

Instituto Nacional de Matemática Pura  
e Aplicada - IMPA

Hiperbolicidade e Bifurcações Homoclínicas

Thiago Barros Rodrigues Costa

Rio de Janeiro

Julho/2008



*Aos meus pais e aos meus irmãos.*



# Agradecimentos

Primeiramente, dedico meus agradecimentos ao Professor Jacob Palis por ter sugerido um tema tão rico para essa dissertação. Ele também foi responsável, junto com Alejandro Kocsard, pelo excelente curso de Dinâmica Hiperbólica que eu assisti no IMPA, e que me deu uma boa intuição sobre a teoria de Dinâmica. Agradeço ainda ao Professor Carlos Gustavo Moreira por ter estado sempre presente, me dando apoio em vários momentos da minha carreira acadêmica, inclusive oferecendo boas sugestões que melhoraram essa dissertação. Também sou grato aos professores Enrique Pujals e Wellington de Melo, que ministraram ótimos cursos sobre Sistemas Dinâmicos durante minha estada no IMPA.

Não posso deixar de agradecer também aos meus pais, Eféisio e Marúisia, e aos meus irmãos, Daniel e Victor, por todo tipo de apoio que eles me deram. O meu mestrado no IMPA não teria sido possível sem eles.

Muito importante no meu desenvolvimento acadêmico foi o papel da Olimpíada Brasileira de Matemática, que cultivou meu interesse por matemática desde os 12 anos de idade. A experiência de participar em olimpíadas teve uma influência muito relevante na minha decisão de seguir uma carreira acadêmica. Obrigado a todos aqueles que fazem a OBM acontecer.

Agradeço ainda ao Professor Plamen Koshlukov, algebrista, que foi meu principal incentivador a estudar matemática durante meus estudos de engenharia na UNICAMP.

Por último, gostaria de citar o nome alguns amigos que foram grandes companheiros durante minha graduação e meu mestrado: Alan Prata, Alex Abreu, Daniel Guerreiro, Fernando de Goes, Guilherme Thó,IVALDO NUNES, Luiz Felipe Belussi, Marcelo Paiva, Marcelo Vieira, Nelly Carvajal, Régis,

Renato Paes Leme, Samuel Barbosa, Sônia Melo, Thiago Siqueira, Vanessa Simões, Yuri Lima. Vocês tornaram todo o esforço em uma experiência muito mais divertida. Obrigado!

# Resumo

Dado um difeomorfismo em uma variedade de dimensão dois, a ocorrência de uma interseção transversal homoclínica das variedades estável e instável de um ponto fixo hiperbólico traz uma complexidade muito grande para o sistema. Um exemplo disso é o aparecimento de ferraduras e, conseqüentemente, de infinitos pontos periódicos. A existência de uma tangência homoclínica, seguida por uma interseção transversal, impossibilita a hiperbolicidade/estabilidade do conjunto não-errante.

Nessa dissertação, consideramos a explosão do conjunto não-errante através da construção de uma primeira tangência homoclínica em uma família parametrizada de difeomorfismos. Vamos verificar que bifurcações podem continuar acontecendo mesmo após o primeiro encontro das variedades. No entanto, quando a dimensão de Hausdorff do conjunto básico associado à tangência é menor que um, ainda há predomínio de hiperbolicidade.





# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Construindo uma <math>\Omega</math>-explosão</b>	<b>13</b>
2.1	Exemplos . . . . .	14
2.2	Classificação das tangências homoclínicas . . . . .	22
2.3	Criação de uma primeira tangência . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Hiperbolicidade após tangência</b>	<b>31</b>
3.1	Localização dos novos pontos não-errantes . . . . .	34
3.2	Conjuntos Escalonados . . . . .	37
3.3	Medida do conjunto de bifurcação . . . . .	40
3.4	Hiperbolicidade . . . . .	44
3.5	Teorema Final . . . . .	51
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>53</b>



# Capítulo 1

## Introdução

Dada  $M$  uma variedade diferenciável, consideramos  $\varphi : M \rightarrow M$  um difeomorfismo  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , com ponto fixo  $p$ . Dizemos que  $p$  é hiperbólico se  $(d\varphi)_p$  não possui autovalores de módulo igual a 1. Nesse caso, podemos decompor  $T_p M = E_p^s \oplus E_p^u$ , onde  $E_p^s$  é o auto-espaço associado aos autovalores de  $(d\varphi)_p$  com módulo menor do que 1 e  $E_p^u$  o auto-espaço associado aos autovalores de módulo maior que 1.

Definimos a variedade estável do ponto fixo hiperbólico  $p$  como o conjunto:

$$W^s(p) = \{x \in M \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi^n(x) = p\}.$$

Pelo Teorema da Variedade Estável,  $W^s(p)$  é  $C^r$ , injetivamente imersa em  $M$ , de dimensão igual a  $\dim(E_p^s)$  e tangente a  $E_p^s$  no ponto  $p$ . Esse teorema também se aplica à variedade instável, que é definida de maneira análoga para  $\varphi^{-1}$ :

$$W^u(p) = \{x \in M \mid \lim_{n \rightarrow -\infty} \varphi^n(x) = p\}.$$

Em uma vizinhança pequena de  $p$ , a dinâmica do difeomorfismo  $\varphi : M \rightarrow M$  é semelhante à dinâmica do sistema linearizado  $(d\varphi)_p : T_p M \rightarrow T_p M$ . De fato, o teorema de Hartman-Grobman nos afirma que existem vizinhanças  $V(p) \subset M$  e  $U(0) \subset T_p M$  e um homeomorfismo  $h : U \rightarrow V$  tais que

$$h(d\varphi)_p = \varphi h$$

No caso em que  $M$  é uma variedade compacta de dimensão 2 e  $p$  é um ponto fixo do tipo sela (i.e.,  $(d\varphi)_p$  possui autovalores de módulo menor e maior do que 1), é possível construirmos uma linearização  $C^1$  do sistema em uma vizinhança de  $p$  (ver [1]).

Dizemos que um conjunto  $\Lambda \subset M$ , fechado e  $\varphi$ -invariante, é hiperbólico se existem uma decomposição  $T_x M = E_x^s \oplus E_x^u$ ,  $\forall x \in \Lambda$ , que varia continuamente em  $x \in \Lambda$ , uma constante  $\lambda > 1$  e uma norma riemanniana  $|\cdot|$  tais que:

$$(i) \quad (d\varphi)_x(E_x^s) = E_{\varphi(x)}^s, \quad (d\varphi)_x \varphi(E_x^u) = E_{\varphi(x)}^u$$

$$(ii) \quad |(d\varphi)_x(V)| \leq \lambda^{-1}|V| \text{ para } V \in E_x^s, \text{ e } |(d\varphi)_x(V)| \geq \lambda|V| \text{ para } V \in E_x^u$$

Nessa dissertação, trataremos da hiperbocidade do conjunto não-errante  $\Omega(\varphi)$ , que é o conjunto composto pelos pontos de  $M$  com a seguinte propriedade: para qualquer vizinhança  $U$  de  $x$ , existe um inteiro  $n(U)$  tal que  $\varphi^{n(U)}(U) \cap U \neq \emptyset$ .

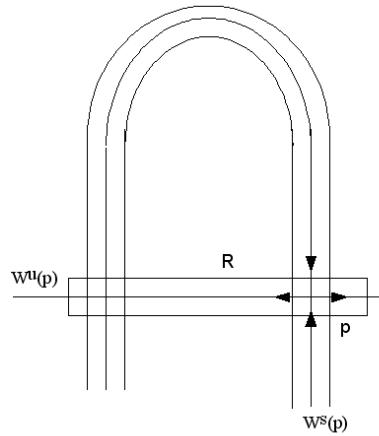
O difeomorfismo  $\varphi$  é dito hiperbólico se  $\Omega(\varphi)$  for hiperbólico, e  $\varphi$  é persistentemente hiperbólico se qualquer difeomorfismo  $\tilde{\varphi}$   $C^r$ -próximo de  $\varphi$  for hiperbólico.

Como veremos no capítulo 3, se  $\varphi$  é persistentemente hiperbólico, então o conjunto  $\Omega(\varphi)$  é estável, isto é, existe uma vizinhança  $C^r$  de  $\varphi$  em  $\text{Diff}^r(M)$  tal que, se  $\tilde{\varphi}$  está nessa vizinhança, então  $\varphi|_{\Omega(\varphi)}$  é conjugado a  $\tilde{\varphi}|_{\Omega(\tilde{\varphi})}$ .

Um ponto  $x \in M$  é dito homoclínico se ele está em  $W^s(p) \cap W^u(p)$ . Uma maneira de construirmos  $\Omega$ -instabilidade é através de tangências homocínicas (i.e., tangências entre  $W^s(p)$  e  $W^u(p)$ ). Isso fica bem claro no exemplo que vamos estudar nesse trabalho. Consideraremos uma  $\Omega$ -explosão homoclínica, formada por uma família parametrizada de difeomorfismos  $C^r$ ,  $\varphi_\mu : M \rightarrow M$ , em uma variedade  $M$  de dimensão 2. Essa família satisfaz:

- Para  $\mu < 0$ ,  $\varphi_\mu$  é persistentemente hiperbólico;
- $W^s(p_0)$  e  $W^u(p_0)$  têm tangência quadrática que se desdobra genericamente ao longo de sua órbita de tangência  $\mathcal{O}$ .
- Em  $\mu = 0$ , o conjunto não errante de  $\Omega(\varphi_0)$  consiste de um conjunto hiperbólico  $\tilde{\Omega}(\varphi_0) = \lim_{\mu \nearrow 0} \Omega(\varphi_\mu)$  junto com a órbita homoclínica de tangência associada a  $p_\mu$ .

Em  $\mu = 0$  claramente não temos  $\Omega$ -estabilidade uma vez que os novos pontos da órbita de tangência desaparecem do conjunto não-errante para difeomorfismos  $\varphi_\mu$ ,  $\mu < 0$ , arbitrariamente próximos de  $\varphi$ . Além disso, para valores de  $\mu > 0$  arbitrariamente pequenos, a tangência se transforma em interseção transversal entre  $W_\mu^s$  e  $W_\mu^u$ . Mas, como veremos a seguir, isso implica a criação de ferradura. De fato, pelo  $\lambda$ -lema, qualquer seção  $W$  transversal a  $W_\mu^u$  acumula-se sobre  $W_\mu^s$  por iterados negativos de  $\varphi$ . Assim, se  $q \neq p$  é ponto de interseção transversal entre  $W_\mu^s$  e  $W_\mu^u$ , e  $R$  é um retângulo ao longo de  $W_\mu^u$  incluindo  $q$  e  $p$ , os iterados negativos  $\varphi^{-n}(R)$  vão se achatando ao longo de  $W_\mu^s$  até alcançarem novamente uma vizinhança de  $q$ , formando assim uma ferradura. A criação da ferradura, com a estrutura complexa do seu conjunto invariante, impossibilita  $\Omega$ -estabilidade. Portanto,  $\varphi_0$  não pode ser persistentemente hiperbólico. O conjunto  $B$  dos valores  $\mu > 0$  para os quais  $\varphi_\mu$  não é hiperbólico é chamado de Conjunto de Bifurcação.



Nessa dissertação, vamos tratar das  $\Omega$ -explosões. No capítulo 2, faremos um estudo das tangências homoclínicas e construiremos uma primeira tangência. No capítulo 3, estudaremos a hiperbolicidade de  $\varphi_\mu$  para valores  $\mu > 0$ . Vamos verificar que, sob determinadas condições, a medida do Conjunto de Bifurcação em um intervalo  $[0, \mu_0]$  próximo de 0 é relativamente pequena.

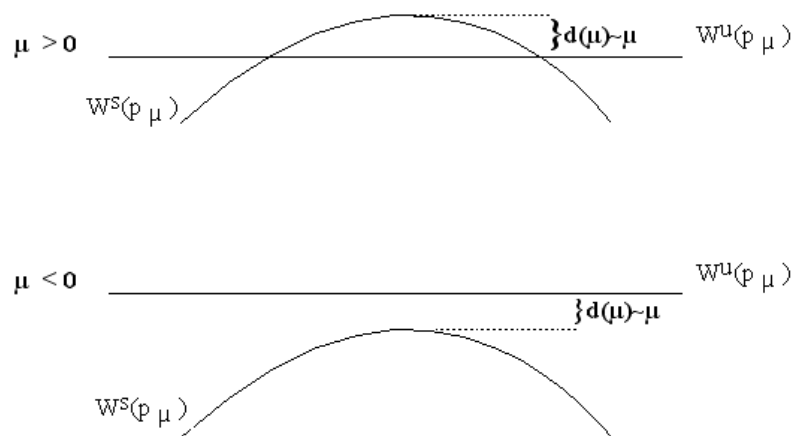


## Capítulo 2

# Construindo uma $\Omega$ -explosão

Para construirmos o ambiente no qual vamos trabalhar os resultados principais dessa dissertação, é importante entendermos em que condições uma  $\Omega$ -explosão homoclínica pode acontecer. Desejamos criar uma família de  $C^2$ -difeomorfismos  $\varphi_\mu : M \rightarrow M$ , parametrizada por  $\mu$ , com bifurcação homoclínica em  $\mu = 0$ . Assumimos que  $M$  é uma variedade compacta de dimensão 2, e que  $p_\mu$  é um ponto fixo de  $\varphi_\mu$ , do tipo sela, com  $(d\varphi)_{p_\mu}$  tendo autovalores  $0 < \lambda < 1 < \sigma$ . Em  $\mu = 0$ , temos uma primeira tangência das variedades estável e instável de  $p_\mu$ . Mais precisamente, a família de difeomorfismos deve satisfazer:

- Para  $\mu < 0$ ,  $\varphi_\mu$  é persistentemente hiperbólico;
- Em  $\mu = 0$ , o conjunto não errante de  $\Omega(\varphi_0)$  consiste de um conjunto hiperbólico  $\tilde{\Omega}(\varphi_0) = \lim_{\mu \nearrow 0} \Omega(\varphi_\mu)$  junto com a órbita homoclínica de tangência  $\mathcal{O}$  associada a  $p_\mu$ . Também supomos que o determinante de  $(d\varphi_0)_p$  não tem norma igual a 1.
- $W^s(p_0)$  e  $W^u(p_0)$  têm tangência quadrática que se desdobra genericamente ao longo de sua órbita  $\mathcal{O}$ : isto é, existem coordenadas locais, dependentes de  $\mu$ , tais que  $W^u(p_\mu)$  é dado por  $x_2 = 0$  e  $W^s(p_\mu)$  por  $x_2 = ax_1^2 + b\mu$ ,  $a \neq 0$  e  $b \neq 0$ . Além disso, a parametrização é feita de modo que a distância  $d(\mu)$  entre  $W^u(p_\mu)$  e  $W^s(p_\mu)$  seja da ordem de  $|\mu|$ , como ilustrado na figura a seguir:



A construção de uma tangência homoclínica como a descrita acima é uma tarefa complicada, uma vez que podem acontecer situações indesejadas como a criação de tangências prematuras. Além disso, para garantirmos  $\Omega$ -estabilidade em valores de  $\mu < 0$ , é importante evitarmos o aparecimento de estruturas com dinâmica muito complexa, como as ferraduras. Nesse capítulo, tentaremos construir uma  $\Omega$ -explosão, procurando entender algumas propriedades que o difeomorfismo tem que ter para que isso seja possível. Assumiremos aqui que  $M$  é uma variedade orientável.

## 2.1 Exemplos

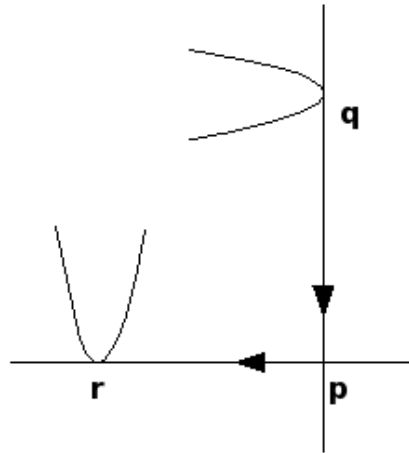
Os exemplos a seguir ilustram algumas situações que queremos evitar:

### 1. *Tangências prematuras*

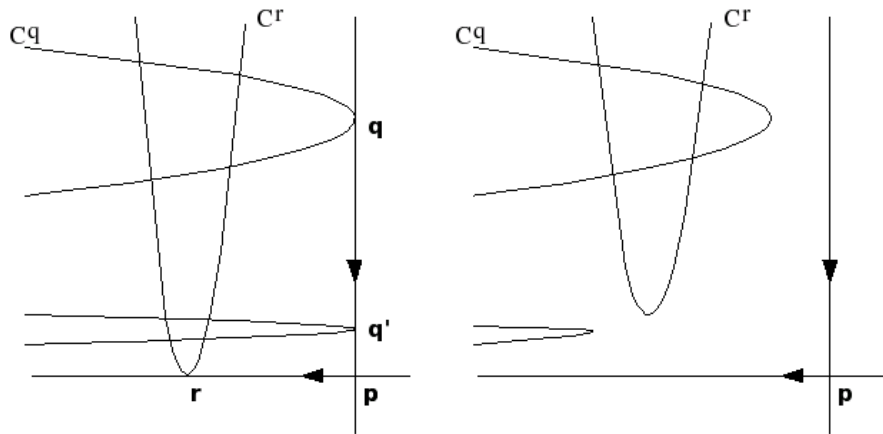
A existência de tangências homoclínicas, seguida de interseção transversal homoclínica, traz uma mudança muito grande na dinâmica do sistema. Uma situação típica é aparecimento de ferraduras, que faz surgir uma quantidade infinita de novos pontos periódicos. Portanto, para garantirmos hiperbolicidade para valores de  $\mu < 0$ , devemos evitar criar tangências prematuras.

Nesse primeiro exemplo, consideramos que as curvas de tangência estão em um mesmo quadrante, como ilustrado na figura a seguir:





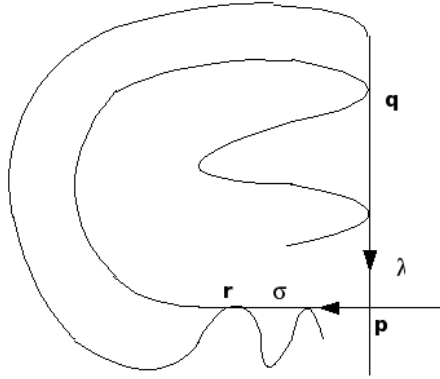
Suponha que  $(d\varphi)_p$  tenha autovalores positivos, e seja  $U$  uma vizinhança pequena de  $p$ . Considere  $r$  e  $q$  pontos na órbita de tangência. Denotaremos por  $C^r \in W^s(p)$  e  $C^q \in W^u(p)$  as componentes globais das variedades que tangenciam  $W_{loc}^u(p)$  e  $W_{loc}^s(p)$ , respectivamente.



Veja que, para  $\mu = 0$ ,  $\varphi^n(C^q)$  e  $C^r$  intersectam-se transversalmente  $\forall n \in \mathbb{Z}$ . Podemos escolher  $\mu_0 < 0$  arbitrariamente pequeno de modo que  $C^r$  e  $C^q$  continuem intersectando-se. Porém, para  $n$  suficientemente grande,  $\varphi_{\mu_0}^n(C^q)$  fica tão achatado perto de  $W_{loc}^u(p)$  que não mais intersecta  $C^r$ . Temos então que, para  $\mu = 0$ ,  $\varphi_0^n(C^q) \cap C^r \neq \emptyset$ ,

mas para  $\mu_0 < 0$ ,  $\varphi_{\mu_0}^n(C^q) \cap C^r = \emptyset$ . Logo, para algum  $\mu_1 \in (\mu_0, 0)$ , deve haver tangência entre  $\varphi_{\mu_1}^n(C^q)$  e  $C^r$ .

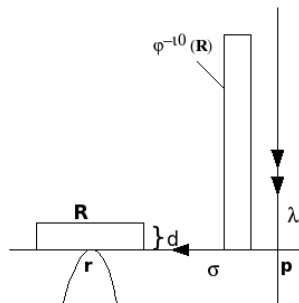
2. Criação de Ferradura



Considere a tangência homoclínica indicada acima e suponha que  $(d\varphi)_p$  tenha dois autovalores positivos, com autovalor contrátil dominante (i.e.,  $0 < \lambda < \sigma^{-1} < 1$ ).

Fazendo um linearização  $C^1$  em uma vizinhança  $U$  de  $p$  e assumindo que as coordenadas linearizadas estão definidas em  $[-1, 1]$ , escolhamos  $r \in W_{loc}^u(p)$  e  $q \in W_{loc}^u(p)$  pontos da órbita de tangência de coordenadas menores que 1.

Seja  $R$  um pequeno retângulo de altura  $d$  sobre  $W_{loc}^u$  contendo  $r$ . Para  $i_0(d) = \lceil \log(d)/\log(\lambda) \rceil$ , consideramos  $R' = \varphi^{-i_0(d)}(R)$ .



Veja que a altura de  $R'$  é maior do que a altura de  $q$  a  $W_{loc}^u(p)$

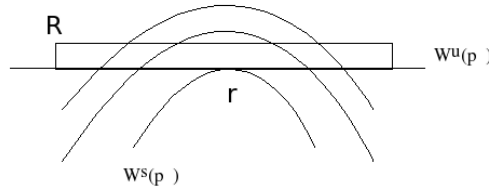
$$d\lambda^{-i_0(d)} \geq d\lambda^{-\frac{\log d}{\log|\lambda|}} = d\frac{1}{d} = 1.$$

A distância de  $R'$  a  $W_{loc}^s(p)$  é da ordem de:

$$\sigma^{-i_0(d)} \leq \sigma^{-\frac{\log d}{\log|\lambda|}} = d^{-\frac{\log \sigma}{\log d} \frac{\log d}{\log|\lambda|}} = d^{-\frac{\log \sigma}{\log|\lambda|}}$$

Logo, escolhendo  $d$  pequeno, podemos fazer  $R'$  tão próximo de  $W_{loc}^s(p)$  quanto se queira.

Se  $j_0$  é uma constante tal que  $\varphi^{-j_0}(q) = r$  e a distância de  $q$  a  $R'$  for pequena o suficiente,  $\varphi^{-j_0}(R')$  se estende ao longo de  $W^s(p)$  até uma vizinhança de  $r$  e, eventualmente, intersecta  $R$ .



Afirmção: Se  $d$  for pequeno o suficiente, a distância de  $r$  a  $\varphi^{-j_0}(R')$  é maior do que  $d$  e a figura acima realmente forma uma ferradura.

Prova: Considerando uma linearização dos sistema ao longo de  $W^s(p)$  até atingir uma vizinhança de  $r$ , a distância de  $\varphi^{-i_0(d)-j_0}(R)$  a  $W^s(p)$  é da ordem de

$$\sigma^{-i_0(d)-j_0} = \sigma^{-j_0} \sigma^{-i_0(d)} \geq \sigma^{-j_0} \sigma^{-\left(\frac{\log(d)}{\log(\lambda)}+1\right)} \geq \sigma^{-j_0-1} d^{-\frac{\log(\sigma)}{\log(\lambda)}}$$

Como, por hipótese, o autovalor contrátil é dominante,  $-\frac{\log(\sigma)}{\log(\lambda)} = \frac{\log(\sigma^{-1})}{\log(\lambda)} <$

1. Logo, para  $d$  pequeno:

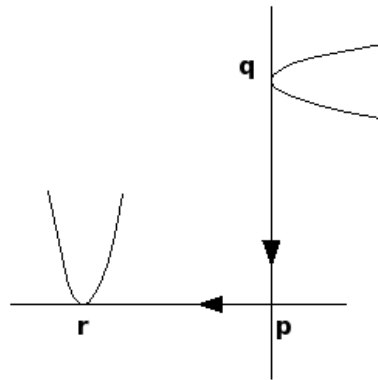
$$\sigma^{-j_0-1} d^{-\frac{\log(\sigma)}{\log(\lambda)}} \gg d,$$

o que conclui a afirmação.

A ferradura descrita acima continua existindo para valores de  $\mu < 0$  e eventualmente desaparece em algum  $\mu_0 < 0$ . Portanto, deve haver criação de ferradura prematura no intervalo  $[\mu_0, 0)$ . Observe que, fazendo  $d$  pequeno,  $\mu_0$  pode ser tão próximo de 0 quanto se queira.

### 3. Orientabilidade

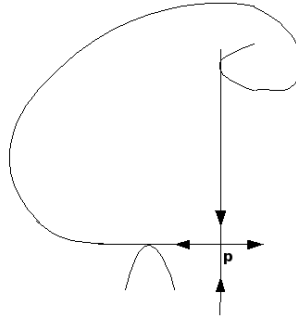
A orientabilidade da variedade  $M$  impõe algumas restrições sobre as conexões das curvas de tangência. Ilustramos isso com o seguinte exemplo:



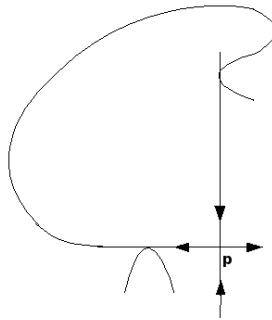
Considere que os dois autovalores de  $(d\varphi)_p$  sejam positivos. A dinâmica do sistema nos dá uma orientação natural para as separatrizes, na qual o sentido positivo é definido pelo sentido do movimento dos pontos de  $W^s(p)$  e  $W^u(p)$  quando  $\varphi$  é aplicado.

Seja  $n$  tal que  $\varphi^n(r) = q$ . Veja que  $\varphi^n$  é um difeomorfismo de uma vizinhança de  $r$  em uma vizinhança de  $q$ . Esse difeomorfismo preserva as variedades instável e estável e, como  $(d\varphi)_p$  tem autovalores positivos, a orientação também deve ser mantida.

Para preservarmos orientação, só existe uma maneira de conectarmos as curvas de tangência globais com as variedades locais. No exemplo em questão, a conexão só pode ser feita assim:

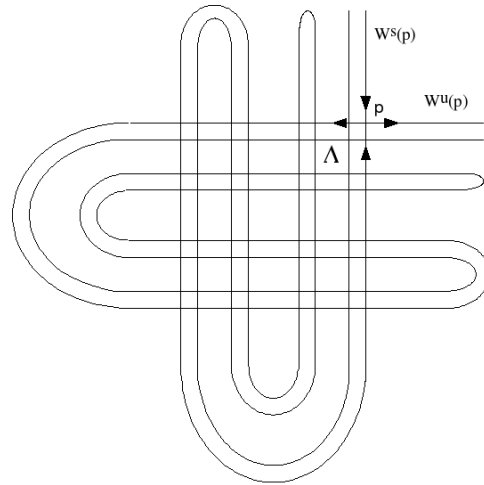


Pois a outra possibilidade de conexão não preserva orientação:



#### 4. Autovalores negativos e interseções homoclínicas transversais

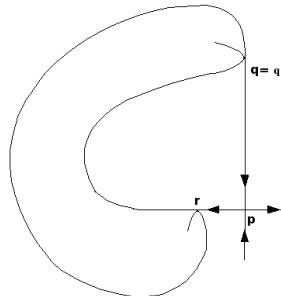
Suponha agora que queremos desdobrar as variedades invariantes  $W^u(p)$  e  $W^s(p)$  e construir uma tangência em um sistema que já possua pontos de interseção homoclínica transversal. Pelo  $\lambda$ -lema, as seções transversais a  $W^s(p)$  acumulam-se em  $W^u(p)$ . Logo,  $W^u(p)$  deve acumular-se em si mesmo por algum lado. Na figura a seguir,  $W^u(p)$  acumula-se pela parte de baixo:



Se a tangência for construída pelo desdobramento de  $W^s(p)$  até encostar  $W^u(p)$  pela parte de baixo, teremos tangências prematuras. Uma situação semelhante acontece com  $W^s(p)$ , que se acumula em si mesmo pela esquerda: uma primeira tangência só pode ser construída pelo deslocamento de  $W^u(p)$  a direita de  $W^s(p)$ . Veja então que só sobra um quadrante para construirmos a tangência: o quadrante superior direito.

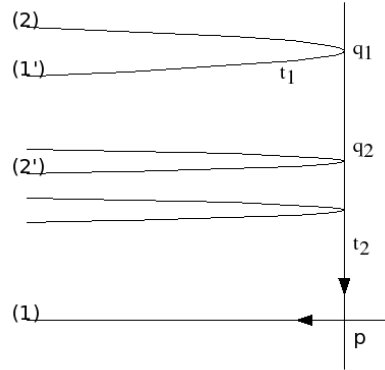
Se  $(d\varphi)_p$  tiver um autovalor negativo, a separatriz associada a esse autovalor se acumularia em si mesma pelos dois lados. Então seria impossível construir uma primeira bifurcação.

5. *Existência de infinitos círculos*



Considere o sistema acima, supondo que  $W^s(p) \cap W^u(p)$  seja constituído exatamente pelo ponto  $p$  junto com a órbita de tangência. Suponha também que  $(d\varphi)_p$  tenha ambos os autovalores positivos.

Escolhendo  $q_1$  em  $W^s(p) \cap W^u(p)$ , definimos  $q_i = \varphi^{i-1}(q_1)$ ,  $1 \leq i$ . A figura a seguir mostra as curvas de tangência sobre os pontos  $q'_i$ s.



Pela orientação das variedades invariantes, as conexões devem ser feitas da seguinte forma:  $(1) \rightarrow (1')$  e  $(2) \rightarrow (2')$ .

Para  $i \geq 1$ , seja  $C_i$  a curva fechada formada pelos segmentos em  $W^u(p)$  e  $W^s(p)$  ligando  $q_{2i-1}$  e  $q_{2i}$  (na figura,  $C_1$  é formada pelo segmento  $\overline{q_1 q_2}$  em  $W^s(p)$  e pela conexão  $(2) \rightarrow (2')$ ). As curvas  $C_i$  são disjuntas, já que  $W^u(p)$  e  $W^s(p)$  só se intersectam em  $\mathcal{O} \cup \{p\}$ .

Vamos provar que,  $\forall k$ , o complemento de  $\bigcup_{i=1}^k C_i$  é conexo. Usaremos indução em  $k$ . Primeiro observe que o complemento de  $C_1$  é conexo. Caso contrário, os pontos  $t_1$  e  $t_2$  da figura estariam em componentes diferentes. Isso não pode acontecer pois existe um segmento  $\tau_1 \in W^u(p)$  conectando  $p$  a  $t_1$  e um segmento  $\tau_2 \in W^s(p)$  conectando  $p$  a  $t_2$ . Note que  $\tau_2$  não pode intersectar  $\overline{q_1 q_2}$  em  $W^s(p)$  e que  $\tau_1$  não pode intersectar a conexão  $(2) \rightarrow (2')$  (caso contrário,  $W^u(p)$  teria um laço de auto-intersecção, o que não pode acontecer pois  $W^u(p)$  é uma variedade). Então  $\tau_1 \cup \tau_2$  é disjunto de  $C_1$ , e faz uma ligação entre  $t_1$  e  $t_2$ .

Pelo mesmo motivo que não intersecta  $C_1$ ,  $\tau_1$  não pode intersectar nenhum  $C_i$ . Trocando  $\tau_2$  por um segmento próximo levemente para a

esquerda, podemos fazer com que este não encontre também  $\bigcup_{i=1}^k C_i$ . Logo, existe um caminho de  $t_1$  a  $t_2$  disjunto de qualquer  $C_i$ . Então o número de componentes do complemento de  $\bigcup_{i=1}^k C_i$  é igual ao número de componentes do complemento de  $\bigcup_{i=2}^k C_i$ . Por indução, concluímos que o complemento de  $\bigcup_{i=1}^k C_i$  só tem uma componente conexa.

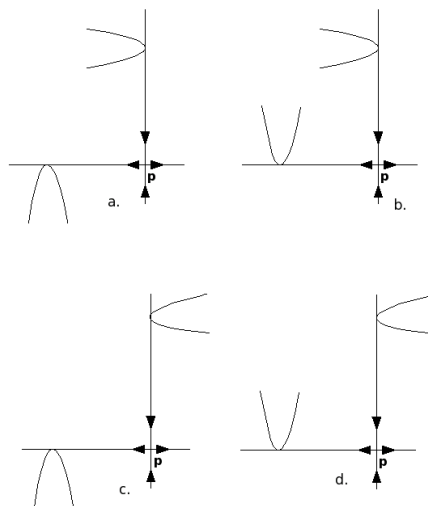
Com isso, temos uma quantidade arbitrariamente grande de curvas fechadas cuja união tem complemento conexo na superfície  $M$ . Isso é um absurdo pois  $M$  é compacta.

## 2.2 Classificação das tangências homoclínicas

Afim de listarmos e entendermos as diferentes possibilidades de tangências homoclínicas, vamos classificá-las de acordo com os seguintes aspectos: o sinal dos autovalores de  $d\varphi$  (+ ou -); o lado do desdobramento das curvas; e como são feitas as conexões das variedades invariantes locais e globais. Considere os casos a seguir:

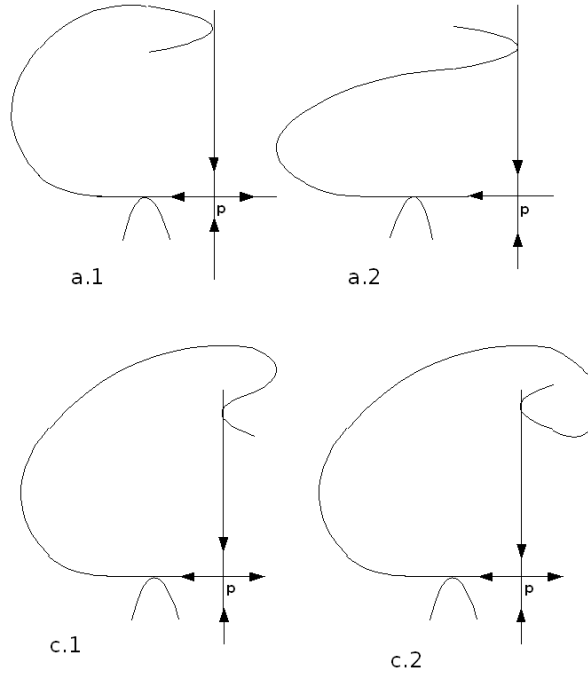
### I Autovalores ++

Existem quatro possibilidades para os lados das tangências:





O caso  $b$  já foi estudado na seção sobre “tangência prematura”, e já sabemos que não pode ocorrer  $\Omega$ -explosão homoclínica. Os casos  $a$  e  $d$  são equivalentes, tendo em vista que um é transformado no outro pela substituição de  $\varphi$  por  $\varphi^{-1}$ . Então vamos prosseguir analisando conexões somente para os casos  $a$  e  $c$ .



$a.1$ : Segue das observações desenvolvidas em “criação de ferradura” que só pode haver  $\Omega$ -explosão se o autovalor expansor domina o contrátil.

$a.2$ : De acordo com o exemplo “existência de infinitos círculos”, a interseção entre  $W^s(p)$  e  $W^u(p)$  não pode ser apenas a órbita de tangência e o ponto  $p$ , ou seja, devem haver interseções transversais entre as duas variedades. Essas interseções ocorrem na região onde estão as tangências. Mas, por “autovalores negativos e interseções homoclínicas transversais”, as interseções transversais têm que estar contidas no quadrante superior direito, caso contrário temos tangência prematura. Então não podemos construir  $\Omega$ -explosão homoclínica para esse caso.

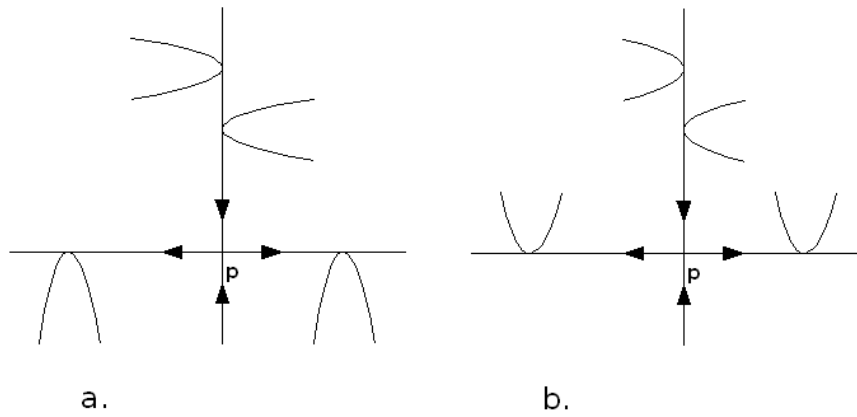
$c.1$ : Como vimos em “orientabilidade”, não é possível esse tipo de

tangência em superfícies orientadas.

c.2: Novamente, por “existência de infinitos círculos”, esse tipo de tangência não pode existir se não houverem interseções transversais entre  $W^u(p)$  e  $W^s(p)$ .

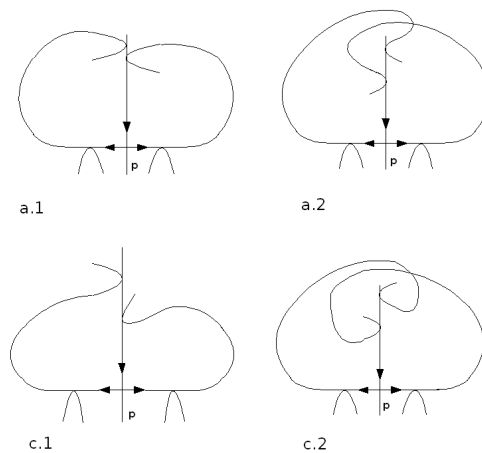
II *Autovalores +-*

As possibilidades para os lados das tangências são:



No caso *b*, temos “tangência prematura”. Então não pode acontecer  $\Omega$ -explosão homoclínica.

As conexões possíveis para o caso *a* são:



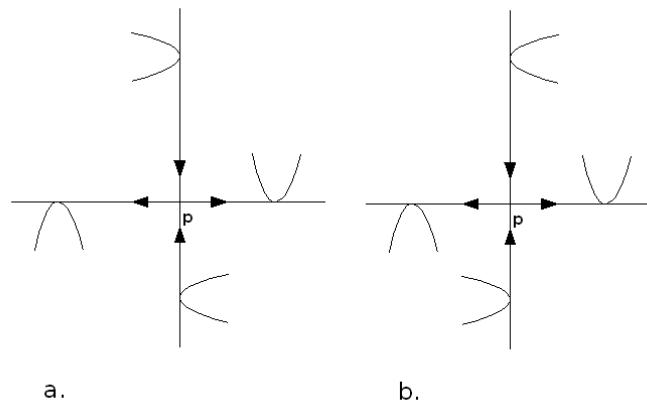
*a.1:* Se o autovalor contrátil é dominante, temos uma situação semelhante àquela em “criação de ferradura” (para ver isso, basta trabalharmos com  $\varphi^2$  ao invés de  $\varphi$ ). Então, nesse caso, o autovalor expansor tem que ser dominante.

*a.2:* Se considerarmos  $\varphi^2$  em vez de  $\varphi$ , esse caso é semelhante ao apresentado em “orientabilidade”, sendo impossível de ser construído em uma superfície orientável.

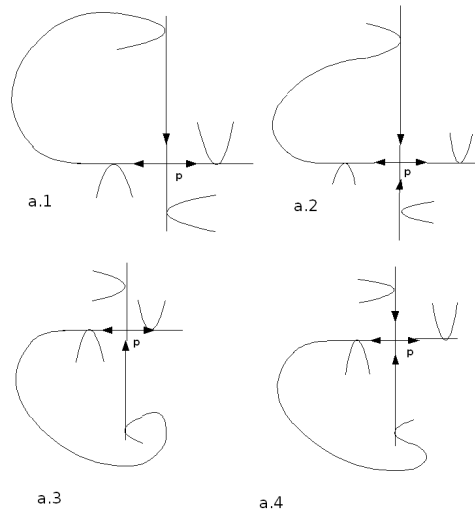
*a.3 e a.4:* Como um autovalor é negativo, por “autovalores negativos e interseções transversais”,  $W^s(p) \cap W^u(p)$  deve ser composto apenas pelo ponto  $p$  e pela órbita de tangência. Entretanto, analisando a aplicação  $\varphi^2$ , caímos no exemplo “existência de infinitos círculos”, no qual temos pontos de interseção transversal.

### III . Autovalores --

Os possíveis lados de tangência são:



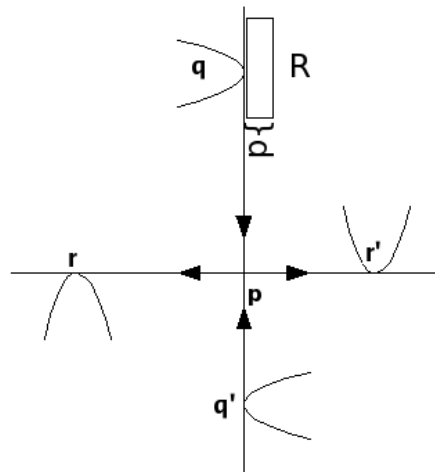
No caso *b*, as curvas de tangência estão num mesmo quadrante, então temos “tangência prematura”. Logo, não há  $\Omega$ -explosão homoclínica. Para o caso *a*, as possibilidades de conexão são:



Veja que  $a.1$  e  $a.3$  são análogos, assim como  $a.2$  e  $a.4$ , já que um é transformado no outro quando trocamos  $\varphi$  por  $\varphi^{-1}$ .

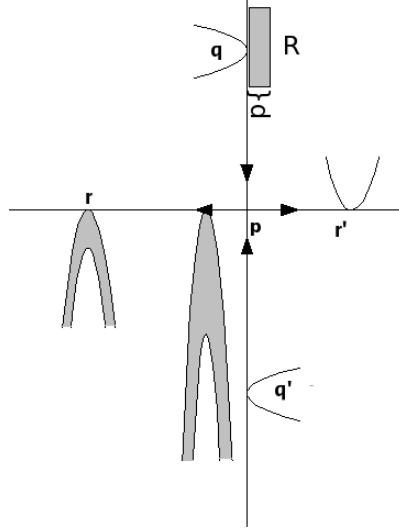
$a.1$  e  $a.2$ : Em ambos os casos, veremos que acontece criação prematura de ferraduras. Se o autovalor contrátil domina, temos uma situação semelhante ao exemplo “Criação de Ferradura”, da seção anterior. Suponha então que o autovalor expensor domina.

Seja  $R$  um retângulo pequeno, de espessura  $d$ , sobre um ponto de tangência  $q \in W_{loc}^s(p)$ , como na figura a seguir.



Escolhemos  $r \in W_{loc}^u$  na órbita de tangência e chamamos de  $i$  o inteiro

tal que  $\varphi^{-2i}(q) = r$ . Considere uma linearização do sistema em uma vizinhança  $U$  de  $p$ , assumindo que  $q \in W_{loc}^s(p)$  tem coordenadas em  $[0, 1]$  e  $r \in W_{loc}^u(p)$  tem coordenadas em  $[0, 1]$ . Podemos estender essa linearização ao longo de  $W^s(p)$  até uma vizinhança de  $r$ . Fazendo  $R' = \varphi^{-2i}(R)$ ,  $R'$  é um retângulo que passa por  $r$ , como na figura a seguir.



Veja que a altura de  $R'$  sobre  $W^s(p)$  é da ordem de  $d' = d\lambda^{-2i}$ .

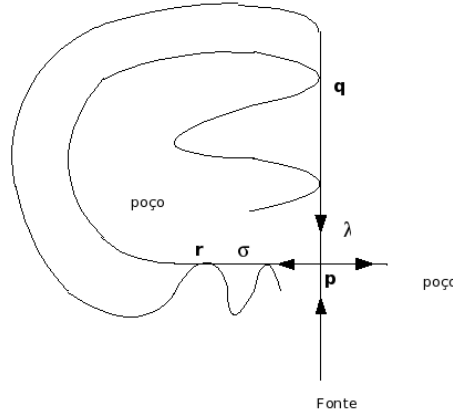
Para  $j \approx \frac{\log(2d')}{2\log|\lambda|}$ , defina  $R'' = \varphi^{-2j}$ . A altura de  $R''$  acima de  $r$  é da ordem de  $d'\lambda^{\frac{\log(2d')}{\log|\lambda|}} = d' \cdot \frac{1}{2d'} = \frac{1}{2}$ . Mas a distância de  $R''$  a  $W_{loc}^s(p)$  é da ordem de  $d'' = \sigma^{-\frac{\log(2d')}{\log\lambda}} = (2d')^{-\frac{\log(\sigma)}{\log\lambda}} = (2d')^{\frac{\log(\sigma)^{-1}}{\log\lambda}}$ .

Como o autovalor expensor é dominante,  $\sigma^{-1} < \lambda \Rightarrow \frac{\log\sigma^{-1}}{\log\sigma} = 1 - \epsilon$ , para algum  $\epsilon > 0$ . Então, para  $d$  pequeno,  $d'' \ll d$ .

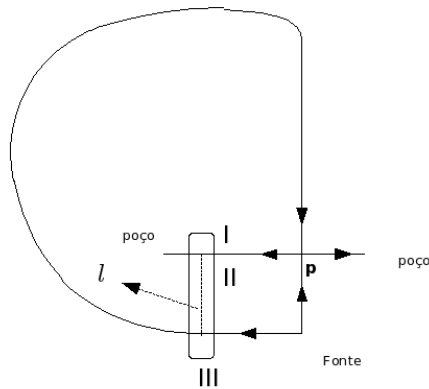
Observe na figura anterior que  $\varphi^{-1}(R'')$  intersecta  $R$  de modo a formar uma ferradura. Essa ferradura desaparece para algum  $\mu(d) < 0$  (note ainda que  $\mu$  se aproxima de 0 a medida que  $d$  diminui). Assim, também nesse caso, temos criação prematura de ferradura.

### 2.3 Criação de uma primeira tangência

Vamos, finalmente, tentar construir uma primeira tangência. Tomamos como base o caso *a.1* da seção anterior com  $(d\varphi)_p$  tendo dois autovalores positivos. Nesse sistema, o autovalor expensor  $\sigma$  é dominante e a tangência é feita da seguinte forma:

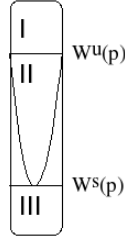


Começamos com o difeomorfismo da figura a seguir, com dois poços, uma fonte e o ponto de sela  $p$ .



Sejam  $l$  uma curva ligando  $W^u(p)$  a  $W^s(p)$  e  $U$  uma vizinhança pequena de  $l$ . Definimos uma aplicação  $\sigma_\mu$  sobre os pontos de  $U$  que modifica a curva  $W^u(p)$ , descendo ao longo de  $l$ , de forma a criar uma tangência. Para  $\mu < -1$ ,

$\sigma_\mu$  é a identidade e, para  $\mu > -1$ ,  $W^u(p)$  se desdobra genericamente de forma que em  $\mu = 0$  temos uma tangência. Identificamos três regiões em  $U$ : I, II e III.



Para  $x \in I$ , assumimos que a altura de  $\sigma_\mu(x)$  a  $W^s(p)$  é pelo menos a distância de  $x$  a  $W^u(p)$ .

Definimos nossa família de difeomorfismos como a composição de  $\sigma_\mu$  com  $\phi$ :  $\varphi_\mu = \sigma_\mu \circ \phi$ . Queremos provar que  $\varphi_\mu$  não possui novos pontos não errantes. Veja que as órbitas que a partir de algum momento de suas trajetórias param de visitar  $U$  não contribuem com novos pontos não errantes. Então consideramos apenas órbitas que continuam visitando  $U$  indefinidamente.

Veja que pontos na região  $I$  são mapeados por pontos  $\sigma_\mu$  em pontos na região  $I$  e  $II$ ; pontos na região  $II$  são mapeados em pontos de  $II$  e  $III$  e pontos em  $III$  permanecem em  $III$ . Assim, novas órbitas não-errantes devem ser formadas por pontos na região  $II$  que são mapeados por  $\phi^n$  em pontos da região  $I$  e que retornam a  $II$  por intermédio de  $\sigma_\mu$ .

Mas, como o autovalor expansor é dominante, é fácil ver que se  $x$  é um ponto de  $I$  que, mapeado por  $\sigma_\mu$ , vai a  $II$  e retorna a  $I$  por  $\phi^n$ , então a altura de  $x$  com relação a  $W^u(p)$  é menor que a altura de  $\phi^n \circ \sigma_\mu(x)$  com relação a  $W^u(p)$ . Logo,  $x$  não pode ser não-errante. Concluimos, assim, que  $\varphi_\mu$  é persistentemente hiperbólico para  $\mu < 0$ .





# Capítulo 3

## Hiperbolicidade após tangência

Prosseguimos nosso estudo com o tema principal dessa dissertação: hiperbolicidade após uma primeira tangência homoclínica. Consideramos uma família parametrizada de difeomorfismos  $C^2$ ,  $\varphi_\mu : M \rightarrow M$ , numa variedade  $M$  de dimensão 2, com  $\Omega$ -explosão homoclínica em  $\mu = 0$ , isto é:

1. Para  $\mu < 0$ ,  $\varphi_\mu$  é persistentemente hiperbólico.
2. Para  $\mu = 0$ , o conjunto não-errante  $\Omega(\varphi_0)$  é constituído pelo conjunto hiperbólico fechado  $\tilde{\Omega}(\varphi_0) = \lim_{\mu \nearrow 0} \Omega(\varphi_\mu)$  junto com a órbita de tangência homoclínica  $\mathcal{O}$ , de forma que  $\Omega(\varphi_0) = \tilde{\Omega}(\varphi_0) \cup \mathcal{O}$ .  $\mathcal{O}$  é a única órbita de tangência entre as separatrizes dos pontos periódicos de  $\varphi_0$ .

Assumindo que  $M$  é uma variedade compacta de dimensão 2, como o  $\Omega(\varphi_\mu)$  é hiperbólico para  $\mu < 0$ , [6] nos garante que o conjunto dos pontos periódicos  $Per(\varphi_\mu)$  é denso em  $\Omega(\varphi_\mu)$  (i.e,  $\overline{Per(\varphi_\mu)} = \Omega(\varphi_\mu)$ ). Sendo  $\overline{Per(\varphi_\mu)}$  hiperbólico, segue de [2] que ele possui uma decomposição espectral. Logo,  $\Omega(\varphi_\mu)$  é a união disjunta de um número finito de conjuntos básicos  $\Lambda_i$ . Dado  $\varphi$  um difeomorfismo  $C^2$ , dizemos que o conjunto  $\Lambda \in \Omega$  é básico se ele for  $\varphi$ -invariante, hiperbólico, compacto, transitivo e se os pontos periódicos forem densos em  $\Omega$ .

Se  $x$  é um ponto de um conjunto hiperbólico  $\Lambda$ , definimos sua variedade estável como:

$$W^s(x) = \{y \in M \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} \rho(\varphi^n(x), \varphi^n(y)) = 0\},$$

onde  $\rho$  é uma métrica em  $M$ .

Sabemos, pelo Teorema da Variedade Estável em conjuntos hiperbólicos, que  $W^s(x)$  é uma subvariedade  $C^2$  injetivamente imersa em  $M$ . Mais ainda, essa variedade estável depende continuamente do difeomorfismo  $\varphi$ . A variedade instável  $W^u(x)$  de  $x$  é definida de maneira análoga, assumindo iterados negativos de  $\varphi$ . A união de  $W^s(x)$  e  $W^u(x)$  em torno dos pontos de  $\Lambda$  forma folheações  $\mathcal{F}^u(\Lambda)$  e  $\mathcal{F}^s(\Lambda)$ . Apesar de suas folhas serem  $C^2$ , a princípio não podemos garantir que as folheações também o sejam. Mas como ambas tem codimensão 1, [1] nos garante que  $\mathcal{F}^s(\Lambda)$  e  $\mathcal{F}^u(\Lambda)$  são pelo menos  $C^1$ .

Dizemos que  $\Omega(\varphi)$  possui um  $n$ -ciclo se existe uma seqüência de conjuntos básicos  $\Lambda_0, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n = \Lambda_{n+1}$  com  $W^u(\Lambda_i) \cap W^s(\Lambda_{i+1}) \neq \emptyset, \forall 0 \leq i \leq n$ , e  $\Lambda_0 = \Lambda_{n+1}$ . Aqui,  $W^j(\Lambda_i) = \bigcup_{x \in \Lambda_i} W^j(x), j = s, u$ .

Afirmação: Se  $\varphi$  é persistentemente hiperbólico,  $\Omega(\varphi)$  não possui ciclos. De fato, supondo que  $\Lambda_0, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n = \Lambda_{n+1}$  seja um  $n$ -ciclo, por [3] existe um difeomorfismo  $\tilde{\varphi}$ , arbitrariamente próximo de  $\varphi$ , que tem um conjunto básico  $\Lambda$  contendo subconjuntos  $\tilde{\Lambda}_i \subsetneq \Lambda$ , onde  $\tilde{\Lambda}_i$  é básico e próximo de  $\Lambda_i$ . Assim, considerando uma família parametrizada de difeomorfismos ligando  $\varphi$  a  $\tilde{\varphi}$ , novas partes básica e novos pontos periódicos devem aparecer no conjunto não-errante. Isso contradiz o fato de  $\varphi$  ser persistentemente hiperbólico. Logo  $\Omega(\varphi)$  não possui ciclos. É importante notar que, se  $\overline{Per}(\varphi) = \Omega(\varphi)$  é hiperbólico e não possui ciclos,  $\Omega$  é estável (pelo teorema da  $\Omega$  estabilidade, [5]).

Sabemos que  $\varphi_\mu$  é persistentemente hiperbólico quando  $\mu < 0$ . Para esses valores, portanto,  $\Omega(\varphi_\mu)$  não contém ciclos. Então podemos assumir que:

$$W^u(\Lambda_i(\mu)) \cap W^s(\Lambda_l(\mu)) = \emptyset, \forall i < l, \mu < 0.$$

Por [6], existe um conjunto finito  $F^s \subset Per(\varphi_\mu)$  satisfazendo: para cada conjunto básico  $\Lambda_i$  do tipo sela, sempre que, para um ponto  $y \in \Lambda$ ,  $W^s(y)$  é acumulado por outras folhas da folheação estável em no máximo um dos lados, então existe ponto periódico  $p \in \Lambda_i$  em  $F^s$  tal que  $W^s(y) = W^s(p)$ . O

mesmo resultado vale para folhas instáveis. Portanto, esses conjuntos  $\Lambda_i$  são cercados por folhas instáveis e estáveis de pontos periódicos.

Para valores negativos de  $\mu$ , sabemos que  $W^u(\Lambda_i(\mu)) \cap W^s(\Lambda_l(\mu)) = \emptyset, \forall i < l$ . Isso também tem que ser verdade em  $\mu = 0$ , pois, caso contrário existiriam  $i < l$  tais que  $W^u(\Lambda_i(0)) \cap W^s(\Lambda_l(0)) \neq \emptyset$ . Assumindo  $W^u(\Lambda_i(0))$  e  $W^s(\Lambda_l(0))$  do tipo sela, como  $W^u(\Lambda_i(\mu)) \cap W^s(\Lambda_l(\mu)) = \emptyset, \forall \mu < 0$ , e ambos  $W^u(\Lambda_i(0))$  e  $W^s(\Lambda_l(0))$  são cercados por variedades estáveis e instáveis de pontos periódicos, deve haver uma tangência dessas variedades em  $\mu = 0$ , o que contradiz a construção da  $\Omega$ -explosão. Então temos, de fato:

$$W^u(\Lambda_i(\mu)) \cap W^s(\Lambda_l(\mu)) = \emptyset, \forall i < l, \mu \leq 0.$$

Recordamos um resultado conhecido da teoria da Teoria da Dinâmica Hiperbólica (ver [4]):

**Teorema 1.** *Seja  $\Lambda \subset U$  um conjunto hiperbólico compacto do difeomorfismo  $C^1$   $\varphi : M \rightarrow M$ . Então existe uma vizinhança  $V \subset M$  de  $\Lambda$  e uma vizinhança  $N$  de  $\varphi$  em  $C^k(M)$  com a seguinte propriedade: se  $\varphi_i \in N$  para  $i = 1, 2$ , então  $\varphi_i$  tem um único conjunto hiperbólico maximal  $\Lambda_i \subset V$  contendo todo o conjunto invariante de  $\varphi_i$ . Além disso,  $\Lambda_1$  e  $\Lambda_2$  são conjugados por um homeomorfismo  $h : \Lambda_1 \rightarrow \Lambda_2$  próximo da identidade.*

Dado um conjunto básico  $\Lambda_i(0)$  de  $\Omega(\varphi_0)$ , podemos usar a vizinhança  $V$  descrita acima para definirmos uma continuação  $\Lambda_i(\mu), \mu > 0$ . Se  $\Lambda_i(0) \subset V_i$ ,  $\Lambda_i(\mu)$  é o conjunto maximal invariante por  $\varphi_\mu$  em  $V_i$ . Pelo teorema,  $\Lambda_i(\mu)$  é hiperbólico e conjugado a  $\Lambda_i(0)$ .

Seja  $i_0$  o índice do conjunto básico  $\Lambda_{i_0}$  contendo o ponto fixo  $p$ . Para todos os índices diferentes de  $i_0$ ,  $\Lambda_i$  é aberto em  $\Omega(\varphi_\mu)$ . Lembramos que, em  $\mu = 0$ ,  $W^u(\Lambda_i(0)) \cap W^s(\Lambda_l(0)) = \emptyset, \forall i < l$ . Isso continua verdade se substituírmos  $\Lambda_{i_0}(0)$  por  $\Lambda_{i_0(0)} \cup \mathcal{O}$ , uma vez que  $W^s(\Lambda_{i_0}(0)) = W^s(\Lambda_{i_0(0)} \cup \mathcal{O})$  e  $W^u(\Lambda_{i_0}(0)) = W^u(\Lambda_{i_0(0)} \cup \mathcal{O})$ . (\*)

Definição: para um difeomorfismo  $\varphi$  de uma variedade  $M$ , uma filtração  $\Pi$  adaptada a  $\varphi$  é uma sequência encadeada

$$\emptyset \subset M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_k = M$$

de subvariedades compactas de codimensão 0 de  $M$  tais que  $\varphi(M_i) \subset \text{Int}(M_i)$ .

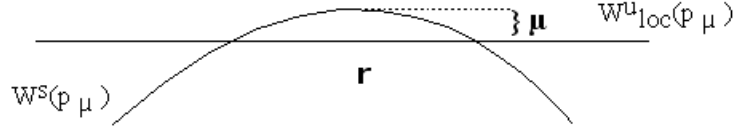
Considere a seguinte nomenclatura,  $K_\alpha^\varphi$  é o conjunto maximal invariante de  $M_\alpha - M_{\alpha-1}$  (i.e,  $K_\alpha^\varphi(\Pi) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \varphi^n(M_\alpha - M_{\alpha-1})$ ), e  $K^\varphi(M) = \bigcup_{\alpha=1}^k K_\alpha^\varphi(\Pi)$ . De (\*), sabemos que  $\Omega(\varphi_0)$  não contém ciclos. Então, por [2], existe uma filtração  $M_1 \subset M_2 \subset M$  tal que  $K_2^{\varphi_0}(\Pi) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \varphi_0^n(M_2 - M_1) = \Lambda_{i_0}(0) \cup \mathcal{O}$ . Assim, para cada vizinhança  $U$  de  $\Lambda_{i_0}(0) \cup \mathcal{O}$ , existe um  $n(U)$  tal que,  $\forall x \notin U$ ,  $\varphi_0^{n(U)}(x)$  ou  $\varphi_0^{-n(U)}(x)$  está no complemento de  $M_2 - M_1$ . Nesse caso,  $x$  não pode pertencer ao conjunto não errante. Isso continua valendo pra difeomorfismos próximos de  $\varphi_0$ . Logo, para cada vizinhança  $U$  de  $\Lambda_{i_0} \cup \mathcal{O}$ , podemos escolher  $\mu$  pequeno o suficiente de modo a garantirmos que todos os pontos não errantes de  $M_2 - M_1$  estejam em  $U$ .

### 3.1 Localização dos novos pontos não-errantes

Já vimos que, para qualquer vizinhança  $U$  de  $\Omega(\varphi_0)$ , podemos escolher  $0 < \mu < \mu_0(U)$  pequeno suficiente de modo que os pontos de  $\Omega_\mu$  fiquem sempre em  $U$ . A proposição seguinte nos da uma estimativa, em função de  $\mu$ , para a distância entre os novos pontos não-errantes e a variedade  $W^u(p_\mu)$ .

**Proposição 1.** *Considere  $r$  um ponto na órbita de tangência  $\mathcal{O}$  de  $\varphi_0$  e  $U$  uma pequena vizinhança de  $\Lambda(0) \cup \mathcal{O}$ . Seja  $U_r$  a componente conexa de  $U$  contendo  $r$ . Então, para  $\mu_0(U)$  pequeno suficiente e  $0 < \mu < \mu_0(U)$ , todos os pontos não errantes em  $U_r$  estão em uma  $(K \cdot \mu)$ -vizinhança acima de  $W^u(p_\mu)$ , onde  $K$  é uma constante.*

*Demonstração.* Vamos assumir que, após a tangência, o ponto  $r$  permaneça na variedade instável local de  $p_\mu$ , como na figura a seguir:



Também vamos considerar que  $r$  está próximo de  $p_\mu$ , e que  $U_r$  esteja numa vizinhança de coordenadas linearizadas em torno de  $p_\mu$ . Essa linearização pode ser expandida ao longo de  $W^s(p_\mu)$ , através de iterados de  $\varphi_\mu$ , até incluir uma vizinhança de  $r$ . Os pontos dessa região terão duas coordenadas linearizadas.

Seja  $x = (r_0, d) \in U_r$  um ponto de altura  $d$  sobre  $W_{loc}^u(p_\mu)$  e  $q = (0, q_0) \in W_{loc}^s(p_\mu)$  tal que, em  $\mu = 0$ ,  $q$  está na órbita de tangência (aqui supomos que as coordenadas linearizadas de  $r$  e  $q$  não variam com  $\mu$ ).

Se o inteiro  $n > 0$  é tal que  $\varphi^{-n}(x)$  está perto de  $q$ , então a distância entre  $\varphi_\mu^{-n}(x)$  e  $W_{loc}^s(p_\mu)$  é da ordem de  $d^{-\frac{\log \sigma}{\log \lambda}}$ . De fato:

$$\varphi^{-n}(r_0, d) = (r_0 \sigma^{-n}, d \lambda^{-n}) = (\epsilon, q_1) \Rightarrow$$

com  $q_1 \approx q_0$ . Então,

$$\begin{aligned} -n &= \frac{\log(q_1/d)}{\log \lambda} \\ \epsilon &= r_0 \sigma^{\frac{\log(q_1/d)}{\log \lambda}} = r_0 (q_1/d)^{\frac{\log \sigma}{\log(q_1/d)} \frac{\log(q_1/d)}{\log \lambda}} \Rightarrow \\ \epsilon &= r_0 (q_1/d)^{\frac{\log \sigma}{\log \lambda}} = \underbrace{r_0 (q_1)}_c d^{-\frac{\log \sigma}{\log \lambda}} = c d^{-\frac{\log \sigma}{\log \lambda}}. \end{aligned}$$

Como  $\sigma$  é dominante,  $d^{-\frac{\log \sigma}{\log \lambda}}$  é menor que  $d$ . Assim, se  $x$  está numa vizinhança pequena de  $r$ , assumimos que  $\varphi_\mu^{-n}(x)$  está próximo de  $q$ .

Seja  $m_0$  tal que  $\varphi^{m_0}(r) = q$ . Então  $\varphi^{-n-m_0}(x) \in U_r$ , e a distância de  $\varphi^{-n-m_0}(x)$  a  $W^s(p_\mu)$  é da ordem de  $d^{-\frac{\log \sigma}{\log \lambda}}$ . Realmente, se  $\varphi_\mu^{-n}(x) = (\epsilon, q_1)$ ,

temos

$$\varphi_\mu^{-m_0}(\epsilon, q_1) = (\epsilon\sigma^{-m_0}, q_1\lambda_0^{-n}) = (r', d')$$

onde  $r' \approx r_0 \Rightarrow$

$$r' = \epsilon\sigma^{-m_0} = \underbrace{\sigma^{-m_0} c}_{\delta} d^{-\frac{\log \sigma}{\log \lambda}} = \delta d^{-\frac{\log \sigma}{\log \lambda}},$$

onde  $\delta$  independe de  $d$ .

Se  $d$  for suficientemente pequeno (isso pode ser garantido para qualquer  $x \in U_r$  se escolhermos  $U_r$  bem pequeno),  $\delta d^{\log \sigma / \log \lambda} < \frac{1}{2}d$ .

Então, se um ponto  $x \in U_r$  tem um iterado negativo  $x'$  em  $U_r$ ,

$$\rho(x', W^s(p_\mu)) < \frac{1}{2}\rho(x, W_{loc}^u(p_\mu))$$

onde  $\rho$  é a função distância correspondente às coordenadas linearizadas.

*Obs: O ponto  $x'$  pode ser representado por duas coordenadas linearizadas, mas a distância de  $x'$  a  $W^s(p_\mu)$  difere, com relação às duas coordenadas, somente por um fator limitado, já que o número de iterados para expandir as coordenadas sobre  $W^s(p_\mu)$  até  $r$  é constante.*

Por construção, a distância máxima de  $W^s(p_\mu)$  acima de  $W^u(p_\mu)$  é  $\mu$ . Logo,

$$\rho(x', W^u(p_\mu)) < \mu + \frac{1}{2}\rho(x, W^u(p_\mu))$$

Assim, após retornar a  $U_r$  um número suficientemente grande de vezes, estaremos a uma distância menor que  $2\mu$  de  $W_{loc}^u(p_\mu)$ .

Veja que provamos o seguinte resultado:

**Lema 1.** *Para  $U_r$  e  $\mu$  suficientemente pequenos, existe  $n(\mu)$  tal que, se  $x \in U_r$  e  $n' > n(\mu)$  são tais que  $\varphi_\mu^{-n'}(x) \in U_r$ , então  $\varphi_\mu^{-n'}(x)$  está numa  $2\mu$ -vizinhança acima de  $W_{loc}^u(p_\mu)$ .*

Suponha que  $U_r$  e  $\mu$  sejam tão pequenos quanto no lema 1, e considere  $x \in U_r$  numa altura acima de  $W_{loc}^u(p_\mu)$  maior que  $2\mu$ . Seja  $V_x$  uma vizinhança de  $x$ , contida em  $U_r$ , de altura maior que  $2\mu$ . Então sabemos que, para  $n'$  grande o suficiente e  $V_x$  pequeno o suficiente, os pontos de  $\varphi_\mu^{-n'}(V_x)$  têm altura

máxima menor que  $2\mu$ . Logo,  $\varphi_\mu^{-n'}(V_x) \cap V_x = \emptyset$ ,  $\forall n' > n(\mu) \Rightarrow x \notin \Omega(\varphi_\mu)$ . Isso prova a proposição.  $\square$

## 3.2 Conjuntos Escalonados

Dizemos que  $A \in R$  é um conjunto escalonado com fator de escalonamento  $\lambda \in (0, 1)$  se  $A$  é invariante sobre multiplicação escalar por  $\lambda$ . Para um conjunto desse tipo, definimos a capacidade limite  $d(A)$  como

$$d(A) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log n(A^r, \epsilon)}{-\log \epsilon},$$

onde  $r > 0$  e  $n(A^r, \epsilon)$  é o número mínimo de intervalos de tamanho  $\epsilon$  necessários para cobrir  $A^r = A \cap [-r, r]$ . Como  $A$  é escalonado, a definição de  $d(A)$  não depende de  $r$ . De fato,

$$\begin{aligned} \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log n(A^{\lambda r}, \epsilon)}{-\log \epsilon} &= \limsup_{\lambda \epsilon \rightarrow 0} \frac{\log n(A^{\lambda r}, \lambda \epsilon)}{-\log \lambda \epsilon} = \\ &= \limsup_{\lambda \epsilon \rightarrow 0} \frac{\log n(A^{\lambda r}, \lambda \epsilon)}{-(\log \lambda + \log \epsilon)} = \limsup_{\lambda \epsilon \rightarrow 0} \frac{\log n(A^{\lambda r}, \lambda \epsilon)}{-\log \epsilon}. \end{aligned}$$

Mas, pelo escalonamento de  $A$ ,  $n(A^{\lambda r}, \lambda \epsilon) = n(A^r, \epsilon) \Rightarrow$

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log n(A^{\lambda r}, \lambda \epsilon)}{-\log \epsilon} = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log n(A^r, \epsilon)}{-\log \epsilon}.$$

**Lema 2.** *Seja  $A$  um conjunto escalonado. Se  $d'(A) > d(A)$ , então  $A$  pode ser coberto por  $a(\epsilon/r)^{-d'(A)}$  intervalos de tamanho  $\epsilon$  sempre que  $\epsilon < r$ , para algum  $a$  constante.*

*Demonstração.* Sendo  $d'(A) > d(A) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log n(A^r, \epsilon)}{-\log \epsilon}$ , existe  $\epsilon(r)$  tal que

$$-(\log \epsilon)d'(A) > \log n(A^r, \epsilon), \forall \epsilon < \epsilon(r) \Rightarrow$$

$$\epsilon^{-d'(A)} > n(A^r, \epsilon)$$

Para os valores de  $\epsilon$  entre  $\epsilon(r)$  e  $r$ ,

$$n(A^r, \epsilon) < n(A^r, \epsilon(r)) < a(r)r^{-d'(A)} < a(r)\epsilon^{-d'(A)}$$

Fazendo  $a(r) > 1$ , temos em todo caso que  $A^r$  pode ser coberto com  $a(r)\epsilon^{-d'(A)}$  intervalos de tamanho  $\epsilon$ ,  $\forall \epsilon < r$ .

Como  $A$  é escalonado,  $A^{\lambda r}$  pode ser coberto com  $a(r)\epsilon^{-d'(A)}$  intervalos de tamanho  $\lambda\epsilon$ ,  $\forall \epsilon < r$ . Por outro lado, ele pode ser coberto por  $a(r\lambda)(\lambda\epsilon)^{-d'(A)}$  intervalos desse tipo. Assumimos então que

$$a(r\lambda) = a(r)\lambda^{d'(A)}$$

Escolhendo  $a(1)$  grande o suficiente, podemos fazer  $a(r') = a(1)$ ,  $\forall r' \in (\lambda, 1)$ . E assim temos:

$$a(r) = a(1)(\lambda^{\log_\lambda r})^{d'(A)} = ar^{d'(A)} \Rightarrow$$

$$n(A^r, \epsilon) < a(\epsilon/r)^{-d'(A)},$$

concluimos dessa forma o lema. □

Usaremos a partir de agora a seguinte notação:  $A_\epsilon$  é uma  $\epsilon$ -vizinhança de  $A$  e  $A_\epsilon^r = A_\epsilon \cap [-r, r]$ .

**Proposição 2.** *Sejam  $A$  e  $B \subset \mathfrak{R}$  conjuntos escalonados de  $\mathfrak{R}$  tais que  $d(A) + d(B) < 1$ . Para  $r, \epsilon > 0$ , faça*

$$M_{r,\epsilon} = \{t \in [0, r] \mid A_{\epsilon r} \cap (B_{\epsilon r} + t) \cap [-Kr, Kr] \neq \emptyset\},$$

onde  $K$  é uma constante fixa. Então, para cada  $\delta > 0$ , existe um  $\epsilon(\delta) > 0$  tal que

$$\frac{m(M_{r,\epsilon})}{r} < \delta, \forall \epsilon < \epsilon(\delta).$$

( $m$  denota a medida de Lebesgue).



*Demonstração.* Sejam  $d'(A)$  e  $d'(B)$  tais que  $d'(A) > d(A)$  e  $d'(B) > d(B)$ , mas  $d'(A) + d'(B) < 1$ .

Pelo lema anterior,  $A^{(K+1)r}$  pode ser coberto por  $a \left( \frac{\epsilon r}{(K+1)r} \right)^{-d'(A)}$  intervalos de tamanho  $\epsilon r$ . Então existe uma família  $I_A$  de  $a \left( \frac{\epsilon r}{(K+1)r} \right)^{-d'(A)}$  intervalos de tamanho  $3\epsilon r$  cobrindo  $A_{\epsilon r}^{(K+1)r}$ . Da mesma forma,  $B_{\epsilon r}^{(K+1)r}$  pode ser coberto por uma família  $I_B$  de  $b \left( \frac{\epsilon r}{(K+1)r} \right)^{-d'(B)}$  intervalos de tamanho  $3\epsilon r$ .

Considere  $t \in M_{r,\epsilon}$ . Podemos escolher intervalos  $V_A \in I_A$  e  $V_B \in I_B$  tais que  $V_A \cap (V_B + t) \neq \emptyset$ . Além disso, para cada  $V_A \in I_A$  e  $V_B \in I_B$ , existe um intervalo de medida  $6\epsilon r$  de valores possíveis de  $t$  tais que  $V_A \cap (V_B + t) \neq \emptyset$ . Logo  $M_{r,\epsilon}$  pode ser coberto por  $ab \left( \frac{\epsilon r}{(K+1)r} \right)^{-d'(A)-d'(B)}$  intervalos de medida  $6\epsilon r \Rightarrow$

$$m(M_{r,\epsilon}) \leq 6rab \left( \frac{1}{(K+1)} \right)^{-d'(A)-d'(B)} \epsilon^{1-d'(A)-d'(B)}$$

Como  $d'(A) + d'(B) < 1$ ,  $\frac{1}{r}m(M_{r,\epsilon}) \rightarrow 0$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , o que acaba a prova da proposição. □

A proposição acima pode ser generalizada para famílias parametrizadas contínuas de conjuntos escalonados. Dizemos que uma família de conjuntos escalonados  $A(\mu) \subset R$ ,  $\mu \in R$ , é contínua se:

- Para cada  $r > 0$ ,  $\mu \mapsto A(\mu) \cap [-r, r]$  é contínuo com relação à métrica de Hausdorff para subconjuntos compactos de  $\mathfrak{R}$ .
- O fator de escalonamento  $\lambda(\mu)$  de  $A(\mu)$  é uma função Lipschitz de  $\mu$ .

Por [1], vale o seguinte resultado:

**Teorema 2.** *Sejam  $A(\mu)$  e  $B(\mu)$  duas famílias de conjuntos escalonados, parametrizadas por  $\mu$ , de forma que  $d(A) + d(B) < 1$ .  $\Psi_\mu, \Phi_\mu : R \rightarrow R$  são famílias de difeomorfismos  $C^1$ , contínuas e também parametrizadas por  $\mu$ , tais que  $\Psi_\mu(0) = 0$  e  $\Phi_\mu(0) = \mu$ . Para  $K > 0$  uma constante, faça  $M_{r,\epsilon} = \{\mu \mid \text{distância entre } \Psi_\mu(A_\mu) \cap [-Kr, Kr] \text{ e } \Phi_\mu(B_\mu) \cap [-Kr, Kr] \text{ é menor que } \epsilon\}$*

$\epsilon.r\}$ . Então, para cada  $\delta > 0$ , existe um  $\epsilon(\delta)$  tal que, para  $r$  suficientemente pequeno,

$$\frac{m(M_{r,\epsilon(\delta)})}{r} < \delta,$$

onde  $m$  denota a medida de Lebesgue.

### 3.3 Medida do conjunto de bifurcação

Sejam  $q$  e  $r$  pontos na órbita de tangência  $W^s(p_0) \cap W^u(p_0)$ . Considere continuações  $q_\mu \in W_{loc}^s$  e  $r_\mu \in W_{loc}^u$  tais que  $q_0 = q$  e  $p_0 = p$ . Chame de  $\mathcal{O}_\mu^s$  a  $\varphi_\mu$ -órbita de  $q_\mu$  e  $\mathcal{O}_\mu^u$  a  $\varphi_\mu$ -órbita de  $r_\mu$ . Se  $\Lambda_{i_0}(\mu)$  é o conjunto básico de  $\Omega(\varphi(\mu))$  contendo  $p$ , definimos:

$$A(\mu) = (W^s(p_\mu) \cap \Lambda_{i_0}(\mu)) \cup \mathcal{O}_\mu^s$$

$$B(\mu) = (W^u(p_\mu) \cap \Lambda_{i_0}(\mu)) \cup \mathcal{O}_\mu^u$$

Considerando uma linearização dos sistema, é fácil ver que  $A(\mu)$  e  $B(\mu)$  são conjuntos escalonados, com fatores de escalonamento  $|\lambda_\mu|$  e  $|\sigma_\mu|^{-1}$ : se  $X = (x, 0) \in A(\mu) = (W^s(p_\mu) \cap \Lambda_{i_0}(\mu)) \cup \mathcal{O}_\mu^s$ , como  $\Lambda_{i_0}(\mu)$ ,  $W^s(p_\mu)$  e  $\mathcal{O}_\mu^s$  são invariantes por  $\varphi_\mu$ ,  $\varphi_\mu(X) = (\lambda_\mu x, 0) = \lambda_\mu X \in A(\mu)$ . Da mesma forma, para  $Y \in B(\mu)$ ,  $\varphi_\mu^{-1}(Y) = \sigma_\mu^{-1}Y \in B(\mu)$ .

Lembre que definimos a folhas de  $\mathcal{F}_\mu^s$  e  $\mathcal{F}_\mu^u$  nos pontos de  $\Omega(\varphi_\mu)$  como variedades instável e estável locais desses pontos. Por [4], essas folheações podem ser estendidas para toda uma vizinhança do conjunto não-errante. Tais folhas são  $C^2$ , mas as folheações são  $C^1$  no sentido que as direções das tangentes variam de forma  $C^1$  com relação a  $x \in \Omega(\varphi_\mu)$  e com relação ao parâmetro  $\mu$ . Como  $\Lambda_{i_0}(0)$  contém o ponto fixo,  $\mathcal{F}_\mu^s$  e  $\mathcal{F}_\mu^u$  cobrem uma vizinhança de  $p_0$ . Através de iterados positivos e negativos de  $\varphi_0$ , podemos estender a folheação ao longo de  $W^s(p_0)$  e  $W^u(p_0)$  até alcançarem uma vizinhança de  $r$  e de  $q$ , incluindo assim a região de tangência em torno desses pontos.

Em pequena vizinhança  $U_r$  de  $r$ , consideramos a curva  $l_\mu$  definida pelos pontos de tangência entre folheações  $\mathcal{F}_\mu^s$  e  $\mathcal{F}_\mu^u$ . Como as folheações são  $C^1$ ,

$l_\mu$  é  $C^1$  e varia de forma  $C^1$  com relação ao parâmetro  $\mu$ . Assumimos uma linearização de  $l_\mu$  sobre  $\mathfrak{R}$  de forma que  $W^u(p_\mu) \cap l_\mu$  representa o ponto 0 e  $W^s(p_\mu) \cap l_\mu$  representa o ponto  $\mu$ . Definimos então as projeções  $\Psi_\mu$  e  $\Phi_\mu$ , ao longo de  $\mathcal{F}_\mu^u$  e  $\mathcal{F}_\mu^s$ , dos pontos de  $U_r$  sobre  $l_\mu$ . Como  $\mathcal{F}_\mu^u$  e  $\mathcal{F}_\mu^s$  são  $C^1$ ,  $\Psi_\mu$  e  $\Phi_\mu$  são  $C^1$ .

Como aplicação imediata do teorema 2, temos então:

**Proposição 3.** *Suponha que as capacidades limites  $d(A(0))$  e  $d(B(0))$  de  $A(0)$  e  $B(0)$  tenham soma menor que 1. Para  $K$  constante e  $\mu_0$  pequeno, seja  $M_{\mu_0, \epsilon}$  o conjunto dos valores de  $\mu \in [0, \mu_0]$  tais que a distância entre  $\Psi_\mu(A(\mu)) \cap [-K \cdot \mu_0, K \cdot \mu_0]$  e  $\Phi_\mu(B(\mu)) \cap [-K \cdot \mu_0, K \cdot \mu_0]$  seja menor que  $\epsilon \cdot \mu_0$ . Então, para cada  $\delta > 0$ , existe  $\epsilon(\delta)$  tal que*

$$\frac{m(M_{\mu_0, \epsilon(\delta)})}{\mu_0} < \delta$$

onde  $m$  denota a medida de Lebesgue.

A proposição acima só leva em consideração distâncias entre folhas passando por pontos dos conjuntos  $A(\mu)$  e  $B(\mu)$ . Queremos estender tal resultado de modo a incluir folhas passando por todo o conjunto não errante em  $U_r$ .

Seja  $F_\mu \subset W^s(p_\mu)$  um domínio fundamental, isto é, um par de intervalos nos dois braços de  $W^s(p_\mu)$  tal que  $\varphi_\mu$  leva uma extremidade do intervalo na outra. Veja que todo ponto de  $W^s(p_\mu)$  tem um iterado de  $\varphi_\mu$  passando por  $F_\mu$ . Considere  $\mu_1 > 0$  e  $U$  uma vizinhança pequena de  $\Lambda_{i_0}(0) \cup \mathcal{O}$ . Se  $\rho$  é a distância com respeito à coordenada em  $W^s(p_\mu)$  que lineariza  $\varphi_\mu$ , faça  $\epsilon$  pequeno suficiente de modo que, sempre que para algum  $x \in F_\mu$ , com  $0 < \mu < \mu_1$ , a folha de  $\mathcal{F}_\mu^u$  por  $x$  contiver um ponto de  $U$ , existe um ponto  $x'$  em  $A(\mu)$  tal que  $\rho(x, x') < \epsilon \rho(p_\mu, x')$ . Esse número  $\epsilon$  existe pois  $\rho(x, x')$  está limitado pelas distâncias de  $A(\mu)$  aos pontos de  $F_\mu$  e  $\rho(p_\mu, x')$  fica limitado pelas extremidades de  $F_\mu$ . O conjunto dos pontos  $x$  acima, que são imagens das projeções de  $U$  sobre  $W^s(p_\mu)$  pelas folhas de  $\mathcal{F}_\mu^u$ , e seus iterados vão determinar uma vizinhança escalonada. Note que essa vizinhança vai cobrir todo o  $A(\mu)$ , já que os iterados do conjunto  $F_\mu$  cobrem toda a variedade estável.

Definimos a  $\epsilon$ -vizinhança escalonada do conjunto escalonado  $A \subset R$  como  ${}_\epsilon A = \{x \in R \mid \exists x' \in A \text{ tal que } |x' - x| < \epsilon|x'|\}$ . É fácil ver que, se  $A$  é escalonado,  ${}_\epsilon A$  também é: se  $|\lambda|$  é o fator de escalonamento de  $A$  e  $x \in {}_\epsilon A$  então  $|\lambda|x \in {}_\epsilon A$ , dado que existe  $x' \in A$  tal que  $|x' - x| < \epsilon|x'| \Rightarrow |\lambda x' - \lambda x| < \epsilon|\lambda x'|$ .

Pelas observações da seção anterior, se  $\mu_1$  for pequeno suficiente, para  $0 < \mu < \mu_1$ ,  $\Omega(\varphi_\mu) \setminus \tilde{\Omega}(\varphi_\mu) \subset U$ . Consideramos  $U_r$  a componente de  $U$  sobre  $r$ . Então, se  $\pi_{s,\mu}$  e  $\pi_{u,\mu}$  são as projeções de  $U_r$  sobre  $W_{loc}^s(p_\mu)$  e  $W_{loc}^u(p_\mu)$  (resp.) ao longo das folhas  $\mathcal{F}_\mu^u$  e  $\mathcal{F}_\mu^s$ , todos os pontos do conjunto não-errante de  $\varphi_\mu$  perto de  $r$  estão em:

$$U_r \cap \pi_{s,\mu}^{-1}({}_\epsilon A_\mu) \cap \pi_{u,\mu}^{-1}({}_\epsilon B_\mu)$$

Mas vimos, anteriormente, que existe número  $K$  tal que todos os pontos não errantes de  $U_r$  estão em uma  $(K.\mu)$ -vizinhança de  $W^u(p_\mu)$  perto de  $r$ ,  $\mu$  pequeno.

Fazemos, então:

$$\begin{aligned} {}_\epsilon \tilde{A}^{K\mu}(\mu') &= l_\mu \cap \pi_{s,\mu}^{-1}({}_\epsilon(A_\mu) \cap [-K\mu, K\mu]) \\ {}_\epsilon \tilde{B}^{K\mu}(\mu') &= l_\mu \cap \pi_{u,\mu}^{-1}({}_\epsilon(B_\mu) \cap [-K\mu, K\mu]) \end{aligned}$$

E definimos:

$$B_{\epsilon,\mu} = \{\mu' \in (0, \mu) \mid \text{distância entre } {}_\epsilon \tilde{A}^{K\mu}(\mu') \text{ e } {}_\epsilon \tilde{B}^{K\mu}(\mu') \text{ é menor que } \epsilon\mu\}.$$

Finalmente, chegamos ao ultimo resultado dessa seção:

**Proposição 4.** *Se as capacidades limites  $d(A(0))$  e  $d(B(0))$  de  $A(0)$  e  $B(0)$  tem soma menor que 1, então existe, para cada  $\delta$ , um  $\epsilon'(\delta) > 0$  tal que*

$$\frac{1}{\mu} m(B_{\mu,\epsilon'(\delta)}) < \delta,$$

onde  $m$  denota a medida de Lebesgue e  $\mu$  é suficientemente pequeno.

*Demonstração.* Usaremos a seguinte notação: se  $\tilde{x}, \tilde{y} \in l_\mu$ ,  $|\tilde{x} - \tilde{y}|_{l_\mu}$  representa a distância entre  $\tilde{x}$  e  $\tilde{y}$  na linearização de  $l_\mu$ . Para  $x_s$  e  $y_s$  em  $W^s(\varphi_\mu)$ ,  $|x_s - y_s|_s$  é a distância, em coordenadas linearizadas, entre  $x_s$  e  $y_s$  em  $W^s(\varphi_\mu)$ , assim

como  $|x_u - y_u|_u$  representa a distância entre pontos em  $W^u(\varphi_\mu)$ .

Como  $\pi_{s,\mu}$  e  $\pi_{u,\mu}$  são  $C^1$ , razões entre distâncias em  $l_\mu$  e as correspondentes distâncias das projeções em  $W_{loc}^s(p_\mu)$  e  $W_{loc}^u(p_\mu)$  são limitadas e distantes de 0. Então existe  $c$  tal que:

$$\forall \tilde{x}, \tilde{y} \in l_\mu, 0 < \frac{1}{c} < \frac{|\tilde{x} - \tilde{y}|_{l_\mu}}{|\pi_{s,\mu}(\tilde{x}) - \pi_{s,\mu}(\tilde{y})|_s}, \frac{|\tilde{x} - \tilde{y}|_{l_\mu}}{|\pi_{u,\mu}(\tilde{x}) - \pi_{u,\mu}(\tilde{y})|_u} < c(*)$$

Para  $\delta > 0$  e  $\epsilon(\delta)$  como na Proposição 2, faça  $\epsilon'(\delta) = \frac{\epsilon(\delta)}{(2Kc+1)}$ .

Seja  $\mu$  tal que a distância entre  ${}_{\epsilon'}\tilde{A}^{K\mu}$  e  ${}_{\epsilon'}\tilde{B}^{K\mu}$  é menor que  $\epsilon'\mu$ . Considere  $\tilde{x} \in {}_{\epsilon'}\tilde{A}^{K\mu}$  e  $\tilde{y} \in {}_{\epsilon'}\tilde{B}^{K\mu}$  satisfazendo  $|\tilde{x} - \tilde{y}|_{l_\mu} < \epsilon'\mu$ . Faça  $x = \pi_{s,\mu}(\tilde{x}) \in {}_{\epsilon'}A(\mu) \cap [-K\mu, K\mu]$  e  $y = \pi_{y,\mu}(\tilde{y}) \in {}_{\epsilon'}B(\mu) \cap [-K\mu, K\mu]$ . Pela definição de  ${}_{\epsilon'}A(\mu)$  e  ${}_{\epsilon'}B(\mu)$ , existem  $x' \in A(\mu)$  e  $y' \in B(\mu)$  tais que  $|x - x'|_s < \epsilon'|x'| < \epsilon'K\mu$  e  $|y - y'|_u < \epsilon'|y'| < \epsilon'K\mu$ . Por (\*),  $|\tilde{x} - \Psi(x')|_u < c\epsilon'K\mu$  e  $|\tilde{y} - \Phi(y')|_u < c\epsilon'K\mu$ . Logo

$$|\Psi(x') - \Phi(y')|_{l_\mu} \leq |\Psi(x') - \tilde{x}|_{l_\mu} + |\tilde{y} - \Phi(y')|_{l_\mu} + |\tilde{x} - \tilde{y}|_{l_\mu} \Rightarrow$$

$$|\Psi(x') - \Phi(y')|_{l_\mu} < c\epsilon'K\mu + c\epsilon'K\mu + \epsilon'\mu = (2Kc + 1)\epsilon'\mu \Rightarrow$$

$$|\Psi(x') - \Phi(y')|_{l_\mu} < \epsilon\mu \Rightarrow \mu \in M_{\mu_0, \epsilon},$$

onde  $M_{\mu_0, \epsilon}$  e  $\mu_0$  são como na proposição 2 e  $\mu \in [0, \mu_0]$ . Logo,

$$B_{\mu_0, \epsilon'} \subset M_{\mu_0, \epsilon} \Rightarrow m(B_{\mu_0, \epsilon'}) \leq m(M_{\mu_0, \epsilon}).$$

Como, pela proposição 2,  $\frac{m(M_{\mu_0, \epsilon(\delta)})}{\mu_0} < \delta$ , concluímos:

$$\frac{m(B_{\mu_0, \epsilon'(\delta)})}{\mu_0} < \delta.$$

□

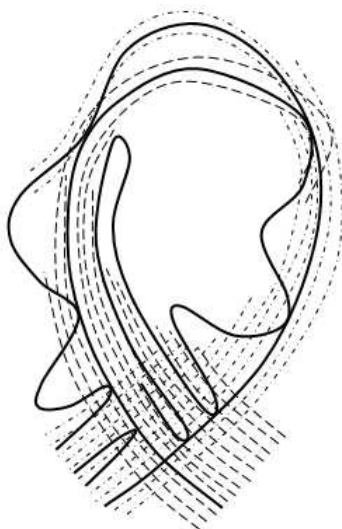
### 3.4 Hiperbolicidade

Os resultados da seção anterior nos deram uma boa estimativa para a medida de  $B_{\mu,\epsilon}$ . Agora vamos verificar que esse conjunto contém todos os valores  $\mu' \in (0, \mu)$  do conjunto de bifurcação. Consideramos o modelo de tangência homoclínica proposto no final do capítulo anterior.

**Proposição 5.** *Para  $\epsilon$  suficientemente pequeno, e  $\mu' \notin B_{\mu,\epsilon}$ , para algum  $0 < \mu' < \mu \leq \mu_1(\epsilon)$  o conjunto não-errante de  $\varphi_{\mu'}$  é persistentemente hiperbólico.*

*Demonstração.* Seja  $U$  uma vizinhança de  $\Lambda_{i_0}(0) \cap \mathcal{O}$ , e  $U_r$  sua componente contendo  $r$ , um ponto qualquer na órbita de tangência. Assumimos que  $\mu$  seja pequeno o suficiente de modo a garantirmos a validade da Proposição 1. Então todos os pontos não errantes de  $U_r$  estão em uma  $(K\mu)$ -vizinhança acima de  $W^u(p_{\mu'})$ .

Chamamos de  $q_1 \in W_{loc}^s(p_0) \cap \mathcal{O}$  e  $q_2 \in W_{loc}^u(p_0) \cap \mathcal{O}$  pontos da órbita de tangência próximos de  $p_0$ , e estendemos  $\mathcal{F}_{\mu'}^s$  e  $\mathcal{F}_{\mu'}^u$  ao longo de  $W^s(p_{\mu'})$  e  $W^u(p_{\mu'})$  de modo que a extensão de  $\mathcal{F}_{\mu'}^u$  contenha  $q_1$  e a extensão de  $\mathcal{F}_{\mu'}^s$  contenha  $q_2$ . Usando a nomenclatura da seção anterior, para  $x \in U_r$ ,  $\pi_{s,\mu'}(x)$  e  $\pi_{u,\mu'}(x)$  são projeções de  $x$  sobre  $W_{loc}^s(p_{\mu'})$  e  $W_{loc}^u(p_{\mu'})$  ao longo de  $\mathcal{F}_{\mu'}^u$  e  $\mathcal{F}_{\mu'}^s$ , respectivamente.



Se  $x \in \Lambda_{i_0}(\mu') \cap U_r$ , sabemos que  $x$  está em uma  $(K\mu)$ -vizinhança acima de  $W^u(p_{\mu'})$ . Além disso, pela construção de  ${}_\epsilon A(\mu')$ ,  $\pi_{s,\mu'}(\Lambda_{i_0}(\mu') \cap U_r) \subset {}_\epsilon A(\mu')$ . Logo,

$$\begin{aligned} \pi_{s,\mu'}(x) &\subset {}_\epsilon A(\mu') \cap [-k\mu, k\mu] \Rightarrow \\ \tilde{x}_s &= l_{\mu'} \cap \pi_{s,\mu'}^{-1}(x) \in {}_\epsilon \tilde{A}^{k\mu}(\mu') \end{aligned}$$

Da mesma forma,

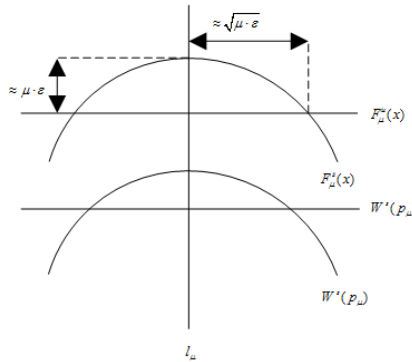
$$\tilde{x}_u = l_{\mu'} \cap \pi_{u,\mu'}^{-1}(x) \in {}_\epsilon \tilde{B}^{k\mu}(\mu')$$

Como  $\mu' \notin B_{\mu,\epsilon}$ , a distância entre  $\tilde{x}_s$  e  $\tilde{x}_u$  em  $l_{\mu'}$  é maior que  $\epsilon\mu$ .

A tangência entre  $W^s(p_{\mu'})$  e  $W^u(p_{\mu'})$  se desdobra de maneira quadrática. Então podemos assumir que, perto de  $x$ , existem coordenadas  $C^2(v, w)$  tais que:

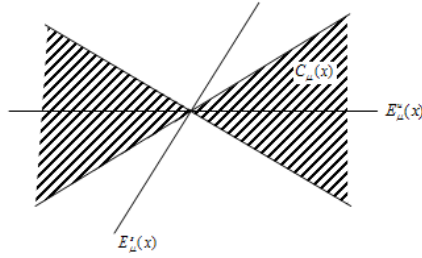
- a folha  $\mathcal{F}_{\mu'}^u(x)$  é uma linha horizontal, i.e, linha da forma  $\{w = \text{constante}\}$ .
- $l_{\mu'} = \{v = 0\}$ .
- a coordenada  $w$  quando  $v = 0$  representa a distância entre  $\mathcal{F}_{\mu'}^u(x) \cap l_{\mu'}$  e  $\mathcal{F}_{\mu'}^s(x) \cap l_{\mu'}$ .

A figura a seguir ilustra a situação:



Nesse novo sistema de coordenadas,  $\mathcal{F}_{\mu'}^u(x)$  é uma linha horizontal e  $\mathcal{F}_{\mu'}^s(x)$  é o gráfico da função  $w = W(v)$ , com  $W'(0) = 0$ . Assumindo que  $W'' > -C$ , para alguma constante  $C > 0$ , a distância horizontal de  $x$  a  $l_{\mu'}$  é pelo menos  $\sqrt{\frac{\epsilon\mu}{C}}$ . Dessa forma, como  $W''$  é limitado, segue que o ângulo entre as folhas  $\mathcal{F}_{\mu'}^u(x)$  e  $\mathcal{F}_{\mu'}^s(x)$  é pelo menos da ordem de  $\sqrt{\epsilon\mu}$ .

Para provarmos hiperbolicidade de  $\varphi'_{\mu'}$ , vamos construir um campo de cones sobre  $\Lambda(\mu') \cap U_r$  com propriedades hiperbólicas. Seja  $x$  ponto qualquer em  $\Lambda_{i_0}(\mu') \cap U_r$ . Considere a decomposição do espaço tangente  $T_x M = E_{\mu'}^u(x) \oplus E_{\mu'}^s(x)$ , onde  $E_{\mu'}^u(x) = T_x(\mathcal{F}_{\mu'}^u)$  e  $E_{\mu'}^s(x) = T_x(\mathcal{F}_{\mu'}^s)$ . Sabemos que o ângulo entre  $E_{\mu'}^u(x)$  e  $E_{\mu'}^s(x)$  é pelo menos da ordem de  $\sqrt{\epsilon\mu}$ . Definimos o cone  $C_{\mu'}(x) \subset T_x M$  com abertura sobre  $E_{\mu'}^u(x)$  igual a metade desse ângulo.



Considere uma vizinhança  $V_p$  de  $p_{\mu'}$  na qual  $\mathcal{F}_{\mu'}^s$  e  $\mathcal{F}_{\mu'}^u$  estão definidas. Assumimos que  $q_1, q_2 \in V_p$ .

Para  $x \in \Lambda_{i_0}(\mu') \cap U_r$ , seja  $n(x)$  o menor inteiro positivo para o qual  $\varphi_{\mu'}^{n(x)}(x) \in U_r$ . Classificaremos os índices  $0 \leq i \leq n(x)$  nos seguintes grupos:

- a)  $0 \leq i < i_{q_1}$ , onde  $i_{q_1}$  é tal que  $\varphi_{\mu'}^{i_{q_1}}(r) = q_1$ .
- b)  $i_{q_1} \leq i \leq n(x) - i_{q_2}$ , onde  $i_{q_2}$  é tal que  $\varphi_{\mu'}^{-i_{q_2}}(r) = q_2$ .
- c)  $n(x) - i_{q_2} < i \leq n(x)$ .

Estamos interessados em estudar o que acontece com  $C_{\mu'}(x)$  quando ele é modificado por  $d\varphi_{\mu'}$  ao longo da órbita de  $x$  até o retorno a  $U_r$ . Para cada



índice  $i$ ,  $0 \leq i \leq n(x)$ , vamos construir um cone  $C_{\mu'}^i(x) \subset T_{\varphi^i(x)}M$  tal que  $(d\varphi_{\mu'})_{\varphi_{\mu'}^{i-1}(x)}(C_{\mu'}^{i-1}(x)) \subset C_{\mu'}^i(x)$ .

Analisaremos os trechos da órbita de  $x$ :

a)  $0 \leq i < i_{q_1}$  :

Para  $i = 0$ , definimos  $C_{\mu'}^i(x) = C_{\mu'}(x) = \{|\eta| \leq d(\epsilon.\mu)^{\frac{1}{2}}|\xi|\}$ .

Ao longo de  $0 < i < i_{q_1}$ , fazemos:

$$C_{\mu'}^i(x) = (d\varphi_{\mu'})_{\varphi_{\mu'}^{i-1}(x)}(C_{\mu'}^{i-1}(x))$$

Considerando uma decomposição de  $T_{\varphi_{\mu'}^i(x)}M = E^s(x) \oplus E^u(x)$ ,  $d\varphi_{\mu'}$  deve preservar as direções de  $E^s$  e  $E^u$  (no sentido que  $(d\varphi_{\mu'})_{\varphi_{\mu'}^{i-1}(x)}(E^j(\varphi_{\mu'}^{i-1}(x))) = E^j(\varphi_{\mu'}^i(x))$ ,  $j = s, u$ ), já que esses são os subespaços tangente às folheações.

Como  $C_{\mu'}^i(x) = d\varphi_{\mu'}^i(C_{\mu'}^0(x))$ ,  $0 \leq i, i_{q_1}$ , o ângulo de abertura de  $C_{\mu'}^i(x)$  se altera com relação à abertura de  $C_{\mu'}^0(x)$  no máximo por um fator constante  $\gamma$  (que independe de  $\mu'$ ). Logo,

$$C_{\mu'}^{i_{q_1}}(x) \subset \{|\eta_i| \leq d_{q_1}(\epsilon.\mu)^{\frac{1}{2}}|\xi_i|\},$$

onde  $d_{q_1} = \gamma.d$  é constante.

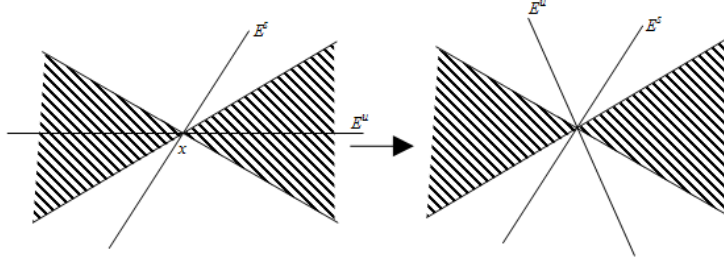
b)  $i_{q_1} \leq i \leq n(x) - i_{q_2}$ :

Como  $q_1$  é um ponto de  $W^s(p_{\mu'})$  próximo de  $p_{\mu'}$ , a folheação instável cobre uma vizinhança de  $q_1$  duas vezes: primeiro quando  $\mathcal{F}_{\mu'}^u$  é construída em uma vizinhança de  $p_{\mu'}$ , depois quando a folheação é estendida até  $q_1$ .

Na definição dos cones  $C^0, \dots, C_{\mu'}^{i_{q_1}-1}(x)$  consideramos suas aberturas ao redor do eixo  $E^u$  tangente a  $\mathcal{F}^u$ , a folheação global que foi estendida de uma vizinhança de  $p_{\mu'}$ . A partir do índice  $i_{q_1}$ , vamos trabalhar com uma decomposição de  $T_{\varphi_{\mu'}^i(x)}M$  em um sistema de eixos tangentes às folheações locais.

$$T_{\varphi_{\mu'}^{i_{q_1}}(x)}M = E_{\mu'}^s(\mathcal{F}_{loc}^s(x)) \oplus E_{\mu'}^u(\mathcal{F}_{loc}^u(x))(*)$$

Esse novo sistema de eixos muda a direção de  $E^u$ , mas a direção de  $E^s$  se conserva. Então o cone  $(d\varphi_{\mu'})_{\varphi_{\mu'}^{i-1}(x)}(C^{i-1}(x))$  fica representado em  $T_{\varphi_{\mu'}^{i_{q_1}}(x)}M$  semelhante à figura:



Definimos então:

$$C_{\mu'}^{i_{q_1}}(x) = \{|\eta_i| \leq D(\epsilon\mu)^{-\frac{1}{2}}|\xi_i|\},$$

onde  $D$  é constante e  $|\eta_{i_{q_1}}|$  e  $|\xi_{i_{q_1}}|$  são coordenadas com relação a decomposição (\*).

Como o ângulo de abertura de  $(d\varphi_{\mu'})_{\varphi_{\mu'}^{i-1}(x)}(C^{i-1}(x))$  é da ordem de  $(\epsilon\mu)^{\frac{1}{2}}$ , se  $\mu'$  for pequeno o suficiente (digamos,  $\mu'$  menor que algum  $\mu(\epsilon)$ ),

$$(d\varphi_{\mu'})_{\varphi_{\mu'}^{i-1}(x)}(C^{i-1}(x)) \subset C^{i_{q_1}}(x)$$

Para os índices  $i_{q_1} \leq i \leq n(x) - i_{q_2}$ , estaremos dentro de  $V_p$ , uma região cuja dinâmica de  $\varphi'_\mu$  tem um comportamento hiperbólico dominado pelos autovalores de  $d\varphi_{\mu'}(p_0)$ . Então vamos assumir um sistema linearizado nesses índices.

Afirmção: o número de iterados de  $x$  que continuam dentro da região hiperbólica é pelo menos da ordem de  $\frac{\log \mu}{\log |\lambda|}$ .

Prova: Como  $\varphi_{\mu'}^{n(x)} \in U_r$ , sua altura com relação a  $W_{\mu'}^u(p_{\mu'})$  é pelo menos da ordem de  $K\mu$ . Sendo  $i_{q_2}$  constante (e não dependente de  $\mu'$ ),  $\varphi_{\mu'}^{n(x)-i_{q_2}}$  também deve estar em uma altura da ordem de  $K\mu$ . Se  $\varphi_{\mu'}^{i_{q_1}} = (\epsilon_1, q'_1)$  e  $\varphi_{\mu'}^{i_{q_2}} = (q'_2, \epsilon_2)$  são as coordenadas no sistema linearizado, então:

$$\varphi_{\mu'}^{n(x)-i_{q_1}-i_{q_2}}(\epsilon_1, q'_1) = (q'_2, \epsilon_2) \Rightarrow$$

$$\lambda^{n(x)-i_{q_1}-i_{q_2}} \cdot q'_1 = \epsilon_2.$$

Para alguma constante  $K_2$ ,  $\epsilon_2 < K_2\mu$ . Então,

$$\lambda^{n(x)-i_{q_1}-i_{q_2}} q'_1 < K_2\mu \Rightarrow \lambda^{n(x)-i_{q_1}-i_{q_2}} < (q'_1)^{-1} K_2\mu \Rightarrow$$

$$n(x) - i_{q_1} - i_{q_2} = \log_{|\lambda|} (q'_1)^{-1} K_2\mu \Rightarrow$$

$$n(x) - i_{q_1} - i_{q_2} = \frac{\log \mu}{\log |\lambda|} + c,$$

$c$  constante. O que acaba a prova da afirmação.

Dentro da região hiperbólica, um cone de abertura  $\alpha$  é levado por  $d\varphi$  em um cone de abertura  $|\lambda/\sigma|\alpha$ .

Definindo, para  $i_{q_1} < i \leq n(x) - i_{q_2}$ ,

$$C_{\mu'}^{i_{q_1}+k}(x) = d\varphi_{\mu'}^k(C_{\mu'}^{i_{q_1}}(x))$$

e assumindo que  $n(x) - i_{q_2} - i_{q_1} \approx \frac{\log \mu}{\log |\lambda|}$ ,

$$C_{\mu'}^{n(x)-i_{q_2}}(x) = \{|\eta_{n(x)-i_{q_2}}| \leq \zeta |\xi_{n(x)-i_{q_2}}|\},$$

onde

$$\zeta \leq D\mu^{-\frac{1}{2}}(|\lambda\sigma^{-1}|)^{\frac{\log \mu}{\log \lambda}} \leq D\mu^{-\frac{1}{2}}\mu^{\frac{\log \lambda + \log \sigma^{-1}}{\log \lambda}}$$

Como  $\frac{\log \lambda + \log \sigma^{-1}}{\log \lambda} > 1$ ,

$$C_{\mu'}^{n(x)-i_{q_2}}(x) \subset \{|\eta_{n(x)-i_{q_2}}| \leq D\mu^{\frac{1}{2}+\epsilon'}|\xi_{n(x)-i_{q_2}}|\},$$

para algum  $\epsilon' > 0$ .

c)  $n(x) - i_{q_2} < i \leq n(x)$  :

Assim como aconteceu no ponto  $\varphi_{\mu'}^{i_{q_1}}(x)$ , no qual a folheação instável passava duplamente, em  $\varphi_{\mu'}^{n(x)-i_{q_2}}(x)$  a folheação estável é definida duas vezes: primeiro na folheação local e depois na sua extensão global.

Como  $\varphi_{\mu'}^{n(x)}(x) \in U_r$ , o ângulo de abertura de  $C_{\mu'}(\varphi_{\mu'}^{n(x)}(x))$  ao redor do eixo  $E^u$  tangente à  $\mathcal{F}^u$  global é da ordem de  $(\epsilon\mu)^{\frac{1}{2}}$ . Sendo  $i_{q_2}$  constante,  $(d\varphi_{\mu'}^{-i_{q_2}})_{\varphi^{n(x)}}(C_{\mu'}(\varphi_{\mu'}^{n(x)}(x)))$  ainda deve ter um ângulo de abertura da ordem de  $(\epsilon\mu)^{\frac{1}{2}}$ .

Em  $\varphi_{\mu'}^{n(x)-i_{q_2}}$  a folheação global coincide com a local. Então, o cone  $(d\varphi_{\mu'}^{-i_{q_2}})_{\varphi^{n(x)}}(C_{\mu'}(\varphi_{\mu'}^{n(x)}(x)))$  é da seguinte forma:

$$(d\varphi_{\mu'}^{-i_{q_2}})_{\varphi^{n(x)}}(C_{\mu'}(\varphi_{\mu'}^{n(x)}(x))) = \{|\eta_{n(x)-i_{q_2}}| \leq \tilde{D}(\epsilon\mu)^{\frac{1}{2}}|\xi_{n(x)-i_{q_2}}|\}$$

Fazendo  $\mu$  pequeno suficiente,

$$C_{\mu'}^{n(x)-i_{q_2}} \subset (d\varphi_{\mu'}^{-i_{q_2}})_{\varphi^{n(x)}}(C_{\mu'}(\varphi_{\mu'}^{n(x)}(x)))$$

Finalmente definimos o restante dos cones:

$$C_{\mu'}^{n(x)-i_{q_2}-k} = (d\varphi_{\mu'}^{-i_{q_2}})_{\varphi^{n(x)-i_{q_2}}}C_{\mu'}^{n(x)-i_{q_2}(x)}, \forall 0 \leq k \leq i_{q_2}.$$

Com a construção descrita acima, se  $\varphi_{\mu'}^{n(x)}(x)$  é o primeiro retorno a  $U_r$  de um ponto  $x \in U_r$ , então:

$$(d\varphi_{\mu'}^{n(x)})_x C_{\mu'}(x) \subset C_{\mu'}(\varphi_{\mu'}^{n(x)}(x))(*)$$

Mesmo com a diminuição de  $\mu'$ , e a conseqüente diminuição do ângulo de abertura de  $C_{\mu'}(\varphi_{\mu'}^{n(x)}(x))$ , o aumento do tempo em que a órbita de  $x$  permanece na região hiperbólica garante (\*).

Além disso, fica claro que  $(d\varphi_{\mu'}^{n(x)})_x$  expande vetores em  $C_{\mu'}(\varphi_{\mu'}^{n(x)}(x))$ , uma vez que, dentro da região hiperbólica, vetores perto de  $E_u$  se expandem.

A existência de um campo de cones em  $U_r$  com as propriedades descritas acima, nos permite construir o eixo instável de uma decomposição hiperbólica para  $T_x M$ ,  $x \in U_r$  (ver [7]).

A construção do eixo estável é análoga: basta considerarmos os cones definidos ao redor de  $E^s$ , em vez de  $E^u$ , e usarmos o difeomorfismo  $\varphi_{\mu'}^{-1}$  em vez de  $\varphi_{\mu'}$ . Isso conclui a prova da hiperbolicidade do conjunto não-errante.  $\square$

### 3.5 Teorema Final

Como resultado direto das proposições 4 e 5, chegamos ao Teorema final dessa dissertação:

**Teorema.** Seja  $\varphi_\mu$ ,  $\mu \in \mathfrak{R}$ , uma família de difeomorfismos de  $M$  com  $\Omega$ -explosão em  $\mu = 0$ . Suponha que  $d^s(\Lambda) + d^u(\Lambda) < 1$ , onde  $\Lambda$  é o conjunto básico do conjunto  $\varphi_0$  associado à tangência homoclínica. Então,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{m(B \cap [0, \delta])}{\delta} = 0,$$

onde  $m$  denota a medida de Lebesgue e  $B$  é o conjunto dos valores de  $\mu$  para os quais  $\varphi_\mu$  não é persistentemente hiperbólico.



# Referências Bibliográficas

- [1] J. Palis, F. Takens. Homoclinic & sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations. Cambridge Univ. Press, 1993.
- [2] M. Shub, Stabilité Globale des Systèmes dynamiques. Astérisque **56** (1978). 1-211.
- [3] J. Palis, A note on  $\Omega$ -stability, em *Global Analysis*, Proc. Symp. Pure Math. vol 14, A.M.S, 1970, Providence, Rhode Island.
- [4] M. Hirsch and C Pugh Stable manifolds and hiperbolic sets, em *Global Analysis*, Proc. Symp. Pure Math., vol. 14, A.M.S., 1970, Providence, Rhode Island.
- [5] S. Smale, The  $\Omega$ -stability theorem, em *Global Analysis* Proc. Symp. Pure Math., vol. 14, A.M.S., 1970, Providence, Rhode Island.
- [6] S. Newhouse e J. Palis, Hiperbolic nonwondering sets on two-dimensional manifolds, *Dynamical Systems*, Acad. Press, New York, 1973.
- [7] Yoccoz J.-C., Introduction to Hyperbolic Dynamics, em “Real and Complex Dynamical Systems” B. Branner and P. Hjorth eds. NATO ASI Series C464, Kluwer, Dordrecht, 1995.
- [8] J. Palis, F. Takens - Hyperbolicity and creation of homoclinic orbits, *Annals of Math.* **125** (1987), 337-374.