Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

Programa de Recursos Humanos da ANP

PRH-32

Perturbação singular para ondas viajantes de combustão em meios porosos

Grigori Chapiro

Orientador: Dan Marchesin

Rio de Janeiro, 24 de maio de 2005

Resumo

Neste trabalho estudamos a estrutura interna da frente de combustão in-situ em meios porosos. A frente de combustão é uma onda viajante, i.e, solução de um sistema de EDOs associados às EDPs que modelam a combustão. A maior dificuldade é a presença em uma das equações de um parâmetro muito pequeno na taxa de combustão em função da temperatura.

Neste trabalho foi desenvolvido um método para resolução deste tipo de EDOs. Escrevemos os campos associados ao sistema de equações diferenciais como séries assintóticas e usamos o método de perturbação singular para determinar a solução da aproximação até a ordem 1. Mostramos condições adequadas para a existência da onda viajante no contexto das séries assintóticas.

Utilizamos estes resultados para estabelecer quando existe ou não onda de combustão em meio poroso.

Agradecimentos:

Eu gostaria de agradecer aos professores Aparecido Jesuíno de Souza e Alexei Mailybaev pela enorme ajuda que eles me deram na realização desse trabalho.

Agradeço também à minha família, à minha namorada e a todos os meus colegas e amigos que me apoiaram.

Finalmente agradeço à CAPES, ANP e IMPA pelo apoio neste trabalho.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

A combustão in-situ é uma técnica com potencial para exploração de reservatórios de óleos pesados. Injeta-se ar e usa-se componentes pesados e imóveis do óleo como combustível para gerar o calor necessário para diminuir a viscosidade do óleo. Assim o aumento da temperatura perto da frente de combustão e o transporte de energia térmica resultante tem grande impacto na recuperação.

Essa técnica ainda representa apenas uma pequena parcela do total de técnicas utilizadas de recuperação térmica. A explicação é: (i) abundância até um passado recente das reservas de fácil exploração de óleos leves, recursos de maior qualidade e de exploração mais barata. (ii) sucesso operacional de métodos de injeção de vapor em grandes reservatórios de óleos pesados. Porém, a maior parte da produção de petróleo do Brasil é marítima e a injeção de vapor no fundo do mar é difícil do ponto de vista técnico.

A maior dificuldade operacional durante o processo de combustão in-situ é o comportamento sensível da frente de combustão sob condições de reservatório variáveis e controle limitado do processo. Por isso é necessário estudá-lo em detalhes. Em geral a frente de combustão é modelada por uma onda viajante. Este trabalho visa obter métodos analíticos e numéricos para o cálculo dessas ondas.

Nossa motivação é a procura de soluções de EDPs (leis de conservação, como por exemplo conservação de massa, energia, momento e entalpia) em forma de ondas de choque, que são limites de ondas viajantes de sistemas parabólicos que precisam satisfazer um sistema de EDOs associado à EDP e ligar os estados à esquerda e à direita do choque , isto é mostrar como surgem as órbitas heteroclínicas que juntam os dois equilíbrios definidos por estes estados.

1.1 Ondas viajantes unidimensionais em sistemas difusivos de leis de conservação

Estudamos o sistema de equações não lineares de conservação com viscosidade para $\mathbf{u}(x,t)$:

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \epsilon \partial_{xx} \mathbf{u}, \text{ onde } \epsilon > 0,\ (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+,\ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n. \tag{1.1}$$

Dizemos que ele tem uma solução de tipo **onda viajante** quando admite como solução :

$$\mathbf{u}(x,t) = \mathbf{w}\left(\frac{x - st}{\epsilon}\right). \tag{1.2}$$

Através de um abuso de notação usaremos o símbolo $\mathbf{u}$ em vez de $\mathbf{w}$. Podemos fazer uma substituição de variáveis $\xi = (x - st)/\epsilon$, logo $\mathbf{u}$ satisfaz um sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$-s d_\xi \mathbf{u} + d_\xi \mathbf{f}(\mathbf{u}) = d_{\xi\xi} \mathbf{u}. \tag{1.3}$$

Integrando (1.3) em ξ, obtemos:

$$-s\mathbf{u} + \mathbf{f}(\mathbf{u}) + \mathbf{C} = d_\xi \mathbf{u}, \tag{1.4}$$

onde $\mathbf{C}$ é uma constante de $\mathbb{R}^n$. Agora, se $\mathbf{u}(\xi)$ converge (no límite $\epsilon \to 0$) para a solução do tipo choque com estado à esquerda $\mathbf{u}_-$ e estado à direita $\mathbf{u}_+$, é natural que sejam exigidos:

$$\lim_{\xi \to -\infty} \mathbf{u}(\xi) = \mathbf{u}_- \ , \quad \lim_{\xi \to -\infty} d_\xi \mathbf{u}(\xi) = 0; \tag{1.5}$$

$$\lim_{\xi \to \infty} \mathbf{u}(\xi) = \mathbf{u}_+ \ , \quad \lim_{\xi \to \infty} d_\xi \mathbf{u}(\xi) = 0. \tag{1.6}$$

Usando (1.5) na equação (1.4) teremos:

$$-s\mathbf{u}_- + \mathbf{f}(\mathbf{u}_-) + \mathbf{C} = 0; \tag{1.7}$$

$$-s\mathbf{u}_+ + \mathbf{f}(\mathbf{u}_+) + \mathbf{C} = 0. \tag{1.8}$$

Aqui vemos que as condições de fronteira (1.5), (1.6) do problema original dão origem a pontos de equilíbrio da EDO (1.4). Usando (1.7) em (1.4) podemos reescrever (1.4) como:

$$d_\xi \mathbf{u} = -s(\mathbf{u} - \mathbf{u}_-) + \mathbf{f}(\mathbf{u}) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_-), \tag{1.9}$$

que satisfaz à condição (1.5). Utilizando a equação (1.6) de modo análogo e combinando o resultado com (1.7) obtemos a relação de Rankine-Hugoniot:

$$s(\mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_-) + \mathbf{f}(\mathbf{u}_+) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_-) = 0. \tag{1.10}$$

O procedimento de calcular a onda viajante consiste em encontrar uma órbita heteroclínica que une os dois equilíbrios (ao longo do texto vamos chamá-los de pontos $(-)$ e $(+)$).

Reformulando em termos geométricos o que foi dito antes, a cada equilíbrio temos associadas duas variedades, uma estável e outra instável. Desejamos encontrar a interseção da variedade instável de $\mathbf{u}_-$ com a estável de $\mathbf{u}_+$. Para obter as variedades, localmente, podemos calcular a matriz Jacobiana da parte direita da equação (1.9) nos equilíbrios. Suponhamos que os n autovalores sejam todos não nulos. Os autovetores da Jacobiana em $(-)$ correspondentes aos autovalores positivos geram a variedade estável, cuja dimensão é o número destes autovalores. Analogamente, os autovalores que correspondem aos autovalores negativos em $(+)$ geram a variedade instável. Caso algum autovalor seja nulo precisaremos fazer uma análise mais fina. É isto que acontece no exemplo de combustão. Outra dificuldade aparece quando um autovalor é menor que os outros, isto foi resolvido neste trabalho.

Capítulo 2

Aplicação do método de perturbação singular

Como nesta Seção queremos estudar equações diferenciais ordinárias passaremos os nomes de coordenadas para $\mathbf{x}$ e t, ao invés de $\mathbf{u}$ e ξ. Usaremos a nomenclatura $O(1)$ para indicar que uma função tem a norma bem comportada. Como estamos trabalhando com programação numérica, consideramos $10^{-12} \approx 0$. Por exemplo, se g é $O(1)$, então $||g|| << \infty$ e $||g|| >> 10^{-12}$.

Estudaremos o sistema autônomo e usaremos o negrito para indicar os vetores e matrizes.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_1 = f^1(\mathbf{x}, y) \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}x_n = f^n(\mathbf{x}, y) \\ \frac{d}{dt}y = h(\mathbf{x}, y), \end{cases}$$

onde a última componente do campo $h(\mathbf{x})$ é pequena em relação as outras, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{f} = (f^1, \cdots, f^n)^T$. Esse tipo de sistema aparece em problemas de combustão [8]. Vamos trabalhar num domínio Ω de $\mathbb{R}^{n+1}$ compacto, em cujo interior o sistema (2.1) só tenha dois pontos de equilíbrio, que chamaremos de $(-)$ e $(+)$, ou seja

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^-, y^-) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^+, y^+) = 0,$$
$$h(\mathbf{x}^-, y^-) = h(\mathbf{x}^+, y^+) = 0.$$

Sem perda de generalidade supomos que $y^- < y^+$. A menos que seja especificado diferentemente todas as funções do sistema (2.1) são consideradas de classe C^1. Note que se tentarmos utilizar um método numérico simples para calcular as órbitas desse sistema teremos que trabalhar com escala diferente para a última componente do campo. Em outras palavras, temos um problema rígido. Se as f^is forem $O(1)$, podemos afirmar que a ordem do comprimento da onda será $(y^+ - y^-)/|h|$. (Usamos o teorema do valor médio para aproximar a variação em t por $\Delta t = \Delta y/h(\xi)$). Como $|h|$ é pequeno o comprimento da onda será muito grande. Então tomamos ϵ como o inverso do comprimento da onda e daqui para frente substituimos o sistema por

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_1 = f^1(\mathbf{x}, y) \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}x_n = f^n(\mathbf{x}, y) \\ \frac{d}{dt}y = \epsilon g(\mathbf{x}, y), \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $\epsilon g(\mathbf{x}, y) = h(\mathbf{x}, y)$ e g tem ordem $O(1)$; note que os equilíbrios de (2.1) são os mesmos:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}^-, y^-) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^+, y^+) = 0, \\ g(\mathbf{x}^-, y^-) = g(\mathbf{x}^+, y^+) = 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Note que o problema continua rígido e difícil do ponto de vista numérico.

O método de solução que descreveremos a seguir baseia-se no princípio da perturbação singular. Primeiramente no problema rígido (2.1) efetuamos uma troca de variáveis para coordenadas normalizadas $\hat{t} = \epsilon t$ com $0 < \epsilon < 1$. Assim

$$\frac{d}{d\hat{t}} = \frac{dt}{d\hat{t}}\frac{d}{dt} = \frac{1}{\epsilon}\frac{d}{dt}. \tag{2.3}$$

Para facilitar a notação vamos usar $\dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{d\hat{t}}\mathbf{x}$, lembrando que usamos o negrito para indicar os vetores. Podemos reescrever o sistema (2.1) em função de $\hat{t}$ como:

$$\begin{cases} \epsilon\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, y) \\ \dot{y} = g(\mathbf{x}, y). \end{cases} \tag{2.4}$$

2.1 Aproximação quase-estacionária

Agora faz sentido estudar o caso limite do sistema (2.4) quando $\epsilon = 0$. Chamaremos de $(\mathbf{x}^0(\hat{t}), y^0(\hat{t}))$ a solução desse novo sistema:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^0, y^0) = 0 \tag{2.5}$$

$$\dot{y}^0 = g(\mathbf{x}^0, y^0). \tag{2.6}$$

O sistema (2.5)-(2.6) é chamado de quase–estacionário, pois $\epsilon\dot{\mathbf{x}}$ foi feito igual a zero em (2.4a), ou seja (2.4a) foi tornada independente do tempo ou estacionária.

Podemos agora mostrar como resolver (2.5)-(2.6). Notemos que a equação (2.5) é um sistema de n equações com $(n+1)$ incognitas. Seja $\mathcal{F}$ o conjunto de pontos que satisfazem (2.5) exceto pelos pontos de equilíbrio $(-)$ e $(+)$:

$$\mathcal{F} = \{(\mathbf{x}^0, y^0) \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{f}(\mathbf{x}^0, y^0) = 0\} \setminus \{(\mathbf{x}^-, y^-), (\mathbf{x}^+, y^+)\}. \tag{2.7}$$

Suponhamos que o fecho de $\mathcal{F}$ contém ambos os equilíbrios $(-)$ e $(+)$. Faremos também a hipótese:

$$\det \mathbf{F}_\mathbf{x} \neq 0 \text{ em } \mathcal{F}, \text{ onde } \mathbf{F}_\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{[n]\times[n]} . \tag{2.8}$$

Com isso podemos aplicar o Teorema de Função Implícita para assegurar que localmente $\mathcal{F}$ pode ser parametrizada por y^0 (em particular, é curva de dimensão 1). Temos que supor que os equilíbrios $(-)$ e $(+)$ são unidos por uma parte conexa de $\mathcal{F}$ que chamaremos de $\mathbf{\Gamma}_0$. Notemos que $\mathbf{\Gamma}_0$ não contém os extremos (que são os equilíbrios), mas que estão no seu fecho. O Teorema de Função Implícita afirma, nesse caso, que $\mathbf{\Gamma}_0$ é dado por $(\mathbf{x}^0(y^0), y^0)$ com $y^0 \in (y^-, y^+)$, ou seja é uma curva C^1 parametrizada por y^0. Daqui em diante usaremos $\mathbf{\Gamma}_0(y^0)$ e $\mathbf{x}^0(y^0)$ em vez da equação (2.5). Além disso podemos usar o TFI para obter a derivada de $\mathbf{x}^0(y^0)$:

$$\frac{\partial \mathbf{x}^0}{\partial y^0} = -{\mathbf{F}_\mathbf{x}}^{-1}\mathbf{F}_y, \tag{2.9}$$

onde $\mathbf{F}_\mathbf{x}$ e $\mathbf{F}_y$ são dados por (2.12) e avaliados sobre $\mathbf{\Gamma}_0$.

Como estamos interessados em estudar as soluções do sistema (2.5), (2.6) e precisamos ter diferenciabilidade em $\hat{t}$, queremos que as parametrizações y^0 e $\hat{t}$ sejam equivalentes, ou seja, que $\dot{y}^0 \neq 0$. Para isto, observando a equação (2.6) torna-se necessário introduzir a segunda hipótese de que $g(\mathbf{x}, y) \neq 0$ sobre $\mathbf{\Gamma}_0$, que sem perda de generalidade podemos supor:

$$g(\mathbf{x}, y) > 0 \quad \text{sobre} \quad \mathbf{\Gamma}_0. \tag{2.10}$$

Com isto temos que $\dot{y}^0(\hat{t}) > 0$ para $\hat{t} \in (-\infty, \infty)$. Como $y^0(\hat{t})$ é C^1 então $y^0(\hat{t})$ é estritamente monótona, daí podemos provar que (como na Figura (2.1)):

$$\lim_{\hat{t}\to-\infty} y^0(\hat{t}) = y^- \quad \text{e} \quad \lim_{\hat{t}\to\infty} y^0(\hat{t}) = y^+. \tag{2.11}$$

Agora podemos definir as seguintes matrizes sobre a curva $\mathbf{\Gamma}_0$, cujos elementos dependem

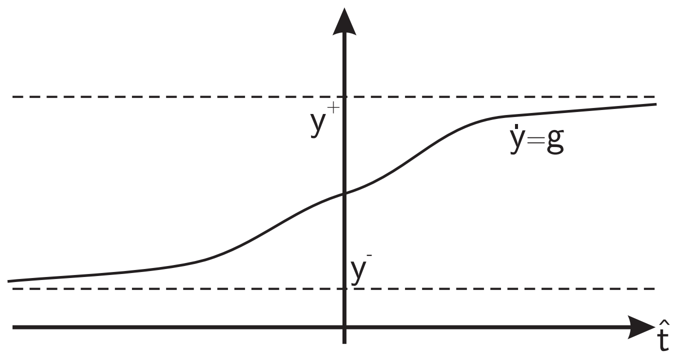

Figura 2.1: Função monótona atinge no limíte os valores y^- e y^+.

de y^0:

$$\mathbf{F_x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{[n]\times[n]} , \quad \mathbf{F}_y = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial y} \\ \vdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial y} \end{bmatrix}_{[n]\times[1]} ,$$
$$\mathbf{G_x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{[1]\times[n]}, \quad \mathbf{G}_y = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}_{[1]\times[1]}, \tag{2.12}$$
$$\text{e a matriz por blocos: } \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{F_x} & \mathbf{F}_y \\ \mathbf{G_x} & \mathbf{G}_y \end{bmatrix}_{[n+1]\times[n+1]} .$$

e enfraquecer levemente a hipótese (2.8) substituindo-a por:

$$\det \mathbf{F_x} \neq 0, \quad \text{em } \mathbf{\Gamma}_0, \tag{2.13}$$

Com a hipótese (2.13) podemos determinar $x^0 = x^0(y^0)$. Como $\mathbf{x}^0$ em (2.6) é dado implicitamente em função de y^0 em $\mathbf{\Gamma}_0$, a equação (2.6), uma EDO de primeira ordem, define y^0 em função de $\hat{t}$:

$$\dot{y}^0 = g(\mathbf{x}^0(y^0), y^0).$$

Usando o Teorema de Peano, [7], podemos afirmar que (2.6) tem solução para qualquer condição inicial escolhida dentro do intervalo (y^-, y^+) onde y^0 é definido.

Ainda precisamos discutir as condições de contorno dadas pelos equilíbrios. Embora tenhamos passado para coordenadas normalizadas em (2.3), examinando (2.11) vemos que a parametrização da órbita (heteroclínica) continua sendo o intervalo $(-\infty, \infty)$. Nesse tipo de parametrização existe um problema de indeterminação devido à invariância da solução por translações. Ou seja, se $(\mathbf{x}^0, y^0)(\hat{t})$ é solução de (2.1), então $(\mathbf{x}^0, y^0)(\hat{t} + \tau)$ também é solução, para qualquer constante τ. O mesmo vale para (2.5). Para circundar esta indeterminação precisamos fixar um ponto inicial para (2.6) (este procedimento é chamado de "condição de fase"). Assim, seja $\breve{y}^0$ um valor qualquer no intervalo (y^-, y^+), onde y^- e y^+ são as (n+1)-esimas coordenadas dos equilíbrios $(-)$ e $(+)$ respectivamente, veja a equação (2.2). O problema a valor inicial será:

$$\begin{cases} \dot{y}^0 = g(\mathbf{x}^0(y^0), y^0) \\ y^0(0) = \breve{y}^0. \end{cases} \tag{2.14}$$

Observamos que a solução de (2.14) define a parametrização $y^0(\hat{t})$ em função de $\hat{t}$. Com isso provamos o Lema:

Lema 2.1 *Sejam válidas as hipóteses (2.10) e (2.13) sobre $\mathbf{\Gamma}_0$, uma parte conexa de $\mathcal{F}$ definida em (2.7) que conecta os equilíbrios $(-)$ e $(+)$ mencionados em (2.2). Então $\mathbf{\Gamma}_0$ pode ser parametrizada por meio de uma função $y^0(\hat{t})$, solução do problema de valor inicial (2.14). Esta parametrização é de classe C^1 e em particular vale (2.11).*

2.2 Expansão em série assintótica

Se conseguirmos garantir a existência da órbita para o sistema (2.4) cujo α-limite seja o estado $(-)$ e ω-limite seja o estado $(+)$, então para muitos fins a aproximação de ordem zero desta órbita descrita na Seção anterior é suficiente. Por exemplo, se ϵ é muito pequeno, como em [8], aproximações de ordem superior não contém muita informação (a existência de solução para este caso é mostrada no Capítulo (4)). Mesmo assim, para garantir a existência da órbita (ou ganhar mais precisão e avaliar os erros de truncamento da série em ϵ) é necessário estudar aproximações melhores para a órbita heteroclínica que estamos procurando.

Como o parâmetro ϵ é pequeno, uma vez obtida uma aproximação com $\epsilon = 0$ como na Seção (2.1), é natural tomar $\Gamma_0(\hat{t})$ do Lema (2.1) como um candidato à aproximação da solução. Portanto, procuraremos soluções do sistema (2.4) como uma série assintótica em potências de ϵ em torno da solução $(\mathbf{x}^0, y^0)(\hat{t})$ com coeficientes $\mathbf{x}^0(\hat{t})$, $y^0(\hat{t})$, $\mathbf{x}^1(\hat{t})$, $y^1(\hat{t})$, etc...,

$$\begin{cases} \mathbf{x}(\hat{t}) = \mathbf{x}^0(\hat{t}) + \epsilon\mathbf{x}^1(\hat{t}) + \epsilon^2\mathbf{x}^2(\hat{t}) + \cdots \\ y(\hat{t}) = y^0(\hat{t}) + \epsilon y^1(\hat{t}) + \epsilon^2 y^2(\hat{t}) + \cdots \end{cases} \tag{2.15}$$

A notação $\mathbf{x}^0$, y^0 já foi usada anteriormente como sendo a solução de (2.14) e (2.5); a seguir mostraremos que os coeficientes da série $\mathbf{x}^0(\hat{t})$ e $y^0(\hat{t})$ coincidem com esta solução. Daqui em diante escreveremos simplesmente $\mathbf{x}^0$ e y^0, mas explicitaremos a dependência de $\hat{t}$ quando necessário. Para o campo $(\mathbf{f}, g)^T$ teremos:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}, y) \\ g(\mathbf{x}, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}^0 + \epsilon\mathbf{x}^1 + ..., y^0 + \epsilon y^1 + ...) \\ g(\mathbf{x}^0 + \epsilon\mathbf{x}^1 + ..., y^0 + \epsilon y^1 + ...) \end{bmatrix}. \tag{2.16}$$

Podemos expandir as funções $\mathbf{f}$ e g em séries formais em ϵ como:

$$\begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{x}, y) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0, y^0) + \epsilon\mathbf{F}_{\mathbf{x}}\mathbf{x}^1 + \epsilon\mathbf{F}_y y^1 + \cdots \\ g(\mathbf{x}, y) = g(\mathbf{x}^0, y^0) + \epsilon\mathbf{G}_{\mathbf{x}}\mathbf{x}^1 + \epsilon\mathbf{G}_y y^1 + \cdots \end{cases}, \tag{2.17}$$

onde no lado direito não apenas $\mathbf{f}$ e g são avaliadas em $(\mathbf{x}^0, y^0)$, mas também todos os coeficientes $\mathbf{F}_{\mathbf{x}}$, $\mathbf{F}_y$, $\mathbf{G}_{\mathbf{x}}$, $\mathbf{G}_y$ etc. Substituimos (2.15) e (2.17) em (2.4):

$$\begin{cases} \epsilon(\dot{\mathbf{x}}^0 + \epsilon\dot{\mathbf{x}}^1 + \cdots) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0, y^0) + \epsilon\mathbf{F}_{\mathbf{x}}\mathbf{x}^1 + \epsilon\mathbf{F}_y y^1 + \cdots \\ \dot{y}^0 + \epsilon\dot{y}^1 + \cdots = g(\mathbf{x}^0, y^0) + \epsilon\mathbf{G}_{\mathbf{x}}\mathbf{x}^1 + \epsilon\mathbf{G}_y y^1 + \cdots \end{cases} \tag{2.18}$$

Agora igualamos termo a termo os coeficientes de mesma ordem em ϵ. Para a ordem zero, recuperamos as equações (2.5) e (2.6) discutidas na Seção anterior, por isto sua solução foi chamada de aproximação de ordem zero. Coletando os termos de primeira ordem em ϵ em (2.18) teremos:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}^0 \\ \dot{y}^1 \end{bmatrix} = \mathbf{G} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^1 \\ y^1 \end{bmatrix}, \tag{2.19}$$

onde $\mathbf{G}$ foi definida em (2.12).

Estudaremos agora as condições de contorno nos equilíbrios. Podemos usar a segunda equação de (2.15) para expandir y perto dos equilíbrios $(-)$ e $(+)$. Seja y_{eq} um dos equilíbrios $(-)$ ou $(+)$, teremos $y_{eq} = y_{eq}^0 + \epsilon y_{eq}^1 + \epsilon^2 y_{eq}^2 + \cdots$; utilizando as hipóteses do Lema (2.1) temos que $y_{eq}^0 = y_{eq}$ e portanto

$$y_{eq}^1 = y_{eq}^2 = \cdots = 0. \tag{2.20}$$

Notemos também que em (2.14) utilizamos como condição inicial: $y^0(0) = \check{y}^0$, com isso, fazendo a expansão em série formal temos condições iniciais semelhantes para $y^1, y^2, ...$, ou seja:

$$y^1(0) = y^2(0) = \cdots = 0. \tag{2.21}$$

2.3 Aproximação de primeira ordem

Nesta Seção encontraremos a solução para a aproximação de primeira ordem da série formal. Na notação (2.12) a equação (2.19) de primeira ordem da série formal pode ser reescrita como o sistema:

$$\dot{\mathbf{x}}^0 - \mathbf{F}_y y^1 = \mathbf{F}_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^1, \tag{2.22}$$

$$\dot{y}^1 = \mathbf{G}_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^1 + \mathbf{G}_y y^1. \tag{2.23}$$

Lembramos que as matrizes $\mathbf{F}_{\mathbf{x}}$, $\mathbf{F}_y$, $\mathbf{G}_{\mathbf{x}}$, $\mathbf{G}_y$ e $\mathbf{G}$ definidas em (2.12) são calculadas em $\mathbf{\Gamma}_0(y^0)$. Para simplificar a notação abreviaremos $g = g(\mathbf{\Gamma}_0(y^0))$ como já fizemos com as matrizes $\mathbf{F}_{\mathbf{x}}$, $\mathbf{F}_y$, etc.

Teorema 2.1 *Suponha que as funções que definem o sistema (2.1) são todas de classe C^1, e que as hipóteses (2.10) e (2.13) são válidas. Então a solução do sistema (2.22), (2.23) satisfaz a:*

i)

$$\frac{dy^1}{dy^0} = \frac{\det \mathbf{G}}{\det \mathbf{F}_{\mathbf{x}}} \frac{1}{g} y^1 - \frac{1}{(\det \mathbf{F}_{\mathbf{x}})^2} B(y^0), \tag{2.24}$$

com

$$B(y^0) = \sum_{j=1}^{n} \det[G_{n,j}] \det[G_{j,n}], \tag{2.25}$$

onde $\det[G_{n,j}]$, $\det[G_{j,n}]$ *também são funções de y^0 de classe C^1.*

ii) *A solução de (2.24) é uma órbita homoclínica com equilíbrio 0, isto é, $y^1 \to 0$ quando $y^0 \to y^+$ ou $y^0 \to y^-$.*

Demonstração:

i) Usando (2.9) e substituindo y^0 por $y^0(\hat{t})$ obtemos pela regra de cadeia que $\dot{\mathbf{x}}^0 = -\mathbf{F}_{\mathbf{x}}{}^{-1}\mathbf{F}_y \dot{y}^0$. Podemos substituir esta expressão em (2.22) para obter $\mathbf{x}^1$. Em seguida substituimos esta expressão de $\mathbf{x}^1$ em (2.23), obtendo:

$$\dot{y}^1 = \mathbf{G}_{\mathbf{x}} \left(\mathbf{F}_{\mathbf{x}}{}^{-2} \mathbf{F}_y (-\dot{y}^0) - \mathbf{F}_{\mathbf{x}}{}^{-1} \mathbf{F}_y y^1 \right) + \mathbf{G}_y y^1. \tag{2.26}$$

Usando os Lemas (A.2) e (A.3) do Apêndice (A), podemos reescrever (2.26) como:

$$\dot{y}^1 = \frac{\det \mathbf{G}}{\det \mathbf{F}_{\mathbf{x}}} y^1 - \frac{1}{(\det \mathbf{F}_{\mathbf{x}})^2} B(y^0) \dot{y}^0, \tag{2.27}$$

onde o termo $B(y^0)$ é dado por (2.25). Lembrando que $\dot{y}^1 = g\dfrac{dy^1}{dy^0}$, obtemos (2.24):

$$\frac{dy^1}{dy^0} = \frac{\det \mathbf{G}}{\det \mathbf{F_x}} \frac{y^1}{g} - \frac{1}{(\det \mathbf{F_x})^2} B(y^0).$$

Como $det\mathbf{F_x}$ é contínua, g é de classe C^1 e ambas não se anulam no intervalo de definição de y^0, temos que $y^1(y^0)$ é de classe C^1 [7].

ii) Já sabemos que $y^1(y^0)$ é uma órbita de classe C^1 que satisfaz (2.24). Falta provar que os limites em y^- e y^+ de $y^1(y^0)$ são zero. Estudaremos soluções $y^1(y^0)$ de (2.24) na vizinhança de equilíbrios $(-)$ e $(+)$. Assim, seja $(\mathbf{x_{eq}}, y_{eq})$ qualquer um destes dois equilíbrios. Supondo que y^0 está próximo de y_{eq}, definimos

$$y_\delta = y^0 - y_{eq}. \tag{2.28}$$

Usamos a Fórmula de Taylor para expandir $g = g(\mathbf{\Gamma}_0(y^0))$ e em seguida a regra da cadeia para obter:

$$g = g(\mathbf{\Gamma}_0(y^0)) = g(\mathbf{\Gamma}_0(y_{eq})) + \mathbf{G_x}\frac{d\mathbf{x}^0}{dy^0} y_\delta + \mathbf{G}_y y_\delta + h(y_\delta) y_\delta, \tag{2.29}$$

onde $h(y_\delta)$ é $O(y_\delta)$. Lembrando que $g(\mathbf{\Gamma}_0(y_{eq})) = 0$ de (2.2), teremos:

$$g = g(\mathbf{\Gamma}_0(y^0)) = \mathbf{G_x}\frac{d\mathbf{x}^0}{dy^0} y_\delta + \mathbf{G}_y y_\delta + h(y_\delta) y_\delta, \tag{2.30}$$

De modo análogo ao que foi feito acima na parte **i)** da demonstração, usamos os Lemas (A.2) e (A.3), para obter:

$$g = g(\mathbf{\Gamma}_0(y^0)) = \frac{\det \mathbf{G}}{\det \mathbf{F_x}} y_\delta + h(y_\delta) y_\delta. \tag{2.31}$$

Notemos que a hipótese (2.10) garante que

$$g = \frac{\det \mathbf{G} + \det \mathbf{F_x} h(y_\delta)}{\det \mathbf{F_x}} y_\delta \neq 0. \tag{2.32}$$

Assim, quando substituimos (2.32) em (2.24), teremos

$$\frac{dy^1}{dy_\delta} = \frac{\det \mathbf{G}}{\det \mathbf{F_x}} \frac{y^1}{y_\delta} \frac{\det \mathbf{F_x}}{\det \mathbf{G} + \det \mathbf{F_x} h(y_\delta)} - \frac{1}{(\det \mathbf{F_x})^2} B(y_\delta), \tag{2.33}$$

ou

$$\frac{dy^1}{dy_\delta} = \frac{\det \mathbf{G}}{\det \mathbf{G} + \det \mathbf{F_x} h(y_\delta)} \frac{y^1}{y_\delta} - \frac{1}{(\det \mathbf{F_x})^2} B(y_\delta), \tag{2.34}$$

usando a hipótese (2.10), o fato que $B(y_\delta)$ é limitado (função contínua num intervalo compacto) e o Lema (A.5) com $D(y_\delta) = \dfrac{1}{(\det \mathbf{F_x})^2} B(y_\delta)$, temos:

$$\lim_{y_\delta \to 0} y^1(y_\delta) = 0 \tag{2.35}$$

$\square$

Podemos também obter $y^1(\hat{t})$ em vez de $y^1(y^0)$, para isso lembremos que $\dot{y}^1 = \dfrac{y^1}{y^0}\dot{y}^0$. Temos o corolário equivalente ao Teorema (2.1).

Corolário 2.1 *Suponha que as funções que definem o sistema (2.1) são todas de classe C^1 e que as hipóteses (2.10) e (2.13) são válidas. Então a solução do sistema (2.22), (2.23) satisfaz:*

i)

$$\dot{y}^1 = \left(\frac{\det \mathbf{G}}{\det \mathbf{F_x}} \frac{1}{g} y^1 - \frac{1}{(\det \mathbf{F_x})^2} B(y^0) \right) g(\mathbf{x}^0(y^0), y^0), \tag{2.36}$$

com $$B(y^0) = \sum_{j=1}^{n} \det[G_{n,j}] \det[G_{j,n}], \qquad \textit{dado em (2.25)}$$

onde $\det[G_{n,j}]$, $\det[G_{j,n}]$ *são funções de y^0 que depende de $\hat{t}$ dado como solução da EDO (2.14).*

ii) *A solução de (2.36) é uma órbita homoclínica com equilíbrio* 0*, isto é,* $y^1 \to 0$ *quando* $\hat{t} \to \infty$ *ou* $\hat{t} \to -\infty$.

Seria interessante obter a recíproca do Teorema (2.1). Suponhamos que as funções em (2.1) sejam de classe C^1 e que as séries (2.15) e (2.17) convirjam. Analisaremos o caso em que a hipótese (2.13) não é satisfeita. Suponhamos por absurdo que exista órbita ligando os equilíbrios $(-)$ e $(+)$. Logo por (2.15) existe a curva $\mathbf{\Gamma_0}$ que liga os equilíbrios como na Seção (2.1). Assim a EDO (2.24) continua válida em subintervalos de (y^-, y^+) onde a hipótese (2.13) é satisfeita. Mas na vizinhança dos pontos onde essa hipótese não é satisfeita, os coeficientes da EDO divergem [1]. Logo, embora exista a curva $\mathbf{\Gamma_0}$, ela não aproxima a órbita, pois a aproximação de primeira ordem tem denominador nulo em pontos no intervalo de definição. Chegamos a uma contradição, o que significa que tal órbita não existe.

[1] Ainda existe a possibilidade de que $\det \mathbf{F_x}$, $\det \mathbf{G}$ e B anularem-se simultaneamente. Como esse é um caso degenerado, nós não o analisaremos aqui, porém ao estudar o exemplo de combustão levaremos em conta esta possibilidade.

Capítulo 3

Aplicação para ondas de combustão

A teoria que descrevemos será aplicada para determinar as ondas viajantes que surgem no estudo de combustão em meios porosos. Em nosso caso, o meio poroso é o combustível sólido e o gás fornece o oxigênio como descrito em [8]. Estamos estudando escoamento unidimensional onde a variavel x é a posição espacial ao longo de um cilindro poroso e t representa o tempo.

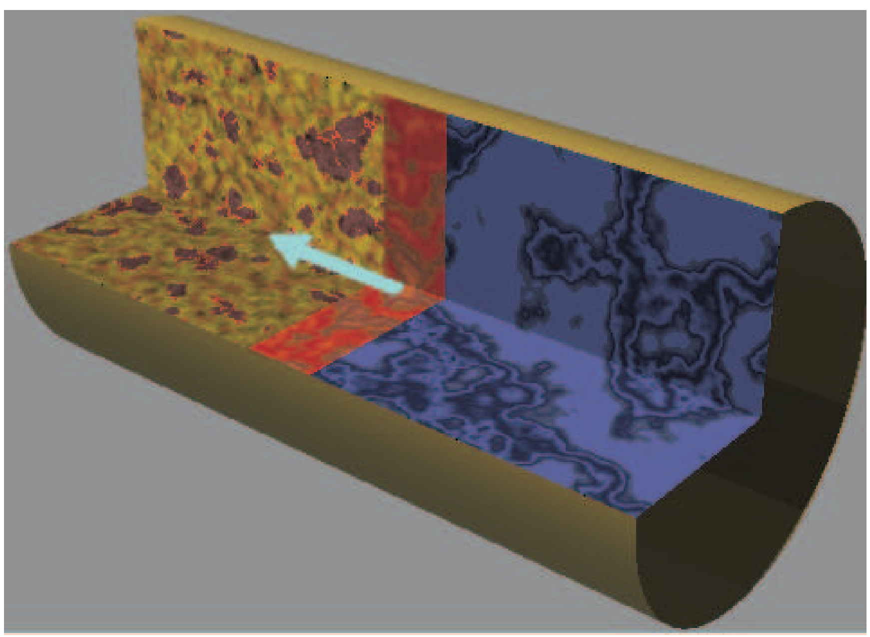

Figura 3.1: Escoamento unidimensional em meios porosos

Segundo [8], após algumas simplificações e manipulações usuais, o escoamento é modelado por quatro equações diferenciais parciais que representam conservação de energia, balanço da massa de oxigênio, o balanço da massa da fase gasosa do combustível e uma equação que descreve o processo de combustão:

$$(1-\phi)\frac{\partial(c_s\rho_s\tilde{T})}{\partial\tilde{t}}+\frac{\partial(c_g\rho_g\tilde{v}\tilde{T})}{\partial\tilde{x}}=\tilde{\lambda}\frac{\partial^2\tilde{T}}{\partial\tilde{x}^2}+Q\rho_f^oW. \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial(\phi\rho_g\tilde{Y})}{\partial\tilde{t}}+\frac{\partial(\rho_g\tilde{v}\tilde{Y})}{\partial\tilde{x}}=D_M\frac{\partial}{\partial\tilde{x}}\left(\rho_g\frac{\partial\tilde{Y}}{\partial\tilde{x}}\right)-\tilde{\mu}\rho_f^oW, \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial(\phi\rho_g)}{\partial\tilde{t}}+\frac{\partial\left(\rho_g\tilde{v}\right)}{\partial\tilde{x}}=\tilde{\mu}_g\rho_f^oW, \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial\tilde{t}}=W. \tag{3.4}$$

Aqui W é a taxa da reação, c_s e c_g denotam as capacidades térmicas das fases sólida e gasosa para pressão constante, ρ_s e ρ_g são as densidades volumetricas, $\tilde{\lambda}$ é a condutividade térmica efetiva ($\tilde{\lambda}_s$=$\tilde{\lambda}_g$), Q é o calor da combustão. Além disso D_M é o coeficiente da difusão efetiva na fase gasosa (D=D_M/ϕ), enquanto $\tilde{\mu}=\tilde{\gamma}M_o/M_f$ e $\tilde{\mu}_{gp}=\tilde{\gamma}_{gp}M_{gp}/M_f$ são coeficientes estequiométricos em termos de massas para oxigênio e para os produtos gasosos da combustão respectivamente. A porosidade ϕ é suposta constante com valor dado na tabela do Apêndice (B). As variáveis dependentes são a temperatura $\tilde{T}(\tilde{x},\tilde{t})$, a fração da massa de oxigênio $\tilde{Y}(\tilde{x},\tilde{t})$, a taxa de conversão do combustível $\eta(\tilde{x},\tilde{t})$ e $\tilde{v}$ a velocidade do escoamento. Por causa do reescalamento, $\eta=0$ significa que nenhum combustível foi usado e $\eta=1$ significa o consumo total do combustível.

A massa do gás produzida é determinada a partir da relação $\tilde{\mu}_g=\tilde{\mu}_{gp}-\tilde{\mu}$, donde o sinal positivo ou negativo de $\tilde{\mu}_g$ corresponde a produção total de massa gasosa ou a consumo, respectivamente. Supomos $\tilde{\mu}_g>0$. Para a taxa de reação usamos a Lei de Arrhenius modificada:

$$W=k(\tilde{T})\tilde{Y}\tilde{p}(1-\eta)\,,\quad \text{onde}$$

$$k(\tilde{T})=k_oe^{-E/R(\tilde{T}-\tilde{T}_{ig})}\,,\quad \text{para}\quad \tilde{T}>\tilde{T}_{ig},\quad \text{e}\quad k(\tilde{T})=0\,,\quad \text{para}\quad \tilde{T}\leq\tilde{T}_{ig},$$

onde E é a energia de ativação. O termo entre parênteses, que depende exponencialmente da temperatura, assegura que a taxa de reação será zero na temperatura de ignição $\tilde{T}_{ig}>0$. Na Lei de Arrhenius normalmente usa-se $\tilde{T}_{ig}=0$ K. Em [8] é usado $\tilde{T}_{ig}=\tilde{T}_0$, a temperatura do reservatório. Esse T_{ig} artificial é introduzido para contornar problemas técnicos relacionados ao fato que o fator exponencial fica pequeno mas não nulo à temperatura ambiente.

Usaremos variaveis adimensionais para simplificar as equações e introduziremos variáveis e parâmetros convenientes, que são definidos no Apêndice (B). Reescalamos o comprimento por l^*=α_s/v^i e o tempo por t^*=l^*/v^i, onde v^i é a velocidade da injeção e α_s é a difusividade térmica efetiva. Introduzimos a temperatura reescalada $\theta = \tilde{T}/\tilde{T}_0$, o que significa que a temperatura do reservatório corresponde a $\theta_0 = 1$. Logo as equações (3.1)–(3.4) se transformam em leis adimensionais de balanço:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial (a\rho v\theta)}{\partial \hat{x}} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \hat{x}^2} + q\Phi, \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial (\phi Y\rho)}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial (\rho v Y)}{\partial \hat{x}} = \frac{1}{L_e}\frac{\partial}{\partial \hat{x}}\left(\rho \frac{\partial Y}{\partial \hat{x}}\right) - \mu\Phi, \tag{3.6}$$

$$\phi \frac{\partial \rho}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial \hat{x}} = \mu_g \Phi, \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \hat{t}} = \Phi, \tag{3.8}$$

$$\rho\theta = 1, \tag{3.9}$$

onde

$$\Phi = \alpha Y(1-\eta)\, e^{-\gamma/(\theta-1)}\,, \quad \text{para } \theta > 1, \quad \text{e} \quad \Phi = 0\,, \quad \text{para } \theta \leq 1. \tag{3.10}$$

O domínio das variáveis dependentes é dado por:

$$\theta \geq 0\,, \quad 0 \leq Y \leq 1\,, \quad 0 \leq \eta \leq 1\,, \quad v > 0\,. \tag{3.11}$$

Nas equações acima L_e é o número de Lewis, razão entre os coeficientes de difusão e condutividade. Estudaremos a propagação das ondas de combustão que ocorrem para $\theta > 1$ (veja Eq. (3.10)). A frente de combustão conecta um estado queimado (*burned state)* denotado por $U^b \equiv (\theta^b, Y^b, \eta^b, v^b)$ a outro estado não queimado (*unburned state)*, denotado por $U^u \equiv (\theta^u, Y^u, \eta^u, v^u)$. Algumas vezes usaremos a anotação $-$ e $+$ ao invés de b e u para denotar os equilíbrios, tal como fizemos na parte teórica. Usaremos neste trabalho $Y^b = 1$, $\eta^b = 1$ significando abundância de oxigênio e consumo total de combustível na parte traseira da frente de combustão e $\theta^u = 1$, $\eta^u = 0$, significando a temperatura insuficiente porém com abundância de combustível na dianteira da combustão.

Estudaremos as ondas de combustão como ondas viajantes estacionárias para o sistema (3.5)-(3.10) com a velocidade de propagação $V > 0$ colocando $x = \hat{x} - V\hat{t}$ e $t = \hat{t}$. Em variáveis adimensionais, depois de usar a Eq. (3.9) para eliminar ρ, as equações (3.5)-(3.8) transformam-se em:

$$\frac{d}{dx}\left(av - V\theta\right) = \frac{d^2\theta}{dx^2} - q\frac{d(V\eta)}{dx}, \tag{3.12}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\theta}(v - \phi V)Y\right) = \frac{1}{L_e}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\theta}\frac{dY}{dx}\right) + \mu\frac{d(V\eta)}{dx}, \tag{3.13}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\theta}(v-\phi V)\right)=-\mu_g\frac{d(V\eta)}{dx}, \tag{3.14}$$

$$\frac{d(V\eta)}{dx}=-\Phi. \tag{3.15}$$

Integrando as equações (3.12)-(3.14) de x até $+\infty$ e lembrando que $\eta^u=0$ em $x=+\infty$ (pois $\eta^u=0$ representa que nenhum combustível foi queimado antes da combustão) e reordenando, teremos:

$$\frac{d\theta}{dx}=a(v-v^u)-V(\theta-\theta^u)+q\eta, \tag{3.16}$$

$$\frac{dY}{dx}=L_e\theta\left(\frac{1}{\theta}(v-\phi V)Y-\frac{1}{\theta^u}(v^u-\phi V)Y^u-\mu V\eta\right), \tag{3.17}$$

$$\frac{1}{\theta}(v-\phi V)-\frac{1}{\theta^u}(v^u-\phi V)+\mu_g V\eta=0, \tag{3.18}$$

$$V\frac{d\eta}{dx}=-\Phi. \tag{3.19}$$

Agora, substituindo o valor de v dado pela equação (3.18) em (3.16) e (3.17) e substituindo o valor de Φ dado pela Eq. (3.10) em (3.19) obtemos o sistema reduzido

$$\frac{d\theta}{dx}=a\left(\frac{v^u\theta}{\theta^u}-\big((\frac{\theta}{\theta^u}-1)\phi+\mu_g\eta\theta\big)V-v^u\right)-V(\theta-\theta^u-q\eta), \tag{3.20}$$

$$\frac{dY}{dx}=L_e\theta\left(\big(\frac{v^u}{\theta^u}-(\frac{\phi}{\theta^u}+\mu_g\eta)V\big)Y-\mu V\eta-\frac{1}{\theta^u}\big(v^u-\phi V\big)Y^u\right), \tag{3.21}$$

$$\frac{d\eta}{dx}=-\frac{\alpha}{V}Y\,(1-\eta)\,e^{-\gamma/(\theta-1)},\quad \text{for } \theta>1,\quad \text{and}\quad \frac{d\eta}{dx}=0\,,\quad \text{for } \theta\leq 1. \tag{3.22}$$

Para chegar à forma final, introduzimos $V^u=\phi V/v^u$ e multiplicamos x por $v^u/\phi\theta^u$ obtendo o sistema a seguir em coordenadas adimensionais $\tilde{x}=xv^u/\phi\theta^u$:

$$\frac{d\theta}{dx}=a\left(\phi(\theta-\theta^u)-\big((\theta-\theta^u)\phi+\mu_g\theta^u\eta\theta\big)V^u\right)+V^u\theta^u\big(q\eta+(\theta^u-\theta)\big), \tag{3.23}$$

$$\frac{dY}{dx}=L_e\theta\big(\left(\phi-(\phi+\mu_g\theta^u\eta)V^u\right)Y-\mu\theta^u V^u\eta-\phi(1-V^u)Y^u\big), \tag{3.24}$$

$$\frac{d\eta}{dx}=\begin{cases}\dfrac{C}{V^u}Y(1-\eta)e^{\frac{-\gamma}{(\theta-1)}}\,, & \text{se } \theta>1;\\ 0\,, & \text{se } \theta\leq 1,\end{cases} \tag{3.25}$$

onde $C=\frac{-\alpha\theta^u\phi^2}{(v^u)^2}$, V^u e θ^u são parâmetros relacionados ao estado (+) na dianteira da onda de combustão. Notemos que agora $x=v^u(\hat{x}-V\hat{t})/\phi\theta^u$.

Obtivemos um sistema de três equações diferenciais ordinárias nas quais o lado direito da última equação é pequeno em relação aos demais. Utilizando os valores numéricos dos parâmetros dados no Apêndice (B) e restringindo θ ao intervalo $[1, 2]$ (que corresponde a faixa da temperatura de combustão entre 300 e 600 graus Kelvin) tomaremos um valor típico de $e^{\frac{-\gamma}{(\theta-1)}}$ como $e^{-\frac{\gamma}{2}}$ (aproximadamente 10^{-6}). Definiremos ϵ como $\epsilon = \dfrac{e^{-\frac{\gamma}{2}}C}{V^u}$ (ϵ é inferior a 10^{-3}). Assim a equação (3.25) ficará:

$$\frac{d\eta}{dx} = \begin{cases} \epsilon Y(1-\eta)e^{\frac{\gamma(\theta-3)}{2(\theta-1)}}, & \text{se } \theta > 1; \\ 0, & \text{se } \theta \leq 1, \end{cases} \tag{3.26}$$

Comparando as equações (3.23), (3.24) e (3.26) com (2.1) vemos que θ, Y e η são as variáveis que têm o papel de x_1, x_2 e y para a teoria descrita na Seção 2.

Notemos que colocar ϵ isolado na passagem de (3.25) para (3.26) não simplifica os cálculos. Além disso, quando usarmos a equação (3.25) para obter a aproximação de ordem zero, o parâmetro ϵ pode continuar acoplado à equação. Ao desenvolver a aproximação de ordem um, faremos operações com as equações (3.23)-(3.25) onde ϵ sempre poderá ser isolado. Então, neste trabalho, decidimos manter ϵ inserido nas equações que descrevem o campo. Assim a aproximação de primeira ordem da órbita será:

$$\begin{cases} \theta = \theta^0 + \theta^1 \\ Y = Y^0 + Y^1 \\ \eta = \eta^0 + \eta^1, \end{cases} \quad \text{ao invés de} \quad \begin{cases} \theta = \theta^0 + \epsilon\theta^1 \\ Y = Y^0 + \epsilon Y^1 \\ \eta = \eta^0 + \epsilon\eta^1. \end{cases} \tag{3.27}$$

3.1 Equilíbrios

Normalmente não há combustão na ausência de oxigênio ($Y = 0$), de combustível ($\eta = 1$), ou se a temperatura é baixa ($\theta = 1$). Focalizaremos nossa atenção na última situação ($\theta^u = 1$).

Assim, estamos estudando o caso em que no estado $(-)$ (ou queimado) $\eta^b = 1$ e $Y^b = 1$. No estado $(+)$ (ou não queimado) temos a temperatura inicial $\theta^u = 1$ e o combustível total $\eta^u = 0$. As grandezas θ^b e Y^u são certas coordenadas dos pontos de equilíbrio $(\theta^b, Y^b, \eta^b) = (\theta^b, 1, 1)$ e $(\theta^u, Y^u, \eta^u) = (1, Y^u, 0)$. Portanto, substituindo estes valores nas equações (3.23) e (3.24) e igualando-as a zero obtemos que Y^u e θ^b são dados por

$$Y^u = \frac{\phi - (\phi + \mu + \mu_g)V^u}{\phi - \phi V^u}, \quad \theta^b = \frac{(1+q)V^u - a\phi(1 - V^u)}{V^u - a(\phi - (\phi + \mu_g)V^u)}. \tag{3.28}$$

No Apêndice B emcontram-se os valores dos parâmetros que aparecem nas fórmulas acima.

3.2 Onda de combustão quase-estacionária

Colocando o sistema (3.23)-(3.25) na forma (2.5) obtemos:

$$\begin{cases} a\left(\phi(\theta^0-\theta^u)-\left((\theta^0-\theta^u)\phi+\mu_g\theta^u\eta^0\theta^0\right)V^u\right)+V^u\theta^u\left(q\eta^0+(\theta^u-\theta^0)\right)=0, \\ L_e\theta^0\left(\left(\phi-(\phi+\mu_g\theta^u\eta^0)V^u\right)Y^0-\mu\theta^uV^u\eta^0-\phi(1-V^u)Y^u\right)=0, \end{cases} \tag{3.29}$$

O sistema (3.29) define θ^0 e Y^0 em termos de η^0:

$$\theta^0(\eta^0)=\frac{a\phi-a\phi V^u-V^uq\eta^0-V^u}{a\phi-a\phi V^u-a\mu_g\eta^0V^u-V^u}, \tag{3.30}$$

$$Y^0(\eta^0)=\frac{\mu V^u\eta^0+\phi Y^u-\phi V^uY^u}{\phi-\phi V^u-\mu_g\eta^0V^u}. \tag{3.31}$$

Aqui analisamos uma das condições de contorno descritas em [8] onde $\theta^u=1$, como indicamos na Seção 3.1. Lembrando de que estamos interessados em trabalhar em Ω onde $\theta>1$, o equivalente à equação (2.6) fica:

$$\dot{\eta}^0=\frac{C}{V^u}Y^0(\eta^0)(1-\eta^0)e^{\frac{-\gamma}{(\theta^0(\eta^0)-1)}}. \tag{3.32}$$

Para obter o dado inicial, analogamente ao modo como foi feito no caso geral na Seção (2.1), escolhemos um $\breve{\eta}$ que pertence ao intervalo (η^u,η^b). Podemos resolver a EDO (3.32) com condição inicial $\eta^0(0)=\breve{\eta}$ para obter η^0 em função de x. Então a aproximação quase estacionária (ou de ordem zero) em função de x fica:

$$\mathbf{\Gamma}_0(\eta^0(x))=\left(\frac{a\phi-a\phi V^u-V^uq\eta^0(x)-V^u}{a\phi-a\phi V^u-a\mu_g\eta^0(x)V^u-V^u},\frac{\mu V^u\eta^0(x)+\phi Y^u-\phi V^uY^u}{\phi-\phi V^u-\mu_g\eta^0(x)V^u},\eta^0(x)\right), \tag{3.33}$$

Para facilitar a notação usaremos:

$$K_1=K_1(V^u)=a\phi-a\phi V^u-V^u, \tag{3.34}$$

$$K_2=K_2(V^u)=\phi-\phi V^u. \tag{3.35}$$

Os valores que V^u pode assumir serão colocados em (3.41), note que neste caso $K_2>0$ e $K_1<0$ se $V^u>\frac{a\phi}{1+a\phi}$ (aproximadamente $1,8387\cdot10^{-4}$). Assim:

$$\mathbf{\Gamma}_0(\eta^0)=\left(\frac{K_1-V^uq\eta^0}{K_1-a\mu_gV^u\eta^0},\ \frac{K_2Y^u+\mu V^u\eta^0}{K_2-\mu_gV^u\eta^0},\ \eta^0\right). \tag{3.36}$$

Para que a curva (3.36) seja conexa, precisamos das restrições

$$K_1-a\mu_g\eta^0V^u\neq0; \tag{3.37}$$

$$K_2 - \mu_g \eta^0 V^u \neq 0, \tag{3.38}$$

para todos os valores de η^0, ou então que os valores de η^0 que anulem os denominadores de cada fração em (3.36) anulam também os numeradores. É facil verificar que esta segunda possibilidade ocorre somente no caso $V^u = a\phi/(a\phi+1)$.

Substituindo os valores de K_1 e K_2 dados em (3.34)-(3.35), vemos que (3.37), (3.38) equivalem respectivamente a:

$$a\phi - a\phi V^u - V^u - a\mu_g \eta^0 V^u \neq 0,$$

$$\phi - \phi V^u - \mu_g \eta^0 V^u \neq 0,$$

para todos os valores de η^0. Equivalentemente

$$V^u \neq \frac{a\phi}{a\phi + 1 + a\mu_g \eta^0},$$

$$V^u \neq \frac{\phi}{\phi + \mu_g \eta^0},$$

para todos os valores de η^0. Como η^0 assume todos os valores no intervalo $[0,1]$, temos que (3.38), (3.37) equivalem respectivamente a:

$$V^u < \frac{a\phi}{a\phi + 1 + a\mu_g} \text{ ou } V^u > \frac{a\phi}{a\phi+1}; \tag{3.39}$$

$$V^u < \frac{\phi}{\phi + \mu_g} \text{ ou } V^u > \frac{\phi}{\phi} = 1. \tag{3.40}$$

Substituindo os valores da tabela dada no Apêndice (B) podemos concluir que para obter a aproximação quase-estacionária é necessário que

$$0 < V^u < 1.7649 \cdot 10^{-4} \text{ ou } 1.8387 \cdot 10^{-4} \leq V^u < 44.0 \cdot 10^{-4} \text{ ou } 1.0 < V^u, \tag{3.41}$$

onde o primeiro intervalo corresponde a $V^u < a\phi/(a\phi + 1 + a\mu_g)$ e o segundo é $a\phi/(a\phi+1) < V^u < \phi/(\phi\mu_g)$.

3.3 Cálculo do Jacobiano

Abreviaremos o campo do sistema (3.23), (3.24) e (3.25) como:

$$\frac{d\theta}{dx} = f^\theta, \tag{3.42}$$

$$\frac{dY}{dx} = f^Y, \tag{3.43}$$

$$\frac{d\eta}{dx} = f^\eta. \tag{3.44}$$

Lembrando que consideramos $\theta^u = 1$, calculamos as derivadas parciais e obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f^\theta}{\partial \theta} &= K_1 - a\mu_g V^u \eta,\\ \frac{\partial f^\theta}{\partial Y} &= 0,\\ \frac{\partial f^\theta}{\partial \eta} &= -a\mu_g \theta V^u + V^u q;\end{aligned} \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f^Y}{\partial \theta} &= L_e\big(\left(\phi - (\phi + \mu_g \eta) V^u\right) Y - \mu V^u \eta - \phi(1 - V^u) Y^u \big),\\ \frac{\partial f^Y}{\partial Y} &= L_e \theta \left((\phi - \phi V^u - \mu_g V^u \eta \right),\\ \frac{\partial f^Y}{\partial \eta} &= L_e \theta \left(-\mu_g V^u Y - \mu V^u \right);\end{aligned} \tag{3.46}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f^\eta}{\partial \theta} &= \frac{\gamma}{(\theta - 1)^2} f^\eta(\theta, Y, \eta),\\ \frac{\partial f^\eta}{\partial Y} &= \frac{1}{Y} f^\eta(\theta, Y, \eta),\\ \frac{\partial f^\eta}{\partial \eta} &= \frac{-1}{1 - \eta} f^\eta(\theta, Y, \eta).\end{aligned} \tag{3.47}$$

Precisaremos da Jacobiana do campo $\mathbf{f}$ ao longo da curva $\mathbf{\Gamma}_0$. Assim, substituimos os valores de $\theta^0(\eta^0)$ e $Y^0(\eta^0)$ dados em (3.36) para obter:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f^\theta}{\partial \theta} &= K_1 - a\mu_g V^u \eta^0,\\ \frac{\partial f^\theta}{\partial Y} &= 0,\\ \frac{\partial f^\theta}{\partial \eta} &= K_1 \frac{(q - a\mu_g) V^u}{K_1 - a\mu_g V^u \eta^0};\end{aligned} \tag{3.48}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f^Y}{\partial \theta} &= 0,\\ \frac{\partial f^Y}{\partial Y} &= L_e \frac{K_1 - V^u q \eta^0}{K_1 - a\mu_g V^u \eta^0} [K_2 - \mu_g V^u \eta^0],\\ \frac{\partial f^Y}{\partial \eta} &= -L_e K_2 V^u \frac{K_1 - V^u q \eta^0}{K_1 - a\mu_g V^u \eta^0} \frac{Y^u \mu_g + \mu}{K_2 - \mu_g V^u \eta^0};\end{aligned} \tag{3.49}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f^\eta}{\partial \theta} &= \frac{\gamma}{(V^u)^2(\eta^0)^2}\left[\frac{K_1 - a\mu_g V^u \eta^0}{a\mu_g - q}\right]^2 f^\eta(\mathbf{\Gamma}_0),\\
\frac{\partial f^\eta}{\partial Y} &= \frac{K_2 - \mu_g V^u \eta^0}{K_2 Y^u + \mu V^u \eta^0} f^\eta(\mathbf{\Gamma}_0),\\
\frac{\partial f^\eta}{\partial \eta} &= \frac{-1}{1-\eta^0} f^\eta(\mathbf{\Gamma}_0).
\end{aligned}
\tag{3.50}
$$

Com isso podemos calcular o determinante da matriz 2×2 ao longo de $\mathbf{\Gamma}_0$:

$$
\det \mathbf{F_x} = L_e(K_1 - V^u q \eta^0)(K_2 - \mu_g V^u \eta^0). \tag{3.51}
$$

3.4 Aproximação de primeira ordem para ondas de combustão

Agora reescrevemos a equação (2.19) para o caso específico escolhido:

$$
\begin{aligned}
\dot{\theta}^0 &= \frac{\partial f^\theta}{\partial \theta}\theta^1 + \frac{\partial f^\theta}{\partial Y}Y^1 + \frac{\partial f^\theta}{\partial \eta}\eta^1;\\
\dot{Y}^0 &= \frac{\partial f^Y}{\partial \theta}\theta^1 + \frac{\partial f^Y}{\partial Y}Y^1 + \frac{\partial f^Y}{\partial \eta}\eta^1;\\
\dot{\eta}^1 &= \frac{\partial f^\eta}{\partial \theta}\theta^1 + \frac{\partial f^\eta}{\partial Y}Y^1 + \frac{\partial f^\eta}{\partial \eta}\eta^1.
\end{aligned}
\tag{3.52}
$$

Lembrando que para calcular $\dot{\theta}^0$ e $\dot{Y}^0$ usamos (3.36) e (3.44), assim:

$$
\begin{aligned}
\dot{\theta}^0 &= \frac{\partial \theta^0}{\partial \eta^0}\ \frac{d\eta^0}{dx} = V^u K_1 \frac{a\mu_g - q}{(K_1 - a\mu_g V^u \eta^0)^2} f^\eta(\mathbf{\Gamma}_0);\\
\dot{Y}^0 &= \frac{\partial Y^0}{\partial \eta^0}\ \frac{d\eta^0}{dx} = V^u K_2 \frac{\mu + \mu_g Y^u}{(K_2 - \mu_g V^u \eta^0)^2} f^\eta(\mathbf{\Gamma}_0).
\end{aligned}
\tag{3.53}
$$

Das duas primeiras equações de (3.52) usando (3.53) podemos isolar θ^1 e Y^1 como funções lineares em η^1:

$$
\theta^1(\eta^1, \eta^0) = K_1 V^u f^\eta(\mathbf{\Gamma}_0)\frac{a\mu_g - q}{(K_1 - a\mu_g V^u \eta^0)^3} + K_1 V^u \frac{a\mu_g - q}{(K_1 - a\mu_g V^u \eta^0)^2}\eta^1; \tag{3.54}
$$

$$
Y^1(\eta^1, \eta^0) = \frac{K_2 V^u}{L_e}\frac{\mu + \mu_g Y^u}{(K_2 - \mu_g V^u \eta^0)^3} f^\eta(\mathbf{\Gamma}_0)\frac{K_1 - a\mu_g V^u \eta^0}{K_1 - V^u q \eta^0} + \eta^1 K_2 V^u \frac{\mu + \mu_g Y^u}{(K_2 - \mu_g V^u \eta^0)^2}. \tag{3.55}
$$

Substituindo (3.54) e (3.55) na terceira equação de (3.52), e lembrando que

$$
\dot{\eta}^1 = \frac{d\eta^1}{d\eta^0}\dot{\eta}^0 = \frac{d\eta^1}{d\eta^0} f^\eta(\mathbf{\Gamma}_0(\eta^0)),
$$

teremos:

$$\frac{d\eta^1}{d\eta^0} = A(\eta^0)\eta^1 + B(\eta^0), \tag{3.56}$$

onde:

$$\begin{aligned} A(\eta^0) &= \left[\frac{\gamma K_1}{V^u(\eta^0)^2}\frac{1}{a\mu_g - q} + \frac{K_2 V^u}{K_2 Y^u + \mu V^u \eta^0}\frac{\mu + \mu_g V^u}{(K_2 - \mu_g V^u \eta^0)} - \frac{1}{1-\eta^0}\right]; \\ B(\eta^0) &= f^\eta(\mathbf{\Gamma}_0(\eta^0))\left[\frac{\gamma K_1}{V^u(\eta^0)^2}\frac{1}{a\mu_g - q}\frac{1}{(K_1 - a\mu_g V^u \eta^0)} + \right. \\ &\left. + \frac{K_2 V^u}{L_e}\frac{\mu + \mu_g V^u}{(K_2 - \mu_g V^u \eta^0)^2}\frac{K_1 - a\mu_g V^u \eta^0}{K_1 - V^u q \eta^0}\frac{1}{K_2 Y^u + \mu V^u \eta^0}\right]. \end{aligned} \tag{3.57}$$

Durante a demonstração do Teorema (2.1) para existência de ondas viajantes foi feita a suposição de que os termos $A(\eta^0)$ e $B(\eta^0)$ comportam-se bem no interior do intervalo $[0,1]$. Para garantir essa hipótese precisamos construir restrições sobre V^u além de (3.41). Para $A(\eta^0)$ devemos ter:

$$\begin{aligned} K_2 Y^u + \mu V^u \eta^0 &\neq 0; \\ K_2 - \mu_g \eta^0 V^u &\neq 0, \end{aligned} \tag{3.58}$$

para todos os valores de η^0. Notemos que a segunda hipótese já é satisfeita em (3.37) e (3.41), logo precisamos analisar somente a primeira. Mas temos uma restrição física: $Y^u \in [0,1]$. Logo $K_2 Y^u + \mu V^u \eta^0 \neq 0$.

Para $B(\eta^0)$ temos:

$$\begin{aligned} K_1 - V^u q \eta^0 &\neq 0; \\ K_1 - a\mu_g V^u \eta^0 &\neq 0; \\ K_2 - \mu_g V^u \eta^0 &\neq 0; \\ K_2 Y^u + \mu V^u \eta^0 &\neq 0, \end{aligned} \tag{3.59}$$

para todos os valores de η^0. Notemos que a segunda, terceira e quarta hipóteses já são satisfeitas em (3.41), logo analisaremos apenas a primeira. De forma análoga à Seção anterior obtemos que:

$$V^u < \frac{a\phi}{a\phi + 1 + q} \text{ ou } V^u > \frac{a\phi}{a\phi + 1};$$

Logo

$$0 < V^u < 2.6579 \cdot 10^{-6} \text{ ou } 1.8387 \cdot 10^{-4} < V^u. \tag{3.60}$$

Juntando essa hipótese com a (3.41) temos intervalos de definição de V^u onde temos a aproximação de ordem um e vale a hipótese (2.13) (TFI):

$$0 < V^u < \frac{a\phi}{a\phi + 1 + q} \text{ ou } \frac{a\phi}{a\phi + 1} < V^u < \frac{\phi}{\phi + \mu_g} \text{ ou } 1 < V^u. \tag{3.61}$$

Equivalentemente

$$0 < V^u < 2.6579 \cdot 10^{-6} \text{ ou } 1.8387 \cdot 10^{-4} < V^u < 0.0044 \text{ ou } 1 < V^u. \tag{3.62}$$

3.5 Órbita no caso de temperatura inicial baixa

O problema físico proposto em [8] apresenta algumas restrições. Primeiramente $Y^u \in [0, 1]$. Logo de (3.28) segue que

$$0 \leq V^u \leq \frac{\phi}{\phi + \mu + \mu_g} \approx 0.0011. \tag{3.63}$$

Tambem temos duas possibilidades para θ^b no equilíbrio $(-)$. Dependendo se $\theta^b > 1$ ou $\theta^b < 1$ muda a física do problema. Assim, usando a equação (3.28) podemos obter os valores de V^u para ambas as possibilidades. Aqui analisaremos somente a primeira, pois o método de perturbação singular não se aplica à segunda, já que neste caso de acordo com a fórmula (3.25) temos $\frac{d\eta}{dx} = 0$.

Supondo que $\theta^b > 1$, podemos reescrever (3.28) como

$$\theta^b = \frac{(1 + q + a\phi)V^u - a\phi}{(1 + a\mu_g + a\phi)V^u - a\phi}. \tag{3.64}$$

Temos duas possibilidades para o denominador de (3.64) de acordo com seu sinal. Mostraremos que ele é positivo. Caso fosse negativo, como $\theta^b > 1$, então

$$(1 + q + a\phi)V^u - a\phi < (1 + a\mu_g + a\phi)V^u - a\phi, \tag{3.65}$$

ou seja $q < a\mu_g$ para $V^u > 0$, o que está em contradição com os valores das constantes no Apêndice (B). Sendo o denominador de (3.64) positivo, i.e.,z $(1 + a\mu_g + a\phi)V^u - a\phi > 0$ e usando que $\theta^b > 1$, $a\phi < q$, temos:

$$V^u > \frac{a\phi}{1 + a\mu_g + a\phi} \approx 1,7649 \cdot 10^{-4}. \tag{3.66}$$

Então o problema impõe que

$$\frac{a\phi}{1 + a\mu_g + a\phi} < V^u \leq \frac{\phi}{\phi + \mu + \mu_g}. \tag{3.67}$$

Junto com a restrição (3.61) isso significa que (tirando $V^u > 1$, que não tem significado físico) se $\theta^b > 1$ e $Y^u > 0$, temos:

$$\frac{a\phi}{a\phi + 1} < V^u < \frac{\phi}{\phi + \mu + \mu_g}, \tag{3.68}$$

ou seja

$$1.8387 \cdot 10^{-4} < V^u < 0.0011. \tag{3.69}$$

No caso limite em que $\theta^b > 1$ e $Y^u = 0$, temos:

$$V^u = \frac{\phi}{\phi + \mu + \mu_g}, \tag{3.70}$$

ou $V^u = 0.0011$.

Formalmente nós conseguimos obter somente as aproximações da órbita de ordem até um usando o método de perturbação singular. Além disso as restrições para V^u que obtivemos neste trabalho coincidem com as descobertas em [8] onde outros aspectos do problema foram investigados. Não contentes com esse grau de formalismo, no próximo capítulo provaremos a existência da órbita para este caso particular.

Capítulo 4

Existência da órbita heteroclínica

Usando o Lema (A.6) demonstraremos para a onda de combustão a existência da órbita heteróclínica que liga os equilíbrios. Esse problema é discutido em [4].

Teorema 4.1 *O sistema de equações (3.23), (3.24), (3.25) com o parâmetro V^u satisfazendo a restrição (3.68) admite uma órbita que liga os dois equilíbrios definidos na Seção (3.1).*

Demonstração: Utilizando as duas primeiras componentes de (3.48) e (3.49) o determinante $\det \mathbf{F_x}$ definido em (2.12) para esse caso é:

$$\det \mathbf{F_x} = \frac{\partial f^\theta}{\partial \theta}\frac{\partial f^Y}{\partial Y} = L_e[K_1 - V^u q\eta^0][K_2 - \mu_g \eta^0 V^u]. \tag{4.1}$$

Este determinante não se anula para V^u no intervalo dado em (3.68) para os valores dos parâmetros dados no Apêndice (B). Construiremos uma vizinhança com seção retangular para poder usar o Lema (A.6). Chamaremos essa vizinhança de W, suas faces verticais de W^l e as horizontais de W^v como na Figura (4.1).

Note que a componente do campo da primeira equação (3.23) para cada η fixo é linear em θ e independe de Y. Além disso, o coeficiente do θ é estritamente negativo e o termo livre é estritamente positivo para todos os valores que η e V^u podem assumir. Para o caso considerado de $\theta^u = 1$, ele é:

$$f^\theta(\theta, Y) = (a\phi - a\phi V^u - a\mu_g \eta V^u - V^u)\theta + (V^u q\eta + V^u + V^u\phi - a\phi).$$

Assim para cada η fixo temos um único valor de θ para o qual a componente do campo f^θ troca de sinal. Este valor define uma reta vertical que intercepta $\mathbf{\Gamma_0}$. Logo a hipótese 2) do Lema (A.6) é satisfeita para qualquer par de paredes laterais de uma vizinhança que contenha $\mathbf{\Gamma_0}$.

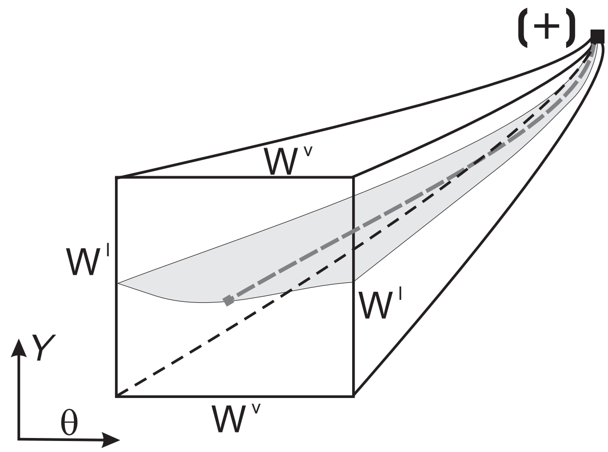

Figura 4.1: A vizinhança W com a órbita que liga dois equilíbrios. Os lados da seção retangular tendem a zero quando se aproximam do equilíbrio.

Agora notemos que para cada valor de η fixo f^Y pode ser escrita como:

$$f_Y(\theta, Y) = (A_1 Y + A_2)\theta, \tag{4.2}$$

onde

$$A_1 = \phi - (\phi + \mu_g \eta)V^u \quad \text{e} \quad A_2 = -\mu V^u \eta - \phi(1 - V^u)Y^u. \tag{4.3}$$

Como ao longo da curva $\mathbf{\Gamma_0}$ temos $\theta^0(\eta^0) > 0$ para todo $\eta^0 \in (\eta^u, \eta^b)$, o sinal de f^Y é determinado pelo fator linear $A_1 Y + A_2$. Como A_1 e A_2 variam pouco, e de fato, $A_1 > 0$ e $A_2 < 0$ para todo η^0, é possivel escolher parede superior e inferior de modo que W^v satisfaz a hipótese 3) do Lema.

Agora notemos que para η_0 ao longo de intervalo (η^u, η^b) o valor de θ é maior que 1 e Y esta definido no intervalo $(0, 1)$, com isso f^η em (3.25) não troca de sinal, mais precisamente $f^\eta > 0$. Assim a hipótese 4) do Lema (A.6) está satisfeita. Usando o Lema (A.6) podemos garantir a existência da órbita heteroclínica ligando o estado $(-)$ ao estado $(+)$, ou seja, a existência da onda de combustão como onda viajante para todo valor do parâmetro V^u definido em (3.68).

$\square$

Capítulo 5

Conclusões

Desenvolvemos um método para encontrar a solução aproximada de um sistema de EDOs (como (2.1)) com n equações $O(1)$ e uma equação $O(\epsilon)$ com ϵ sendo um parâmetro pequeno.

Para isso consideramos as expansões assintóticas (2.15) e (2.17). Tomamos como hipótese que existe uma parte conexa de $\mathcal{F}$ juntando os dois equilíbrios denotada por Γ_0 e que ao longo de Γ_0 são satisfeitas as hipóteses (2.10) e (2.13). Com isto provamos que existe a solução do problema (2.1) (equivalentemente existe uma órbita que liga os equilíbrios $(-)$ e $(+)$), Γ_0 é a aproximação de ordem zero desta órbita conforme descrito na Seção (2.1) e além disso as equações (2.5), (2.6) e (2.24) definem a aproximação de ordem 1 dessa solução na forma:

$$\mathbf{x}_{aprox} = \mathbf{x}^0 + \epsilon \mathbf{x}^1. \tag{5.1}$$

Obtivemos condições para que a correção x^1 seja bem comportada confirmando a aproximação x^0 e utilizamos estas condições no exemplo de combustão apresentado em [8]. Para estender o método há várias direções de trabalho que servem tanto para torná-lo matematicamente mais rigoroso, quanto para aumentar a quantidade de aplicações para os quais ele pode ser útil. Entre eles estão:

- Estudo da existência de ondas viajantes para outros choques de combustão em [8].
- Estudo da dependência das soluções do sistema de EDOs (3.5)–(3.8) do parametro L_e.
- Demonstração rigorosa da existência da órbita no caso geral, veja-se [6], [3] e [4].
- Demonstração da convergência das séries assintóticas envolvidas no problema.
- Generalização do método para as aplicações com sistemas com mais de uma equação da ordem $O(\epsilon)$.
- Aplicação do método desenvolvido nesse trabalho para outros modelos conhecidos de ondas

de combustão em meios porosos.

-Estudo de sistemas em que existem várias escalas ϵ_1, ϵ_2,...

Bibliografia

[1] Akkutlu, I.Y., *Dynamics of Combustion Fronts in Porous Media*, Ph. D. Thesis, Department of Chemical Engineering, University of Southern California, 2002.

[2] Akkutlu, I.Y., Yortsos, Y.C., *The Effect of Heterogeneity on In-situ Combustion: The Propagation of Combustion Fronts in Layered Porous Media*, J. Pet. Tech., June 2002.

[3] Fenichel, N., *Geometric Singular Perturbation Theory for Ordinary Differential Equations*, J. Differential Eqs. 31, (1979), 53-98.

[4] Jones, C.K.R.T., *Geometric Singular Perturbation Theory* em *Dynamical Systems*, Eds Arnold, L at all, Lecture Notes in Math. 1609, Springer, Berlin, (1995) pag. 44-118.

[5] Palis, J., Melo, W., *Intodução aos Sistemas Dinâmicos*, Projeto Euclides, 1978.

[6] Smoller J., *Shock Waves and Reaction–Diffusion Equations*, Springer-Verlag, 1983.

[7] Sotomayor J., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projeto Euclides, 1979.

[8] Souza, A.J, Marchesin, D. and Akkutlu, I.Y., *Wave Sequences For Solid Fuel In-Situ Combustion in Porous Media*, a aparecer, Computational and Applied Mathematics, 2005.

Apêndice A

Alguns resultados auxiliares

Definimos matrizes

$$\mathbf{F_x} = \begin{bmatrix} F_1^1 & \cdots & F_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_1^n & \cdots & F_n^n \end{bmatrix}_{[n]\times[n]}, \quad \mathbf{F}_y = \begin{bmatrix} F_{n+1}^1 \\ \vdots \\ F_{n+1}^n \end{bmatrix}_{[n]\times[1]},$$
$$\mathbf{G_x} = \begin{bmatrix} F_1^{n+1} & \cdots & F_n^{n+1} \end{bmatrix}_{[1]\times[n]}, \quad \mathbf{G}_y = \begin{bmatrix} F_{n+1}^{n+1} \end{bmatrix}_{[1]\times[1]}, \tag{A.1}$$
$$\text{e a matriz por blocos: } \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{F_x} & \mathbf{F}_y \\ \mathbf{G_x} & \mathbf{G}_y \end{bmatrix}_{[n+1]\times[n+1]}.$$

Relembramos a forma explícita de $[\mathbf{F_x}]^{-1}$ que vamos usar nos Lemas abaixo:

$$\mathbf{F_x}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{F_x}} \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\det[F_{1,1}] & \cdots & (-1)^{1+n}\det[F_{n,1}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1}\det[F_{1,n}] & \cdots & (-1)^{n+n}\det[F_{n,n}] \end{bmatrix} \tag{A.2}$$

Lema A.1 *A seguinte identidade é válida:*

$$\begin{aligned} &\mathbf{G_x} \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\det[F_{1,1}] & \cdots & (-1)^{1+n}\det[F_{n,1}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1}\det[F_{1,n}] & \cdots & (-1)^{n+n}\det[F_{n,n}] \end{bmatrix} \mathbf{F}_y = \\ &= \sum_{j=1}^{n} F_j^{n+1} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j+i}\det[F_{i,j}] F_{n+1}^i \end{aligned} \tag{A.3}$$

Demonstração: Temos:

$$\mathbf{G_x}\begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\det[F_{1,1}] & \cdots & (-1)^{1+n}\det[F_{n,1}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1}\det[F_{1,n}] & \cdots & (-1)^{n+n}\det[F_{n,n}] \end{bmatrix}\mathbf{F}_y =$$

$$= \begin{bmatrix} F_1^{n+1} & \cdots & F_n^{n+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\det[F_{1,1}] & \cdots & (-1)^{1+n}\det[F_{n,1}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1}\det[F_{1,n}] & \cdots & (-1)^{n+n}\det[F_{n,n}] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_{n+1}^1 \\ \vdots \\ F_{n+1}^n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} F_1^{n+1} & \cdots & F_n^{n+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vdots \\ \sum_{i=1}^{n}(-1)^{j+i}\det[F_{i,j}]F_{n+1}^i \\ \vdots \end{bmatrix} =$$

$$= -\sum_{j=1}^{n}F_j^{n+1}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{j+i}\det[F_{i,j}]F_{n+1}^i.$$

□

Lema A.2 *A seguinte identidade é válida:*

$$\mathbf{G}_y - \mathbf{G_x}\mathbf{F_x}^{-1}\mathbf{F}_y = \frac{\det\mathbf{G}}{\det\mathbf{F_x}}. \tag{A.4}$$

Demonstração: Temos

$$\mathbf{G}_y - \mathbf{G_x}\mathbf{F_x}^{-1}\mathbf{F}_y = \frac{1}{\det\mathbf{F_x}}\times$$
$$\left(\mathbf{G}_y\det\mathbf{F_x} - \mathbf{G_x}\begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\det[F_{1,1}] & \cdots & (-1)^{1+n}\det[F_{n,1}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1}\det[F_{1,n}] & \cdots & (-1)^{n+n}\det[F_{n,n}] \end{bmatrix}\mathbf{F}_y\right), \tag{A.5}$$

logo usando o Lema (A.1):

$$\mathbf{G}_y - \mathbf{G_x}\mathbf{F_x}^{-1}\mathbf{F}_y =$$
$$= \frac{1}{\det\mathbf{F_x}}\left(\mathbf{G}_y\det\mathbf{F_x} - \sum_{j=1}^{n}F_j^{n+1}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{j+i}\det[F_{i,j}]F_{n+1}^i\right). \tag{A.6}$$

Por outro lado vamos analisar a matriz $\mathbf{G}$, indicamos por $[G_{i,j}]$ a matriz dos cofatores de $\mathbf{G}$ associada ao elemento F_j^i. Temos:

$$
\begin{aligned}
\det \mathbf{G} =& \sum_{j=1}^{n+1} F_{n+1}^{j}(-1)^{n+j+1}\det[G_{j,n+1}] = \\
=& F_{n+1}^{n+1}(-1)^{n+1+n+1}\det \mathbf{F}_{\mathbf{x}} + \sum_{j=1}^{n} F_{j}^{n+1}(-1)^{n+j+1}\det[G_{j,n+1}] = \\
=& \mathbf{G}_y \det \mathbf{F}_{\mathbf{x}} + \sum_{j=1}^{n} F_{j}^{n+1}(-1)^{n+j+1}\sum_{i=1}^{n} F_{n+1}^{i}(-1)^{i+n}\det[F_{i,j}] = \\
=& \mathbf{G}_y \det \mathbf{F}_{\mathbf{x}} - \sum_{j=1}^{n} F_{j}^{n+1}\sum_{i=1}^{n} F_{n+1}^{i}(-1)^{i+j}\det[F_{i,j}].
\end{aligned}
$$

De onde segue o resultado.

□

Lema A.3 *Indicando por* $[G_{n,j}]$ *a matriz dos cofatores do elemento* G_{nj} *na matriz* $\mathbf{G}$*, então vale a identidade:*

$$
\mathbf{G}_{\mathbf{x}}{\mathbf{F}_{\mathbf{x}}}^{-2}\mathbf{F}_y = \frac{1}{(\det \mathbf{F}_{\mathbf{x}})^2}\sum_{j=1}^{n}\det[G_{n,j}]\det[G_{j,n}]. \tag{A.7}
$$

Demonstração: Temos:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{G}_{\mathbf{x}}{\mathbf{F}_{\mathbf{x}}}^{-2}\mathbf{F}_y =& \begin{bmatrix} F_1^{n+1} & \cdots & F_n^{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1^1 & \cdots & F_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_1^n & \cdots & F_n^n \end{bmatrix}^{-2} \begin{bmatrix} F_{n+1}^1 \\ \vdots \\ F_{n+1}^n \end{bmatrix} = \\
=& \frac{1}{(\det \mathbf{F}_{\mathbf{x}})^2}\begin{bmatrix} \cdots & \sum_{i=1}^{n} F_i^{n+1}(-1)^{j+i}\det[F_{j,i}] & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} F_{n+1}^{j}(-1)^{j+i}\det[F_{j,i}] \\ \vdots \end{bmatrix} = \\
=& \frac{1}{(\det \mathbf{F}_{\mathbf{x}})^2}\begin{bmatrix} \cdots & \det[G_{j,n+1}] & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \det[G_{n+1,i}] \\ \vdots \end{bmatrix} = \\
=& \frac{1}{(\det \mathbf{F}_{\mathbf{x}})^2}\sum_{j=1}^{n}\det[G_{n+1,i}]\det[G_{i,n+1}].
\end{aligned}
$$

□

Lema A.4 *Seja $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função C^1 de t, dada pela EDO:*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{t}z + D(t), \tag{A.8}$$

onde a função $D(t)$ é contínua, limitada e $O(1)$, teremos:

$$\lim_{t\to 0} z(t) = 0 \tag{A.9}$$

Demonstração: Como $D(t)$ tem no máximo $O(1)$, na vizinhança $(0, \delta)$ de 0 na variavel t podemos afirmar que existem duas constantes $0 \leq D_1 < D_2$ tais que

$$D_1 < D(t) < D_2 \quad \forall t \in (0, \delta). \tag{A.10}$$

Sejam z_1 e z_2, tais que:

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{1}{t}z + D_1, \qquad \frac{dz_2}{dt} = \frac{1}{t}z + D_2. \tag{A.11}$$

Podemos usar um Teorema (1 e 5 das páginas 39-41) de [7] para garantir que nesse caso $z_1(t) \leq z(t) \leq z_2(z)$ para todo t na vizinhança de 0. Se D é uma constante, teremos:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{t}z + D. \tag{A.12}$$

Caso $D = 0$, a equação é homogênea e consequentemente vale (A.17). Resolvendo o caso homogêneo:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{t}z \quad \text{logo} \quad z = Ct. \tag{A.13}$$

Se $D > 0$, entao faremos $C = C(t)$ e substituimos em (A.12):

$$C'(t)t + C(t) = C(t) + D, \tag{A.14}$$

logo

$$C(t) = \int_0^t \frac{D}{t} dt = D \ln |t|, \tag{A.15}$$

logo a solução vai ser:

$$z(t) = Dt \ \ln |t|. \tag{A.16}$$

Consequentemente:

$$\lim_{t\to 0} z(t) = 0 \tag{A.17}$$

□

Corolário A.1 (da demonstração) *Seja $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função C^1 de t, dada pela EDO:*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{Kt}z + D(t), \tag{A.18}$$

onde a função $D(t)$ é contínua, limitada e $O(1)$, K é uma constante positiva, teremos:

$$\lim_{t\to 0} z(t) = 0 \tag{A.19}$$

Lema A.5 *Seja $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função C^1 de t, dada pela EDO:*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{t(1+h(t))}z + D(t), \tag{A.20}$$

onde as funções $D(t)$ e $h(t)$ são contínuas, $O(1)$ e $h(0) = 0$, teremos:

$$\lim_{t\to 0} z(t) = 0 \tag{A.21}$$

Demonstração: Temos $\lim_{t\to 0} h(t) = 0$, logo para todo $K > 0$ pequeno, existe vizinhança de 0 em (t) onde $1 - K < 1 + h(t) < 1 + K$, teremos:

$$\frac{z}{(1+K)t} + D(t) \leq \frac{z}{(1+h(t))t} + D(t) \leq \frac{z}{(1-K)t} + D(t) \tag{A.22}$$

Pelo Teorema de [7] (1 e 5 das páginas 39-41) podemos concluir que se z_1 e z_2 são tais que:

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{z_1}{(1+K)t} + D(t) \quad \text{e} \quad \frac{dz_2}{dt} = \frac{z_2}{(1-K)t} + D(t), \tag{A.23}$$

logo teremos $z_1(t) \leq z(t) \leq z_2(t)$ na vizinhança de 0. Mas usando o Lema (A.4), vemos que

$$\lim_{t\to 0} z_1(t) = \lim_{t\to 0} z_2(t) = 0. \tag{A.24}$$

Assim

$$\lim_{t\to 0} z(t) = 0. \tag{A.25}$$

□

O Lema enunciado a seguir é demonstrado para o caso mais geral e com maior rigor em [4] usando os teoremas de Fenichel, aqui daremos uma demonstração usando o λ-lema e elementos de Geometria Diferencial:

Lema A.6 *Seja $\mathbf{f}$ um campo vetorial de classe C^1 dado pelo sistema de EDO autônomo:*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{A.26}$$

onde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. *Suponhamos que* $\mathbf{f}$ *possua dois pontos de equilíbrio* $(+)$ *e* $(-)$. *Se existir uma vizinhança* W *que contenha ambos os equilíbrios e tenha as seguintes propriedades:*

1) Para todo x_3 *fixo a seção dessa vizinhança é retangular.*

2) O campo "entra" pelas faces laterais de W.

3) O campo "sai" pelas faces horizontais de W.

4) A componente f^3 *do campo não troca de sinal no interior de* W.

Então existe uma órbita que liga os equilíbrios $(-)$ *e* $(+)$ *como na Figura (A.1).*

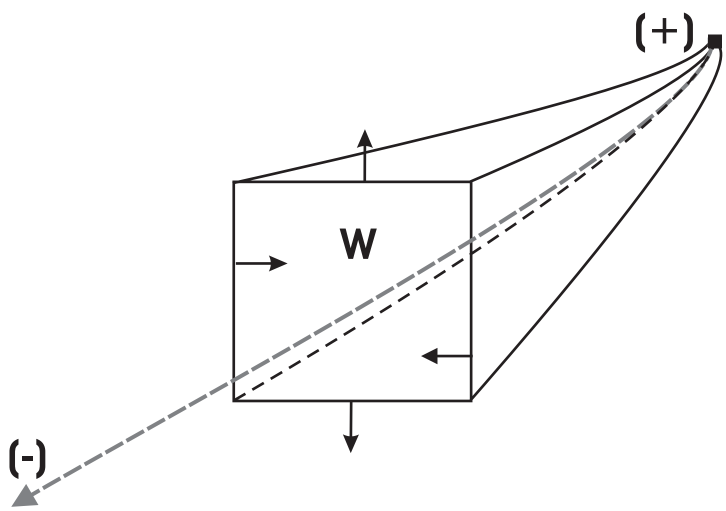

Figura A.1: Existe uma órbita que liga dois equilíbrios

Demonstração:

Primeiramente, sem perda de generalidade, suponhamos que $x_3^- < x_3^+$ e que $f^3(\mathbf{x}) < 0$ para todo $\mathbf{x} \in W$.

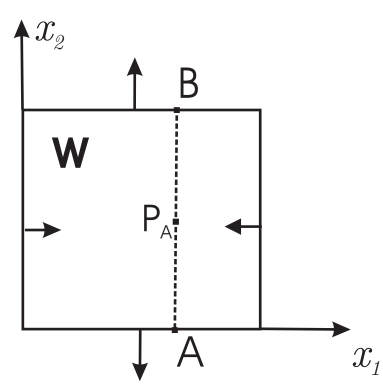

Figura A.2: Seção retangular do volume W

Agora fixemos uma seção retangular do volume W (com x_3 fixo) dado pela hipótese 1) do Lema. Para cada ponto A da aresta traçamos o segmento de reta vertical AB como na Figura (A.2) e escolhemos um ponto P_A no segmento.

Como a componente f^3 do campo não anula, das hipóteses 2) e 3) segue diretamente que a órbita que passa por P_A vai ter que sair de W pelas faces "horizontais"(superior ou inferior) ou ter o equilíbrio como ω-limite como na Figura (A.3). Notemos que a órbita que passa pelo ponto A escapa de W pela face inferior enquanto que a que passa pelo ponto B escapa pela face superior. Assim usamos a continuidade do campo $\mathbf{f}$ podemos garantir que existe pelo menos um ponto em $[AB]$ cuja órbita tem o equilíbrio $(-)$ como ω-limite. Na Figura (A.3) suponhamos que esse ponto é P_A. Notemos que P_A está na variedade estável do equilíbrio $(-)$, ou $P_A \in M_S^-$.

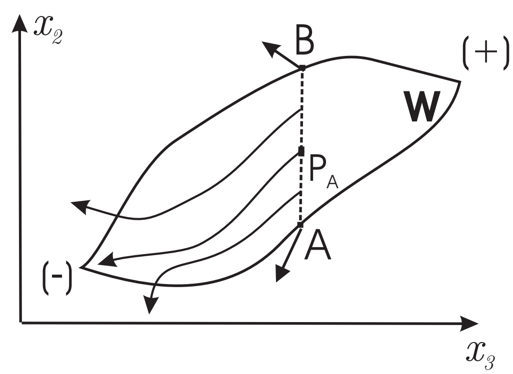

Figura A.3: Seção do volume W no plano $x_2 \times x_3$

Agora variando o ponto A ao longo da aresta horizontal da seção obtemos um conjunto Λ de pontos P_A de M_S^-. Aplicando o λ-lema [5] para a aresta superior da seção vemos que Λ é uma curva de classe C^1.

Agora usaremos argumentação análoga para o campo $-\mathbf{f}$ substituindo o segmento AB pela curva Λ como na figura (A.4).

Assim existe um ponto que pertence a Λ que está em M_S^- e ao mesmo tempo na variedade instável do equilíbrio $(+)$, o que prova a existência da órbita.

$\square$

Finalmente enunciaremos o λ-lema [5] para difeomorfismos. De fato, necessitamos do seu análogo para campos de vetores, que é usado na demonstração do Lema (A.6).

Definimos B^s e B^u como bolas contidas nas variedades estável $W^s(0)$ e instável $W^u(0)$ do ponto 0. Consideramos um ponto $q \in W^s(0)$ e um disco D^u de dimensão $u = dimE^u$, transversal a $W^s(0)$ em q.

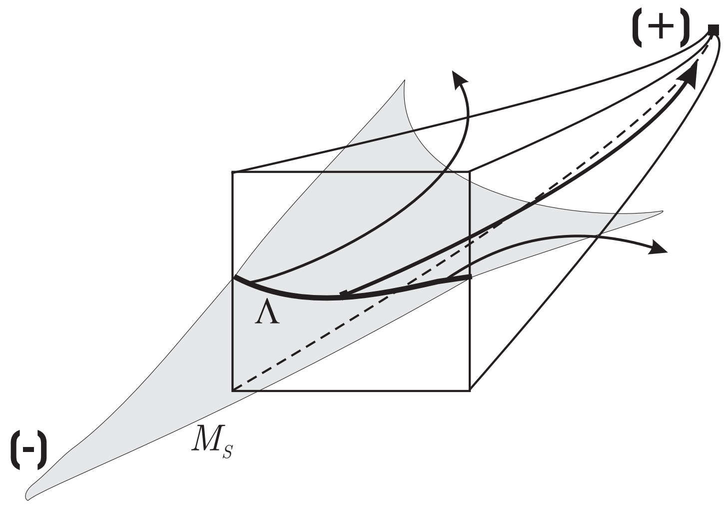

Figura A.4: Existe um ponto que pertence ao mesmo tempo a M_S^- e M_U^+

Lema A.7 *Sejam $V = B^s \times B^u$, $q \in W^s(0) - \{0\}$ e D^u como acima. Seja D_n^u a componente conexa que contém $f^n(q)$ de $f^n(D^u) \cap V$. Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n_0$, então D_n^u está ϵ C^1-próximo de B^u.*

Apêndice B

Constantes e variáveis

Em equações (3.5)–(3.10) usamos seguintes variaveis e parâmetros:

$$\hat{x} = \frac{\tilde{x}}{l^*}, \quad \hat{t} = \frac{\tilde{t}}{t^*}, \quad \theta = \frac{\tilde{T}}{\tilde{T}_{ig}}, \quad Y = \frac{\tilde{Y}}{Y_i}, \quad p = \frac{\tilde{p} - p_o}{p_{inj} - p_o}, \quad \rho = \frac{\rho_g}{\rho_g^i}, \quad v = \frac{\tilde{v}}{v^i}, \tag{B.1}$$

$$\mu = \frac{\tilde{\mu}\rho_f^o}{\rho_g^i Y^i}, \quad \mu_{pg} = \frac{\tilde{\mu}_{pg}\rho_f^o}{\rho_g^i Y^i}, \quad \mu_g = \frac{\tilde{\mu}_g \rho_f^o}{\rho_g^i}, \quad a = \frac{c_g \rho_g^i}{(1-\phi)c_s\rho_s}, \quad \Phi = Wt^*, \tag{B.2}$$

$$q = \frac{Q\rho_f^o}{(1-\phi)c_s\rho_s\tilde{T}_{ig}}, \quad \kappa = \frac{\eta_g l^* v^i}{K(p_{inj} - p_o)}, \quad h = \frac{\tilde{h}t^*}{(1-\phi)c_s\rho_s\tilde{T}_{ig}H}, \tag{B.3}$$

$$\alpha_s = \frac{\tilde{\lambda}}{(1-\phi)c_s\rho_s}, \quad L_e = \frac{\alpha_s}{D_M}, \quad \gamma = \frac{E}{R\tilde{T}_{ig}}, \quad \alpha = k_o Y^i p_o t_*, \tag{B.4}$$

onde p_o corresponde à pressão inicial do gás e normalmente é maior que a pressão no resto do sistema.

Na Tabela I colocamos os valores típicos de parâmetros adimensionais para combustão in-situ.

Tabela I

Parâmetro	Valor
q	1.0121
μ	205.8
μ_g	68.19
L_e	0.214
γ	23.69
α	0.027
a	6.13E-4
ϕ	0.3

Fonte: [1], [2]

Tabela das variáveis e constantes físicas que aparecem no trabalho.

Tabela II

Parâmetro	Descrição
ϕ	Porosidade
c_s	Capacidade térmica da fase sólida
c_g	Capacidade térmica da fase gasosa
ρ_s	Densidade volumétrica da fase sólida
ρ_s	Densidade volumétrica da fase gasosa
$\tilde{T}$	Temperatura
$\tilde{v}$	Velocidade de escoamento
$\tilde{\lambda}$	Condutividade térmica
Q	Calor da combustão
W	Taxa da conversão do combustível
$\tilde{Y}$	Fração da massa de oxigênio no total
D_M	Coef. da difusão efetiva da fase gasosa
μ	Coef. estequiométrico em termos de massas para oxigênio
μ_g	Coef. estequiométrico em termos de massas para o gas
E	Energia
R	Constante universal dos gases
$\tilde{T}_{ig}$	Temperatura de ignição