



INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA  
PURA E APLICADA

**Volatilidade Estocástica Multiescala:  
Modelagem, Estimação e Aplicação  
com Preços da Petrobras.**

**Guillermo Esteban Gómez Machuca**

RIO DE JANEIRO - RJ

2010

INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA  
PURA E APLICADA

**Volatilidade Estocástica Multiescala:  
Modelagem, Estimação e Aplicação  
com Preços da Petrobras.**

Guillermo Esteban Gómez Machuca.

Tese orientada pelos Professores Dra. Beatriz Mendes e Dr. Jorge Passamani Zubelli e apresentada ao Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, como parte dos requisitos necessários para a conclusão do Mestrado Profissional de Métodos Matemáticos em Finanças.

IMPA - RJ

Maio - 2010

# Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me dado a força e a tranquilidade para terminar meu programa de estudo.

A toda minha família que sempre confiou em mim e me apoiou a distância. Em especial, aos meus pais Ana María e Rigoberto e também aos meus irmãos Darío, Horacio e Sebastian.

Também agradeço aos meus orientadores, Jorge Zubelli e Beatriz Mendes, por ter sugerido o tema e confiado em mim para desenvolvê-lo, além das ótimas conversas que contribuíram na compreensão da teoria e na implementação dos métodos.

Aos meus professores e orientadores de graduação por ter me guiado pelo caminho das Finanças e ter me ajudado a compreender a conexão que existe entre esta interessante área e a Matemática, em especial a Rafael Labarca, Eugenio Saavedra e Leonardo Luna.

Aos membros da banca por ter lido meu trabalho e pelas pertinentes sugestões. Em especial a Roberto Imbuzeiro que foi meu professor em varios cursos da área de Probabilidade e Max Oliveira por uma conversa chave que permitiu desenvolver o método do Variograma num contexto mais geral.

A Rodrigo Novinski e José Heleno Faro por terem sido meus professores em varios cursos e confiando em mim como monitor de algumas disciplinas do mestrado de Economía e do mestrado de Finanças. Ao meu orientador de Economía Aloísio Araújo por ter me permitido cursar as disciplinas de Finanças do mestrado profissional.

Aos meus amigos e colegas do mestrado profissional em especial a Diogo, Santiago e João Paulo pelas interessantes discussões sobre listas de exercícios, implementação de métodos e conceitos de Finanças.

Aos meus amigos do IMPA Ricardo, Daniel, Antônio, Cadu, Juan (peruano e chileno),

Cristiane, María José, Sebastian, Altemar, Carlos, Luz, Tiane, Susana, Rafael, Philips, Marcos, Alan, Lucas, Cristian, Maurício, Juan Pablo (peruano e colombiano), Alonso, Henrique, Guilherme, Guillermo, Roberto, Yuri, Cristian, Gerardo e também ao pessoal do futebol do IMPA com quem compartilhei discussões de exercícios, experiências de vida, subidas no Cristo e no Pão de Açúcar, corridas pela praia, conversas de futebol, jantares e cervejinhas.

Agradeço em especial a Yuri Saporito que me apresentou o método de Fourier para estimar a volatilidade e pelas ótimas discussões sobre a implementação do método.

Aos meus amigos de casa Júnior, Miguel, Orlando, João Paulo e Pedro pela convivência muito agradável e interessantes discussões do futebol brasileiro e internacional.

Aos meus alunos da monitoria de Métodos Matemáticos em Finanças pelo interesse na discussão dos exercícios e em especial a Daniel Tonholo por ter me fornecido os dados para desenvolver este trabalho.

A Júnior, Altemar, María José, Orlando, Daniel, João Paulo e Alan por me ajudar com as correções do português e dúvidas do  $\text{\LaTeX}$ .

Peço desculpas pela falha na retenção de alguns nomes que foram fundamentais na conclusão do mestrado e no desenvolvimento deste trabalho.

Rio de Janeiro, maio 2010

Guillermo Esteban Gómez Machuca

# Resumo

Este trabalho é desenvolvido usando um modelo de volatilidade estocástica proposto por Fouque, Papanicolau, Sircar & Solna (2003) que incorpora duas escalas diferentes para conduzir a volatilidade. A análise assintótica desenvolvida pelos autores requer condições que os parâmetros associados ao modelo devem cumprir. Fouque, Papanicolau & Sircar (2000) propõem um método de estimação não paramétrico para um modelo reduzido que considera apenas uma escala rápida.

Dado que neste trabalho estamos considerando um modelo mais geral, precisamos validar a hipótese de uma reversão numa escala longa. Para isto usamos o método desenvolvido por Fouque, Papanicolau & Sircar (2000). Além disso, introduzimos uma nova forma de estimação dos parâmetros que é muito mais difícil de implementar porque ela requer uma série que não é observada na realidade.

Para este propósito usamos o método de Fourier proposto por Malliavin & Mancino (2002). Depois estimamos os parâmetros usando o método de estimação paramétrica de Máxima Verossimilhança como foi proposto por Bibby & Sorensen (1995). Os dados utilizados são os preços da Petrobras negociados no mercado Americano em alta frequência para estimar uma escala rápida e também em frequência diária para estimar uma escala longa. Uma vez que confirmamos as suposições requeridas pelo modelo, usamos a análise assintótica para estimar uma aproximação da superfície de volatilidade implícita associada aos preços de opções de compra da Petrobras neste modelo com duas escalas. Por fim comparamos nossas aproximações com a superfície de volatilidade implícita obtida usando o método de Kahalé (2005).

**Palavras-chave:** Análise Multiescala. Volatilidade Estocástica. Estimação. Modelagem em Finanças. Calibragem. Métodos Matemáticos em Finanças.

# Abstract

This work is developed using a stochastic volatility model proposed by Fouque, Papanicolau, Sircar & Solna (2003) that incorporates two different scales to drive the volatility. The asymptotic analysis developed by the authors needs certain conditions the parameters associated to the model must satisfy. Fouque, Papanicolau & Sircar (2000) proposed a non-parametric estimation method for the simplified model that considers only a fast scale.

Given that in this work we are considering a more general model, we need to validate the hypotheses of a reversal on a large scale. This is why we use the method developed by Fouque, Papanicolau & Sircar (2000). Moreover, we describe a new form to estimate the parameters which is more difficult to implement because it needs a data series that is not observed in the market.

With this in mind we use the Fourier method proposed by Malliavin & Mancino (2002). Then, we estimate the parameters using the parametric estimation method of Maximum Likelihood proposed by Bibby & Sorensen (1995). The data used are Petrobras prices traded on the American market in high frequency to estimate a fast scale and also on a daily basis to estimate a long scale.

Once the necessary suppositions for the model are confirmed, we use an asymptotic analysis to estimate an approximation of the implied volatility surface associated to the call option prices of Petrobras in this model with two scales. Finally, we compare our approximations with the implied volatility surface obtained using the Kahalé method (2005).

**Keywords:** Multiscale Analysis. Stochastic Volatility. Estimation. Finance Modeling. Mathematic Method in Finance.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Ferramentas Matemáticas</b>	<b>3</b>
1.1 Movimento Browniano e Martingal . . . . .	3
1.2 A Integral de Itô . . . . .	4
1.3 A Fórmula de Itô . . . . .	6
1.4 O Teorema de Girsanov . . . . .	8
1.5 O Teorema de representação de Feynman-Kac . . . . .	9
1.6 A Fórmula clássica de Black & Scholes . . . . .	11
1.7 A Volatilidade Implícita . . . . .	12
<b>2 Estimação</b>	<b>14</b>
2.1 O Modelo de Volatilidade Estocástica . . . . .	14
2.2 O Método do Variograma . . . . .	15
2.3 Volatilidade Instantânea Oculta nos Preços . . . . .	22
2.4 O Método de Máxima Verossimilhança . . . . .	35
2.4.1 Aproximação em Tempo Discreto . . . . .	36
2.4.2 Aproximação em Tempo Contínuo . . . . .	40
2.5 Resultados usando Preços da Petrobras . . . . .	43
<b>3 Modelo de Volatilidade Estocástica Multiescala Assintótico</b>	<b>52</b>
3.1 O Modelo Multiescala . . . . .	52
3.2 Aproximação do Preço de um Contrato . . . . .	58

3.3	Superfície de Volatilidade Implícita Aproximada . . . . .	68
3.4	Calibração dos Parâmetros . . . . .	71
3.5	Calibração da Superfície de Volatilidade usando Preços da Petrobras . . . . .	72
<b>4</b>	<b>Interpolação da Superfície de Volatilidade Implícita usando o Método de Kahalé</b>	<b>80</b>
4.1	Método de Interpolação . . . . .	81
4.2	Interpolação da Curva de preços livres de arbitragem . . . . .	85
4.3	Interpolação da Superfície de Volatilidade . . . . .	86
4.4	Comparação da Superfície de Volatilidade usando Preços da Petrobras . . . . .	87
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>93</b>

# Introdução

Como sabemos o modelo clássico de Black & Scholes descreve a evolução dos preços de um derivativo considerando uma volatilidade constante. Porém esta hipótese está muito longe da realidade como foi confirmado empiricamente por muitos autores [1]. De acordo com as suposições feitas por Black & Scholes, a volatilidade implícita seria constante, mas como sabemos a volatilidade implícita de fato tem a forma de *smile*. Como o modelo clássico de Black & Scholes não consegue incorporar este fato é necessário especificar novos modelos que levem em conta uma volatilidade não constante e possivelmente incorporar uma componente estocástica na volatilidade. Um dos novos modelos que cumpre estes dois objetivos é o modelo desenvolvido por Fouque, Papanicolau & Sircar em [2].

Este modelo considera que a evolução dos preços segue uma equação parecida ao modelo clássico de Black & Scholes, mas acrescenta uma componente estocástica na volatilidade. Mais especificamente, a volatilidade é descrita por um modelo de reversão rápida à média. O modelo de Fouque et.al consegue algumas características desejadas como o efeito *smile* e o *skewness*. Porém incorporar mais uma equação estocástica para modelar a volatilidade torna o modelo muito complicado. Por exemplo, neste caso não temos uma fórmula fechada para uma opção de compra como no modelo clássico de Black & Scholes.

Uma forma de enfrentar este problema foi proposta por Fouque, Papanicolau & Sircar [2] através de uma análise assintótica para encontrar uma aproximação do preço de uma opção de compra ou outro derivativo num modelo com uma escala rápida controlando a volatilidade. Esta aproximação é válida supondo algumas condições sobre os parâmetros do modelo [2].

No ano 2000 Fouque, Papanicolau & Sircar [2] mostraram evidência de uma rápida reversão à média do processo conduzindo a volatilidade usando dados do S&P 500. No ano 2008 Machado [3], mostrou evidência de uma rápida reversão usando dados do Ibovespa

no mercado Brasileiro.

Em 2003 Fouque, Papanicolau, Sircar & Solna [4] desenvolveram um modelo mais geral que o considerado anteriormente usando duas escalas para conduzir a volatilidade, uma escala rápida e uma escala longa. Nesse trabalho eles conseguiram, supondo algumas restrições sobre os parâmetros do modelo, uma fórmula aproximada para apreçar derivativos. Além disso, propuseram uma fórmula que aproxima a superfície de volatilidade implícita presente no mercado.

O presente trabalho está focado neste último modelo e pretende, usando dados da Petrobras, estimar de forma consistente os parâmetros presentes no modelo para garantir que a aproximação da superfície de volatilidade implícita proposta seja válida.

A idéia em relação a esta última parte é comparar nossa aproximação com a aproximação proposta por Kahalé [5], como foi feito por Machado [3] no ano 2008.

# Capítulo 1

## Ferramentas Matemáticas

Este capítulo apresentará uma série de ferramentas matemáticas que serão usadas para provar os resultados dos capítulos posteriores. A maioria das demonstrações dos resultados deste capítulo não serão apresentadas, mas daremos referências onde podem ser encontradas.

### 1.1 Movimento Browniano e Martingal

Seja  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  um espaço de probabilidades, isto é,  $\Omega$  é um espaço amostral,  $\mathcal{F}$  uma  $\sigma$ -álgebra, e  $\mathbb{P}$  uma medida de probabilidade definida sobre  $\mathcal{F}$ .

**Definição 1.1.** *Uma filtração é uma família de sub- $\sigma$ -álgebras  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$  de  $\mathcal{F}$ , onde  $I$  é um conjunto ordenado e tal que  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$  para  $s < t$ ,  $s, t \in I$ .*

**Definição 1.2.** *Um processo estocástico  $\{X_t\}_{t \in I}$  associado à filtração  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$  é uma família de variáveis aleatórias com valores em  $\mathbb{R}^n$  tal que cada  $X_t$  é  $\mathcal{F}_t$ -mensurável.*

**Definição 1.3.** *Um processo estocástico  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  com trajetórias contínuas e satisfazendo*

*i)  $W_0 = 0$   $\mathbb{P}$ -q.c.*

*ii)  $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$  para  $0 \leq s \leq t$ , Incrementos Estacionários,*

*iii)  $W_t - W_s$  independente de  $W_u - W_r$  para  $0 \leq r \leq u \leq s < t$ , Incrementos Independentes,*

*é chamado um Movimento Browniano unidimensional.*

**Definição 1.4.** Um Movimento Browniano  $d$ -dimensional é um processo estocástico com valores em  $\mathbb{R}^d$ ,  $\mathbf{W}(t) = (W_1(t), W_2(t), \dots, W_d(t))$ , tal que cada componente é um Movimento Browniano unidimensional e  $W_i$  é independente de  $W_j$  se  $i \neq j$ .

**Definição 1.5.** Um processo estocástico  $\{X_t, \mathcal{F}_t\}_{t \in I}$  com  $\mathbb{E}|X_t| < \infty$  para  $t \in I$ , onde  $I$  é um conjunto ordenado é chamado um martingal se  $\forall s \leq t$

$$\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s \quad (1.1)$$

**Teorema 1.6.** O Movimento Browniano  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  é um martingal.

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [6].

**Definição 1.7.** Dado o processo estocástico  $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$  definimos a variação quadrática  $\langle X \rangle_t$  como

$$\langle X \rangle_t = \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})^2 \quad (1.2)$$

onde  $\Pi = \{0 = t_0^n < \dots < t_n^n = T\}$ .

**Definição 1.8.** Dados dois processos estocásticos  $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$  e  $\{Y_t\}_{t \in [0, T]}$  definimos a variação cruzada  $\langle X, Y \rangle_t$  como

$$\langle X, Y \rangle_t = \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})(Y_{t_i^n} - Y_{t_{i-1}^n}) \quad (1.3)$$

onde  $\Pi = \{0 = t_0^n < \dots < t_n^n = T\}$ .

## 1.2 A Integral de Itô

**Definição 1.9.** Um processo estocástico  $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$  é chamado um processo simples se existem números reais  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p = T$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , e variáveis aleatórias  $\Phi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, p$  com  $\Phi_0$  -  $\mathcal{F}_0$  mensurável e  $\Phi_i$  -  $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$  mensurável tal que tem-se a seguinte representação

$$X_t(\omega) = \Phi_0(\omega)1_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^p \Phi_i(\omega)1_{(t_{i-1}, t_i]}(t) \quad (1.4)$$

para cada  $\omega \in \Omega$ .

**Definição 1.10.** Para um processo simples  $\mathbf{X} = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$  a integral estocástica  $I(\mathbf{X})$  para  $t \in [0, T]$  é dada por

$$I_t(\mathbf{X}) := \int_0^t X_s dW_s := \sum_{1 \leq i \leq n} \Phi_i(W_{t_i \wedge t} - W_{t_{i-1} \wedge t}) \quad (1.5)$$

onde  $u \wedge t = \min\{u, t\}$ .

**Definição 1.11.** Um processo estocástico  $\{X_t, \mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$  é dito progressivamente mensurável se  $\forall t \geq 0$  a função

$$\begin{aligned} [0, T] \times \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (s, \omega) &\longrightarrow X_s(\omega) \end{aligned} \quad (1.6)$$

é  $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$  mensurável.

**Definição 1.12.** Definimos o espaço  $L^2[0, T]$  como o conjunto dos processos estocásticos  $\{X_t, \mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$  tais que  $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$  é progressivamente mensurável e

$$\mathbb{E} \left( \int_0^T X_t^2 dt \right) < \infty \quad (1.7)$$

Definimos ainda a norma de  $\mathbf{X} = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$  em  $L^2[0, T]$  como o valor finito dado em (1.7) e denotamos este número por  $\|\mathbf{X}\|_{L^2[0, T]}^2$ .

**Teorema 1.13.** Um processo estocástico arbitrário  $\mathbf{X} \in L^2[0, T]$  pode ser aproximado por uma sequência de processos simples  $\mathbf{X}^{(n)}$ . De forma mais precisa, existe uma sequência  $\mathbf{X}^{(n)}$  de processos simples com

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \int_0^T (X_s - X_s^{(n)})^2 ds = 0 \quad (1.8)$$

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [6].

**Teorema 1.14.** Existe uma única aplicação linear  $J$  definida em  $L^2[0, T]$  e com valores no espaço dos martingais contínuos definidas em  $[0, T]$  com respeito a  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$  satisfazendo as seguintes condições:

- Se  $\mathbf{X} = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$  é um processo simples então  $\mathbb{P}(J_t(\mathbf{X}) = I_t(\mathbf{X}), \forall t \in [0, T]) = 1$

- Vale a isometria de Itô

$$\mathbb{E}(J_t(\mathbf{X})^2) = \mathbb{E}\left(\int_0^t X_s^2 ds\right) \quad (1.9)$$

Esta aplicação linear é única no sentido que se duas aplicações  $J$  e  $J'$  satisfazem as condições anteriores então para todo  $\mathbf{X} \in L^2[0, T]$  os processos  $J'(\mathbf{X})$  e  $J(\mathbf{X})$  são iguais com probabilidade 1.

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [6].

**Definição 1.15.** Para  $\mathbf{X} \in L^2[0, T]$  e  $J$  como no teorema anterior, definimos a integral estocástica do processo  $\mathbf{X}$  com respeito a  $\{W_t\}_{t \in [0, T]}$  como sendo

$$\int_0^t X_s dW_s := J_t(\mathbf{X}) \quad (1.10)$$

**Teorema 1.16.** Para qualquer  $\mathbf{X} \in L^2[0, T]$  a integral de Itô

$$\int_0^t X_s dW_s \quad (1.11)$$

é um  $\mathcal{F}_t$ -martingal em  $[0, T]$ . Em particular, a integral dada em (1.10) tem esperança zero.

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [6].

### 1.3 A Fórmula de Itô

**Definição 1.17.** Seja  $\{\mathbf{W}(t), \mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  um Movimento Browniano  $m$ -dimensional,  $m \in \mathbb{N}$ .  $\{X(t), \mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  é chamado um processo de Itô se  $\forall t \geq 0$ ,  $X(t)$  pode ser representado como

$$X(t) = X(0) + \int_0^t K(s) ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t H_j(s) dW_j(s) \quad \mathbb{P} - q.c \quad (1.12)$$

Onde  $\{K(t)\}_{t \geq 0}$  e  $\{\mathbf{H}(t)\}_{t \geq 0}$  são processos progressivamente mensuráveis e satisfazem

$$\begin{aligned} \int_0^t |K(s)| ds &< \infty \\ \int_0^t H_i^2(s) ds &< \infty \quad \mathbb{P} - q.c \end{aligned} \quad (1.13)$$

$\forall t \geq 0, i = 1, \dots, m.$

Além disso, um processo de Itô  $d$ -dimensional  $\mathbf{X} = (X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(d)})$  consiste de um vetor tal que cada componente é um processo de Itô a valores reais.

**Definição 1.18.** Sejam  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  dois processos de Itô a valores reais com representação

$$\begin{aligned} X(t) &= X(0) + \int_0^t K(s)ds + \int_0^t \mathbf{H}(s)d\mathbf{W}(s) \\ Y(t) &= Y(0) + \int_0^t L(s)ds + \int_0^t \mathbf{M}(s)d\mathbf{W}(s) \end{aligned}$$

Então,

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{j=1}^m \int_0^t H_j(s)M_j(s)ds \quad (1.14)$$

**Teorema 1.19.** Seja  $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_d(t))$  um processo de Itô  $d$ -dimensional com

$$X_i(t) = X_i(0) + \int_0^t K_i(s)ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t H_{ij}(s)dW_j(s) \quad (1.15)$$

$i = 1, 2, \dots, d.$

onde  $\mathbf{W}(t) = (W_1(t), W_2(t), \dots, W_m(t))$  é um Movimento Browniano  $m$ -dimensional. Considere  $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $C^{1,2}$ , i.e,  $f$  é contínua, continuamente diferenciável com respeito a  $t$  e duas vezes continuamente diferenciável com respeito as últimas  $d$ -variáveis. Então,

$$\begin{aligned} f(t, X_1(t), \dots, X_d(t)) &= f(0, X_1(0), \dots, X_d(0)) + \int_0^t f_t(s, X_1(s), \dots, X_d(s))ds \\ &+ \sum_{i=1}^d \int_0^t f_{x_i}(s, X_1(s), \dots, X_d(s))dX_i(s) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_0^t f_{x_i x_j}(s, X_1(s), \dots, X_d(s))d\langle X_i, X_j \rangle_s \end{aligned} \quad (1.16)$$

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [6].

**Corolário 1.20.** *Seja  $f \in C^1[0, T]$  e seja  $X$  um processo de Itô. Então,*

$$\int_0^t f(s) dX_s = f(t)X_t - f(0)X_0 - \int_0^t X_s f'(s) ds \quad (1.17)$$

A demonstração é uma simples aplicação do teorema anterior.

## 1.4 O Teorema de Girsanov

Seja  $\{\mathbf{X}(t), \mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  um processo  $m$ -dimensional progressivamente mensurável, e considere  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  a filtração browniana com

$$\int_0^t X_i^2(s) ds < \infty \quad \mathbb{P} - q.c \quad (1.18)$$

$\forall t \geq 0$  e  $i = 1, \dots, m$ .

Considere ainda

$$Z(t, \mathbf{X}) := \exp \left( - \sum_{i=1}^m \int_0^t X_i(s) dW_i(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \|\mathbf{X}(s)\|^2 ds \right) \quad (1.19)$$

Em geral,  $Z(t, \mathbf{X})$  não é um martingal. Mas se ele for um martingal teríamos em particular que  $\mathbb{E}[Z(t, \mathbf{X})] = 1, \forall t \geq 0$ . Consideremos inicialmente que  $Z(t, \mathbf{X})$  é um martingal, posteriormente daremos condições para que isso aconteça. Supondo a condição anterior podemos definir uma nova medida de probabilidade  $\mathbb{Q}_T$  sobre  $\mathcal{F}_T$  da seguinte forma

$$\mathbb{Q}_T(A) := \mathbb{E}[1_A \cdot Z(t, \mathbf{X})] \quad \forall A \in \mathcal{F}_T \quad (1.20)$$

**Teorema 1.21.** *Suponha que  $Z(t, \mathbf{X})$  seja um martingal e defina  $\{(W^{\mathbb{Q}}(t), \mathcal{F}_t)\}_{t \geq 0}$  como*

$$W_i^{\mathbb{Q}}(t) := W_i(t) + \int_0^t X_i(s) ds \quad 1 \leq i \leq m \quad (1.21)$$

$t \geq 0$ .

Então, para cada  $T \in [0, \infty)$  o processo  $\{\mathbf{W}^{\mathbb{Q}}(t), \mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$  é um Movimento Browniano  $m$ -dimensional definido em  $(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{Q}_T)$  onde a medida de probabilidade  $\mathbb{Q}_T$  é definida em (1.20)

A demonstraç o deste resultado pode ser encontrada em [6].

Para aplicar o Teorema de Girsanov, devemos ter alguma condi o que garanta que  $Z(t, \mathbf{X})$  seja um martingal.

**Teorema 1.22.** *Uma condi o suficiente para que  $Z(t, \mathbf{X})$  seja um martingal   que*

$$\mathbb{E} \left( \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^t \|\mathbf{X}(s)\|^2 ds \right\} \right) < \infty \quad (1.22)$$

A demonstraç o deste resultado pode ser encontrada em [7].

## 1.5 O Teorema de representa o de Feynman-Kac

**Defini o 1.23.** *Se sobre  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  existe um processo cont nuo  $d$ -dimensional  $\{\mathbf{X}(t), \mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  com*

$$X_i(t) = x_i + \int_0^t b_i(s, \mathbf{X}(s)) ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{ij}(s, \mathbf{X}(s)) dW_j(s) \quad \mathbb{P} - q.c \quad (1.23)$$

*satisfazendo*

$$\int_0^t \left( |b_i(s, \mathbf{X}(s))| + \sum_{j=1}^m \sigma_{ij}^2(s, \mathbf{X}(s)) \right) ds < \infty \quad \mathbb{P} - q.c \quad (1.24)$$

$\forall t \geq 0, i = 1, 2, \dots, d.$

*Ent o,  $\mathbf{X}(t)$    chamado uma solu o forte da equa o diferencial estoc stica*

$$\begin{aligned} d\mathbf{X}(t) &= b(t, \mathbf{X}(t))dt + \sigma(t, \mathbf{X}(t))d\mathbf{W}(t) \\ X(0) &= (x_1, x_2, \dots, x_d) \end{aligned} \quad (1.25)$$

*onde  $b : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$  e  $\sigma : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^{d,m}$  s o fun es dadas.*

**Teorema 1.24.** *Sejam os coeficientes  $b(t, x)$  e  $\sigma(t, x)$  da equa o diferencial estoc stica (1.25) fun es cont nuas satisfazendo*

$$\begin{aligned} \|b(t, x) - b(t, y)\| + \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\| &\leq K\|x - y\| \\ \|b(t, x)\|^2 + \|\sigma(t, x)\|^2 &\leq K^2(1 + \|x\|^2) \end{aligned} \quad (1.26)$$

$\forall t \geq 0, x, y \in \mathbb{R}^d$  e  $K > 0$ . Então, existe uma solução forte de (1.25) satisfazendo

$$\mathbb{E}(\|\mathbf{X}(t)\|^2) \leq C(1 + \|x\|^2) \exp(CT) \quad \forall t \in [0, T] \quad (1.27)$$

para alguma constante  $C = C(K, T)$  e  $T > 0$ . Ainda mais,  $\mathbf{X}(t)$  é único a menos de um conjunto de medida nula.

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [6].

**Definição 1.25.** Seja  $\mathbf{X}(t)$  a única solução da equação diferencial estocástica (1.25) assumindo a condição (1.26). Para  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ , definimos o operador característico associado a  $\mathbf{X}(t)$  por

$$(A_t f)(x) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^d a_{ik}(t, x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(x) + \sum_{i=1}^d b_i(t, x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \quad (1.28)$$

onde

$$a_{ik}(t, x) := \sum_{j=1}^m \sigma_{ij}(t, x) \sigma_{kj}(t, x)$$

Consideremos o seguinte problema de Cauchy associado ao operador característico  $A_t$  definido em (1.28):

Para  $T > 0$  fixo, devemos encontrar uma função  $v(t, x) : [0, T] \times \mathbb{R}^d$  satisfazendo

$$\begin{aligned} -v_t + kv &= A_t v + g & (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d \\ v(T, x) &= f(x) & x \in \mathbb{R}^d \end{aligned} \quad (1.29)$$

onde  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  e  $k : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ .

Para estabelecer a unicidade precisamos que

$$\max_{0 \leq t \leq T} |v(t, x)| \leq L(1 + \|x\|^{2\mu}) \quad M > 0, \mu \geq 1 \quad (1.30)$$

Supomos ainda que

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq L(1 + \|x\|^{2\lambda}) & L > 0, \lambda \geq 1 & \text{ ou } f(x) \geq 0 \\ |g(t, x)| &\leq L(1 + \|x\|^{2\lambda}) & L > 0, \lambda \geq 1 & \text{ ou } g(t, x) \geq 0 \end{aligned} \quad (1.31)$$

**Teorema 1.26.** *Supondo a condição (1.31) válida. Seja  $v(t, x) : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  uma solução do problema de Cauchy (1.29) com  $v \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^d)$ . Se  $v(t, x)$  satisfaz a condição (1.30) então temos a seguinte representação*

$$v(t, x) = \mathbb{E}^{t,x} \left( f(\mathbf{X}(T)) \exp \left( - \int_t^T k(\theta, \mathbf{X}(\theta)) d\theta \right) + \int_t^T g(s, \mathbf{X}(s)) \exp \left( - \int_t^s k(\theta, \mathbf{X}(\theta)) d\theta \right) ds \right)$$

onde  $\mathbb{E}^{t,x}$  denota  $\mathbb{E}(\cdot / \mathbf{X}(t) = x)$ .

Ainda mais,  $v(t, x)$  dada acima é a única solução de (1.29) que satisfaz (1.30).

## 1.6 A Fórmula clássica de Black & Scholes

Nesta seção apresentaremos a fórmula encontrada por Black & Scholes [8] para apreçar um derivativo europeu conhecido como opção de compra. Uma opção de compra é um contrato que outorga ao seu detentor o direito, mas não a obrigação de comprar um ativo por um preço previamente fixado e em uma data especificada. O valor intrínseco de uma opção de compra é  $f(X_T) = (X_T - K)^+$  onde  $T$  é o tempo de vencimento especificado no contrato.

Em [8] os autores encontraram uma fórmula para apreçar uma opção de compra usando um portfólio replicante. Esta fórmula também pode ser deduzida usando o teorema de Girsanov conjuntamente com a representação de Feynman-Kac [6].

**Teorema 1.27.** *O preço de uma opção de compra no instante  $t$  com preço de exercício  $K$  e tempo de vencimento  $T$ ,  $t < T$ , é dada por*

$$C_{BS}(t, S, T, K, \sigma) = S\Phi(d_1(t)) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2(t)) \quad (1.32)$$

onde

$$\begin{aligned} d_1(t) &= \frac{\log(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ d_2(t) &= d_1(t) - \sigma\sqrt{T-t} \end{aligned}$$

onde  $\Phi(\cdot)$  denota a função de distribuição de uma variável aleatória normal padrão,  $S$  representa o preço atual do ativo,  $r$  a taxa de juros e  $\sigma$  a volatilidade.

Usando a representação de Feynman-Kac é fácil ver que o problema de Cauchy associado neste caso é dado por  $\mathcal{L}_{BS}(\sigma) = 0$  onde

$$\mathcal{L}_{BS}(\sigma) := \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + r \left( x \frac{\partial}{\partial x} - \cdot \right)$$

A seguir apresentamos um resultado que será usado nos Capítulo 3.

**Proposição 1.28.** *O operador de Black and Scholes definido em (1.33) comuta com  $x^n \frac{\partial^n}{\partial x^n}$  para  $n \in \mathbb{N}$ , isto é,*

$$\mathcal{L}_{BS}(\sigma) \left( x^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} \right) = x^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} \mathcal{L}_{BS}(\sigma) \quad (1.33)$$

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [3].

## 1.7 A Volatilidade Implícita

Nesta seção introduziremos o conceito de volatilidade implícita e provaremos sua existência e unicidade. Este resultado será usado nos Capítulos 3 e 4.

**Definição 1.29.** *Seja  $C_t(T, K)$  o preço do mercado de uma opção de compra no instante  $t$ . A volatilidade implícita é o número  $\sigma_{imp}(T-t, K)$  que satisfaz*

$$C_t(T, K) = C_{BS}(S_t, T-t, K, r, \sigma_{imp}(T-t, K)) \quad (1.34)$$

**Teorema 1.30.** *Suponha que os preços  $C_t(T, K)$  são livres de arbitragem para todo  $T$  e  $K$  positivos e  $0 \leq t \leq T$ , então as volatilidades implícitas  $\sigma_{imp}(T-t, K)$  existem e são únicas.*

**Demonstração:** A demonstração segue como consequência de três resultados diretos obtidos de (1.32).

Calculando primeiro a derivada de  $C_{BS}$  com respeito a  $\sigma$

$$\frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma} = S_t \sqrt{T-t} \Phi'(d_1(t)) > 0$$

A fórmula anterior garante que o preço de Black & Scholes de uma opção de compra é uma função estritamente crescente com respeito à volatilidade.

Calculando os limites extremos,

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \rightarrow \infty} C_{BS}(S_t, T-t, K, r, \sigma) &= S_t \\ \lim_{\sigma \rightarrow 0} C_{BS}(S_t, T-t, K, r, \sigma) &= (S_t - Ke^{-r(T-t)})^+ \end{aligned}$$

Isto garante que  $(S_t - Ke^{-r(T-t)})^+ \leq C_{BS}(S_t, T-t, K, r, \sigma) \leq S_t$ .

Agora considere a estratégia de comprar o ativo e vender a opção  $C(T, K)$ . No instante  $t$  esta estratégia tem o valor  $\Pi_t = S_t - C_t(T, K)$ . No instante  $T$  o valor da estratégia é  $\Pi_T = S_T - C_T(T, K) = S_T - (S_T - K)^+ = \min\{S_T, K\}$ . Assim,  $0 \leq \Pi_T \leq K$ , e logo por argumentos de não arbitragem  $0 \leq \Pi_t \leq Ke^{-r(T-t)}$ , e portanto

$$(S_t - Ke^{-r(T-t)})^+ \leq C_t(T, K) \leq S_t$$

Agora usando que  $C_{BS}(S_t, T-t, K, r, \sigma)$  é uma função estritamente crescente concluímos a demonstração. ■

# Capítulo 2

## Estimação

### 2.1 O Modelo de Volatilidade Estocástica

Este Capítulo descreve seguindo [4] o modelo que usaremos no resto do trabalho e propõe várias formas de estimação dos parâmetros associados junto com uma aplicação usando dados reais.

O modelo considerado é dado por:

$$\begin{aligned}dX_t &= \mu X_t dt + f(Y_t, Z_t) X_t dW_t^{(0)} \\dY_t &= \left\{ \frac{m - Y_t}{\epsilon} \right\} dt + \frac{\nu \sqrt{2}}{\sqrt{\epsilon}} dW_t^{(1)} \\dZ_t &= \delta c(Z_t) dt + \sqrt{\delta} g(Z_t) dW_t^{(2)}\end{aligned}\tag{2.1}$$

Neste caso temos que  $(W_t^{(0)}, W_t^{(1)}, W_t^{(2)})$  é um Movimento Browniano tridimensional correlacionado, que pode ser representado em termos de um Movimento Browniano não correlacionado como segue:

$$\begin{aligned}dW_t^{(0)} &= d\tilde{W}_t^{(0)} \\dW_t^{(1)} &= \rho_1 d\tilde{W}_t^{(0)} + \sqrt{1 - \rho_1^2} d\tilde{W}_t^{(1)} \\dW_t^{(2)} &= \rho_2 d\tilde{W}_t^{(0)} + \tilde{\rho}_{1,2} d\tilde{W}_t^{(1)} + \sqrt{1 - \rho_2^2 - \tilde{\rho}_{1,2}^2} d\tilde{W}_t^{(2)}\end{aligned}\tag{2.2}$$

Aqui  $(\tilde{W}_t^{(0)}, \tilde{W}_t^{(1)}, \tilde{W}_t^{(2)})$  representa um Movimento Browniano tridimensional padrão.

O processo  $X_t$  modela o preço do ativo,  $Y_t$  e  $Z_t$  modelam as componentes da volatilidade instantânea  $f(Y_t, Z_t)$ , a primeira com respeito a uma rápida reversão à média e a segunda com respeito à uma reversão mais lenta. Neste contexto,  $\{\mu, m, \epsilon, \nu\}$  são os parâmetros a serem estimados dadas as correlações  $\{\rho_1, \rho_2, \tilde{\rho}_{1,2}\}$  que existem entre os processos  $\{X_t, Y_t, Z_t\}$ .

Para que haja separação de escalas vamos requerer que:

$$\delta \ll \frac{1}{\epsilon} \quad (2.3)$$

## 2.2 O Método do Variograma

Foi proposto por Fouque et.al em [2] o uso do Variograma para estimar o parâmetro  $\alpha$  associado à reversão rápida à média no modelo com apenas uma escala rápida. Nesta tese queremos ir um pouco além, considerando um segundo processo que modela uma escala mais longa na volatilidade, e logo devemos considerar um método que generalize o Variograma para o caso em questão.

Para este propósito consideramos uma reversão à média na escala longa que modela a volatilidade. Desta forma o modelo (2.1) assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu X_t dt + f(Y_t, Z_t) X_t dW_t^{(0)} \\ dY_t &= \alpha(m_Y - Y_t) dt + \nu_Y \sqrt{2\alpha} dW_t^{(1)} \\ dZ_t &= \delta(m_Z - Z_t) dt + \nu_Z \sqrt{2\delta} dW_t^{(2)} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Onde denotamos  $\alpha = 1/\epsilon$ . Estaremos considerando inicialmente apenas a correlação existente entre os processos  $Y_t$  e  $Z_t$ , e suporemos que a correlação existente entre os processos que modelam a volatilidade e os preços é zero. Esta suposição foi sugerida por Fouque et.al em [2] onde os autores mostraram que essa correlação não influencia na estimação dos parâmetros.

Consideramos  $\bar{X}_n$  como a  $n$ -ésima média do preço do ativo em frequência de 1 minuto ocorrendo dentro de um intervalo de 5 minutos, correspondente ao tempo  $t_n = n\Delta t$ ,

$\Delta t = 5$  minutos, durante um período de 8 meses para modelar a reversão rápida à média, e logo como a  $n$ -ésima média do preço do ativo em frequência diária ocorrendo dentro de um intervalo de uma semana para um horizonte de 9 anos com o objetivo de modelar a escala longa presente na volatilidade.

Isto é, consideraremos  $\Delta$  em frequência de 5 minutos e logo em frequência de 1 semana. Desta forma seguindo o texto de Fouque et.al [2] podemos considerar as flutuações normalizadas associadas aos dados definidas como

$$\bar{D}_n = \frac{2(\bar{X}_n - \bar{X}_{n-1})}{\sqrt{\Delta}(\bar{X}_n + \bar{X}_{n-1})} \quad (2.5)$$

Olhando para o análogo das flutuações normalizadas em tempo contínuo temos

$$\frac{\Delta X_t}{\sqrt{\Delta} X_t} = f(Y_t, Z_t) \frac{\Delta W_t}{\sqrt{\Delta}} + \mu \sqrt{\Delta} \quad (2.6)$$

O termo  $\mu \sqrt{\Delta}$  pode ser eliminado já que é um termo muito pequeno.

Logo em nosso modelo temos a seguinte relação

$$\bar{D}_n = f(\bar{Y}_n, \bar{Z}_n) \epsilon_n \quad (2.7)$$

onde  $\{\epsilon_n\}_{n \geq 1}$  é uma sequência de variáveis aleatórias IID normais padrão.

Para obter uma fórmula parecida a obtida em [2] faremos a seguinte suposição,  $f(y, z) = f_1(y)f_2(z)$ . Esta forma funcional foi proposta em [9] no caso em que a correlação entre as componentes da volatilidade instantânea é zero. Daí, podemos definir o logaritmo do valor absoluto das flutuações normalizadas como

$$L_n = \log |\bar{D}_n| = \log(f_1(\bar{Y}_n)) + \log(f_2(\bar{Z}_n)) + \log(|\epsilon_n|) \quad (2.8)$$

Suponhamos que temos uma observação empírica de  $\{L_n\}_{n \geq 1}$  e consideremos

$$V_j^N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (L_{n+j} - L_n)^2 \quad (2.9)$$

onde  $j$  denota o *lag* e  $N$  o número total de pontos.

A seguir vamos estudar as propriedades deste estimador.

**Lema 2.1.** *Seja  $s < t$ , então temos*

$$\mathbb{E}[(Y_t - \mathbb{E}[Y_t])(Y_s - \mathbb{E}[Y_s])] = \nu_Y^2 e^{-\alpha(t-s)}(1 - e^{-2\alpha s}) \quad (2.10)$$

e

$$\mathbb{E}[(Z_t - \mathbb{E}[Z_t])(Z_s - \mathbb{E}[Z_s])] = \nu_Z^2 e^{-\delta(t-s)}(1 - e^{-2\delta s}) \quad (2.11)$$

**Demonstração:**

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(Y_t - \mathbb{E}[Y_t])(Y_s - \mathbb{E}[Y_s])] &= \mathbb{E} \left\{ \left( \nu_Y \sqrt{2\alpha} \int_0^t e^{-\alpha(t-u)} dW_u^{(1)} \right) \left( \nu_Y \sqrt{2\alpha} \int_0^s e^{-\alpha(s-u)} dW_u^{(1)} \right) \right\} \\ &= 2\alpha \nu_Y^2 e^{-\alpha(t+s)} \mathbb{E} \left\{ \left( \int_0^t e^{\alpha u} dW_u^{(1)} \right) \left( \int_0^s e^{\alpha u} dW_u^{(1)} \right) \right\} \\ &= 2\alpha \nu_Y^2 e^{-\alpha(t+s)} \mathbb{E} \left\{ \left( \int_0^s e^{\alpha u} dW_u^{(1)} \right) \left( \int_0^s e^{\alpha u} dW_u^{(1)} \right) \right\} \\ &+ 2\alpha \nu_Y^2 e^{-\alpha(t+s)} \mathbb{E} \left\{ \left( \int_s^t e^{\alpha u} dW_u^{(1)} \right) \left( \int_0^s e^{\alpha u} dW_u^{(1)} \right) \right\} \\ &= 2\alpha \nu_Y^2 e^{-\alpha(t+s)} \mathbb{E} \left\{ \left( \int_0^s e^{\alpha u} dW_u^{(1)} \right) \left( \int_0^s e^{\alpha u} dW_u^{(1)} \right) \right\} \\ &= 2\alpha \nu_Y^2 e^{-\alpha(t+s)} \mathbb{E} \left\{ \left( \int_0^s e^{\alpha u} dW_u^{(1)} \right)^2 \right\} \\ &= 2\alpha \nu_Y^2 e^{-\alpha(t+s)} \mathbb{E} \left\{ \int_0^s e^{2\alpha u} du \right\} \\ &= \nu_Y^2 e^{-\alpha(t+s)} (e^{2\alpha s} - 1) \\ &= \nu_Y^2 e^{-\alpha(t-s)} (1 - e^{-2\alpha s}) \end{aligned}$$

■

Deste lema podemos concluir seguindo [2] que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \{ \log f_1(\bar{Y}_j) \log f_1(\bar{Y}_0) \} &\approx \nu_Y^2 e^{-\alpha j \Delta} \\ \mathbb{E} \{ \log f_1(\bar{Y})^2 \} &\approx \nu_Y^2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Analogamente temos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{\log f_2(\bar{Z}_j) \log f_2(\bar{Z}_0)\} &\approx \nu_Z^2 e^{-\delta j \Delta} \\ \mathbb{E}\{\log f_2(\bar{Z})^2\} &\approx \nu_Z^2\end{aligned}\quad (2.13)$$

onde  $\bar{Y}$  e  $\bar{Z}$  denotam as distribuições assintóticas dos processos de Ornstein-Uhlenbeck [2].

**Lema 2.2.** *Para o modelo (2.4) vale*

Se  $s < t$ ,

$$\mathbb{E}\{[Y_t - \mathbb{E}\{Y_t\}][Z_s - \mathbb{E}\{Z_s\}]\} = \frac{2\sqrt{\alpha}\sqrt{\delta}}{\alpha + \delta} \tilde{\rho}_{1,2} \nu_Y \nu_Z [e^{-\alpha(t-s)} - e^{-\alpha t} e^{-\delta s}] \quad (2.14)$$

Se  $s > t$ ,

$$\mathbb{E}\{[Y_t - \mathbb{E}\{Y_t\}][Z_s - \mathbb{E}\{Z_s\}]\} = \frac{2\sqrt{\alpha}\sqrt{\delta}}{\alpha + \delta} \tilde{\rho}_{1,2} \nu_Y \nu_Z [e^{-\delta(s-t)} - e^{-\alpha s} e^{-\delta t}] \quad (2.15)$$

**Demonstração:**

Suponhamos que  $s < t$ ,

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\{(Y_t - \mathbb{E}\{Y_t\})(Z_s - \mathbb{E}\{Z_s\})\} \\ &= \mathbb{E}\left\{\left(\nu_Y \sqrt{2\alpha} \int_0^t e^{-\alpha(t-u)} d\tilde{W}_u^{(1)}\right) \left(\nu_Z \sqrt{2\delta} \tilde{\rho}_{1,2} \int_0^s e^{-\delta(s-u)} d\tilde{W}_u^{(1)}\right)\right\} \\ &+ \mathbb{E}\left\{\left(\nu_Y \sqrt{2\alpha} \int_0^t e^{-\alpha(t-u)} d\tilde{W}_u^{(1)}\right) \left(\nu_Z \sqrt{2\delta} \sqrt{1 - \tilde{\rho}_{1,2}^2} \int_0^s e^{-\delta(s-u)} d\tilde{W}_u^{(2)}\right)\right\} \\ &= \mathbb{E}\left\{\left(\nu_Y \sqrt{2\alpha} \int_0^s e^{-\alpha(t-u)} d\tilde{W}_u^{(1)}\right) \left(\nu_Z \sqrt{2\delta} \tilde{\rho}_{1,2} \int_0^s e^{-\delta(s-u)} d\tilde{W}_u^{(1)}\right)\right\} \\ &+ \mathbb{E}\left\{\left(\nu_Y \sqrt{2\alpha} \int_0^s e^{-\alpha(t-u)} d\tilde{W}_u^{(1)}\right) \left(\nu_Z \sqrt{2\delta} \sqrt{1 - \tilde{\rho}_{1,2}^2} \int_0^s e^{-\delta(s-u)} d\tilde{W}_u^{(2)}\right)\right\} \\ &= \sqrt{2\alpha} \nu_Y \sqrt{2\delta} \nu_Z \tilde{\rho}_{1,2} e^{-\alpha t} e^{-\delta s} \int_0^s e^{(\alpha+\delta)u} du \\ &= \frac{2\sqrt{\alpha}\sqrt{\delta}}{\alpha + \delta} \nu_Y \nu_Z \tilde{\rho}_{1,2} e^{-\alpha t} e^{-\delta s} [e^{(\alpha+\delta)s} - 1] \\ &= \frac{2\sqrt{\alpha}\sqrt{\delta}}{\alpha + \delta} \tilde{\rho}_{1,2} \nu_Y \nu_Z [e^{-\alpha(t-s)} - e^{-\alpha t} e^{-\delta s}]\end{aligned}$$

■

Seguindo os passos propostos por Fouque et.al [2] e usando o lema anterior temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \{ \log f_1(\bar{Y}) \log f_2(\bar{Z}) \} &\approx \frac{2\sqrt{\alpha}\sqrt{\delta}}{\alpha + \delta} \tilde{\rho}_{1,2} \nu_Y \nu_Z \\
\mathbb{E} \{ \log f_1(\bar{Y}_j) \log f_2(\bar{Z}_0) \} &\approx \frac{2\sqrt{\alpha}\sqrt{\delta}}{\alpha + \delta} \tilde{\rho}_{1,2} \nu_Y \nu_Z e^{-\alpha j \Delta} \\
\mathbb{E} \{ \log f_1(\bar{Y}_0) \log f_2(\bar{Z}_j) \} &\approx \frac{2\sqrt{\alpha}\sqrt{\delta}}{\alpha + \delta} \tilde{\rho}_{1,2} \nu_Y \nu_Z e^{-\delta j \Delta}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Agora trabalhamos com a equação (2.9).

**Proposição 2.3.**

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{(L_{n+j} - L_n)^2\} &\approx 2c^2 + 2\nu_Y^2(1 - e^{-\alpha j \Delta}) + 2\nu_Z^2(1 - e^{-\delta j \Delta}) \\
&\quad + \frac{4\sqrt{\alpha}\sqrt{\delta}}{\alpha + \delta} \tilde{\rho}_{1,2} \nu_Y \nu_Z [2 - e^{-\alpha j \Delta} - e^{-\delta j \Delta}]
\end{aligned} \tag{2.17}$$

**Demonstração:**

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\{(L_{n+j} - L_n)^2\} = \mathbb{E}\{(L_j - L_0)^2\} \\
&= \mathbb{E}\{[(\log f_1(\bar{Y}_j) - \log f_1(\bar{Y}_0)) + (\log f_2(\bar{Z}_j) - \log f_2(\bar{Z}_0)) + (\log |\epsilon_j| - \log |\epsilon_0|)]^2\} \\
&= \mathbb{E}\{(\log f_1(\bar{Y}_j) - \log f_1(\bar{Y}_0))^2\} + \mathbb{E}\{(\log f_2(\bar{Z}_j) - \log f_2(\bar{Z}_0))^2\} \\
&\quad + \mathbb{E}\{(\log |\epsilon_j| - \log |\epsilon_0|)^2\} + 2\mathbb{E}\{(\log f_1(\bar{Y}_j) - \log f_1(\bar{Y}_0))(\log f_2(\bar{Z}_j) - \log f_2(\bar{Z}_0))\} \\
&= 2\mathbb{E}\{\log f_1(\bar{Y})^2\} - 2\mathbb{E}\{\log f_1(\bar{Y}_j) \log f_1(\bar{Y}_0)\} + 2\mathbb{E}\{\log f_2(\bar{Z})^2\} - 2\mathbb{E}\{\log f_2(\bar{Z}_j) \log f_2(\bar{Z}_0)\} \\
&\quad + 2Var\{\log |\epsilon|\} + 2\mathbb{E}\{(\log f_1(\bar{Y}_j) - \log f_1(\bar{Y}_0))(\log f_2(\bar{Z}_j) - \log f_2(\bar{Z}_0))\} \\
&= 2\mathbb{E}\{\log f_1(\bar{Y})^2\} - 2\mathbb{E}\{\log f_1(\bar{Y}_j) \log f_1(\bar{Y}_0)\} + 2\mathbb{E}\{\log f_2(\bar{Z})^2\} \\
&\quad - 2\mathbb{E}\{\log f_2(\bar{Z}_j) \log f_2(\bar{Z}_0)\} + 2Var\{\log |\epsilon|\} + 4\mathbb{E}\{\log f_1(\bar{Y}) \log f_2(\bar{Z})\} \\
&\quad - 2\mathbb{E}\{\log f_1(\bar{Y}_j) \log f_2(\bar{Z}_0)\} - 2\mathbb{E}\{\log f_1(\bar{Y}_0) \log f_2(\bar{Z}_j)\} \\
&\approx 2c^2 + 2\nu_Y^2(1 - e^{-\alpha j \Delta}) + 2\nu_Z^2(1 - e^{-\delta j \Delta}) + \frac{8\sqrt{\alpha}\sqrt{\delta}}{\alpha + \delta} \tilde{\rho}_{1,2} \nu_Y \nu_Z \\
&\quad - \frac{4\sqrt{\alpha}\sqrt{\delta}}{\alpha + \delta} \tilde{\rho}_{1,2} \nu_Y \nu_Z e^{-\alpha j \Delta} - \frac{4\sqrt{\alpha}\sqrt{\delta}}{\alpha + \delta} \tilde{\rho}_{1,2} \nu_Y \nu_Z e^{-\delta j \Delta} \\
&\approx 2c^2 + 2\nu_Y^2(1 - e^{-\alpha j \Delta}) + 2\nu_Z^2(1 - e^{-\delta j \Delta}) + \frac{4\sqrt{\alpha}\sqrt{\delta}}{\alpha + \delta} \tilde{\rho}_{1,2} \nu_Y \nu_Z [2 - e^{-\alpha j \Delta} - e^{-\delta j \Delta}]
\end{aligned}$$

Onde usamos (2.12), (2.13) e (2.16). ■

Agora considerando o último termo da equação (2.17), vemos que usando a condição (2.3) temos que

$$\frac{\sqrt{\alpha}\sqrt{\delta}}{\alpha + \delta} \approx \frac{\sqrt{\alpha}\sqrt{\delta}}{\alpha} \approx \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\alpha}} \approx 0 \quad (2.18)$$

Observamos que a condição anterior é muito relevante porque permite estimar o modelo considerando dois modelos reduzidos em cada escala considerada.

Usando (2.18), temos que

$$\mathbb{E}(V_j^N) \approx 2c^2 + 2\nu_Y^2(1 - e^{-\alpha j\Delta}) + 2\nu_Z^2(1 - e^{-\delta j\Delta}) \quad (2.19)$$

A equação anterior coincide com a expressão proposta por Fouque et.al [9], porém neste caso estamos considerando uma correlação diferente de zero entre  $Y$  e  $Z$ .

Observando a equação (2.19) temos as seguintes conclusões.

Se estamos considerando  $\Delta$  da ordem de dias, o termo relacionado com  $\delta$  em (2.19) é suficientemente pequeno (perto de zero) e logo podemos considerar a seguinte aproximação para determinar a componente de reversão rápida à média

$$\mathbb{E}(V_j^N) \approx 2c^2 + 2\nu_Y^2(1 - e^{-\alpha j\Delta}) \quad (2.20)$$

Por outro lado, se estamos considerando  $\Delta$  da ordem de meses, o termo relacionado com  $\alpha$  em (2.19) é suficientemente grande e logo podemos considerar a seguinte aproximação para determinar a componente de reversão mais lenta

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(V_j^N) &\approx 2c^2 + 2\nu_Y^2 + 2\nu_Z^2(1 - e^{-\delta j\Delta}) \\ &\approx 2\tilde{c}^2 + 2\nu_Z^2(1 - e^{-\delta j\Delta}) \end{aligned} \quad (2.21)$$

onde  $\tilde{c}^2 = c^2 + \nu_Y^2$ .

Esta última análise permite determinarmos as componentes da volatilidade usando dois modelos reduzidos.

Para estimar o parâmetro  $\mu$  usamos a equação (2.6). Logo temos que

$$\mu \approx \frac{1}{N\Delta} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{X_{n+1} - X_n}{X_n} \quad (2.22)$$

Para obtermos os outros parâmetros  $m_Y$  e  $m_Z$  consideramos dois modelos por separado como segue

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu X_t dt + f_1(Y_t) X_t dW_t^{(0)} \\ dY_t &= \alpha(m_Y - Y_t) dt + \nu_Y \sqrt{2\alpha} dW_t^{(1)} \end{aligned} \quad (2.23)$$

e

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu X_t dt + f_2(Z_t) X_t dW_t^{(0)} \\ dZ_t &= \delta(m_Z - Z_t) dt + \nu_Z \sqrt{2\delta} dW_t^{(2)} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Neste caso a equação (2.7) reduz-se a

$$\begin{aligned} \bar{D}_{n,Y} &= e^{Y_n} \epsilon_n^Y \\ \bar{D}_{n,Z} &= e^{Z_n} \epsilon_n^Z \end{aligned} \quad (2.25)$$

onde usamos  $f_1$  e  $f_2$  como a função exponencial e  $\epsilon_n^Y, \epsilon_n^Z$  denotam variáveis aleatórias normais padrão.

Portanto,

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_Y^2 &:= \mathbb{E} \{ \bar{D}_{n,Y}^2 \} = \mathbb{E} \{ e^{2Y_n} \} = e^{2m_Y + 2\nu_Y^2} \\ \bar{\sigma}_Z^2 &:= \mathbb{E} \{ \bar{D}_{n,Z}^2 \} = \mathbb{E} \{ e^{2Z_n} \} = e^{2m_Z + 2\nu_Z^2} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Logo podemos estimar  $m_Y$  e  $m_Z$  como segue

$$\begin{aligned} m_Y &= \frac{1}{2} \log \{ \bar{\sigma}_Y^2 \} - \nu_Y^2 \\ m_Z &= \frac{1}{2} \log \{ \bar{\sigma}_Z^2 \} - \nu_Z^2 \end{aligned} \quad (2.27)$$

onde

$$\bar{\sigma}_Y^2 = \bar{\sigma}_Z^2 \approx \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \bar{D}_n^2 \quad (2.28)$$

e  $\bar{D}_n$  é dado por (2.5).

Então o algoritmo para determinar os parâmetros para cada escala é dado por

### ALGORITMO DO VARIOGRAMA

- (a) Calcule  $\bar{D}_n$  usando (2.5).
- (b) Calcule  $L_n$  usando (2.8) e aplique um filtro de mediana.
- (c) Calcule  $V_j^N$  usando (2.9).
- (d) Calcule a média temporal de  $V_j^N$ .
- (e) Infira os valores de  $2c^2$  e  $2\nu^2$  desde os valores iniciais e finais obtidos do gráfico da média temporal de  $V_j^N$ .
- (f) Condicionado aos parâmetros anteriores, fixe (2.20) e (2.21) ajustando para o melhor valor de  $\alpha$  e  $\delta$  respectivamente por mínimos quadrados ordinários.

## 2.3 Volatilidade Instantânea Oculta nos Preços

Queremos usar duas formas alternativas para estimar os parâmetros associados ao modelo (2.4). Estes métodos alternativos de estimação requerem a série de dados correspondentes aos processos  $Y_t$  e  $Z_t$ . Para isto devemos usar algum método que permita inferir estes valores usando apenas os dados observados no mercado, isto é, usando apenas os preços do ativo. Este problema não é simples. Existem, por exemplo, métodos econométricos como a Volatilidade Realizada e modelos GARCH que permitem estimar a volatilidade oculta nos preços que não são aplicáveis em nosso modelo. Logo, devemos encontrar um método alternativo que ataque o problema de descobrir a volatilidade oculta sem passar pela discretização do modelo. Uma forma de resolver este problema foi proposta por Malliavin & Mancino [10] e desenvolvido para o caso brasileiro por Saporito [11].

A seguinte dedução segue os passos propostos em [11].

Considere o seguinte modelo para os preços no intervalo  $[0, T]$

$$dS_t = \mu(t)dt + \sigma(t)dW_t \quad (2.29)$$

onde  $\mu(\cdot)$  e  $\sigma(\cdot)$  satisfazem as condições necessárias para que as integrais acima existam.

**Definição 2.4.** A função de volatilidade instantânea associada ao processo de preços (2.29) é

$$\Sigma(t) = \sigma(t)^2 \quad (2.30)$$

Vamos supor que  $\Sigma(t)$  é contínua e que para cada  $\omega \in \Omega$ ,  $\mu(t, \omega) \in L^2[0, T]$ .

**Definição 2.5.** Os coeficientes de Fourier de  $\Sigma(\cdot)$  no intervalo  $[0, T]$  são

$$\begin{aligned} a_0(\Sigma) &= \frac{1}{T} \int_0^T \Sigma(t) dt \\ a_k(\Sigma) &= \frac{2}{T} \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \Sigma(t) dt \\ b_k(\Sigma) &= \frac{2}{T} \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \Sigma(t) dt \end{aligned} \quad (2.31)$$

para  $k \in \mathbb{N}$ .

**Definição 2.6.** Os coeficientes de Fourier de  $dS_t$  no intervalo  $[0, T]$  são

$$\begin{aligned} a_0(dS) &:= \frac{1}{T} \int_0^T dS_t \\ a_k(dS) &:= \frac{2}{T} \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dS_t \\ b_k(dS) &:= \frac{2}{T} \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dS_t \end{aligned} \quad (2.32)$$

para  $k \in \mathbb{N}$ , onde as integrais acima são no sentido de Itô. Uma boa referência para a integral de Itô e suas propriedades é [12].

Para o lema seguinte suponha que  $\mu(t) = 0$ .

**Lema 2.7.** Sejam,  $f_i(t)$   $i = 1, 2, 3, 4$  funções determinísticas e defina

$$X_t^i = \int_0^t f_i(u) dS_u \quad (2.33)$$

Então

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_t^i] &= 0 \\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_t^i X_t^j] &= \int_0^t f_i(u) f_j(u) \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\Sigma(u)] du \\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_t^1 X_t^2 X_t^3 X_t^4] &= \int_0^t \int_0^t f_1(s) f_2(s) f_3(u) f_4(u) \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\Sigma(s) \Sigma(u)] duds \\ &+ \int_0^t \int_0^t f_1(s) f_3(s) f_2(u) f_4(u) \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\Sigma(s) \Sigma(u)] duds \\ &+ \int_0^t \int_0^t f_1(s) f_4(s) f_2(u) f_3(u) \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\Sigma(s) \Sigma(u)] duds \end{aligned} \quad (2.34)$$

**Demonstração:**

Para a primeira igualdade basta notar que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_t^i] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left\{ \int_0^t f_i(u) \sigma(u) dW_u \right\} = 0$$

A segunda igualdade é consequência da isometria de Itô (1.9).

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_t^i X_t^j] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left\{ \left( \int_0^t f_i(u) \sigma(u) dW_u \right) \left( \int_0^t f_j(u) \sigma(u) dW_u \right) \right\} \\ &= \int_0^t f_i(u) f_j(u) \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\sigma^2(u)) du = \int_0^t f_i(u) f_j(u) \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\Sigma(u)) du \end{aligned}$$

A terceira igualdade é mais complicada.

Aplicamos a fórmula de Itô a  $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 x_3 x_4$ .

$$\begin{aligned} d[X_t^1 X_t^2 X_t^3 X_t^4] &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial g}{\partial x_i}(X_t^1, X_t^2, X_t^3, X_t^4) dX_t^i \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^4 \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(X_t^1, X_t^2, X_t^3, X_t^4) d\langle X_t^i, X_t^j \rangle \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
X_t^1 X_t^2 X_t^3 X_t^4 &= \sum_{i=1}^4 \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x_i}(X_s^1, X_s^2, X_s^3, X_s^4) f_i(s) \sigma(s) dW_s \\
&\quad \int_0^t X_s^3 X_s^4 d\langle X_s^1, X_s^2 \rangle + \int_0^t X_s^2 X_s^4 d\langle X_s^1, X_s^3 \rangle \\
&\quad \int_0^t X_s^2 X_s^3 d\langle X_s^1, X_s^4 \rangle + \int_0^t X_s^1 X_s^4 d\langle X_s^2, X_s^3 \rangle \\
&\quad \int_0^t X_s^1 X_s^3 d\langle X_s^2, X_s^4 \rangle + \int_0^t X_s^1 X_s^2 d\langle X_s^3, X_s^4 \rangle
\end{aligned}$$

Observe que quando aplicamos  $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}$  na equação anterior a integral estocástica do lado direito desaparece.

Vamos analisar o último termo, os outros são análogos.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left\{ \int_0^t X_s^1 X_s^2 d\langle X_s^3, X_s^4 \rangle \right\} &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left\{ \int_0^t X_s^1 X_s^2 f_3(s) f_4(s) \Sigma(s) ds \right\} \\
&= \int_0^t f_3(s) f_4(s) \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_s^1 X_s^2 \Sigma(s)] ds
\end{aligned}$$

Agora trabalhamos com a esperança que aparece dentro da integral anterior.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_s^1 X_s^2 \Sigma(s)] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left\{ \left( \int_0^s f_1(u) \sigma(u) \sigma(s) dW_u \right) \left( \int_0^s f_2(u) \sigma(u) \sigma(s) dW_u \right) \right\} \\
&= \int_0^s f_1(u) f_2(u) \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\Sigma(u) \Sigma(s)] du
\end{aligned}$$

O que implica que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left\{ \int_0^t X_s^1 X_s^2 d\langle X_s^3, X_s^4 \rangle \right\} = \int_0^t \int_0^s f_1(u) f_2(u) f_3(s) f_4(s) \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\Sigma(u) \Sigma(s)] du ds$$

Analogamente temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left\{ \int_0^t X_s^3 X_s^4 d\langle X_s^1, X_s^2 \rangle \right\} &= \int_0^t \int_0^s f_3(u) f_4(u) f_1(s) f_2(s) \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\Sigma(u)\Sigma(s)] duds \\
&= \int_0^t \int_u^t f_3(u) f_4(u) f_1(s) f_2(s) \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\Sigma(u)\Sigma(s)] dsdu \\
&= \int_0^t \int_s^t f_3(s) f_4(s) f_1(u) f_2(u) \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\Sigma(s)\Sigma(u)] duds
\end{aligned}$$

Onde na segunda igualdade usamos o teorema de Fubini [13].

Logo podemos concluir que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left\{ \int_0^t X_s^1 X_s^2 d\langle X_s^3, X_s^4 \rangle \right\} + \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left\{ \int_0^t X_s^3 X_s^4 d\langle X_s^1, X_s^2 \rangle \right\} \\
&= \int_0^t \int_0^t f_1(u) f_2(u) f_3(s) f_4(s) \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\Sigma(s)\Sigma(u)] duds
\end{aligned}$$

Usando argumentos análogos segue o resultado. ■

Agora vamos provar o principal teorema desta seção.

**Teorema 2.8.** *Para  $n_0 \in \mathbb{N}$  fixo, os coeficientes de Fourier de  $\Sigma$  tem a seguinte representação*

$$\begin{aligned}
a_0(\Sigma) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{T/2}{N+1-n_0} \sum_{k=n_0}^N \frac{1}{2} [a_k(dS)^2 + b_k(dS)^2] \\
a_q(\Sigma) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{T/2}{N+1-n_0} \sum_{k=n_0}^N a_k(dS) a_{k+q}(dS) + b_k(dS) b_{k+q}(dS) \\
b_q(\Sigma) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{T/2}{N+1-n_0} \sum_{k=n_0}^N a_k(dS) b_{k+q}(dS) - b_k(dS) a_{k+q}(dS) \quad (2.35)
\end{aligned}$$

As igualdades anteriores são em  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

**Demonstração:** Vamos supor inicialmente que  $\mu = 0$ . Para cada  $\omega_0 \in \Omega$  consideramos uma realização do processo (2.29),  $S_t(\omega_0)$ , e um espaço de probabilidade auxiliar  $(\Omega', \mathcal{F}', \mathcal{F}'_t, \mathbb{P}')$  com um Movimento Browniano  $W'_t$ .

Definimos o processo  $X_t$  satisfazendo

$$dX_t = \sigma(\omega_0, t)dW'_t$$

Observe que neste novo espaço temos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[a_r(dX)a_l(dX)] &= \frac{4}{T^2} \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi r t}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi l t}{T}\right) \Sigma(t) dt \\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[a_r(dX)b_l(dX)] &= \frac{4}{T^2} \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi r t}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi l t}{T}\right) \Sigma(t) dt \\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[b_r(dX)b_l(dX)] &= \frac{4}{T^2} \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi r t}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi l t}{T}\right) \Sigma(t) dt\end{aligned}\quad (2.36)$$

Agora como  $\Sigma(\cdot)$  é uma função contínua e portanto  $\Sigma \in L^2[0, T]$ . Além disso, vale a igualdade de Parseval

$$\|\Sigma\|_{L^2}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2(\Sigma) + b_k^2(\Sigma) < \infty \quad (2.37)$$

Seja

$$V_N^q = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N a_k(dX)b_{k+q}(dX)$$

O próximo passo é ver que  $T\mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[V_N^q] \rightarrow b_q(\Sigma)$  quando  $N \rightarrow \infty$ .

Para isto começamos relacionando os coeficientes de Fourier de  $dX$  com os coeficientes de Fourier de  $\Sigma$ . Seja  $k < m$ ,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[a_k(dX)b_m(dX)] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}'} \left\{ \left( \frac{2}{T} \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) \sigma(t) dW'_t \right) \left( \frac{2}{T} \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi m t}{T}\right) \sigma(t) dW'_t \right) \right\} \\ &= \frac{4}{T^2} \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi m t}{T}\right) \Sigma(t) dt \\ &= \frac{2}{T^2} \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi(m+k)t}{T}\right) \Sigma(t) dt - \frac{2}{T^2} \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi(k-m)t}{T}\right) \Sigma(t) dt \\ &= \frac{1}{T} [b_{m+k}(\Sigma) + b_{m-k}(\Sigma)]\end{aligned}$$

Logo, usando o cálculo anterior temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[V_N^q] &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[a_k(dX)b_{k+q}(dX)] \\
&= \frac{1}{NT} \sum_{k=1}^N [b_{2k+q}(\Sigma) + b_q(\Sigma)] \\
&= \frac{b_q(\Sigma)}{T} + R_N
\end{aligned}$$

onde

$$R_N = \frac{1}{NT} \sum_{k=1}^N b_{2k+q}(\Sigma)$$

Agora usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$\begin{aligned}
|R_N| &= \frac{1}{NT} \left| \sum_{k=1}^N b_{2k+q}(\Sigma) \right| \leq \frac{1}{NT} \sum_{k=1}^N |b_{2k+q}(\Sigma)| \\
&\leq \frac{1}{NT} \left( \sum_{k=1}^N |b_{2k+q}(\Sigma)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k=1}^N 1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{NT}} \|\Sigma\|_{L^2(\mathbb{P}')}
\end{aligned}$$

Dai,  $|R_N| \rightarrow 0$  e logo

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[V_N^q] \rightarrow \frac{b_q(\Sigma)}{T}$$

quando  $N \rightarrow \infty$ .

Para conseguir a convergência em  $L^2(\mathbb{P}')$  devemos mostrar que a variância de  $V_N^q$  converge para zero quando  $N \rightarrow \infty$ .

$$\begin{aligned}
\text{Var}_{\mathbb{P}'}[V_N^q] &= \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N \mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[(a_k b_{k+q} - \mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[a_k b_{k+q}])(a_m b_{m+q} - \mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[a_m b_{m+q}])] \\
&= \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N \mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[(a_k b_{k+q} - \mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[a_k b_{k+q}])(a_m b_{m+q} - \mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[a_m b_{m+q}])] \\
&= \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N \mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[a_k b_{k+q} a_m b_{m+q}] - \mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[a_k b_{k+q}] \mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[a_m b_{m+q}] \\
&\quad - \mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[a_k b_{k+q}] \mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[a_m b_{m+q}] + \mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[a_k b_{k+q}] \mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[a_m b_{m+q}]
\end{aligned}$$

Agora o primeiro termo dentro do somatório pode ser representado usando (2.32) e o Lema 2.7 como segue

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[(a_k(dX)b_{k+q}(dX)a_m(dX)b_{m+q}(dX)] \\
&= \frac{4}{T^2} \int_0^t \int_0^t \cos\left(\frac{2\pi ks}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi(k+q)s}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi mu}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi(m+q)u}{T}\right) \Sigma(u)\Sigma(s) duds \\
&+ \frac{4}{T^2} \int_0^t \int_0^t \cos\left(\frac{2\pi ks}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi ms}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi(k+q)u}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi(m+q)u}{T}\right) \Sigma(u)\Sigma(s) duds \\
&+ \frac{4}{T^2} \int_0^t \int_0^t \cos\left(\frac{2\pi ks}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi(m+q)s}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi(k+q)u}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi mu}{T}\right) \Sigma(u)\Sigma(s) duds \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}'} \left( \frac{2}{T} \int_0^t \cos\left(\frac{2\pi ks}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi(k+q)s}{T}\right) \Sigma(s) ds \right) \cdot \\
&\cdot \mathbb{E}_{\mathbb{P}'} \left( \frac{2}{T} \int_0^t \cos\left(\frac{2\pi mu}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi(m+q)u}{T}\right) \Sigma(u) du \right) \\
&+ \mathbb{E}_{\mathbb{P}'} \left( \frac{2}{T} \int_0^t \cos\left(\frac{2\pi ks}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi ms}{T}\right) \Sigma(s) ds \right) \cdot \\
&\cdot \mathbb{E}_{\mathbb{P}'} \left( \frac{2}{T} \int_0^t \sin\left(\frac{2\pi(k+q)u}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi(m+q)u}{T}\right) \Sigma(u) du \right) \\
&+ \mathbb{E}_{\mathbb{P}'} \left( \frac{2}{T} \int_0^t \cos\left(\frac{2\pi ks}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi(m+q)s}{T}\right) \Sigma(s) ds \right) \cdot \\
&\cdot \mathbb{E}_{\mathbb{P}'} \left( \frac{2}{T} \int_0^t \sin\left(\frac{2\pi(k+q)u}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi mu}{T}\right) \Sigma(u) du \right) \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[a_k(dX)b_{k+q}(dX)] \mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[a_m(dX)b_{m+q}(dX)] + \mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[a_k(dX)a_m(dX)] \mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[b_{k+q}(dX)b_{m+q}(dX)] \\
&+ \mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[a_k(dX)b_{m+q}(dX)] \mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[a_m(dX)b_{k+q}(dX)] \tag{2.38}
\end{aligned}$$

Usando este último resultado temos

$$\begin{aligned}
\text{Var}_{\mathbb{P}'}[V_N^q] &= \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N \mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[a_k(dX)a_m(dX)]\mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[b_{k+q}(dX)b_{m+q}(dX)] \\
&\quad + \mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[a_k(dX)b_{m+q}(dX)]\mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[b_{k+q}(dX)a_m(dX)]
\end{aligned}$$

Agora consideremos apenas o termo dentro da soma anterior

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[a_k(dX)a_m(dX)]\mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[b_{k+q}(dX)b_{m+q}(dX)] + \mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[a_k(dX)b_{m+q}(dX)]\mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[b_{k+q}(dX)a_m(dX)] \\
&= \left( \frac{4}{T^2} \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) \Sigma(t) dt \right) \cdot \\
&\quad \left( \frac{4}{T^2} \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi(k+q)t}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi(m+q)t}{T}\right) \Sigma(t) dt \right) \\
&\quad + \left( \frac{4}{T^2} \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi(m+q)t}{T}\right) \Sigma(t) dt \right) \cdot \\
&\quad \left( \frac{4}{T^2} \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi(k+q)t}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) \Sigma(t) dt \right) \\
&\leq 2 \left( \frac{4}{T^2} \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \Sigma(t) dt \right) \left( \frac{4}{T^2} \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi(k+q)t}{T}\right) \Sigma(t) dt \right) \\
&\leq 2 \left( \frac{4}{T^2} \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \Sigma(t) dt \right) \left( \frac{4}{T^2} \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi qt}{T}\right) \Sigma(t) dt \right) \\
&\quad + 2 \left( \frac{4}{T^2} \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \Sigma(t) dt \right) \left( \frac{4}{T^2} \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi qt}{T}\right) \Sigma(t) dt \right) \\
&\leq 2 \left( \frac{4}{T^2} \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \Sigma(t) dt \right) \left( \frac{4}{T^2} \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \Sigma(t) dt \right) \\
&\quad + 2 \left( \frac{4}{T^2} \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \Sigma(t) dt \right) \left( \frac{4}{T^2} \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \Sigma(t) dt \right) \\
&= \frac{8}{T^2} a_k(\Sigma)^2 + \frac{8}{T^2} a_k(\Sigma) b_k(\Sigma) \\
&\leq \frac{8}{T^2} \left[ a_k(\Sigma)^2 + \frac{1}{2} a_k(\Sigma)^2 + \frac{1}{2} b_k(\Sigma)^2 \right] \\
&\leq \frac{16}{T^2} [a_k(\Sigma)^2 + b_k(\Sigma)^2]
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\text{Var}_{\mathbb{P}'}[V_N^q] &\leq \frac{1}{N^2} \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{16}{T^2} [a_k(\Sigma)^2 + b_k(\Sigma)^2] \\
&\leq \frac{16}{T^2} \frac{1}{N^2} \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^N [a_k(\Sigma)^2 + b_k(\Sigma)^2] \\
&\leq \frac{16}{T^2} \frac{1}{N^2} \sum_{m=1}^N \|\Sigma\|_{L^2}^2 \\
&\leq \frac{16}{T^2} \frac{1}{N} \|\Sigma\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

Usando (2.37) concluímos por fim que  $\text{Var}_{\mathbb{P}'}[V_N^q] \rightarrow 0$  quando  $N \rightarrow \infty$ .

Logo temos que

$$V_N^q \rightarrow \frac{b_q(\Sigma)}{T}$$

Analogamente definindo

$$\tilde{V}_N^q = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N a_{k+q}(dX) b_k(dX)$$

temos que

$$\tilde{V}_N^q \rightarrow -\frac{b_q(\Sigma)}{T}$$

onde ambas convergências são em  $L^2(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ .

Para terminar a prova da terceira igualdade em (2.35) no caso de  $\mu = 0$ , precisamos mostrar a convergência no espaço original  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

Para isto vemos inicialmente que como

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[(TV_N^q - b_q(\Sigma))^2] \rightarrow 0$$

O teorema de convergência dominada diz que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[(TV_N^q - b_q(\Sigma))^2]] \rightarrow 0$$

A ideia agora é mostrar que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[(TV_N^q - b_q(\Sigma))^2]] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(T\hat{V}_N^q - b_q(\Sigma))^2]$$

onde

$$\hat{V}_N^q = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N a_k(dS)b_{k+q}(dS)$$

Usando (2.38) e o Lema 2.7 temos que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[a_k(dS)b_{k+q}(dS)a_m(dS)b_{m+q}(dS)] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[a_k(dX)b_{k+q}(dX)a_m(dX)b_{m+q}(dX)]]$$

e

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[a_k(dS)b_{k+q}(dS)] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[a_k(dX)b_{k+q}(dX)]]$$

Logo temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[(TV_N^q - b_q(\Sigma))^2]] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[T^2(V_N^q)^2]] - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[2TV_N^q b_q(\Sigma)]] + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[(b_q(\Sigma))^2]] \\ &= T^2 \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[(V_N^q)^2]] - 2T \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[b_q(\Sigma) \mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[V_N^q]] + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(b_q(\Sigma))^2] \\ &= T^2 \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[a_k(dX)b_{k+q}(dX)a_m(dX)b_{m+q}(dX)]] \\ &\quad - 2T \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[b_q(\Sigma) \mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[a_k(dX)b_{k+q}(dX)]] + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(b_q(\Sigma))^2] \\ &= T^2 \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[a_k(dS)b_{k+q}(dS)a_m(dS)b_{m+q}(dS)] \\ &\quad - 2T \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[b_q(\Sigma)[a_k(dS)b_{k+q}(dS)]] + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(b_q(\Sigma))^2] \\ &= T^2 \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(\hat{V}_N^q)^2] - 2T \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[b_q(\Sigma)\hat{V}_N^q] + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(b_q(\Sigma))^2] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(T\hat{V}_N^q - b_q(\Sigma))^2] \end{aligned}$$

Isto demonstra em particular que convergência em  $L^2(\mathbb{P}')$  implica convergência em  $L^2(\mathbb{P})$ .

Aplicando este resultado concluímos que

$$\hat{V}_N^q \longrightarrow \frac{b_q(\Sigma)}{T}$$

onde a convergência é em  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

Mostramos assim a terceira igualdade em (2.35) no caso  $\mu = 0$ .

Vamos supor agora que  $\mu \neq 0$ . Para cada  $\omega_0 \in \Omega$  fixo denotamos  $\tilde{\mu} = \mu(t, \omega_0)$

$$dX_t = \tilde{\mu} dt + dU_t$$

onde

$$dU_t = \sigma(t, \omega_0) dW'_t$$

Logo usando as Definições 2.5 e 2.6, temos que

$$\begin{aligned} a_k(dX) &= a_k(\tilde{\mu}) + a_k(dU) \\ b_l(dX) &= b_l(\tilde{\mu}) + b_l(dU) \end{aligned}$$

Pela relação que existe entre os espaços  $L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$  e  $L^2(\Omega', \mathcal{F}'_t, \mathbb{P}')$  basta mostrar a convergência em  $L^2(\mathbb{P}')$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N a_k(dX) b_{k+q}(dX) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N a_k(dU) b_{k+q}(dU) + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N a_k(dU) b_{k+q}(\tilde{\mu}) \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N a_k(\tilde{\mu}) b_{k+q}(dU) + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N a_k(\tilde{\mu}) b_{k+q}(\tilde{\mu}) \end{aligned}$$

Pelo demonstrado para o caso  $\mu = 0$  temos que:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N a_k(dU) b_{k+q}(dU) \longrightarrow \frac{b_q(\Sigma)}{T}$$

onde a convergência é em  $L^2(\mathbb{P}')$ .

Agora mostramos que os outros três termos convergem para zero em  $L^2(\mathbb{P}')$ .

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N a_k(\tilde{\mu}) b_{k+q}(\tilde{\mu}) \right\|_{L^2}^2 &= \frac{1}{N^2} \left( \sum_{k=1}^N a_k(\tilde{\mu}) b_{k+q}(\tilde{\mu}) \right)^2 \\
&\leq \frac{1}{N^2} \left( \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} a_k(\tilde{\mu})^2 + \frac{1}{2} b_{k+q}(\tilde{\mu})^2 \right)^2 \\
&\leq \frac{1}{N^2} \left( \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} a_k(\tilde{\mu})^2 + \frac{1}{2} b_{k+q}(\tilde{\mu})^2 \right)^2 \\
&\leq \frac{1}{N^2} \|\tilde{\mu}\|_{L^2}^4 \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

onde usamos a equação (2.37). Aplicando esta equação novamente temos:

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N a_k(dU) b_{k+q}(\tilde{\mu}) \right\|_{L^2}^2 &\leq \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \|a_k(dU) b_{k+q}(\tilde{\mu})\|_{L^2}^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N b_{k+q}^2(\tilde{\mu}) \mathbb{E}_{\mathbb{P}'} [a_k(dU)^2] \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N b_{k+q}^2(\tilde{\mu}) \frac{4}{T^2} \int_0^T \cos^2 \left( \frac{2\pi kt}{T} \right) \Sigma(t) dt \\
&\leq \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N b_{k+q}^2(\tilde{\mu}) \frac{4}{T} a_0(\Sigma) \\
&\leq \frac{1}{N} \frac{4}{T} a_0(\Sigma) \|\tilde{\mu}\|_{L^2}^2 \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

De forma análoga podemos mostrar que o outro termo também converge para zero.

Juntando isto com o fato que convergência em  $L^2(\mathbb{P}')$  implica convergência em  $L^2(\mathbb{P})$  temos por fim demonstrado o teorema. ■

Para reconstruirmos a função de volatilidade instantânea  $\Sigma$ , usamos a fórmula de Fejer com kernel  $\phi(x) = \frac{\sin^2(x)}{x^2}$  se  $x \neq 0$  e  $\phi(0) = 1$ .

$$\Sigma_M(t) := \sum_{k=0}^M \phi(\lambda k) \left\{ a_k(\Sigma) \cos \left( \frac{2\pi kt}{T} \right) + b_k(\Sigma) \sin \left( \frac{2\pi kt}{T} \right) \right\} \quad (2.39)$$

onde  $b_0 = 0$ . O parâmetro  $\lambda > 0$  serve para suavizar a aproximação de  $\Sigma$ . A convergência é uniforme no intervalo  $[0, T]$  e de ordem  $\mathcal{O} \left( \frac{1}{M} \right)$ .

Pelo Teorema 2.8 para encontrar uma aproximação para a volatilidade instantânea no processo de preços basta calcular os coeficientes de Fourier dados em (2.32). Para este propósito usamos a fórmula de integração por partes. Logo

$$\begin{aligned} a_k(dS) &= \frac{2}{T} \frac{2\pi k}{T} \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) S_t dt + \frac{2}{T}(S_T - S_0) \\ b_k(dS) &= -\frac{2}{T} \frac{2\pi k}{T} \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) S_t dt \end{aligned}$$

Como temos apenas um número finito de dados para o processo de preços devemos aproximar estas últimas integrais por um processo de preços discretos. Seja  $S_t$  constante por partes

$$S_t = \sum_{i=0}^{n-1} S_{t_i} \chi_{[t_i, t_{i+1})}(t)$$

Com isto os coeficientes de Fourier para o processo de preços podem ser aproximados por:

$$\begin{aligned} a_k(dS) &= -\frac{2}{T} \sum_{i=0}^{n-1} S_{t_i} \left( \cos\left(\frac{2\pi kt_{i+1}}{T}\right) - \cos\left(\frac{2\pi kt_i}{T}\right) \right) + \frac{2}{T}(S_T - S_0) \\ b_k(dS) &= -\frac{2}{T} \sum_{i=0}^{n-1} S_{t_i} \left( \sin\left(\frac{2\pi kt_{i+1}}{T}\right) - \sin\left(\frac{2\pi kt_i}{T}\right) \right) \end{aligned} \quad (2.40)$$

## 2.4 O Método de Máxima Verossimilhança

Uma vez que temos um modelo para determinar o processo de volatilidade instantânea oculto nos preços, podemos estimar os parâmetros do modelo multiescala usando métodos que maximizam a Verossimilhança. Faremos uma estimação por separado para as duas diferentes escalas que determinam a volatilidade. Tal estimação deve ser feita desta forma já que mesmo estimando a volatilidade instantânea não podemos extrair ambas realizações dos processos  $Y_t$  e  $Z_t$  de uma forma consistente. Isto parece fazer sentido se consideramos como na seção anterior o método do Variograma e em particular a redução deste às equações (2.20) e (2.21). Uma outra razão para estimar o modelo desta forma é que quando estimamos para duas diferentes escalas podemos desconsiderar uma delas.

Finalmente, vamos considerar para a reversão rápida à média o seguinte modelo

$$\begin{aligned}dX_t &= \mu X_t dt + f_1(Y_t) X_t dW_t^{(0)} \\dY_t &= \alpha(m_Y - Y_t) dt + \beta_Y dW_t^{(1)}\end{aligned}\tag{2.41}$$

com  $\langle dW_t^{(0)}, dW_t^{(1)} \rangle = \rho_1 dt$ ,  $\alpha = 1/\epsilon$  e  $\beta_Y^2 = 2\nu_Y^2/\epsilon$ .

Entretanto, para a componente de escala longa aparecendo na volatilidade vamos especificar o modelo com  $c(z) = \delta(m_Z - z)$  e  $g(z) = \sqrt{2}\nu_Z$ , onde  $\nu_Z$  representa a variância da distribuição estacionária associada ao processo  $Z_t$ . Neste caso o modelo resultante é

$$\begin{aligned}dX_t &= \mu X_t dt + f_2(Z_t) X_t dW_t^{(0)} \\dZ_t &= \delta(m_Z - Z_t) dt + \beta_Z dW_t^{(2)}\end{aligned}\tag{2.42}$$

com  $\langle dW_t^{(0)}, dW_t^{(2)} \rangle = \rho_2 dt$ , e  $\beta_Z^2 = 2\nu_Z^2\delta$ . Onde como foi dito antes as variáveis  $\epsilon$  e  $\delta$  devem satisfazer (2.3),  $\epsilon, \delta > 0$  e  $\epsilon \ll 1$ .

Ao considerar estas especificações para o modelo multiescala estamos supondo também que os processos que determinam a volatilidade instantânea não estão correlacionados.

Supondo válidos os modelos anteriores, precisamos achar uma forma de estimar os parâmetros das equações a partir dos dados obtidos no mercado. Analizaremos neste caso dois métodos que usam o critério de maximização da Verossimilhança associada ao modelo. Este método de estimação foi desenvolvido por diversos autores, por exemplo, Ait Sahalia [14] em tempo discreto e Bibby & Sorensen [15] em tempo contínuo.

### 2.4.1 Aproximação em Tempo Discreto

Consideremos o processo de difusão multidimensional  $\mathbf{X}_t$ .

$$\begin{aligned}d\mathbf{X}_t &= b(\mathbf{X}_t; \theta) dt + \sigma(\mathbf{X}_t; \theta) d\mathbf{W}_t \\ \mathbf{X}_0 &= \mathbf{x}_0\end{aligned}\tag{2.43}$$

onde  $b(\cdot)$  representa o drift e  $\sigma(\cdot)$  representa a volatilidade instantânea associado ao processo.

O método de Máxima Verossimilhança em tempo discreto consiste em calcular a probabilidade condicional do processo  $\mathbf{X}_t$ , a partir desta calcular a verossimilhança associada, e maximiza-la para encontrar os parâmetros  $\theta$ .

**Definição 2.9.** *Definimos a log-verossimilhança associada ao processo  $\mathbf{X}_t$ , como a seguinte função*

$$l_N(\theta) = \sum_{i=1}^N \log \{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}_{i\Delta}; \theta | \mathbf{X}_{(i-1)\Delta})\} \quad (2.44)$$

onde  $\Delta$  é o tamanho da discretização, que supomos constante.

Para o modelo apresentado nesta tese, não é possível encontrar explicitamente a distribuição que segue o processo de preços  $X_t$ , pelo qual temos que usar uma aproximação para a distribuição do processo  $X_t$ , e o mesmo é feito com o processo  $Y_t$  e  $Z_t$ . A aproximação usada é uma aproximação de Euler que é descrita em [16].

Daqui em diante descreveremos o método de Máxima Verossimilhança discreto usando o modelo (2.41). Analogamente, pode ser considerado o modelo (2.42).

A discretização de Euler associada ao modelo (2.41) é dada por

$$\begin{aligned} X_{t+1} &= X_t + \mu X_t \Delta + f_1(Y_t) X_t \sqrt{\Delta} \epsilon_t^{(0)} \\ Y_{t+1} &= Y_t + \alpha(m_Y - Y_t) \Delta + \beta_Y \sqrt{\Delta} [\rho_1 \epsilon_t^{(0)} + \sqrt{1 - \rho_1^2} \epsilon_t^{(1)}] \end{aligned}$$

onde  $\epsilon_t^{(0)}$  e  $\epsilon_t^{(1)}$  são variáveis aleatórias normais independentes e igualmente distribuídas. Logo, a distribuição do processo  $(X_{t+1}, Y_{t+1})$  condicional a  $(X_t, Y_t)$  é normal bivariada. Para encontrar esta distribuição explicitamente primeiro notemos que

$$\begin{aligned} X_{t+1} | X_t, Y_t &\sim N(\mu_{X_t}, \sigma_{X_t}^2) \\ Y_{t+1} | X_t, Y_t &\sim N(\mu_{Y_t}, \sigma_{Y_t}^2) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\mu_{X_t} &= (1 + \mu\Delta)X_t \\
\sigma_{X_t}^2 &= \Delta f_1^2(Y_t)X_t^2 \\
\mu_{Y_t} &= Y_t + \alpha(m_Y - Y_t)\Delta \\
\sigma_{Y_t}^2 &= \Delta\beta_Y^2 \\
\sigma_{X_t, Y_t} &= \Delta\beta_Y\rho_1 f_1(Y_t)X_t
\end{aligned}$$

Logo a matriz de variância-covariância neste caso é dada por

$$\Sigma_t = \begin{pmatrix} \sigma_{X_t}^2 & \sigma_{X_t, Y_t} \\ \sigma_{X_t, Y_t} & \sigma_{Y_t}^2 \end{pmatrix}$$

Observemos que os coeficientes da matriz anterior dependem de  $X_t$  e  $Y_t$ .

Lembremos ainda que a distribuição normal bivariada é dada por

$$p(x, y|X_t, Y_t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\Sigma_t)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} ([x - \mu_{X_t}; y - \mu_{Y_t}]^T \Sigma_t^{-1} [x - \mu_{X_t}; y - \mu_{Y_t}]) \right\}$$

Neste caso temos

$$\det(\Sigma_t) = (1 - \rho_1^2)\Delta^2\beta_Y^2 X_t^2 f_1(Y_t)^2$$

e

$$\Sigma_t^{-1} = \frac{1}{\det(\Sigma_t)} \begin{pmatrix} \sigma_{Y_t}^2 & -\sigma_{X_t, Y_t} \\ -\sigma_{X_t, Y_t} & \sigma_{X_t}^2 \end{pmatrix}$$

Usando estas expressões podemos calcular a log-verossimilhança aproximada através de  
(2.44)

$$\begin{aligned}
l_N(\theta) &= \sum_{t=1}^N \log \{p(x_{t+1}, y_{t+1}; \theta | x_t, y_t)\} \\
&= -N \log \{2\pi\} - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N \log \{(1 - \rho_1^2) \Delta^2 \beta_Y^2 x_t^2 f_1(y_t)^2\} - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N \frac{(x_{t+1} - x_t - \mu \Delta x_t)^2}{(1 - \rho_1^2) \Delta x_t^2 f_1(y_t)^2} \\
&\quad + \rho_1 \sum_{t=1}^N \frac{(x_{t+1} - x_t - \mu \Delta x_t)(y_{t+1} - y_t - \alpha(m_Y - y_t)\Delta)}{(1 - \rho_1^2) \Delta \beta_Y x_t f_1(y_t)} \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N \frac{(y_{t+1} - y_t - \alpha(m_Y - y_t)\Delta)^2}{(1 - \rho_1^2) \Delta \beta_Y^2} \tag{2.45}
\end{aligned}$$

Agora consideramos os valores de  $\rho_1$ ,  $\beta_Y$  e  $\mu$  conhecidos e trabalhamos com a condição de primeira ordem do problema para os demais parâmetros  $\theta = \{m_Y, \alpha\}$ .

Calculando as derivadas parciais temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l_N}{\partial m_Y} &= -\rho_1 \alpha \Delta \sum_{t=1}^N \frac{(x_{t+1} - x_t - \mu \Delta x_t)}{(1 - \rho_1^2) \Delta \beta_Y x_t f_1(y_t)} + \alpha \Delta \sum_{t=1}^N \frac{(y_{t+1} - y_t - \alpha(m_Y - y_t)\Delta)}{(1 - \rho_1^2) \Delta \beta_Y^2} = 0 \\
\frac{\partial l_N}{\partial \alpha} &= -\rho_1 \Delta \sum_{t=1}^N \frac{(m_Y - y_t)(x_{t+1} - x_t - \mu \Delta x_t)}{(1 - \rho_1^2) \Delta \beta_Y x_t f_1(y_t)} \\
&\quad + \Delta \sum_{t=1}^N \frac{(m_Y - y_t)(y_{t+1} - y_t - \alpha(m_Y - y_t)\Delta)}{(1 - \rho_1^2) \Delta \beta_Y^2} = 0
\end{aligned}$$

O que pode ser reduzido às seguintes equações

$$\begin{aligned}
-\rho_1 \sum_{t=1}^N \frac{x_{t+1} - x_t - \mu \Delta x_t}{x_t f_1(y_t)} + \sum_{t=1}^N \frac{y_{t+1} - y_t - \alpha(m_Y - y_t)\Delta}{\beta_Y} &= 0 \\
-\rho_1 \sum_{t=1}^N \frac{(m_Y - y_t)(x_{t+1} - x_t - \mu \Delta x_t)}{x_t f_1(y_t)} + \sum_{t=1}^N \frac{(m_Y - y_t)(y_{t+1} - y_t - \alpha(m_Y - y_t)\Delta)}{\beta_Y} &= 0
\end{aligned}$$

Juntando as duas equações anteriores podemos expressar o sistema anterior como segue

$$\begin{aligned}
-\rho_1 \sum_{t=1}^N \frac{x_{t+1} - x_t - \mu \Delta x_t}{x_t f_1(y_t)} + \sum_{t=1}^N \frac{y_{t+1} - y_t - \alpha(m_Y - y_t)\Delta}{\beta_Y} &= 0 \\
\rho_1 \sum_{t=1}^N \frac{y_t(x_{t+1} - x_t - \mu \Delta x_t)}{x_t f_1(y_t)} - \sum_{t=1}^N \frac{y_t(y_{t+1} - y_t - \alpha(m_Y - y_t)\Delta)}{\beta_Y} &= 0
\end{aligned}$$

Logo, podemos determinar os parâmetros  $\mu_Y$  e  $\alpha$  resolvendo o seguinte sistema de equações não lineares

$$\begin{aligned}
\alpha \sum_{t=1}^N \frac{\Delta y_t}{\beta_Y} - \alpha m_Y \sum_{t=1}^N \frac{\Delta}{\beta_Y} &= \rho_1 \sum_{t=1}^N \frac{x_{t+1} - x_t}{x_t f_1(y_t)} - \sum_{t=1}^N \frac{y_{t+1} - y_t}{\beta_Y} - \mu \sum_{t=1}^N \frac{\rho_1 \Delta}{f_1(y_t)} \\
\alpha \sum_{t=1}^N \frac{\Delta y_t^2}{\beta_Y} - \alpha m_Y \sum_{t=1}^N \frac{\Delta y_t}{\beta_Y} &= \rho_1 \sum_{t=1}^N \frac{y_t(x_{t+1} - x_t)}{x_t f_1(y_t)} - \sum_{t=1}^N \frac{y_t(y_{t+1} - y_t)}{\beta_Y} - \mu \sum_{t=1}^N \frac{\rho_1 \Delta y_t}{f_1(y_t)}
\end{aligned} \tag{2.46}$$

O parâmetro  $\mu$  pode ser estimado como em (2.22).

O parâmetro  $\beta_Y$  será estimado a partir da variação quadrática associada ao processo  $Y_t$ .

De fato, usando a equação para  $Y_t$  dada em (2.41) e calculando a variação quadrática associada temos

$$\begin{aligned}
d\langle Y_t \rangle &= \beta_Y^2 d\langle W_t^{(1)} \rangle \\
\implies \sum_{i=1}^N (Y_i - Y_{i-1})^2 &= \beta_Y^2 \sum_{i=1}^N (t_i - t_{i-1}) = N\Delta\beta_Y^2
\end{aligned}$$

Logo, temos

$$\beta_Y \approx \sqrt{\frac{1}{N\Delta} \sum_{i=1}^N (y_i - y_{i-1})^2} \tag{2.47}$$

## 2.4.2 Aproximação em Tempo Contínuo

Consideramos o processo multidimensional dado por (2.43). Para descrever o método vamos supor que tanto o processo dado por (2.43) quanto  $\theta$  são unidimensionais. Vamos supor ainda que  $\sigma(\cdot)$  não depende de  $\theta$ .

**Definição 2.10.** *Definimos a função de log-verossimilhança em tempo contínuo como sendo*

$$l_t(\theta) = \int_0^t \frac{b(X_s; \theta)}{\sigma^2(X_s)} dX_s - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{b(X_s; \theta)}{\sigma^2(X_s)} ds \quad (2.48)$$

Diferenciando a equação (2.48) com respeito a  $\theta$  e discretizando as integrais obtemos a função *score* dada por

$$\dot{\tilde{l}}_N(\theta) = \sum_{i=1}^N \frac{\dot{b}(X_{(i-1)\Delta}; \theta)}{\sigma^2(X_{(i-1)\Delta})} (X_{i\Delta} - X_{(i-1)\Delta}) - \Delta \sum_{i=1}^N \frac{b(X_{(i-1)\Delta}; \theta) \dot{b}(X_{(i-1)\Delta}; \theta)}{\sigma^2(X_{(i-1)\Delta})} \quad (2.49)$$

onde  $\dot{g}$  denota a derivada de  $g$  com respeito a  $\theta$ .

Seja  $\mathcal{F}_i = \sigma(X_\Delta, \dots, X_{i\Delta})$ ,  $i = 1, \dots, N$  e  $\mathcal{F}_0 = \{\phi, \Omega\}$ .

**Proposição 2.11.** *Seja  $n \in \{1, 2, \dots, N\}$  e defina*

$$G_n(\theta) = \dot{\tilde{l}}_n(\theta) - \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_\theta[\dot{\tilde{l}}_i(\theta) - \dot{\tilde{l}}_{i-1}(\theta) | \mathcal{F}_{i-1}] \quad (2.50)$$

Então,  $\{G_n(\theta), \mathcal{F}_n\}_{n \geq 1}$  é um martingal.

**Demonstração:** Claramente  $G_n(\theta)$  é  $\mathcal{F}_n$  - mensurável.

Seja  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  fixo,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\theta[G_n(\theta) | \mathcal{F}_k] &= \mathbb{E}_\theta[\dot{\tilde{l}}_n(\theta) | \mathcal{F}_k] - \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_\theta[\mathbb{E}_\theta[\dot{\tilde{l}}_i(\theta) - \dot{\tilde{l}}_{i-1}(\theta) | \mathcal{F}_{i-1}] | \mathcal{F}_k] \\ &= \mathbb{E}_\theta[\dot{\tilde{l}}_n(\theta) | \mathcal{F}_k] - \sum_{i=1}^k \mathbb{E}_\theta[\mathbb{E}_\theta[\dot{\tilde{l}}_i(\theta) - \dot{\tilde{l}}_{i-1}(\theta) | \mathcal{F}_{i-1}] | \mathcal{F}_k] \\ &\quad - \sum_{i=k+1}^n \mathbb{E}_\theta[\mathbb{E}_\theta[\dot{\tilde{l}}_i(\theta) - \dot{\tilde{l}}_{i-1}(\theta) | \mathcal{F}_{i-1}] | \mathcal{F}_k] \\ &= \mathbb{E}_\theta[\dot{\tilde{l}}_n(\theta) | \mathcal{F}_k] - \sum_{i=k+1}^n \mathbb{E}_\theta[\dot{\tilde{l}}_i(\theta) - \dot{\tilde{l}}_{i-1}(\theta) | \mathcal{F}_k] - \sum_{i=1}^k \mathbb{E}_\theta[\dot{\tilde{l}}_i(\theta) - \dot{\tilde{l}}_{i-1}(\theta) | \mathcal{F}_{i-1}] \\ &= \mathbb{E}_\theta[\dot{\tilde{l}}_n(\theta) - \sum_{i=k+1}^n \{\dot{\tilde{l}}_i(\theta) - \dot{\tilde{l}}_{i-1}(\theta)\} | \mathcal{F}_k] - \sum_{i=1}^k \mathbb{E}_\theta[\dot{\tilde{l}}_i(\theta) - \dot{\tilde{l}}_{i-1}(\theta) | \mathcal{F}_{i-1}] \\ &= \dot{\tilde{l}}_k(\theta) - \sum_{i=1}^k \mathbb{E}_\theta[\dot{\tilde{l}}_i(\theta) - \dot{\tilde{l}}_{i-1}(\theta) | \mathcal{F}_{i-1}] \\ &= G_k(\theta) \end{aligned}$$

■

Agora trabalhamos com o martingal  $G_n(\theta)$ . Usando a proposição anterior com (2.49).

O compensador resulta ser

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_\theta[\dot{\hat{l}}_i(\theta) - \dot{\hat{l}}_{i-1}(\theta) | \mathcal{F}_{i-1}] &= \sum_{i=1}^N \frac{\dot{b}(X_{(i-1)\Delta}; \theta)}{\sigma^2(X_{(i-1)\Delta})} (\mathbb{E}_\theta[X_{i\Delta} | \mathcal{F}_{i-1}] - X_{(i-1)\Delta}) \\ &\quad - \Delta \sum_{i=1}^N \frac{b(X_{(i-1)\Delta}; \theta) \dot{b}(X_{(i-1)\Delta}; \theta)}{\sigma^2(X_{(i-1)\Delta})} \end{aligned}$$

Seja  $F(x; \theta) = \mathbb{E}_\theta[X_\Delta | X_0 = x]$ , então

$$G_N(\theta) = \sum_{i=1}^N \frac{\dot{b}(X_{(i-1)\Delta}; \theta)}{\sigma^2(X_{(i-1)\Delta})} (X_{i\Delta} - F(X_{(i-1)\Delta}; \theta)) \quad (2.51)$$

A equação (2.51) determina a função *score* em tempo contínuo proposta por Bibby & Sorensen [15] para o caso unidimensional.

No caso geral,  $\theta$  é um vetor  $k$ -dimensional e  $\mathbf{X}_t$  é um processo  $d$ -dimensional. O drift  $b(\cdot; \theta)$  é um vetor  $d$ -dimensional, o coeficiente de difusão  $\sigma(\cdot)$  uma matriz  $d \times m$  e  $\mathbf{W}_t$  um movimento Browniano  $m$ -dimensional.

Neste caso  $\mathbf{G}_N(\theta)$  fica

$$\mathbf{G}_N(\theta) = \sum_{i=1}^N \dot{b}(\mathbf{X}_{(i-1)\Delta}; \theta)^T [\sigma(\mathbf{X}_{(i-1)\Delta}) \sigma(\mathbf{X}_{(i-1)\Delta})^T]^{-1} (\mathbf{X}_{i\Delta} - F(\mathbf{X}_{(i-1)\Delta}; \theta)) \quad (2.52)$$

Vamos usar o método acima no modelo da equação (2.41).

Neste caso temos  $\theta = \{\alpha, m_Y\}$  e

$$b(x, y; \theta) = \begin{pmatrix} \mu x \\ \alpha(m_Y - y) \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

$$\sigma(x, y) = \begin{pmatrix} x f_1(y) & 0 \\ \rho_1 \beta_Y & \sqrt{1 - \rho_1^2} \beta_Y \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

$$F(x_t, y_t; \theta) = \begin{pmatrix} x_{t-1} e^{\mu \Delta} \\ m_Y + e^{-\alpha \Delta} [y_{t-1} - m_Y] \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

Substituindo (2.53), (2.54) e (2.55) em (2.52) temos

$$\begin{aligned} -\beta_Y \rho_1 \sum_{t=1}^N \frac{(m_Y - y_{t-1})(x_t - x_{t-1} e^{\mu \Delta})}{f_1(y_{t-1}) x_{t-1}} + \sum_{t=1}^N (m_Y - y_{t-1})(y_t - m_Y - e^{-\alpha \Delta} [y_{t-1} - m_Y]) &= 0 \\ -\beta_Y \rho_1 \sum_{t=1}^N \frac{(x_t - x_{t-1} e^{\mu \Delta})}{f_1(y_{t-1}) x_{t-1}} + \sum_{t=1}^N (y_t - m_Y - e^{-\alpha \Delta} [y_{t-1} - m_Y]) &= 0 \end{aligned} \quad (2.56)$$

O sistema (2.56) determina  $\alpha$  e  $m_Y$ . Os parâmetros  $\mu$  e  $\beta_Y$  podem ser estimados usando (2.22) e (2.47) respectivamente. Entretanto a correlação  $\rho_1$  será tomada como uma variável de controle.

Uma outra aplicação deste método aos modelos para a taxa de juros pode ser encontrada em [17].

## 2.5 Resultados usando Preços da Petrobras

A seguir são apresentados os resultados obtidos usando preços das ações da Petrobras negociadas no mercado Americano.

Para estimar a reversão rápida à média usamos dados de alta frequência, mais especificamente usamos dados em frequência de 1 minuto durante o período do 11/11/2009 até 25/05/2010<sup>1</sup>. São eliminados os *overnights* e os dias de não negociação como feriados e finais de semana.

---

<sup>1</sup>Todos os dados usados neste trabalho foram disponibilizados gentilmente por Daniel Tonholo.

A Figura 2.1 mostra o gráfico dos preços em alta frequência das ações da Petrobras, onde cada ponto desta série representa a média de preços de 1 minuto num intervalo de 5 minutos, como foi proposto por Fouque et.al [2].

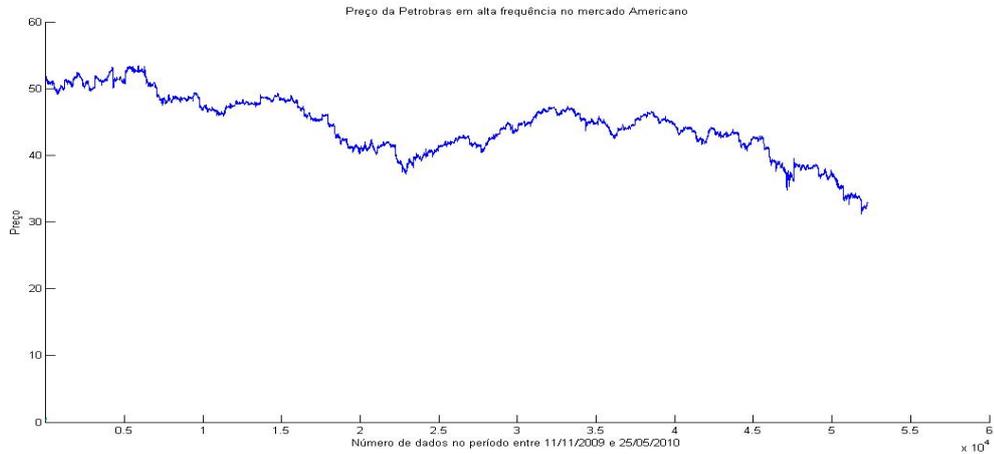


Figura 2.1: Preços das ações da Petrobras em alta frequência negociadas no mercado Americano no período 11/11/2009 até 25/05/2010.

E a Figura 2.2 mostra o gráfico dos retornos da série de preços da Petrobras.

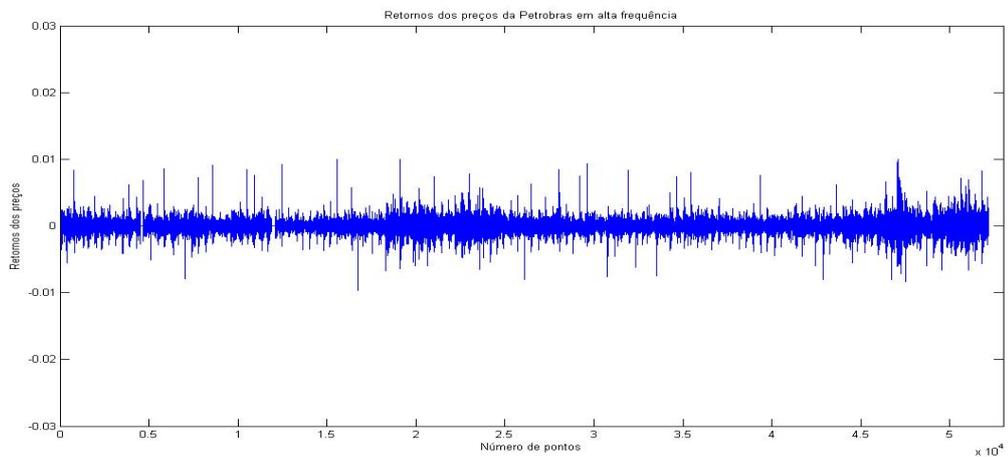


Figura 2.2: Retornos dos preços das ações da Petrobras em alta frequência negociadas no mercado Americano no período 11/11/2009 até 25/05/2010.

Utilizando o Algoritmo do Variograma apresentado na Seção 2.2, podemos calcular os parâmetros  $\alpha$  e  $\nu_Y$  neste caso.

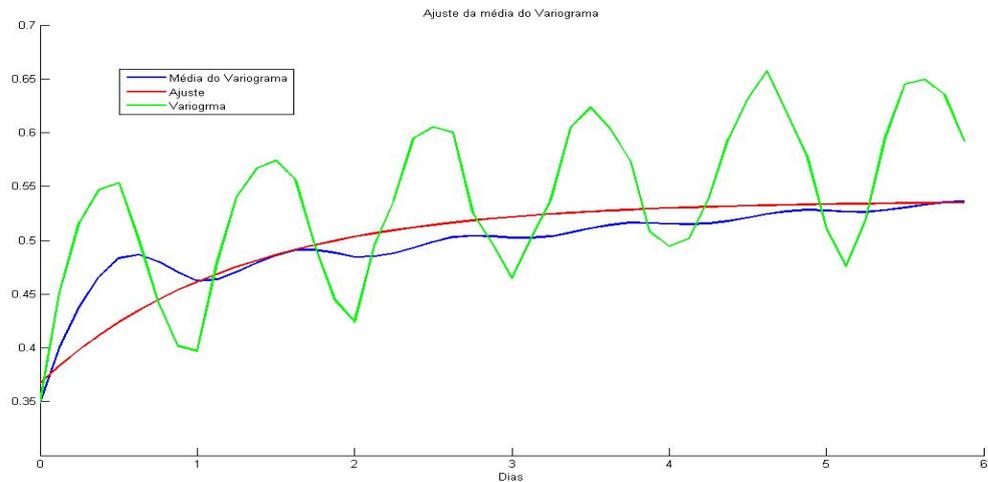


Figura 2.3: Ajuste da média do Variograma na escala rápida.

A Figura 2.3 mostra o gráfico do ajuste da média do Variograma usando preços das ações da Petrobras em alta frequência usando o método do Variograma proposto por Fouque et.al [2]. Fixamos um filtro de 9 pontos como foi proposto por Fouque et.al [2], porém se tivéssemos usado outros valores do filtro, as conclusões obtidas não mudariam. Os valores estimados são mostrados abaixo em unidades diárias

$\alpha$	$\nu_Y$	$\beta_Y$	$\mu$	$m_Y$
0.8829	0.3061	0.4068	-0.00038	-3.8958

Tabela 2.1: Parâmetros estimados através do método do Variograma usando dados de alta frequência.

Os parâmetros encontrados usando o método do Variograma revelam que os preços da Petrobras têm uma reversão à média de 1.13 dias, um valor que está abaixo do 1.5 dias encontrado por Fouque et.al [2] usando preços de S&P 500, e acima de 0.35 dias encontrado por Machado usando preços do Ibovespa [3].

Analogamente estimamos a reversão à média para a escala longa. Neste caso usamos dados em frequência diária, como foi proposto em [18], durante o período do 02/01/2001 até 25/05/2010. A Figura 2.4 mostra a série de preços em frequência diária da Petrobras negociados no mercado Americano no período mencionado anteriormente.

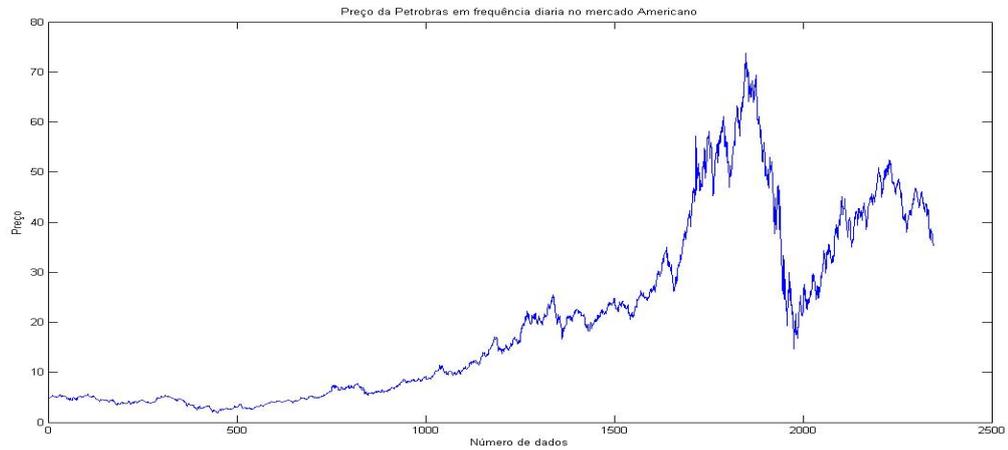


Figura 2.4: Preços das ações da Petrobras em frequência diária negociadas no mercado Americano no período 02/01/2001 até 25/05/2010.

A Figura 2.5 mostra a série de retornos dos preços.

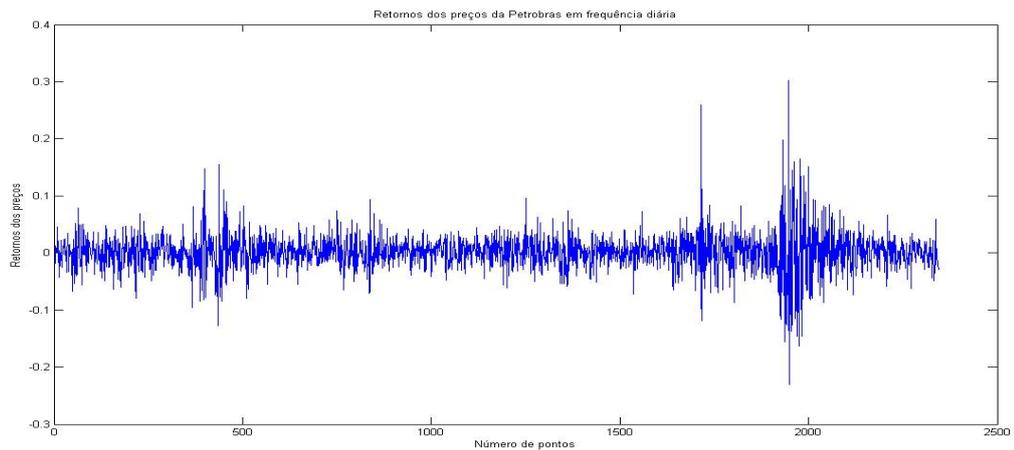


Figura 2.5: Retornos dos preços das ações da Petrobras em frequência diária negociadas no mercado Americano no período 02/01/2001 até 25/05/2010.

A Figura 2.6 mostra o gráfico do ajuste da média do Variograma usando preços das ações da Petrobras em frequência diária através do método do Variograma proposto por Fouque et.al [2]. Observemos que a forma do Variograma é diferente em comparação ao obtido usando preços de alta frequência. Fixamos um filtro de 3 pontos.

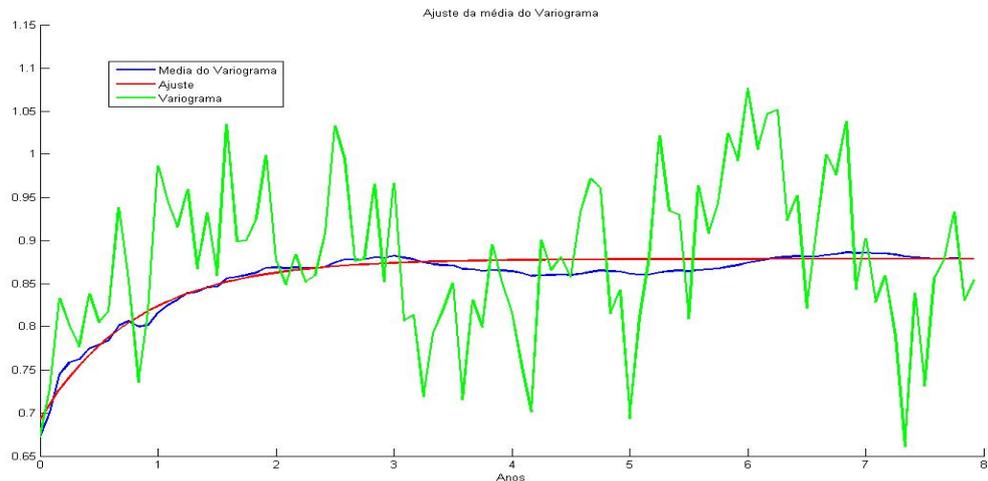


Figura 2.6: Ajuste da média do Variograma na escala longa.

Os valores dos parâmetros estimados são mostrados abaixo em unidades anuais.

$\delta$	$\nu_Z$	$\beta_Z$	$\mu$	$m_Z$
1.7001	0.3210	0.5920	0.0043	-2.9301

Tabela 2.2: Parâmetros estimados através do método do Variograma usando dados diários.

Os parâmetros encontrados usando o método do Variograma revelam que os preços da Petrobras têm uma reversão à média da escala longa de 7.05 meses.

Como foi mostrado por Fouque et.al [2], as estimativas obtidas não dependem da hipótese inicial de que a correlação seja igual a zero.

Agora procedemos a estimar através do método alternativo usando Máxima Verossimilhança.

O valor de  $\lambda$  que aparece na equação (2.39) é um parâmetro que suaviza a curva de volatilidade estimada através do método de Fourier. Este parâmetro é escolhido usando

simulações com o mesmo número de dados e diferentes valores dos parâmetros associados ao modelo considerado.

No caso da reversão rápida à média, o valor de  $\lambda$  resulta ser de 0.0021. Observe que outros valores de  $\lambda$  mudam as estimativas dos parâmetros, porém a conclusão de que existe uma rápida reversão não muda.

O processo de reversão rápida à média  $Y$  estimado através do método de Fourier é mostrado na Figura 2.7.

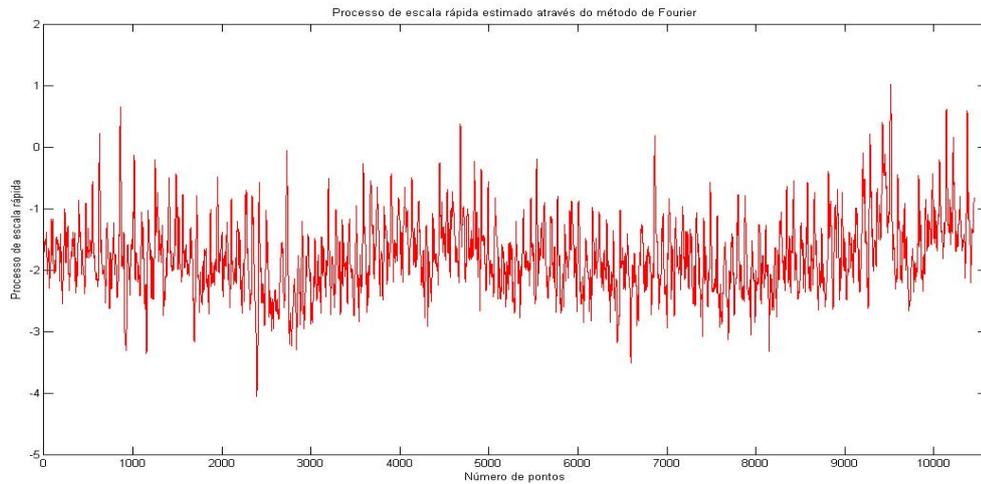


Figura 2.7: Estimativa do processo  $Y$  através do método de Fourier.

Usando o processo estimado anteriormente podemos obter os parâmetros associados ao modelo através dos métodos de estimação descritos na Seção 2.4.

Os parâmetros estimados através dos dois métodos propostos na Seção 2.4 são mostrados na Tabela 2.3.

Método de estimação	$\alpha$	$\beta_Y$	$\mu$	$m_Y$
Max. Verossimilhança discreta	0.7178	0.6982	-0.00038	-1.7694
Max. Verossimilhança contínua	0.7213	0.6982	-0.00038	-1.7696

Tabela 2.3: Parâmetros estimados através do método de Máxima Verossimilhança usando dados de alta frequência.

A Tabela 2.4 mostra a sensibilidade do parâmetro  $\alpha$  estimado com respeito aos diferentes valores de  $\rho$ .

$\alpha \setminus \rho$	-0.2	-0.4	-0.6	-0.8
Max. Verossimilhança discreta	0.7475	0.7772	0.8069	0.8367
Max. Verossimilhança contínua	0.7513	0.7813	0.8114	0.8414

Tabela 2.4: Parâmetros estimados através do método de Máxima Verossimilhança usando dados de alta frequência para diferentes valores de  $\rho$ .

Concluimos que usando o método de Fourier e o método de Máxima Verossimilhança que o processo de preços da Petrobras tem uma taxa de reversão à média de 1.39 dias.

Analogamente, trabalhamos com a série de preço da Petrobras em frequência diária.

No caso da reversão do processo  $Z$  na escala longa o valor de  $\lambda$  resulta ser 0.04. Observe que outros valores de  $\lambda$  mudam as estimativas dos parâmetros, porém a conclusão de que existe uma reversão na escala longa não muda.

O processo de reversão à média para a escala longa  $Z$  estimado através do método de Fourier é mostrado na Figura 2.8.

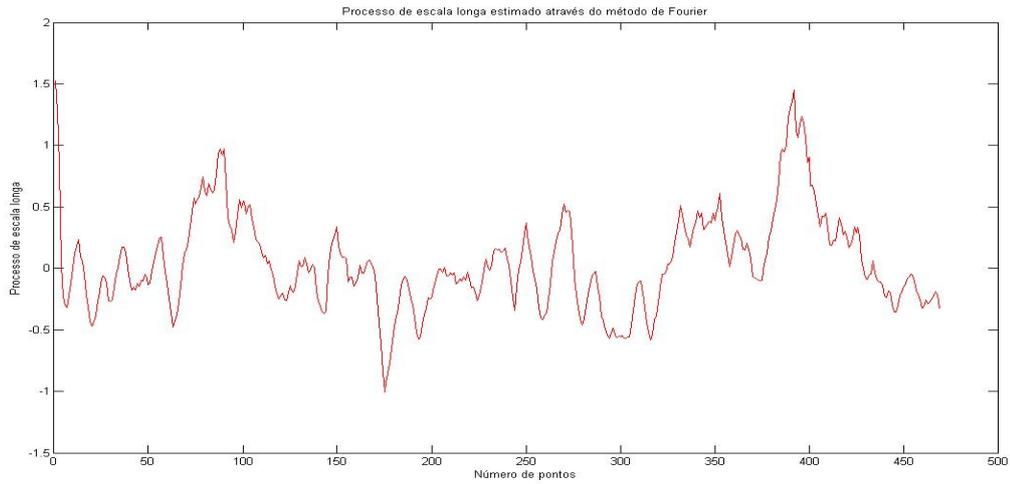


Figura 2.8: Estimativa do processo  $Z$  através do método de Fourier.

Neste caso os parâmetros estimados através dos dois métodos propostos na Seção 2.4 são mostrados na tabela 2.5.

Método de estimação	$\delta$	$\beta_Z$	$\mu$	$m_Z$
Max. Verossimilhança discreta	1.2631	0.6148	0.0305	0.0252
Max. Verossimilhança contínua	1.2793	0.6148	0.0305	0.0252

Tabela 2.5: Parâmetros estimados através do método de Máxima Verossimilhança usando dados em frequência diária.

A Tabela 2.6 mostra a sensibilidade do parâmetro  $\delta$  estimado com respeito aos diferentes valores de  $\rho$ .

$\delta \setminus \rho$	-0.2	-0.4	-0.6	-0.8
Max. Verossimilhança discreta	1.3319	1.4009	1.4696	1.5384
Max. Verossimilhança contínua	1.3500	1.4209	1.4925	1.5625

Tabela 2.6: Parâmetros estimados através do método de Máxima Verossimilhança usando dados em frequência diária para diferentes valores de  $\rho$ .

Concluimos que, usando o método de Fourier e o método de Máxima Verossimilhança, o processo de preços da Petrobras tem uma taxa de reversão à média de escala longa de 9.5 meses.

As estimativas obtidas por qualquer um dos métodos usados confirmam a existência de uma reversão à média de escala rápida e escala longa. Esta verificação permite que levemos adiante a análise assintótica do Capítulo 3.

# Capítulo 3

## Modelo de Volatilidade Estocástica Multiescala Assintótico

### 3.1 O Modelo Multiescala

Assumimos um modelo mais geral que o considerado por Machado [3], que incorpora uma escala rápida e a existência de uma escala longa para modelar a volatilidade estocástica que é descrito no trabalho de Fouque et al [4]. O modelo na medida física  $\mathbb{P}$  é dado por

$$\begin{aligned}dX_t &= \mu X_t dt + f(Y_t, Z_t) X_t dW_t^{(0)} \\dY_t &= \left\{ \frac{m - Y_t}{\epsilon} \right\} dt + \frac{\nu \sqrt{2}}{\sqrt{\epsilon}} dW_t^{(1)} \\dZ_t &= \delta c(Z_t) dt + \sqrt{\delta} g(Z_t) dW_t^{(2)}\end{aligned}\tag{3.1}$$

Aqui,  $\mu$  representa a média dos retornos dos preços,  $f(Y_t, Z_t)$  representa a volatilidade instantânea que depende de dois procesos estocásticos. Além disso,  $f(Y_t, Z_t)$  deve ser limitada tanto superiormente quanto inferiormente. O processo  $Y_t$  modela o comportamento da reversão rápida à média e o processo estocástico  $Z_t$  modela a escala longa. Assumimos que as funções  $c(\cdot)$  e  $g(\cdot)$  são suaves e possuem crescimento no máximo linear no infinito. Observemos também que neste caso estamos considerando um mercado incompleto.

Além disso, neste caso temos que  $(W_t^{(0)}, W_t^{(1)}, W_t^{(2)})$  é um Movimento Browniano tridimensional correlacionado, que pode ser representado em termos de um Movimento Browniano

não correlacionado  $(\tilde{W}_t^{(0)}, \tilde{W}_t^{(1)}, \tilde{W}_t^{(2)})$  como segue

$$\begin{aligned} dW_t^{(0)} &= d\tilde{W}_t^{(0)} \\ dW_t^{(1)} &= \rho_1 d\tilde{W}_t^{(0)} + \sqrt{1 - \rho_1^2} d\tilde{W}_t^{(1)} \\ dW_t^{(2)} &= \rho_2 d\tilde{W}_t^{(0)} + \tilde{\rho}_{1,2} d\tilde{W}_t^{(1)} + \sqrt{1 - \rho_2^2 - \tilde{\rho}_{1,2}^2} d\tilde{W}_t^{(2)} \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde  $(\tilde{W}_t^{(0)}, \tilde{W}_t^{(1)}, \tilde{W}_t^{(2)})$  representa um Movimento Browniano tridimensional padrão.

Este modelo requer que  $\epsilon \ll T \ll 1/\delta$ , onde  $T$  é a ordem de tempo em que estamos interessados, em geral  $T$  é o tempo de vida das opções.

Os parâmetros anteriores satisfazem  $|\rho_1| < 1$  e  $\rho_2^2 + \tilde{\rho}_{1,2}^2 < 1$ . Observe que neste caso, a covariação quadrática entre  $W_t^{(1)}$  e  $W_t^{(2)}$  é dada por  $\rho_{1,2} dt$  onde  $\rho_{1,2} := \rho_1 \rho_2 + \tilde{\rho}_{1,2} \sqrt{1 - \rho_1^2}$ .

Usando o Teorema de Girsanov podemos escrever o modelo (3.1) na medida neutra ao risco. O Teorema de Girsanov diz que segundo a nova medida neutra ao risco  $\mathbb{Q}$  temos um novo Movimento Browniano tridimensional padrão  $(\tilde{W}_t^{*(0)}, \tilde{W}_t^{*(1)}, \tilde{W}_t^{*(2)})$  satisfazendo

$$\begin{aligned} \tilde{W}_t^{*(0)} &= \tilde{W}_t^{(0)} + \int_0^t \frac{(\mu - r)}{f(Y_s, Z_s)} ds \\ \tilde{W}_t^{*(1)} &= \tilde{W}_t^{(1)} + \int_0^t \gamma(Y_s, Z_s) ds \\ \tilde{W}_t^{*(2)} &= \tilde{W}_t^{(2)} + \int_0^t \xi(Y_s, Z_s) ds \end{aligned} \quad (3.3)$$

A medida neutra ao risco  $\mathbb{Q}$  é dada por

$$\begin{aligned} \log \left\{ \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \right\} &= -\frac{1}{2} \int_0^T \left[ \frac{(\mu - r)^2}{f(Y_s, Z_s)^2} + \gamma(Y_s, Z_s)^2 + \xi(Y_s, Z_s)^2 \right] ds - \int_0^T \frac{(\mu - r)}{f(Y_s, Z_s)} d\tilde{W}_s^{(0)} \\ &\quad - \int_0^T \gamma(Y_s, Z_s) d\tilde{W}_s^{(1)} - \int_0^T \xi(Y_s, Z_s) d\tilde{W}_s^{(2)} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Sabemos que a relação satisfeita pelo Movimento Browniano tridimensional correlacionado  $(W_t^{*(0)}, W_t^{*(1)}, W_t^{*(2)})$  em termos de um Movimento Browniano tridimensional padrão na medida neutra é a mesma que na medida física, i.e

$$\begin{aligned}
dW_t^{*(0)} &= d\tilde{W}_t^{*(0)} \\
dW_t^{*(1)} &= \rho_1 d\tilde{W}_t^{*(0)} + \sqrt{1 - \rho_1^2} d\tilde{W}_t^{*(1)} \\
dW_t^{*(2)} &= \rho_2 d\tilde{W}_t^{*(0)} + \tilde{\rho}_{1,2} d\tilde{W}_t^{*(1)} + \sqrt{1 - \rho_2^2 - \tilde{\rho}_{1,2}^2} d\tilde{W}_t^{*(2)}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Na medida neutra ao risco  $\mathbb{Q}$ , o modelo (3.1) pode ser escrito em termos do Movimento Browniano tridimensional correlacionado como

$$\begin{aligned}
dX_t &= rX_t dt + f(Y_t, Z_t)X_t dW_t^{*(0)} \\
dY_t &= \left\{ \frac{(m - Y_t)}{\epsilon} - \frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\epsilon}} \Lambda(Y_t, Z_t) \right\} dt + \frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\epsilon}} dW_t^{*(1)} \\
dZ_t &= [\delta c(Z_t) - \sqrt{\delta} g(Z_t) \Gamma(Y_t, Z_t)] dt + \sqrt{\delta} g(Z_t) dW_t^{*(2)}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

onde

$$\begin{aligned}
\Lambda(y, z) &= \frac{\rho_1(\mu - r)}{f(y, z)} + \gamma(y, z) \sqrt{1 - \rho_1^2} \\
\Gamma(y, z) &= \frac{\rho_2(\mu - r)}{f(y, z)} + \gamma(y, z) \tilde{\rho}_{1,2} + \xi(y, z) \sqrt{1 - \rho_2^2 - \tilde{\rho}_{1,2}^2}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Escrevendo (3.6) em termos do Movimento Browniano tridimensional padrão na medida neutra  $\mathbb{Q}$  temos

$$\begin{aligned}
dX_t &= rX_t dt + f(Y_t, Z_t)X_t d\tilde{W}_t^{*(0)} \\
dY_t &= \left\{ \frac{m - Y_t}{\epsilon} - \frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\epsilon}} \Lambda(Y_t, Z_t) \right\} dt + \frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\epsilon}} \rho_1 d\tilde{W}_t^{*(0)} + \frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\epsilon}} \sqrt{1 - \rho_1^2} d\tilde{W}_t^{*(1)} \\
dZ_t &= [\delta c(Z_t) - \sqrt{\delta} g(Z_t) \Gamma(Y_t, Z_t)] dt + \sqrt{\delta} g(Z_t) \rho_2 d\tilde{W}_t^{*(0)} \\
&\quad + \sqrt{\delta} g(Z_t) \tilde{\rho}_{1,2} d\tilde{W}_t^{*(1)} + \sqrt{\delta} g(Z_t) \sqrt{1 - \rho_2^2 - \tilde{\rho}_{1,2}^2} d\tilde{W}_t^{*(2)}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Sabemos da teoria de apreçamento livre de arbitragem [6] que o preço de um contrato contingente neste modelo é dado por

$$P^{\epsilon, \delta}(t, X_t, Y_t, Z_t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)} h(X_T) | X_t, Y_t, Z_t] \tag{3.9}$$

Usando a fórmula de Feynman-Kac sabemos que  $P^{\epsilon,\delta}(t, x, y, z)$  é a solução da EDP parabólica com condição final

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t}P^{\epsilon,\delta} + rP^{\epsilon,\delta} &= A_tP^{\epsilon,\delta} \\ P^{\epsilon,\delta}(T, x, y, z) &= h(x) \end{aligned} \tag{3.10}$$

Vamos começar identificando os termos para aplicar Feynman-Kac dado por (1.28)

$$\begin{aligned} b_1(t, x, y, z) &= rx \\ b_2(t, x, y, z) &= \frac{(m-y)}{\epsilon} - \frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\epsilon}}\Lambda(y, z) \\ b_3(t, x, y, z) &= \delta c(z) - \sqrt{\delta}g(z)\Gamma(y, z) \\ \sigma_{1,1}(t, x, y, z) &= f(y, z)x \\ \sigma_{1,2}(t, x, y, z) &= 0 \\ \sigma_{1,3}(t, x, y, z) &= 0 \\ \sigma_{2,1}(t, x, y, z) &= \frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\epsilon}}\rho_1 \\ \sigma_{2,2}(t, x, y, z) &= \frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\epsilon}}\sqrt{1-\rho_1^2} \\ \sigma_{2,3}(t, x, y, z) &= 0 \\ \sigma_{3,1}(t, x, y, z) &= \sqrt{\delta}g(z)\rho_2 \\ \sigma_{3,2}(t, x, y, z) &= \sqrt{\delta}g(z)\tilde{\rho}_{1,2} \\ \sigma_{3,3}(t, x, y, z) &= \sqrt{\delta}g(z)\sqrt{1-\rho_2^2-\tilde{\rho}_{1,2}^2} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
a_{1,1}(t, x, y, z) &= f(y, z)^2 x^2 \\
a_{1,2}(t, x, y, z) &= \frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\epsilon}} \rho_1 f(y, z) x \\
a_{1,3}(t, x, y, z) &= \sqrt{\delta} g(z) \rho_2 f(y, z) x \\
a_{2,1}(t, x, y, z) &= \frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\epsilon}} \rho_1 f(y, z) x \\
a_{2,2}(t, x, y, z) &= \frac{2\nu^2}{\epsilon} \rho_1^2 + \frac{2\nu^2}{\epsilon} (1 - \rho_1^2) \\
a_{2,3}(t, x, y, z) &= \sqrt{\delta} g(z) \rho_2 \frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\epsilon}} \rho_1 + \sqrt{\delta} g(z) \tilde{\rho}_{1,2} \frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\epsilon}} \sqrt{1 - \rho_1^2} \\
a_{3,1}(t, x, y, z) &= \sqrt{\delta} g(z) \rho_2 f(y, z) x \\
a_{3,2}(t, x, y, z) &= \sqrt{\delta} g(z) \rho_2 \frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\epsilon}} \rho_1 + \sqrt{\delta} g(z) \tilde{\rho}_{1,2} \frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\epsilon}} \sqrt{1 - \rho_1^2} \\
a_{3,3}(t, x, y, z) &= \delta g(z)^2 \rho_2^2 + \delta g(z)^2 \tilde{\rho}_{1,2}^2 + \delta g(z)^2 (1 - \rho_2^2 - \tilde{\rho}_{1,2}^2)
\end{aligned}$$

Substituindo estes valores na equação anterior temos

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial t} P^{\epsilon, \delta} + r P^{\epsilon, \delta} &= \frac{1}{2} f(y, z)^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} P^{\epsilon, \delta} + \frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\epsilon}} \rho_1 f(y, z) x \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} P^{\epsilon, \delta} \\
&+ \frac{1}{2} \frac{2\nu^2}{\epsilon} \frac{\partial^2}{\partial y^2} P^{\epsilon, \delta} + \frac{1}{2} \delta g(z)^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} P^{\epsilon, \delta} + \sqrt{\delta} g(z) \rho_2 f(y, z) x \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} P^{\epsilon, \delta} \\
&+ \left\{ \sqrt{\delta} g(z) \rho_2 \frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\epsilon}} \rho_1 + \sqrt{\delta} g(z) \tilde{\rho}_{1,2} \frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\epsilon}} \sqrt{1 - \rho_1^2} \right\} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} P^{\epsilon, \delta} \\
&+ r x \frac{\partial}{\partial x} P^{\epsilon, \delta} + \left\{ \frac{m - y}{\epsilon} - \frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\epsilon}} \Lambda(y, z) \right\} \frac{\partial}{\partial y} P^{\epsilon, \delta} \\
&+ \left\{ \delta c(z) - \sqrt{\delta} g(z) \Gamma(y, z) \right\} \frac{\partial}{\partial z} P^{\epsilon, \delta} \tag{3.11}
\end{aligned}$$

Logo o problema (3.10) reduz-se a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{\epsilon, \delta} P^{\epsilon, \delta} &= 0 \\
P^{\epsilon, \delta}(T, x, y, z) &= h(x) \tag{3.12}
\end{aligned}$$

onde denotamos por  $\mathcal{L}^{\epsilon, \delta}$  o operador

$$\mathcal{L}^{\epsilon, \delta} = \frac{1}{\epsilon} \mathcal{L}_0 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \sqrt{\delta} \mathcal{M}_1 + \delta \mathcal{M}_2 + \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\epsilon}} \mathcal{M}_3 \quad (3.13)$$

Para descobrir os operadores aparecendo na equação anterior, rearranjamos os termos que aparecem na equação (3.11)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\epsilon} \left\{ \nu^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (m-y) \frac{\partial}{\partial y} \right\} + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \left\{ f(y, z) x \nu \sqrt{2} \rho_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \nu \sqrt{2} \Lambda(y, z) \frac{\partial}{\partial y} \right\} \\ & + \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} f(y, z)^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + r \left( x \frac{\partial}{\partial x} - \cdot \right) \right\} \\ & + \sqrt{\delta} \left\{ f(y, z) x g(z) \rho_2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} - g(z) \Gamma(y, z) \frac{\partial}{\partial z} \right\} + \delta \left\{ \frac{1}{2} g(z)^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + c(z) \frac{\partial}{\partial z} \right\} \\ & + \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\epsilon}} \left\{ \nu \sqrt{2} g(z) \left[ \rho_1 \rho_2 + \tilde{\rho}_{1,2} \sqrt{1 - \rho_1^2} \right] \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \right\} \end{aligned}$$

Logo os operadores no lado direito de (3.13) são

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= (m-y) \frac{\partial}{\partial y} + \nu^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \mathcal{L}_1 &= \nu \sqrt{2} \left\{ f(y, z) x \rho_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \Lambda(y, z) \frac{\partial}{\partial y} \right\} \\ \mathcal{L}_2 &= \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} f(y, z)^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + r \left( x \frac{\partial}{\partial x} - \cdot \right) \\ \mathcal{M}_1 &= f(y, z) x g(z) \rho_2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} - g(z) \Gamma(y, z) \frac{\partial}{\partial z} \\ \mathcal{M}_2 &= \frac{1}{2} g(z)^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + c(z) \frac{\partial}{\partial z} \\ \mathcal{M}_3 &= \nu \sqrt{2} g(z) \rho_{1,2} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \end{aligned} \quad (3.14)$$

## 3.2 Aproximação do Preço de um Contrato

Procuramos uma aproximação do preço de um contrato contingenciado através do método de perturbação singular-regular, observemos que a componente regular da aproximação não piora a ordem da aproximação.

Para aplicar o método expandimos o preço em potências de  $\delta$

$$P^{\epsilon, \delta} = P_0^\epsilon + \sqrt{\delta} P_1^\epsilon + \delta P_2^\epsilon + \dots \quad (3.15)$$

Agora usando o modelo (3.12) junto com a equação (3.13) e a aproximação para o preço (3.15) são razoáveis as seguintes definições

**Definição 3.1.** *O termo  $P_0^\epsilon$  é definido como a única solução do problema*

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\epsilon} \mathcal{L}_0 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 \right) P_0^\epsilon &= 0 \\ P_0^\epsilon(T, x, y) &= h(x) \end{aligned} \quad (3.16)$$

**Definição 3.2.** *O termo  $P_1^\epsilon$  é definido como a única solução do problema*

$$\left( \frac{1}{\epsilon} \mathcal{L}_0 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 \right) P_1^\epsilon = - \left( \mathcal{M}_1 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \mathcal{M}_3 \right) P_0^\epsilon \quad (3.17)$$

Para deduzir uma fórmula aproximada para o preço de um contrato contingente, começamos expandindo formalmente  $P_0^\epsilon$  em potências de  $\epsilon$ , da forma

$$P_0^\epsilon = P_0 + \sqrt{\epsilon} P_{1,0} + \epsilon P_{2,0} + \epsilon^{\frac{3}{2}} P_{3,0} + \dots \quad (3.18)$$

Isto faz sentido em nosso modelo já que estamos supondo que existe uma escala rápida na volatilidade. Porém resultados rigorosos de convergência requerem uma análise cuidadosa e hipóteses apropriadas que podem ser estudadas no Capítulo 5 de [2].

Substituindo (3.18) em (3.16), temos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\epsilon} \mathcal{L}_0 P_0 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \mathcal{L}_0 P_{1,0} + \mathcal{L}_0 P_{2,0} + \sqrt{\epsilon} \mathcal{L}_0 P_{3,0} + \dots \\
& \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \mathcal{L}_1 P_0 + \mathcal{L}_1 P_{1,0} + \sqrt{\epsilon} \mathcal{L}_1 P_{2,0} + \epsilon \mathcal{L}_1 P_{3,0} + \dots \\
& \mathcal{L}_2 P_0 + \sqrt{\epsilon} \mathcal{L}_2 P_{1,0} + \epsilon \mathcal{L}_2 P_{2,0} + \epsilon^{\frac{3}{2}} \mathcal{L}_2 P_{3,0} + \dots = 0
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Rearranjando os termos que aparecem em (3.19) temos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\epsilon} \mathcal{L}_0 P_0 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \{ \mathcal{L}_0 P_{1,0} + \mathcal{L}_1 P_0 \} + \{ \mathcal{L}_0 P_{2,0} + \mathcal{L}_1 P_{1,0} + \mathcal{L}_2 P_0 \} \\
& + \sqrt{\epsilon} \{ \mathcal{L}_0 P_{3,0} + \mathcal{L}_1 P_{2,0} + \mathcal{L}_2 P_{1,0} \} + \dots = 0
\end{aligned}$$

Balanceando as diversas potências de  $\epsilon$  que aparecem nesta equação obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon}\right) & \longrightarrow \mathcal{L}_0 P_0 = 0 \\
\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\right) & \longrightarrow \mathcal{L}_0 P_{1,0} + \mathcal{L}_1 P_0 = 0 \\
\mathcal{O}(1) & \longrightarrow \mathcal{L}_0 P_{2,0} + \mathcal{L}_1 P_{1,0} + \mathcal{L}_2 P_0 = 0 \\
\mathcal{O}(\sqrt{\epsilon}) & \longrightarrow \mathcal{L}_0 P_{3,0} + \mathcal{L}_1 P_{2,0} + \mathcal{L}_2 P_{1,0} = 0
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Analisando estas últimas equações e lembrando as definições dos operadores dadas em (3.14) podemos deduzir algumas propriedades. Olhando para a equação de  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$ , concluímos que  $P_0 = P_0(t, x, z)$ , isto é,  $P_0$  não depende de  $y$  devido a que o operador  $\mathcal{L}_0$  aplica na derivada com respeito a  $y$ . Agora usando este resultado e observando que o operador  $\mathcal{L}_1$  aplica na derivada com respeito a  $y$  temos que a segunda equação reduz-se a  $\mathcal{L}_0 P_{1,0} = 0$  e daí deduzimos que  $P_{1,0} = P_{1,0}(t, x, z)$ . Agora usando o anterior e a equação de  $\mathcal{O}(1)$ , vemos que esta equação reduz-se a  $\mathcal{L}_0 P_{2,0} + \mathcal{L}_2 P_0 = 0$ .

Observemos que esta última equação descreve uma equação de Poisson para  $P_{2,0}$  e logo usando a alternativa de Fredholm [19] este problema terá solução apenas se  $\mathcal{L}_2 P_0 \in$

$(\text{Ker } \mathcal{L}_0^*)^\perp$ . Seguindo os argumentos do Capítulo 3 de [2], isto é equivalente a dizer que  $\mathcal{L}_2 P_0$  tem média zero com respeito a medida invariante do processo de Ornstein-Uhlenbeck, dado por  $\mathcal{L}_0$ , isto é

$$\langle \mathcal{L}_2 P_0 \rangle := \int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}_2 P_0 \Phi(y) dy = 0 \quad (3.21)$$

onde  $\Phi(\cdot)$  é a densidade da distribuição invariante associada a  $\mathcal{L}_0$ , cuja distribuição é normal de média  $m$  e variância  $\nu^2$ .

Agora usando que  $P_0$  não depende de  $y$  podemos representar (3.21) como

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_2 P_0 \rangle &= \left\langle \frac{\partial P_0}{\partial t} + \frac{1}{2} f(y, z)^2 x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} + r \left( x \frac{\partial P_0}{\partial x} - P_0 \right) \right\rangle \\ &= \frac{\partial P_0}{\partial t} + \frac{1}{2} \langle f(\cdot, z)^2 \rangle x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} + r x \frac{\partial P_0}{\partial x} - r P_0 \\ &= \mathcal{L}_2(\langle f(\cdot, z)^2 \rangle) P_0 = 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde o operador  $\mathcal{L}_2(\langle f(\cdot, z)^2 \rangle)$  representa o operador de Black & Scholes com volatilidade dada por  $\langle f(\cdot, z)^2 \rangle$ .

**Definição 3.3.**  $P_0$  é determinado como a única solução do problema

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_2 \rangle P_0 &= 0 \\ P_0(T, x, z) &= h(x) \end{aligned} \quad (3.23)$$

onde

$$\langle \mathcal{L}_2 \rangle = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \langle f(\cdot, z)^2 \rangle x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + r \left( x \frac{\partial}{\partial x} - \cdot \right) \quad (3.24)$$

é o operador de Black & Scholes com volatilidade dada por  $\bar{\sigma}^2(z) := \langle f(\cdot, z)^2 \rangle$ .

Logo temos que

$$P_0(t, x, z) = C_{BS}(t, x, \bar{\sigma}(z)) \quad (3.25)$$

O próximo passo consiste em determinar uma aproximação para  $P_{1,0}$ .

Olhando para a equação de  $\mathcal{O}(1)$  em (3.20), e usando (3.23) podemos deduzir que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 P_{2,0} &= -\mathcal{L}_2 P_0 = -\mathcal{L}_2 P_0 + \langle \mathcal{L}_2 \rangle P_0 = -\{\mathcal{L}_2 - \langle \mathcal{L}_2 \rangle\} P_0 \\ \implies P_{2,0} &= -\mathcal{L}_0^{-1} \{\mathcal{L}_2 - \langle \mathcal{L}_2 \rangle\} P_0\end{aligned}\tag{3.26}$$

A equação de  $\mathcal{O}(\sqrt{\epsilon})$  em (3.20), fornece a seguinte equação de Poisson para  $P_{3,0}$ .

$$\mathcal{L}_0 P_{3,0} + \mathcal{L}_1 P_{2,0} + \mathcal{L}_2 P_{1,0} = 0\tag{3.27}$$

A condição de Fredholm para esta equação é

$$\langle \mathcal{L}_1 P_{2,0} + \mathcal{L}_2 P_{1,0} \rangle = 0\tag{3.28}$$

Como vimos anteriormente  $P_{1,0}$  não depende da variável  $y$ , logo temos a seguinte caracterização para  $P_{1,0}$ .

**Definição 3.4.** *A função  $P_{1,0}(t, x, z)$  é a solução do problema não homogêneo*

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{L}_2 \rangle P_{1,0} &= \mathcal{A} P_0 \\ P_{1,0}(T, x, z) &= 0\end{aligned}\tag{3.29}$$

onde

$$\mathcal{A} = \langle \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_0^{-1} \{\mathcal{L}_2 - \langle \mathcal{L}_2 \rangle\} \rangle\tag{3.30}$$

O próximo passo é calcular explicitamente o operador  $\mathcal{A}$ .

Seja  $\phi(y, z)$  a solução da seguinte equação de Poisson

$$\mathcal{L}_0 \phi(y, z) = f(y, z)^2 - \bar{\sigma}(z)^2\tag{3.31}$$

De (3.31) e da equação de  $\mathcal{O}(1)$  em (3.20) temos que

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}_0 P_{2,0} + \mathcal{L}_2 P_0 = 0 \\
\iff & \mathcal{L}_0 P_{2,0} = -\{\mathcal{L}_2 - \langle \mathcal{L}_2 \rangle\} P_0 \\
\iff & \mathcal{L}_0 P_{2,0} = -\frac{1}{2}\{f(y, z)^2 - \bar{\sigma}(z)^2\} x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} \tag{3.32}
\end{aligned}$$

Logo, usando que o operador  $\mathcal{L}_0$  apenas depende das derivadas com relação a  $y$ , podemos concluir que

$$\mathcal{L}_0^{-1}\{\mathcal{L}_2 - \langle \mathcal{L}_2 \rangle\} P_0 = \frac{1}{2}\phi(y, z) x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\mathcal{L}_0^{-1}\{f(y, z)^2 - \bar{\sigma}(z)^2\} x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} \tag{3.33}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_0^{-1}\{\mathcal{L}_2 - \langle \mathcal{L}_2 \rangle\} &= \mathcal{L}_1 \left\{ \frac{1}{2}\phi(y, z) x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\} \\
&= \frac{\nu\sqrt{2}}{2} \left\{ \rho_1 f(y, z) x \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left\{ \phi(y, z) x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\} - \Lambda(y, z) x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial y} \right\} \right\} \\
&= \frac{\nu\rho_1}{\sqrt{2}} f(y, z) \frac{\partial \phi}{\partial y} x \frac{\partial}{\partial x} \left\{ x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\} - \frac{\nu}{\sqrt{2}} \Lambda(y, z) \frac{\partial \phi}{\partial y} x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{3.34}
\end{aligned}$$

Agora lembrando que o operador de Black & Scholes comuta com  $x^k \frac{\partial^k}{\partial x^k}$ , ou seja

$$\mathcal{L}_{BS} \left\{ x^k \frac{\partial^k G}{\partial x^k} \right\} = x^k \frac{\partial^k}{\partial x^k} \mathcal{L}_{BS}(G) \tag{3.35}$$

temos a seguinte

**Proposição 3.5.**

$$P_{1,0} = -(T - t)\mathcal{A}P_0 \tag{3.36}$$

**Demonstração:** De fato, provaremos que  $P_{1,0}$  resolve o problema (3.29), onde o operador  $\mathcal{A}$  pode ser escrito como segue

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \langle \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_0^{-1}\{\mathcal{L}_2 - \langle \mathcal{L}_2 \rangle\} \rangle \\
&= \frac{\nu\rho_1}{\sqrt{2}} \langle f(\cdot, z) \frac{\partial \phi}{\partial y} \rangle x \frac{\partial}{\partial x} \left\{ x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\} - \frac{\nu}{\sqrt{2}} \langle \Lambda(\cdot, z) \frac{\partial \phi}{\partial y} \rangle x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\
&= \frac{\nu\rho_1}{\sqrt{2}} \langle f\phi' \rangle x^3 \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \left( \sqrt{2}\nu\rho_1 \langle f\phi' \rangle - \frac{\nu}{\sqrt{2}} \langle \Lambda\phi' \rangle \right) x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{3.37}
\end{aligned}$$

Agora usando este último resultado e que  $P_0$  resolve o problema (3.23) temos

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{L}_2 \rangle P_{1,0} &= \langle \mathcal{L}_2 \rangle \{-(T-t)\mathcal{A}P_0\} \\
&= \langle \mathcal{L}_2 \rangle \{-(T-t)\} \mathcal{A}P_0 - (T-t) \langle \mathcal{L}_2 \rangle \{\mathcal{A}P_0\} \\
&= \mathcal{A}P_0 - (T-t) \langle \mathcal{L}_2 \rangle \{\mathcal{A}P_0\} \\
&= \mathcal{A}P_0 - (T-t) \langle \mathcal{L}_2 \rangle \left\{ \frac{\nu\rho_1}{\sqrt{2}} \langle f\phi' \rangle x^3 \frac{\partial^3}{\partial x^3} P_0 \right\} \\
&\quad - (T-t) \langle \mathcal{L}_2 \rangle \left\{ \left( \sqrt{2}\nu\rho_1 \langle f\phi' \rangle - \frac{\nu}{\sqrt{2}} \langle \Lambda\phi' \rangle \right) x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} \right\} \\
&= \mathcal{A}P_0 - (T-t) \left\{ \frac{\nu\rho_1}{\sqrt{2}} \langle f\phi' \rangle x^3 \frac{\partial^3}{\partial x^3} \{ \langle \mathcal{L}_2 \rangle P_0 \} \right\} \\
&\quad - (T-t) \left\{ \left( \sqrt{2}\nu\rho_1 \langle f\phi' \rangle - \frac{\nu}{\sqrt{2}} \langle \Lambda\phi' \rangle \right) x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ \langle \mathcal{L}_2 \rangle P_0 \} \right\} \\
&= \mathcal{A}P_0
\end{aligned}$$

onde usamos a propriedade do operador de Black & Scholes (3.35). Além disso, claramente (3.36) satisfaz a condição final em (3.29). Isto conclui a demonstração.  $\blacksquare$

Agora queremos encontrar uma aproximação para  $P_1^\epsilon$ . Para isto, começamos escrevendo  $P_1^\epsilon$  numa expansão em potências de  $\epsilon$ .

$$P_1^\epsilon = P_{0,1} + \sqrt{\epsilon}P_{1,1} + \epsilon P_{2,1} + \epsilon^{\frac{3}{2}}P_{3,1} + \dots \quad (3.38)$$

Substituindo esta expressão em (3.17), temos

$$\begin{aligned}
&\left( \frac{1}{\epsilon}\mathcal{L}_0 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 \right) P_1^\epsilon = - \left( \mathcal{M}_1 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\mathcal{M}_3 \right) P_0^\epsilon \\
\Rightarrow &\frac{1}{\epsilon}\mathcal{L}_0 P_{0,1} + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\mathcal{L}_0 P_{1,1} + \mathcal{L}_0 P_{2,1} + \sqrt{\epsilon}\mathcal{L}_0 P_{3,1} + \dots \\
&+ \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\mathcal{L}_1 P_{0,1} + \mathcal{L}_1 P_{1,1} + \sqrt{\epsilon}\mathcal{L}_1 P_{2,1} + \epsilon\mathcal{L}_1 P_{3,1} + \dots \\
&+ \mathcal{L}_2 P_{0,1} + \sqrt{\epsilon}\mathcal{L}_2 P_{1,1} + \epsilon\mathcal{L}_2 P_{2,1} + \epsilon^{\frac{3}{2}}\mathcal{L}_2 P_{3,1} + \dots = \\
&- \mathcal{M}_1 P_0 - \sqrt{\epsilon}\mathcal{M}_1 P_{1,0} - \epsilon\mathcal{M}_1 P_{2,0} - \dots \\
&- \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\mathcal{M}_3 P_0 - \mathcal{M}_3 P_{1,0} - \sqrt{\epsilon}\mathcal{M}_3 P_{2,0} - \dots
\end{aligned}$$

Donde obtemos as seguintes equações

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon}\right) &\longrightarrow \mathcal{L}_0 P_{0,1} = 0 \\
\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\right) &\longrightarrow \mathcal{L}_0 P_{1,1} + \mathcal{L}_1 P_{0,1} = -\mathcal{M}_3 P_0 \\
\mathcal{O}(1) &\longrightarrow \mathcal{L}_0 P_{2,1} + \mathcal{L}_1 P_{1,1} + \mathcal{L}_2 P_{0,1} = -\mathcal{M}_1 P_0 - \mathcal{M}_3 P_{1,0} \\
\mathcal{O}(\sqrt{\epsilon}) &\longrightarrow \mathcal{L}_0 P_{3,1} + \mathcal{L}_1 P_{2,1} + \mathcal{L}_2 P_{1,1} = -\mathcal{M}_1 P_{1,0} - \mathcal{M}_3 P_{2,0}
\end{aligned}$$

Agora, usando a equação de  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$  e lembrando a definição do operador  $\mathcal{L}_0$  em (3.14), concluímos que  $P_{0,1} = P_{0,1}(t, x, z)$ . Usando o resultado anterior, junto com o fato que  $P_0$  não depende de  $y$ , e lembrando a definição dos operadores  $\mathcal{L}_1$  e  $\mathcal{M}_3$  em (3.14), concluímos que  $\mathcal{L}_1 P_{0,1} = 0$  e  $\mathcal{M}_3 P_0 = 0$ . Daí temos que a equação de  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\right)$  reduz-se a  $\mathcal{L}_0 P_{1,1} = 0$ , ou seja,  $P_{1,1} = P_{1,1}(t, x, z)$ . Analogamente, considerando agora a equação de  $\mathcal{O}(1)$  e usando a conclusão anterior temos que  $\mathcal{L}_1 P_{1,1} = 0$  e  $\mathcal{M}_3 P_{1,0} = 0$ , já que, como foi visto anteriormente,  $P_{1,0}$  não depende da variável  $y$ .

Logo, temos as seguintes equações equivalentes as anteriores

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon}\right) &\longrightarrow P_{0,1} = P_{0,1}(t, x, z) \\
\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\right) &\longrightarrow P_{1,1} = P_{1,1}(t, x, z) \\
\mathcal{O}(1) &\longrightarrow \mathcal{L}_0 P_{2,1} + \mathcal{L}_2 P_{0,1} = -\mathcal{M}_1 P_0 \\
\mathcal{O}(\sqrt{\epsilon}) &\longrightarrow \mathcal{L}_0 P_{3,1} + \mathcal{L}_1 P_{2,1} + \mathcal{L}_2 P_{1,1} = -\mathcal{M}_1 P_{1,0} - \mathcal{M}_3 P_{2,0} \quad (3.39)
\end{aligned}$$

A equação de  $\mathcal{O}(1)$ , representa uma equação de Poisson para  $P_{2,1}$  e a alternativa de Fredholm dá uma condição para que exista solução. Isto permite dar a seguinte definição para caracterizar  $P_{0,1}(t, x, z)$ .

**Definição 3.6.**  $P_{0,1}(t, x, z)$  é a única solução do problema

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{L}_2 \rangle P_{0,1} &= -\langle \mathcal{M}_1 \rangle P_0 \\
P_{0,1}(T, x, z) &= 0 \quad (3.40)
\end{aligned}$$

Usando o fato de que  $\mathcal{M}_1$  não depende da derivada com respeito a  $y$  em (3.14), temos que

$$\langle \mathcal{L}_2 \rangle P_{0,1} = g(z) \langle \Gamma(\cdot, z) \rangle \frac{\partial}{\partial z} - \rho_2 g(z) \langle f(\cdot, z) \rangle x \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} = \mathbf{M}_1 \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.41)$$

onde

$$\mathbf{M}_1 := g(z) \langle \Gamma(\cdot, z) \rangle - \rho_2 g(z) \langle f(\cdot, z) \rangle x \frac{\partial}{\partial x} \quad (3.42)$$

Logo temos

$$\langle \mathcal{M}_1 \rangle = -\mathbf{M}_1 \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.43)$$

**Proposição 3.7.**

$$P_{0,1} = \frac{(T-t)}{2} \langle \mathcal{M}_1 \rangle P_0 \quad (3.44)$$

**Demonstração:** De fato, primeiro lembramos que a grega Vega no modelo de Black and Scholes com volatilidade constante  $\sigma$  é dada por

$$\frac{\partial P_{BS}}{\partial \sigma} = (T-t) \sigma x^2 \frac{\partial^2 P_{BS}}{\partial x^2} \quad (3.45)$$

Agora, no modelo que estamos considerando, temos que  $\sigma = \bar{\sigma}(z)$ , e usando a regra da cadeia, temos

$$\frac{\partial P_0}{\partial z} = \frac{\partial P_0}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial z} = (T-t) \bar{\sigma}(z) \bar{\sigma}'(z) x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} \quad (3.46)$$

Denotamos

$$\mathbf{M}_1^* := \mathbf{M}_1^*(t, x, z) = \mathbf{M}_1 \left( \bar{\sigma}(z) \bar{\sigma}'(z) x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} \right) \quad (3.47)$$

Usando este fato temos

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{L}_2 \rangle P_{0,1} &= \langle \mathcal{L}_2 \rangle \left\{ \frac{(T-t)}{2} \langle \mathcal{M}_1 \rangle P_0 \right\} \\
&= - \langle \mathcal{L}_2 \rangle \left\{ \frac{(T-t)}{2} \left\{ \mathbf{M}_1 \frac{\partial}{\partial z} \right\} P_0 \right\} \\
&= - \langle \mathcal{L}_2 \rangle \left\{ \frac{(T-t)}{2} \mathbf{M}_1 \left( \frac{\partial P_0}{\partial z} \right) \right\} \\
&= - \langle \mathcal{L}_2 \rangle \left\{ \frac{(T-t)^2}{2} \mathbf{M}_1 \left( \bar{\sigma}(z) \bar{\sigma}'(z) x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} \right) \right\} \\
&= - \langle \mathcal{L}_2 \rangle \left\{ \frac{(T-t)^2}{2} \mathbf{M}_1^* \right\} \\
&= - \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{(T-t)^2}{2} \mathbf{M}_1^* \right\} \\
&\quad - \frac{(T-t)^2}{2} \frac{1}{2} \bar{\sigma}(z)^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{M}_1^* - \frac{(T-t)^2}{2} r \left( x \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{M}_1^* - \mathbf{M}_1^* \right) \\
&= (T-t) \mathbf{M}_1^* - \frac{(T-t)^2}{2} \left\{ \frac{\partial \mathbf{M}_1^*}{\partial t} + \frac{1}{2} \bar{\sigma}(z)^2 x^2 \frac{\partial^2 \mathbf{M}_1^*}{\partial x^2} + r \left( x \frac{\partial \mathbf{M}_1^*}{\partial x} - \mathbf{M}_1^* \right) \right\} \\
&= (T-t) \mathbf{M}_1^* - \frac{(T-t)^2}{2} \langle \mathcal{L}_2 \rangle \mathbf{M}_1^* \\
&= \mathbf{M}_1 \left( (T-t) \bar{\sigma}(z) \bar{\sigma}'(z) x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} \right) \\
&= \mathbf{M}_1 \frac{\partial P_0}{\partial z} = \left( \mathbf{M}_1 \frac{\partial}{\partial z} \right) P_0 = - \langle \mathcal{M}_1 \rangle P_0
\end{aligned}$$

onde usamos a propriedade (3.35) do operador de Black and Scholes e (3.23) para concluir que  $\langle \mathcal{L}_2 \rangle \mathbf{M}_1^* = 0$ . Isto conclui a prova. ■

Resumindo encontramos uma expansão assintótica para o preço

$$\begin{aligned}
P^{\epsilon, \delta} &\approx P_0^\epsilon + \sqrt{\delta} P_1^\epsilon \\
P_0^\epsilon &\approx P_0 + \sqrt{\epsilon} P_{1,0} \\
P_1^\epsilon &\approx P_{0,1}
\end{aligned}$$

Tal expansão, como demonstrado em Fouque et.al [4], é de fato uma aproximação para a solução. Veja Teorema 3.8 abaixo.

Assim a aproximação do preço é

$$\begin{aligned}
P^{\epsilon,\delta} &\approx \tilde{P}^{\epsilon,\delta} := P_0 + \sqrt{\epsilon}P_{1,0} + \sqrt{\delta}P_{0,1} \\
&= P_0 - \sqrt{\epsilon}(T-t)\mathcal{A}P_0 + \frac{(T-t)}{2}\sqrt{\delta} \langle \mathcal{M}_1 \rangle P_0 \\
&= P_0 - (T-t) \left\{ \sqrt{\epsilon}\mathcal{A}P_0 - \frac{\sqrt{\delta}}{2} \langle \mathcal{M}_1 \rangle P_0 \right\}
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Lembrando as expressões de  $\mathcal{A}$  e  $\langle \mathcal{M}_1 \rangle$  dadas por (3.37) e (3.43) respectivamente, e usando

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z} &= \bar{\sigma}' \frac{\partial}{\partial \sigma} \\
P_0(t, x, z) &= P_{BS}(t, x, \bar{\sigma}(z))
\end{aligned}$$

encontramos que

$$\langle \mathcal{M}_1 \rangle = \bar{\sigma}' \left\{ -g \langle \Gamma \rangle + \rho_2 g \langle f \rangle x \frac{\partial}{\partial x} \right\} \frac{\partial}{\partial \sigma} \tag{3.49}$$

Substituindo (3.37) e (3.49) em (3.48) temos que

$$\begin{aligned}
P^{\epsilon,\delta} &\approx P_{BS} - (T-t) \left\{ \frac{1}{\bar{\sigma}} \left[ \bar{\sigma}\bar{\sigma}'g \langle \Gamma \rangle \frac{\sqrt{\delta}}{2} \frac{\partial}{\partial \sigma} - \rho_2 \frac{\sqrt{\delta}}{2} g \langle f \rangle \bar{\sigma}\bar{\sigma}' x \frac{\partial^2}{\partial x \partial \sigma} \right] \right\} \\
&\quad - (T-t) \left\{ -\sqrt{\epsilon} \frac{\nu}{\sqrt{2}} \langle \Lambda \phi' \rangle x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \sqrt{\epsilon} \frac{\nu}{\sqrt{2}} \rho_1 \langle f \phi' \rangle x \frac{\partial}{\partial x} \left( x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Agora denotando

$$\begin{aligned}
V_0^\delta &= \frac{\sqrt{\delta}}{2} g \langle \Gamma \rangle \bar{\sigma}\bar{\sigma}' \\
V_1^\delta &= -\frac{\sqrt{\delta}}{2} \rho_2 g \langle f \rangle \bar{\sigma}\bar{\sigma}' \\
V_2^\epsilon &= -\frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{2}} \nu \langle \Lambda \phi' \rangle \\
V_3^\epsilon &= \frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{2}} \nu \rho_1 \langle f \phi' \rangle
\end{aligned} \tag{3.51}$$

temos uma aproximação para o preço dada por

$$\tilde{P}^{\epsilon, \delta} = P_{BS} - (T - t) \left\{ \frac{1}{\bar{\sigma}} \left[ V_0^\delta \frac{\partial}{\partial \sigma} + V_1^\delta x \frac{\partial^2}{\partial x \partial \sigma} \right] + \left[ V_2^\epsilon x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_3^\epsilon x \frac{\partial}{\partial x} \left( x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \right] \right\} P_{BS} \quad (3.52)$$

**Teorema 3.8.** Quando o payoff  $h(\cdot)$  é uma função suave, para  $(t, x, y, z)$  fixo e  $\forall \epsilon \leq 1$ ,  $\delta \leq 1$ , existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$|P^{\epsilon, \delta} - \tilde{P}^{\epsilon, \delta}| \leq C(\epsilon + \delta + \sqrt{\epsilon\delta})$$

No caso de uma call ou put, a aproximação é dada por

$$|P^{\epsilon, \delta} - \tilde{P}^{\epsilon, \delta}| \leq C(\epsilon |\log \epsilon| + \delta + \sqrt{\epsilon\delta})$$

A demonstração pode ser encontrada em [4].

### 3.3 Superfície de Volatilidade Implícita Aproximada

O próximo passo é encontrar uma aproximação para a superfície de volatilidade implícita.

Lembramos que a volatilidade implícita é dada como a única solução  $I \in \mathbb{R}^+$  da seguinte equação

$$C_{BS}(t, x; T, K, I) = P^{\epsilon, \delta}(t, x, z) \quad (3.53)$$

Vamos expandir a volatilidade implícita da seguinte forma

$$I = I_0 + I_1^\epsilon + I_1^\delta + \dots \quad (3.54)$$

Onde  $I_1^\epsilon$  e  $I_1^\delta$  representam as aproximações de  $\mathcal{O}(\sqrt{\epsilon})$  e  $\mathcal{O}(\sqrt{\delta})$  respectivamente para  $I$ .

Agora expandimos  $C_{BS}$  em torno de  $I_0$

$$C_{BS}(t, x; T, K, I) = C_{BS}(I_0) + (I_1^\epsilon + I_1^\delta) \frac{\partial C_{BS}(I_0)}{\partial \sigma} + \dots \quad (3.55)$$

A seguir escrevemos  $\tilde{P}^{\epsilon, \delta}$  em termos do tempo até a maturidade  $\tau$  e usamos a fórmula da grega Vega (3.45) em (3.52).

$$\tilde{P}^{\epsilon, \delta} \approx P_{BS} - \frac{1}{\bar{\sigma}} \left\{ \left( V_2^\epsilon + V_3^\epsilon x \frac{\partial}{\partial x} \right) + \tau \left( V_0^\delta + V_1^\delta x \frac{\partial}{\partial x} \right) \right\} \frac{\partial P_{BS}}{\partial \sigma} \quad (3.56)$$

Agora comparando os termos de  $\mathcal{O}(1)$  encontramos

$$C_{BS}(I_0) = P_{BS}(\bar{\sigma}(z)) \implies I_0 = \bar{\sigma}(z) \quad (3.57)$$

Comparando os termos de ordem  $\mathcal{O}(\sqrt{\epsilon})$  e  $\mathcal{O}(\sqrt{\delta})$  temos

$$\begin{aligned} I_1^\epsilon \frac{\partial}{\partial \sigma} C_{BS}(I_0) &= -\frac{1}{\bar{\sigma}} \left( V_2^\epsilon + V_3^\epsilon x \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial P_{BS}}{\partial \sigma} \\ I_1^\delta \frac{\partial}{\partial \sigma} C_{BS}(I_0) &= -\frac{\tau}{\bar{\sigma}} \left( V_0^\delta + V_1^\delta x \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial P_{BS}}{\partial \sigma} \end{aligned} \quad (3.58)$$

**Proposição 3.9.**

$$x \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial \sigma} P_{BS}(I_0) \right) = \left( 1 - \frac{d_1}{\bar{\sigma} \sqrt{T-t}} \right) \frac{\partial}{\partial \sigma} P_{BS}(I_0) \quad (3.59)$$

**Demonstração:** De fato, da fórmula de Black & Scholes temos o seguinte

$$\begin{aligned} \frac{\partial d_1(\bar{\sigma})}{\partial \sigma} &= -\frac{1}{\bar{\sigma}} (d_1 - \bar{\sigma} \sqrt{T-t}) \\ \frac{\partial}{\partial \sigma} P_{BS}(\bar{\sigma}) &= x \Phi'(d_1) \sqrt{T-t} \end{aligned} \quad (3.60)$$

Logo,

$$\begin{aligned} x \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial \sigma} P_{BS}(\bar{\sigma}) \right) &= \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( x \frac{\partial}{\partial x} P_{BS}(\bar{\sigma}) \right) = \frac{\partial}{\partial \sigma} \{ x \Phi(d_1) \} \\ &= x \Phi'(d_1) \frac{\partial}{\partial \sigma} d_1(\bar{\sigma}) = -x \frac{\Phi'(d_1)}{\bar{\sigma}} (d_1 - \bar{\sigma} \sqrt{T-t}) \\ &= \frac{1}{\bar{\sigma}} (\bar{\sigma} \sqrt{T-t} - d_1) \frac{1}{\sqrt{T-t}} \frac{\partial}{\partial \sigma} P_{BS}(\bar{\sigma}) \\ &= \left( 1 - \frac{d_1}{\bar{\sigma} \sqrt{T-t}} \right) \frac{\partial}{\partial \sigma} P_{BS}(\bar{\sigma}) \end{aligned}$$

Usando que  $I_0 = \bar{\sigma}(z)$  como foi visto em (3.57), concluímos a demonstração. ■

Logo, usando (3.58) e (3.59) obtemos uma expressão para  $I_1^\epsilon$  como segue

$$\begin{aligned} I_1^\epsilon \frac{\partial}{\partial \sigma} P_{BS}(I_0) &= -\frac{1}{\bar{\sigma}} \left( V_2^\epsilon + V_3^\epsilon x \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial P_{BS}}{\partial \sigma} \\ &= -\frac{1}{\bar{\sigma}} \left( V_2^\epsilon \frac{\partial P_{BS}}{\partial \sigma} + V_3^\epsilon x \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial P_{BS}}{\partial \sigma} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{\bar{\sigma}} \left( V_2^\epsilon \frac{\partial P_{BS}}{\partial \sigma} + \left( 1 - \frac{d_1}{\bar{\sigma}\sqrt{\tau}} \right) V_3^\epsilon \frac{\partial P_{BS}}{\partial \sigma} \right) \end{aligned}$$

Agora como a grega Vega é sempre positiva, concluímos que

$$I_1^\epsilon = -\frac{1}{\bar{\sigma}} \left( V_2^\epsilon + \left( 1 - \frac{d_1}{\bar{\sigma}\sqrt{\tau}} \right) V_3^\epsilon \right) \quad (3.61)$$

Analogamente, temos que

$$I_1^\delta = -\frac{\tau}{\bar{\sigma}} \left( V_0^\delta + \left( 1 - \frac{d_1}{\bar{\sigma}\sqrt{\tau}} \right) V_1^\delta \right) \quad (3.62)$$

**Definição 3.10.** *Parâmetros geralmente usados em finanças são*

Moneyiness

$$M = \frac{K}{x}$$

Log-Moneyiness

$$LM = \log \left( \frac{K}{x} \right)$$

Log-Moneyiness to maturity ratio

$$LMMR = \log \left( \frac{K}{x} \right) / (T - t)$$

Expressando agora  $I_1^\epsilon$  em termos do *Log-Moneyiness to maturity ratio*, temos

$$\begin{aligned} I_1^\epsilon &= -\frac{1}{\bar{\sigma}} \left( V_2^\epsilon + \left( 1 - \frac{d_1}{\bar{\sigma}\sqrt{\tau}} \right) V_3^\epsilon \right) = \frac{d_1}{\bar{\sigma}^2\sqrt{\tau}} V_3^\epsilon - \frac{1}{\bar{\sigma}} (V_2^\epsilon + V_3^\epsilon) \\ &= -\frac{V_3^\epsilon \log(K/x)}{\bar{\sigma}^3 (T-t)} + \frac{V_3^\epsilon}{\bar{\sigma}^3} \left( r + \frac{\bar{\sigma}^2}{2} \right) - \frac{1}{\bar{\sigma}} (V_2^\epsilon + V_3^\epsilon) \\ &= -\frac{V_3^\epsilon \log(K/x)}{\bar{\sigma}^3 (T-t)} - \frac{V_2^\epsilon}{\bar{\sigma}} + \frac{V_3^\epsilon}{\bar{\sigma}^3} \left( r - \frac{\bar{\sigma}^2}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.63)$$

Analogamente, temos

$$\begin{aligned}
I_1^\delta &= -\frac{\tau}{\bar{\sigma}} \left( V_0^\delta + \left( 1 - \frac{d_1}{\bar{\sigma}\sqrt{\tau}} \right) V_1^\delta \right) \\
&= -\frac{V_1^\delta}{\bar{\sigma}^3} \log\left(\frac{K}{x}\right) + \tau \left[ -\frac{V_0^\delta}{\bar{\sigma}} + \frac{V_1^\delta}{\bar{\sigma}^3} \left( r - \frac{\bar{\sigma}^2}{2} \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Agora, denotamos

$$\begin{aligned}
a^\epsilon &= -\frac{V_3^\epsilon}{\bar{\sigma}^3} \\
a^\delta &= -\frac{V_1^\delta}{\bar{\sigma}^3} \\
b^\epsilon &= -\frac{V_2^\epsilon}{\bar{\sigma}} + \frac{V_3^\epsilon}{\bar{\sigma}^3} \left( r - \frac{\bar{\sigma}^2}{2} \right) \\
b^\delta &= -\frac{V_0^\delta}{\bar{\sigma}} + \frac{V_1^\delta}{\bar{\sigma}^3} \left( r - \frac{\bar{\sigma}^2}{2} \right)
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Assim, conseguimos uma aproximação para a superfície de volatilidade implícita

$$I \approx I_0 + I_1^\epsilon + I_1^\delta = \bar{\sigma} + [b^\epsilon + b^\delta \tau] + [a^\epsilon + a^\delta \tau] \frac{\log(K/x)}{\tau} \tag{3.66}$$

Em resumo, temos a fórmula para a superfície de volatilidade implícita aproximada

$$I \approx \bar{\sigma} + [b^\epsilon + b^\delta \tau] + [a^\epsilon + a^\delta \tau] LMMR \tag{3.67}$$

### 3.4 Calibração dos Parâmetros

Esta seção descreve como calibrar os parâmetros associados à volatilidade implícita para três diferentes modelos derivados do modelo geral da seção anterior. Um modelo que considera apenas a escala longa, um modelo que considera apenas a escala rápida e por último um modelo que considera as duas escalas presente na volatilidade instantânea.

No modelo que considera apenas uma escala longa, a aproximação da superfície de volatilidade implícita é dada por

$$I^\delta \approx a^\delta \cdot LM + b^\delta \cdot \tau + \bar{\sigma} \quad (3.68)$$

No modelo que considera apenas uma escala rápida, a aproximação da superfície de volatilidade implícita é dada por

$$I^\epsilon \approx a^\epsilon \cdot LMMR + b^\epsilon + \bar{\sigma} \quad (3.69)$$

Por último, no modelo que considera as duas escalas para modelar a volatilidade instantânea, a superfície de volatilidade implícita aproximada é dada por (3.67).

Nos dois primeiros casos a forma de estimar os parâmetros é através de uma regressão linear usando as volatilidades implícitas obtidas dos preços do mercado para os diferentes preços de exercícios e diferentes maturidades.

Porém, no terceiro caso os parâmetros aparecendo em (3.67) será feita usando um método de duas etapas como foi proposto por Fouque et.al em [4].

A primeira etapa consiste em estimar  $\alpha(\tau)$  e  $\beta(\tau)$  para cada maturidade  $\tau$  fixa usando a seguinte aproximação

$$I \approx \alpha(\tau)LMMR + \beta(\tau) \quad (3.70)$$

A segunda etapa consiste em estimar  $\alpha^\delta, \alpha^\epsilon, b^\delta, b^\epsilon + \bar{\sigma}$  usando uma regressão linear baseada nos seguintes modelos

$$\alpha(\tau) = a^\epsilon + a^\delta \tau \quad (3.71)$$

$$\beta(\tau) = \bar{\sigma} + b^\epsilon + b^\delta \tau \quad (3.72)$$

### 3.5 Calibração da Superfície de Volatilidade usando Preços da Petrobras

Nesta seção apresentam-se os resultados obtidos aplicando os métodos mencionados na seção anterior. Vimos na Seção 2.5 do Capítulo 2 que os preços da Petrobras cumprem as

hipóteses requeridas para usar a aproximação da superfície de volatilidade implícita dada na Seção 3.3, mais explicitamente existe uma reversão à média tanto na escala rápida quanto na escala longa.

Os dados utilizados são os preços das opções de compra sobre ações da Petrobras negociadas no mercado Americano para o dia 26/05/2010. Neste dia, a cotação da Petrobras era de 33.5 dólares. Decidimos considerar esta série de preços devido a maior liquidez deste contrato o que é necessário para a implementação do método.

Na Tabela 3.1 mostra-se os parâmetros estimados para o modelo (3.68) considerando apenas a escala longa. O erro da estimativa foi de 0.4613.

$\alpha^\delta$	$b^\delta$	$\bar{\sigma}$
-0.6457	-0.0262	0.4783

Tabela 3.1: Parâmetros estimados considerando apenas a escala longa.

Na Figura 3.1 mostra-se o ajuste para a volatilidade implícita  $\tau$ -ajustada obtida pelo modelo estimado anteriormente.

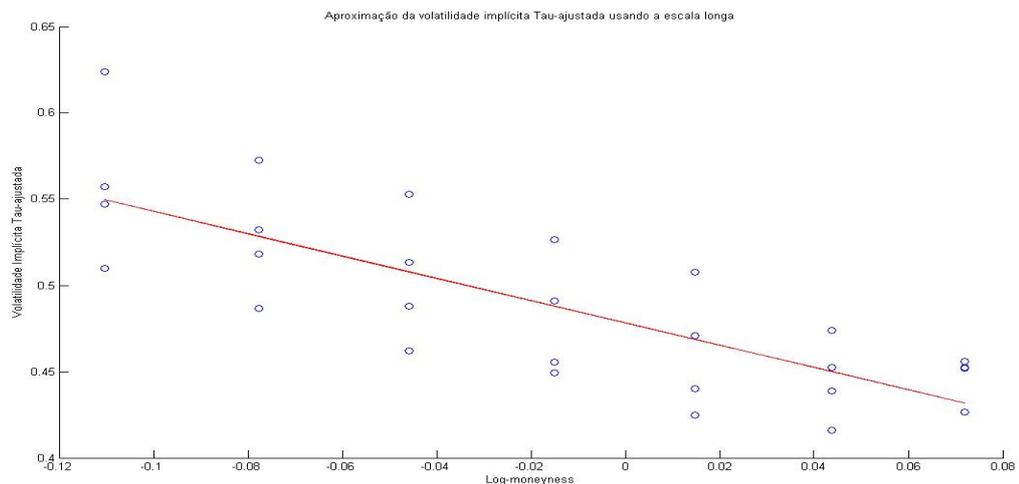


Figura 3.1: Volatilidade implícita  $\tau$ -ajustada como função do *log-moneyness* gerada no dia 26/05/2010.

Os círculos na Figura 3.1 representam as volatilidades implícitas  $\tau$ -ajustadas,  $I - b^\delta \tau$ , como função do *log-moneyness*. A linha contínua representa o ajuste,  $a^\delta LM + \bar{\sigma}$ , gerado usando o modelo (3.68).

A Figura 3.2 mostra a superfície de volatilidade implícita aproximada para o modelo com apenas uma escala longa como função do tempo ao vencimento e da *moneyness*.

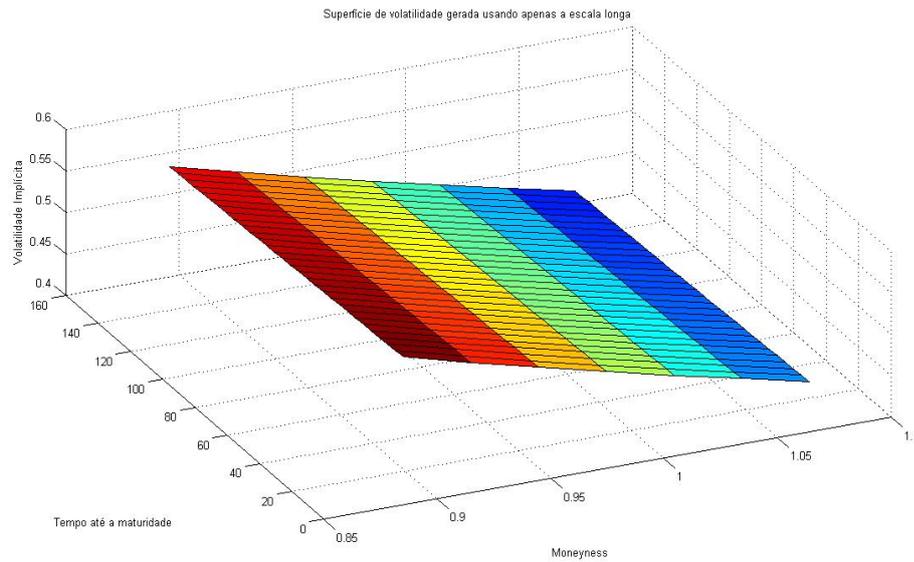


Figura 3.2: Superfície de volatilidade implícita gerada no dia 26/05/2010 considerando apenas a escala longa.

A seguir estimamos o modelo (3.69) que considera apenas uma escala rápida.

Na Tabela 3.2 mostra-se os parâmetros estimados para o modelo (3.69) considerando apenas a escala rápida. O erro da estimativa foi de 0.1334.

$a^\epsilon$	$b^\epsilon + \bar{\sigma}$
-0.1021	0.4633

Tabela 3.2: Parâmetros estimados considerando apenas a escala rápida.

Na Figura 3.3 mostra-se o ajuste para a volatilidade implícita obtida pelo modelo estimado anteriormente.

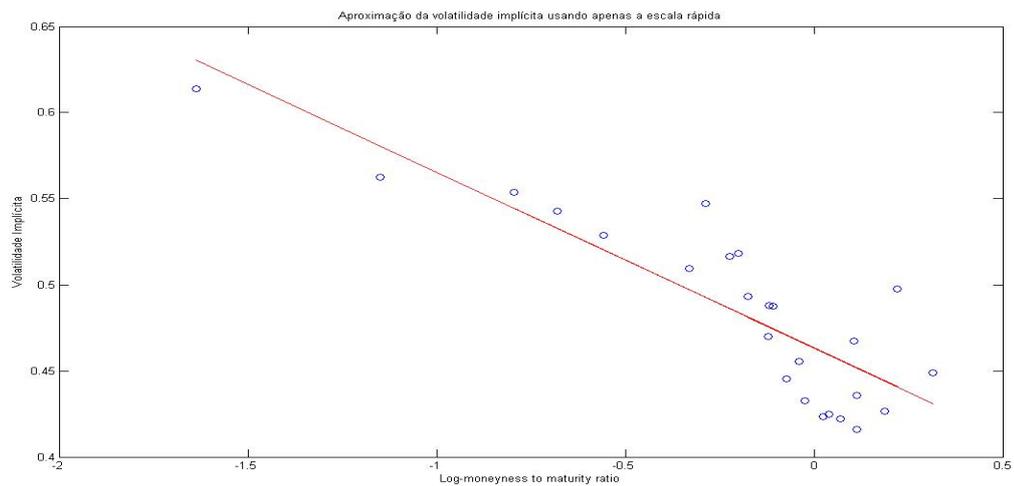


Figura 3.3: Volatilidade implícita como função do *log-moneyness to maturity ratio* gerada no dia 26/05/2010.

Os círculos na Figura 3.3 representam as volatilidades implícitas extraídas dos preços do mercado, como função do *log-moneyness to maturity ratio*. A linha contínua representa o ajuste,  $a^\epsilon \cdot LMMR + b^\epsilon + \bar{\sigma}$ , gerado usando o modelo (3.69).

A Figura 3.4 mostra a superfície de volatilidade implícita aproximada para o modelo com apenas uma escala rápida como função do tempo ao vencimento e do *moneyness*.

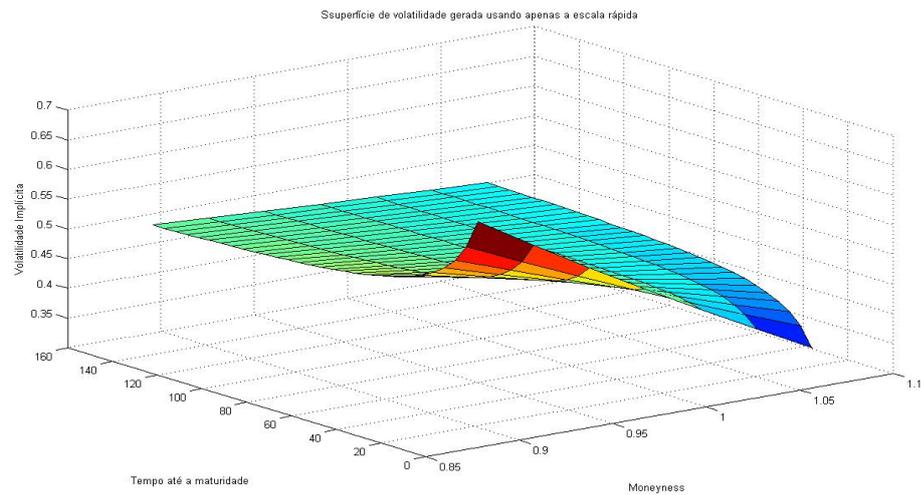


Figura 3.4: Superfície de volatilidade implícita gerada no dia 26/05/2010 considerando apenas a escala rápida.

Por último, estimamos o modelo geral dado por (3.67) considerando as duas escalas. Como vimos na seção anterior, a calibração neste caso consta de 2 etapas.

A primeira etapa consiste em estimar o modelo (3.70) para cada  $\tau$  fixo.

Na Tabela 3.3 mostram-se os parâmetros estimados para o modelo (3.70).

Tempo ao vencimento $\tau$	$\alpha(\tau)$	$\beta(\tau)$
17 dias	-0.0603	0.5048
35 dias	-0.0941	0.4778
97 dias	-0.2866	0.4554
160 dias	-0.2203	0.4403

Tabela 3.3: Parâmetros estimados para cada  $\tau$  fixo.

Na Figura 3.5 mostra-se o ajuste para a volatilidade implícita obtida pelo modelo estimado anteriormente para as 4 diferentes maturidades consideradas.

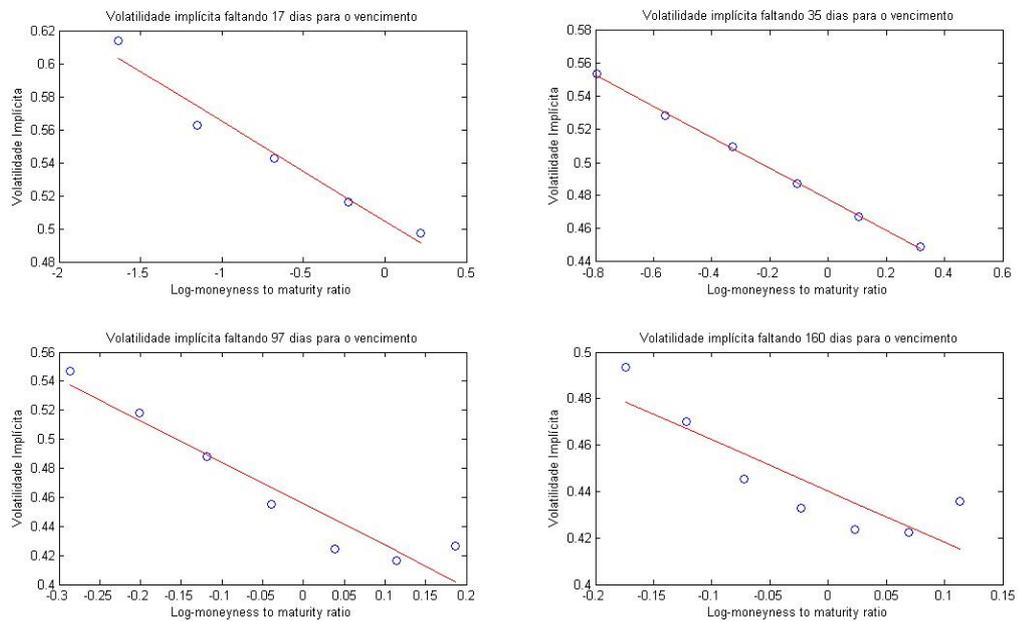


Figura 3.5: Volatilidade implícita como função do *log-moneyness to maturity ratio* para cada maturidade considerada.

O segundo passo consiste em estimar os modelos (3.71) e (3.72). Os resultados são mostrados na Tabela 3.4.

$a^\epsilon$	$a^\delta$	$b^\delta$	$b^\epsilon + \bar{\sigma}$
-0.0660	-0.3242	-0.1030	0.5011

Tabela 3.4: Parâmetros estimados para o modelo de 2 escalas.

Na Figura 3.6 mostra-se o ajuste dos parâmetros mostrados na Tabela 3.4 usando o modelo com 2 escalas. A figura da esquerda mostra o ajuste da função  $\alpha(\tau)$  e a figura na direita o ajuste da função  $\beta(\tau)$

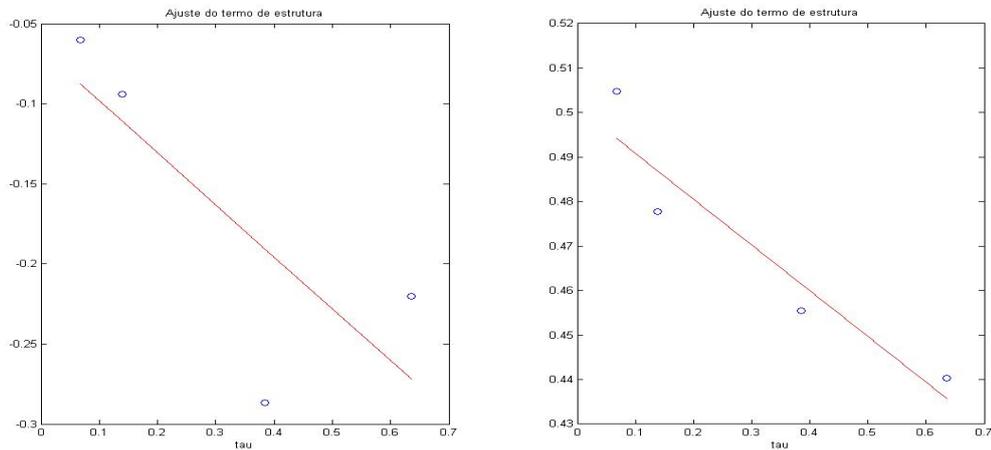


Figura 3.6: Ajuste dos parâmetros no modelo de 2 escalas.

Usando os parâmetros mostrados na Tabela 3.4 podemos estimar a superfície de volatilidade implícita dada em (3.67). A Figura 3.7 mostra o anterior.

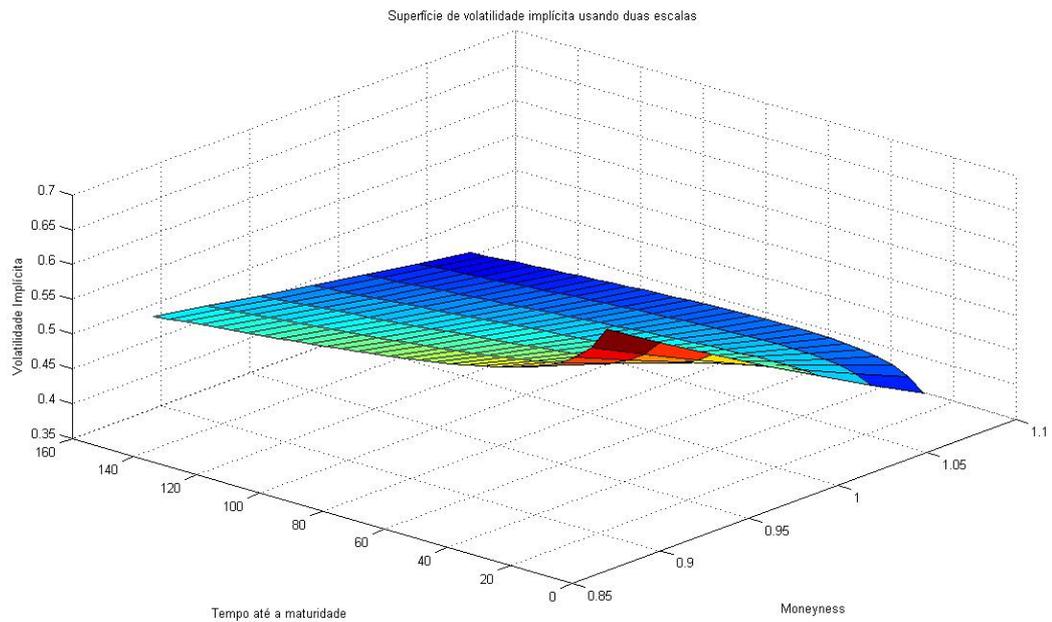


Figura 3.7: Superfície de volatilidade implícita gerada no dia 26/05/2010 considerando 2 escalas.

Conforme mostraremos na Seção 4.4 a superfície de volatilidade implícita que considera 2 escalas fornece o melhor ajuste comparando com um método alternativo para gerar a superfície de volatilidade proposto por Kahalé [5].

Observemos que as aproximações anteriores para a superfície de volatilidade implícita não são necessariamente livres de arbitragem. Além disso, as aproximações que consideram uma escala rápida explodem perto da maturidade do contrato. Para melhorar esta dificuldade pode consultar [20] e [21].

# Capítulo 4

## Interpolação da Superfície de Volatilidade Implícita usando o Método de Kahalé

Este capítulo descreve o algoritmo desenvolvido por Kahalé [5] para gerar uma superfície de volatilidade implícita livre de arbitragem. A ideia do método é construir para cada maturidade uma curva de preços livre de arbitragem e logo usar uma interpolação para as maturidades. As demonstrações deste capítulo não serão dadas já que estas aparecem na tese previa desenvolvida por Machado [3]. No lugar disso desenvolvemos os resultados para implementação computacional.

O método de Kahalé requer a condição dada no seguinte lema.

**Lema 4.1.** *Considere uma sequência  $\{k_i, c_i\}_{0 \leq i \leq n+1}$  tal que*

$$0 = c_{n+1} = k_0 < k_1 < \dots < k_n < k_{n+1} = \infty \quad (4.1)$$

e  $c_i$ ,  $0 \leq i \leq n$ , é o preço de uma call com preço de exercício  $k_i$ . Não há arbitragem entre este conjunto de preços se, e somente se,  $c_0$  é igual ao preço atual,  $c_n \geq 0$  e

$$-1 \leq \frac{c_i - c_{i-1}}{k_i - k_{i-1}} \leq \frac{c_{i+1} - c_i}{k_{i+1} - k_i} \leq 0 \quad (4.2)$$

para  $1 \leq i < n$ .

A demonstração do lema anterior pode ser encontrada em [3].

## 4.1 Método de Interpolação

Nesta seção, seguindo Kahalé [5], é apresentado o método de interpolação livre de arbitragem para uma determinada maturidade. Este método gera uma curva  $C^1$  e é baseado na concatenação de várias funções convexas e inspirado na fórmula de Black & Scholes [8].

O método é descrito através de vários lemas e teoremas.

**Lema 4.2.** *Dados  $f > 0$ ,  $\Sigma > 0$ ,  $a$  e  $b$ , a função*

$$c(k) = c_{f,\Sigma,a,b}(k) = fN(d_1) - kN(d_2) + ak + b \quad (4.3)$$

onde  $N(\cdot)$  representa a distribuição normal padrão e

$$d_1 = \frac{\log(f/k) + \Sigma^2/2}{\Sigma} \quad (4.4)$$

e  $d_2 = d_1 - \Sigma$ , é uma função convexa em  $k$  para  $k > 0$ .

A demonstração do lema anterior pode ser encontrada em [3].

**Teorema 4.3.** *Considere os números reais  $k_0, k_1, c_0, c_1, c'_0, c'_1$  tais que  $0 < k_0 < k_1$  e*

$$c'_0 < \frac{c_1 - c_0}{k_1 - k_0} < c'_1 < 1 + c'_0 \quad (4.5)$$

então existe um único vetor  $(f, \Sigma, a, b)$  com  $f > 0$ ,  $\Sigma > 0$  tais que a função  $c = c_{f,\Sigma,a,b}$  satisfaça as seguintes condições,  $c(k_0) = c_0$ ,  $c(k_1) = c_1$ ,  $c'(k_0) = c'_0$  e  $c'(k_1) = c'_1$ .

A demonstração pode ser encontrada em [3].

O teorema anterior fornece uma interpolação de preços livres de arbitragem entre dois preços dados. A forma de interpolar estes preços é descrita a seguir.

Seja  $a \in (c'_1, 1 + c'_0)$ . Das condições do teorema, temos que  $c'_0 < c'_1 < a < 1 + c'_0 < 1 + c'_1$ .

Logo, temos a existência de um único  $d_2^i$  para  $i = 0, 1$ , satisfazendo

$$c'_i = -N(d_2^i) + a \quad (4.6)$$

Observemos que  $c'_0 < c'_1$  implica  $d_2^1 < d_2^0$ , e logo existem únicos  $\alpha < 0$  e  $\beta$  satisfazendo

$$d_2^i = \alpha \cdot \log(k_i) + \beta \quad (4.7)$$

para  $i = 0, 1$ .

Ainda, existem únicos  $f, \Sigma > 0$  definidos como

$$\begin{aligned} \Sigma &= -\frac{1}{\alpha} \\ \beta &= \frac{\log f}{\Sigma} - \frac{\Sigma}{2} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Segue então que

$$d_2^i = \frac{\log(f/k_i) - \Sigma^2/2}{\Sigma} \quad (4.9)$$

Note que  $d_2^i, \alpha, \beta, f, \Sigma$  são funções contínuas de  $a$ ,  $a \in (c'_1, 1 + c'_0)$ . Considere agora a função  $c(k)$  dada em (4.3) e escolha  $b$  tal que  $c(k_0) = c_0$ .

Com esta construção, temos que  $c(k_0) = c_0$ ,  $c'(k_0) = c'_0$  e  $c'(k_1) = c'_1$ . Falta mostrar que  $c(k_1) = c_1$ . A demonstração disso pode ser encontrada em [3].

O autor demonstra que a função de  $g_1(a)$  definida em (4.10) é uma bijeção estritamente decrescente.

$$g_1(a) := \frac{c(k_1) - c(k_0)}{k_1 - k_0} : (c'_1, 1 + c'_0) \longrightarrow (c'_0, c'_1) \quad (4.10)$$

Usando este último fato junto com a equação (4.5) temos que existe um único  $a_0 \in (c'_1, 1 + c'_0)$  tal que

$$\frac{c(k_1) - c(k_0)}{k_1 - k_0} = \frac{c_1 - c_0}{k_1 - k_0} \quad (4.11)$$

e logo para este valor  $a_0$  temos que  $c(k_0) = c_0$ . Finalmente, calcule o único vetor  $(f, \Sigma, a, b)$  usando este  $a_0$ .

**Lema 4.4.** *Considere os números  $k_0, c_0, c'_0$  tais que  $0 < k_0, -1 < c'_0 < 0$  e  $c_0 > 0$ . Então existem dois únicos parâmetros  $f > 0, \Sigma > 0$  tais que função  $c = c_{f,\Sigma,0,0}$  satisfaz as condições  $c(k_0) = c_0$  e  $c'(k_0) = c'_0$ . Além disso,  $c(k) \rightarrow 0$  e  $c'(k) \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ .*

A demonstração pode ser encontrada em [3].

O teorema anterior fornece uma interpolação de preços livres de arbitragem para o maior preço considerado. A forma de interpolar estes preços é descrita a seguir.

Das condições do lema anterior, temos que existe um único  $d_2^0$  tal que  $c'_0 = -N(d_2^0)$ . Para  $\Sigma > 0$ , seja  $f = k_0 \cdot \exp\{\Sigma \cdot d_2^0 + \Sigma^2/2\}$ . Por construção, a função  $c(k)$  dada em (4.3) satisfaz  $c'(k_0) = c'_0$ .

A seguir defina  $d_1 = d_2^0 + \Sigma$ . Logo, um cálculo direto mostra que  $c(k_0) \rightarrow 0$  quando  $\Sigma \rightarrow 0$  e  $c(k_0) \rightarrow \infty$  quando  $\Sigma \rightarrow \infty$ . Assim podemos definir a função  $g_2(\Sigma)$  bijetora e estritamente crescente [3]

$$g_2(\Sigma) := c(k_0) : (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty) \quad (4.12)$$

Logo, temos que existe um único  $\Sigma_0 > 0$  tal que  $c(k_0) = c_0$ . Para este valor  $\Sigma_0$  defina  $f$  como foi feito no começo.

Além disso, um cálculo direto mostra que  $c(k) \rightarrow 0$  e  $c'(k) \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ .

**Lema 4.5.** *Considere os números reais  $k_1, c_0, c_1, c'_1$  tais que  $0 < k_1$  e*

$$-1 < \frac{c_1 - c_0}{k_1} < c'_1 < 0 \quad (4.13)$$

*Então existem três únicos parâmetros  $f > 0, \Sigma > 0$  e  $b$  tais que a função  $c = c_{f,\Sigma,0,b}$  satisfaz as seguintes condições  $c(k) \rightarrow c_0$  quando  $k \rightarrow 0$  e  $c'(k_1) = c'_1, c(k_1) = c_1$ . Além disso,  $c'(k) \rightarrow -1$  quando  $k \rightarrow 0$ .*

O teorema anterior fornece uma interpolação de preços livres de arbitragem para o menor preço considerado. A forma de interpolar estes preços é descrita a seguir.

Das condições do lema anterior, existe um único número  $d_2^1$  tal que  $c'_1 = -N(d_2^1)$ . Seja  $\Sigma > 0$  e defina

$$\begin{aligned}
f &= k_1 \exp\left(\Sigma d_2^1 + \frac{\Sigma^2}{2}\right) \\
b &= c_0 - f
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Por construção, a função  $c = c_{f,\Sigma,0,b}$  satisfaz  $c'(k_1) = c'_1$ . Mais ainda, tem-se  $c(k) \rightarrow c_0$  e  $c'(k) \rightarrow -1$  quando  $k \rightarrow 0$ . Para mostrar que existe um único  $\Sigma_0 > 0$  tal que  $c(k_1) = c_1$ , consideremos a função  $g_3(\Sigma) := c(k_1) - c_0$ . Em [3] prova-se que esta função é uma bijeção estritamente crescente e

$$g_3(\Sigma) := c(k_1) - c_0 : (0, \infty) \longrightarrow (-k_1, k_1 c'_1) \tag{4.15}$$

Logo usando (4.13) temos que existe um único  $\Sigma_0 > 0$  tal que  $c(k_1) = c_1$ . Associado a este valor  $\Sigma_0$  defina  $f > 0$  e  $b$  como antes.

Juntando estes três resultados podemos estabelecer o teorema mais importante desta seção.

**Teorema 4.6.** *Considere as seqüências  $\{k_i\}_{0 \leq i \leq n+1}$ ,  $\{c_i\}_{0 \leq i \leq n+1}$  e  $\{c'_i\}_{0 \leq i \leq n+1}$  tais que vale (4.1). Além disso, são válidas as condições limites*

$$c'_0 = -1 \qquad c'_n < c'_{n+1} = 0 < c_n \tag{4.16}$$

e as condições de convexidade

$$c'_i < \frac{c_{i+1} - c_i}{k_{i+1} - k_i} < c'_{i+1} \tag{4.17}$$

para  $i = 0, 1, \dots, n-1$ .

Então existe uma função convexa de classe  $C^1$ ,  $c(k)$  para  $k > 0$ , e uma única seqüência  $(f_i, \Sigma_i, a_i, b_i)_{0 \leq i \leq n}$  tal que  $c(k) = c_{f_i, \Sigma_i, a_i, b_i}(k)$  satisfazendo  $c(k_i) = c_i$  e  $c'(k_i) = c'_i$  para  $1 \leq i \leq n$ . Mais ainda, tem-se

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow 0} (c(k), c'(k)) &= (c_0, -1) \\
\lim_{k \rightarrow \infty} (c(k), c'(k)) &= (0, 0)
\end{aligned} \tag{4.18}$$

A demonstraco pode ser obtida facilmente combinando os resultados anteriores.

**Observaco:** Existem  $4(n + 1)$  parâmetros desconhecidos,  $(f_i, \Sigma_i, a_i, b_i)_{0 \leq i \leq n}$ , que definem a funo  $c$  do teorema anterior. Cada equaco  $c(k_i) = c_i$  para  $1 \leq i \leq n$ , fornece duas equacões para estes parâmetros já que esta  verdadeira para  $c_{f_i, \Sigma_i, a_i, b_i}(k_i)$  e  $c_{f_{i-1}, \Sigma_{i-1}, a_{i-1}, b_{i-1}}(k_i)$ . O mesmo  válido para a equaco  $c'(k_i) = c'_i$ , para  $1 \leq i \leq n$ . Somando as condies de limite temos  $4(n + 1)$  equacões e logo o problema está bem definido.

## 4.2 Interpolaco da Curva de preços livres de arbitragem

Esta seo descreve o algoritmo utilizado para gerar a curva de preços de uma opo de compra livre de arbitragem de classe  $C^1$  usando o método da seo prévia.

Considere as sequências de preços de exercícios e preços de opes de compra  $(k_i)_{0 \leq i \leq n+1}$  e  $(c_i)_{0 \leq i \leq n+1}$  respectivamente. Suponha válida a condio (4.1),  $c_n > 0$  e

$$-1 < \frac{c_i - c_{i-1}}{k_i - k_{i-1}} < \frac{c_{i+1} - c_i}{k_{i+1} - k_i} < 0 \quad (4.19)$$

para  $1 \leq i < n$ .

A condio (4.19) verifica a ausência de arbitragem nos dados do mercado.

O algoritmo  descrito como segue

### ALGORITMO A

1. Defina  $c'_0 = -1$  e  $c'_{n+1} = 0$ .
2. Calcule a sequência  $(c_i)_{1 \leq i \leq n}$  como

$$c'_i = \frac{l_i + l_{i+1}}{2} \quad (4.20)$$

para  $1 \leq i \leq n$ , onde

$$l_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{k_i - k_{i-1}} \quad (4.21)$$

3. Calcule os parâmetros  $(f, \Sigma, a, b)_{1 \leq j \leq n+1}$  da seguinte forma
  - Para  $j = 1$ , calcule os parâmetros  $(f, \Sigma, 0, b)$  seguindo o Lema 4.5.
  - Para  $2 \leq j < n$ , calcule os parâmetros  $(f, \Sigma, a, b)$  seguindo o Teorema 4.3.
  - Para  $j = n$ , calcule os parâmetros  $(f, \Sigma, 0, 0)$  seguindo o Lema 4.4.
4. Calcule os preços livres de arbitragem usando a equação (4.3).

### 4.3 Interpolação da Superfície de Volatilidade

Nesta seção apresenta-se o método de interpolação da superfície de volatilidade implícita livre de arbitragem proposto por Kahalé, [5].

O algoritmo é descrito como segue

#### ALGORITMO B

Supondo que não é possível encontrar oportunidades de arbitragem nos preços do mercado, calcule

1. Para cada  $t_i$ , gera-se uma curva de volatilidade implícita, livre de arbitragem, usando o Algoritmo A.
2. Para cada data de vencimento  $t \in (t_i, t_{i+1})$  e preço de exercício  $K$ , calcula-se a volatilidade implícita  $\sigma_{imp}(K, T)$  usando uma interpolação linear entre  $\sigma_{imp}^2(K, t_i) \cdot t_i$  e  $\sigma_{imp}^2(K, t_{i+1}) \cdot t_{i+1}$ .

## 4.4 Comparação da Superfície de Volatilidade usando Preços da Petrobras

Nesta seção, apresenta-se a superfície de volatilidade implícita gerada usando o método de Kahalé para os preços de opções de compra da Petrobras negociada no mercado Americano no dia 26/05/2010. A cotação desse dia para Petrobras foi de 33.5 dólares. Além disso, esta superfície de volatilidade é comparada com as superfícies estimadas na Seção 3.5 usando a aproximação proposta por Fouque et.al [4].

Começamos estimando os preços livres de arbitragem gerados pelo Algoritmo A descrito na Seção 4.2. A Figura 4.1 mostra a estimação da curva de preços para as 4 diferentes maturidades.

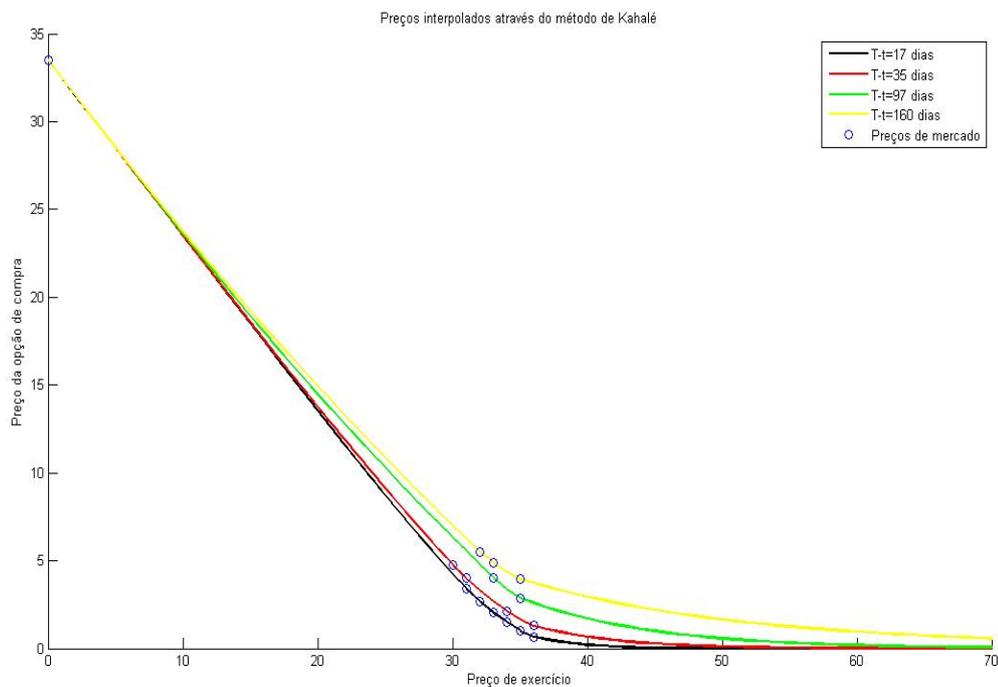


Figura 4.1: Curva de preços livres de arbitragem no dia 26/05/2010.

A Figura 4.1 mostra que a curva de preços gerada pelo método de Kahalé é suave e cumpre as condições limites, isto é, quando  $x \rightarrow 0$  a curva se aproxima ao preço da cotação com inclinação igual a  $-1$ , e quando  $x \rightarrow \infty$  a curva converge para zero com inclinação igual a zero.

A Figura 4.2 mostra a superfície de volatilidade implícita estimada pelo método de Kahalé.

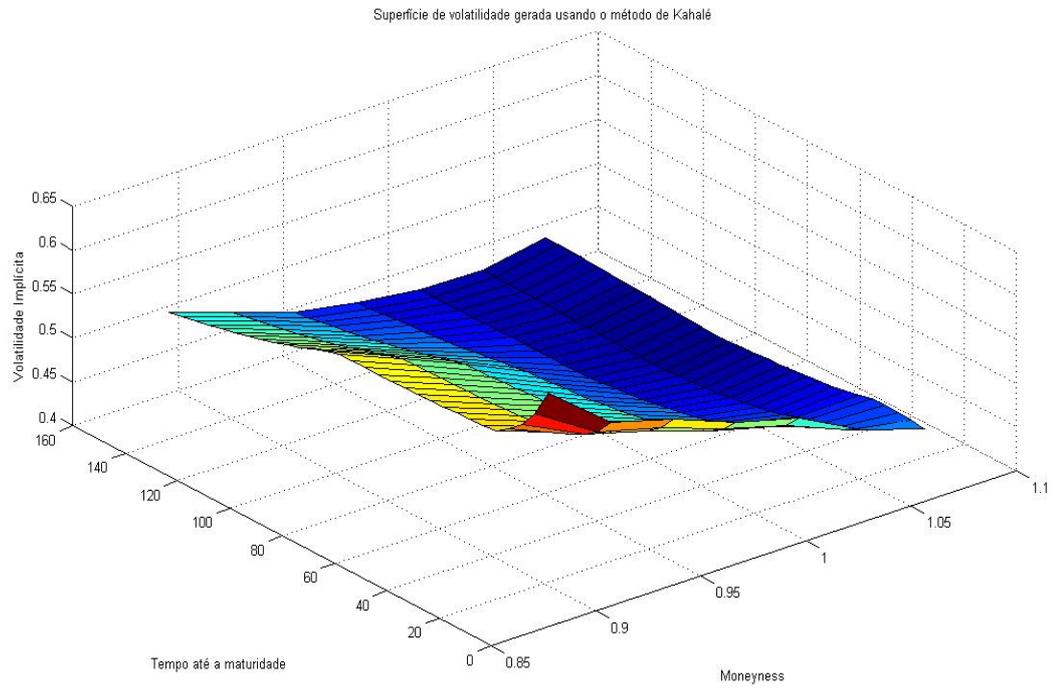


Figura 4.2: Superfície de volatilidade implícita estimada usando o método de Kahalé no dia 26/05/2010.

A seguir, são comparados os ajustes das variantes do modelo de Fouque com respeito ao método proposto por Kahalé.

A Figura 4.3 mostra a superfície de volatilidade implícita estimada pelo método de Kahalé e a superfície de volatilidade aproximada usando o modelo de Fouque considerando apenas a escala longa.

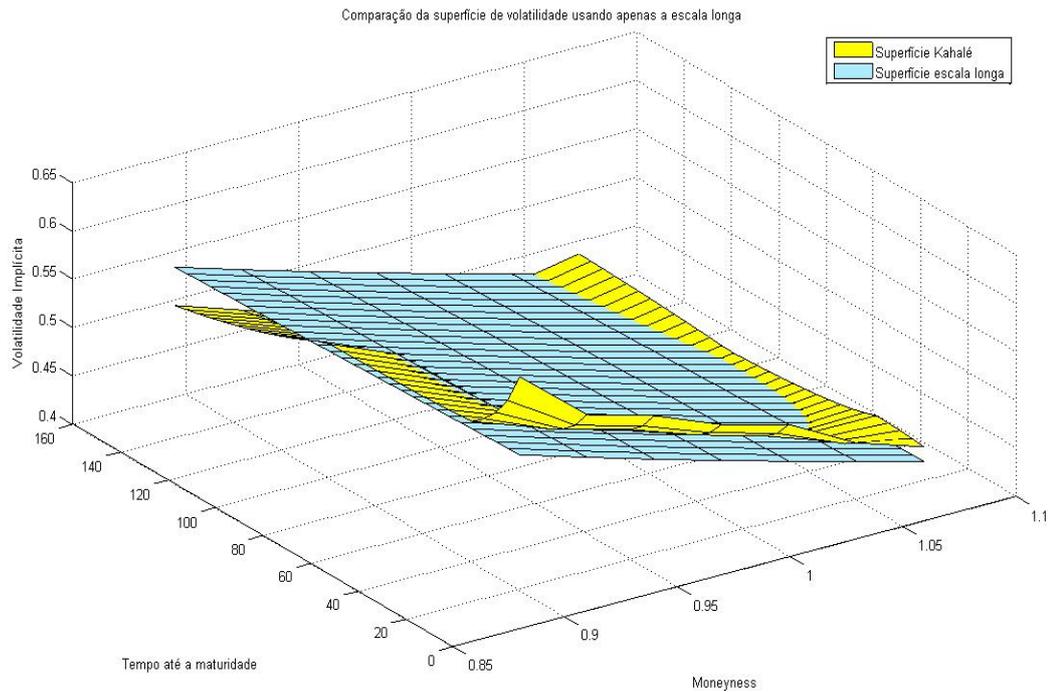


Figura 4.3: Comparação das superfícies de volatilidade implícita estimadas pelo modelo de Fouque com apenas a escala longa e pelo método de Kahalé no dia 26/05/2010.

Analogamente, a Figura 4.4 mostra a superfície de volatilidade implícita estimada pelo método de Kahalé e a superfície de volatilidade aproximada usando o modelo de Fouque considerando apenas a escala rápida.

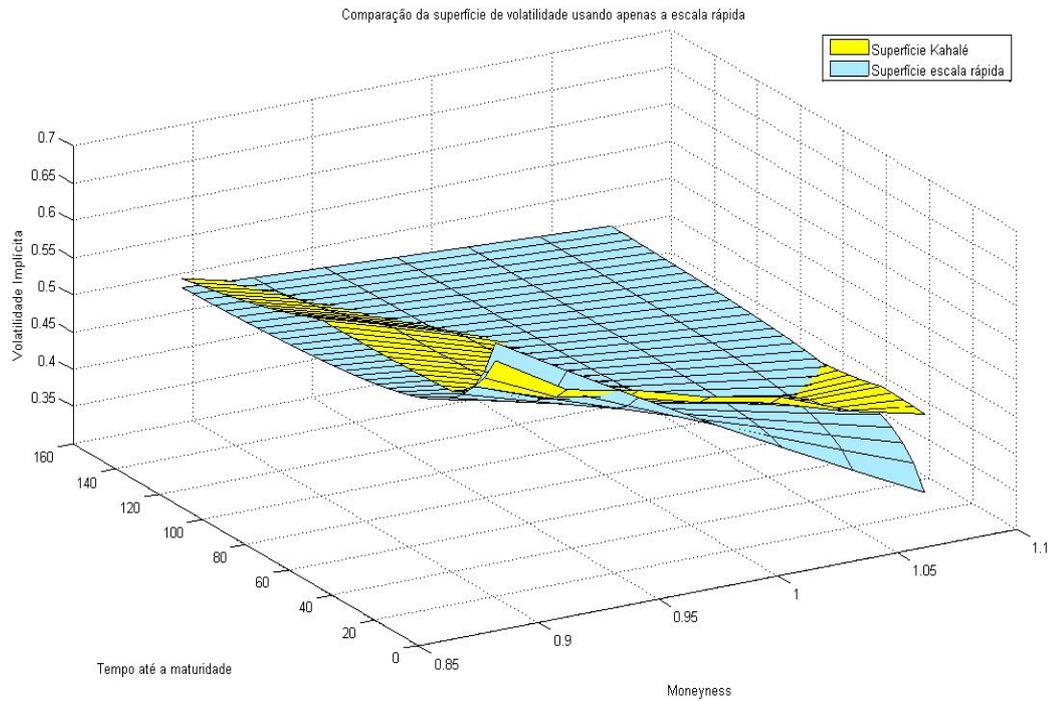


Figura 4.4: Comparação das superfícies de volatilidade implícita estimadas pelo modelo de Fouque com apenas a escala rápida e pelo método de Kahalé no dia 26/05/2010.

Por fim a Figura 4.5 mostra a superfície de volatilidade implícita estimada pelo método de Kahalé e a superfície de volatilidade aproximada usando o modelo de Fouque considerando as duas escalas.

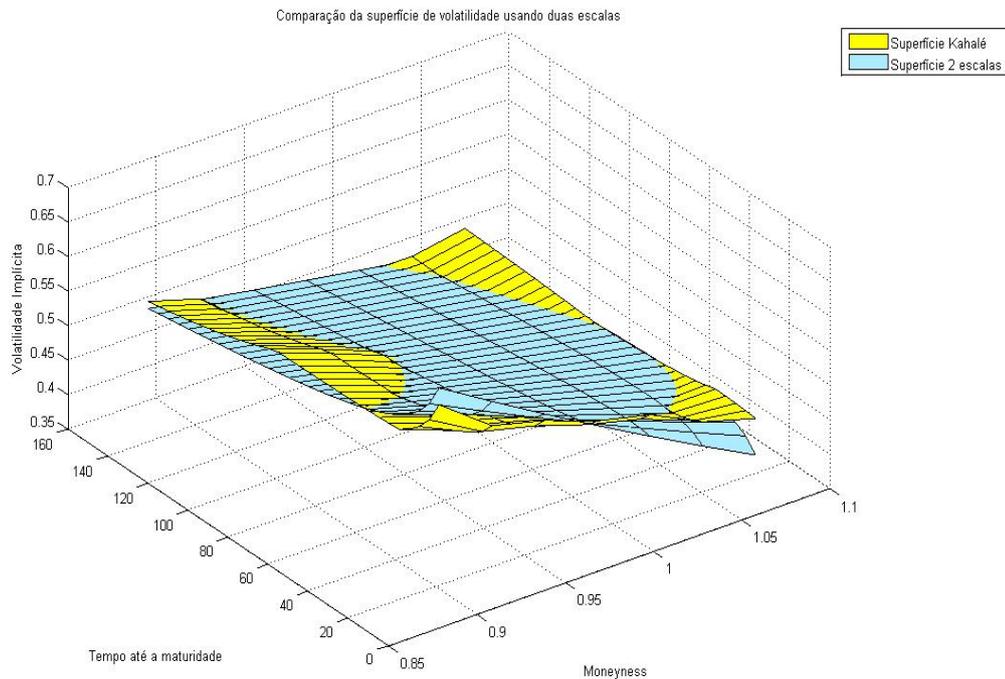


Figura 4.5: Comparação das superfícies de volatilidade implícita estimadas pelo modelo de Fouque com duas escalas e pelo método de Kahalé no dia 26/05/2010.

Os erros relativos à superfície de volatilidade gerada pelo método de Kahalé para as aproximações propostas por Fouque usando apenas uma escala longa, apenas uma escala rápida e considerando as duas escalas em forma conjunta são 0.2948, 0.3512 e 0.1929 respectivamente.

Logo, usando preços de opções de compra da Petrobras o melhor ajuste, supondo que a superfície de volatilidade do mercado é dada pela aproximação de Kahalé, é dado pelo método de Fouque que considera duas escalas diferentes para modelar a volatilidade instantânea.

# Conclusão

Neste trabalho estudou-se um modelo de volatilidade estocástica com duas escalas. Além disso, desenvolveu-se o Método do Variograma neste modelo mais geral, obtendo um resultado que permitiu a separação de escalas e logo a redução do modelo geral a dois mais simples.

Por outro lado, apresentou-se uma outra forma de estimar os parâmetros associados ao modelo, porém esta nova forma é muito mais difícil de implementar e além disso é intensiva computacionalmente. Isto já que deve-se inicialmente estimar uma série não observada no mercado, o que foi feito seguindo a proposta de Malliavin & Mancino [10]. Uma vez estimada esta série oculta, encontrou-se uma estimativa paramétrica através do método de Máxima Verossimilhança para equações diferenciais estocásticas.

Estes métodos de estimação foram implementados usando preços da Petrobras em alta frequência para estimar a escala rápida e em frequência diária para estimar a escala longa. O Método do Variograma revelou uma taxa de reversão à média de 1.13 dias na escala rápida e de 7.05 meses na escala longa. Por outra parte, usando o Método de Máxima Verossimilhança tivemos que os preços da Petrobras revelaram uma taxa de reversão à média de 1.39 dias na escala rápida e de 9.5 meses na escala longa.

Baseado em qualquer das duas formas anteriores, confirmou-se uma reversão à média tanto na escala rápida quanto na escala longa.

Uma vez que confirmaram-se as hipóteses necessárias para a análise assintótica, estimou-se uma superfície de volatilidade implícita aproximada para três diferentes modelos: um com apenas uma escala longa, outro com apenas uma escala rápida e por fim um que considera as duas escalas conjuntamente para conduzir a volatilidade, seguindo os passos propostos por Fouque et.al [4].

Finalmente, compararam-se as superfícies de volatilidade encontradas anteriormente com uma superfície de volatilidade implícita gerada usando o algoritmo proposto por Kahalé [5]. Concluiu-se que o modelo multiescala ajusta-se melhor a superfície de volatilidade implícita.

# Referências Bibliográficas

- [1] Eric Renault and Nizar Touzi. Option hedging and implied volatilities in a stochastic volatility model. *Math Finance*, 6(3):279–302, 2006.
- [2] Jean-Pierre Fouque, George Papanicolaou, and K. Ronnie Sircar. *Derivatives in financial markets with stochastic volatility*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [3] Cassio Machado. *Modelos de Volatilidade Estocástica para o Índice IBOVESPA: Reversão Rápida à Média e Análise Assintótica*. Tese de Mestrado, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, Brasil, 2008.
- [4] Jean-Pierre Fouque, George Papanicolaou, Ronnie Sircar, and Knut Solna. Multiscale stochastic volatility asymptotics. *Multiscale Model. Simul.*, 2(1):22–42 (electronic), 2003.
- [5] Nabil Kahalé. Smile interpolation and calibration of the local volatility model. *Risk Magazine*, 1(6):637–654, 2005.
- [6] Ralf Korn and Elke Korn. *Option pricing and portfolio optimization*, volume 31 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. Modern methods of financial mathematics, Translated from the 1999 German original by the authors.
- [7] Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*, volume 113 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [8] Fischer Black and Myron Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *The Journal of Political Economy*, 81(3):637–654, 1973.

- [9] Jean-Pierre Fouque, George Papanicolaou, Ronnie Sircar, and Knut Solna. Short time-scale in *s&p* 500 volatility. *Journal Computational Finance*, 2(1), 2002.
- [10] Paul Malliavin and Maria Elvira Mancino. Fourier series method for measurement of multivariate volatilities. *Finance Stoch.*, 6(1):49–61, 2002.
- [11] Yuri Saporito. *Modelos de Volatilidade para o Mercado Financeiro*. Tese de Mestrado, Universidad Federal de Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil, 2009.
- [12] Bernt Oksendal. *Stochastic Differential Equations - An Introduction with Applications*. Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [13] Pedro Fernandez. *Medida e Integração*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, Brasil, 2000.
- [14] Yacine Aït-Sahalia. Maximum likelihood estimation of discretely sampled diffusions: a closed-form approximation approach. *Econometrica*, 70(1):223–262, 2002.
- [15] Bo Martin Bibby and Michael Sørensen. Martingale estimation functions for discretely observed diffusion processes. *Bernoulli*, 1(1-2):17–39, 1995.
- [16] Peter Kloeden and Eckhard Platen. *The Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [17] Guillermo Gómez. *Estimación de Modelos Estocásticos para la tasa de interés libre de riesgo a través del método de Quasi-Máxima Verosimilitud y Estimación del precio de una opción Call europea sobre um bono Bullet para Chile*. Tesis de Ingeniería, Universidad de Santiago de Chile, Santiago, Chile, 2008.
- [18] Yongqing Xu and Liping Song. Gaussian copula under multiscale volatility. *Appl. Stoch. Models Bus. Ind.*, 24(6):569–589, 2008.
- [19] Michael Reed and Barry Simon. *Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis*. Academic Press, New York, 1972.
- [20] Jean-Pierre Fouque, George Papanicolaou, Ronnie Sircar, and Knut Solna. Maturity cycles in implied volatility. *Finance Stoch.*, 8(4):451–477, 2004.

- [21] Max O. Souza and Jorge P. Zubelli. On the asymptotics of fast mean-reversion stochastic volatility models. *Int. J. Theor. Appl. Finance*, 10(5):817–835, 2007.