

IMPA - Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Mestrado em Matemática

**EVOLUÇÃO DE CURVAS PLANAS PELA
CURVATURA**

José Eduardo Milton de Santana

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Rio de Janeiro
28 de Junho de 2007

IMPA - Instituto de Matemática Pura e Aplicada

José Eduardo Milton de Santana

EVOLUÇÃO DE CURVAS PLANAS PELA CURVATURA

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do IMPA - Instituto de Matemática Pura e Aplicada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: *Fernando Codá dos Santos C. Marques*

Rio de Janeiro
28 de Junho de 2007

À minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelo dom vida, à minha família pelo apoio e compreensão, aos professores pelo incentivo e ensinamento e aos amigos pelo companherismo.

Agradecimentos especiais:

Aos meus pais João e Maria pela orientação na vida, aos meus irmãos Júnior e Ionara pela amizade e à minha tia Maria José pelo apoio;

Às professoras Kátia e Rosângela pela indicação;

Ao Prof. Valdenberg Araújo pela oportunidade e à sua esposa Dra. Maria Luiza pelo apoio;

Aos amigos Carlos Matheus e Alexander Arbieto pelo apoio e incentivo;

A Maria Salvelina e a Carlos Roberto por terem sido "meus pais" em muitos momentos;

Ao Dr. Manoel Cabral pelo apoio;

Aos professores Arnaldo Garcia e Fernando Codá Marques, orientadores no início e final do mestrado, respectivamente.

Aos colegas do IMPA pelo ambiente amistoso.

Everything should be made as simple as possible, but not simpler.

—ALBERT EINSTEIN

RESUMO

Nesta dissertação mostraremos que curvas planas convexas permanecem convexas e convergem a um ponto de maneira assintoticamente circular, durante a evolução do fluxo pela curvatura. Mostraremos também que curvas simples permanecem simples.

O presente trabalho baseia-se no artigo [7] de M. Gage e R.S. Hamilton de 1986.

INTRODUÇÃO

Apresentaremos algumas definições e resultados básicos sobre curvas planas.

Uma curva plana suave é uma função $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^∞ , onde I é um intervalo da reta. Tomaremos I fechado de extremos a e b : $I = [a, b]$. Se α é injetiva em $[a, b]$, dizemos que a curva é simples e é fechada se $\alpha(a) = \alpha(b)$.

O comprimento de uma curva $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é definido por $L = \int_a^b |\alpha'(t)| dt$.

A noção intuitiva de curvatura num ponto refere-se a quanto a curva se afasta da reta tangente à curva nesse ponto (*quanto mais se afasta, maior a curvatura*). Formalmente, se a curva estiver parametrizada pelo comprimento de arco (*ou seja, o parâmetro s da curva é o comprimento do arco ligando o ponto $\alpha(0)$ ao ponto $\alpha(s)$*), a curvatura é dada por

$$k = \langle T', N \rangle,$$

onde T e N são, respectivamente, os vetores unitários tangente e normal à curva em $\alpha(s)$. O vetor tangente é o vetor velocidade $\alpha'(s)$ e o vetor normal é tal que o par $\{T, N\}$ forma uma base positiva de \mathbb{R}^2 .

As equações clássicas de Frenet relacionam o vetor tangente T , o vetor normal N e suas derivadas. No caso de curvas planas as equações de Frenet são:

$$T' = kN$$

$$N' = -kT$$

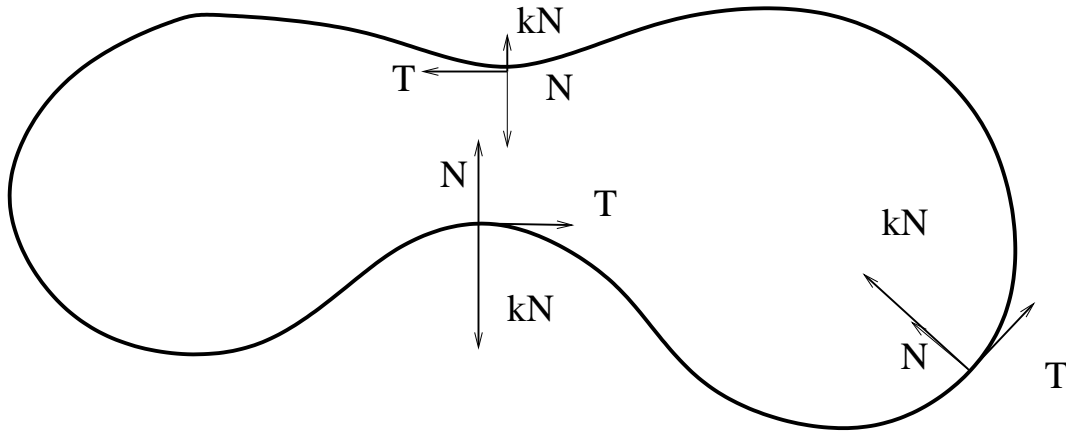


Figura 1

Uma curva é dita convexa se a curvatura é positiva em todos os pontos.

O objetivo deste trabalho consiste em estudar a evolução de curvas planas sob a ação do fluxo pela curvatura. Dada uma curva plana fechada $F_0 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, consideraremos uma família a um parâmetro de curvas da forma $F : S^1 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$, solução da equação

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} = kN \\ F(u, 0) = F_0(u) \end{cases}$$

onde $k(u, t)$ é a curvatura e $N(u, t)$ é o vetor normal unitário no ponto $F(u, t)$.

O Teorema da Função Inversa de Nash-Moser [4] garante existência e unicidade de solução para o problema acima. Se a curva inicial for convexa, podemos reduzir o problema a uma equação diferencial parcial parabólica, a qual tem existência e unicidade de solução, pela teoria clássica.

O principal teorema a ser provado é o seguinte:

Teorema 0.1 (Gage-Hamilton) *Se F_0 é uma curva convexa plana então, sob ação do fluxo pela curvatura, a curva converge a um ponto em tempo finito T_{max} . Além disso, a curva permanece convexa e torna-se circular, no seguinte sentido:*

- i) *A razão entre o raio do círculo inscrito e o raio do círculo circunscrito converge a 1;*

ii) *A razão entre a curvatura máxima e a curvatura mínima converge a 1.*

A dissertação está organizada da seguinte forma:

No capítulo 1 apresentamos equações de evolução para algumas grandezas tais como velocidade, comprimento da curva, ângulo entre o vetor tangente e a horizontal e a área limitada pela curva.

No capítulo 2 mostramos que se a curva inicial for simples então todas as curvas da família são simples.

No capítulo 3 deduzimos algumas estimativas necessárias para mostrar que o fluxo pode ser prolongado enquanto a área da curva for diferente de zero. Como consequência, mostramos que a área converge a zero quando o tempo converge a T_{max} . Concluimos o capítulo com o resultado de que o comprimento da curva converge a zero, obtendo, como consequência, que a família de curvas converge a um ponto.

Por fim, no capítulo 4, provamos que a razão entre o raio do círculo inscrito e o raio do círculo circunscrito e a razão entre a curvatura máxima e a curvatura mínima convergem, ambas, a 1.

EQUAÇÕES DE EVOLUÇÃO

Neste capítulo deduziremos algumas equações de evolução.

O primeiro resultado trata da evolução da velocidade escalar $v = \left\langle \frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial u} \right\rangle^{\frac{1}{2}}$.

Lema 1.1 *A derivada da velocidade v em relação ao tempo t é dada por $\partial v / \partial t = -k^2 v$.*

Demonstração Primeiro observamos que $\frac{\partial^2}{\partial t \partial u} = \frac{\partial^2}{\partial u \partial t}$, pelo teorema de Schwarz.

Como $v^2 = \left\langle \frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial u} \right\rangle$, segue-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(v^2) &= \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial u} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial u} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial t} \right\rangle \\ &= 2 \left\langle vT, \frac{\partial}{\partial u}(kN) \right\rangle = 2 \left\langle vT, \frac{\partial k}{\partial u} N - vk^2 T \right\rangle = -2v^2 k^2. \end{aligned}$$

Como $\frac{\partial}{\partial t}(v^2) = 2v \frac{\partial v}{\partial t}$, obtemos o resultado desejado. ■

O próximo Lema fornece a evolução do comprimento da curva L .

Lema 1.2 *A derivada do comprimento L em relação ao tempo t é dada por $\partial L / \partial t = - \int k^2 ds$.*

Demonstração Como $L = \int v du$ e usando o lema anterior, temos

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int v du = \int \frac{\partial}{\partial t} v du = \int -k^2 v du = - \int k^2 ds.$$

Na segunda igualdade usamos a Regra de Leibniz e na última igualdade usamos a mudança de variável $du = v ds$. ■

Observamos que o comprimento de arco depende da curva, a qual depende do parâmetro temporal. Sendo assim, as derivações parciais em relação a s e t não comutam. No entanto, temos a seguinte relação:

Lema 1.3

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} + k^2 \frac{\partial}{\partial s}.$$

Demonstração Da relação $\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial u}$ segue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial u} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{v} \right) \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{v} \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial u} \right) \\ &= \left(\frac{-\frac{\partial v}{\partial t}}{v^2} \right) \frac{\partial}{\partial u} + \left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial u} \right) \frac{\partial}{\partial t} = \left(\frac{k^2}{v} \right) \frac{\partial}{\partial u} + \left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial u} \right) \frac{\partial}{\partial t} \\ &= k^2 \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned}$$

■

A seguir deduzimos as derivadas parciais de T e N em relação ao tempo.

Lema 1.4

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial k}{\partial s} N \quad e \quad \frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{\partial k}{\partial s} T.$$

Demonstração Para provar a primeira equação, usamos o Lema 1.3 e as equações $\frac{\partial F}{\partial t} = kN$ e $\frac{\partial F}{\partial s} = T$. Assim:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial s} = \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial t} + k^2 \frac{\partial F}{\partial s} \\
&= \frac{\partial}{\partial s}(kN) + k^2 T \\
&= \frac{\partial k}{\partial s} N - k^2 T + k^2 T = \frac{\partial k}{\partial s} N
\end{aligned}$$

Para provar a segunda equação observamos que como $\langle T, N \rangle = 0$, temos

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \langle T, N \rangle = \left\langle \frac{\partial k}{\partial s} N, N \right\rangle + \left\langle T, \frac{\partial N}{\partial t} \right\rangle.$$

Daí $\left\langle T, \frac{\partial N}{\partial t} \right\rangle = -\frac{\partial k}{\partial s}$.

Mas como $\langle N, N \rangle = 1$ também temos $\left\langle \frac{\partial N}{\partial t}, N \right\rangle = 0$. Logo, $\frac{\partial N}{\partial t}$ é proporcional a T e o resultado segue da igualdade acima. ■

O Lema a seguir mostra de que forma a derivada do ângulo entre o vetor tangente e a horizontal se relaciona com a curvatura.

Lema 1.5 *Seja θ o ângulo entre o vetor tangente T e a horizontal. Valem as seguintes equações:*

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial k}{\partial s} \quad e \quad \frac{\partial \theta}{\partial s} = k.$$

Demonstração O vetor tangente e o vetor normal se escrevem como $T = (\cos \theta, \sin \theta)$ e $N = (-\sin \theta, \cos \theta)$. Temos, então:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial t} &= \left(\frac{\partial}{\partial t} \cos(\theta), \frac{\partial}{\partial t} \sin(\theta) \right) = \left(-\frac{\partial \theta}{\partial t} \sin(\theta), \frac{\partial \theta}{\partial t} \cos(\theta) \right) \\
&= \frac{\partial \theta}{\partial t} (-\sin(\theta), \cos(\theta)) = \frac{\partial \theta}{\partial t} N.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 1.4, sabemos também que $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial k}{\partial s}N$, donde segue-se que $\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial k}{\partial s}$ e assim obtemos a primeira equação.

Da equação de Frenet $\frac{\partial T}{\partial s} = kN$ obtemos de maneira similar que $\frac{\partial \theta}{\partial s} = k$. ■

Temos a seguinte lei de evolução para a curvatura.

Lema 1.6 *A derivada da curvatura k com relação ao tempo t é dada por:*

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial^2 k}{\partial s^2} + k^3.$$

Demonstração Usando os Lemas 1.3 e 1.5, temos:

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial t \partial s} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial s \partial t} + k^2 \frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{\partial^2 k}{\partial s^2} + k^3.$$

■

Por último, determinamos a evolução da área limitada pela curva.

Lema 1.7 *A derivada da área A limitada pela curva com relação ao tempo t é constante e igual a -2π .*

Demonstração Do teorema de Stokes, temos a seguinte fórmula para a área:

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(x \frac{\partial y}{\partial u} - y \frac{\partial x}{\partial u} \right) du = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \langle F, vN \rangle du.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial t} &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\left\langle \frac{\partial F}{\partial t}, vN \right\rangle + \left\langle F, \frac{\partial v}{\partial t} N \right\rangle + \left\langle F, v \frac{\partial N}{\partial t} \right\rangle \right) du \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(vk - \langle F, vk^2 N \rangle + \left\langle F, -\frac{\partial k}{\partial u} T \right\rangle \right) du\end{aligned}$$

Integrando a última expressão por partes obtemos:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(vk - \langle F, vk^2 N \rangle + \left\langle \frac{\partial F}{\partial u}, kT \right\rangle + \langle F, vk^2 N \rangle \right) du$$

Assim

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \int_0^{2\pi} vk du = - \int_0^L k ds = -2\pi$$

onde usamos que a curvatura total de uma curva plana fechada e simples é igual a 2π . ■

Da equação $\frac{\partial A}{\partial t} = -2\pi$ obtemos $A(t) = A(0) - 2\pi t$, o que implica $T_{max} \leq \frac{A(0)}{2\pi}$.

EVOLUÇÃO DE CURVAS SIMPLES

Neste capítulo provaremos que curvas fechadas simples permanecem simples durante a evolução do fluxo pela curvatura.

Teorema 2.1 *Seja $F : S^1 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma família a um parâmetro de curvas fechadas satisfazendo a equação de evolução $\frac{\partial F}{\partial t} = kN$. Se a curva inicial $F(\cdot, 0)$ é simples, então $F(\cdot, t)$ é uma curva simples $\forall t$.*

Para provar esse teorema, precisaremos de alguns lemas. Começamos introduzindo a função $f : S^1 \times S^1 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(u_1, u_2, t) = |F(u_1, t) - F(u_2, t)|^2.$$

Lema 2.1 *A função f satisfaz a seguinte equação:*

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f - 4 = \frac{\partial^2 f}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial s_2^2} - 4.$$

Demonstração Como $\frac{\partial F}{\partial t} = kN$ temos:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 2\langle F(u_1, t) - F(u_2, t), kN(u_1, t) - kN(u_2, t) \rangle.$$

Também

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial s_1} &= 2\langle F(u_1, t) - F(u_2, t), T(u_1, t) \rangle, \\ \frac{\partial f}{\partial s_2} &= 2\langle F(u_1, t) - F(u_2, t), -T(u_2, t) \rangle, \end{aligned}$$

Derivando mais uma vez, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial s_1^2} &= 2\langle T(u_1, t), T(u_1, t) \rangle + 2\langle F(u_1, t) - F(u_2, t), kN(u_1, t) \rangle \\
&= 2 - 2\langle F(u_1, t) - F(u_2, t), kN(u_1, t) \rangle, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial s_2^2} &= 2\langle T(u_2, t), T(u_2, t) \rangle + 2\langle F(u_1, t) - F(u_2, t), kN(u_2, t) \rangle \\
&= 2 - 2\langle F(u_1, t) - F(u_2, t), kN(u_2, t) \rangle.
\end{aligned}$$

Adicionando as duas últimas equações, obtemos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial s_2^2} = 2\langle F(u_1, t) - F(u_2, t), kN(u_1, t) - kN(u_2, t) \rangle + 4,$$

donde

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial s_2^2} - 4,$$

como queríamos. ■

O próximo lema é um resultado clássico de curvas planas, devido a A. Schur e E. Schmidt (*ver [2]*).

Lema 2.2 *Seja $g : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada por comprimento de arco do ponto A ao ponto B , tal que a justaposição de g com o segmento de reta ligando os pontos A e B forme uma curva convexa. Seja f uma curva de mesmo comprimento L com pontos extremos C e D (*ver Figura 2*). Suponhamos que as curvas têm tangentes contínuas e curvatura contínua por partes e que a curva g é orientada no sentido anti-horário, tal que sua curvatura é positiva. Se a curvatura em cada ponto de g é maior que o valor absoluto da curvatura nos pontos correspondentes de f (ou seja, $k_g(s) \geq |k_f(s)|$), então $dist(A, B) \leq dist(C, D)$.*

Demonstração Suponhamos que as curvas sejam tais que os segmentos \overline{AB} e \overline{CD} estejam sobre eixo horizontal. Denotemos por $\theta_g(s)$ o ângulo que o vetor tangente em $g(s)$ faz com a horizontal. Existe exatamente um ponto s_0 tal que a tangente em $g(s_0)$ é horizontal, isto é, $\theta_g(s_0) = 0$. Como temos

$$\frac{d\theta_g}{ds} = k_g \geq |k_f| = \left| \frac{d\theta_f}{ds} \right|.$$

Então

$$\begin{aligned} |\theta_g(s)| &= |\theta_g(s) - \theta_g(s_0)| = \left| \int_{s_0}^s \frac{d\theta_g}{ds} ds \right| \\ &\geq \left| \int_{s_0}^s \left| \frac{d\theta_f}{ds} \right| ds \right| \geq \int_{s_0}^s \frac{d\theta_f}{ds} ds = |\theta_f(s) - \theta_f(s_0)|. \end{aligned}$$

Como g é convexa, então $|\theta_f(s) - \theta_f(s_0)| \leq |\theta_g(s)| \leq \pi$ para $0 \leq s \leq L$. E como $\cos a = \cos |a|$, temos:

$$\int_0^L \cos(\theta_f(s) - \theta_f(s_0)) ds = \int_0^L \cos(|\theta_f(s) - \theta_f(s_0)|) ds \geq \int_0^L |\theta_g(s)| = \text{dist}(A, B).$$

A integral da esquerda é a projeção do segmento \overline{CD} sobre a tangente em $f(s_0)$, e o resultado segue. ■

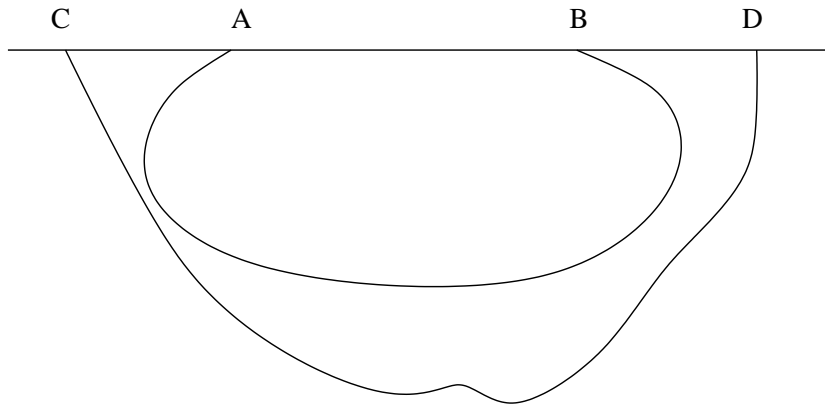


Figura 2

Dados uma circunferência de centro O e raio r e um arco \widehat{PQ} de comprimento $l < \pi r$, vamos calcular a distância d entre P e Q em função de r e l . Temos que $\frac{d}{2} = r \sin(\frac{\alpha}{2})$, onde α é o menor ângulo entre \overline{OP} e \overline{OQ} . Mas $\alpha = \frac{l}{r}$. Então, $d = 2r \sin(\frac{1}{2r}l)$. Se $l = \pi r$, $d = 2r$ e se $l > \pi r$ temos $d = -2r \sin(\frac{1}{2r}l)$. Sendo assim, vale a seguinte fórmula

$$d^2 = (2r \sin(\frac{1}{2r}l))^2 \forall l \in [0, 2\pi r]. \quad (2.1)$$

Definamos $s(u_1, u_2, t) = \left| \int_{u_1}^{u_2} v(u, t) du \right|$.

Corolário 2.1 *Se existe $c > 0$ tal que $|k(u, t)| \leq c$, então:*

$$f(u_1, u_2, t) \geq \left\{ \frac{2}{c} \sin\left(\frac{c}{2}s(u_1, u_2, t)\right) \right\}^2.$$

Demonstração Usando o Lema de Schur-Schmidt acima e a fórmula (2.1), basta tomar g como o arco de comprimento $s(u_1, u_2, t)$ do círculo de raio $1/c$ e f como a curva $F(., t)$.

■

A seguir, provaremos o Teorema 2.1.

Demonstração (do Teorema 2.1)

Vamos dividir a prova em dois casos. No primeiro, analisaremos a função $f(u_1, u_2, t)$ no conjunto

$$E = \{(u_1, u_2, t) | s(u_1, u_2, t) < \pi/c\}.$$

No segundo, vamos olhar para $D = E^c = (S^1 \times S^1 \times [0, T]) - E$.

Primeiro caso: $u_1 = u_2 \Rightarrow f(u_1, u_2, t) = 0$. Reciprocamente, se $f(u_1, u_2, t) = 0$, com $(u_1, u_2, t) \in E$, então, pelo corolário 2.1 acima, temos $\left\{ \frac{2}{c} \sin\left(\frac{c}{2}s(u_1, u_2, t)\right) \right\}^2 = 0$. Assim, $\frac{c}{2}s(u_1, u_2, t) = n\pi$, com $n \geq 0$. Como $0 \leq s(u_1, u_2, t) < \pi/c$, então $(c/2)s(u_1, u_2, t) < (c/2)(\pi/c) = \pi/2 \Rightarrow s(u_1, u_2, t) = 0$, ou seja, $u_1 = u_2$.

Segundo caso: Vamos restringir a função f ao conjunto D e usar o princípio do máximo para provar que $f|_D$ tem um mínimo positivo. A fronteira de D é dada por:

$$\{(u_1, u_2, t) | s(u_1, u_2, t) = \pi/c, 0 \leq t \leq T\} \cup \{(u_1, u_2, 0) | s(u_1, u_2, 0) \geq \pi/c\}.$$

Pelo Corolário 2.1, temos $f(u_1, u_2, t) \geq (2/c)^2$ no primeiro conjunto acima, enquanto f tem um mínimo positivo no segundo conjunto, uma vez que a curva inicial é simples. Seja m a menor destas duas quantidades.

Consideremos a função $g(u_1, u_2, t) = f(u_1, u_2, t) + \epsilon t$. Derivando em relação a t , obtemos:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \Delta g - 4 + \epsilon.$$

Seja $0 < \delta < m$ e suponha que g atinge o valor $m - \delta$ em D . Seja

$$t_0 = \inf\{t \mid g(u_1, u_2, t) = m - \delta\}.$$

A continuidade de g , a compacidade de D , e a estimativa na fronteira garantem que o valor $m - \delta$ é atingido pela primeira vez em algum ponto interior. Neste ponto $\frac{\partial g}{\partial t} \leq 0$ e

$$\left(\frac{\partial^2 g}{\partial s_1^2}\right)\left(\frac{\partial^2 g}{\partial s_2^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 g}{\partial s_1 \partial s_2}\right)^2 \geq 0. \quad (2.2)$$

Fazendo um cálculo simples, obtemos:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s_1 \partial s_2} = -2 \langle T(u_2, t), T(u_1, t) \rangle = \pm 2, .$$

já que em um ponto de mínimo as retas tangentes devem ser paralelas.

Usando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica e a relação (2.2) acima, temos os seguinte:

$$\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial s_2^2} \geq 2\sqrt{\left(\frac{\partial^2 g}{\partial s_1^2}\right)\left(\frac{\partial^2 g}{\partial s_2^2}\right)} \geq 2\left|\frac{\partial^2 g}{\partial s_1 \partial s_2}\right| \geq 4.$$

Isso contradiz o fato de que a função g satisfaz a equação do calor acima, pois assim teríamos $\frac{\partial g}{\partial t} > 0$. Como δ é arbitrário, chegamos à conclusão de que, no conjunto D , $g(u_1, u_2, t) \geq m$, ou seja, $f(u_1, u_2, t) + \epsilon t \geq m$ em D , o que implica, $f(u_1, u_2, t) + \epsilon T \geq m$, ou seja, $f(u_1, u_2, t) \geq m - \epsilon T$. Fazendo $\epsilon \rightarrow 0$, vemos que $f(u_1, u_2, t) \geq m > 0$. Logo, f permanece positiva, significando que a curva permanece simples durante a evolução do fluxo pela curvatura. Isso conclui a prova do teorema 2.1. ■

EVOLUÇÃO DE CURVAS CONVEXAS

Neste capítulo deduziremos três estimativas importantes. Suporemos que a curva inicial é convexa e mostraremos que podemos estender o fluxo enquanto a área limitada pela curva for diferente de zero, a partir de uma cota para a curvatura e suas derivadas. Como conseqüência, obtemos que a área da curva converge a zero quando $t \rightarrow T_{max}$. Por fim, observamos que a curva converge a um ponto.

No caso em que a curva inicial é convexa, o problema de existência de solução para a equação pode ser resolvido sem o uso do teorema da função inversa de Nash-Moser. Isso acontece porque podemos considerar a função curvatura ao invés da curva.

Podemos parametrizar uma curva convexa pelo ângulo θ que o vetor tangente faz com a horizontal.

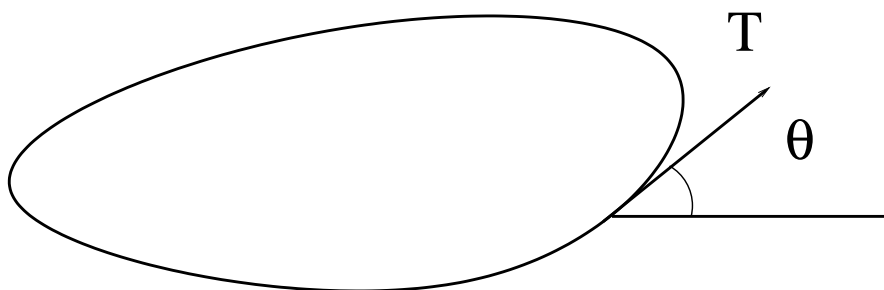


Figura 3

O Lema a seguir caracteriza as funções que podem ser realizadas como a curvatura de uma curva simples fechada convexa.

Lema 3.1 *Uma função positiva k de período 2π representa a função curvatura de uma curva simples fechada convexa se, e somente se,*

$$\int_0^{2\pi} \frac{(\cos \theta, \sin \theta)}{k(\theta)} d\theta = 0.$$

Demonstração Se k é a curvatura de uma curva ϕ , temos

$$\frac{(\cos \theta, \sin \theta)}{k(\theta)} d\theta = \frac{T(\theta)}{k(\theta)} d\theta = T(s) ds = \frac{d\phi}{ds} ds.$$

Segue-se que a integral é zero. Por outro lado, se k é uma função positiva de período 2π , então uma curva convexa seria dada por:

$$\phi(\theta) = (a, b) + \int_0^\theta \frac{(\cos \alpha, \sin \alpha)}{k(\alpha)} d\alpha.$$

Observemos que $\phi(0) = \phi(2\pi)$, uma vez que a integral é zero, por hipótese. Assim, a curva é fechada. É fácil ver que a curva ϕ é simples, pois o mapa de Gauss é injetivo. Para ver que ϕ é convexa, verificamos que a função curvatura é exatamente k , a qual é positiva. ■

O lema a seguir é uma variação do Lema 1.6, em que o parâmetro s de comprimento de arco é substituído pelo parâmetro θ . No lema, utilizaremos τ para denotar o tempo, sempre que a outra coordenada for θ .

Lema 3.2 *Para a curvatura $k(\theta, \tau)$, temos a seguinte equação de evolução:*

$$\frac{\partial k}{\partial \tau} = k^2 \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + k^3.$$

Demonstração Pela Regra da Cadeia, temos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial k}{\partial t} &= \frac{\partial k}{\partial \tau} + \frac{\partial k}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial k}{\partial \tau} + \frac{\partial k}{\partial \theta} \frac{\partial k}{\partial s} = \frac{\partial k}{\partial \tau} + k \left(\frac{\partial k}{\partial \theta} \right)^2, \\ \frac{\partial^2 k}{\partial s^2} &= \frac{\partial \theta}{\partial s} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial s} \frac{\partial k}{\partial \theta} \right) = k \left(\frac{\partial k}{\partial \theta} \right)^2 + k^2 \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2}.\end{aligned}$$

Usando os Lemas 1.5 e 1.6, obtemos o resultado desejado. ■

O teorema a seguir trata do problema de existência de solução.

Teorema 3.1 *Se F_0 é convexa, o problema de existência de solução para a equação*

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} = kN \\ F(u, 0) = F_0(u) \end{cases}$$

é equivalente ao seguinte problema de Cauchy:

encontrar uma função $k : S^1 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

(i) $k \in C^{2+\alpha, 1+\alpha}(S^1 \times [0, T - \epsilon]) \forall \epsilon > 0$

(ii) $\partial k / \partial t = k^2 \partial^2 k / \partial \theta^2 + k^3$

(iii) $k(\theta, 0) = \psi(\theta)$ onde ψ satisfaz:

(a) $\psi \in C^{1+\alpha}(S^1)$

(b) $\psi(\theta) > 0$

(c) $\int_0^{2\pi} \frac{(\cos \theta, \sin \theta)}{\psi(\theta)} d\theta = 0$

Demonstração Dada uma solução F para a equação, temos que a função curvatura k correspondente é uma solução para o problema de Cauchy, pelos Lemas 3.1 e 3.2. Reciprocamente, seja k uma solução para o problema de Cauchy e provemos que a seguinte função satisfaz a equação:

$$F(\theta, t) = (a, b)(t) + \int_0^\theta \frac{(\cos \alpha, \sin \alpha)}{k(\alpha, t)} d\alpha.$$

Após uma integração por partes, vemos que

$$\frac{\partial F}{\partial t} = kN - \frac{\partial k}{\partial \theta} T,$$

se $(a, b)(t)$ for tal que $\frac{d}{dt}(a, b)(t) = \left(\frac{\partial k}{\partial \theta}(0, t), -k(0, t)\right)$.

A equação terá uma boa forma depois de uma mudança de coordenadas. Definimos $G(\theta, t) = F(u(\theta, t), t)$. Então,

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial t} = v \frac{\partial u}{\partial t} T + kN - \frac{\partial k}{\partial \theta} T = kN,$$

se escolhermos $u(\theta, t)$ tal que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{v(u(\theta, t))} \frac{\partial k}{\partial \theta}(u(\theta, t)),$$

com dado inicial $u(\theta, 0) = \theta$. ■

A equação (ii) do Problema de Cauchy acima é uma equação diferencial parcial parabólica e, segundo a teoria clássica, temos existência e unicidade local de solução. Com isso, temos o seguinte teorema de existência local.

Teorema 3.2 *Se $F_0 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva fechada convexa, então existe $F : S^1 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que*

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} = kN \\ F(u, 0) = F_0(u). \end{cases}$$

O lema a seguir garante que as curvas $F : S^1 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$ são todas convexas.

Lema 3.3 Se k satisfaz o problema de Cauchy acima, então $k_{min}(t) = \inf\{k(\theta, t) | 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ é uma função não-decrescente.

Demonstração A prova é por contradição. Seja ϵ tal que $k_{min}(0) > \epsilon > 0$ e suponha que $k_{min}(t) = k_{min}(0) - \epsilon$ para algum t . Seja $t_0 = \inf\{t | k_{min}(t) = k_{min}(0) - \epsilon\}$. A continuidade de k assegura que este mínimo é atingido em algum ponto (θ_0, t_0) . Neste ponto, contudo, temos:

$$\frac{\partial k}{\partial t}(\theta_0, t_0) \leq 0, \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2}(\theta_0, t_0) \geq 0, \text{ e } k(\theta_0, t_0) > 0$$

Isto é uma contradição já que k satisfaz o problema de Cauchy. ■

A seguir provaremos três estimativas, que serão usadas para demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 3.3 Se as áreas limitadas pelas curvas $F : S^1 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$ têm uma cota inferior maior que zero, então a curvatura k está uniformemente limitada em $S^1 \times [0, T)$.

Precisaremos da curvatura mediana, que é definida por:

$$k^* = \sup\{b | k(\theta) > b \text{ em algum intervalo de comprimento } \pi\}.$$

Veremos agora as estimativas citadas acima.

Estimativa Geométrica: Se $k(\theta, t)$ é a curvatura de uma curva plana convexa fechada que limita uma área A e tem comprimento L , então

$$k^* \leq \frac{L}{A}.$$

Demonstração Fixemos t em $[0, T)$. Por definição, dado $M < k^*(t)$, existe um intervalo $(a, a + \pi)$ tal que $k(\theta, t) > M$ nesse intervalo. A curva convexa $F(\cdot, t)$ está contida na

região limitada pelas retas tangentes à curva nos pontos $F(a, t)$ e $F(a + \pi, t)$. A distância l entre as retas paralelas é dada por:

$$l = \int_a^{a+\pi} \frac{\sin(\theta - a)}{k(\theta, t)} d\theta \leq \int_a^{a+\pi} \frac{\sin(\theta - a)}{M} d\theta = \frac{2}{M}$$



Figura 4

O diâmetro da curva não é maior que $L/2$ e a área é limitada pela largura l vezes o diâmetro. Como temos $l \leq 2/M$, então:

$$A \leq \frac{2}{M} \frac{L}{2} \Rightarrow M \leq \frac{L}{A}$$

Uma vez que M pode ser tomado arbitrariamente próximo a $k^*(t)$, obtemos $k^*(t) \leq \frac{L}{A}$.

■

Estimativa Integral: Se $k^*(t)$ é limitada em $[0, T)$, então $\int_0^{2\pi} \log k(\theta, t) d\theta$ é limitada em $[0, T)$.

Para provar a estimativa integral, faremos uso da Desigualdade de Wirtinger.

Desigualdade de Wirtinger [8]: Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , tal que $f(a) = 0$ e $f(b) = 0$, com $b - a \leq \pi$. Então, vale a desigualdade:

$$\int_a^b f^2 d\theta \leq \int_a^b \left(\frac{df}{d\theta} \right)^2 d\theta.$$

Demonstração Usando a equação de evolução $\frac{\partial k}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + k^3$ e integrando por partes, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} \log k(\theta, t) d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \log k(\theta, t) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{k(\theta, t)} \frac{\partial}{\partial t} k(\theta, t) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(k \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + k^2 \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(k^2 - \left(\frac{\partial k}{\partial \theta} \right)^2 \right) d\theta. \end{aligned}$$

Fixemos t e estimemos a última integral acima sobre o conjunto aberto $U = \{\theta | k(\theta, t) > k^*(t)\}$ e seu complemento $V = S^1 - U$. A definição de k^* implica que o aberto U é união enumerável de intervalos abertos disjuntos (ou seja, $U = \bigcup I_i$), cada um dos intervalos com comprimento menor do que ou igual a π . Considerando o fecho desses intervalos, vemos que $k(\theta, t)$ coincide com $k^*(t)$ nos pontos extremos. Sendo assim, podemos usar a Desigualdade de Wirtinger para a função $k(\theta, t) - k^*(t)$, obtendo:

$$\int_{J_i} (k(\theta, t) - k^*(t))^2 d\theta \leq \int_{J_i} \left(\frac{\partial k}{\partial \theta} \right)^2 d\theta \Rightarrow \int_{J_i} k^2 - \left(\frac{\partial k}{\partial \theta} \right)^2 d\theta \leq 2k^*(t) \int_{J_i} k(\theta, t) d\theta.$$

onde J_i é o fecho do intervalo I_i .

Somando sobre todos os intervalos, obtemos:

$$\int_U k^2 - \left(\frac{\partial k}{\partial \theta} \right)^2 d\theta \leq 2k^*(t) \int_U k(\theta, t) d\theta \leq 2k^*(t) \int_0^{2\pi} k(\theta, t) d\theta.$$

Agora, considerando o complemento $V = S^1 - U$, temos:

$$\int_V k^2 - \left(\frac{\partial k}{\partial \theta} \right)^2 d\theta \leq \int_V k^2 d\theta \leq 2\pi (k^*(t))^2.$$

Adicionando as equações acima e como, segundo o Lema 1.2, $\frac{\partial L}{\partial t} = - \int k^2 ds =$

– $\int k d\theta$, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} \log k(\theta, t) d\theta \leq 2k^*(t) \frac{\partial L}{\partial t} + 2\pi (k^*(t))^2.$$

Finalmente, suponhamos que $k^*(t) < M$ e integremos para obter a estimativa desejada:

$$\int_0^{2\pi} \log k(\theta, t) d\theta \leq \int_0^{2\pi} \log k(\theta, 0) d\theta + 2M(L(0) - L(t)) + 2\pi M^2 t.$$

Pelo Lema 1.2, a função $L(t) \geq 0$ é não-crescente - logo limitada. ■

Para provar a estimativa pontual, usaremos os lemas a seguir:

Lema 3.4 *Se $\int_0^{2\pi} \log k(\theta, t) d\theta \leq \alpha \forall t \in [0, T)$, então, dado $\delta > 0$, existe $C(\delta) > 0$ tal que em todo intervalo de comprimento δ e todo t existe pelo menos um ponto onde a curvatura é menor que $C(\delta)$.*

Demonstração Com efeito, seja I um intervalo de comprimento δ e suponhamos que $k \geq C$ em I . Com isso, temos

$$\int_0^{2\pi} \log k(\theta, t) d\theta \geq \delta \log C + (2\pi - \delta) \log k_{\min}(0),$$

onde $k_{\min}(0)$ é uma cota inferior para k (lembramos que $k_{\min}(t)$ não decresce com o tempo).

Para C tal que $\delta \log C + (2\pi - \delta) \log k_{\min}(0) > \alpha$ isso não é possível. Logo, existe $C(\delta)$ tal que $k < C(\delta)$ para pelo menos um ponto em I . O mesmo $C(\delta)$ vale para todo intervalo de comprimento δ e para todo t . ■

Lema 3.5 *Podemos encontrar D tal que*

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial k}{\partial \theta} \right)^2 d\theta \leq \int_0^{2\pi} k^2 d\theta + D,$$

para todo $0 \leq t < T$.

Demonstração Nós temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int k^2 - \left(\frac{\partial k}{\partial \theta} \right)^2 &= 2 \int \left(k \frac{\partial k}{\partial t} - \frac{\partial k}{\partial \theta} \frac{\partial^2 k}{\partial \theta \partial t} \right) d\theta \\ &= 2 \int \left(\frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + k \right) \frac{\partial k}{\partial t} = 2 \int k^2 \left(\frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + k \right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Integrando esta desigualdade, concluimos a prova. ■

Estimativa Pontual: Se $\int_0^{2\pi} \log k(\theta, t) d\theta$ é limitada em $[0, T)$, então $k(\theta, t)$ é uniformemente limitada em $S^1 \times [0, T)$.

Demonstração Seja $\phi \in [0, 2\pi]$ e $\delta > 0$. Consideremos um intervalo I , de comprimento δ , tal que $\phi \in I$. Pelo Lema 3.4, existe um ponto $a \in I$ onde $k \leq C(\delta)$. Sendo assim, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e o Lema 3.5, temos

$$\begin{aligned} k(\phi) &= k(a) + \int_a^\phi \frac{\partial k}{\partial \theta} d\theta \leq C(\delta) + \sqrt{\delta} \left(\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial k}{\partial \theta} \right)^2 d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \leq C(\delta) + \sqrt{\delta} \left(\int_0^{2\pi} k^2 d\theta + D \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C(\delta) + \sqrt{\delta} (2\pi k_{max}^2 + D)^{\frac{1}{2}} \leq C(\delta) + \sqrt{2\pi\delta} k_{max} + \sqrt{\delta D}. \end{aligned}$$

Ou seja, temos $k(\phi) \leq C(\delta) + \sqrt{2\pi\delta} k_{max} + \sqrt{\delta D}$ para todo $\phi \in [0, 2\pi]$. Logo,

$$k_{max} \leq C(\delta) + \sqrt{\delta} (2\pi k_{max}^2 + D)^{\frac{1}{2}} \leq C(\delta) + \sqrt{2\pi\delta} k_{max} + \sqrt{\delta D}.$$

Obtemos, então, $k_{max}(t) \leq \frac{C(\delta) + \sqrt{\delta D}}{1 - \sqrt{2\pi\delta}} \forall t \in [0, 2\pi]$. ■

Agora, combinando a três estimativa, provamos o Teorema 3.3 como segue:

Demonstração (do Teorema 3.3) O teorema afirma que se as áreas das curvas tiverem uma cota inferior $\alpha > 0$, então a curvatura terá uma cota uniforme em $S^1 \times [0, T)$. Com efeito, como $\alpha \leq A \forall t \in [0, T)$, pela estimativa geométrica, temos $k^* \leq \frac{L}{A} \leq \frac{L}{\alpha}$. Assim k^* está limitada em $[0, T)$ e, pela estimativa integral, $\int \log k(\theta, t) d\theta$ está limitada em $[0, T)$. Por fim, a estimativa pontual dá uma cota uniforme para k . ■

Uma vez que já temos k limitada uniformemente, se encontrarmos cotas para as derivadas de ordem superior, poderemos estender a solução até o tempo T , pois teremos uma família equicontínua de funções e utilizaremos o Teorema de Arzela-Ascoli para obter um limite. Com isso, mostraremos que a área tende a zero.

Primeiramente, obtemos uma cota para $\frac{\partial k}{\partial \theta}$. Para tanto, utilizaremos a seguinte versão do Princípio do Máximo:

Princípio do Máximo: Para uma equação do tipo

$$\frac{\partial f}{\partial t} = a \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + b \frac{\partial f}{\partial \theta} + hf,$$

temos $f(\theta, t) \leq M = \max f(\theta, 0)$ se $a \geq 0$ e $hM \leq 0$.

Lema 3.6 *Se k é limitada, então $\frac{\partial k}{\partial \theta}$ é limitada.*

Demonstração Aplicaremos o Princípio do Máximo acima à $f(\theta, t) = e^{\alpha t} \frac{\partial k}{\partial \theta}$. Temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(e^{\alpha t} \frac{\partial k}{\partial \theta} \right) &= \alpha e^{\alpha t} \frac{\partial k}{\partial \theta} + e^{\alpha t} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial k}{\partial t} \right) \\ &= \alpha e^{\alpha t} \frac{\partial k}{\partial \theta} + e^{\alpha t} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k^2 \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + k^3 \right) \\ &= \alpha e^{\alpha t} \frac{\partial k}{\partial \theta} + e^{\alpha t} 2k \frac{\partial k}{\partial \theta} \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + e^{\alpha t} k^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + e^{\alpha t} 3k^2 \left(\frac{\partial k}{\partial \theta} \right) \\ &= k^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(e^{\alpha t} \frac{\partial k}{\partial \theta} \right) + 2k \frac{\partial k}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(e^{\alpha t} \frac{\partial k}{\partial \theta} \right) + (3k^2 + \alpha) \left(e^{\alpha t} \frac{\partial k}{\partial \theta} \right). \end{aligned}$$

Escolhendo $\alpha \leq -3k^2$, pelo Princípio do Máximo, obtemos

$$\frac{\partial k}{\partial \theta} \leq Me^{-\alpha t},$$

o que implica $\frac{\partial k}{\partial \theta}$ limitada em $[0, T)$, como queríamos, ■

Usaremos k' para denotar a derivada parcial com respeito a θ .

Lema 3.7 *Se k e k' são limitadas, então $\int_0^{2\pi} (k'')^4 d\theta$ é limitada.*

Demonstração Usando a equação de evolução, calculamos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} (k'')^4 d\theta &= 4 \int_0^{2\pi} (k'')^3 (k^2 k'' + k^3)'' d\theta \\ &= -12 \int_0^{2\pi} (k'')^2 (k''') (k^2 k''' + 2kk'k'' + 3k^2 k') d\theta \\ &= -12 \int_0^{2\pi} k^2 (k'')^2 (k''')^2 + 2kk' (k'')^3 (k''') + 3k^2 k' (k'')^2 (k''') d\theta. \end{aligned}$$

Nós usamos a desigualdade $ab \leq a^2/4\epsilon + \epsilon b^2$ para limitar o segundo e terceiro termos pelo primeiro termo e alguns termos adicionais.

Para o segundo termo, se $a = k(k'')(k''')$ e $b = (k')(k'')^2$, então

$$k(k')(k'')^3(k''') \leq \frac{k^2(k'')^2(k''')^2}{4\epsilon} + \epsilon(k')^2(k'')^4.$$

Para o terceiro termo, se $a = k(k'')(k''')$ e $b = k(k')(k'')$, então

$$k^2(k')(k'')^2(k''') \leq \frac{k^2(k'')^2(k''')^2}{4\epsilon} + \epsilon k^2(k')^2(k'')^2.$$

Com isso, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} (k'')^4 d\theta &\leq \left(-12 + \frac{15}{\epsilon}\right) \int_0^{2\pi} k^2 (k'')^2 (k''')^2 d\theta \\ &+ \int_0^{2\pi} C_1 (k')^2 (k'')^4 + C_2 k^2 (k')^2 (k'')^2 d\theta. \end{aligned}$$

Fazendo $\epsilon = \frac{5}{4}$, anulamos o primeiro termo, obtendo

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} (k'')^4 d\theta \leq \int_0^{2\pi} C_1 (k')^2 (k'')^4 + C_2 k^2 (k')^2 (k'')^2 d\theta.$$

Como, por hipótese, k e k' estão uniformemente limitadas, existem α e γ tais que

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} (k'')^4 d\theta \leq \alpha \int_0^{2\pi} (k'')^4 + \gamma \int_0^{2\pi} (k'')^2 d\theta.$$

Pela desigualdade e Cauchy-Schwarz

$$\int_0^{2\pi} (k'')^2 d\theta \leq \left(\int_0^{2\pi} (k'')^4 d\theta \right)^{1/2} \sqrt{2\pi}.$$

Sendo assim, fazendo $\beta = \sqrt{2\pi}\gamma$, obtemos,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} (k'')^4 d\theta \leq \alpha \int_0^{2\pi} (k'')^4 + \beta \left(\int_0^{2\pi} (k'')^4 d\theta \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Isso nos diz que $\int_0^{2\pi} (k'')^4 d\theta$ tem crescimento no máximo exponencial e permanece limitada em intervalos de tempo finitos. ■

Usaremos a técnica acima para limitar $\int_0^{2\pi} (k''')^2 d\theta$:

Lema 3.8 *Se k , k' e $\int_0^{2\pi} (k'')^4 d\theta$ são limitadas, então $\int_0^{2\pi} (k''')^2 d\theta$ é limitada.*

Demonstração

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} (k''')^2 d\theta &= 2 \int_0^{2\pi} (k''')(k^2 k'' + k^3)''' d\theta = 2 \int_0^{2\pi} k''''(k^2 k'' + k^3)'' d\theta \\
 &= -2 \int_0^{2\pi} k^2 (k''''')^2 + 4k k' k''' k'''' + 2k (k'')^2 k'''' \\
 &\quad + 2(k') k'' k'''' + 3k^2 k'' k'''' + 6(k')^2 k'''' d\theta.
 \end{aligned}$$

Com a mesma técnica do lema anterior, estimamos os últimos cinco termos pelo primeiro termo e alguns termos adicionais. Com isso, temos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} (k''')^2 d\theta &\leq C_1 \int_0^{2\pi} (k')^2 (k''')^2 d\theta + C_2 \int_0^{2\pi} (k'')^4 d\theta \\
 &\quad + C_3 \int_0^{2\pi} \frac{(k')^4}{k^2} (k'')^2 d\theta + C_4 \int_0^{2\pi} k^2 (k'')^2 d\theta + C_5 \int_0^{2\pi} (k')^4 d\theta,
 \end{aligned}$$

onde cada termo exceto o primeiro é limitado por uma constante. (Usamos que $k \geq k_{\min}(t) \geq k_{\min}(0)$).

Portanto,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} (k''')^2 d\theta \leq C_6 \int_0^{2\pi} (k''')^2 + C_7.$$

Isso nos diz que $\int_0^{2\pi} (k''')^2 d\theta$ tem crescimento no máximo exponencial e permanece limitada em intervalos de tempo finitos. ■

Corolário 3.1 *Sob as mesmas hipóteses do lema acima, k'' é limitado.*

Demonstração A desigualdade de Sobolev em uma dimensão diz que

$$\max |f|^2 \leq C \int (|f'|^2 + f^2)$$

Aplicamos, então, a k'' . ■

Lema 3.9 *Se k , k' e k'' são uniformemente limitadas, então k''' e todas as derivadas de ordem superior são limitadas.*

Demonstração Isto segue do princípio do máximo. Calculamos:

$$\frac{\partial}{\partial t} k''' = (k^2 k'' + k^3)''' = k^2 k^{(5)} + 6kk'k^{(4)} + (8kk'' + 6(k')^2 + 3k^2)k''' + (6k'(k'')^2 + 18kk'k'' + 6(k')^3)$$

Se k , k' e k'' são limitados, então, o princípio do máximo pode ser aplicado a $k'''e^\alpha$ para um α adequado. Em um intervalo finito, isto implica que $|k''''|$ é limitado. Em geral, se $k, k', \dots, k^{(n-1)}$ são limitados, então

$$\frac{\partial}{\partial t} k^{(n)} = k^2 k^{(n+2)} + 2nkk'k^{(n+1)} + p(k, k', \dots, k^{(n-1)})k^{(n)} + q(k, k', \dots, k^{(n-1)}),$$

onde p e q são polinômios, o que mostra que $k^{(n)}$ é limitado em intervalos finitos. ■

Teorema 3.4 *A solução para o problema de Cauchy continua até que a área se anule.*

Demonstração Enquanto a área estiver limitada longe do zero, nós conseguimos obter cotas sobre k e todas as suas derivadas. Usando a equação de evolução nós podemos limitar a derivada com relação ao tempo também. Suponhamos que a solução existe no intervalo $[0, T)$ e que a área não tende a zero quando $t \rightarrow T$. Então, pelo Teorema de Arzela-Ascoli, k tem um limite quando $t \rightarrow T$ que é C^∞ e nós podemos estender a solução até T . Tomando $k(\theta, T)$ como dado inicial para o problema de Cauchy do Teorema 3.1, podemos prolongar k até $T + \epsilon$. ■

Sendo assim, podemos prolongar a solução enquanto a área for diferente de zero, ou seja, a área converge a zero quando t converge ao tempo maximal T_{max} .

Queremos provar que a curva converge a um ponto. O resultado acima não é suficiente porque o limite poderia ser um segmento, por exemplo. Para garantir que o limite é um ponto, provaremos que o comprimento, que já é decrescente, converge a zero.

Para isso, utilizamos um resultado devido a Gage [5], o qual diz que a razão $\frac{L^2}{A}$ é decrescente. Com isso, como $A \rightarrow 0$, devemos ter, também, $L \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow T_{max}$.

A demonstração de que $\frac{L^2}{A}$ é decrescente baseia-se na desigualdade isoperimétrica

$$\pi \frac{L}{A} \leq \int_0^L k^2 ds,$$

a qual implica que $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{L^2}{A} \right) \leq 0$, pois

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{L^2}{A} \right) = -2 \frac{L}{A} \left(\int_0^L k^2 ds - \pi \frac{L}{A} \right).$$

CONVERGÊNCIA

Neste capítulo estudaremos a convergência da razão entre o raio da circunferência inscrita e o raio da circunferência circunscrita e da razão entre a curvatura mínima e a curvatura máxima, mostrando que ambas as razões convergem para 1.

Primeiramente, vamos estender a definição de curvatura mediana.

Dado $w \in [0, 2\pi]$, definimos

$$k_w^* = \sup\{b \mid k(\theta) > b \text{ em algum intervalo de comprimento } w\}.$$

Provaremos o seguinte Lema:

Lema 4.1

$$k_w^*(t)r(t) \leq \frac{1}{1 - K(w)(R/r - 1)},$$

onde r e R são, respectivamente, os raios do maior círculo inscrito e o menor círculo circunscrito da curva definida pela curvatura $k(., t)$. K é uma função decrescente de w com $K(0) = \infty$ e $K(\pi) = 0$.

Demonstração Fixemos t em $[0, T)$ e seja $M < k_w^*$. Segue diretamente da definição de k_w^* que o conjunto $\{\theta \mid k(\theta, t) > M\}$ contém um intervalo de comprimento w , que podemos supor como sendo $(-w/2, w/2)$.

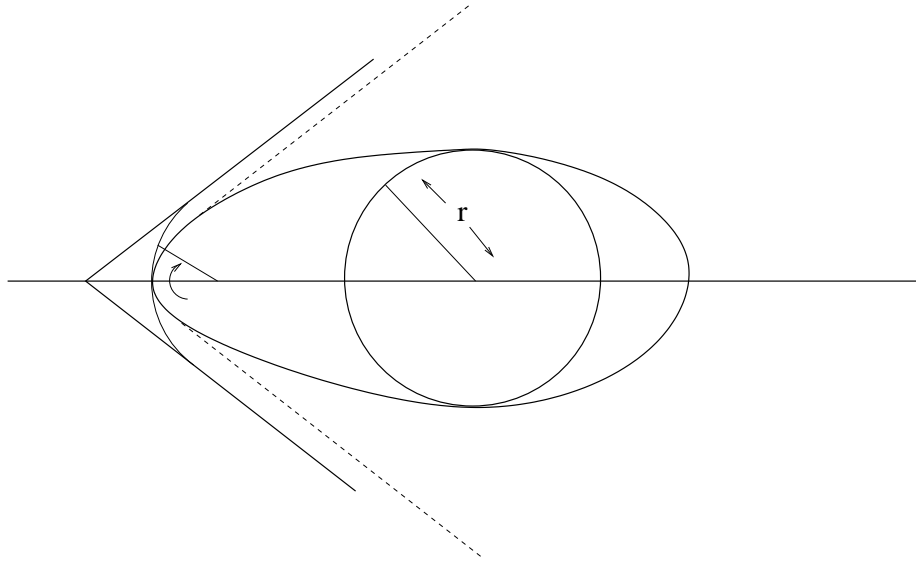


Figura 5

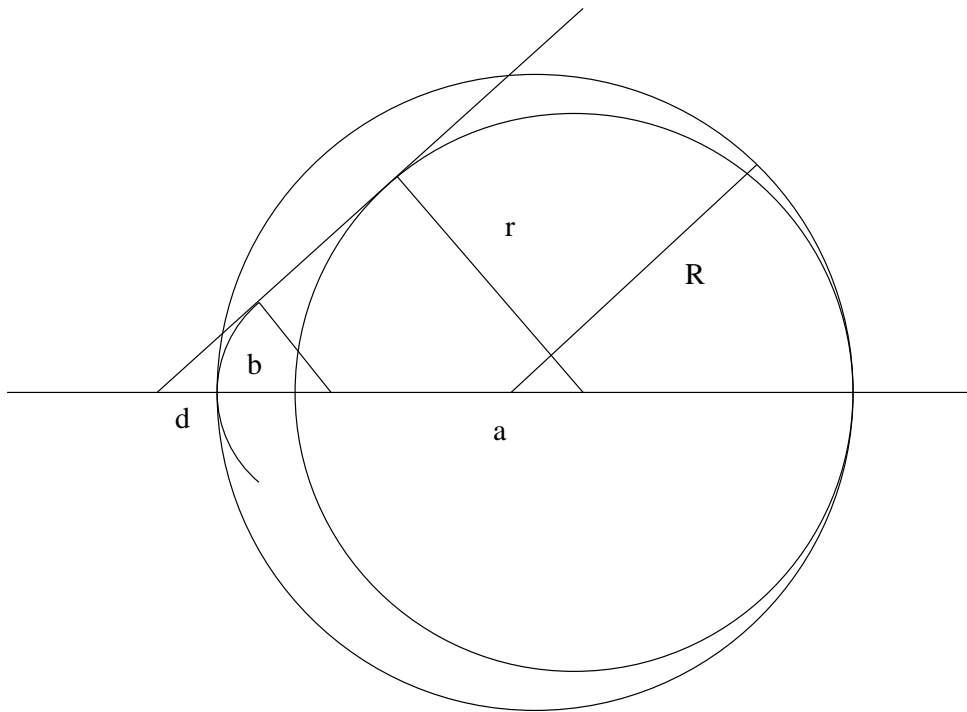


Figura 6

Denotamos o raio da circunferência inscrita por r e o raio da circunferência circunscrita por R .

Com alguma trigonometria sobre a figura acima, obtemos:

$$\cos\left(\frac{w}{2}\right) = \frac{\frac{1}{M}}{\frac{1}{M} + d} = \frac{r}{a + d},$$

$$2R \leq r + a.$$

O que implica,

$$\left(\frac{R}{r} - 1\right) \leq -\frac{1}{2} + \frac{a}{2r}$$

e calculando a da fórmula, vem:

$$a = \frac{r}{\cos\left(\frac{w}{2}\right)} - \frac{1}{M} \left(\frac{1}{\cos\left(\frac{w}{2}\right)} - 1 \right)$$

Juntando as fórmulas, segue-se:

$$Mr \leq \frac{1}{1 - K(w)\left(\frac{R}{r} - 1\right)}$$

onde

$$K(w) = \left(\frac{1}{2\cos\left(\frac{w}{2}\right)} - \frac{1}{2} \right)^{-1} = \frac{2\cos\left(\frac{w}{2}\right)}{1 - \cos\left(\frac{w}{2}\right)}.$$

Como M pode ser tomado arbitrariamente próximo de k_w^* , isso prova o lema. ■

Corolário 4.1 *Vale a seguinte desigualdade:*

$$k_{max}(t)r(t) \leq \left(\frac{1}{1 - \epsilon} \right) \frac{1}{1 - C(\epsilon)\left(\frac{R}{r} - 1\right)},$$

onde ϵ é qualquer número positivo.

Demonstração Dado $\epsilon > 0$, se $w < \delta$ então $k(\theta, t) \geq (1 - \epsilon)k_{max}(t) \forall \theta \in (\theta_0 - \frac{w}{2}, \theta_0 + \frac{w}{2})$ (onde $k_{max}(t) = k(\theta_0, t)$). Isso pode ser visto da seguinte forma. Dado $\theta_0 - \frac{w}{2} < \theta < \theta_0$, temos

$$\begin{aligned} k(\theta_0, t) &= k(\theta, t) + \int_{\theta}^{\theta_0} \frac{\partial k}{\partial \theta} d\theta \leq k(\theta, t) + \sqrt{\delta} \left(\int \left(\frac{\partial k}{\partial \theta} \right)^2 d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &k(\theta, t) + \sqrt{\delta} \left(\int k^2 d\theta + D \right)^{\frac{1}{2}} \leq k(\theta, t) + \sqrt{2\pi\delta} k_{max} + \sqrt{\delta D}. \end{aligned}$$

Usamos aqui a desigualdade do Lema 3.5.

Agora, tomamos $\delta > 0$ tal que $\sqrt{\delta D} \leq k_{min}(0) \leq k_{min}(t) \leq k_{max}(t)$, o que implica

$$k_{max}(t) \leq k(\theta, t) + (\sqrt{2\pi\delta} + \sqrt{\delta D}) k_{max}(t).$$

Assim, escolhemos δ tal que $\sqrt{2\pi\delta} + \sqrt{\delta D} \leq \epsilon$, obtendo

$$(1 - \epsilon)k_{max}(t) \leq k(\theta, t), \forall t.$$

Analogamente, obtemos o mesmo para $\theta_0 < \theta < \theta_0 + \frac{w}{2}$.

Portanto, $k_w^*(t) \geq k_{max}(t)(1 - \epsilon) \forall t$. A escolha de δ depende apenas da curva inicial.

Usando a desigualdade do Lema 4.1, o resultado segue. ■

Proposição 4.1 Dado ϵ positivo, vale:

$$k_{max}(t)r(t) \leq \left(\frac{1}{1 - \epsilon} \right)^2$$

para todo t suficientemente próximo a T .

Demonstração A partir da desigualdade de Bonnesen, obtemos a seguinte estimativa:

$$\frac{L^2}{A} - 4\pi \geq \frac{\pi^2}{A}(R - r)^2 \geq \left(1 - \frac{r}{R}\right)^2.$$

Um resultado devido a Gage [6] garante que $\frac{L^2}{A}$ converge para 4π . Com isso obtemos que $\frac{r}{R}$ converge para 1 e, usando o Corolário 4.1, provamos o resultado desejado. ■

Teorema 4.1 $k(\theta, t)r(t)$ converge a 1 uniformemente.

Demonstração A família $k(\theta, t)r(t)$ é equicontínua. O Teorema de Arzela-Ascoli implica que existe uma subsequência $k(\theta, t_n)r(t_n)$ que converge uniformemente a uma função $f(\theta) \leq 1$. Assim, obtemos que a seqüência $(k(\theta, t_n)r(t_n))^{-1}$ converge pontualmente para $f(\theta)^{-1}$. Pelo lema de Fatou, temos

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{f(\theta)} d\theta \leq \liminf \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{k(\theta, t_n)r(t_n)} = \int_0^{L(t_n)} \frac{ds}{r(t_n)} = \liminf \frac{L(t_n)}{r_n} \leq 2\pi.$$

A última desigualdade se deve ao fato de:

$$\frac{L}{r} \leq \frac{2\pi R}{r} \rightarrow 2\pi, t \rightarrow T_{max}.$$

Por outro lado, $2\pi \leq \int_0^{2\pi} \frac{1}{f(\theta)} d\theta$, o que implica $\int_0^{2\pi} \frac{1}{f(\theta)} d\theta = 2\pi$, donde $f(\theta) \equiv 1$.

Uma vez que cada subsequência convergindo uniformemente tem limite igual a 1, o resultado segue. ■

Corolário 4.2 $\frac{k_{min}(t)}{k_{max}(t)}$ converge a 1.

Demonstração Observando que

$$\frac{k_{min}(t)}{k_{max}(t)} = k_{min}(t)r(t) \frac{1}{k_{max}(t)r(t)}$$

basta usar o teorema acima. ■

Corolário 4.3 $k(\theta, t)\sqrt{2T - 2t}$ converge a 1 uniformemente (em T a área é zero).

Demonstração Do Lema 1.7 temos que $\partial A/\partial t = -2\pi$, donde obtemos que a área é dada por $A = 2\pi(T - t)$. E usando a desigualdade de Bonnesen, segue

$$\frac{L^2}{A} - 4\pi \geq \frac{(L - 2\pi r)^2}{A} = \left(\frac{L}{\sqrt{A}} - \frac{2\pi r}{\sqrt{2\pi(T - t)}} \right)^2.$$

Como $L/\sqrt{A} \rightarrow 2\sqrt{\pi}$ segue-se que $r/\sqrt{T - t}$ converge para $\sqrt{2}$ e, pelo Teorema 4.1, obtemos o resultado desejado. ■

APÊNDICE

Provaremos a Desigualdade de Sobolev em dimensão 1.

Lema 4.2 *Existe $C > 0$ tal que se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função C^1 , vale:*

$$\max |f(x)|^2 \leq C \int_a^b (|f'(x)|^2 + |f(x)|^2) dx.$$

Demonstração Como f é contínua, existe $t_0 \in [a, b]$ tal que:

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a)f(t_0).$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\int_a^b f(x) dx \leq \sqrt{b - a} \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Então

$$|f(t_0)| = \frac{1}{b - a} \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{1}{b - a} \sqrt{b - a} \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Temos $f(t) - f(t_0) = \pm \int_{t_0}^t f'(x) dx$ e, pela desigualdade triangular

$$\begin{aligned}
|f(t)| &\leq |f(t_0)| + \left| \int_{t_0}^t f'(x) dx \right| \\
&\leq |f(t_0)| + \sqrt{|t - t_0|} \left(\int_{t_0}^t |f'(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq |f(t_0)| + \sqrt{b - a} \left(\int_a^b |f'(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{b - a}} \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{b - a} \left(\int_a^b |f'(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c \left(\int_a^b (|f'(x)|^2 + |f(x)|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

para algum $c > 0$ e para todo $t \in [a, b]$.

Logo, existe $C > 0$ tal que

$$\max |f(x)|^2 \leq C \int_a^b (|f'(x)|^2 + |f(x)|^2) dx,$$

como queríamos. ■

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ARAÚJO, P., *Geometria Diferencial*, Coleção Matemática Universitária, Rio de Janeiro, 1998.
- [2] ALENCAR, H. E SANTOS, W., *Geometria das Curvas Planas*, XII Escola de Geometria Diferencial, Goiânia, Julho de 2002.
- [3] DO CARMO, M., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, 1976.
- [4] HAMILTON, R., *The Inverse Function Theorem of Nash and Moser*, Bulletin of the American Mathematical Society, 1982, 65-222.
- [5] GAGE, M., *An Isoperimetric Inequality with Applications to Curve Shortening*, Duke Mathematical Journal, 1983, 1225-1229.
- [6] GAGE, M., *Curve Shortening Makes Convex Curves Circular*, Inventiones Mathematicae, 1984, 357-364.
- [7] GAGE, M. E HAMILTON, R., *Heat Equation Shrinking Convex Plane Curves*, Journal of Differential Geometry, 1986, 69-96.
- [8] MITRINOVIC, D., *Analytic Inequalities* Springer, 1970.
- [9] ZHU, XI-PING, *Lectures on Mean Curvature Flows*, American Mathematical Society, International Press, 2002.