

Dissertação para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo pelo:  
**INSTITUTO NACIONAL DE MATEMATICA PURA E  
APLICADA.**

Título:

**SUPERFÍCIES CÚBICAS PROJETIVAS NÃO  
SINGULARES**

Por:

**CLEBER HAUBRICHS DOS SANTOS**

Abril de 2001

Dedico este trabalho

À memória de  
**Marcus “Cauchy” da Rosa e Silva.**  
Enquanto este amigo for lembrado com carinho,  
permanecerá vivo entre nós.

&

Ao nascimento de  
**Rafaela Haubrichs Santos de Souza.**  
Com que ansiedade esperávamos por ambas.  
Chegaram. Isso muito nos alegra!

## Agradecimentos

Agradeço ao meu Deus, Criador do universo (em particular, da Matemática) e Senhor da vida (em particular, dos Matemáticos). Foi pela Sua graça que cheguei até aqui.

Aos meus pais, Jarbas Antônio dos Santos e Edilma Haubrichs dos Santos, aos meus irmãos Cyone e Rafael, e aos demais familiares. O apoio deles em todos os momentos da minha vida tem sido fundamental.

Ao meu orientador Karl Otto Stöhr, o alemão mais tupiniquim que já conheci. Geometrista de primeira linha, soube escolher um belo tema e conduzir este seu aluno por ele com paciência e segurança.

Aos professores da UERJ e do IMPA, não só responsáveis pela minha formação matemática, mas também pela minha empolgação com a matemática. Em particular, Christina Waga, Sílvio Pinha, Maurício Vilches e Sérgio Luiz da UERJ e Carlos Isnard, Yves Lequain e Arnaldo Garcia do IMPA.

Aos professores Eduardo Esteves, Paulo Sad e Paulo Henrique, membros da minha banca examinadora. Agradeço pela gentileza de cada um em aceitar meu convite para compôr a banca e pela leitura atenciosa e crítica deste trabalho.

Aos amigos e colegas que tenho no IMPA. Dois anos de convivência diária: Algumas aflições e muitas vitórias. Agradeço especialmente à minha turma de mestrado 1999: Alexander Eduardo, Ary Medino, Carlos Matheus, Dayse Pastore, Jeronimo Noronha e Roberto Imbuzeiro. E também: Cláudia Santana, Sumaya, Silas Fantin e Fábio Chalub.

Aos amigos que conquistei com o passar dos anos. Meus irmãos em Cristo da Igreja Batista em Parque Allian, São João de Meriti, onde sou membro. E também aos amigos: Marcelo Ferreira, Julia Wrobel, Gustavo Silva e Angelica Brasil.

Aos pacientes colegas que assistiram minhas prévias e indicaram/sugeriram maneiras de melhorar meu trabalho: Patrícia Helena, Jorge Vitória, Juscelino Santos e Luciane Conte.

E finalmente, agradeço à CAPES pelo suporte financeiro. Dinheiro é a parte menos poética no processo de criação; mas, como sempre, indispensável para o desenvolvimento científico de um país.

*“Quem escreve ou pinta  
ou ensina ou dança  
ou faz cálculos em termos de matemática,  
faz milagre todos os dias.  
É uma grande aventura  
e exige muita coragem e devoção  
e muita humildade.”*

*—Clarice Lispector—*

# Sumário

<b>Introdução</b>	06
<b>1. Retas Sobre Superfícies</b>	08
1.I. Conceitos Básicos e o Teorema da Dimensão das Fibras	08
1.II. Coordenadas de Plücker	10
1.III. Retas Sobre Superfícies	13
1.IV. Alguns Exemplos de Retas Sobre Superfícies Cúbicas	16
<b>2. O Teorema de Cayley &amp; Salmon</b>	24
2.I. O Teorema de Cayley e Salmon	24
2.II. A Tabela de Interseção de Schläfli	32
2.III. Pares Triedais e Normalizações	36
Apêndice: A Tabela de Interseção de Schläfli	
<b>3. As Matrizes de Interseção</b>	41
3.I. Número de Interseção, Divisores e Grupo de Picard	41
3.II. Subgrupo de Picard Gerado Pelas 27 Retas	46
3.III. Redução da Ordem da Matriz de Interseção	48
3.IV. Outras Considerações Sobre o Teorema de Cayley e Salmon	49
<b>4. Implodindo Retas da Superfície Cúbica Não Singular</b>	52
4.I. Blow Up e Blow Down: Definições e Resultados	52
4.II. Blowing Up de Cinco Pontos	55
4.III. Blowing Up de Seis Pontos	65
<b>Bibliografia</b>	70

## Introdução

Neste trabalho estudaremos as superfícies cúbicas projetivas não singulares no espaço projetivo de dimensão 3 sobre um corpo algebricamente fechado  $k$ . Tais superfícies são dadas por equações do tipo  $F(X_0, X_1, X_2, X_3) = 0$  onde  $F$  é um polinômio (não nulo) homogêneo de grau 3 a 4 variáveis. Já nessa frase vemos o sentido das palavras “cúbica” e “projetiva”. A palavra “cúbica” faz referência ao grau 3 da equação, e a palavra “projetiva” reflete-se no fato de o polinômio ser homogêneo.

Quanto à questão da singularidade, estamos assumindo que vale o Critério de Jacobi que afirma que “um ponto sobre a superfície  $F = 0$  é singular se e somente se todas as derivadas parciais de  $F$  anulam-se nesse ponto” ([sh], pág 97). Dizemos que uma superfície é não singular quando nenhum de seus pontos é singular.

No texto que segue, quase sempre omitiremos o adjetivo “projetiva” e eventualmente trocaremos o adjetivo “não singular” por um sinônimo, à saber, “lisa” (que é exatamente a idéia geométrico-intuitiva de não singularidade: ausência de bicos, rugas ou dobras).

A qualidade da Matemática exposta nesta dissertação certamente não vem por esforço do autor, mas vem pela própria beleza e simplicidade de seus resultados. Em sua maioria são resultados antigos (alguns deles remontam os meados do século XIX), mas que sempre nos surpreendem pela sua elegância e clareza. Procuramos ao longo do texto equilibrar os aspectos algébricos com os aspectos geométricos, sendo estes últimos ressaltados para que lhes seja dada mais atenção. Vale a pena “ver” (literalmente) as idéias algébricas funcionando bem.

No capítulo 1 aprendemos a descrever as retas do espaço projetivo através de coordenadas, as coordenadas de Plücker. A seguir estudamos quais as condições para que uma reta esteja contida numa superfície dada. Provamos que qualquer superfície cúbica contém pelo menos uma reta; o Teorema da Dimensão das Fibras é fundamental nessa prova.

No segundo capítulo apresentamos o resultado principal deste trabalho, o teorema devido ao britânico *Arthur Cayley* (1821-1895) e ao irlandês *George Salmon* (1819-1904) que diz que “uma superfície cúbica não singular contém exatamente 27 retas”. A seguir, estudamos as configurações que essas 27 retas podem assumir quanto às suas interseções. Através de uma bem elaborada notação criada pelo matemático suíço *Ludwig Schläfli* (1814-1895), esses dados são reunidos numa tabela, a Tabela de Interseção de Schläfli. Na última seção deste capítulo apresentamos os pares tri-

edais (conceito introduzido pelo geômetra suíço *Jakob Steiner* (1796-1863)) e uma aplicação do Teorema de Cayley-Salmon e da Tabela de Interseção de Schläfli que diz respeito à normalizações de equações de superfícies cúbicas lisas.

No capítulo 3 trabalharemos com os conceitos de divisores, grupo de Picard e número de interseção. Utilizamos esse conceitos para transformar a tabela de Schläfli numa matriz de ordem  $27 \times 27$  que representa, de certa forma, a própria superfície cúbica não singular. Neste capítulo apresentamos uma segunda prova (moderna, porém não melhor) do Teorema de Cayley-Salmon e também uma redução de ordem da própria matriz de interseção acima mencionada.

No último capítulo apresentamos os resultados referentes à implosão de certos conjuntos de retas da superfície cúbica não singular. Veremos que ao implodirmos 6 ou 5 retas (com certas propriedades bem determinadas) de uma superfície cúbica lisa obtemos respectivamente uma superfície isomorfa ao plano projetivo ou isomorfa ao produto de duas retas projetivas. Esses resultados admitem recíprocas.

Assim, espero que a leitura deste trabalho seja ao leitor tão prazerosa quanto a mim foi escrevê-lo.

IMPA, Abril de 2001,  
Cleber Haubrichs dos Santos.

# Capítulo 1

## Retas Sobre Superfícies

### Seção 1.I: Conceitos Básicos e o Teorema da Dimensão das Fibras

Nesta seção pretendemos estabelecer a notação e enunciar alguns resultados básicos que nos permitam entender o Teorema da Dimensão das Fibras. Esse teorema será fundamental para garantir a existência de retas sobre superfícies cúbicas, conforme veremos na seção III deste capítulo.

Ao longo de todo este trabalho  $k$  denotará um corpo algebricamente fechado de característica zero. Denotaremos também por  $\mathbb{A}^n$  o espaço afim de dimensão  $n$  ( $\mathbb{A}^n \simeq k^n$ ) e por  $\mathbb{P}^n$  o espaço projetivo de dimensão  $n$ .

Dizemos que um subconjunto  $X \subseteq \mathbb{A}^n$  é um *fechado* quando o mesmo consistir de todos os zeros comuns de uma quantidade finita de polinômios com coeficientes em  $k$ . Ainda nessa linha, um conjunto  $U \subseteq \mathbb{A}^n$  é *aberto* quando seu complementar  $\mathbb{A}^n \setminus U$  é fechado.

Podemos estender o conceito de conjunto fechado num espaço projetivo  $\mathbb{P}^n$  de maneira análoga. Apenas frisamos que  $(a_0 : a_1 : \dots : a_n) \in \mathbb{P}^n$  é um zero de um polinômio homogêneo  $f(X_0, X_1, \dots, X_n) \in k[X_0, X_1, \dots, X_n]$  quando  $f(a_0, a_1, \dots, a_n) = 0$ , e isso está bem definido exatamente por ser  $f$  homogêneo.

Dizemos que  $S \subseteq \mathbb{P}^n$  é uma *hipersuperfície de grau  $m$*  definida por  $F = 0$  quando  $S$  é um conjunto fechado definido pelo polinômio  $F$  homogêneo de grau  $m$ . Escrevendo explicitamente: Se  $F$  é homogêneo de grau  $m$ ,  $F \in k[X_0, X_1, \dots, X_n] \setminus \{0\}$ , então  $S := \{(x_0 : x_1 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n \mid F(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0\}$ . Quando  $F$  for de grau 2,  $S$  é chamada de *quádrica*.

Dizemos que um conjunto fechado  $X$  é *reduzível* se existem subconjuntos fechados próprios  $X_1, X_2 \subsetneq X$  tais que  $X = X_1 \cup X_2$ . Caso contrário  $X$  é dito *irreduzível*.

Não é difícil ver que o conjunto de todos os polinômios homogêneos de grau  $m$ , com  $n + 1$  variáveis e coeficientes em  $k$  forma um  $k$ -espaço vetorial de dimensão  $\binom{m+n}{m}$ . Observando que dois polinômios deste espaço definem a mesma hipersuperfície se e somente se tem coeficientes proporcionais podemos concluir o seguinte fato: O conjunto de todas as hipersuperfícies de grau  $m$  em  $\mathbb{P}^n$  está em correspondência biunívoca com os pontos de  $\mathbb{P}^N$ , onde  $N := \binom{m+n}{m} - 1$ .

Define-se um *conjunto algébrico projetivo* (respectivamente *quaseprojetivo*) como um subconjunto fechado (respectivamente aberto num fechado) de um espaço projetivo  $\mathbb{P}^n$ . Analogamente, um conjunto algébrico é chamado *afim* se é isomorfo a um subconjunto fechado de um espaço afim  $\mathbb{A}^n$ . Definimos ainda uma *variedade* (projetiva ou afim) como sendo um conjunto algébrico (projetivo ou afim) irreduzível.

Sejam  $X \subseteq \mathbb{P}^n$  um conjunto algébrico quaseprojetivo,  $x \in X$  e  $f = P/Q$  quociente de dois polinômios homogêneos de mesmo grau com  $Q(x) \neq 0$ . Naturalmente  $f$  define uma função numa vizinhança de  $x \in X$  tomando valores em  $k$ . Então dizemos que  $f$  é uma *função regular em  $x$* . Quando  $f$  é regular em todo  $x \in X$ , então  $f$  é dita uma *função regular em  $X$* . O conjunto de todas as funções regulares em  $X$  formam um anel denotado por  $k[X]$ . Uma aplicação  $f = (f_1, \dots, f_n) : X \rightarrow \mathbb{A}^n$  é regular quando cada  $f_i : X \rightarrow k$  é regular. ( $i = 1, \dots, n$ ). Se  $X$  for subconjunto do espaço afim, então  $X$  é variedade algébrica se e somente se  $k[X]$  é um domínio. Quando  $X$  for uma variedade algébrica afim, então o corpo  $k(X)$  das funções racionais será definido como o corpo de frações do domínio  $k[X]$ . Quando  $X$  for quaseprojetivo, então  $k(X) = k(U)$ , onde  $U$  é qualquer aberto não vazio de  $X$ .

Seja agora  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação entre dois conjuntos algébricos quaseprojetivos,  $X \subseteq \mathbb{P}^n$  e  $Y \subseteq \mathbb{P}^m$ . Neste caso, a aplicação  $f$  é dita *regular* quando dado qualquer  $x \in X$  e para algum “pedaço” afim  $\mathbb{A}_{f(x)}^m$  contendo  $f(x) \in Y$ , existe uma vizinhança aberta  $U \ni x$  tal que  $f(U) \subseteq \mathbb{A}_{f(x)}^m$  e  $f : U \rightarrow \mathbb{A}_{f(x)}^m$  é regular. Naturalmente,  $f : X \rightarrow Y$  é um *isomorfismo* entre os conjuntos algébricos quaseprojetivos  $X$  e  $Y$  se é regular e tem inversa também regular. Um importante resultado acerca de aplicações regulares é o seguinte

**Teorema 1.I.1:** ([sh], pág 57) A imagem de um conjunto algébrico projetivo a respeito de uma aplicação regular é fechado. ■

Agora falaremos brevemente sobre dimensão de uma variedade. A *dimensão* de uma variedade projetiva  $X$  é o grau de transcendência do corpo de funções  $k(X)$ , e

é denotado por  $\dim X$ . Se  $Y \subseteq X$  é uma subvariedade fechada de  $X$  então o número  $\dim X - \dim Y$  é chamado de *codimensão* de  $Y$  em  $X$ . As variedades algébricas de dimensão 1 e 2 são chamadas respectivamente de *curvas* e *superfícies*.

Apresentamos agora alguns fatos sobre dimensão de variedades:

**Proposição 1.I.2:** ([sh], págs 67,68) Sejam  $X$  e  $Y$  conjuntos algébricos. Então vale:

- i)  $X$  irredutível e  $U \subseteq X$  aberto em  $X \Rightarrow \dim U = \dim X$
- ii)  $X, Y$  irredutíveis  $\Rightarrow \dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$
- iii) Se  $X \subseteq Y$  então  $\dim X \leq \dim Y$ . Por outro lado, se  $Y$  é irredutível e  $X$  é fechado em  $Y$  com  $\dim X = \dim Y$  então  $X = Y$ . ■

Seja  $f : X \rightarrow Y$  aplicação regular entre variedades quaseprojetivas e seja  $y \in Y$ . O conjunto  $f^{-1}(y)$  é chamado de fibra de  $f$  sobre  $y$  e é um subconjunto algébrico de  $X$ .

**Teorema 1.I.3: Teorema da Dimensão das Fibras:** ([sh], pág 76) Suponha  $f : X \rightarrow Y$  aplicação regular sobrejetiva entre duas variedades  $X$  e  $Y$ . Seja  $\dim X = n$  e  $\dim Y = m$ . Então  $m \leq n$ . Além disso, valem:

- (i)  $\dim F \geq n - m$  para qualquer  $y \in Y$  e para qualquer componente  $F$  da fibra  $f^{-1}(y)$ .
- (ii) Existe um aberto não vazio  $U \subseteq Y$  tal que  $\dim f^{-1}(y) = m - n$  para  $y \in U$ . ■

**Teorema 1.I.4:** ([sh], pág 77) Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação regular sobrejetiva entre conjuntos algébricos projetivos. Suponha que  $Y$  é irredutível e que todas as fibras  $f^{-1}(y)$  para  $y \in Y$  são irredutíveis e de mesma dimensão. Então  $X$  é irredutível. ■

## Seção 1.II: Coordenadas de Plücker

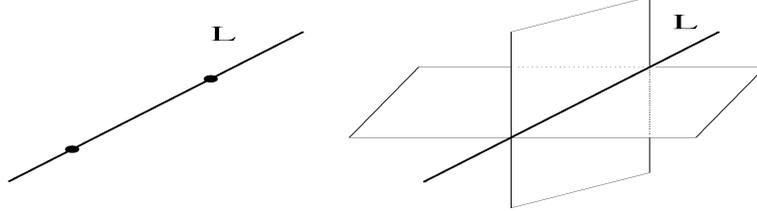
Estamos interessados em estudar retas sobre superfícies cúbicas em  $\mathbb{P}^3$ . Ora, em se falando de retas em  $\mathbb{P}^3$ , surge uma pergunta natural, a saber, como descrever uma reta  $L$  neste espaço?

Podemos descrever uma reta  $L$  de três maneiras distintas:

[1<sup>a</sup>]  $L$  é a ligação de dois pontos distintos entre si e contidos em  $L$  (definição geométrica). Algebricamente escrevemos: se  $(a_0 : a_1 : a_2 : a_3)$  e  $(b_0 : b_1 : b_2 : b_3) \in L$  então  $L = \{(\lambda a_0 + \mu b_0 : \lambda a_1 + \mu b_1 : \lambda a_2 + \mu b_2 : \lambda a_3 + \mu b_3) \mid (\lambda, \mu) \in k^2 \setminus (0, 0)\}$ .

[2<sup>a</sup>] De maneira dual,  $L$  é a intersecção de dois planos distintos entre si que

contenha  $L$ .



A dificuldade de se caracterizar uma reta dessas maneiras vem da arbitrariedade de escolher os dois pontos ou os dois planos.

[3<sup>a</sup>] Descrevemos  $L$  usando suas *Coordenadas de Plücker*.

**Teorema 1.II.1: Mergulho de Plücker:** Existe uma bijeção entre as retas de  $\mathbb{P}^3$  e os pontos de uma hipersuperfície quádrlica em  $\mathbb{P}^5$ , a saber:

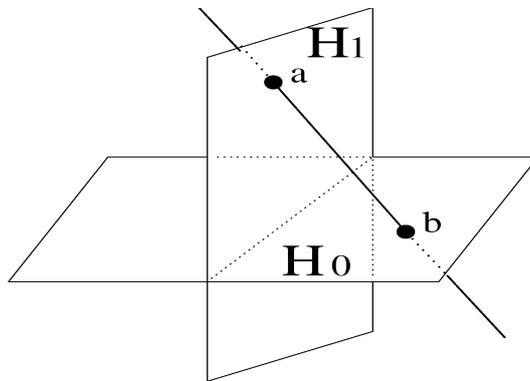
$\{\text{retas de } \mathbb{P}^3\} \longleftrightarrow \{(p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23}) \in \mathbb{P}^5 \mid p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0\}$   
 onde a reta por meio de  $(a_0 : a_1 : a_2 : a_3)$  e  $(b_0 : b_1 : b_2 : b_3)$  corresponde ao ponto cujas coordenadas são  $p_{ij} := \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} = a_i b_j - a_j b_i$ .

**Demonstração:** Sejam  $a = (a_0, a_1, a_2, a_3)$  e  $b = (b_0, b_1, b_2, b_3)$  vetores linearmente independentes em  $k^4$  tais que  $(a_0 : a_1 : a_2 : a_3)$  e  $(b_0 : b_1 : b_2 : b_3) \in L$ . Para mostrar que o mergulho de Plücker é bem definido, sejam  $c = (c_0, c_1, c_2, c_3)$  e  $d = (d_0, d_1, d_2, d_3)$  outros dois vetores tais que  $(c_0 : c_1 : c_2 : c_3)$  e  $(d_0 : d_1 : d_2 : d_3) \in L$ , digamos,  $c_i = \lambda_1 a_i + \mu_1 b_i$  e  $d_i = \lambda_2 a_i + \mu_2 b_i$  para certos  $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in k$  e  $i = 1, 2, 3, 4$ . Temos que  $\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ , ou seja  $\det \begin{pmatrix} c_i & c_j \\ d_i & d_j \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{pmatrix} p_{ij}$ . E sendo  $\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{pmatrix} \neq 0$  podemos concluir que a aplicação é bem definida. Como os vetores  $a$  e  $b$  são linearmente independentes, então existem  $i < j$  tais que  $\det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} \neq 0$ . Após uma possível mudança de coordenadas podemos supor  $i = 0$  e  $j = 1$ , e portanto,  $\det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{pmatrix} \neq 0$ . Melhor ainda, tomando combinações lineares se necessárias, podemos supor sem perda que  $\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Assim:  $p_{01} = 1, p_{02} = b_2, p_{03} = b_3, p_{12} = -a_2, p_{13} = -a_3$  e  $p_{23} = a_2 b_3 - a_3 b_2$ . Portanto  $p_{01} = 1$  e  $p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0$ . Reciprocamente, dado um ponto  $(p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23}) \in \mathbb{P}^5$  satisfazendo  $p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0$  e supondo sem perda que  $p_{01} = 1$ , o mesmo determina unicamente uma reta, a saber, a reta passando por  $(1 : 0 : -p_{12} : -p_{13})$  e  $(0 : 1 : p_{02} : p_{03})$ . ■

Alguns comentários sobre a prova:

[1<sup>o</sup>] A suposição  $p_{01} \neq 0$  diz que  $L$  não intersecta a reta  $H_0 \cap H_1 =$

$\{(0 : 0 : x_2 : x_3) \mid (x_2 : x_3) \in \mathbb{P}^1\}$ , onde o plano  $H_i = \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}^3 \mid x_i = 0\}$ . De fato, sendo  $p_{01} \neq 0$ , podemos supor sem perda que  $p_{01} = 1$ . Daí, conclue-se que  $L$  passa por  $(1 : 0 : a_2 : a_3) \in H_1$  e  $(0 : 1 : b_2 : b_3) \in H_0$ . Logo  $L \cap (H_0 \cap H_1) = \emptyset$ . Reciprocamente, a condição  $p_{01} = \det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ y_0 & y_1 \end{pmatrix} = 0$  significa que os vetores  $(x_0, x_1)$  e  $(y_0, y_1)$  são linearmente dependentes, isto é, existem constantes não todas nulas  $\alpha, \beta \in k$  tais que  $\alpha(x_0, x_1, x_2, x_3) + \beta(y_0, y_1, y_2, y_3) = (0, 0, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3)$  e portanto  $(0 : 0 : \alpha x_2 + \beta y_2 : \alpha x_3 + \beta y_3) \in L \cap (H_0 \cap H_1)$ .



[2<sup>o</sup>] A partir da descrição de  $L$  como passando por dois pontos, também podemos obter a descrição de  $L$  como intersecção de dois planos. De fato:  $(1 : 0 : a_2 : a_3)$  e  $(0 : 1 : b_2 : b_3) \in L$  implica que  $L = \{(x_0 : x_1 : a_2x_0 + b_2x_1 : a_3x_0 + b_3x_1) \mid (x_0 : x_1) \in \mathbb{P}^1\} = \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}^3 \mid x_2 = a_2x_0 + b_2x_1 \text{ e } x_3 = a_3x_0 + b_3x_1\}$ . Logo  $L$  é a intersecção dos planos  $H_2$  e  $H_3$  dados por  $H_2 = \{(x_0 : x_1 : a_2x_0 + b_2x_1 : x_3) \mid (x_0 : x_1 : x_3) \in \mathbb{P}^2\}$  e  $H_3 = \{(x_0 : x_1 : x_2 : a_3x_0 + b_3x_1) \mid (x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2\}$ .

[3<sup>o</sup>] As retas de  $\mathbb{P}^3$  que não intersectam a reta  $H_0 \cap H_1$  formam um espaço afim 4-dimensional via  $(H_0 \setminus H_0 \cap H_1) \times (H_1 \setminus H_0 \cap H_1) \cong \mathbb{A}^2 \times \mathbb{A}^2 = \mathbb{A}^4$ . De outro modo também:

$\mathbb{A}^4 \longleftrightarrow \{(p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23}) \in \mathbb{P}^5 \mid p_{01} = 1 \text{ e } p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0\}$   
 onde o ponto  $(a_2, a_3, b_2, b_3) \in k^4$  corresponde ao ponto  $(1 : b_2 : b_3 : -a_2 : -a_3 : a_2b_3 - a_3b_2) \in \mathbb{P}^5$ .

A importância prática do Mergulho de Plücker é que o mesmo permite manejar as retas de  $\mathbb{P}^3$  através das suas coordenadas em  $\mathbb{P}^5$ .

A próxima proposição traduz algebricamente o fenômeno geométrico que é a intersecção de duas retas. Trata-se de uma condição em termo das coordenadas de Plücker das mesmas.

**Proposição 1.II.2:** A condição necessária e suficiente para que duas retas em

$\mathbb{P}^3$  com coordenadas de Plücker  $p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{12}, p_{13}, p_{23}$  e  $q_{01}, q_{02}, q_{03}, q_{12}, q_{13}, q_{23}$  se intersectem é

$$p_{01}q_{23} - p_{02}q_{13} + p_{03}q_{12} + p_{12}q_{03} - p_{13}q_{02} + p_{23}q_{01} = 0.$$

**Demonstração:** Sejam a reta ligando os pontos  $(a_0 : a_1 : a_2 : a_3)$  e  $(b_0 : b_1 : b_2 : b_3)$  e a reta ligando os pontos  $(c_0 : c_1 : c_2 : c_3)$  e  $(d_0 : d_1 : d_2 : d_3)$ . Então as duas retas se intersectam se e somente se estão ambas contidas no mesmo plano, isto é, os quatro pontos acima estão contidos num mesmo plano, isto é, os quatro vetores  $(a_0, a_1, a_2, a_3)$ ,  $(b_0, b_1, b_2, b_3)$ ,  $(c_0, c_1, c_2, c_3)$  e  $(d_0, d_1, d_2, d_3)$  são linearmente dependentes, isto é,

$$\begin{aligned} 0 &= \det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix} = \\ &= \det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} c_2 & c_3 \\ d_2 & d_3 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} c_1 & c_3 \\ d_1 & d_3 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_0 & a_3 \\ b_0 & b_3 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix} \\ &+ \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} c_0 & c_3 \\ d_0 & d_3 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} c_0 & c_2 \\ d_0 & d_2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} c_0 & c_1 \\ d_0 & d_1 \end{pmatrix} = \\ &= p_{01}q_{23} - p_{02}q_{13} + p_{03}q_{12} + p_{12}q_{03} - p_{13}q_{02} + p_{23}q_{01} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### Seção 1.III: Retas Sobre Superfícies

Considere uma superfície  $S \subseteq \mathbb{P}^3$  dada pela equação  $F = 0$  onde  $F \in k[X_0, X_1, X_2, X_3] \setminus \{0\}$  é um polinômio homogêneo de grau  $m$ . Seja ainda  $L \subseteq \mathbb{P}^3$  uma reta dada pelas coordenadas de Plücker  $p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{12}, p_{13}, p_{23}$ .

**Proposição 1.III.1:** As condições que expressam o fato da reta  $L$  estar sobre a superfície  $S$  são um número finito de relações algébricas entre os  $p_{ij}$  e os coeficientes de  $F$ , homogêneas em ambos os conjuntos.

**Demonstração:** Podemos escrever uma representação paramétrica de  $L$  em termos de suas coordenadas de Plücker tal como segue. Sejam  $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$  e  $y = (y_0, y_1, y_2, y_3)$  dois vetores linearmente independentes em  $k^4$  tais que  $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3), (y_0 : y_1 : y_2 : y_3) \in L$ . Seja ainda  $\mathcal{L} \subseteq k^4$  o 2-espaco vetorial gerado por  $x$  e  $y \in k^4$ . É fácil ver que  $\mathcal{L} = \{\langle v, y \rangle x - \langle v, x \rangle y \mid v \in k^4\}$  (vide observação 2 logo adiante). Se o vetor  $v$  tem coordenadas  $(v_0, v_1, v_2, v_3)$  então o vetor  $\langle v, y \rangle x - \langle v, x \rangle y$

tem coordenadas  $z_i = \sum_{j=0}^3 p_{ij}v_j$  onde  $p_{ij} = x_iy_j - x_jy_i$ . Portanto podemos escrever os pontos de  $L = \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}^3 \mid (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{L} \setminus \{0\}\}$  como pontos cujas coordenadas são  $\sum_{j=0}^3 p_{ij}v_j$ . Substituindo tais expressões na equação  $F(X_0, X_1, X_2, X_3) = 0$  e igualando a zero os coeficientes de todos monômios em  $v_i$ , obtemos a condição  $L \subseteq S$  como um conjunto finito de relações entre os coeficientes de  $F$  e as coordenadas de Plücker. ■

**Observação 1:** Explicitamente,  $L$  é dada por:  $\{(v_1p_{01} + v_2p_{02} + v_3p_{03} : -v_0p_{01} + v_2p_{12} + v_3p_{13} : -v_0p_{02} - v_1p_{12} + v_3p_{23} : -v_0p_{03} - v_1p_{13} - v_2p_{23}) \mid (v_0, v_1, v_2, v_3) \in k^4 \setminus (0, 0, 0, 0)\}$

**Observação 2:** Verificação de que vale  $\mathcal{L} = \{\langle v, y \rangle x - \langle v, x \rangle y \mid v \in k^4\}$ : Dado  $l \in \mathcal{L}$ , existem  $a, b \in k$  com  $l = ax + by$ . Quero mostrar que existe  $v \in k^4$  tal que  $\langle v, y \rangle x - \langle v, x \rangle y = l = ax + by$ , isto é, existe  $v \in k^4$  tal que

$$\begin{cases} \langle v, x \rangle = x_0v_0 + x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = -b \\ \langle v, y \rangle = y_0v_0 + y_1v_1 + y_2v_2 + y_3v_3 = a \end{cases}$$

Mas tal sistema é possível exatamente por serem os vetores  $x$  e  $y$  linearmente independentes. A recíproca é óbvia.

Veremos mais adiante na seção 1.IV exemplos que ilustram a proposição acima demonstrada.

Prosseguindo nossa discussão acerca de retas sobre superfícies em  $\mathbb{P}^3$ , seja dado um inteiro positivo  $m$  e considere o espaço  $\mathbb{P}^N$  com  $N = \binom{m+3}{3} - 1$  cujos pontos parametrizam superfícies de grau  $m$  em  $\mathbb{P}^3$ . Seja  $\Pi = \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5) \in \mathbb{P}^5 \mid x_0x_5 - x_1x_4 + x_2x_3 = 0\}$  a hipersuperfície quádrlica que é imagem das retas de  $\mathbb{P}^3$  pelo mergulho de Plücker. Escreva  $\Gamma_m \subseteq \mathbb{P}^N \times \Pi$  o conjunto dos pares  $(\xi, \eta) \in \mathbb{P}^N \times \Pi$  tal que a reta correspondente a  $\eta \in \Pi$  esteja contida na superfície correspondente a  $\xi \in \mathbb{P}^N$ . Pela proposição anterior,  $\Gamma_m$  é um conjunto algébrico projetivo. Queremos calcular a dimensão de  $\Gamma_m$ .

Considere as projeções  $\varphi : (\xi, \eta) \in \mathbb{P}^N \times \Pi \mapsto \xi \in \mathbb{P}^N$  e  $\psi : (\xi, \eta) \in \mathbb{P}^N \times \Pi \mapsto \eta \in \Pi$ . Claramente  $\varphi$  e  $\psi$  são aplicações regulares. Na verdade consideraremos as restrições de  $\varphi$  e  $\psi$  a  $\Gamma_m$ .

Note que  $\psi(\Gamma_m) = \Pi$ . Isso significa que para cada reta em  $\mathbb{P}^3$  existe pelo menos uma superfície de grau  $m$  que a contenha.

Calcularemos a dimensão das fibras  $\psi^{-1}(\eta)$  de  $\psi$ . Para este cálculo e por uma transformação projetiva, nós podemos assumir sem perda que a reta correspondente à  $\eta$  é dada por  $x_0 = x_1 = 0$  (isto é,  $L = \{(0 : 0 : x_2 : x_3) \mid (x_2 : x_3) \in \mathbb{P}^1\}$ ). Os pontos

$\xi \in \mathbb{P}^N$  tais que  $(\xi, \eta) \in \psi^{-1}(\eta) \subseteq \Gamma_m$  correspondem às formas  $F \in k[X_0, X_1, X_2, X_3]$  de grau  $m$  tais que  $F(0, 0, x_2, x_3) = 0$  para todo  $x_2, x_3 \in k$ , isto é, às formas de grau  $m$  tais que os coeficientes de  $X_2^m, X_2^{m-1}X_3, \dots, X_2X_3^{m-1}, X_3^m$  se anulam. Logo a codimensão do subespaço  $\psi^{-1}(\eta)$  é  $m + 1$ , e portanto  $\dim\psi^{-1}(\eta) = N - (m + 1)$ .

Segue do teorema 1.I.4 que  $\Gamma_m$  é irredutível (e portanto uma variedade algébrica). Aplicando a parte (ii) do Teorema da Dimensão das Fibras, temos que  $\dim\Gamma_m = \dim\psi(\Gamma_m) + \dim\psi^{-1}(\eta) = \dim\Pi + \dim\psi^{-1}(\eta) = 4 + N - (m + 1)$ , ou seja,  $\dim\Gamma_m = N - m + 3$ .

Considere agora a outra projeção  $\varphi : \Gamma_m \rightarrow \mathbb{P}^N$ . Sua imagem  $\varphi(\Gamma_m)$  é um subconjunto fechado de  $\mathbb{P}^N$  pois é imagem de um conjunto algébrico projetivo por uma aplicação regular. Naturalmente vale  $\dim\varphi(\Gamma_m) \leq \dim\mathbb{P}^N$ .

Estudaremos os valores possíveis para o grau  $m$  e veremos que conclusões interessantes podemos tirar em cada situação .

**[Caso  $m > 3$ ]:** Quando  $m > 3$ , então  $\dim\Gamma_m < N$ . Isto significa que  $\varphi(\Gamma_m) \subsetneq \mathbb{P}^N$ , ou, em palavras, nem todas as superfícies de grau  $m > 3$  contém alguma reta. Note ainda que  $\mathbb{P}^N \setminus \varphi(\Gamma_m)$  é aberto. Resumimos isso tudo no resultado abaixo:

**Teorema 1.III.2:** Para qualquer  $m > 3$ , existem superfícies de grau  $m$  que não contém nenhuma reta. Mais ainda, tais superfícies correspondem a um aberto de  $\mathbb{P}^N$ .

**[Caso  $m = 1$ ]:** As superfícies de grau 1 em  $\mathbb{P}^3$  são os planos, e estes, obviamente, contém infinitas retas.

**[Caso  $m = 2$ ]:** É sabido que à menos de transformações projetivas existem somente quatro quádras em  $\mathbb{P}^3$ : a não-singular, o cone, o plano duplo e a união de dois planos simples. Sabemos que cada uma delas contém infinitas retas. Reobtemos esse resultado à luz do que já fizemos via:  $m = 2 \Rightarrow N = 9$ . Portanto  $\dim\Gamma_2 = 9 + 3 - 2 = 10$ . Naturalmente vale ainda que  $\dim\varphi(\Gamma_2) \leq 9$ . Então pelo Teorema da Dimensão das Fibras temos que  $\dim\varphi^{-1}(\xi) \geq \dim(\Gamma_2) - \dim\varphi(\Gamma_2) \geq 10 - 9 = 1$ .

**[Caso  $m = 3$ ]:** Neste caso temos  $N = 19$  e  $\dim\Gamma_3 = N = 19$ . Começo afirmando que existe uma superfície cúbica contendo uma quantidade finita de retas (Vide exemplo 1 à seguir). Com a existência de uma tal superfície cúbica, vemos que existe  $\xi \in \mathbb{P}^{19}$  tal que  $\varphi^{-1}(\xi) \neq \emptyset$  e  $\dim\varphi^{-1}(\xi) = \dim\{\text{três pontos de } \Gamma_3\} = 0$ . Afiramos agora que  $\dim\varphi(\Gamma_3) = \dim\mathbb{P}^{19}$ . Vale trivialmente que  $\dim\varphi(\Gamma_3) \leq \dim\mathbb{P}^{19} = 19$ . Por outro lado, aplicando a parte (i) do Teorema da Dimensão das Fibras na fibra  $\varphi^{-1}(\xi)$  considerada acima temos que  $0 = \dim\varphi^{-1}(\xi) \geq \dim(\Gamma_3) - \dim\varphi(\Gamma_3)$  isto é  $\dim\varphi(\Gamma_3) \geq \dim\Gamma_3 = 19$ . Assim sendo,  $\varphi$  é sobrejetora, pois, sendo  $\varphi(\Gamma_3) \subseteq \mathbb{P}^3$

fechado com mesma dimensão de  $\mathbb{P}^{19}$ , então  $\varphi(\Gamma_3) = \mathbb{P}^{19}$ . De tudo o que foi feito acima e também do Teorema da Dimensão das Fibras, segue-se o seguinte resultado para  $m = 3$ :

**Teorema 1.III.3:** Toda superfície cúbica contém pelo menos uma reta. Além disso, o subconjunto que parametriza todas as superfícies cúbicas que contém somente uma quantidade finita de retas, é um aberto não vazio em  $\mathbb{P}^{19}$ .

**Observação:** Existem cúbicas que contém infinitas retas. O segundo exemplo da próxima seção exibe uma delas.

### Seção 1.IV: Alguns Exemplos de Retas Sobre Superfícies Cúbicas

**Exemplo 1:** *Superfície cúbica contendo uma quantidade finita de retas em  $\mathbb{P}^3$ :* Seja a superfície cúbica  $S$  dada pela equação  $F = 0$ , onde

$$F(X_0, X_1, X_2, X_3) = X_1X_2X_3 - X_0^3.$$

Tal superfície não contém nenhuma reta contida em  $\mathbb{A}^3$ . Quero dizer com isso que escrevendo a equação de uma reta afim na forma  $X_i = a_it + b_i$ ,  $a_i, b_i \in k$ ,  $i = 1, 2, 3$  e substituindo na equação acima obtemos uma contradição (vide abaixo). Entretanto a intersecção da superfície com o plano infinito contém 3 retas. De fato temos que as retas da intersecção são  $L_i : x_0 = x_i = 0$ . Quero informar que o *Critério de Jacobi* fornece os seguintes pontos singulares para a superfície considerada:  $(0 : 1 : 0 : 0)$ ,  $(0 : 0 : 1 : 0)$  e  $(0 : 0 : 0 : 1)$ .

Verificação da contradição citada acima: Substituindo  $a_it + b_i$  em  $X_i$  na equação, temos a igualdade de polinômios em  $t$ :  $(a_1t + b_1)(a_2t + b_2)(a_3t + b_3) = 1$ . Igualando os coeficientes temos:

$$\begin{cases} a_1a_2a_3 = 0, \text{ isto é, } a_1 = 0 \text{ ou } a_2 = 0 \text{ ou } a_3 = 0 \\ a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 = 0 \\ a_1b_2b_3 + a_2b_1b_3 + a_3b_1b_2 = 0 \\ b_1b_2b_3 = 1, \text{ isto é, } b_1 \neq 0, b_2 \neq 0, b_3 \neq 0 \end{cases}$$

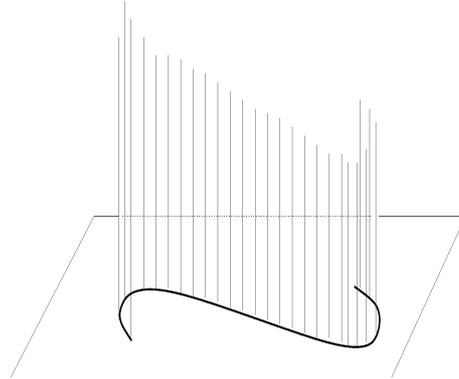
Se assumirmos  $a_i = 0$  pela 1ª equação, então substituindo na 2ª, e por serem os  $b$ 's não nulos, concluímos que  $a_ja_k = 0$ , isto é,  $a_j = 0$  ou  $a_k = 0$ . Assuma  $a_j = 0$ . Substituindo na 3ª equação e novamente por serem  $b$ 's não nulos então concluímos que  $a_k = 0$ . Conclusão : a "reta" reduz-se ao ponto  $(b_1, b_2, b_3)$ . Contradição ! ■

**Exemplo 2:** *Os Cones Cúbicos: Superfícies cúbicas contendo infinitas retas em  $\mathbb{P}^3$ :* Seja  $G(X_1, X_2, X_3)$  um polinômio homogêneo do terceiro grau à três variáveis.

A equação  $G = 0$  descreve uma curva cúbica no plano " $\mathbb{P}^2$ " =  $\{(0 : x_1 : x_2 : x_3) \mid (x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}^2\}$ . Mais do que só isso, a equação  $G = 0$  descreve a superfície cúbica  $S$  que é a união das retas por meio de  $(1 : 0 : 0 : 0)$  e cada ponto da curva plana  $\{(0 : x_1 : x_2 : x_3) \mid G(x_1, x_2, x_3) = 0\}$ . Tal superfície  $S$  é chamada de *cone de vértice  $(1 : 0 : 0 : 0)$  sobre a curva  $G = 0$* . O Critério de Jacobi nos informa que pelo menos o ponto  $(1 : 0 : 0 : 0) \in S$  é singular, e, se a curva plana  $G = 0$  possui singularidade em  $(0 : a : b : c)$ , então cada ponto  $(x_0 : a : b : c) \in S$  com  $x_0$  percorrendo o corpo  $k$  também é singular.

Observamos que cada reta de  $S$  passando por  $(0 : x_1 : x_2 : x_3)$  e  $(1 : 0 : 0 : 0)$  tem coordenadas de Plücker  $(x_1 : x_2 : x_3 : 0 : 0 : 0)$  e claramente existem infinitas retas sobre  $S$  (pelo menos, tantas retas quantos forem os pontos da curva plana  $G = 0$ ).

Observamos ainda que a definição de cone generaliza-se para qualquer curva plana e qualquer ponto fora deste plano



■

**Exemplo 3:** *A Superfície Cúbica de Fermat.* Seja

$$F(X_0, X_1, X_2, X_3) = X_0^3 + X_1^3 + X_2^3 + X_3^3.$$

Afirmamos que existem exatamente 27 retas sobre a superfície  $S : F = 0$ . Pretendemos escrever as coordenadas de Plücker de cada uma delas. Seja  $L$  dada por  $p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{12}, p_{13}, p_{23}$  e suponha  $L \subseteq S$ . Inicialmente vamos supor que  $p_{01} \neq 0$ . Podemos supor ainda sem perda que  $p_{01} = 1$ . Neste caso,  $L$  é dada pelos pontos  $(1 : 0 : -p_{12} : -p_{13})$  e  $(0 : 1 : p_{02} : p_{03})$ , isto é,

$$L = \{(x : y : -p_{12}x + p_{02}y : -p_{13}x + p_{03}y) \in \mathbb{P}^3 \mid (x, y) \in k^2 \setminus (0, 0)\}$$

Como  $L$  está contida em  $S$  temos que ter  $F(x, y, -p_{12}x + p_{02}y, -p_{13}x + p_{03}y) = 0$

para qualquer  $(x, y) \neq (0, 0)$  em  $k^2$ , isto é:

$$x^3 + y^3 + (-p_{12}x + p_{02}y)^3 + (-p_{13}x + p_{03}y)^3 = 0$$

ou ainda

$$(1 - p_{12}^3 - p_{13}^3)x^3 + (1 + p_{02}^3 + p_{03}^3)y^3 + 3(p_{02}p_{12}^2 + p_{03}p_{13}^2)x^2y - 3(p_{02}^2p_{12} + p_{03}^2p_{13})xy^2 = 0.$$

Temos portanto o sistema abaixo:

$$(*) \begin{cases} p_{02}^3 + p_{03}^3 = -1 \\ p_{12}^3 + p_{13}^3 = 1 \\ p_{02}p_{12}^2 + p_{03}p_{13}^2 = 0 \\ p_{02}^2p_{12} + p_{03}^2p_{13} = 0 \end{cases}$$

**Observação:** As duas primeiras equações do sistema (\*) não estão homogêneas conforme afirmava a proposição 1.III.1. Isto aconteceu porque ao assumirmos  $p_{01} = 1$ , estamos deshomogeneizando o problema e determinando unicamente os valores de  $p_{02}, p_{03}, p_{12}$  e  $p_{13}$ .

Para resolver o sistema (\*) acima, tentaremos eliminar uma das variáveis. Observando que na quarta equação a variável  $p_{12}$  é linear, podemos isola-la desde que  $p_{02} \neq 0$ . Isso motiva-nos a dividir a resolução de (\*) em 2 casos:

Caso 1:  $p_{01} = 1$  e  $p_{02} \neq 0$ : Da quarta equação temos:

$$p_{12} = -\frac{p_{03}^2p_{13}}{p_{02}^2}.$$

Substituindo a expressão de  $p_{12}$  nas segunda e terceira equações obtemos o sistema  $3 \times 3$  abaixo:

$$\begin{cases} p_{02}^3 + p_{03}^3 = -1 \\ p_{13}^3(p_{02}^3 + p_{03}^3)(p_{02}^3 - p_{03}^3) = p_{02}^6 \\ p_{03}p_{13}^2(p_{02}^3 + p_{03}^3) = 0 \end{cases}$$

E substituindo ainda a primeira equação nas duas seguintes obtemos:

$$\begin{cases} p_{13}^3(p_{03}^3 - p_{02}^2) = p_{02}^6 \\ p_{03}p_{13}^2 = 0 \end{cases}$$

Sendo  $p_{02} \neq 0$ , temos que ter  $p_{13} \neq 0$ . Então  $p_{03} = 0$  e conseqüentemente  $p_{12} = 0$ . Da equação  $p_{02}^3 + p_{03}^3 = -1$ , temos  $p_{02}^3 = -1$ . E finalmente temos  $p_{13}^3 = 1$ . O total de soluções neste caso é nove.

Caso 2:  $p_{01} = 1$  e  $p_{02} = 0$ : Segue imediatamente da primeira equação de (\*) que  $p_{03}^3 = -1$ . Das terceira e quarta equações, por serem  $p_{02} = 0$  e  $p_{03} \neq 0$ , temos que concluir que  $p_{13} = 0$ . Finalmente, da segunda equação temos que  $p_{12}^3 = 1$ . Também neste caso o total de soluções é nove.

Com o que foi feito acima já obtivemos 18 retas por suas coordenadas de Plücker, sendo todas elas tais que  $p_{01} \neq 0$ .

Segue dos casos 1 e 2 considerados que  $p_{01} \neq 0$  implica  $p_{02} = p_{13} = 0$  ou  $p_{03} = p_{12} = 0$ . Podemos fazer raciocínio análogo para concluir que  $p_{02} \neq 0$  implica  $p_{01} = p_{23} = 0$  ou  $p_{03} = p_{12} = 0$  e que  $p_{03} \neq 0$  implica  $p_{01} = p_{23} = 0$  ou  $p_{02} = p_{13} = 0$ . Em suma, vale sempre que  $p_{01}$  e  $p_{02}$  não se anulam simultaneamente. Já tendo feito os casos  $p_{01} \neq 0, p_{02} \neq 0$  e  $p_{01} \neq 0, p_{02} = 0$ , só nos resta analisar o caso seguinte:

Caso 3:  $p_{01} = 0$  e  $p_{02} = 1$ : Valendo-se da simetria de  $F$ , resolveremos facilmente o caso 3. Para tanto, note que este caso é obtido do caso 2 pela permutação  $(0213) \mapsto (0123)$  (isto quer dizer  $p_{01} \leftrightarrow p_{02}, p_{21} \leftrightarrow -p_{12}$  e  $p_{13} \leftrightarrow p_{23}$ ). Logo as soluções deste caso são:  $p_{02} = 1, p_{01} = p_{23} = 0$  e  $p_{03}^3 = p_{12}^3 = -1$ .

**Resumo:** Adotando a notação  $\epsilon$  para a raiz sexta primitiva da unidade  $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ , temos que as 27 retas contidas na Superfície Diagonal de Fermat são dadas explicitamente pelas coordenadas de Plücker abaixo:

01.(1 : -1 : 0 : 0 : 1 : -1)	10.(1 : 0 : -1 : 1 : 0 : 1)	19.(0 : 1 : -1 : -1 : 1 : 0)
02.(1 : -1 : 0 : 0 : -\epsilon : \epsilon)	11.(1 : 0 : -1 : \epsilon^2 : 0 : \epsilon^2)	20.(0 : 1 : -1 : -\epsilon^2 : \epsilon^2 : 0)
03.(1 : -1 : 0 : 0 : \epsilon^2 : -\epsilon^2)	12.(1 : 0 : -1 : -\epsilon : 0 : -\epsilon)	21.(0 : 1 : -1 : \epsilon : -\epsilon : 0)
04.(1 : \epsilon : 0 : 0 : 1 : \epsilon)	13.(1 : 0 : \epsilon : 1 : 0 : -\epsilon)	22.(0 : 1 : \epsilon : -1 : -\epsilon : 0)
05.(1 : \epsilon : 0 : 0 : -\epsilon : -\epsilon^2)	14.(1 : 0 : \epsilon : \epsilon^2 : 0 : 1)	23.(0 : 1 : \epsilon : -\epsilon^2 : -1 : 0)
06.(1 : \epsilon : 0 : 0 : \epsilon^2 : -1)	15.(1 : 0 : \epsilon : -\epsilon : 0 : \epsilon^2)	24.(0 : 1 : \epsilon : \epsilon : \epsilon^2 : 0)
07.(1 : -\epsilon^2 : 0 : 0 : 1 : -\epsilon^2)	16.(1 : 0 : -\epsilon^2 : 1 : 0 : \epsilon^2)	25.(0 : 1 : -\epsilon^2 : -1 : \epsilon^2 : 0)
08.(1 : -\epsilon^2 : 0 : 0 : -\epsilon : -1)	17.(1 : 0 : -\epsilon^2 : \epsilon^2 : 0 : -\epsilon)	26.(0 : 1 : -\epsilon^2 : -\epsilon^2 : -\epsilon : 0)
09.(1 : -\epsilon^2 : 0 : 0 : \epsilon^2 : \epsilon)	18.(1 : 0 : -\epsilon^2 : -\epsilon : 0 : 1)	27.(0 : 1 : -\epsilon^2 : \epsilon : -1 : 0)

Podemos também escreve-las mais compactamente como três famílias de dois parâmetros, cada família com nove elementos, à saber:

$$(1 : -\lambda : 0 : 0 : \mu : -\lambda\mu); \lambda^3 = 1 \text{ e } \mu^3 = 1$$

$$(1 : 0 : -\lambda : \mu : 0 : \lambda\mu); \lambda^3 = 1 \text{ e } \mu^3 = 1$$

$$(0 : 1 : -\lambda : -\mu : \lambda\mu : 0); \lambda^3 = 1 \text{ e } \mu^3 = 1 \quad \blacksquare$$

**Exemplo 4:** *A Superfície de Clebsch:* Esta superfície, também conhecida como

“Superfície Diagonal de Clebsch”, tem a notável propriedade de ter todas as suas 27 retas reais. Podemos descreve-la em  $\mathbb{P}^4$  como interseção das duas superfícies dadas pelas equações

$$\begin{cases} X_0^3 + X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 + X_4^3 = 0 \\ X_0 + X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 0 \end{cases}$$

ou simplesmente descreve-la em  $\mathbb{P}^3$  como  $F = 0$  onde

$$F(X_0, X_1, X_2, X_3) = X_0^3 + X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 - (X_0 + X_1 + X_2 + X_3)^3.$$

Pretendemos neste exemplo exibir as retas da Superfície de Clebsch por suas coordenadas de Plücker. Assim sendo, seja  $L$  uma reta contida na superfície e dada por  $p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{12}, p_{13}, p_{23}$ . Suponha inicialmente que  $p_{01} \neq 0$ , ou, melhor ainda,  $p_{01} = 1$ . Então  $L$  é dada por  $L = \{(x : y : -p_{12}x + p_{02}y : -p_{13}x + p_{03}y) \in \mathbb{P}^3 \mid (x, y) \in k^2 \setminus (0, 0)\}$ . Temos que ter  $F(x, y, -p_{12}x + p_{02}y, -p_{13}x + p_{03}y) = 0$  para todo  $(x, y) \in k^2 \setminus (0, 0)$ . Com isso chegamos ao seguinte sistema  $4 \times 4$ :

$$\begin{cases} (p_{02} + p_{03})(p_{02} + 1)(p_{03} + 1) = 0 \\ (p_{12} + p_{13})(p_{12} - 1)(p_{13} - 1) = 0 \\ p_{02}^2 p_{03} + p_{03}^2 p_{02} + 2p_{02} p_{03} p_{12} + 2p_{02} p_{03} p_{13} - p_{02}^2 - p_{03}^2 - p_{02} p_{03} \\ + 2p_{02} p_{12} + 2p_{02} p_{13} + 2p_{03} p_{12} + 2p_{03} p_{13} - 2p_{02} - 2p_{03} \\ + p_{12} + p_{13} - 1 = 0 \\ p_{02} p_{13}^2 + p_{03} p_{12}^2 + 2p_{02} p_{12} p_{13} + 2p_{03} p_{12} p_{13} + p_{12}^2 + p_{13}^2 \\ + 2p_{12} p_{13} - 2p_{02} p_{12} - 2p_{02} p_{13} - 2p_{03} p_{12} - 2p_{03} p_{13} \\ + p_{02} + p_{03} - 2p_{12} - 2p_{13} + 1 = 0 \end{cases}$$

Das duas primeiras equações podemos considerar nove casos, em cada um deles eliminamos duas incógnitas e recaímos num sistema  $2 \times 2$ .

1) Caso  $p_{03} = -p_{02}$  e  $p_{12} = 1$ : Neste caso as duas últimas equações tornam-se

$$\begin{cases} -p_{13} + p_{02}^2 + p_{02}^2 p_{13} = 0 \\ -p_{02} + p_{13}^2 + p_{02} p_{13}^2 = 0 \end{cases}$$

Note que  $p_{02}^2 \neq 1$ , senão na primeira equação haveria  $0 = -p_{13} + 1 + p_{13} = 1$  o que é impossível. Isolando  $p_{13}$  na primeira equação temos:

$$p_{13} = \frac{-p_{02}^2}{p_{02}^2 - 1}$$

Substituindo na segunda equação, calculamos  $p_{02}$  como segue:

$$-p_{02} + \left( \frac{-p_{02}^2}{p_{02} - 1} \right)^2 + p_{02} \left( \frac{-p_{02}^2}{p_{02} - 1} \right) = 0,$$

isto é,

$$p_{02}(p_{02}^2 + p_{02} - 1) = 0,$$

E daí:

$$p_{02} = 0 \text{ ou } -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ ou } -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Finalmente afirmamos que  $p_{02} = p_{13}$ . De fato, quando  $p_{02} = 0$  é claro que  $p_{13} = 0$  também. Mas quando  $p_{02} \neq 0$ , temos que  $p_{02}^2 + p_{02} - 1 = 0$ , isto é,  $p_{02}^2 - 1 = -p_{02}$ , e portanto:

$$p_{13} = \frac{-p_{02}^2}{p_{02}^2 - 1} = \frac{-p_{02}^2}{-p_{02}} = p_{02}.$$

Com isso encerramos o primeiro caso.

De maneira inteiramente análoga tratamos os próximos cinco casos:

- 2)  $p_{03} = -p_{02}$  e  $p_{13} = 1$
- 3)  $p_{02} = -1$  e  $p_{13} = -p_{12}$
- 4)  $p_{03} = -1$  e  $p_{13} = -p_{12}$
- 5)  $p_{02} = -1$  e  $p_{13} = 1$
- 6)  $p_{03} = -1$  e  $p_{12} = 1$

Obtendo as seguintes soluções :

- 2)  $p_{02} = -p_{12} = 0$  ou  $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$  ou  $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$
- 3)  $p_{03} = p_{12} = 0$  ou  $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$  ou  $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$
- 4)  $p_{02} = -p_{12} = 0$  ou  $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$  ou  $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$
- 5)  $p_{03} = -p_{12} = 0$  ou  $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$  ou  $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$
- 6)  $p_{02} = -p_{13} = 0$  ou  $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$  ou  $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ .

Restam os três últimos casos:

- 7)  $p_{02} = -1$  e  $p_{12} = 1$
- 8)  $p_{03} = -1$  e  $p_{13} = 1$
- 9)  $p_{03} = -p_{02}$  e  $p_{13} = -p_{12}$

Em cada um deles obtemos “equações” do tipo  $1 = 0$ , isto é, o sistema  $2 \times 2$  obtido é impossível. Assim, nada mais temos a fazer.

Até agora temos considerado  $p_{01} \neq 0$  e com isso já obtivemos 18 retas. Passaremos agora a considerar as retas tais que  $p_{01} = 0$ . Faremos isso em cinco etapas,

em cada uma delas considerando  $p_{ij} = 1$  e  $p_{01} = 0$ . Note que obteremos as retas sem cálculos adicionais, apenas trabalhando com a permutação das coordenadas que aplica  $x_i$  e  $x_j$  em  $x_0$  e  $x_1$  respectivamente.

a)  $p_{01} = 0$  e  $p_{02} = 1$  (permutação  $(0213) \mapsto (0123)$ ):

Este caso fornece quatro novas retas dadas por:

$$p_{03} = 0, p_{12} = -1, p_{23} = 0$$

$$p_{03} = 0, p_{12} = 0, p_{23} = 1$$

$$p_{03} = -1, p_{12} = 0, p_{23} = 0$$

$$p_{03} = -1, p_{12} = -1, p_{23} = 0$$

b)  $p_{01} = p_{02} = 0$  e  $p_{03} = 1$  (permutação  $(0312) \mapsto (0123)$ ):

Aqui obtemos mais duas novas retas:

$$p_{13} = -1, p_{23} = 0$$

$$p_{13} = 0, p_{23} = -1$$

c)  $p_{01} = p_{02} = 0$  e  $p_{12} = 1$  (permutação  $(1203) \mapsto (0123)$ ):

Neste caso, mais duas retas:

$$p_{13} = 0, p_{23} = 1$$

$$p_{13} = -1, p_{23} = 0$$

d)  $p_{01} = p_{02} = 0$  e  $p_{13} = 1$  (permutação  $(1320) \mapsto (0123)$ ):

Aqui obtemos somente uma nova reta que é dada por

$$p_{03} = 0, p_{12} = 0, p_{23} = -1,$$

enquanto que as duas soluções

$$p_{03} = -1, p_{12} = 0, p_{23} = 0 \text{ e}$$

$$p_{03} = 0, p_{12} = -1, p_{23} = 0$$

nos dão retas que já foram encontradas na primeira linha do caso b) e na segunda linha do caso c) respectivamente.

e)  $p_{01} = p_{02} = 0$  e  $p_{23} = 1$  (permutação  $(2310) \mapsto (0123)$ ):

Encontramos as três soluções

$$p_{03} = 0, p_{12} = 0, p_{13} = -1$$

$$p_{03} = -1, p_{12} = 0, p_{13} = 0 \text{ e}$$

$$p_{03} = 0, p_{12} = 1, p_{13} = 0,$$

todas elas fornecendo retas já antes obtidas na primeira linha do caso d), segunda linha do caso b) e primeira linha do caso c) respectivamente.

Obtivemos então 9 soluções distintas com  $p_{01} = 0$ , totalizando assim 27 retas.

**Resumo:** Adotando a notação  $w_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$  e  $w_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ , as 27 retas sobre a

Superfície de Clebsch são dadas explicitamente pelas coordenadas de Plücker abaixo:

01.(0 : 0 : 0 : 0 : 1 : -1)	10.(1 : 0 : 0 : 0 : 1 : 0)	19.(1 : -w <sub>1</sub> : w <sub>1</sub> : 1 : -w <sub>1</sub> : 1)
02.(0 : 0 : 0 : 1 : 0 : 1)	11.(1 : 0 : 0 : 1 : 0 : 0)	20.(1 : -1 : w <sub>1</sub> : w <sub>1</sub> : -w <sub>1</sub> : 1)
03.(0 : 0 : 0 : 1 : -1 : 0)	12.(1 : 0 : -1 : 0 : 0 : 0)	21.(1 : -1 : w <sub>2</sub> : w <sub>2</sub> : -w <sub>2</sub> : -1)
04.(0 : 0 : 1 : 0 : 0 : -1)	13.(1 : -1 : 0 : 0 : 0 : 0)	22.(1 : w <sub>1</sub> : -w <sub>1</sub> : -w <sub>1</sub> : 1 : -1)
05.(0 : 0 : 1 : 0 : -1 : 0)	14.(1 : 0 : -1 : 1 : 0 : 1)	23.(1 : w <sub>2</sub> : -w <sub>2</sub> : -w <sub>2</sub> : 1 : -1)
06.(0 : 1 : 0 : 0 : 0 : 1)	15.(1 : -1 : 0 : 0 : 1 : -1)	24.(1 : -1 : -w <sub>2</sub> : w <sub>2</sub> : 1 : w <sub>2</sub> )
07.(0 : 1 : 0 : -1 : 0 : 0)	16.(1 : w <sub>1</sub> : -1 : -w <sub>1</sub> : w <sub>1</sub> : 1)	25.(1 : -1 : -w <sub>1</sub> : w <sub>1</sub> : 1 : w <sub>1</sub> )
08.(0 : 1 : -1 : 0 : 0 : 0)	17.(1 : w <sub>2</sub> : -1 : -w <sub>2</sub> : w <sub>2</sub> : 1)	26.(1 : -w <sub>2</sub> : -1 : 1 : w <sub>2</sub> : -w <sub>2</sub> )
09.(0 : 1 : -1 : -1 : 1 : 0)	18.(1 : -w <sub>2</sub> : w <sub>2</sub> : 1 : -w <sub>2</sub> : 1)	27.(1 : -w <sub>1</sub> : -1 : 1 : w <sub>1</sub> : -w <sub>1</sub> )

Podemos observar de fato que as retas são todas reais. ■

# Capítulo 2

## O Teorema de Cayley & Salmon

Neste capítulo iremos provar o espantoso teorema descoberto pelos matemáticos *Arthur Cayley* e *George Salmon* em meados do século XIX. Os amigos Cayley e Salmon tinham muitos interesses em comum, entre estes o assunto superfícies cúbicas projetivas, acerca dos quais eles trocavam idéias através de longas cartas. Inicialmente Cayley provou que sobre uma superfície cúbica não singular sempre existe uma quantidade finita de retas. Pouco mais tarde, Salmon mostrou que o número de tais retas é *exatamente* 27. Esse curioso resultado apareceu publicado pela 1<sup>a</sup> vez em 1849 no *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, vol.IV e causou tremenda badalação na comunidade matemática da época, badalação essa “medida” pela grande quantidade de trabalhos posteriores sobre o mesmo tema. Ainda hoje este *singular* teorema provoca surpresa a todos quantos entram em contato com ele pela primeira vez.

### Seção 2.I: O Teorema de Cayley e Salmon

Já vimos que dada uma superfície cúbica  $C$  em  $\mathbb{P}^3$  sempre existe uma reta  $L$  contida na mesma. Queremos saber da possível existência de outras retas intersectando  $L$ . Aplicando, se necessário, uma transformação projetiva podemos supor que a reta  $L$  é dada por  $x_0 = x_1 = 0$ .

O polinômio  $F \in k[X_0, X_1, X_2, X_3]$  que define  $C$  é uma  $k$ -combinação linear dos 20 monômios de grau 3 à 4 variáveis. Como a reta  $L$  está contida na superfície  $C$ , os monômios onde não aparecem  $X_0$  e  $X_1$  (à saber,  $X_2^3, X_2^2X_3, X_2X_3^2$  e  $X_3^3$ ) tem que ter coeficientes nulos. Reciprocamente, se os coeficientes dos termos onde não aparecem  $X_0$  e  $X_1$  são nulos, então cada termo do polinômio  $F$  possui o fator  $X_0$  ou  $X_1$  e portanto a reta  $L : x_0 = x_1 = 0$  está contida na superfície  $C : F = 0$ .

Assim sendo, a equação da superfície  $C$  é dada por  $F = 0$  onde

$$F(X_0, X_1, X_2, X_3) = c_{01}X_0^3 + c_{02}X_1^3 + c_{03}X_0^2X_1 + c_{04}X_0X_1^2 + c_{05}X_0^2X_2 + c_{06}X_0X_2^2 + \\ + c_{07}X_0^2X_3 + c_{08}X_0X_3^2 + c_{09}X_1^2X_2 + c_{10}X_1X_2^2 + c_{11}X_1^2X_3 + c_{12}X_1X_3^2 + \\ + c_{13}X_0X_1X_2 + c_{14}X_0X_1X_3 + c_{15}X_0X_2X_3 + c_{16}X_1X_2X_3$$

e os  $c_{01}, \dots, c_{16}$  não são todos nulos.

A partir de agora suporemos que a superfície cúbica  $C$  é não singular. Seja  $P$  um plano qualquer em  $\mathbb{P}^3$ . Quando  $P$  intersecta a superfície cúbica  $C$ , determina uma curva plana cúbica. No caso de tal curva ser a união de três retas *distintas*, o plano  $P$  é chamado de *plano tritangente à superfície  $C$* . Quero ressaltar que a palavra tritangente faz referência aos três pontos (ou ao ponto triplo) onde o plano  $P$  tangencia a superfície  $C$ .

Considere agora a família dos planos  $P_{(a:b)}$  em  $\mathbb{P}^3$  que contém a reta  $L : x_0 = x_1 = 0$  e passa pelo ponto  $(a : b : 0 : 0)$ , onde  $(a : b) \in \mathbb{P}^1$ , isto é,

$$P_{(a:b)} = \{(ax : bx : y : z) \mid (x : y : z) \in \mathbb{P}^2\}.$$

Cada um desses planos  $P_{(a:b)}$  intersecta a superfície cúbica  $C$  numa curva cúbica que contém a reta  $L$ , isto é, na união da reta  $L$  com uma cônica. Quando esta cônica for degenerada e não contiver a reta  $L$  então o plano  $P_{(a:b)}$  determina sobre a superfície cúbica não singular  $C$  três retas, sendo pelo menos duas distintas.

A seguir, pretendemos responder às seguintes perguntas: Quais são as condições sobre  $a$  e  $b$  e os coeficientes  $c_{01}, \dots, c_{16}$  para que a curva  $P_{(a:b)} \cap C$  seja a união de três retas? Quantos são os planos tritangentes à  $C$  contendo  $L$  (isto é, quantos são os planos  $P_{(a:b)}$  tais que  $P_{(a:b)} \cap C$  são três retas distintas)? Quantas são as retas contidas em  $C$  intersectando  $L$ ?

Vamos analisar primeiramente o caso particular onde  $(a : b) = (0 : 1)$ , isto é,  $P_{(0:1)}$  é o plano cuja primeira coordenada é nula. Substituindo  $X_0$  por 0,  $X_1$  por  $x$ ,  $X_2$  por  $y$  e  $X_3$  por  $z$  na equação que define  $C$ , obtemos a equação da curva cúbica  $P_{(0:1)} \cap C$ :

$$x(c_{02}x^2 + c_{10}y^2 + c_{12}z^2 + c_{09}xy + c_{11}xz + c_{16}yz) = 0.$$

Esta curva é a união da reta  $L$  (agora dada simplesmente pela equação  $x = 0$ ) com a cônica  $(x, y, z) G(x, y, z)^t = 0$ , onde

$$G = \begin{pmatrix} c_{02} & \frac{1}{2}c_{09} & \frac{1}{2}c_{11} \\ \frac{1}{2}c_{09} & c_{10} & \frac{1}{2}c_{16} \\ \frac{1}{2}c_{11} & \frac{1}{2}c_{16} & c_{12} \end{pmatrix}$$

**Afirmção 2.I.1:** A cônica  $(x, y, z) G (x, y, z)^t = 0$  é degenerada se e somente se a matriz  $G$  for singular, isto é  $\det G = 0$ .

De fato, a cônica acima ser degenerada significa que algum ponto  $(x_0 : y_0 : z_0)$  é ponto singular, ou seja, pelo Critério de Jacobi vale que

$$\nabla((x, y, z) G (x, y, z)^t)(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

onde  $\nabla := (\frac{\partial}{\partial X_0}, \frac{\partial}{\partial X_1}, \frac{\partial}{\partial X_2}, \frac{\partial}{\partial X_3})$  é o *operador gradiente*. Mas

$$\nabla((x, y, z) G (x, y, z)^t)(x_0, y_0, z_0) = 2G(x_0, y_0, z_0)^t,$$

e portanto a matriz  $2G$  tem que ser singular, isto é,  $\det G = 0$ . ■

Supondo ainda neste caso particular que  $\det G = 0$ , resta-nos mostrar que a reta  $L : x = 0$  não é componente da cônica degenerada  $(x, y, z) G (x, y, z)^t = 0$  e que esta cônica não se reduz a uma reta dupla e daí poderemos concluir que o plano  $P_{(0:1)} : x_0 = 0$  é tritangente à superfície cúbica não singular  $C$ . Ora, provando que a reta  $L$  não é componente da cônica eu já terei pelo menos duas retas distintas. Para escapar de uma possível reta dupla eu posso recomeçar o raciocínio tomando uma dessas retas como  $L$  e por argumento análogo ela será distinta das outras duas. Portanto basta provar a seguinte:

**Afirmção 2.I.2:** A reta  $L$  não é componente da cônica  $(x, y, z) G (x, y, z)^t = 0$ .

Esta afirmação é equivalente a dizer que  $x$  não divide o polinômio  $c_{02}x^2 + c_{10}y^2 + c_{12}z^2 + c_{09}xy + c_{11}xz + c_{16}yz$ . E de fato, se  $x$  dividisse o polinômio acima, então a expressão  $c_{10}y^2 + c_{16}yz + c_{12}z^2$  seria identicamente nula e isso nos conduziria a seguinte contradição : Aplicando o Critério de Jacobi aos pontos  $(0 : 0 : y : z) \in L$  temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial X_0}(0, 0, y, z) &= c_{06}y^2 + c_{15}yz + c_{08}z^2 \\ \frac{\partial F}{\partial X_1}(0, 0, y, z) &= c_{10}y^2 + c_{16}yz + c_{12}z^2 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial X_2}(0, 0, y, z) &= \frac{\partial F}{\partial X_3}(0, 0, y, z) = 0 \end{aligned}$$

Sendo  $k$  algebricamente fechado, a equação quadrática  $c_{06}y^2 + c_{15}yz + c_{08}z^2 = 0$  admite uma solução  $(y_0, z_0) \neq (0, 0)$  e portanto o ponto  $(0 : 0 : y_0 : z_0) \in L \subseteq C$  seria singular, o que contradiz o fato da superfície  $C$  ser não singular. ■

Para o caso geral, substituímos  $X_0$  por  $ax$ ,  $X_1$  por  $bx$ ,  $X_2$  por  $y$  e  $X_3$  por  $z$  na equação da superfície  $C$ . Então a curva cúbica  $P_{(a:b)} \cap C$  obtida é a união da reta

$L : x = 0$  com a cônica  $(x, y, z) G (x, y, z)^t = 0$  onde

$$G = \begin{pmatrix} (c_{01}a^3 + c_{03}a^2b + c_{04}ab^2 + c_{02}b^3) & \frac{1}{2}(c_{05}a^2 + c_{13}ab + c_{09}b^2) & \frac{1}{2}(c_{07}a^2 + c_{14}ab + c_{11}b^2) \\ \frac{1}{2}(c_{05}a^2 + c_{13}ab + c_{09}b^2) & (c_{06}a + c_{10}b) & \frac{1}{2}(c_{15}a + c_{16}b) \\ \frac{1}{2}(c_{07}a^2 + c_{14}ab + c_{11}b^2) & \frac{1}{2}(c_{15}a + c_{16}b) & (c_{08}a + c_{12}b) \end{pmatrix}$$

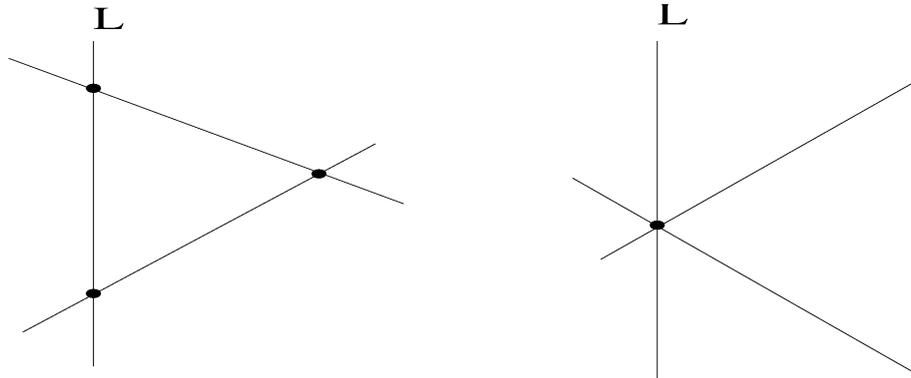
Novamente, e pela mesma razão de antes, afirmo que a cônica  $(x, y, z) G (x, y, z)^t = 0$  é degenerada se e somente se vale

$$\det G = 0.$$

Observe que  $\det G$  é uma forma homogênea de grau 5 nas variáveis  $a$  e  $b$  com coeficientes dados por combinações dos coeficientes  $c_{01}, \dots, c_{16}$  de  $F$ . A equação  $\det G = 0$  dá as condições sobre  $a$  e  $b$  e os 16 coeficientes de  $F$  para que a curva  $P_{(a:b)} \cap C$  seja a união de três retas (não necessariamente distintas). Com isso respondemos à primeira das nossas três perguntas.

Por ser o corpo  $k$  algebricamente fechado, existe uma raiz  $(a : b)$  para a equação quártica  $\det G = 0$ . A menos de transformação projetiva podemos supor esta raiz  $(a : b) = (0 : 1)$ . Então pelo que já vimos anteriormente, o plano  $P_{(0:1)}$  é tritangente à superfície  $C$ .

Até aqui já temos concluído que dada uma reta  $L$  conhecida sobre uma superfície cúbica não singular  $C \subseteq \mathbb{P}^3$ , então existe um plano  $P$  tal que  $P \cap C$  é a união de três retas distintas, sendo uma delas a reta  $L$ . Observe que as três retas distintas de  $P \cap C$  podem ter duas configurações possíveis: Ou elas não tem ponto em comum ou as três são concorrentes no mesmo ponto.



Prosseguindo, para saber o número exato de tais planos, só precisamos saber o número exato de raízes distintas  $(a : b)$  da equação quártica  $\det G = 0$ . Sabemos que são exatamente cinco raízes distintas se mostrarmos a seguinte:

**Afirmção 2.I.3:** Cada raiz  $(a : b)$  de  $\det G = 0$  é simples.

Como já determinamos (via uma possível transformação projetiva) que  $(a : b) = (0 : 1)$  é uma raiz, é suficiente mostrar que esta raiz tem multiplicidade 1. Para mostrar a validade da afirmação acima, vamos dividir nossa análise em dois casos referentes às configurações das três retas de  $P_{(0:1)} \cap C$ .

No primeiro caso as três retas não tem ponto comum. Então podemos supor após uma possível transformação projetiva que tais retas são  $L_i : x_0 = x_i = 0$ ,  $(i = 1, 2, 3)$  no plano  $P_{(0:1)} : x_0 = 0$ . Neste caso,  $F$  é dado por:

$$F(X_0, X_1, X_2, X_3) = X_0(c_{01}X_0^2 + c_{04}X_1^2 + c_{06}X_2^2 + c_{08}X_3^2 + \\ + c_{03}X_0X_1 + c_{05}X_0X_2 + c_{07}X_0X_3 + c_{13}X_1X_2 + c_{14}X_1X_3 + c_{15}X_2X_3) + \\ + X_1X_2X_3$$

(Observamos que em relação à descrição original do polinômio  $F$ , nós obtivemos as seguintes simplificações :  $c_{02} = c_{09} = c_{10} = c_{11} = c_{12} = 0$  e  $c_{16} = 1$ .)

A equação  $\det G = 0$ , já fazendo  $b = 1$ , reduz-se à:

$$\det \begin{pmatrix} (c_{01}a^3 + c_{03}a^2 + c_{04}a) & \frac{1}{2}(c_{05}a^2 + c_{13}a) & \frac{1}{2}(c_{07}a^2 + c_{14}a) \\ \frac{1}{2}(c_{05}a^2 + c_{13}a) & c_{06}a & \frac{1}{2}(c_{15}a + 1) \\ \frac{1}{2}(c_{07}a^2 + c_{14}a) & \frac{1}{2}(c_{15}a + 1) & c_{08}a \end{pmatrix} = 0$$

Obviamente  $a = 0$  é uma raiz da equação quártica acima. Observamos que a raiz  $a = 0$  será simples se e somente se o coeficiente de  $a$  no polinômio  $\det G$  acima é diferente de zero, isto é  $-\frac{1}{4}c_{04} \neq 0$ , isto é,  $c_{04} \neq 0$ .

Note que a curva cúbica  $P_{(0:1)} \cap C$  é a união das retas distintas  $L_1, L_2$  e  $L_3$  e possui três pontos singulares, à saber,  $L_1 \cap L_2 = (0 : 0 : 0 : 1)$ ,  $L_1 \cap L_3 = (0 : 0 : 1 : 0)$  e  $L_2 \cap L_3 = (0 : 1 : 0 : 0)$ . Mas tais pontos estão contidos na superfície cúbica não singular  $C$  e o Critério de Jacobi aplicado aos mesmos nos informa que  $c_{08}, c_{06}$  e  $c_{04}$  são todos não nulos. De fato, aplicando o Critério de Jacobi aos pontos  $(0 : x : y : z) \in P_{(0:1)}$  temos:

$$\frac{\partial F}{\partial X_0}(0, x, y, z) = c_{04}x^2 + c_{06}y^2 + c_{08}z^2 + c_{13}xy + c_{14}xz + c_{15}yz$$

$$\frac{\partial F}{\partial X_1}(0, x, y, z) = yz, \quad \frac{\partial F}{\partial X_2}(0, x, y, z) = xz, \quad \frac{\partial F}{\partial X_3}(0, x, y, z) = xy$$

Nos pontos  $(0 : 0 : 0 : 1)$ ,  $(0 : 0 : 1 : 0)$  e  $(0 : 1 : 0 : 0)$  temos claramente que as derivadas  $\frac{\partial F}{\partial X_1}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial X_2}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial X_3}$  se anulam enquanto  $\frac{\partial F}{\partial X_0}$  assume os valores  $c_{08}$ ,  $c_{06}$  e  $c_{04}$  respectivamente. E portanto  $c_{08}$ ,  $c_{06}$  e  $c_{04}$  necessariamente tem que ser não nulos. Em particular, a raiz  $a = 0$  da equação  $\det G$  acima é simples.

No segundo caso, consideramos que as três retas tem um ponto em comum. Após uma possível transformação projetiva podemos supor que tais retas sejam  $L_1 : x_0 = x_1 = 0$ ,  $L_2 : x_0 = x_2 = 0$  e  $L_3 : x_0 = x_1 + x_2 = 0$  no plano  $P_{(0:1)} : x_0 = 0$ . Neste caso  $F$  é dado por:

$$\begin{aligned} F(X_0, X_1, X_2, X_3) = & X_0(c_{01}X_0^2 + c_{04}X_1^2 + c_{06}X_2^2 + c_{08}X_3^2 + \\ & + c_{03}X_0X_1 + c_{05}X_0X_2 + c_{07}X_0X_3 + c_{13}X_1X_2 + c_{14}X_1X_3 + c_{15}X_2X_3) + \\ & + X_1X_2(X_1 + X_2) \end{aligned}$$

(Desta vez em relação à descrição original de  $F$ , nós lucrámos as simplificações :  $c_{02} = c_{11} = c_{12} = c_{16} = 0$  e  $c_{09} = c_{10} = 1$ .)

A equação  $\det G = 0$ , já fazendo  $b = 1$ , reduz-se à:

$$\det \begin{pmatrix} (c_{01}a^3 + c_{03}a^2 + c_{04}a) & \frac{1}{2}(c_{05}a^2 + c_{13}a + 1) & \frac{1}{2}(c_{07}a^2 + c_{14}a) \\ \frac{1}{2}(c_{05}a^2 + c_{13}a + 1) & (c_{06}a + 1) & \frac{1}{2}c_{15}a \\ \frac{1}{2}(c_{07}a^2 + c_{14}a) & \frac{1}{2}c_{15}a & c_{08}a \end{pmatrix} = 0$$

Claramente vê-se que  $a = 0$  é uma raiz da equação quártica  $\det G = 0$  acima. Analogamente ao caso anterior, a raiz  $a = 0$  ser simples é equivalente a exigir que  $c_{08} \neq 0$ . Desta vez o “ponto suspeito” em  $P_{(0:1)} \cap C$  é  $L_1 \cap L_2 \cap L_3 = (0 : 0 : 0 : 1)$ . No entanto por estar contido na superfície não singular  $C$ , o Critério de Jacobi garante que  $c_{08} \neq 0$ . De fato, aplicando o Critério de Jacobi aos pontos  $(0 : x : y : z) \in P_{(0:1)}$  temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial X_0}(0, x, y, z) &= c_{04}x^2 + c_{06}y^2 + c_{08}z^2 + c_{13}xy + c_{14}xz + c_{15}yz \\ \frac{\partial F}{\partial X_1}(0, x, y, z) &= 2xy + y^2, \quad \frac{\partial F}{\partial X_2}(0, x, y, z) = 2xy + x^2, \quad \frac{\partial F}{\partial X_3}(0, x, y, z) = 0 \end{aligned}$$

Em  $(0 : 0 : 0 : 1)$  vale imediatamente que  $\frac{\partial F}{\partial X_0} = c_{08}$  e as derivadas  $\frac{\partial F}{\partial X_1}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial X_2}$  e  $\frac{\partial F}{\partial X_3}$  se anulam. E portanto  $c_{08}$  é necessariamente não nulo, ou seja,  $a = 0$  é raiz simples da equação  $\det G = 0$  acima. Essas considerações provam a afirmação acima feita. ■

Com a prova desta afirmação podemos responder à segunda (e conseqüentemente à terceira) das nossas perguntas anteriormente formuladas. Resumimos as conclusões de toda essa discussão no seguinte:

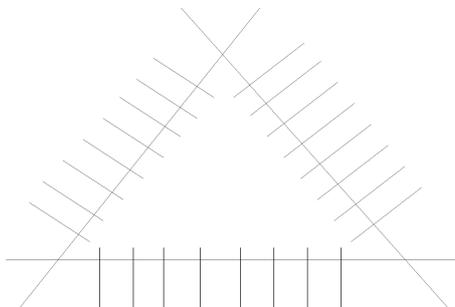
**Teorema 2.I.4:** Seja  $C$  uma superfície cúbica não singular em  $\mathbb{P}^3$ . Para cada reta  $L \subseteq C$  existem exatamente 5 planos tritangentes à  $C$  contendo a reta  $L$ . Consequentemente, cada reta  $L \subseteq C$  intersecta exatamente outras 10 retas distintas contidas em  $C$ .

Já tendo reunido todos os pré-requisitos necessários, podemos finalmente enunciar e provar o seguinte:

**Teorema 2.I.5 (Cayley-Salmon, 1849):** Dada uma superfície cúbica não singular em  $\mathbb{P}^3$ , existem exatamente 27 retas de  $\mathbb{P}^3$  contidas na mesma.

**Demonstração:** Seja  $P$  um plano tritangente à superfície  $C$  e sejam  $L_1, L_2, L_3$  as retas de  $P \cap C$ . Cada reta  $L_i, (i = 1, 2, 3)$  intersecta 10 outras retas distintas sendo 2 delas contidas em  $P$  e as outras 8 não contidas em  $P$ . Assim, podemos contar 3 retas de  $P \cap C$  e, para cada  $i = 1, 2$  ou  $3$ , podemos contar 8 retas fora de  $P$  e intersectando  $L_i$ . O total de retas obtidas é:

$$3 + 3 \times 8 = 27.$$



Agora só nos resta mostrar que não existe nenhuma outra reta além dessas 27. Suponha uma reta qualquer contida em  $C$ . Se tal reta está contida no plano  $P$  então ela é alguma reta  $L_i$  e já foi contada. Senão, ela intersecta  $P$  em algum ponto, mas por estar contida em  $C$ , então ela intersecta  $P$  em algum ponto de  $P \cap C$ , isto é, intersecta alguma reta  $L_i$ . Novamente neste caso esta reta já foi contada e isso encerra esta demonstração. ■

**Corolário 2.I.6:** Uma superfície cúbica não singular em  $\mathbb{P}^3$  admite exatamente

$$\frac{27 \cdot 10}{3!} = 45$$

planos tritangentes. ■

Para encerrar essa seção, observamos que a condição de não singularidade de  $C$  é fundamental, tanto na prova de que a reta  $L$  não é componente da cônica degenerada  $(x, y, z) G(x, y, z)^t = 0$ , quanto na prova de que as raízes da forma quártica  $\det G$  são todas simples. Por isso quero convidá-los a reexaminarmos os exemplos 1 e 2 da seção IV do capítulo anterior à luz da contagem de planos tritangentes. Então veremos a “influência negativa” das singularidades nesta contagem.

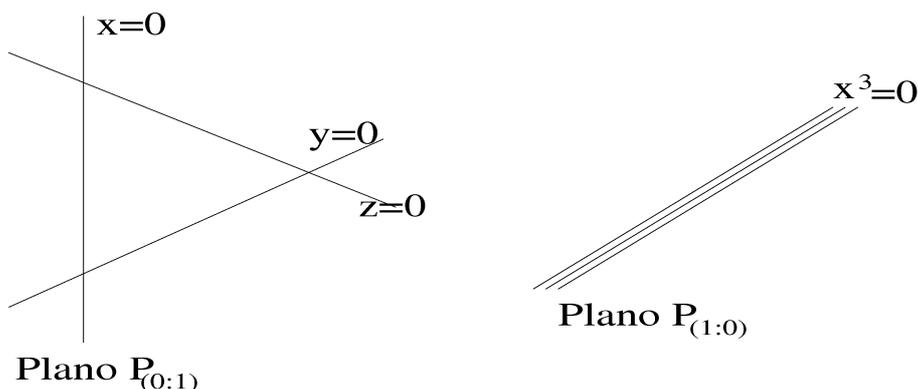
**Contra-exemplo 1:** Vamos reconsiderar a superfície cúbica singular  $S$  (contendo três retas e) dada pelo polinômio:

$$F(X_0, X_1, X_2, X_3) = X_0^3 - X_1 X_2 X_3.$$

(Usando a notação desta seção temos  $c_{01} = 1, c_{16} = -1$  e  $c_{02} = \dots = c_{15} = 0$ ). Note que  $L : x_0 = x_1 = 0$  está contida na superfície. Então a equação quártica (que fornece como raízes os parâmetros que caracterizam os planos tritangentes) é dada por:

$$\det G = \det \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}b \\ 0 & \frac{1}{2}b & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}a^3b^2 = 0.$$

Se  $a \neq 0$ , podemos considerar  $a = 1$  e obtemos a raiz  $(1 : 0)$  com multiplicidade 2. Por outro lado, se  $b \neq 0$ , consideramos sem perda  $b = 1$  e obtemos a raiz  $(0 : 1)$  com multiplicidade 3. Observamos o efeito das singularidades: as raízes da equação quártica não são mais simples.



No plano  $P_{(0:1)}$ , isto é,  $x_0 = 0$ , temos a equação da curva cúbica  $S \cap P_{(0:1)}$  dada por  $xyz = 0$ , isto é, as três retas são distintas. Já no plano  $P_{(1:0)} : x_1 = 0$ , a equação da curva cúbica  $S \cap P_{(1:0)}$  é dada por  $x^3 = 0$ , isto é, temos apenas a reta  $L$  com multiplicidade 3. ■

**Contra-exemplo 2: Os Cones Cúbicos:** Reconsideramos agora o exemplo do cone cúbico de vértice  $(1 : 0 : 0 : 0)$  sobre a curva cúbica plana  $G = 0$  onde  $G \in$

$k[X_1, X_2, X_3]$  é uma forma de grau três à três variáveis. Esta superfície cúbica singular  $S$  é dada pela equação

$$F(X_0, X_1, X_2, X_3) = G(X_1, X_2, X_3).$$

Podemos supor, à menos de uma transformação projetiva no plano “ $\mathbb{P}^2$ ” =  $\{(0 : x_1 : x_2 : x_3) \mid (x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}^2\}$ , que a curva  $G = 0$  passa pelo ponto  $(0 : 1 : 0 : 0)$ . Com isso, ganhamos que a reta  $L : x_0 = x_1 = 0$  está contida na superfície  $S$ , e com a notação desta seção obtemos as seguintes reduções:  $c_{01} = c_{03} = c_{04} = c_{05} = c_{06} = c_{07} = c_{08} = c_{13} = c_{14} = c_{15} = 0$ . Então a equação quártica que fornece como soluções os planos tritangentes contendo a reta  $L$  é dado por:

$$\det G = \det \begin{pmatrix} c_{02}b^3 & \frac{1}{2}c_{09}b^2 & \frac{1}{2}c_{11}b^2 \\ \frac{1}{2}c_{09}b^2 & c_{10}b & \frac{1}{2}c_{16}b \\ \frac{1}{2}c_{11}b^2 & \frac{1}{2}c_{16}b & c_{12}b \end{pmatrix} = b^5 \det \begin{pmatrix} c_{02} & \frac{1}{2}c_{09} & \frac{1}{2}c_{11} \\ \frac{1}{2}c_{09} & c_{10} & \frac{1}{2}c_{16} \\ \frac{1}{2}c_{11} & \frac{1}{2}c_{16} & c_{12} \end{pmatrix} = 0$$

Observamos que se o determinante acima (o que serve de coeficiente para  $b^5$ ) for nulo, então a forma quártica fornece uma equação do tipo identicamente nula, o que caracteriza infinitas soluções (e portanto, infinitos planos tritangentes). No entanto, se o referido determinante for diferente de zero, então obtemos a raiz  $(a : b) = (1 : 0)$  com multiplicidade 5. Em qualquer caso, o efeito das singularidades é a perda da existência de exatamente 5 raízes simples para a equação quártica. ■

## Seção 2.II: A Tabela de Interseção de Schläfli

Pretendemos a seguir estudar as configurações e as interseções possíveis entre as 27 retas. Para isso, vamos introduzir paulatinamente uma notação que as identifique e vamos descrever as interseções entre si numa tabela. Tanto a notação utilizada quanto a tabela que dela decorre são devidas ao matemático suíço *Ludwig Schläfli* ([he], pág 2).

Para começar, queremos provar a não existência de triédros sobre uma superfície cúbica não singular  $C$ . Definimos um *triédro* como uma figura formada pela união de três retas distintas e não coplanares que concorrem no mesmo ponto chamado vértice.

**Afirmção 2.II.1:** Uma superfície cúbica não singular não contém triédros. (Em particular, se três retas distintas sobre a superfície encontram-se num mesmo ponto, então elas são necessariamente coplanares.)

De fato, suponha que uma superfície cúbica dada por  $F = 0$  com  $F \in k[X_0, X_1, X_2, X_3]$  contenha um triédro. A menos de transformação projetiva, podemos supor que esse

triedo é dado pelas retas  $x_0 = x_1 = 0$ ,  $x_0 = x_2 = 0$  e  $x_1 = x_2 = 0$  (e tenha vértice  $(0 : 0 : 0 : 1)$ ). Podemos então escrever  $F$  como:

$$F(X_0, X_1, X_2, X_3) = X_0X_2(a_1X_0 + a_2X_1 + a_3X_2 + a_4X_3) + \\ + X_1(a_5X_0 + a_6X_2)(a_7X_0 + a_8X_1 + a_9X_2 + a_{10}X_3).$$

Aplicando o Critério de Jacobi ao vértice  $(0 : 0 : 0 : 1)$  concluímos imediatamente que tal ponto é singular. ■

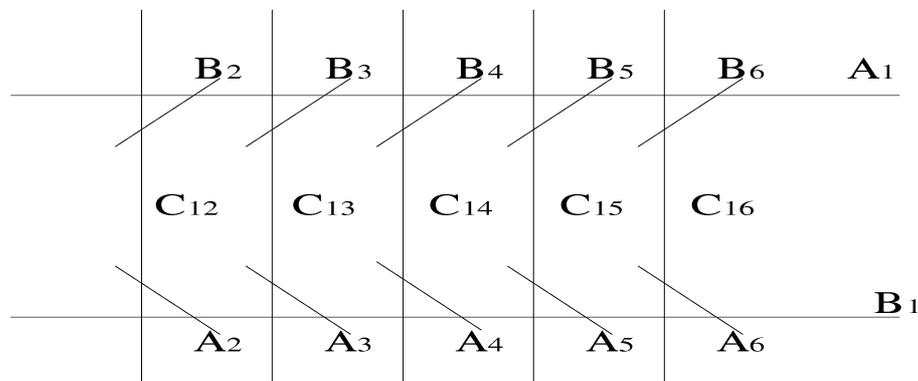
Seja  $A_1$  uma das 27 retas contidas em  $C$ . Seja  $B_1$  uma das 16 retas sobre  $C$  que não intersectam  $A_1$ .

**Afirmção 2.II.2:** Existem exatamente 5 retas sobre  $C$  que intersectam simultaneamente  $A_1$  e  $B_1$ .

De fato, considere a reta  $A_1$  e as outras duas retas distintas num dos 5 planos tritangentes contendo  $A_1$ . A reta  $B_1$  intersecta este plano em algum ponto de  $A_1$  ou das outras duas retas. Não será em  $A_1$  (pois escolhemos  $B_1$  de tal maneira que  $A_1 \cap B_1 = \emptyset$ ) e nem será na interseção das outras duas retas (pois já eliminamos a possibilidade de triedos sobre  $C$ ). Portanto  $B_1$  vai intersectar o tal plano exatamente em uma única reta que intersecte  $A_1$ . ■

Sejam  $C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{15}$  e  $C_{16}$  as cinco retas acima referidas, isto é, que intersectem simultaneamente  $A_1$  e  $B_1$ . Para cada  $j = 2, \dots, 6$ , seja  $A_j$  a terceira reta no plano tritangente gerado por  $B_1$  e  $C_{1j}$  (isto é, a única reta sobre a cúbica  $C$  que intersecte  $B_1$  e  $C_{1j}$  simultaneamente e seja diferente delas). Analogamente, para cada  $j = 2, \dots, 6$ , seja  $B_j$  a única reta que intersecte propriamente as retas  $A_1$  e  $C_{1j}$ .

As 17 retas acima descritas podem ser representadas esquematicamente pela figura abaixo:



**Afirmação 2.II.3:** Os seis pares de retas  $(A_1, B_1), \dots, (A_6, B_6)$  formam uma *Configuração Bissecta* (em Inglês, *Double Six*), ou equivalentemente:

- i)  $A_1, \dots, A_6$  não se intersectam duas a duas,
- ii)  $B_1, \dots, B_6$  não se intersectam duas a duas e
- iii)  $A_i$  intersecta  $B_j$  se e somente se  $i \neq j$ .

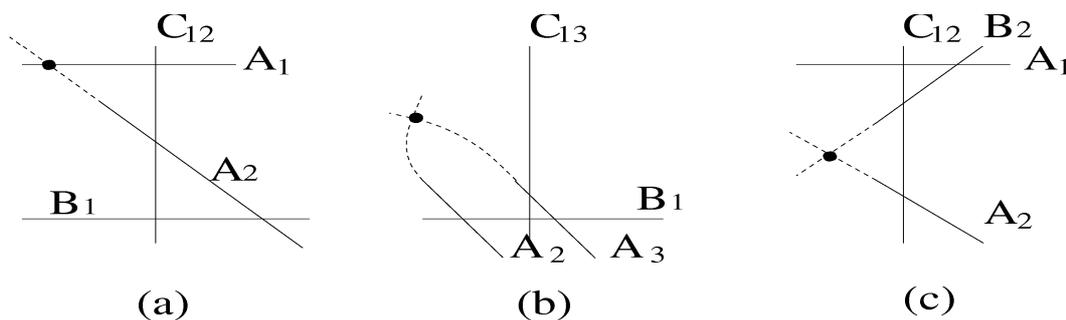
Para comprovar a validade do enunciado acima, basta mostrar que valem as quatro afirmações a seguir: **a)**  $A_1$  não intersecta  $A_2$ , **b)**  $A_2$  não intersecta  $A_3$ , **c)**  $A_2$  não intersecta  $B_2$ , **d)**  $A_2$  intersecta  $B_3$ .

**a)**  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$  (vide figura abaixo):  $A_1$  já intersecta  $C_{12}$ . Se intersectasse  $A_2$  também, então seria coplanar com as retas  $A_2, B_1, C_{12}$  e intersectaria também  $B_1$ , o que não é possível por construção.

**b)**  $A_2 \cap A_3 = \emptyset$  (vide figura abaixo):  $A_2$  já intersecta  $B_1$ . Se intersectasse  $A_3$  também, então seria coplanar com as retas  $A_3, B_1, C_{13}$ , ou seja, seria uma quarta reta distinta no plano tritangente contendo  $A_3, B_1, C_{13}$ , o que não é possível.

**c)**  $A_2 \cap B_2 = \emptyset$  (vide figura abaixo):  $A_2$  já intersecta  $C_{12}$ . Se intersectasse  $B_2$  também, então seria uma quarta reta distinta e coplanar com  $A_1, B_2$  e  $C_{12}$ , o que não é possível.

**d)**  $A_2 \cap B_3 \neq \emptyset$ : Já sabemos que  $A_2$  tem que intersectar o plano tritangente contendo  $A_1, B_3$  e  $C_{13}$ . Já sabemos também que  $A_2$  não intersecta  $A_1$  (letra **a**) acima) e nem  $C_{13}$  (pois isso implicaria que  $A_2$  intersectasse  $A_3$ ). Portanto  $A_2$  tem que intersectar  $B_3$ .



■

**Observação:** O número de configurações bissectas, à menos de uma possível troca de  $A_1$  por  $B_1$  e à menos de permutação dos seis pares é dada por:

$$\frac{27 \cdot 16 \cdot 5!}{2 \cdot 6!} = 36.$$

Finalmente, vamos introduzir a notação para mais 10 retas. Acabamos de ver que para cada par  $i \neq j$  em  $\{2, \dots, 6\}$ , as retas  $A_i$  e  $B_j$  se intersectam. Seja  $C_{ij}$  a terceira reta no plano tritangente contendo  $A_i$  e  $B_j$ .

**Afirmações 2.II.4:**

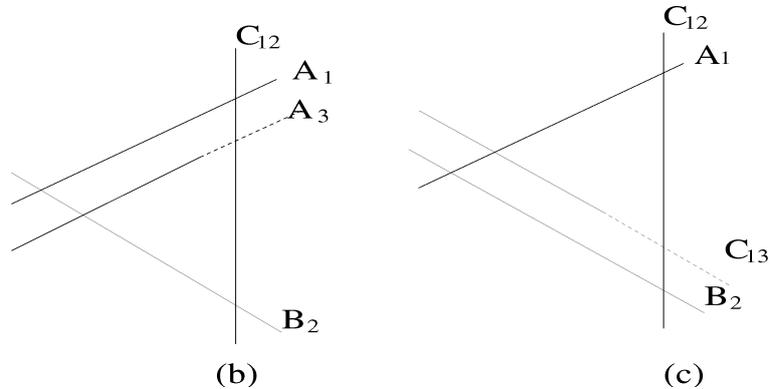
- i)  $C_{ij} = C_{ji}$  intersecta  $A_i, B_i, A_j$  e  $B_j$ , mas não intersecta  $A_k$  e  $B_k$  quando  $k \notin \{i, j\}$ ,
- ii)  $C_{ij}$  e  $C_{ik}$  não se intersectam quando  $j \neq k$ ,
- iii)  $C_{ik}$  e  $C_{jk}$  não se intersectam quando  $i \neq j$ ,
- iv)  $C_{ij}$  e  $C_{kl}$  se intersectam quando  $i, j, k$  e  $l$  são diferentes entre si.

Mostraremos a validade das afirmações acima nas seguintes etapas: **a)**  $C_{ij} = C_{ji}$  e intersecta  $A_i, B_i, A_j$  e  $B_j$ , **b)**  $C_{12}$  não intersecta  $A_3$  nem  $B_3$ , **c)**  $C_{12}$  não intersecta  $C_{13}$ , **d)**  $C_{13}$  não intersecta  $C_{23}$ , **e)**  $C_{12}$  intersecta  $C_{34}$ .

**a)**  $C_{ij} = C_{ji}$ : Sejam  $i \neq j$ . Pela configuração bissexta,  $A_j$  não intersecta  $A_i$  e nem  $B_j$ , portanto  $A_j$  intersecta  $C_{ij}$ . Também,  $B_i$  não intersecta  $B_j$  e nem  $A_i$  e portanto  $B_i$  intersecta  $C_{ij}$ . Como a reta que intersecta simultaneamente  $A_j$  e  $B_i$  é  $C_{ji}$ , concluímos que  $C_{ij} = C_{ji}$ . Que  $C_{ij}$  intersecta  $A_i, B_i, A_j$  e  $B_j$  é imediato por construção e porque  $C_{ij} = C_{ji}$ .

**b)**  $C_{12} \cap A_3 = \emptyset$  e  $C_{21} \cap B_3 = \emptyset$  (vide figura abaixo): Já sabemos pela configuração bissexta que  $A_3$  intersecta  $B_2$ . Se intersectasse também  $C_{12}$ , então seria coplanar com (e portanto intersectaria)  $A_1$ , o que não é possível (também pela configuração bissexta). O raciocínio para  $C_{21} \cap B_3 = \emptyset$  é análogo.

**c)**  $C_{12} \cap C_{13} = \emptyset$  (vide figura abaixo): Já sabemos, por construção, que  $C_{13}$  intersecta  $A_1$ . Se intersectasse também  $C_{12}$ , seria uma quarta reta no plano tritangente contendo  $A_1, B_2$  e  $C_{12}$  o que não é possível.



**d)** Usando que  $C_{13} = C_{31}$  e  $C_{23} = C_{32}$  e pelo caso anterior, concluímos que  $C_{13} \cap C_{23} = \emptyset$ .

e)  $C_{12} \cap C_{34} \neq \emptyset$ : No plano contendo  $A_1, B_2$  e  $C_{12}$ , a reta  $C_{34}$  não pode intersectar  $A_1$  e nem  $B_2$  (pelo caso descrito na letra **b**)), restando a opção de intersectar a reta  $C_{34}$ . ■

**Observação:** O número de retas  $C_{ij}$  com  $1 \leq i < j \leq 6$  é igual a 15. Com mais as 12 retas da configuração bissexta, temos então descritas as 27 retas, bem como suas interseções.

Os resultados apresentados nessa seção estão resumidos na *Tabela de Interseção de Schläfli* anexada ao final deste capítulo.

**Observação:** ([he], pág 6) O número de permutações (ou simetrias) em  $\mathcal{S}_{27}$  que mantém a tabela de interseção invariante, ou, equivalentemente, o número de automorfismos da configuração das 27 retas que preserve a tabela de interseção é dado por

$$27 \cdot 16 \cdot 5! = 51840.$$

### Seção 2.III: Pares Triedais e Normalizações

Conforme já vimos antes, um dos corolários do Teorema de Cayley-Salmon é o fato de que a superfície cúbica não singular  $C$  admite exatamente 45 planos tritangentes. Para cada plano tritangente  $H$ , existem exatamente 32 outros planos tritangentes cuja interseção com  $H$  são retas não contidas na superfície cúbica. De fato, cada reta contida em  $H \cap C$  pertence a 5 planos tritangentes distintos. Temos então  $3 \cdot 4 = 12$  planos tritangentes diferentes de  $H$  e intersectando-o numa reta contida em  $C$ , e portanto, existem  $45 - 12 - 1 = 32$  planos tritangentes tais que as três retas da sua interseção com  $C$  são diferentes das três retas de  $H \cap C$ .

Vamos escolher dois planos tritangentes  $T_1$  e  $T_2$  tais que sua interseção seja uma reta não contida em  $C$ . Por exemplo,  $T_1$  e  $T_2$  tais que

$$T_1 \cap C = A_1 \cup C_{12} \cup B_2,$$

$$T_2 \cap C = C_{13} \cup B_1 \cup A_3.$$

Nesta escolha supostamente particular, não há perda de generalidade. De fato, seja  $A$  uma reta qualquer contida na superfície  $C$  e seja  $B$  uma das 16 que não intersectam  $A$ . À menos da escolha do nome das retas, podemos supor que sejam  $A_1$  e  $B_1$ . Sejam então  $T_1$  e  $T_2$  tais que  $T_1 \cap C = \{A_1, C_{1i}, B_i\}$  e  $T_2 \cap C = \{C_{1j}, B_1, A_j\}$ . Para que os planos  $T_1$  e  $T_2$  não tenham retas em comum sobre  $C$  é necessário e suficiente que  $i \neq j$ . Então, à menos de uma permutação das 27 retas que preserve a

tabela de interseção, podemos assumir que  $i = 2$  e  $j = 3$ . Daí porque essa aparente escolha particular, na verdade, pode ser considerada como geral.

Os dois planos  $T_1$  e  $T_2$  determinam três planos tritangentes  $S_1, S_2$  e  $S_3$  cada um dos quais contendo uma reta de  $T_1 \cap C$  e uma reta de  $T_2 \cap C$ . De fato, cada reta de  $T_1 \cap C$  intersecta exatamente uma reta de  $T_2 \cap C$ , porque senão a reta de interseção  $T_1 \cap T_2$  seria contida em  $C$ . Na escolha com a qual estamos trabalhando temos:

$$S_1 \cap C = A_1 \cup C_{13} \cup B_3,$$

$$S_2 \cap C = C_{12} \cup B_1 \cup A_2,$$

$$S_3 \cap C = B_2 \cup A_3 \cup C_{23}.$$

Observamos agora que as terceiras retas dos conjuntos  $S_1 \cap C$ ,  $S_2 \cap C$  e  $S_3 \cap C$  determinam elas mesmas um plano tritangente, que iremos denotar por  $T_3$ , isto é,

$$T_3 \cap C = B_3 \cup A_2 \cup C_{23}.$$

Determinamos assim um par de família de três planos tritangentes distintos  $\{T_1, T_2, T_3\}$  e  $\{S_1, S_2, S_3\}$  com a propriedade de que cada plano de uma família contém exatamente uma reta de cada plano da outra família. Um par tal como esse é chamado de *Par Triedral*. O conceito de pares triedais foi introduzido pelo geômetra suíço *Jakob Steiner*. O número de pares triedais é dado por:

$$\frac{45 \cdot 32}{2 \cdot 3!} = 120.$$

Se escolhermos um plano de uma família e os três da outra família, digamos,  $T_i, S_1, S_2$  e  $S_3$  ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ) pode ser que os mesmos tenham um ponto em comum. De fato,  $T_i, S_1, S_2$  e  $S_3$  tem um ponto em comum se e somente se  $T_i \cap S_1, T_i \cap S_2$  e  $T_i \cap S_3$  tem um ponto em comum, isto é, se e somente se as três retas de  $T_i$  intersectam-se num mesmo ponto. Quando um plano  $T$  qualquer tritangente à superfície cúbica lisa  $C$  é tal que as três retas de  $T \cap C$  intersectam-se num mesmo ponto, esse plano e esse ponto são chamados de *Plano de Eckardt* e *Ponto de Eckardt*.

No entanto, se escolhermos dois planos de cada família, garantimos que os quatro não tem um ponto em comum. Por exemplo,  $T_1 \cap T_2 \cap S_1 \cap S_2 = (T_1 \cap S_1) \cap (T_2 \cap S_2) = A_1 \cap B_1 = \emptyset$ . Todas as outras oito combinações resolvem-se da mesma maneira como consequência imediata da tabela de interseção de Schläfli.

Assim, tendo garantido que os planos  $T_1, T_2, S_1$  e  $S_2$  não tem ponto em comum, podemos assumir via uma possível transformação projetiva que as equações desses planos sejam respectivamente  $x_2 = 0, x_1 = 0, x_3 = 0$  e  $x_0 = 0$ . Com essa redução, o polinômio homogêneo de grau 3 que descreve a cúbica  $C$  será da forma:

$$F(X_0, X_1, X_2, X_3) = X_1 X_2 l_{12}(X_0, X_1, X_2, X_3) + X_0 X_3 l_{03}(X_0, X_1, X_2, X_3)$$

onde  $l_{12}, l_{03} \in k[X_0, X_1, X_2, X_3] \setminus \{0\}$  são formas lineares não nulas.

Essa primeira redução anula 12 coeficientes na equação, à saber, os coeficientes dos seguintes monômios:  $X_0^3, X_1^3, X_2^3, X_3^3, X_0^2 X_1, X_0 X_1^2, X_0^2 X_2, X_0 X_2^2, X_1^2 X_3, X_1 X_3^2, X_2^2 X_3$  e  $X_2 X_3^2$ . Observamos ainda que ficam dadas as equações dos planos  $T_3$  e  $S_3$ , à saber, respectivamente  $l_{12} = 0$  e  $l_{03} = 0$ .

“Ressuscitaremos” temporariamente a notação da primeira seção deste capítulo para calcularmos outras reduções. Assim, escrevemos:

$$l_{12}(X_0, X_1, X_2, X_3) = c_{13}X_0 + c_{09}X_1 + c_{10}X_2 + c_{16}X_3,$$

$$l_{03}(X_0, X_1, X_2, X_3) = c_{07}X_0 + c_{14}X_1 + c_{15}X_2 + c_{08}X_3.$$

**Afirmção 2.III.1:** Os coeficientes  $c_{07}, c_{08}, c_{09}$  e  $c_{10}$  são necessariamente não nulos.

Uma maneira de ver isso imediatamente é aplicando o Critério de Jacobi aos pontos  $(1 : 0 : 0 : 0), (0 : 1 : 0 : 0), (0 : 0 : 1 : 0)$  e  $(0 : 0 : 0 : 1)$ , interseções dos planos  $T_1, T_2, S_1$  e  $S_2$  tomados três a três.

Outra maneira de se ver isso é estudando a impossibilidade de interseção dos quatro planos escolhidos dois em cada família  $\{T_1, T_2, T_3\}$  e  $\{S_1, S_2, S_3\}$  tal como segue:

Sabemos que não existe  $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}^3$  tal que  $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in T_1 \cap T_2 \cap S_1 \cap S_3$ . Então o sistema:

$$\begin{cases} S_3 : & c_{07}x_0 & +c_{14}x_1 & +c_{15}x_2 & +c_{08}x_3 & = 0 \\ T_2 : & & x_1 & & & = 0 \\ T_1 : & & & x_2 & & = 0 \\ S_1 : & & & & x_3 & = 0 \end{cases}$$

isto é

$$\begin{cases} c_{07}x_0 & = 0 \\ x_1 & = 0 \\ x_2 & = 0 \\ x_3 & = 0 \end{cases}$$

admite somente a solução trivial. Portanto, necessariamente temos que ter  $c_{07} \neq 0$ .

Analogamente, os resultados  $c_{08} \neq 0$ ,  $c_{09} \neq 0$  e  $c_{10} \neq 0$  vem do mesmo raciocínio aplicado respectivamente aos casos  $T_1 \cap T_2 \cap S_2 \cap S_3 = \emptyset$ ,  $T_1 \cap T_3 \cap S_1 \cap S_2 = \emptyset$  e  $T_2 \cap T_3 \cap S_1 \cap S_2 = \emptyset$ . ■

Do mesmo tipo de raciocínio utilizado na demonstração acima obtemos quatro desigualdades envolvendo os coeficientes de  $F$  as quais calculamos agora:

Novamente, sabemos que não existe  $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}^3$  tal que  $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in T_1 \cap T_3 \cap S_1 \cap S_3$ . Então o sistema  $4 \times 4$

$$\begin{cases} T_3 : & c_{13}x_0 & +c_{09}x_1 & +c_{10}x_2 & +c_{16}x_3 & = 0 \\ S_3 : & c_{07}x_0 & +c_{14}x_1 & +c_{15}x_2 & +c_{08}x_3 & = 0 \\ T_1 : & & & & x_2 & = 0 \\ S_1 : & & & & & x_3 = 0 \end{cases}$$

admite somente a solução trivial  $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0, 0)$  e portanto seu determinante é não nulo, ou seja,

$$c_{13}c_{14} - c_{07}c_{09} \neq 0.$$

De maneira análoga, de  $T_1 \cap T_3 \cap S_2 \cap S_3 = \emptyset$ ,  $T_2 \cap T_3 \cap S_1 \cap S_3 = \emptyset$  e  $T_2 \cap T_3 \cap S_2 \cap S_3 = \emptyset$  obtemos:

$$c_{14}c_{16} - c_{08}c_{09} \neq 0,$$

$$c_{13}c_{15} - c_{07}c_{10} \neq 0,$$

$$c_{15}c_{16} - c_{08}c_{10} \neq 0.$$

Vamos agora mostrar como se calcula uma transformação projetiva tal que os coeficientes de  $X_1^2X_2$ ,  $X_1X_2^2$ ,  $X_0^2X_3$  e  $X_0X_3^2$  (que são não nulos) sejam todos iguais. Com isso obteremos uma nova normalização de  $F$  (fazendo desse coeficiente igual a 1) e poderemos escrever a equação da cúbica de forma ainda mais simples.

Essa transformação deverá ser diagonal em  $GL_4(k)$  para que os 4 planos  $T_1, T_2, S_1$  e  $S_2$  permaneçam invariantes. Seja então a transformação projetiva dada por

$$p := \begin{pmatrix} \lambda_0 & & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \lambda_2 & \\ & & & \lambda_3 \end{pmatrix} \text{ com } \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in k \setminus \{0\},$$

isto é,

$$p : X_i \mapsto \lambda_i X_i, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

Os novos coeficientes dos monômios  $X_1^2X_2$ ,  $X_1X_2^2$ ,  $X_0^2X_3$  e  $X_0X_3^2$  serão respectivamente  $c_{09}\lambda_1^2\lambda_2$ ,  $c_{10}\lambda_1\lambda_2^2$ ,  $c_{07}\lambda_0^2\lambda_3$  e  $c_{08}\lambda_0\lambda_3^2$ . Exigindo que sejam todos iguais a 1, obtemos um sistema de equações nas variáveis  $\lambda_0$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  cuja solução é fácil de calcular. Assim, obtemos uma transformação projetiva diagonal que permite-nos escrever a equação da superfície cúbica não singular como:

$$x_1x_2(c'_{13}x_0 + x_1 + x_2 + c'_{16}x_3) + x_0x_3(x_0 + c'_{14}x_1 + c'_{15}x_2 + x_3) = 0$$

para certos  $c'_{13}, c'_{14}, c'_{15}, c'_{16} \in k$ .

Resumimos toda a discussão acima na seguinte:

**Proposição 2.III.2:** Cada superfície cúbica lisa em  $\mathbb{P}^3$  é projetivamente equivalente a uma superfície dada por um polinômio na seguinte forma normal:

$$F(X_0, X_1, X_2, X_3) = X_1X_2(aX_0 + X_1 + X_2 + dX_3) + X_0X_3(X_0 + bX_1 + cX_2 + X_3),$$

onde  $a, b, c$  e  $d \in k$  são constantes. Além disso, valem as seguintes desigualdades:

$$\left\{ \begin{array}{l} ab - 1 \neq 0 \\ ac - 1 \neq 0 \\ bd - 1 \neq 0 \\ cd - 1 \neq 0 \end{array} \right.$$

■

**Observação:** Segue do que foi feito acima que o polinômio  $F$  que descreve uma superfície cúbica não singular pode ser dada por

$$F = UVW - \lambda RST,$$

onde  $U, V, W, R, S, T \in k[X_0, X_1, X_2, X_3] \setminus \{0\}$  são formas lineares não nulas e  $\lambda \in k \setminus \{0\}$  é uma constante não nula. Cada uma dessas representações referem-se a um dos pares triedais e as 6 formas lineares acima dão as equações dos 6 planos tritangentes que compõem o par triedal. Como existem exatamente 120 desses pares, também existem exatamente 120 maneiras diferentes de representar a equação da cúbica na forma acima. A constante  $\lambda$  expressa o fato que a superfície cúbica não é unicamente determinada pelo par dos triedros. Lamentavelmente, a normalização dos 4 planos  $T_1, T_2, S_1$  e  $S_2$  do modo como foi feito nesta seção vai contra o fato dos 6 planos terem que ser tratados “democraticamente como iguais”. Por causa disso, na forma normal o “número das arbitrariedades” é bem maior do que 120, e isto é uma grande desvantagem desta forma normal, pois torna-se muito difícil decidir quando duas cúbicas em forma normal são projetivamente equivalentes ou não.

# Capítulo 3

## As Matrizes de Interseção

### Seção 3.I: Número de Interseção, Divisores e Grupo de Picard

Depois de feita a tabela de interseção, queremos chegar na matriz de interseção das 27 retas. Cada pontinho da tabela será substituído pelo número 1, que representa o número de pontos de interseção entre duas retas distintas que se intersectam. Analogamente, cada espaço vazio da tabela, exceto na diagonal, será preenchido com o número 0 que significa o número de pontos de interseção entre duas retas distintas que não se intersectam. De fato, podemos definir:

**Definição:** Se  $A$  e  $B$  são duas curvas que se intersectam transversalmente, então o *número de interseção*, denotado por  $A \cdot B$ , é dado por:

$$A \cdot B := \#(A \cap B).$$

Mas o que fazer com a diagonal da tabela de Schläfli (no sentido de: Qual é o número de interseção de uma reta com ela mesma) ?

Vamos calcular o *número de auto-interseção*  $A \cdot A$ , onde  $A$  é uma reta contida numa superfície cúbica não singular  $C$ . Faremos um “cálculo intuitivo” e a seguir justificaremos rigorosamente cada passo formal.

Seja  $A$  uma reta sobre a superfície cúbica não singular  $C$ . Sejam  $A, B, L$  as três retas distintas num plano tritangente contendo  $A$  e sejam  $A', B', L$  as três retas distintas num outro plano tritangente contendo  $L$ .

Fazendo variar (em torno de  $L$ ) de um plano tritangente ao outro, podemos ver que o 1-ciclo  $A + B$  (que representa uma cônica) é (de algum modo) equivalente à  $A' + B'$  (que representa outra cônica). Essa equivalência é intuitivamente percebida pela família de cônicas na passagem de um plano tritangente ao outro (vide figura abaixo). Temos:

$$A + B \sim A' + B',$$

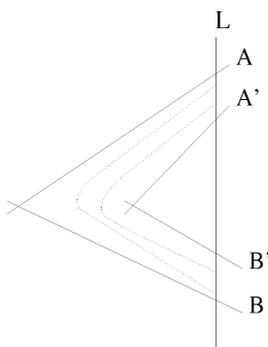
isto é,

$$A \sim A' + B' - B,$$

(onde essa decomposição da reta  $A$  no 1-ciclo em que aparece um sinal negativo é puramente formal, a princípio). Daí:

$$A \cdot A = A \cdot (A' + B' - B) = A \cdot A' + A \cdot B' - A \cdot B = 0 + 0 - 1 = -1.$$

E portanto, na diagonal da matriz de interseção das 27 retas devemos colocar o número  $-1$ .



Agora vamos tornar rigoroso o raciocínio heurístico acima. Seja  $X$  uma variedade projetiva não singular de dimensão  $m$ . Um *divisor* de  $X$  é uma soma formal de divisores primos onde um *divisor primo* é uma subvariedade (irreduzível) de codimensão 1. Quando  $X$  for uma superfície, os divisores primos serão curvas irreduzíveis sobre a mesma. Observe que um divisor é um  $(m - 1)$ -ciclo.

O conjunto de todos os divisores de  $X$  forma um grupo abeliano aditivo que é representado pela notação  $Div(X)$ .

**Afirmção 3.I.1:** ([sh], pág 153) Seja  $X$  uma superfície não singular. Cada função racional não nula  $f \in k(X) \setminus \{0\}$  define um divisor de  $X$  denotado por  $div(f)$ .

■

Intuitivamente, quando temos uma função racional não nula  $f$ , podemos representá-la como quociente de dois polinômios homogêneos de mesmo grau. A seguir, escrevemos  $f$  como produto de formas irreduzíveis e com multiplicidades positivas ou

negativas (conforme o fator esteja no numerador ou no denominador de  $f$ ). Cada uma destas formas é a equação de uma hipersuperfície no espaço projetivo que contém  $X$ . Esta hipersuperfície intersectada com  $X$  determina sobre a mesma uma subvariedade de codimensão 1. A soma formal de tais variedades (contadas com suas respectivas multiplicidades) dá o divisor  $div(f)$  sobre  $X$ .

Definimos o *grau de um divisor*  $D = \sum k_i C_i$  de  $X$  como  $deg D := \sum k_i deg H_i$ , onde  $H_i \in k[X]$  é a forma que define a subvariedade  $C_i$ .

Sejam  $D$  e  $E$  dois divisores de  $X$ . Dizemos que  $D$  é *linearmente equivalente* a  $E$ , e denotamos por  $D \sim E$ , quando e somente quando existir uma função racional  $f \in k(X) \setminus \{0\}$  tal que  $E = D + div(f)$ . Se escrevermos  $D_{(a:b)} := D + div(af + b)$  com  $(a : b)$  variando em  $\mathbb{P}^1$ , temos:  $D_{(0:1)} = D + div(1) = D$  e  $D_{(1:0)} = D + div(f) = E$ . Portanto, o divisor  $D$  é deformado em  $E$  com parâmetro sobre a *linha*  $\mathbb{P}^1$  (e daí o porquê dizermos linearmente equivalentes).

Um divisor  $div(f)$  que provém de função racional não nula é chamado de *divisor principal* de  $X$ . Claramente temos que o conjunto dos divisores principais é um subgrupo de  $Div(X)$ . Esse subgrupo induz a definição do *Grupo das Classes de Divisores de  $X$* , definido como o espaço quociente de  $Div(X)$  pela relação de equivalência  $\sim$  e com a operação de soma induzida por  $Div(X)$ . Quando  $X$  é uma variedade não singular (que é o nosso caso), esse grupo também é chamado de *Grupo de Picard de  $X$*  e denotado por  $Pic(X)$ , isto é:

$$Pic(X) = \frac{\text{Grupo dos divisores de } X}{\text{Grupo dos divisores principais de } X}$$

**Observação:** No caso de uma superfície qualquer  $X$  (não necessariamente uma superfície não singular), as noções de Grupo de Picard  $Pic(X)$  e de Grupo de Classes de Divisores são distintas. Essa diferença entre os dois grupos no caso geral e a nova definição de cada um deles não nos vem ao caso aqui. O leitor interessado pode consultar [sh], págs 151-158.

Sejam  $H, H' \in k[X_0, X_1, X_2, X_3]$  as formas de grau 1 que dão os planos tritangentes contendo  $A, B$  e  $L$  e  $A', B'$  e  $L$  respectivamente.  $f := \frac{H'}{H}$  define uma função racional sobre a superfície cúbica  $C$  e  $div(f) = (A + B + L) - (A' + B' + L)$ . É exatamente tal  $div(f)$  que estabelece a equivalência  $A + B \sim A' + B'$ . Segue imediatamente das propriedades de grupo (do grupo  $Pic(C)$ ) a validade da decomposição  $A \sim A' + B' - B$ . Quanto ao passo  $A \cdot A = A \cdot (A' + B' - B)$ , o mesmo está suportado no seguinte:

**Teorema 3.I.2:** ([ht], pág 357): Seja  $X$  uma superfície projetiva não singular e  $Div(X)$  o grupo dos divisores de  $X$ . Existe uma única aplicação  $Div(X) \times Div(X) \rightarrow \mathbb{Z}$  que para cada par de divisores  $D$  e  $E$  associa o número  $D \cdot E$  tal que:

- i) Se  $D$  e  $E$  são curvas não singulares que se intersectam transversalmente, então  $D \cdot E = \#(D \cap E)$
- ii) A aplicação é simétrica, isto é,  $D \cdot E = E \cdot D$
- iii) A aplicação é aditiva, isto é,  $(D_1 + D_2) \cdot E = D_1 \cdot E + D_2 \cdot E$
- iv) A imagem pela aplicação depende somente da classe de equivalência linear, isto é, se  $D_1 \sim D_2$  então  $D_1 \cdot E = D_2 \cdot E$ . ■

Com isso, damos por encerrado e rigorosamente justificado o fato do número de auto-interseção de uma reta sobre uma superfície cúbica não singular ser  $-1$ .

Por fim, observamos que o cálculo do número de auto-interseção para uma superfície não singular de grau  $m$  qualquer generaliza-se na seguinte:

**Proposição 3.I.3:** Se  $X$  for uma superfície não singular em  $\mathbb{P}^3$  de grau  $m$ , então para cada reta  $L$  sobre  $X$  o número de auto-interseção  $L \cdot L$  é igual a  $2 - m$ .

**Demonstração:** Sejam  $H_i$  ( $i = 1, 2$ ) dois planos (diferentes entre si) em  $\mathbb{P}^3$  contendo a reta  $L$ . Então  $X \cap H_i = L + C_i$  onde  $C_i$  é uma curva de grau  $m - 1$  em  $H_i$  e onde interpretamos “ $\cap$ ” como divisor de interseção. Observe que  $C_1$  e  $C_2$  não tem pontos de interseção, pois  $H_i$  é o plano tangente à  $X$  em cada ponto de  $L \cap C_i$ .

$$(X \cap H_1) \cdot (X \cap H_2) = L \cdot L + L \cdot C_1 + L \cdot C_2 + C_1 \cdot C_2 = \\ = L \cdot L + (m - 1) + (m - 1) + 0 = L \cdot L + 2m - 2.$$

Sejam  $H'_i$  ( $i = 1, 2$ ) outros dois planos em  $\mathbb{P}^3$  cuja interseção é uma reta que intersecta  $X$  transversalmente. Como o divisor  $X \cap H_i$  é linearmente equivalente à  $X \cap H'_i$  concluímos que

$$(X \cap H_1) \cdot (X \cap H_2) = (X \cap H'_1) \cdot (X \cap H'_2) = \\ = \#(X \cap H'_1 \cap H'_2) = \text{grau de } X = m.$$

Portanto  $L \cdot L = 2 - m$ . ■

Antes de encerrarmos esta seção, vamos calcular o grupo de Picard de algumas superfícies conhecidas.

**Exemplo 1:**  $X = \mathbb{A}^2$  (plano afim): Um divisor  $D$  no plano afim  $\mathbb{A}^2$  é uma curva algébrica plana não singular, e portanto definida por um algum polinômio

$f \in k[X_1, X_2] \setminus \{0\}$ , isto é, todo divisor  $D$  é principal. Portanto

$$Pic(\mathbb{A}^2) = \frac{Div(\mathbb{A}^2)}{\text{Divisores principais de } \mathbb{A}^2} = \{\text{id}\}.$$

■

**Exemplo 2:**  $X = \mathbb{P}^2$  (plano projetivo): Qualquer subvariedade (irredutível) de codimensão 1 em  $\mathbb{P}^2$  é definida por uma forma irredutível não nula em  $k[X_0, X_1, X_2]$  e vice-versa. Seja  $f \in k(\mathbb{P}^2) \setminus \{0\}$  uma função racional não nula sobre  $\mathbb{P}^2$ . Podemos escrever  $f$  como quociente de duas formas  $F, G \in k[X_0, X_1, X_2]$  de mesmo grau. Fatorando  $f$  temos:

$$f = H_1^{k_1} \dots H_r^{k_r} L_1^{-m_1} \dots L_s^{-m_s}$$

onde os  $H_i$  são os fatores irredutíveis de  $F$  e os  $L_j$  são os fatores irredutíveis de  $G$ . Sejam  $C_i$  e  $D_j$  as subvariedades de codimensão 1 em  $\mathbb{P}^2$  definidas por  $H_i = 0$  e  $L_j = 0$  respectivamente. Então:

$$div(f) = \sum_{i=1}^r k_i C_i - \sum_{j=1}^s m_j D_j.$$

Sendo  $deg F = deg G$ , temos imediatamente que  $\sum k_i deg H_i = \sum m_j deg L_j$ , isto é,  $deg div(f) = 0$ . Reciprocamente, se  $\sum_{i=1}^r k_i deg H_i = 0$  e  $C_i : H_i = 0$ , então  $f := H_1^{k_1} \dots H_r^{k_r}$  é uma forma homogênea de grau zero e  $div(f) = \sum_{i=1}^r k_i C_i$ . Assim sendo,  $D \sim C$  em  $\mathbb{P}^2$  se e somente se  $D = C + div(f)$  para algum  $f \in k(\mathbb{P}^2) \setminus \{0\}$  se e somente se  $deg D = deg C$ . Então cada inteiro define uma classe de divisores sobre  $\mathbb{P}^2$ , isto é,

$$Pic(\mathbb{P}^2) \cong \mathbb{Z}.$$

Informamos que  $Pic(\mathbb{P}^2)$  é o grupo abeliano livre gerado por uma qualquer das retas de  $\mathbb{P}^2$ . ■

**Exemplo 3:**  $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  (superfície quádrlica não singular): Aqui, cada subvariedade de codimensão 1 é dada por um polinômio bi-homogêneo em  $k[X_1, X_2, Y_1, Y_2]$  (isto é, separadamente homogêneo em cada par de variáveis  $(X_1, X_2)$  e  $(Y_1, Y_2)$ ) e reciprocamente. Com raciocínio análogo ao do caso anterior, um divisor em  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  será principal se e somente se tiver bigrau  $(0, 0)$ . Assim,  $D \sim C$  em  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  se e somente se  $bideg D = bideg C$ , isto é, cada par de inteiros define uma classe de divisores sobre  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ . Portanto

$$Pic(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Os geradores do grupo  $Pic(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$  são uma curva de bigrau  $(1, 0)$  e uma outra curva de bigrau  $(0, 1)$  chamadas respectivamente de  $A$ -reta e de  $B$ -reta. ■

**Observação:** Calcularemos no próximo capítulo o grupo de Picard de uma superfície cúbica lisa  $C$  qualquer. Lá veremos que tal grupo é

$$\text{Pic}(C) \cong \mathbb{Z}^7.$$

**Observação:** Um exemplo da força da afirmação  $\text{Pic}(\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z}$  é a obtenção de uma prova quase imediata do *Teorema de Bezout*: Sejam  $D$  e  $D'$  curvas algébricas planas quaisquer de graus  $m$  e  $m'$  respectivamente e sejam  $L$  e  $L'$  duas retas quaisquer em  $\mathbb{P}^2$ . Sendo  $\mathbb{Z}$  o grupo de Picard de  $\mathbb{P}^2$ , vale que  $D \sim mL$  e  $D' \sim m'L'$ . Portanto

$$D \cdot D' = (mL) \cdot (m'L') = mm' L \cdot L' = mm'.$$

■

### Seção 3.II: Subgrupo de Picard Gerado pelas 27 Retas

Seja  $\text{Pic}(C)$  o grupo de Picard da superfície cúbica não singular  $C$  e vamos considerar o subgrupo gerado pelas classes das 27 retas. Denotemos esse subgrupo por

$$\text{Pic}'(C).$$

Seja  $E$  o divisor dado pela interseção de um plano qualquer com a superfície cúbica não singular  $C$  e seja  $F$  a cônica que obtemos ao intersectar a superfície cúbica não singular  $C$  com um plano qualquer contendo a reta  $B_1$ , isto é,  $F \sim E - B_1$ . De cada um dos 45 planos tritangentes podemos obter relações envolvendo  $E$  em termos das classes das 27 retas sobre  $C$ . Trabalhando somente com essas relações será possível provar a seguinte:

**Proposição 3.II.1:** Cada uma das classes das 27 retas pode ser escrita como  $\mathbb{Z}$ -combinação linear das classes dos divisores  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$  e  $F$ .

**Observação:** Em outras palavras, o que a proposição acima nos diz é que o (sub)grupo  $\text{Pic}'(C)$  é gerado pelas classes dos divisores  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$  e  $F$ . Pode parecer estranho e pouco natural colocarmos a classe de  $F$  entre os geradores de  $\text{Pic}'(C)$ . Sendo  $F \sim A_2 + C_{12}$  (por exemplo), soaria-nos menos estranho substituir  $F$  por  $C_{12}$  no conjunto dos geradores. No entanto, uma das razões mais imediatas pela escolha de  $F$  é a simplicidade da “tabuada” abaixo:

$$\begin{aligned} A_i \cdot A_j &= \begin{cases} 0 & \text{quando } i \neq j \\ -1 & \text{quando } i = j \end{cases} \\ F \cdot A_1 &= (A_2 + C_{12}) \cdot A_1 = 0 + 1 = 1 \\ F \cdot A_2 &= (A_2 + C_{12}) \cdot A_2 = -1 + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$F \cdot A_j = (A_2 + C_{12}) \cdot A_j = 0, \quad j = 3, 4, 5, 6$$

$$F \cdot F = (A_2 + C_{12}) \cdot (A_2 + C_{12}) = A_2 \cdot A_2 + 2A_2 \cdot C_{12} + C_{12} \cdot C_{12} = -1 + 2 - 1 = 0.$$

Esta simplicidade fica mais evidente quando escrevemos a matriz  $7 \times 7$  de interseção entre  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$  e  $F$ :

$$\begin{pmatrix} -1 & & & & & & 1 \\ & -1 & & & & & \\ & & -1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & -1 & & \\ & & & & & -1 & \\ 1 & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

**Demonstração da Proposição 3.II.1:** De fato, temos:  $E \sim A_i + B_j + C_{ij}$ ,  $E \sim A_j + B_i + C_{ij}$  e  $E \sim B_1 + F$ . Comparando  $E - C_{ij}$  nas duas primeiras relações obtemos  $A_i + B_j \sim A_j + B_i$ , e portanto

$$(*) B_j \sim A_j + B_1 - A_1 \quad \text{para } j = 2, \dots, 6.$$

Da primeira relação (envolvendo  $C_{ij}$  e  $E$ ), da fórmula (\*) (descrevendo  $B_j$ ) e do fato que  $E \sim B_1 + F$  obtemos imediatamente uma expressão para  $C_{ij}$  em termos das classes de  $A_1, A_i, A_j$  e  $F$ , a saber,

$$(**) C_{ij} \sim A_1 - A_i - A_j + F, \quad i \neq j \text{ em } \{2, \dots, 6\}.$$

Quanto a escrevermos  $B_j$  como  $\mathbb{Z}$ -combinação linear das classes de  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$  e  $F$ , observamos que basta fazer isso para  $B_1$ , já que para  $j = 2, \dots, 6$  vale a fórmula (\*) acima.

Temos ainda a seguinte relação para:  $E \sim C_{12} + C_{34} + C_{56}$ . Substituindo cada  $C_{ij}$  pela fórmula (\*\*) correspondente, eliminando os  $B_j$  que aparecem via a fórmula (\*) e reduzindo os termos semelhantes, obtemos  $E \sim 3E - A_1 - A_2 - A_3 - A_4 - A_5 - A_6 - 3B_1 + 3A_1$ . Sendo  $E \sim B_1 + F$ , podemos isolar  $B_1$  e obter

$$(***) B_1 \sim 2A_1 - A_2 - A_3 - A_4 - A_5 - A_6 + 2F.$$

Consequentemente, para  $j = 2, \dots, 6$ , temos:  $B_j \sim -A_1 + A_j + 2A_1 - \sum_{i=2}^6 A_i + 2F$ , isto é,

$$(*') B_j \sim A_1 - \sum_{i=2, i \neq j}^6 A_i + 2F, \quad j = 2, \dots, 6.$$

E com isso concluímos a demonstração. ■

**Observação:** Na Seção 4.II do próximo capítulo veremos que  $Pic(C) = Pic'(C)$ , em outras palavras, veremos que o grupo  $Pic(C)$  das classes de equivalência linear dos divisores de  $C$  é um grupo abeliano (livre) gerado pelas classes dos divisores  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$  e  $F$ .

### Seção 3.III: Redução da Ordem da Matriz de Interseção

Nesta seção vamos aceitar desde agora que  $Pic(C) = Pic'(C)$  conforme dito na observação anterior.

Para cada divisor  $D$  na superfície cúbica não singular  $C$ , considere o vetor

$$[D] := (D \cdot A_1, D \cdot A_2, \dots, D \cdot C_{56}) \in \mathbb{Z}^{27}.$$

Com essa notação, temos que as 27 linhas da matriz de interseção das 27 retas são dadas por  $[A_1], [A_2], \dots, [C_{56}]$ . Obtemos então um homomorfismo de grupos  $h_{27} : D \in Div(C) \mapsto [D] \in \mathbb{Z}^{27}$ , que induz um homomorfismo  $h_{27} : Pic(C) \rightarrow \mathbb{Z}^{27}$ .

**Afirmção 3.III.1:** Os vetores  $[A_1], [A_2], [A_3], [A_4], [A_5], [A_6]$  e  $[F] := [A_2] + [C_{12}] \in \mathbb{Z}^{27}$  são  $\mathbb{Z}$ -linearmente independentes.

De fato, se escrevermos  $\alpha_1[A_1] + \alpha_2[A_2] + \dots + \alpha_6[A_6] + \alpha_7[F] = 0$ , vamos recair num sistema homogêneo de 27 equações lineares nas incógnitas  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7)$ . É imediato ver (via a “tabuada” apresentada na observação logo a seguir à Proposição 3.II.1) que tal sistema admite somente a solução trivial, isto é,  $\alpha_1 = \dots = \alpha_7 = 0$ . ■

Como consequência da afirmação acima temos que as classes dos divisores  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$  e  $F$  sobre  $C$  são  $\mathbb{Z}$ -linearmente independentes em  $Pic(C)$ .

Finalmente, é imediato observar que o homomorfismo  $h_{27} : Pic(C) \rightarrow \mathbb{Z}^{27}$  é injetivo, e portanto, o grupo  $Pic(C)$  é isomorfo ao subgrupo aditivo gerado pelas linhas da matriz de interseção das 27 retas. Observamos ainda que o posto e o determinante da matriz de interseção das 27 retas são respectivamente 7 e zero.

Semelhantemente, para cada divisor  $D$  na superfície cúbica lisa  $C$ , podemos considerar o vetor

$$[[D]] := (D \cdot A_1, \dots, D \cdot A_6, D \cdot F) \in \mathbb{Z}^7.$$

Aqui, os sete vetores  $[[A_1]], \dots, [[A_6]]$  e  $[[F]]$  são as linhas da matriz de interseção entre  $A_1, \dots, A_6$  e  $F$  que já foi apresentada na observação logo a seguir à proposição 3.II.1.

Analogamente à afirmação feita acima, temos que os vetores  $[[A_1]], \dots, [[A_6]]$  e

$[[F]]$  são  $\mathbb{Z}$ -linearmente independentes em  $\mathbb{Z}^7$ .

Ainda de maneira análoga podemos definir o homomorfismo de grupos  $h_7 : D \in \text{Pic}(C) \mapsto [[D]] \in \mathbb{Z}^7$  e verificar imediatamente que esse homomorfismo é injetivo. A injetividade desse homomorfismo garante que o grupo de Picard  $\text{Pic}(C)$  é isomorfo ao subgrupo aditivo de  $\mathbb{Z}^7$  gerado pelas 7 linhas da matriz de interseção entre  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$  e  $F$ .

Essa redução de ordem é também uma redução significativa no estudo das matrizes de interseção. De fato, se quisermos inferir propriedades do grupo de Picard  $\text{Pic}(C)$  via sua relação com as matrizes de interseção, estudamos então a matriz  $7 \times 7$  (matriz de interseção entre  $A_1, \dots, A_6$  e  $F$ ) ao invés de estudarmos a matriz original  $27 \times 27$  (matriz de interseção das 27 retas).

Observamos finalmente que a matriz reduzida  $7 \times 7$  é invertível, já que seu posto e seu determinante são respectivamente 7 e 1.

### Seção 3.IV: Outras Considerações Sobre o Teorema de Cayley e Salmon

Nesta seção, vamos nos aproveitar da linguagem dos divisores para apresentar novas considerações sobre a prova do Teorema de Cayley e Salmon. Usaremos como pré-requisito o teorema 3.I.2 já anteriormente utilizado.

Nesse contexto, suponha que já conheçamos as retas  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$  e  $B_1$ , além de sabermos da existência das 10 retas que intersectam  $B_1$ . Seja  $F$  a cônica que obtemos ao intersectar a superfície cúbica não singular  $C$  com um plano qualquer contendo a reta  $B_1$ .

O que pretendemos fazer é contar a quantidade de retas distintas sobre a superfície cúbica não singular  $C$ . Seguiremos o seguinte roteiro: Já temos a reta  $B_1$  e 10 outra retas intersectando-a, totalizando 11 retas. Primeiramente contaremos quantas classes de divisores sobre  $C$  são tais que não intersectem  $B_1$  e possam ser retas (veremos que são 16). A seguir, provaremos que de fato tais classes provém de retas. Por fim, observaremos que a reta contida em cada classe é única.

**Teorema 3.IV.1:** Uma superfície cúbica não singular em  $\mathbb{P}^3$  contém exatamente 27 retas.

**Demonstração:** Seja  $A$  uma reta qualquer sobre a superfície cúbica não singular  $C$  que não intersecte  $B_1$ . Vale para  $A$  as três condições a seguir:  $A \cdot B_1 = 0$  (pois  $A \cap B_1 = \emptyset$ ),  $A \cdot A = -1$  (pois  $A \subseteq C$ ) e  $A \cdot F = 1$  (pois  $A$  tem que intersectar o

plano contendo  $B_1 + F$  exatamente uma vez). Escrevendo  $A$  como uma  $\mathbb{Z}$ -combinação linear dos geradores,  $A \sim x_1 A_1 + \sum_{i=2}^6 x_i A_i + yF$ , as três condições geométricas acima traduzem-se num sistema de equações nas variáveis  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$  e  $y$ .

$$\begin{aligned} A \cdot F &= (x_1 A_1 + \sum x_i A_i + yF) \cdot F = x_1 \\ \therefore A \cdot F = 1 &\Leftrightarrow x_1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cdot A &= (A_1 + \sum x_i A_i + yF) \cdot (A_1 + \sum x_i A_i + yF) = \\ &= -1 + y - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 - x_6^2 + y \\ \therefore A \cdot A = -1 &\Leftrightarrow -2y + \sum x_i^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cdot B_1 &= (A_1 + \sum x_i A_i + yF) \cdot B_1 = \\ &= x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + 2y \\ \therefore A \cdot B_1 = 0 &\Leftrightarrow 2y + \sum x_i = 0 \end{aligned}$$

E portanto

$$A \sim A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 + x_4 A_4 + x_5 A_5 + x_6 A_6 + yF$$

onde

$$\begin{cases} -2y + \sum_2^6 x_i^2 = 0 \\ 2y + \sum_2^6 x_i = 0 \end{cases}$$

Substituindo-se a primeira equação pela soma das duas equações, obtemos um sistema equivalente

$$\begin{cases} \sum_2^6 (x_i^2 + x_i) = 0 \\ 2y + \sum_2^6 x_i = 0 \end{cases}$$

A primeira equação é equivalente a dizer que  $x_i^2 + x_i = 0$  para cada  $i = 2, \dots, 6$ , isto é, para cada  $i \in \{2, \dots, 6\}$  vale  $x_i = -1$  ou  $x_i = 0$ . O coeficiente 2 na variável  $y$  na segunda equação indica que a quantidade de índices  $i \in \{2, \dots, 6\}$  tais que  $x_i = -1$  é par. Temos então os três casos abaixo à tratar, referentes à quantidade de índices  $i \in \{2, \dots, 6\}$  tais que  $x_i = -1$  ser zero, dois ou quatro.

**[Caso Zero]:** Neste caso,  $x_i = 0$  para todo  $i = 2, \dots, 6$  e, conseqüentemente,  $y = 0$ . Obtemos então uma única solução:

$$A \sim A_1.$$

**[Caso Quatro]:** Neste caso, apenas um único  $x_j = 0$  e os demais  $x_i = -1$ .

Consequentemente  $y = 2$ . Obtemos então cinco soluções da forma:

$$A \sim A_1 - \sum_{i=2, i \neq j}^6 A_i + 2F, \quad j = 2, \dots, 6$$

[**Caso Dois**]: Existem  $x_i = x_j = -1$  e os demais  $x_k = 0$ . Temos  $y = 1$  e obtemos  $\frac{5!}{2!3!} = 10$  soluções da forma:

$$A \sim A_1 - A_i - A_j + F, \quad i \neq j \text{ em } \{2, \dots, 6\}.$$

Temos obtido até agora 16 classes de divisores tais que não intersectem  $B_1$  e que possam ser retas.

No [**Caso Zero**], temos imediatamente que a solução encontrada é uma reta, a reta  $A_1$ .

No [**Caso Quatro**], comparando o divisor obtido com a expressão (\*'), concluímos que de fato o divisor obtido é uma reta, à saber, a reta  $B_j$ .

Finalmente no [**Caso Dois**], ao compararmos o divisor obtido com a expressão (\*\*), verificamos que este divisor obtido é a reta  $C_{ij}$ .

E com isso nós praticamente fechamos a demonstração, exceto por uma última observação: se existirem duas retas distintas  $A \sim A'$  numa mesma classe, então  $A \cdot A = A \cdot A' \geq 0$  (o que seria uma contradição). Com isso, garantimos a unicidade de reta cuja classe é uma das 16 soluções obtidas. Assim sendo, o número exato de retas sobre a superfície cúbica não singular é dado por:

$$1 + 10 + 16 = 27$$

■

Observamos que como uma “segunda prova” do teorema, esse argumento não apresenta vantagem nenhuma sobre a demonstração original de Cayley e Salmon, já que conceitualmente nos utilizamos de todos os ingredientes da prova original (principalmente o teorema 2.I.4 e a tabela de Schläfli) além de pré-requisitos “pesados” (como por exemplo, grupo de Picard, divisores, número de interseção, etc). No entanto, a apresentação desse raciocínio leva-nos a concluir, no mínimo, que às vezes a modernidade exagerada pode ofuscar a beleza e a simplicidade das grandes idéias matemáticas.

# Capítulo 4

## Implodindo Retas da Superfície Cúbica Não Singular

### Seção 4.I: Blow Up e Blown Down: Definições e Resultados

Seja  $Y$  uma superfície não singular e  $P$  um ponto de  $Y$ . Seja  $X$  uma variedade projetiva e considere um morfismo (isto é, uma aplicação dada localmente por polinômios)  $\varphi : X \rightarrow Y$  com as seguintes propriedades:

- a) A restrição de  $\varphi$  à  $\varphi^{-1}(Y \setminus P)$  é um isomorfismo sobre  $Y \setminus P$
- b)  $E := \varphi^{-1}(P) \subseteq X$  é isomorfo a  $\mathbb{P}^1$ .

Neste caso, dizemos que  $\varphi$  é um *blow up* (ou uma *explosão*) de  $Y$  centrada em  $P$  e que a curva  $E \subseteq X$  é a *curva excepcional do blow up*. Na verdade, pode-se substituir o artigo indefinido “um” pelo “o”, pois o blow up de uma superfície qualquer é o morfismo birracional unicamente determinado (à menos de isomorfismo) por suas propriedades descritas acima. ([bv], pág 11).

Equivalentemente, podemos dizer que a aplicação  $\varphi^{-1}$  é o *blow down* (ou *implosão*) da curva  $E \subseteq X$  no ponto  $P \in Y$ .

**Afirmção 4.I.1:** Valem os seguintes fatos acerca de um blow up:

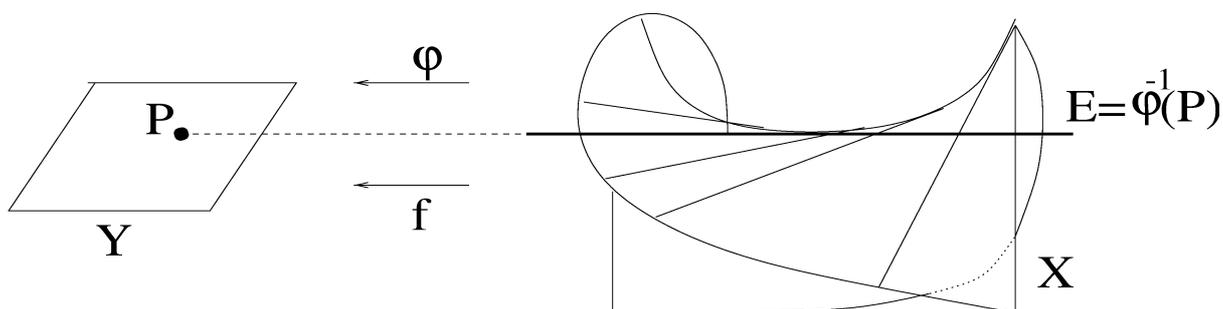
- 1) A nova variedade projetiva “explodida”  $X$  também é uma superfície não singular.
- 2) O número de auto-interseção da curva  $E$  sobre a superfície  $X$  é  $E \cdot E = -1$ .

Reciprocamente, vale o seguinte resultado:

**Teorema 4.I.2: Teorema da Contração de Castelnuovo:** ([sh], pág 258):  
Seja  $X$  uma superfície não singular contendo uma curva  $E$  tal que  $E \simeq \mathbb{P}^1$  e  $E \cdot E = -1$ . Então existe um morfismo birracional  $f : X \rightarrow Y$  tal que  $Y$  é uma superfície

não singular,  $f(E) =: P$  é um ponto de  $Y$  e  $f$  coincide com o blow up de  $Y$  centrado em  $P$ . ■

Ressaltamos outra vez que a aplicação  $\varphi : X \rightarrow Y$  é um morfismo birracional, isto é, além de ser dada localmente por polinômios, o corpo das funções racionais  $k(X)$  é isomorfo ao corpo das funções racional  $k(Y)$ .



Agora queremos estudar o efeito do blow up em divisores e curvas das superfícies não singulares. Em particular, queremos saber qual é a relação entre o grupo de Picard de uma superfície e o grupo de Picard da superfície explodida.

Como  $Y$  é superfície não singular, cada divisor primo  $C$  de  $Y$  é um divisor localmente principal, isto é, para cada divisor primo  $C$  de  $Y$  e qualquer que seja  $y \in Y$ , existe um aberto  $U \ni y$  tal que em  $U$  vale  $C = \text{div}(f)$  para certa função racional não nula  $f \in k(Y) \setminus \{0\}$ .

Para descrever globalmente o divisor  $C$  em  $Y$ , podemos cobrir a superfície com uma quantidade finita de abertos,  $Y = \bigcup U_i$  e em cada um desses abertos teremos  $C = \text{div}(f_i)$  para certos  $f_1, f_2, \dots \in k(Y) \setminus \{0\}$ . Claramente essas funções  $f_i$  não são arbitrárias, pois em  $U_i \cap U_j$  os divisores  $\text{div}(f_i)$  e  $\text{div}(f_j)$  coincidem. Reciprocamente, um sistema de vizinhanças e funções racionais não nulas  $(U_1, U_2, \dots; f_1, f_2, \dots)$  tal como descrito acima define um divisor em  $Y$ . Portanto, podemos raciocinar agora somente em termos dos divisores principais de  $Y$ .

Como  $\varphi$  é birracional, temos imediatamente o isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} k(Y) & \xrightarrow{\cong} & k(X), \\ f & \mapsto & f^* \end{array}$$

e isso induz de maneira bem natural um homomorfismo:

$$\varphi^* : \text{Div}(Y) \rightarrow \text{Div}(X)$$

Podemos pensar, melhor ainda, numa aplicação  $Pic(Y) \rightarrow Pic(X)$  onde a classe de um divisor  $C$  em  $Pic(Y)$  seja levado na classe do divisor  $\varphi^*(C)$  em  $Pic(X)$ . Podemos denotar essa última aplicação também por  $\varphi^*$  sem prejuízo de entendimento. Então temos:

$$\varphi^*([C]) = [\varphi^*(C)].$$

A aplicação  $\varphi^* : Div(Y) \rightarrow Div(X)$  é chamada de *pull back* do blow down  $\varphi : X \rightarrow Y$  e é um pouco menos inocente do que simplesmente tomar a imagem inversa por  $\varphi$  dos divisores  $C$  de  $Y$ . De fato, quando a curva  $C \subseteq Y$  não passa pelo ponto  $P$  (centro do blow down), então  $\varphi^*(C) = \varphi^{-1}(C)$ . Mas quando a curva  $C$  passa por  $P \in Y$ , então pode-se provar que ([sh], pág 252):

$$\varphi^*(C) = \overline{\varphi^{-1}(C \setminus P)} + mult_{C,P} E,$$

onde  $\overline{\varphi^{-1}(C \setminus P)}$  é a chamada *curva transformada birracional* e  $mult_{C,P} \in \mathbb{Z}$  é a multiplicidade da curva  $C$  no ponto  $P$ .

Encerramos esta seção com o seguinte enunciado referente aos objetos acima apresentados:

**Proposição 4.I.3:** ([ht], pág 386): A aplicação

$$\begin{array}{ccc} Pic(Y) \times \mathbb{Z} & \longrightarrow & Pic(X) \\ (C, n) & \mapsto & \varphi^*(C) + n \cdot E \end{array}$$

define um isomorfismo de grupos

$$Pic(X) \cong Pic(Y) \oplus \mathbb{Z}.$$

Além disso, a teoria de interseção em  $X$  é determinada pelas seguintes regras:

- a) Se  $C, D \in Pic(Y)$ , então  $(\varphi^*C) \cdot (\varphi^*D) = C \cdot D$ ,
- b) Se  $C \in Pic(Y)$ , então  $(\varphi^*C) \cdot E = 0$
- c)  $E \cdot E = -1$ . ■

**Corolário 4.I.4:** Se as classes de  $C_1, \dots, C_m$  geram (livremente ou não) o grupo  $Pic(Y)$ , então as classes de  $\overline{\varphi^{-1}(C_1 \setminus P)}, \dots, \overline{\varphi^{-1}(C_m \setminus P)}$  e  $E$  geram (respectivamente, livremente ou não) o grupo  $Pic(X)$ . ■

Nas próximas duas seções pretendemos provar e/ou comentar alguns teoremas que tratam de blow ups sobre uma superfície cúbica não singular. Conforme vimos, pelo Teorema da Contração de Castelnuovo podemos implodir retas de uma superfície cúbica e obter outras superfícies não singulares. Porém não podemos pensar em

implodir qualquer conjunto de retas. A primeira condição que se impõe é que sejam retas disjuntas. Nesta direção, pretendemos implodir retas que formem um *conjunto maximal*, isto é, um conjunto de retas disjuntas tal que não exista uma outra reta simultaneamente disjunta das primeiras. Segundo o livro do Henderson só existem conjuntos maximais de cinco retas e de seis retas e o número de tais conjuntos é, respectivamente, 216 e 72 ([he], págs 24-25). Ao implodirmos retas de um conjunto maximal, estamos fazendo a melhor transformação birracional possível, no seguinte sentido: as novas superfícies não singulares obtidas são *minimais*, isto é são superfícies que não contém nenhuma curva que satisfaça as hipóteses do Teorema da Contração de Castelnuovo. Veremos que valem recíprocas, isto é, tomaremos tais superfícies, explodiremos certos pontos e obteremos uma cúbica não singular de volta.

## Seção 4.II: Blowing Up de Cinco Pontos

Sejam  $A_1$  e  $B_1$  duas retas em  $\mathbb{P}^3$  que não se intersectam. Podemos escolher as coordenadas projetivas de modo que:

$$A_1 = \{(x_0 : x_1 : 0 : 0) \mid (x_0 : x_1) \in \mathbb{P}^1\} \text{ e}$$

$$B_1 = \{(0 : 0 : y_0 : y_1) \mid (y_0 : y_1) \in \mathbb{P}^1\}.$$

Para cada ponto  $P = (z_0 : z_1 : z_2 : z_3) \in \mathbb{P}^3 \setminus (A_1 \cup B_1)$ , existe uma única reta por meio de  $P$  e intersectando simultaneamente  $A_1$  e  $B_1$ . Isso induz a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{P}^3 \setminus (A_1 \cup B_1) &\rightarrow A_1 \times B_1, \\ P &\mapsto (Q, R) \end{aligned}$$

onde  $Q$  e  $R$  são os pontos de interseção da referida reta com  $A_1$  e com  $B_1$  respectivamente.

Observamos que  $Q$  é o ponto de interseção da reta  $A_1$  com o plano determinado por  $P$  e a reta  $B_1$ . Vemos imediatamente que tal ponto tem coordenadas  $(z_0 : z_1 : 0 : 0)$ . Analogamente, a interseção da reta  $B_1$  com o plano dado por  $P$  e  $A_1$  é o ponto  $R = (0 : 0 : z_2 : z_3)$ . Como  $A_1 \times B_1 \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ , então está bem definida a aplicação:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{P}^3 \setminus (A_1 \cup B_1) &\rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1. \\ (z_0 : z_1 : z_2 : z_3) &\mapsto ((z_0 : z_1), (z_2 : z_3)) \end{aligned}$$

Vamos agora descrever e interpretar geometricamente a imagem das retas de  $\mathbb{P}^3$  por esta aplicação. Neste contexto, podemos dividir nossa análise em três partes: **a)** retas que não intersectam  $A_1$  e nem  $B_1$ ; **b)** retas que intersectam uma das duas retas  $A_1$  ou  $B_1$  e **c)** retas que intersectam simultaneamente ambas as retas.

a) Considere a reta  $L$  contida em  $\mathbb{P}^3$  e dada pelas coordenadas de Plücker  $p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{12}, p_{13}, p_{23}$ . Suponha que  $L$  não intersecte a reta  $A_1$  (dada pelas coordenadas de Plücker  $p_{A,01} = 1$  e zero todos os demais) e nem a reta  $B_1$  (dada por  $p_{B,23} = 1$  e zero todos os demais). Pela proposição 1.II.2, o fato de  $L$  não intersectar  $A_1$  e nem  $B_1$  traduz-se em  $p_{01} \neq 0$  e  $p_{23} \neq 0$ . Podemos supor sem perda que  $p_{01} = 1$ . Lembrando das considerações feitas no capítulo 1, podemos dizer que  $L$  é dada pelos pontos  $(1 : 0 : -p_{12} : -p_{13})$  e  $(0 : 1 : p_{02} : p_{03})$ , isto é,

$$L = \{(x_0 : x_1 : -p_{12}x_0 + p_{02}x_1 : -p_{13}x_0 + p_{03}x_1) \mid (x_0 : x_1) \in \mathbb{P}^1\}.$$

E portanto a imagem de  $L$  pela aplicação  $\varphi$  é dada por

$$\varphi(L) = \{((x_0 : x_1), (-p_{12}x_0 + p_{02}x_1 : -p_{13}x_0 + p_{03}x_1)) \mid (x_0 : x_1) \in \mathbb{P}^1\} \subseteq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1,$$

isto é, essa imagem é dada pelos pares  $((x_0 : x_1), (y_0 : y_1))$  tais que  $(y_0 : y_1) = (-p_{12}x_0 + p_{02}x_1 : -p_{13}x_0 + p_{03}x_1)$ . Concluimos que o conjunto  $\varphi(L)$  é uma curva algébrica em  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  dada pelo polinômio bi-homogêneo de bigrau  $(1, 1)$

$$Y_0(-p_{13}X_0 + p_{03}X_1) - Y_1(-p_{12}X_0 + p_{02}X_1).$$

Observamos ainda que o polinômio bi-homogêneo acima é irredutível pois os polinômios lineares  $-p_{12}X_0 + p_{02}X_1$  e  $-p_{13}X_0 + p_{03}X_1$  não são múltiplos um do outro. De fato:

$$\det \begin{pmatrix} -p_{12} & p_{02} \\ -p_{13} & p_{03} \end{pmatrix} = -p_{03}p_{12} + p_{02}p_{13} = p_{23} \neq 0.$$

Note que a aplicação  $\varphi$  não é injetora, ou, equivalentemente, a reta  $L$  não é unicamente determinada pela sua imagem. De fato, a  $(1, 1)$ -curva imagem por  $\varphi$  de uma reta  $L$  só depende de 4 das 6 coordenadas de Plücker que determinam  $L$ . Então, se em duas retas estas 4 coordenadas coincidem (ou são proporcionais), ambas tem a mesma  $(1, 1)$ -curva imagem e no entanto as outras duas coordenadas podem ser suficientemente diferentes de modo que as retas sejam distintas.

b) Suponha agora que a reta  $L$  intersecte  $A_1$  mas não  $B_1$ . Para qualquer ponto de  $L \setminus A_1$ , o plano por meio deste ponto e da reta  $A_1$  é o mesmo. Logo, o ponto  $R \in B_1$  é constante. Isso mostra que a imagem de  $L \in A_1$  pela aplicação  $\varphi$  está contida na  $B$ -reta (isto é, curva de bigrau  $(0, 1)$ )  $\mathbb{P}^1 \times \{R\}$ . Na verdade esta imagem é, realmente, a  $B$ -reta menos um ponto. Esse ponto que falta à  $B$ -reta é exatamente o ponto que seria a imagem da interseção da reta  $L$  com a reta  $A_1$ .

Analogamente, se  $L$  intersecta  $B_1$  mas não  $A_1$ , a curva imagem de  $L \setminus B_1$  é uma  $A$ -reta (isto é, curva em  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  de bigrau  $(1, 0)$ ) menos um pontinho.

c) No caso extremo de  $L$  intersectar  $A_1$  e  $B_1$ , digamos, em  $(x_0 : x_1 : 0 : 0)$  e  $(0 : 0 : y_0 : y_1)$  respectivamente, vemos facilmente que esses pontos são os próprios  $Q$  e  $R$ , imagem constante de qualquer ponto de  $L \setminus (A_1 \cup B_1)$ . Isto é,

$$\varphi(L \setminus (A_1 \cup B_1)) = ((x_0 : x_1), (y_0 : y_1)) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1.$$

Nossa próxima etapa consiste em restringir esta aplicação à superfície cúbica não singular  $C$  contendo as retas  $A_1$  e  $B_1$ . Observamos que a escolha das coordenadas para que  $A_1$  seja dada por  $z_2 = z_3 = 0$  e  $B_1$  por  $z_0 = z_1 = 0$  concorda com a normalização feita na seção 2.III, normalização essa que descreve a cúbica  $C$  pela equação

$$z_1 z_2 (a z_0 + z_1 + z_2 + d z_3) + z_0 z_3 (z_0 + b z_1 + c z_2 + z_3) = 0, (z_0 : z_1 : z_2 : z_3) \in \mathbb{P}^3.$$

A aplicação  $\varphi : C \setminus (A_1 \cup B_1) \rightarrow A_1 \times B_1 \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  prolonga-se naturalmente à seguinte aplicação

$$\varphi : C \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$$

(também denominada de  $\varphi$ , sem prejuízo de entendimento) descrita a seguir: Quando  $P \in A_1$  então  $Q = P$  e  $R$  é o ponto de interseção de  $B_1$  com o plano tangente à superfície  $C$  no ponto  $P$ . Analogamente, se  $P \in B_1$  então  $R = P$  e  $Q$  é o ponto de interseção de  $A_1$  com o plano tangente à  $C$  em  $P$ .

Gostaríamos agora de discutir a imagem de  $C$  em  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  por meio da aplicação  $\varphi$ . Para começar, as retas (disjuntas 2 a 2)  $C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{15}, C_{16}$  intersectam simultaneamente  $A_1$  e  $B_1$  e portanto suas imagens em  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  são pontos distintos, digamos,  $P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$  respectivamente. Já dá pra desconfiar que a aplicação  $\varphi$  é um blow up centrado em  $P_1, \dots, P_6$  e com curvas excepcionais  $C_{12}, \dots, C_{16}$ . Veremos adiante que de fato isso é verdade. Antes porém, vamos estudar um pouco as propriedades dos pontos  $P_2, \dots, P_6 \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  e calcular suas coordenadas em função dos coeficientes da equação da cúbica  $C$ .

**Afirmção 4.II.1:** As abscissas dos pontos  $P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  são diferentes entre si. Da mesma forma, as ordenadas também são diferentes entre si.

De fato, por causa da não singularidade de  $C$ , a reta  $B_1$  está contida em exatamente 5 planos tritangentes distintos e portanto as abscissas dos pontos  $P_2, \dots, P_6$  (que são as interseções desses cinco planos com a reta  $A_1$ ) necessariamente são distintas entre si. Raciocínio análogo resolve o caso das ordenadas. ■

Seja agora um ponto  $((x_0 : x_1), (y_0 : y_1)) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ . A reta em  $\mathbb{P}^3$  passando pelos pontos  $(x_0 : x_1 : 0 : 0) \in A_1$  e  $(0 : 0 : y_0 : y_1) \in B_1$  é dada por

$\{(\lambda x_0 : \lambda x_1 : \mu y_0 : \mu y_1) \mid (\lambda, \mu) \in k^2 \setminus (0, 0)\}$ . Quando  $((x_0 : x_1), (y_0 : y_1))$  são as coordenadas de um dos pontos  $P_i$ ,  $i = 2, \dots, 6$ , então a reta acima descrita é a reta correspondente  $C_{1i} \subseteq C$ . Logo, substituindo as coordenadas da reta na equação de  $C$ , vale para cada  $(\lambda, \mu) \in k^2 \setminus (0, 0)$  que:

$$\lambda^2 \mu (x_1 y_0 (a x_0 + x_1) + x_0 y_1 (x_0 + b x_1)) + \lambda \mu^2 (x_1 y_0 (y_0 + d y_1) + x_0 y_1 (c y_0 + y_1)) = 0.$$

Portanto, as coordenadas dos pontos  $P_i$  são dadas pelos pontos  $((x_0 : x_1), (y_0 : y_1))$  tais que valem:

$$(*) \begin{cases} x_1 y_0 (a x_0 + x_1) + x_0 y_1 (x_0 + b x_1) = 0 \\ x_1 y_0 (y_0 + d y_1) + x_0 y_1 (c y_0 + y_1) = 0 \end{cases}$$

Duas soluções do sistema acima podem ser obtidas rapidamente. Observando que a normalização da equação da superfície cúbica informa-nos que  $C_{12}$  é dada por  $z_0 = z_2 = 0$  e portanto sua interseção com  $A_1$  e  $B_1$  acontece respectivamente em  $(0 : 1 : 0 : 0)$  e  $(0 : 0 : 0 : 1)$ . Logo:

$$P_2 = \varphi(C_{12}) = ((0 : 1), (0 : 1)).$$

Analogamente,  $C_{13}$  é a interseção dos planos  $T_2 : z_1 = 0$  e  $S_1 : z_3 = 0$  e portanto  $C_{13} \cap A_1 = (1 : 0 : 0 : 0)$  e  $C_{13} \cap B_1 = (0 : 0 : 1 : 0)$ . Logo temos:

$$P_3 = \varphi(C_{13}) = ((1 : 0), (1 : 0)).$$

Tendo já obtido a solução  $((0 : 1), (0 : 1))$ , podemos reduzir o sistema  $(*)$  acima e trabalhar com coordenadas afins  $x := \frac{x_1}{x_0}$  e  $y := \frac{y_1}{y_0}$ , obtendo:

$$(*) \begin{cases} x(a + x) + y(1 + bx) = 0 \\ x(1 + dy) + y(c + y) = 0 \end{cases}$$

Como já era de se esperar, a solução afim  $(x, y) = (0, 0)$  (correspondente à solução projetiva  $((1 : 0), (1 : 0)) = P_3$ ) aparece no sistema des-bi-homogeneizado acima.

Por fim, as coordenadas dos pontos  $P_4, P_5$  e  $P_6$  serão dadas por  $((1 : x), (1 : y))$  onde  $(x, y)$  são as soluções não nulas de  $(*)$ . Passemos a calculá-las.

Para começar, temos que ter  $1 + bx \neq 0$ . De fato, se  $1 + bx = 0$  (e com  $b \neq 0$ , naturalmente!) teríamos  $x = -\frac{1}{b}$ . Mas também, pela 1ª equação,  $x = 0$  ou  $x = -a$ . Logo  $0 = x = -\frac{1}{b}$ , isto é  $0 = 1$  (o que é obviamente impossível!) ou  $-a = x = -\frac{1}{b}$ , isto é  $ab - 1 = 0$  (o que também é impossível, via aquelas desigualdades envolvendo os

coeficientes da equação da cúbica descritas na Proposição 2.III.2). Assim, a primeira equação de (\*) nos dá:

$$y = -\frac{x(a+x)}{1+bx}.$$

Substituindo na segunda equação temos:

$$x \left( 1 - d \frac{x(a+x)}{1+bx} \right) - \frac{x(a+x)}{1+bx} \left( c - \frac{x(a+x)}{1+bx} \right) = 0.$$

Eliminando de uma vez a solução  $x = 0$  (isto é, a solução  $(x, y) = (0, 0)$ ), lembrando que  $1 - bd \neq 0$  (pela mesmas relações entre coeficientes acima citada) e reduzindo a equação do terceiro grau acima, obtemos:

$$(**) x^3 + \frac{2a-d+b^2-cb-abd}{1-bd} x^2 + \frac{2b-c+a^2-ad-abc}{1-bd} x + \frac{1-ac}{1-bd} = 0.$$

Como as abscissas de  $P_4, P_5$  e  $P_6$  são diferentes entre si (consequência da não singularidade de  $C$ ), vale também que as três raízes  $x_4, x_5$  e  $x_6$  da equação afim (\*\*) acima são distintas e diferentes de zero. Logo:

$$P_i = \varphi(C_{1i}) = ((1 : x_i), (1 + bx_i : -x_i(a + x_i))), \quad i = 4, 5, 6.$$

Prosseguindo, temos ainda as seguintes propriedades dos pontos  $P_2, \dots, P_6$ :

**Afirmção 4.II.2:** Para os pontos  $P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  valem as propriedades:

- a) Cada três destes cinco pontos determinam unicamente uma  $(1, 1)$ -curva em  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ .
- b) Cada quatro destes cinco pontos não estão contidos numa  $(1, 1)$ -curva.
- c) Esses cinco pontos determinam unicamente uma  $(2, 1)$ -curva e uma  $(1, 2)$ -curva em  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ .

Para provar **a)**, sejam três pontos distintos em  $\{P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$ , digamos,  $((x_{01} : x_{11}), (y_{01} : y_{11}))$ ,  $((x_{02} : x_{12}), (y_{02} : y_{12}))$  e  $((x_{03} : x_{13}), (y_{03} : y_{13}))$ . A forma geral de um polinômio bihomogêneo de bigrau  $(1, 1)$  é dada por

$$\alpha X_0 Y_0 + \beta X_0 Y_1 + \gamma X_1 Y_0 + \delta X_1 Y_1$$

onde  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in k$  são não todos nulos. Aplicando os pontos dados no polinômio acima, calculamos os coeficientes do mesmo via o sistema linear homogêneo  $3 \times 4$ :

$$\begin{pmatrix} x_{01}y_{01} & x_{01}y_{11} & x_{11}y_{01} & x_{11}y_{11} \\ x_{02}y_{02} & x_{02}y_{12} & x_{12}y_{02} & x_{12}y_{12} \\ x_{03}y_{03} & x_{03}y_{13} & x_{13}y_{03} & x_{13}y_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resta-nos mostrar que as linhas da matriz do sistema acima são linearmente independentes para concluir que o mesmo nos dá uma solução (que é única do ponto de vista projetivo). Dividiremos nossos cálculos em dois casos:

1ª) Um dos pontos escolhidos é  $P_2 = ((0 : 1), (0 : 1))$  e os outros dois são da forma  $((1 : x), (1 + bx : -x(a + x)))$  onde  $x = x_3 = 0$  ou  $x \in \{x_4, x_5, x_6\}$ , raízes da equação cúbica (\*\*). Neste caso, a matriz do sistema linear  $3 \times 4$  é dada por:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 + bx_i & -x_i(a + x_i) & x_i(1 + bx_i) & -x_i^2(a + x_i) \\ 1 + bx_j & -x_j(a + x_j) & x_j(1 + bx_j) & -x_j^2(a + x_j) \end{pmatrix}.$$

O subdeterminante  $3 \times 3$  formado pelas 1ª, 3ª e 4ª colunas é dado por

$$-(x_i - x_j)(1 + bx_i)(1 + bx_j).$$

Observamos que o mesmo é não nulo pois  $x_i \neq x_j$  e  $1 + bx_i, 1 + bx_j \neq 0$ . Concluimos assim o primeiro caso.

2ª) Quando os três pontos são da forma  $((1 : x), (1 + bx : -x(a + x)))$  onde  $x = x_3 = 0$  ou  $x \in \{x_4, x_5, x_6\}$  raízes da equação cúbica (\*\*). Neste caso, a matriz do sistema é dada por:

$$\begin{pmatrix} 1 + bx_i & -x_i(a + x_i) & x_i(1 + bx_i) & -x_i^2(a + x_i) \\ 1 + bx_j & -x_j(a + x_j) & x_j(1 + bx_j) & -x_j^2(a + x_j) \\ 1 + bx_k & -x_k(a + x_k) & x_k(1 + bx_k) & -x_k^2(a + x_k) \end{pmatrix}.$$

O subdeterminante  $3 \times 3$  obtido pelas colunas 1, 2 e 3 é dado por

$$(x_i - x_j)(x_j - x_k)(x_k - x_i)(1 - ab).$$

Novamente temos que as linhas são linearmente independentes pois o determinante acima é não nulo. Concluimos assim o segundo caso.

Para provar **b)**, suponha que quatro dos cinco pontos  $\{P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$  estão contidos na  $(1, 1)$ -curva dada pelo polinômio

$$\alpha X_0 Y_0 + \beta X_0 Y_1 + \gamma X_1 Y_0 + \delta X_1 Y_1$$

para certos  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , não todos nulos. Aplicando os quatro pontos escolhidos no polinômio acima, obtemos um sistema linear homogêneo  $4 \times 4$ . Fazendo uma análise caso a caso semelhante ao item anterior, concluímos que as linhas do sistema são linearmente independentes (pois o determinante da matriz principal será não nulo).

Consequentemente teríamos como única solução deste sistema  $4 \times 4$ ,  $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ , o que é uma contradição.

Finalmente, a prova do item **c)** é análoga à do item **a)**, sendo talvez, um pouco mais computacional, já que obteremos um sistema de 5 equações cujas 6 variáveis são os coeficientes de um polinômio bi-homogêneo de bigrau  $(1, 2)$  ou  $(2, 1)$ . ■

Outra vez, para cada par  $((x_0 : x_1)(y_0 : y_1)) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ , consideremos a reta em  $\mathbb{P}^3$  passando por  $(x_0 : x_1 : 0 : 0)$  e  $(0 : 0 : y_0 : y_1)$ . Pelos cálculos feitos anteriormente, sabemos que existem exatamente 5 pares em  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  tais que a referida reta está contida na superfície cúbica não singular  $C$ . Esses pontos e essas retas são  $P_2, \dots, P_6$  e  $C_{12}, \dots, C_{16}$ . Assim, para cada par  $((x_0 : x_1), (y_0 : y_1)) \neq P_i$ , a reta por meio de  $(x_0 : x_1 : 0 : 0)$  e  $(0 : 0 : y_0 : y_1)$  não está contida na cúbica  $C$ . Tal reta intersecta  $C$  nos pontos  $(x_0 : x_1 : 0 : 0)$ ,  $(0 : 0 : y_0 : y_1)$  e num terceiro ponto distinto dos outros dois anteriores. Fica portanto bem definida a seguinte aplicação:

$$\psi : (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \setminus \{P_2, \dots, P_6\} \rightarrow C \setminus (C_{12} \cup \dots \cup C_{16})$$

que ao par  $((x_0 : x_1), (y_0 : y_1)) \neq P_i$  associa o terceiro ponto de interseção da superfície cúbica lisa  $C$  com a reta por meio de  $(x_0 : x_1 : 0 : 0)$  e  $(0 : 0 : y_0 : y_1)$ .

Vamos calcular explicitamente as coordenadas deste terceiro ponto. Sabemos que a interseção da reta por meio de  $(x_0 : x_1 : 0 : 0)$  e  $(0 : 0 : y_0 : y_1)$  com a superfície cúbica  $C$  é da forma  $(\lambda x_0 : \lambda x_1 : \mu y_0 : \mu y_1)$  para certo  $(\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1$ . Observando que  $(\lambda : \mu) = (1 : 0)$  e  $(\lambda : \mu) = (0 : 1)$  nos dão os pontos  $(x_0 : x_1 : 0 : 0)$  e  $(0 : 0 : y_0 : y_1)$  respectivamente, só nos resta achar qual é o valor do parâmetro  $(\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1$  que determina o terceiro ponto de interseção. Também já vimos antes que vale a relação:

$$\lambda^2 \mu (x_1 y_0 (a x_0 + x_1) + x_0 y_1 (x_0 + b x_1)) + \lambda \mu^2 (x_1 y_0 (y_0 + d y_1) + x_0 y_1 (c y_0 + y_1)) = 0$$

E sendo  $\lambda, \mu \neq 0$ , segue-se imediatamente que:

$$(\lambda : \mu) = (x_1 y_0 (y_0 + d y_1) + x_0 y_1 (c y_0 + y_1) : -(x_1 y_0 (a x_0 + x_1) + x_0 y_1 (x_0 + b x_1))),$$

E portanto,

$$\begin{aligned} \psi((x_0 : x_1), (y_0 : y_1)) &= (x_0 x_1 y_0 (y_0 + d y_1) + x_0^2 y_1 (c y_0 + y_1) : x_1^2 y_0 (y_0 + d y_1) + x_0 x_1 y_1 (c y_0 + y_1) : \\ &\quad -x_1 y_0^2 (a x_0 + x_1) - x_0 y_0 y_1 (x_0 + b x_1) : -x_1 y_0 y_1 (a x_0 + x_1) - x_0 y_1^2 (x_0 + b x_1)). \end{aligned}$$

Observamos que se começássemos por definir  $\psi$  através dos polinômios bi-homogêneos de bigrau  $(2, 2)$

$$X_0 X_1 Y_0 (Y_0 + d Y_1) + X_0^2 Y_1 (c Y_0 + Y_1),$$

$$\begin{aligned}
& X_1^2 Y_0 (Y_0 + dY_1) + X_0 X_1 Y_1 (cY_0 + Y_1), \\
& -X_1 Y_0^2 (aX_0 + X_1) - X_0 Y_0 Y_1 (X_0 + bX_1) \text{ e} \\
& -X_1 Y_0 Y_1 (aX_0 + X_1) - X_0 Y_1^2 (X_0 + bX_1),
\end{aligned}$$

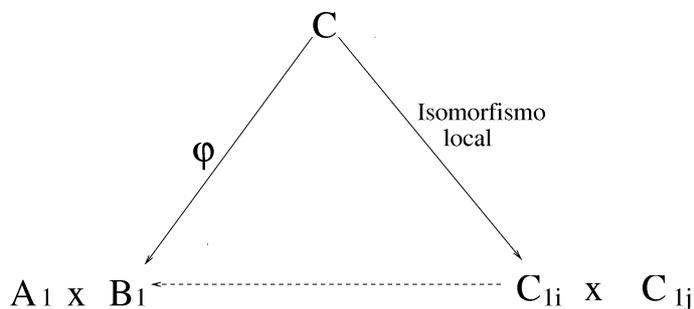
teríamos que excluir do domínio  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  os pares  $((x_0 : x_1), (y_0 : y_1))$  que anulam simultaneamente os quatro polinômios acima, isto é, o domínio seria formado por todos os pontos  $((x_0 : x_1), (y_0 : y_1)) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  exceto aqueles que satisfazem o sistema (\*) já discutido antes e cujas soluções são exatamente os pontos  $P_2, \dots, P_6$ .

**Afirmção 4.II.3:** O morfismo  $\psi : (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \setminus \{P_2, \dots, P_6\} \rightarrow C \setminus (C_{12} \cup \dots \cup C_{16})$  é a inversa da aplicação  $\varphi : C \setminus (C_{12} \cup \dots \cup C_{16}) \rightarrow (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \setminus \{P_2, \dots, P_6\}$ .

De fato, geometricamente é imediato de se ver que vale a afirmação acima, isto é, que  $\varphi \circ \psi$  e  $\psi \circ \varphi$  são as identidades em  $(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \setminus \{P_2, \dots, P_6\}$  e em  $C \setminus (C_{12} \cup \dots \cup C_{16})$  respectivamente. Em particular, a aplicação  $\varphi$  é uma bijeção entre  $(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \setminus \{P_2, \dots, P_6\}$  e  $C \setminus (C_{12} \cup \dots \cup C_{16})$ . ■

**Afirmção 4.II.4:** A aplicação  $\varphi : C \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  é o blowing up com curvas excepcionais  $C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{15}$  e  $C_{16} \subseteq C$  e centrado nos pontos  $P_2, P_3, P_4, P_5$  e  $P_6 \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ .

Por tudo o que foi feito acima, resta somente provar que  $\varphi$  é um morfismo, isto é,  $\varphi$  é localmente dada por polinômios. A idéia dessa prova é a seguinte: Caso um ponto de  $C$  esteja fora de  $A_1 \cup B_1$ , então em uma vizinhança sua o problema já está resolvido. Caso esse ponto pertença a  $A_1$  ou  $B_1$ , existem duas retas  $C_{1i}$  e  $C_{1j}$  tais que este ponto não está em  $C_{1i} \cup C_{1j}$ . Então podemos definir um isomorfismo local numa vizinhança desse ponto em  $C_{1i} \times C_{1j} \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ , isomorfismo esse definido de maneira análoga à aplicação  $\varphi$ .



Obtemos então uma aplicação de  $C_{1i} \times C_{1j} \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  em  $A_1 \times B_1 \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ , definida como a composta de  $\varphi$  com a inversa do isomorfismo local. Pode-se provar

diretamente que esta aplicação é um morfismo e portanto  $\varphi$  (que localmente é a composta desta aplicação com o isomorfismo local) também será um morfismo. ■

Também é interessante discutir a imagem de cada uma das 27 retas da superfície  $C$  por meio desse blow up.

Repetimos ainda mais uma vez que as retas da família  $C_{1i}$ , ( $i = 2, \dots, 6$ ) são implodidas nos pontos  $P_i$ .

Cada reta da família  $A_i$ , ( $i = 2, \dots, 6$ ), intersecta  $B_1$  mas não intersecta  $A_1$ . Vimos que sua imagem pela aplicação  $\varphi$  (inicialmente definida fora de  $A_1$  e  $B_1$ ) era uma  $A$ -reta de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  menos um ponto. Na extensão de  $\varphi$  à toda superfície  $C$ , esse “buraco” é preenchido e a imagem da reta  $A_i$  por meio de  $\varphi$  é exatamente a  $A$ -reta de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  passando pelo ponto  $P_i$ .

Analogamente, cada reta da família  $B_i$ , ( $i = 2, \dots, 6$ ) tem por imagem a única  $B$ -reta de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  passando por  $P_i$ .

Cada uma das 10 retas  $C_{ij}$ , ( $1 < i < j \leq 6$ ), é levada numa  $(1, 1)$ -curva em  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  e esta  $(1, 1)$ -curva passa (e é bem determinada) pelos três pontos  $P_k$ ,  $k \in \{2, 3, 4, 5, 6\} \setminus \{i, j\}$ . De fato, sabemos do estudo da tabela de interseção que cada reta  $C_{ij}$  intersecta as três retas  $C_{1k}$ , com  $k \in \{2, 3, 4, 5, 6\} \setminus \{i, j\}$ . Consequentemente os pontos  $P_k = \varphi(C_{1k})$  estão contidos na  $\varphi$ -imagem de  $C_{ij}$ .

Quanto à reta  $A_1$ , sua imagem por  $\varphi$  é a única  $(2, 1)$ -curva em  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  que passa (e é bem determinada) pelos 5 pontos  $P_i$ . De fato, é imediato ver que o plano tangente à superfície cúbica lisa  $C$  no ponto  $(x_0 : x_1 : 0 : 0) \in A_1$  é dado por

$$\{(x_0 : x_1 : y_0 : y_1) \in \mathbb{P}^3 \mid x_1 y_0 (a x_0 + x_1) + x_0 y_1 (x_0 + b x_1) = 0\}.$$

Portanto, a interseção deste plano com a reta  $B_1$  é dada por

$$(0 : 0 : -x_0(x_0 + b x_1) : x_1(a x_0 + x_1)).$$

Esta é exatamente a segunda coordenada de  $\varphi(x_0 : x_1 : 0 : 0)$  em  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ , isto é,

$$(y_0 : y_1) = (-x_0(x_0 + b x_1) : x_1(a x_0 + x_1)).$$

Portanto, a imagem de  $A_1$  pela aplicação  $\varphi$  é a  $(2, 1)$ -curva em  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  cuja equação bi-homogênea é dada pelo polinômio de bigrau  $(2, 1)$

$$Y_0 X_1 (a X_0 + X_1) + Y_1 X_0 (X_0 + b X_1).$$

E finalmente, de maneira análoga, a reta  $B_1$  tem por  $\varphi$ -imagem a única  $(1, 2)$ -curva em  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  passando pelos 5 pontos  $P_2, \dots, P_6$ . Esta curva é descrita pelo polinômio de bigrau  $(1, 2)$

$$X_0Y_1(cY_0 + Y_1) + X_1Y_0(Y_0 + dY_1).$$

Resumimos toda nossa discussão acima no seguinte:

**Teorema 4.II.5:** Ao implodirmos as cinco retas  $C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{15}$  e  $C_{16}$  (disjuntas duas a duas) sobre uma superfície cúbica não singular, obtemos uma superfície isomorfa à quádrlica não singular  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ . ■

**Observação:** O suposto caso geral em que se trabalha com um dos 216 conjuntos maximais de cinco retas pode ser imediatamente reduzida ao caso acima descrito quando escolhermos convenientemente, entre as 51840 simetrias, aquela que transforma esse conjunto maximal em  $\{C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{15}, C_{16}\}$ .

Veremos mais adiante que o teorema acima admite a seguinte:

**Recíproca 4.II.6:** Sejam cinco pontos distintos em  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  com as seguintes propriedades:

- i) Suas abscissas são diferentes entre si;
  - ii) Suas ordenadas são diferentes entre si;
  - iii) Cada 4 destes 5 pontos não estão contidos numa mesma  $(1, 1)$ -curva.
- Então os mesmos definem, via blow up, uma superfície cúbica lisa em  $\mathbb{P}^3$ . ■

Em particular, o estudo das superfícies cúbicas não singulares em  $\mathbb{P}^3$  é equivalente ao estudo dos conjuntos de 5 pontos em  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  com as propriedades acima descritas.

Um corolário da exposição acima fecha a questão levantada no capítulo 3 acerca do grupo de Picard de  $C$ .

**Corolário 4.II.7:** O grupo de Picard  $Pic(C)$  de uma superfície cúbica lisa é o grupo abeliano livre isomorfo a  $\mathbb{Z}^7$  e gerado pelas classes das retas  $A_2, B_2, C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{15}$  e  $C_{16}$ .

De fato, pela proposição 4.I.3, temos que  $Pic(C) \cong Pic(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \oplus \mathbb{Z}^5$ , já que obtemos  $C$  à partir de 5 blow up's no produto  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ . Sendo  $Pic(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  (confira exemplo 3 na seção I do capítulo 3), segue imediatamente que

$$Pic(C) \cong \mathbb{Z}^7.$$

Tomando a  $\varphi$ -imagem inversa dos geradores de  $Pic(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$  (uma  $A$ -reta, digamos,  $\varphi(A_2)$  e uma  $B$ -reta, digamos  $\varphi(B_2)$ ) e também a  $\varphi$ -imagem inversa dos pon-

tos  $P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ , obtemos os sete geradores de  $Pic(C)$ , a saber, as classes de  $A_2, B_2, C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{15}$  e  $C_{16}$ . ■

### Seção 4.III: Blowing Up de Seis Pontos

Pretendemos agora fazer uma implosão em seis retas da superfície cúbica não singular  $C$  até chegarmos ao plano projetivo  $\mathbb{P}^2$ . Para isso, vamos nos aproveitar de que cinco retas disjuntas implodidas nos fornece a superfície  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  e vamos trabalhar com uma aplicação birracional de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  em  $\mathbb{P}^2$ .

Sabemos que o produto  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  de duas retas projetivas e a superfície quádrlica não singular  $\{(z_0 : z_1 : z_2 : z_3) \in \mathbb{P}^3 \mid z_0 z_3 - z_1 z_2 = 0\}$  em  $\mathbb{P}^3$  são isomorfas via a *Aplicação de Segre* descrita abaixo:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{P}^3 \\ ((x_0 : x_1), (y_0 : y_1)) &\mapsto (x_1 y_1 : x_1 y_0 : x_0 y_1 : x_0 y_0) \end{aligned}$$

A imagem de  $P_2 = ((0 : 1), (0 : 1))$  pela aplicação de Segre é  $(1 : 0 : 0 : 0) \in \mathbb{P}^3$ . Fazendo então uma projeção central de  $\mathbb{P}^3$  à partir do ponto  $(1 : 0 : 0 : 0)$  sobre o plano  $\{(z_0 : z_1 : z_2 : z_3) \mid z_0 = 0\}$  temos:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^3 &\rightarrow \{(z_0 : z_1 : z_2 : z_3) \mid z_0 = 0\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{P}^2 \\ (z_0 : z_1 : z_2 : z_3) &\mapsto (0 : z_1 : z_2 : z_3) \mapsto (z_1 : z_2 : z_3) \end{aligned}$$

Compondo as duas aplicações acima e tendo o cuidado de excluir o ponto  $P_2 \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  do domínio da composta, obtemos a aplicação:

$$\begin{aligned} \pi : (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \setminus P_2 &\rightarrow \mathbb{P}^2 \\ ((x_0 : x_1), (y_0 : y_1)) &\mapsto (x_1 y_0 : x_0 y_1 : x_0 y_0) \end{aligned}$$

É fácil de ver que a  $A$ -reta e a  $B$ -reta passando por  $P_2$  são implodidas por  $\pi$  em pontos, digamos,  $Q, R \in \mathbb{P}^2$  respectivamente. Também é geometricamente claro que  $\pi$  explode o ponto  $P_2$  na reta que é determinada por  $Q$  e  $R$  (vide figura na próxima página).

Tomando os pontos  $((0 : 1), (1 : y))$  na  $A$ -reta passando por  $P_2$  e  $((1 : x), (0 : 1))$  na  $B$ -reta passando por  $P_2$ , é fácil calcular as coordenadas de  $Q$  e  $R$ :

$$Q = \pi((0 : 1), (1 : y)) = (1 : 0 : 0),$$

$$R = \pi((1 : x), (0 : 1)) = (0 : 1 : 0).$$

E para os pontos fora desta  $A$ -reta e desta  $B$ -reta temos:

$$\pi((1 : x), (1 : y)) = (x : y : 1) \in \mathbb{P}^2.$$

Na prática, a aplicação  $\pi$  fora da  $A$ -reta e da  $B$ -reta passando por  $P_2$  é obtida pelas inclusões abaixo:

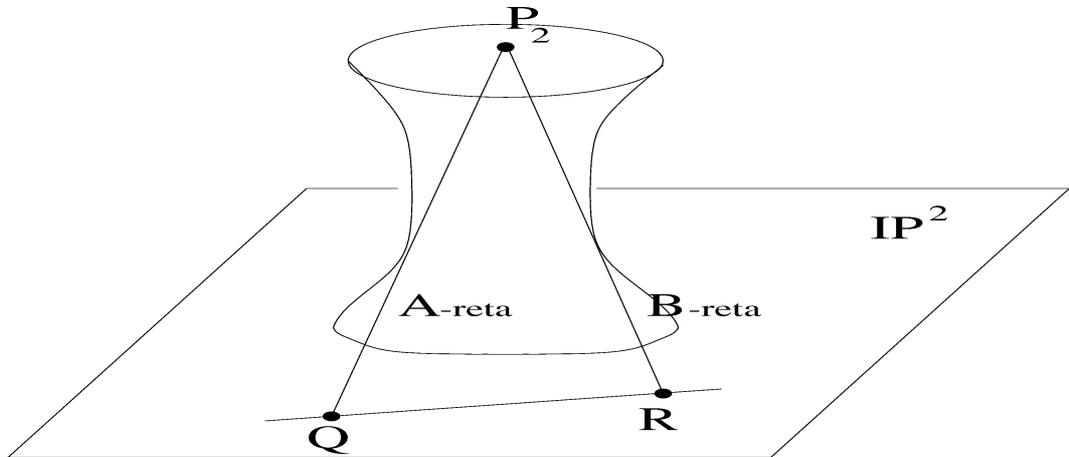
$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 & \supseteq & \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 = \mathbb{A}^2 & \subseteq & \mathbb{P}^2. \\ ((1 : x), (1 : y)) & \mapsto & (x, y) & \mapsto & (x : y : 1) \end{array}$$

Em particular, se  $P'_3, P'_4, P'_5$  e  $P'_6$  forem as  $\pi$ -imagens em  $\mathbb{P}^2$  dos pontos  $P_3, P_4, P_5$  e  $P_6 \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ , temos:

$$P'_3 = (0 : 0 : 1),$$

$$P'_i = (x_i : y_i : 1) = \left( x_i : \frac{-x_i(a + x_i)}{1 + bx_i} : 1 \right), \quad i = 4, 5, 6,$$

com  $x_4, x_5, x_6$  raízes da equação cúbica (\*\*\*) da seção anterior.



Obtemos então que a composta  $\pi \circ \varphi$  da aplicação birracional  $\pi : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$  com o morfismo birracional  $\varphi : C \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  é um morfismo birracional  $C \rightarrow \mathbb{P}^2$  que implode exatamente as retas  $A_2, B_2, C_{13}, C_{14}, C_{15}$  e  $C_{16}$  da superfície cúbica não singular  $C$  nos pontos  $Q, R, P'_3, P'_4, P'_5$  e  $P'_6$  do plano projetivo  $\mathbb{P}^2$ .

As inclusões  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \supseteq \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 = \mathbb{A}^2 \subseteq \mathbb{P}^2$  sugerem-nos uma maneira bem prática de obtermos equações de curvas em  $\mathbb{P}^2$  à partir de equações de curvas em  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ : basta des-bi-homogeneizar o polinômio bi-homogêneo via  $X := \frac{x_1}{x_0}$  e  $Y := \frac{y_1}{y_0}$  e a seguir re-homogeneizar via uma nova variável  $Z$ . Podemos então descrever as imagens de cada

uma das 27 retas de  $C$  por meio do blow down  $\pi \circ \varphi$ , usando o que já sabemos em termos das curvas  $\varphi$ -imagens das retas em  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ .

A  $A$ -reta de abscissa  $(x_0 : x_1) \in \mathbb{P}^1$  é dada pelo polinômio (bi-homogêneo)

$$x_0X_1 - x_1X_0 \in k[X_0, X_1, Y_0, Y_1].$$

Des-bi-homogeneizando e re-homogeneizando, obtemos como  $\pi$ -imagem desta  $A$ -reta a reta em  $\mathbb{P}^2$  dada pelo polinômio

$$x_0X - x_1Z \in k[X, Y, Z].$$

Como  $\varphi(A_i)$  ( $i = 3, 4, 5, 6$ ) é a  $A$ -reta contendo  $P_i$  então o ponto  $P'_i = \pi(P_i)$  pertence à reta  $\pi \circ \varphi(A_i)$  em  $\mathbb{P}^2$ . Além disso, como  $A_i \cap B_2 \neq \emptyset$ , então o ponto  $R$  (que é  $\pi \circ \varphi$ -imagem da reta  $B_2$ ) também pertence à reta  $\pi \circ \varphi(A_i)$ . Logo, a imagem de  $A_i$  por meio do blow up  $\pi \circ \varphi$  é a reta em  $\mathbb{P}^2$  determinada pelos pontos  $P'_i$  e  $R$ .

De maneira análoga, a  $\pi \circ \varphi$ -imagem da reta  $B_i$  ( $i = 3, 4, 5, 6$ ) é a reta em  $\mathbb{P}^2$  passando pelos pontos  $P'_i$  e  $Q$ .

Quanto às retas  $C_{ij}$  ( $2 < i < j \leq 6$ ), sabemos que suas  $\varphi$ -imagens em  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  são  $(1, 1)$ -curvas que passam por três pontos, um deles o ponto  $P_2 = ((0 : 1), (0 : 1))$ . Logo tem equações dadas por polinômios da forma

$$\alpha X_0Y_0 + \beta X_0Y_1 + \gamma X_1Y_0 \in k[X_0, X_1, Y_0, Y_1].$$

Ao des-bi-homogeneizarmos e re-homogeneizarmos as  $(1, 1)$ -curvas acima, obtemos retas em  $\mathbb{P}^2$  dadas pelas equações

$$\alpha Z + \beta Y + \gamma X \in k[X, Y, Z].$$

Assim, as retas  $C_{ij}$  ( $2 < i < j \leq 6$ ) são levadas por  $\pi \circ \varphi$  à retas em  $\mathbb{P}^2$  determinadas pelos pontos  $P'_k = \pi(P_k)$  com  $k \in \{3, 4, 5, 6\} \setminus \{i, j\}$ .

Prosseguindo, já vimos também que a reta  $A_1$  tem por  $\varphi$ -imagem a  $(2, 1)$ -curva em  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  dada pelo polinômio bi-homogêneo

$$Y_0X_1(aX_0 + X_1) + Y_1X_0(X_0 + bX_1) \in k[X_0, X_1, Y_0, Y_1].$$

Novamente, des-bi-homogeneizando e re-homogeneizando o polinômio acima, obtemos uma cônica em  $\mathbb{P}^2$  cuja equação é dada pelo polinômio

$$X(aZ + X) + Y(Z + bX) \in k[X, Y, Z].$$

Tanto geometricamente, quanto por cálculo algébrico direto, é imediato ver que a cônica acima passa pelos cinco pontos  $\{Q, R, P'_3, P'_4, P'_5, P'_6\} \setminus \{Q\}$ . Veremos mais à frente que esta cônica é unicamente determinada por esses cinco pontos.

Analogamente, a reta  $B_1$  sobre a superfície cúbica não singular é levada pelo blow up  $\pi \circ \varphi$  na cônica em  $\mathbb{P}^2$  passando (e unicamente determinada) pelos cinco pontos  $\{Q, R, P'_3, P'_4, P'_5, P'_6\} \setminus \{R\}$ .

Finalmente, as retas  $C_{2i}$  ( $i = 3, 4, 5, 6$ ) tem por  $\varphi$ -imagens em  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ,  $(1, 1)$ -curvas que não passam por  $P_2 = ((0 : 1), (0 : 1))$ . Essas  $(1, 1)$ -curvas tem equações dadas por polinômios do tipo

$$\alpha X_0 Y_0 + \beta X_0 Y_1 + \gamma X_1 Y_0 + \delta X_1 Y_1 \in k[X_0, X_1, Y_0, Y_1],$$

onde o coeficiente  $\delta$  é necessariamente não nulo. Uma vez mais des-bi-homogeneizando e re-homogeneizando o polinômio acima, obtemos uma forma de grau 2 em  $k[X, Y, Z]$ , à saber,

$$\alpha Z^2 + \beta YZ + \gamma XZ + \delta XY.$$

Assim concluímos que a reta  $C_{2i}$  ( $i = 3, 4, 5, 6$ ) tem por  $\pi \circ \varphi$ -imagem a cônica (unicamente determinada) passando pelos cinco pontos  $\{Q, R, P'_3, P'_4, P'_5, P'_6\} \setminus \{P'_i\}$ .

Agora apresentamos duas propriedades dos pontos  $Q, R, P'_3, \dots, P'_6 \in \mathbb{P}^2$ , uma das quais justifica a unicidade das cônicas-imagens acima descritas:

**Afirmção 4.III.1:** Para os pontos  $Q, R, P'_3, P'_4, P'_5$  e  $P'_6 \in \mathbb{P}^2$  valem as propriedades:

- a) Cada três desses seis pontos não estão contidos numa reta,
- b) Cada cinco desses seis pontos determinam unicamente uma cônica em  $\mathbb{P}^2$ ,
- c) Os seis pontos não estão contidos numa cônica. ■

Observamos que a afirmação acima é apenas uma tradução da afirmação análoga da seção anterior. Da mesma maneira, o teorema e a recíproca abaixo enunciados são também traduções dos seus análogos enunciados na seção anterior. O “dicionário” entre uma situação e outra é o mesmo que temos utilizado o tempo todo nesta seção:  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \supseteq \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 = \mathbb{A}^2 \subseteq \mathbb{P}^2$ .

**Teorema 4.III.2:** Ao implodirmos as seis retas  $A_2, B_2, C_{13}, C_{14}, C_{15}, C_{16}$  (disjuntas duas a duas) sobre a superfície cúbica não singular obtemos uma superfície isomorfa ao plano projetivo  $\mathbb{P}^2$ . ■

**Recíproca 4.III.3:** ([ht], pág 401) Seis pontos distintos em  $\mathbb{P}^2$  definem por meio de blow up uma superfície cúbica não singular em  $\mathbb{P}^3$ , desde que para esses pontos

valham as propriedades abaixo:

- i)** Cada 3 desses 6 pontos não estão sobre uma mesma reta,
- ii)** Os 6 pontos não estão contidos numa cônica. ■

Consequentemente, podemos de certa maneira substituir o estudo de superfícies cúbicas não singulares em  $\mathbb{P}^3$  pelo estudo dos conjuntos de 6 pontos em  $\mathbb{P}^2$  com as propriedades **i)** e **ii)** acima.

## Bibliografia:

- [bv] BEAUVILLE, A. *Complex Algebraic Surfaces*, Cambridge University Press, (1983).
- [ht] HARTSHORNE, R. *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, (1977).
- [he] HENDERSON, A. *The Twenty-Seven Lines Upon The Cubic Surface*, Hafner Publishing Co, (1911).
- [sm] SALMON, G. *A Treatise On The Analytic Geometry Of Three Dimensions, vol II*, Fifth Edition, Chelsea Publishing Company, (1914).
- [sh] SHAFAREVICH, I. *Basic Algebraic Geometry, vol 1*, Second Edition, Springer-Verlag, (1994).