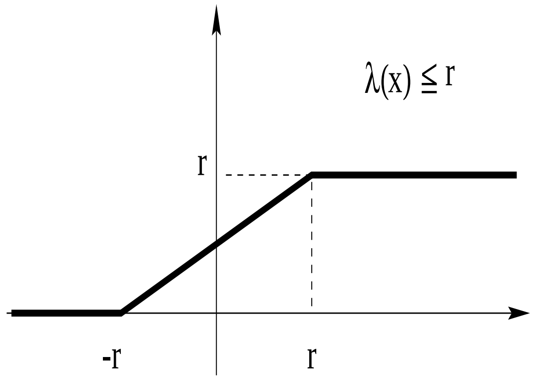


Figura 2.3: Interseção do gráfico M com um cilindro do $I\!R^{n+1}$

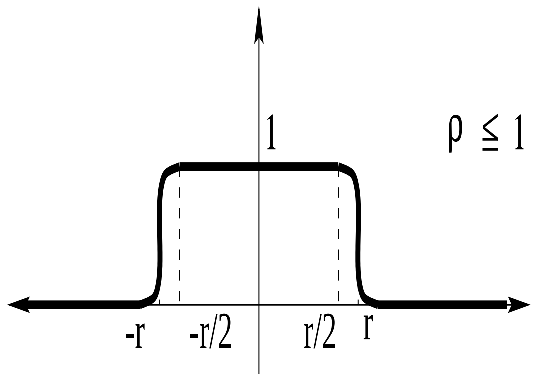
Agora, defina $\lambda : I\!R \to I\!R$, uma função suave tal que

$$\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq -r, \\ \lambda'(x) \leq 1 & \text{se } -r \leq x \leq r, \\ r & \text{se } x \geq r. \end{cases}$$



Defina também $\rho : I\!\!R^n \to I\!\!R$, uma função suave, tal que

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| \geq r, \\ 1 & \text{se } |x| \leq \frac{r}{2}, \\ |grad\ \rho| \leq \frac{1}{2r}. & \end{cases}$$



Portanto, a função $\rho\lambda : I\!\!R^{n+1} \to I\!\!R$, definida por

$$\rho\lambda(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) = \rho(x_1, ..., x_n,)\lambda(x_{n+1}),$$

tem suporte compacto. Usando a Proposição 2.2.1, temos

$$\int_M \delta_{n+1}(\rho(x_1, ..., x_n)\lambda(x_{n+1})) = n \int_M \rho\lambda H v_{n+1}.$$

Temos, ainda,

$$\delta_{n+1}(\rho\lambda) = \frac{\partial(\rho\lambda)}{\partial x_{n+1}} - \sum_{j=1}^{n+1} v_{n+1} v_j \frac{\partial(\rho\lambda)}{\partial x_j}$$

$$= \lambda(x_{n+1}) \frac{\partial \rho}{\partial x_{n+1}}(x_1, ..., x_n) + \rho(x_1, ..., x_n)\lambda'(x_{n+1}),$$

$$-\lambda(x_{n+1})v_{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial \rho}{\partial x_j}(x_1, ..., x_n) - \rho(x_1, ..., x_n)v_{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} v_j \frac{\partial \lambda}{\partial x_j}(x_{n+1})$$

$$= \rho(x_1, ..., x_n)\lambda'(x_{n+1}) - \lambda(x_{n+1})v_{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial \rho}{\partial x_j} - \rho(x_1, ..., x_n)v_{n+1}v_{n+1} \frac{\partial \lambda}{\partial x_{n+1}}(x_{n+1})$$

$$= \rho(x_1, ..., x_n)\lambda'(x_{n+1})(1 - v_{n+1}^2) - \lambda(x_{n+1})v_{n+1} < V, grad\ \rho >,$$

concluimos que

$$(*) \qquad \int_M \rho\lambda'(1 - v_{n+1}^2)dM = \int_M \lambda v_{n+1} < V, grad\ \rho > dM + \int_M \delta_{n+1}(\rho\lambda)dM =$$

$$= \int_M \lambda v_{n+1} < V, grad\ \rho > dM + n \int_M \rho\lambda H v_{n+1} dM.$$

Agora,

$$\int_{\left\{ \begin{array}{l} -r \leq x_{n+1} \leq r \\ x_1^2 + ... + x_n^2 \leq (\frac{r}{2})^2 \end{array} \right\} \cap M} (1 - v_{n+1}^2)dM \leq \int_M \rho\lambda'(1 - v_{n+1}^2)dM.$$

Por (*) temos

$$\int_M \rho(x_1, ..., x_n)\lambda'(x_{n+1})(1 - v_{n+1}^2)dM$$

$$= n \int_M \rho\lambda H v_{n+1} dM + \int_M \lambda v_{n+1} < V, grad\ \rho > dM.$$

Então,

$$\iint_{\left\{\begin{array}{l} -r \leq x_{n+1} \leq r \\ x_1^2 + ... + x_n^2 \leq (\frac{r}{2})^2 \end{array}\right\} \cap M} (1 - v_{n+1}^2) dM \leq n \int_M \rho \lambda v_{n+1} dM + \int_M \lambda v_{n+1} < V, grad\ \rho > dM$$

$$\leq r.n \int_{D(r)} H d\tilde{M} + \int_{D(r)} |grad\ \rho| \lambda (x_{n+1}) d\tilde{M},$$

onde $v_{n+1} dM = d\tilde{M}$.

Assim,

$$\iint_{\left\{\begin{array}{l} -r \leq x_{n+1} \leq r \\ x_1^2 + ... + x_n^2 \leq (\frac{r}{2})^2 \end{array}\right\} \cap M} (1 - v_{n+1}^2) dM \leq r w_n r^{n-1} + \int_{D(r)} \frac{1}{2r} r d\tilde{M} = \frac{3}{2} w_n r^n.$$

Usando a estimativa acima, obtemos que

$$Vol(B(\frac{r}{2})) \leq \iint_{\left\{\begin{array}{l} -r \leq x_{n+1} \leq r \\ x_1^2 + ... + x_n^2 \leq (\frac{r}{2})^2 \end{array}\right\} \cap M} 1$$

$$\leq \frac{3}{2} w_n r^n + \iint_{\left\{\begin{array}{l} -r \leq x_{n+1} \leq r \\ x_1^2 + ... + x_n^2 \leq (\frac{r}{2})^2 \end{array}\right\} \cap M} v_{n+1}^2 dM \leq \frac{5}{2} w_n r^n,$$

onde consideramos $v_{n+1}^2 dM = d\overline{M}$. O que prova a afirmação 2.2.2.

Corolário 2.2.2 *Seja* $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ *como no Teorema* 2.2.2. *Se* $\overline{Ric} \leq 0$ *e* $\inf_{\overline{M}} \overline{Ric}(N) = -\delta$; $\delta > 0$, *então* $H^2 \leq \delta$. *Em particular, se* $\overline{M}^{n+1}$ *é o espaço hiperbólico* $H^{n+1}(-1)$ *com curvatura seccional* -1, *então* $H^2 \leq 1$.

Prova: Se $\overline{Ric} \leq 0$ e $\inf_{\overline{M}} \overline{Ric}(N) = -\delta$, então $\inf_{M - B(r_0)} \overline{Ric}(N) \geq -\delta$. Assim, usando o Teorema 2.2.2, temos que

$$H^2 \leq - \inf_{M - B(r_0)} \overline{Ric}(N) \leq \delta.$$

■

A condição de que $indM < \infty$ é certamente necessária para o Teorema 2.2.2, conforme mostra o exemplo do cilindro feito na seção anterior.

Outros exemplos são as superfícies de Delaunay em $I\!R^3$, pois elas tem índice infinito e volume com crescimento linear.

Usando essencialmente a mesma idéia da prova do Teorema 2.2.2, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.2.2 *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa, não-compacta e $L = \triangle + q$ um operador em M onde q é uma função suave em M. Suponha que M tem volume com crescimento polinomial e que o índice de L seja finito ($indM < \infty$). Então, existe uma constante $r_0 > 0$ tal que*

$$\inf_{M-B(r_0)} q \leq 0.$$

Prova: Usando o resultado de Fischer-Colbrie, pois $indM < \infty$, temos que existem um compacto $K \subset M$ e uma função positiva u em M tais que

$$Lu = \triangle u + qu = 0$$

em $M - K$. Assim,

$$q = -\frac{\triangle u}{u}$$

Fixe $p \in K$ e $r_0 > 0$ tal que $K \subset B(r_0)$. Assim pelo Lema 2.1.1 $\lambda_1(M - B(r_0)) = 0$ e, pelo Corolário 2.0.1,

$$0 = \lambda_1(M - B(r_0)) \geq \inf_{M-B(r_0)} \left(-\frac{\triangle u}{u} \right) = \inf_{M-B(r_0)} q.$$

Ou seja,

$$\inf_{M-B(r_0)} q \leq 0.$$

■

Neste trabalho nos restrigimos a volume com crescimento polinomial utilizando um teorema de oscilação de equações diferenciais ordinárias, que não queremos tratar aqui, do Carmo e Zhou em [dCZ] demonstraram um resultado semelhante ao encontrado neste trabalho envolvendo volume com crescimento exponencial, mas isto já é uma outra história.

Referências

[AdC1] **Alencar, H. and do Carmo, M.** , Hypersurfaces of constant mean curvature with finite index and volume of polynomial growth, Arch. Math. , vol.60, 489-483(1993).

[AdC2] **Alencar, H. and do Carmo, M.** , Erratum to "Hypersurfaces of constant mean curvature with finite index and volume of polynomial growth", Arch. Math. , vol.65, 271-272(1995).

[B] **Berard, P.** , Analysis on Riemannian manifolds and geometric applications: an introduction, Monografias de Matemática nº42, IMPA, 25-34.

[BdC] **Barbosa, J. L., do Carmo, M.** , Stability of hypersurfaces with constant mean curvature, Math. Z. 185, 339-353 (1984).

[Bo] **Bombieri, E.** , Theory of Minimal Surfaces and a Counter-Example to the Bernstein Conjecture in High Dimension, Lectures at the Courant Institute, New York University, 1970.

[dCD] **do Carmo, Manfredo P. and M. Dajczer** , Helicoidal surfaces with constante mean curvature, Tôhoku Math. J. 34, 425-435, 1982.

[dC1] **do Carmo, Manfredo P.** , Rimannian Geometry, Birkhauser, 1ªedição.

[dC2] **do Carmo, Manfredo P.** , Differential Geometry of curves and surfaces, Printice-Hall, 1ªedição.

[dC3] **do Carmo, Manfredo P.** , Hypersufaces of constant mean curvature. Lecture Notes in Math. 1410, Springer, 128-144.

[dCZ] **do Carmo, Manfredo P. and Zhou, Detang** , Eigenvalue estimate on complete noncompacta Riemannian manifolds and applications, American Math.

Society, vol. 351, 1391-1401, n 4 (1999).

[CY] Cheng, S. T. and Yau, S. T. , Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications, Comm. Pure Appl. Math. 28, 333-354 (1975).

[C] Chern, S. S. , A non-existence theorem for stable constant mean curvature hypersurfaces, Manuscripta Math.70, 219-226(1991).

[CH] Cheung, S. S. , On the curvatures of a piece of hypersurface in Euclidean space. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 29, 77-91 (1965).

[Da] Darboux, G. , Leçons sur la Théorie Génerale des surfaces, Chelsea Publish. Co. New York, 3rd edition, 1972, Vol. III, pp. 314 and 315.

[De] Delaunay, C. , Sur la suface de revolution dont la courbure moyenne est constante. J. Math. Pure et App., 16, 309-321, 1841.

[F] Frid, H. , O teorema do Índice de Morse. Master's Thesis, IMPA (1982).

[FT] Frid, H. and Thayer, F.J. , The Morse Index Theorem for Elliptic Problems with a Constaint. An. Acad. Brasil. Ci. 55, 9-10(1983).

[FC] Fischer-Colbrie, D. , On complete minimal surfaces with finite Morse index in three-manifolds, Invent. Math. 82, 121-132, (1985).

[H] Hopf, Heinz , Differential Geometry in the Large, Lecture Notes in Math. 1000, Springer (1983).

[S] Smale, S. , On the Morse Index Theorem, Journal of Math. and Mechanics, vol. 14, n 6, 1049-1055 (1965).

[W] Wente, H. , Counterexample to a conjecture of H. Hopf, Pacific J. Math.,121, 193-243 (1986).