

Dissertação para obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo
**INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E
APLICADA**

VISUALIZAÇÃO ROBUSTA DE ATRADORES ESTRANHOS

por
AFONSO PAIVA NETO

Orientador
LUIZ HENRIQUE DE FIGUEIREDO

30 de Março de 2004

Aos meus pais.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Sistemas Dinâmicos Discretos	4
2.1	Um Modelo de Crescimento Populacional	7
2.2	Atratores	12
2.3	Atratores Estranhos	14
3	Métodos para Visualização de Atratores Estranhos	17
3.1	Ferramentas Intervalares	19
3.2	Representação por Amostragem	20
3.3	Representação Intervalar via Cell-Mapping	22
3.4	Representação por Amostragem via Cell-Mapping	24
3.5	Busca de Componentes Fortemente Conexas em Grafos	26
3.5.1	Algoritmo de Tarjan	27
4	Exemplos	30
5	Conclusão	40
	Bibliografia	41

Capítulo 1

Introdução

Junto com o surgimento dos computadores modernos surge também a necessidade de realizar simulações computacionais que descrevem movimento de forma mais precisa. Métodos intervalares fornecem uma ferramenta bastante útil e poderosa para o estudo de sistemas dinâmicos discretos. Talvez toda a teoria do caos em sistemas dinâmicos provavelmente poderia não ter sido inventada sem a possibilidade de explorar órbitas através de soluções numéricas robustas. Métodos intervalares também são utilizados para calcular pontos periódicos em sistemas dinâmicos discretos [3, 4], ou para provar a sua não-existência.

Neste trabalho vamos abordar métodos para a visualização de fractais conhecidos como *atratores estranhos* que surgem quando estudamos sistemas dinâmicos caóticos. O primeiro desses métodos é o método clássico por amostragem pontual que utiliza aritmética de ponto flutuante no cálculo do atrator estranho. Devido aos erros de arredondamento, o método por amostragem não fornece uma representação exata e sim uma aproximação da solução exata. A falta de precisão da aritmética de ponto flutuante em simulações é estudada por M. Pichat e J. Vignes [22]; eles calcularam figuras do conjunto invariante por rotações de Hénon com o método de amostragem pontual: o resultado era figuras que dependiam do modo usado de erro de arredondamento de ponto flutuante. Eles utilizaram aritmética estocástica para eliminar, ou pelo menos diminuir, o ruído causado pela aritmética de ponto flutuante (respeitando as normas de aritmética de ponto flutuante da IEEE).

Apresentaremos outro método por amostragem, mas dessa vez utilizando *cell-mapping* [7, 8]. Métodos via *cell-mapping* são baseados na subdivisão

adaptativa, ou decomposição celular, da caixa envolvente do atrator estranho. O objetivo principal desses métodos é gerar um conjunto mínimo de células (ou caixas) obtidas na decomposição celular da caixa envolvente do atrator estranho de forma que os pontos do atrator estejam contidos no interior desse conjunto (Figura 1.1).

Ao observar a necessidade de gerar resultados mais rigorosos e confiáveis, isto é, contornar o problema de precisão da aritmética de ponto flutuante, surgiu o método intervalar via cell-mapping no qual utilizamos a aritmética intervalar [11].

Os demais capítulos deste trabalho estão divididos da seguinte forma:

- Capítulo 2: Nesse capítulo apresentaremos uma abordagem de sistema dinâmico discretos e de algumas definições matemáticas tais como a de atratores.
- Capítulo 3: Vamos falar dos métodos de visualização de atratores estranhos citados rapidamente nessa introdução juntamente com algumas ferramentas necessárias na visualização tais como métodos intervalares e tópicos de teoria dos grafos.
- Capítulo 4: Aqui vamos comparar os métodos de visualização através de exemplos.
- Capítulo 5: E finalmente a conclusão desse trabalho.

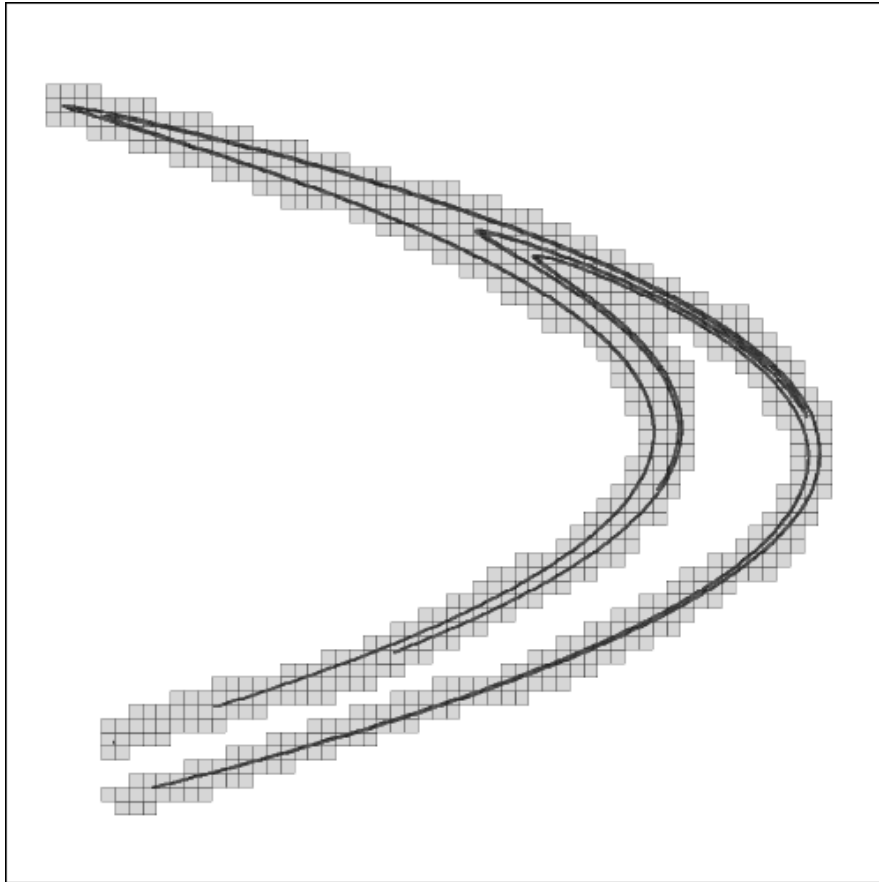


Figura 1.1: Cobertura do atrator estranho do mapa de Hénon utilizando o método intervalar, em uma janela de tamanho $[-1.5, 1.5] \times [-0.5, 0.5]$.

Capítulo 2

Sistemas Dinâmicos Discretos

Um *sistema dinâmico* é um sistema cujo estado muda com o tempo (t). Dois tipos principais de sistemas dinâmicos são encontrados em aplicações: aqueles nos quais a variável tempo é contínua ($t \in \mathbb{R}$) e aqueles nos quais a variável tempo é discreta ($t \in \mathbb{N}$).

Quando o tempo é contínuo, o sistema dinâmico é descrito por uma equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(t, x). \quad (2.1)$$

Um *sistema dinâmico discreto* pode ser representado como a iteração de uma função, isto é

$$x_{t+1} = f(x_t), \quad t \in \mathbb{N}. \quad (2.2)$$

Uma definição menos formal de um sistema dinâmico discreto é dada como sendo a arte de modelar um fenômeno que se altera a cada instante de acordo com um conjunto de regras fixas que determinam como um estado do sistema muda para outro [18]. Um procedimento para criarmos um tal sistema é:

1. Identificamos uma situação no mundo real que desejamos estudar e fazemos suposições sobre essa situação.
2. Traduzimos nossas suposições para uma relação matemática.
3. Usamos nosso conhecimento matemático para analisar ou resolver essa relação.

4. Traduzirmos nossa solução de volta para o mundo real para aprender mais sobre o nosso sistema original.

Existem dois cuidados que devemos tomar. O primeiro deles é que a relação matemática não é a solução. Por exemplo, suponha que queremos modelar um quadrado que tem uma área de 4 metros quadrados. Uma tradução matemática desse modelo seria $x^2 = 4$, onde x é o comprimento do lado do quadrado. Fazendo uma análise dessa equação, obtemos duas possíveis soluções: $x = 2$ e $x = -2$. O segundo cuidado é garantir que a solução faça sentido na situação que está sendo considerada. No exemplo do nosso quadrado, a solução $x = -2$ não faz sentido. Traduzindo a solução $x = 2$ de volta para o mundo real, aprendemos algo sobre o nosso quadrado: os lados possuem 2 metros de comprimento.

Neste texto, vamos considerar situações em que o estado do sistema num ponto no tempo depende do estado do sistema em pontos anteriores no tempo. Suponha que começamos a guardar numa conta bancária a quantia de R\$1000 em 1 de janeiro de 2003, e que o banco paga 10% ao ano de juros. Então em 1 de janeiro de 2004 teremos a quantia de R\$1100 em nossa conta. Note que em 1 de janeiro de 2005 não teremos R\$1200 creditados e sim R\$1210, pois os juros são compostos, isto é atuam sobre o montante disponível na conta. Perceba que (a) conhecendo o valor inicial de hoje (temos R\$1000 no banco) e (b) conhecendo alguma relação entre hoje e algum dia no futuro (após 1 ano a partir de hoje teremos 10% a mais de dinheiro), podemos prever a quantidade de dinheiro que teremos no futuro.

Vamos traduzir essa situação para a linguagem dos matemáticos. Seja primeiro de janeiro de 2003 o tempo 0, seja primeiro de janeiro de 2004 o tempo 1, seja primeiro de janeiro de 2005 o tempo 2, e assim por diante. Então 1 de janeiro de 2021 será o tempo $2021 - 2003 = 18$. Todos os outros dias são irrelevantes, desde que o dinheiro fique depositado em nossa conta até primeiro de janeiro do próximo ano. Seja $A(0)$ a quantia (em reais) que temos em nossa conta no tempo 0; então $A(0) = 1000$. Logo, $A(1) = 1100$ e $A(2) = 1210$. Nosso objetivo será prever quanto teremos na conta no tempo n , onde n é o ano $2003 + n$. Por exemplo, se $n = 18$ (ano 2021), quanto é $A(18)$?

Agora podemos escrever nosso problema como

$$A(1) = A(0) + 0.1A(0), \tag{2.3}$$

que pode ser simplificada por $A(1) = 1.1A(0)$. Logo,

$$A(2) = 1.1A(1), A(3) = 1.1A(2), \dots, A(18) = 1.1A(17) \quad (2.4)$$

e assim sucessivamente.

Seja este ano o ano n . Então o próximo ano será $n + 1$. A quantidade no banco para cada um desses anos é denotada por $A(n)$ e $A(n + 1)$, respectivamente. A afirmação acima é lida matematicamente da seguinte forma

$$A(n + 1) = 1.1A(n), \text{ com } n \in \mathbb{N}. \quad (2.5)$$

Mas ainda não resolvemos o nosso problema, pois precisamos encontrar um método que encontre a quantia em nossa conta em qualquer tempo no futuro. Um método para encontrar a solução seria por um cálculo direto. Suponha que queremos encontrar $A(18)$. Como $A(0) = 1000$, por substituição encontramos $A(1) = 1.1A(0) = 1100$. Repetindo o processo obtemos $A(2) = 1.1A(1) = 1.1(1100) = 1210$, $A(3) = 1.1A(2) = 1331$, e assim por diante.

Antes dos computadores seria um trabalho tedioso e consumiria bastante tempo calcular $A(18)$, mas tarefas repetidas é o que os computadores fazem melhor. Assim, após escrever um programa simples, poderíamos calcular $A(100)$ ou $A(1000)$ rapidamente.

No esforço de encontrar uma solução melhor, uma que seja fácil de trabalhar, fazemos as substituições

$$\begin{aligned} A(2) &= (1.1)A(1) = (1.1)(1.1A(0)) = (1.1)^2A(0), \\ A(3) &= (1.1)A(2) = (1.1)(1.1)^2A(0) = (1.1)^3A(0) \end{aligned} \quad (2.6)$$

e assim sucessivamente. A partir disso observamos sem dificuldade que

$$A(n) = (1.1)^n A(0). \quad (2.7)$$

A equação (1.5) é o que referimos ser a solução do nosso problema. Podemos usar essa equação e uma simples calculadora para calcular facilmente a quantia que teremos num ponto futuro no tempo.

O exemplo acima serve para ilustrar que se podemos usar o nosso conhecimento de hoje para fazer previsões sobre o amanhã, então podemos usar nossa previsão sobre o amanhã para fazer previsões sobre um dia depois e assim por diante. Exemplos particulares vão de crescimento populacional, genética, economia, até jogos [2, 18].

Formas explícitas, expressões para quantia em qualquer ano, tal como a equação (2.7), são chamadas de *soluções* do sistema dinâmico correspondente.

2.1 Um Modelo de Crescimento Populacional

Considere uma população de coelhos. Por simplicidade, assuma que em média para cada coelho nascem dois novos coelhos em cada unidade de tempo, sem haver a morte de nenhum coelho. A maneira mais fácil de modelar esse problema é considerar a mudança no tamanho da população de coelhos em um período de tempo. Seja $A(0)$ o número de coelhos no tempo $t = 0$ (o tempo quando começamos as nossas observações). Então $A(1) - A(0)$ é a mudança na população na primeira unidade de tempo. Mas a mudança é igual ao número de novos coelhos, que é o número de nascimentos durante esse intervalo. Assim $A(1) - A(0) = 2A(0)$. Do mesmo modo a mudança do período 1 para o período 2, $A(2) - A(1)$, é igual ao número e nascimentos na população de tamanho $A(1)$. Assim $A(2) - A(1) = 2A(1)$. Continuando dessa maneira, observamos que a mudança na população em um período de tempo é o dobro da população no começo daquele período, que é $A(n+1) - A(n) = 2A(n)$, ou

$$A(n+1) = 3A(n). \quad (2.8)$$

A solução é $A(k) = 3^k A(0)$.

Agora desejamos um modelo mais realista. Vamos assumir que o número de nascimentos no período de tempo n é proporcional ao tamanho da população nesse período de tempo, que é o número de nascimentos igual $bA(n)$, onde b é a taxa de nascimento. Da mesma forma, o número de mortes no período de tempo n é proporcional a $A(n)$, que é o número de mortes igual a $dA(n)$. A mudança na população em um período de tempo é o número de nascimentos menos o número de mortes. Combinando essas suposições temos $A(n+1) - A(n) = bA(n) - dA(n)$, ou

$$A(n+1) = (1+r)A(n), \quad (2.9)$$

onde $r = b - d$ é a taxa de crescimento da população. A solução, nós conhecemos, é

$$A(k) = (1+r)^k A(0). \quad (2.10)$$

Seja r uma taxa de crescimento razoável, digamos $r = 0.2$, e uma população inicial $A(0) = 100$. Então obtemos $A(10) = 619$, $A(20) = 3833$, $A(50) = 910041$ e $A(100) = 8281797451$. Vemos que, após um longo período de tempo o tamanho da população de nosso modelo alcança números irrealistas ($A(k)$ converge exponencialmente para o infinito).

Isso significa que nosso modelo está errado? Sim e não. Isso depende de qual informação queremos obter a partir dele. Para pequenos valores de tempo, esse modelo dá uma boa estimativa do crescimento populacional. Um problema nesse modelo é que em longos períodos de tempo, a taxa de crescimento r não é constante, mas muda conforme o tamanho da população. Então devemos trocar r no nosso sistema dinâmico por $f(A(n))$, onde f é uma função do crescimento da população. Em outras palavras, nossa taxa de crescimento $f(A(n))$ varia junto com a mudança do tamanho da população.

A primeira suposição que devemos fazer é que o ambiente da população pode suportar somente um certo número, digamos L , de indivíduos. Assim, se $A(n) > L$, não haverá comida suficiente ou espaço disponível e mais animais morrerão (de fome, etc.) do que nascerão. Então, segue que a taxa de crescimento é negativa, $f(A(n)) < 0$, quando $A(n) > L$.

Nossa segunda suposição é que se a população é menor do que L , então há comida extra e espaço disponível, logo a taxa de crescimento será positiva, que é, $f(A(n)) > 0$, quando $A(n) < L$.

Nossa última suposição é que se a população é relativamente menor do que L , haverá muita comida e muito espaço para a população existente, então a taxa de crescimento deverá ser próxima da taxa de crescimento r . Mas como a população aumenta, a taxa de crescimento deverá diminuir e deverá, de fato, ser zero quando $A(n) = L$.

A função mais simples que satisfaz as três condições acima é a função linear

$$f(A(n)) = r \left(1 - \frac{A(n)}{L} \right). \quad (2.11)$$

Perceba o seguinte: (1) Se $A(n)$ é pequeno, então $1 - A(n)/L$ é próximo de 1 e a taxa de crescimento $f(A(n))$ é próxima de r ; (2) se $A(n) < L$, então $1 - A(n)/L > 0$ e a taxa de crescimento é positiva; (3) se $A(n) = L$, a taxa de crescimento é nula; e (4) se $A(n) > L$, então $1 - A(n)/L < 0$ e a taxa de crescimento é negativa.

O número r é chamado de *taxa de crescimento irrestrito* e o número L é chamado de *capacidade suportada* do ambiente. O sistema dinâmico que modela o crescimento populacional é então

$$A(n+1) - A(n) = r \left(1 - \frac{A(n)}{L} \right) A(n), \quad (2.12)$$

ou, após uma simplificação,

$$A(n+1) = (1+r)A(n) - \beta A^2(n), \quad (2.13)$$

onde $\beta = r/L$. A equação acima é chamada de *equação logística*. Suponha $r = 0.2$, $L = 8$ (aonde cada unidade representa 1000 das espécies), e conseqüentemente $\beta = 0.2/8 = 0.025$. A equação logística se torna

$$A(n+1) = 1.2A(n) - 0.025A^2(n). \quad (2.14)$$

Se $A(0) = 3$, então $A(1) = (1.2)3 - (0.025)9 = 3.375$, $A(2) = 3.765$, e assim em diante. A Figura 2.1 mostra o gráfico das soluções $(n, A(n))$ para alguns valores iniciais diferentes e a linha horizontal, $L = 8$, é o limite do tamanho da população ou o valor de equilíbrio estável. Vejamos a definição de valor de equilíbrio ou ponto fixo.

Definição 2.1.1 *Considere um sistema dinâmico discreto*

$$A(n+1) = f(A(n)). \quad (2.15)$$

Um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ é chamado de **valor de equilíbrio** ou **ponto fixo** para esse sistema dinâmico se satisfaz a equação

$$a = f(a). \quad (2.16)$$

Nesse caso, $A(n) \equiv a$ é uma solução particular para o sistema dinâmico.

Agora vamos descobrir os valores de equilíbrio da equação logística (2.14), substituindo $a = A(n+1) = A(n)$, obtemos

$$a = 1.2a - 0.025a^2. \quad (2.17)$$

Agrupando os termos no lado esquerdo da equação e fatorando o termo a , temos

$$a(-0.2 + 0.025a) = 0. \quad (2.18)$$

As soluções são dadas por $a = 0$ e $-0.2 + 0.025a = 0$, logo, $a = 0$ e $a = 8$. Isso faz sentido desde que a população de tamanho 0 permaneça assim. Também, como foi discutido anteriormente, se $A(0) = 8$, a capacidade suportada, então a taxa de crescimento é nula e novamente a população permanece constante.

Vamos encontrar o valor de equilíbrio para a equação logística geral (2.13), substituindo $a = A(n+1) = A(n)$ temos

$$a = (1+r)a - \left(\frac{r}{L}\right)a^2, \quad (2.19)$$

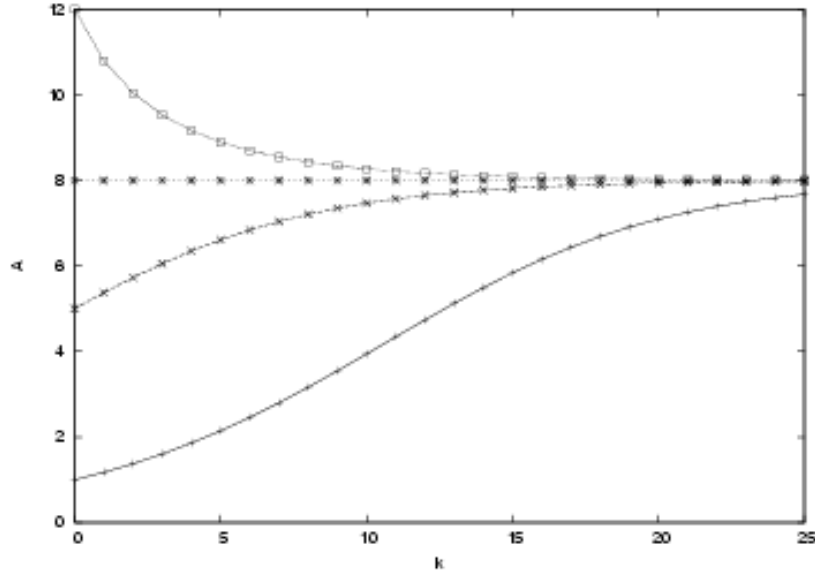


Figura 2.1: Pontos $(k, A(k))$ do sistema dinâmico $A(n + 1) = 1.2A(n) - 0.025A^2(n)$.

ou, após subtrair a de ambos os lados e depois fatorar a e r ,

$$0 = r \left(1 - \frac{a}{L}\right) a. \quad (2.20)$$

Dividindo por r , pois é não nulo, temos assim os valores de equilíbrio

$$a = L \quad \text{e} \quad a = 0 \quad (2.21)$$

como esperávamos. Agora vejamos algumas definições de valores de equilíbrio estável e instável.

Definição 2.1.2 *Suponha um sistema dinâmico que tem valor de equilíbrio a . Este valor de equilíbrio é dito **estável** ou de **atração** se existir um número $\varepsilon > 0$ tal que*

$$|A(0) - a| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} A(k) = a. \quad (2.22)$$

*Um valor de equilíbrio é **instável** ou **repelente** se existir um número $\varepsilon > 0$ tal que*

$$0 < |A(0) - a| < \varepsilon \Rightarrow |A(k) - a| > \varepsilon \quad (2.23)$$

para algum (mas não necessariamente todos) valor de k .

Na Figura 2.1, mostra que o ponto fixo $a = 8$ é de atração.

Agora um bom exemplo de que regras simples podem gerar padrões complexos é o dado por outra equação logística:

$$A(n + 1) = C + A^2(n). \quad (2.24)$$

Variando o valor da constante C , a iteração desta equação pode conduzir a soluções estáveis, periódicas ou caóticas, como apresentadas na Figura 2.2. Em (a), observa-se uma solução estável, ou seja, convergindo para um valor fixo. Em (b) e (c), tem-se soluções periódicas de períodos 2 e 4 respectivamente. Já em (d), observa-se uma solução aperiódica e imprevisível, característica dos sistemas caóticos.

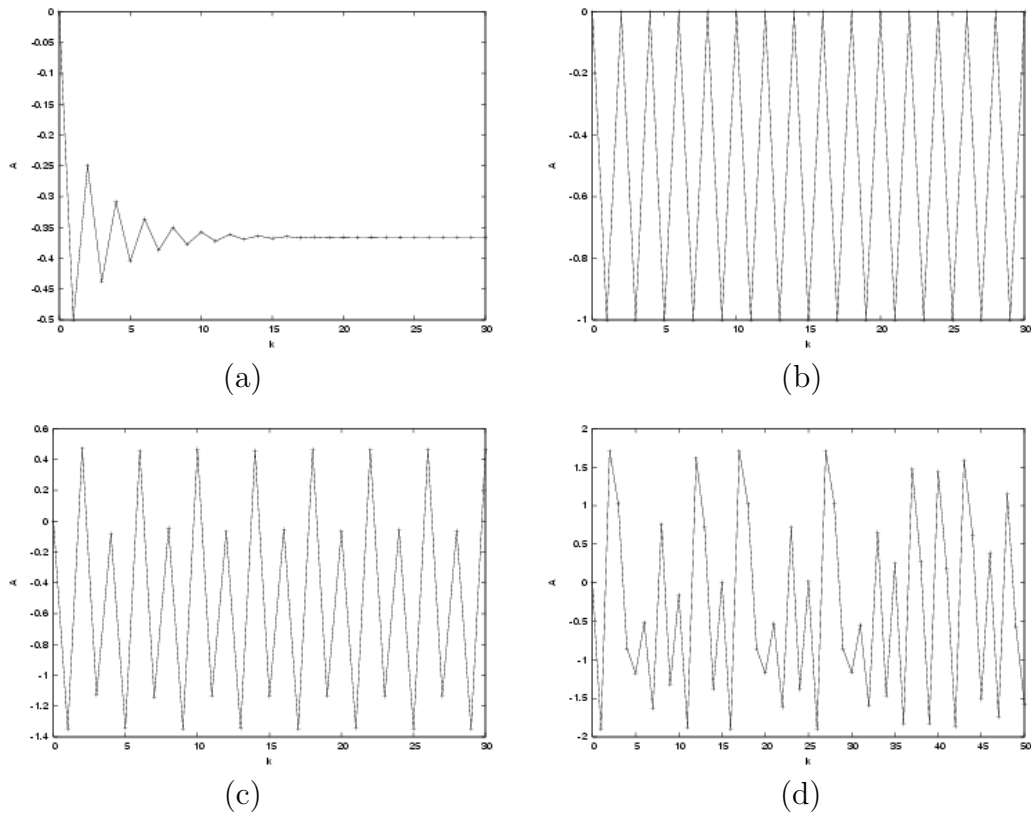


Figura 2.2: Pontos $(k, A(k))$ da equação logística $A(n + 1) = C + A^2(n)$. Com (a) $C = -0.5$ e $A(0) = 0$, (b) $C = -1.0$ e $A(0) = 0$, (c) $C = -1.35$ e $A(0) = 0$, e (d) $C = -1.9$ e $A(0) = 0$.

2.2 Atratores

Um importante aspecto para entender um fenômeno dinâmico é a descrição de *atratores* [18]. Newton conhecia dois tipos de ação de atratores que eram observados em dois sistemas: a maçã no chão está em equilíbrio e os planetas do sistema solar estão submetidos a um movimento periódico. Pelos próximos 300 anos, esses foram os únicos tipos de ação conhecidos para sistemas dinâmicos simples. Maxwell e Poincaré estavam entre um pequeno número de cientistas que não estavam contentes com essa visão. O pequeno número cresceu, mas não tanto quanto no fim do século XX com o surgimento dos computadores que veio junto com um terceiro tipo de ação, o caos, que rapidamente tornou-se bastante conhecido [2, 13].

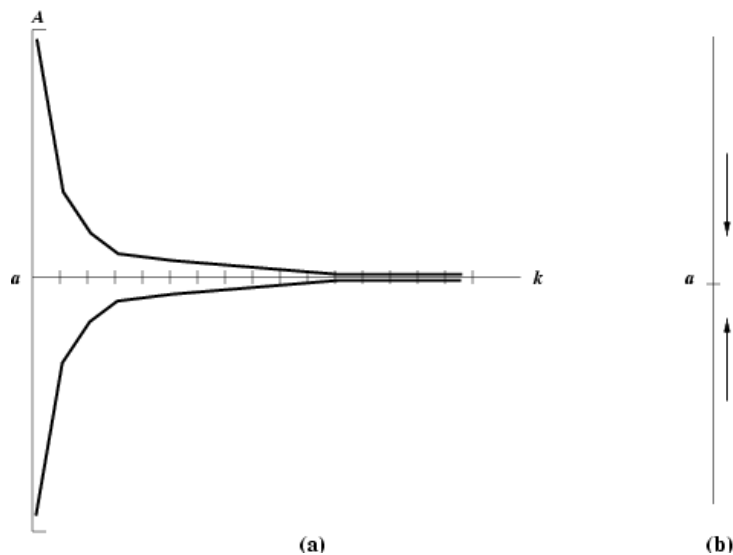


Figura 2.3: (a) Mostra os pontos $(k, A(k))$ convergindo para um ponto fixo de atração, enquanto (b) denota um ponto fixo de atração a por setas apontando em sua direção.

Digamos que temos um sistema dinâmico com um valor de equilíbrio estável a . Isso significa que se a_0 está próximo suficientemente de a então $A(k)$ converge para a . Se plotarmos os pontos $(k, A(k))$, conseguiremos uma figura tal como a Figura 2.3 (a).

Se um observador estiver posicionado final do eixo k na Figura 2.3 (a), ele veria algo como a Figura 2.3 (b). Note que essas duas figuras possuem a

mesma informação. Em particular, as setas apontam na direção do número a indicando que os valores de $A(k)$ estão indo na direção de a . Assim, exibimos graficamente um valor de equilíbrio estável como um ponto sobre uma reta com setas apontando na sua direção. Uma melhor terminologia para “setas apontando na direção de” a seria *ponto fixo de atração*.

Definir um atrator não é algo simples. Uma definição de atrator é “um conjunto de pontos tal que todas as trajetórias próximas a este conjunto convergem para ele” [18]. Suponha que temos um conjunto de pontos S . Então dizemos que a sequência de números $A(k)$ converge para S , que denotamos por

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A(k) = S, \quad (2.25)$$

se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um inteiro K tal que $A(k)$ dista no máximo ε de algum ponto em S quando $k > K$.

Definição 2.2.1 *Um conjunto de pontos S é chamado de um **atrator** para um sistema dinâmico $A(n+1) = f(A(n))$ se existir um número $\delta > 0$ tal que se $|A(0) - s| < \delta$ para algum ponto $s \in S$, então*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |A(k) - S| = 0. \quad (2.26)$$

Consideremos a equação logística

$$A(n+1) = rA(n)[1 - A(n)] \quad (2.27)$$

que é estudada extensivamente por matemáticos e biólogos, pois ela, como vimos, está relacionada ao problema de crescimento populacional [2]. Só iremos analisar valores de r maiores do que zero. Essa equação possui dois pontos fixos, $a = 0$, que é de atração se $0 < r < 1$, e $a = (r - 1)/r$, que é de atração se $1 < r \leq 3$.

Quando $r = 2.5$, o sistema dinâmico

$$A(n+1) = 2.5A(n)[1 - A(n)] \quad (2.28)$$

tem $a = 0.6$ como um ponto fixo de atração. Assim, o conjunto unitário $S = \{0.6\}$ é um atrator.

De fato, o conjunto de todos os pontos fixos de atração é um atrator.

2.3 Atratores Estranhos

Um *atrator estranho* é um fractal, um objeto geométrico de dimensão não inteira e possui uma estrutura auto-similar que se repete estatisticamente em todas as escalas de magnitude.

Definição 2.3.1 *Um sistema dinâmico é dito ser **transitivo** se, quando $a_0 = A(0)$ está próximo de algum ponto no atrator S , então para todos os pontos s no atrator há uma subsequência $A(k_j)$ dos valores $A(k)$ que converge para s , ou seja,*

$$\lim_{k_j \rightarrow \infty} A(k_j) = s. \quad (2.29)$$

Definição 2.3.2 *Um sistema dinâmico tem **dependência sensível nos valores iniciais** se, quando tomarmos dois valores iniciais, a_0 e b_0 , próximos um do outro, então as sequências de pontos $A(k)$ e $B(k)$ se distanciam uma da outra. Para sermos mais precisos, existe um número $\varepsilon > 0$ tal que, quando $0 < |a_0 - b_0| < \varepsilon$, então há um valor $K > 0$ tal que $|A(K) - B(K)| > \varepsilon$.*

Matematicamente, o atrator estranho de um sistema dinâmico tem que satisfazer as três condições abaixo:

- Dependência sensível nos valores iniciais.
- Existência de um atrator.
- Transitividade.

O primeiro pesquisador a estudar um atrator estranho foi Lorenz em 1963 [10]. O sistema de Lorenz consiste de três equações diferenciais:

$$\frac{dx}{dt} = a(y - x), \quad \frac{dy}{dt} = bx - y - zx, \quad \frac{dz}{dt} = xy - cz. \quad (2.30)$$

Os termos a , b e c são constantes que podemos ajustar para alterar o comportamento do sistema. A variável t representa o tempo e podemos pensar que x , y e z possuem uma interpretação espacial, mas essa interpretação não está bem correta. Os termos x , y e z na verdade referem-se à dinâmica física de um modelo convencional simplificado: x representa movimento convectivo, y a diferença de temperatura e z a distorção da temperatura, mas o significado físico não é importante para os nossos propósitos.

Quando Lorenz simulou através de um computador o seu modelo de sistema de mudanças climáticas, o gráfico que surgiu tinha a forma fractal como na Figura 2.4. O atrator de Lorenz mostra que prever o clima é algo caótico devido ao seu “efeito borboleta”, ou seja, que o bater de asas de uma borboleta na Ásia pode gerar um tornado na América (sensibilidade nos valores iniciais). Atualmente esse conjunto é uma das ícones do caos [15, 17], assim como os mapa de Hénon, mapa de Ikeda e o mapa de Holmes, que serão usados como exemplos a seguir.

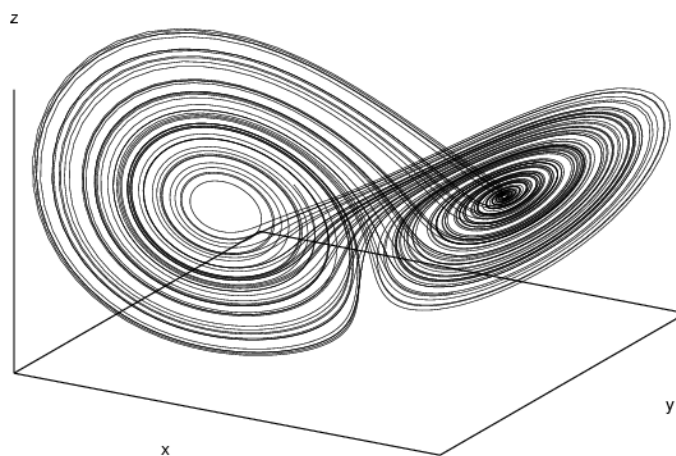


Figura 2.4: Atrator de Lorenz: com $a = 10$, $b = 28$ e $c = 8/3$, discretizado utilizando o método de Euler.

O mapa de Hénon e o seu atrator estranho correspondente (ou conjunto invariante) transforma pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ em pontos da forma

$$H(x, y) = (y + 1 - ax^2, bx) \in \mathbb{R}^2 \quad (2.31)$$

classicamente com valor dos parâmetros: $a = 1.4$ e $b = 0.3$. A matriz Jacobiana é

$$H'(x, y) = \begin{pmatrix} -2ax & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

que possui determinante $|H'(x, y)| = -b$. Quando $|b| < 1$, H é uma contração (isto é, H contrai áreas). O atrator do mapa de Hénon pode ser definido como $\lim H^k(R)$ quando $k \rightarrow \infty$, onde R é uma região retangular que contém o atrator (veja a Figura 2.5) [5].

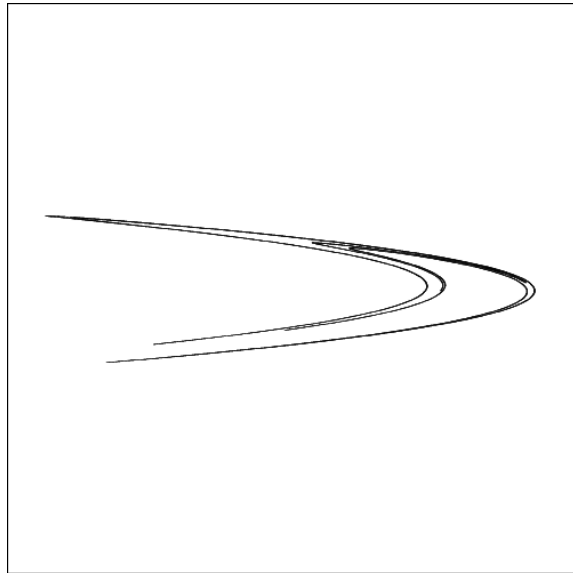


Figura 2.5: Atrator estranho do mapa de Hénon, com $a = 1.4$ e $b = 0.3$, em uma janela de tamanho $[-1.5, 1.5]^2$.

Capítulo 3

Métodos para Visualização de Atratores Estranhos

Dado um sistema dinâmico discreto $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, a *órbita* de um ponto $p \in \mathbb{R}^n$ é o conjunto dos seus iterados por H :

$$O(p) = \{H(p), H^{(2)}(p), \dots\}. \quad (3.1)$$

O ponto p é chamado de *recorrente* quando sua órbita contém pontos que retornam suficientemente próximos de p . Pontos não-recorrentes são chamados de *transientes*. Um ponto s é chamado de *periódico de ordem n de H* se $H^{(n)}(s) = s$ com $n \in \mathbb{N}$, logo pontos periódicos são obviamente recorrentes. O conjunto de pontos recorrentes $\text{Rec}(H)$ é o atrator do mapa H , logo o atrator estranho de Hénon é o conjunto de pontos recorrentes do mapa de Hénon.

Sabemos que os computadores podem representar somente quantidades digitais e números reais aproximados com precisão finita, logo qualquer simulação computacional de um sistema caótico é destinada a degradar cada vez mais a previsão do futuro. Outra faceta desse problema envolve o fato que se simularmos um sistema caótico no computador, em algum ponto no futuro o sistema simulado deverá começar a se repetir devido à precisão finita disponível na representação por ponto flutuante. Em outras palavras, computadores não podem gerar órbitas aperiódicas, mas somente ciclos admitindo períodos longos.

Como então fazemos para saber se simulações computacionais de caos ou de qualquer outra coisa são válidas no sentido que elas permitem caracterizações verdadeiras de um caos real? Pior ainda, será possível que o “caos”

seja nada mais do que um artefato computacional resultante da tentativa de representar um mundo estocástico por números digitais? O *lema do sobreamento* é um resultado extraordinário que dá uma resposta para essas perguntas.

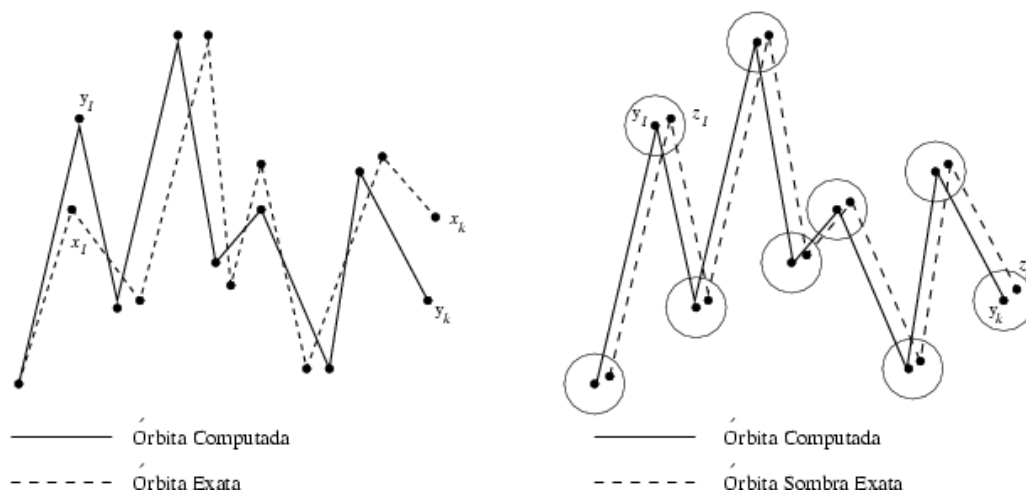


Figura 3.1: A sombra da órbita computada: Na esquerda, a órbita computada y_0, y_1, \dots, y_k diverge da órbita exata x_0, x_1, \dots, x_k (real) devido ao acúmulo de erros. Na direita é a sombra de uma órbita computada y_0, y_1, \dots, y_k que é arbitrariamente próxima da órbita exata que começa em z_0 .

A Figura 3.1 contém dois grafos que ilustram o lema do sobreamento em ação. O grafo da esquerda mostra uma órbita exata (de um sistema caótico) e uma calculada, plotadas ao longo de uma simulação. Devido ao erro acumulado, as duas órbitas tendem a se separar.

O grafo da direita da Figura 3.1 mostra a mesma órbita calculada como no primeiro grafo, mas dessa vez a *sombra da órbita* é plotada. Para qualquer órbita, o lema do sobreamento garante a existência de uma órbita exata que segue arbitrariamente próxima a órbita calculada. Em outras palavras, o lema do sobreamento nos conta que uma simulação computacional de caos de fato fornece uma imagem “precisa” do movimento no sistema caótico ainda que não seja possível simular fielmente uma órbita individual. Antes de enunciar matematicamente o lema do sobreamento vejamos algumas definições [14].

Definição 3.0.3 Uma ε -**pseudo-órbita** de $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma sequência infinita de pontos y_n , tal que

$$d(y_{i+1}, H(y_i)) < \varepsilon, \forall i \in \mathbb{N}; \quad (3.2)$$

onde $d(x, y)$ é uma função distância definida em \mathbb{R}^n .

Definição 3.0.4 Uma órbita exata x_n é dita ser uma δ -**sombra** da pseudo-órbita y_n se

$$d(x_i, y_i) < \delta, \forall i \in \mathbb{N}. \quad (3.3)$$

Teorema 1 (Lema do Sombreamento) Seja $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um sistema dinâmico. Então para todo $\delta > 0$, existe um $\varepsilon > 0$ tal que toda ε -pseudo-órbita de H é δ -sombreada pela órbita exata de algum ponto $x \in \mathbb{R}^n$.

Na representação confiável de um atrator estranho, a aritmética intervalar se torna uma ferramenta muito importante, devido à falta de precisão da aritmética de ponto flutuante que gera vários erros quando por exemplo atratores como Hénon são desenhados utilizando o método clássico de amostragem pontual. Considere uma sequência $x_k \in \mathbb{R}^n$ e H uma função vetorial não-linear tal que

$$x_{k+1} = H(x_k). \quad (3.4)$$

Se existir um atrator estranho para tal conjunto, com k suficientemente grande, essa sequência irá cobrir e permanecer numa região específica do plano de fase ou espaço de estado; essa cobertura é conhecida para poucos atratores estranhos. Quando tomamos a estrutura celular do plano de fase, que é nada mais do que subdivir o espaço em um número finito de células (também chamadas de caixas), passaremos a ter uma sequência de células aonde o atrator reside no interior desse conjunto. Tal conjunto é chamado de *cobertura* de um atrator estranho [7]. Apresentaremos um método confiável que calcula uma cobertura segura para o atrator estranho, que além de utilizar aritmética intervalar utiliza também teoria dos grafos.

3.1 Ferramentas Intervalares

Aritmética intervalar, também conhecida como *análise intervalar*, é um modelo de computação numérica que lida com intervalos fechados da forma

$[a, b]$, aonde a e b pertencem ao conjunto $F \cup \{-\infty, +\infty\}$ tal que F é o conjunto de todos os números de pontos flutuantes. Uma excelente introdução à aritmética intervalar pode ser encontrada em [1, 12]. Nesse conjunto de intervalos todas as operações aritméticas básicas são definidas de tal forma que o resultado de uma simples operação é um intervalo contendo todos os possíveis resultados. Para ilustrar, vamos utilizar como exemplo a soma de dois intervalos que é definida como:

$$[a, b] + [c, d] = \{x = x_1 + x_2 : x_1 \in [a, b], x_2 \in [c, d]\} = [a + c, b + d]. \quad (3.5)$$

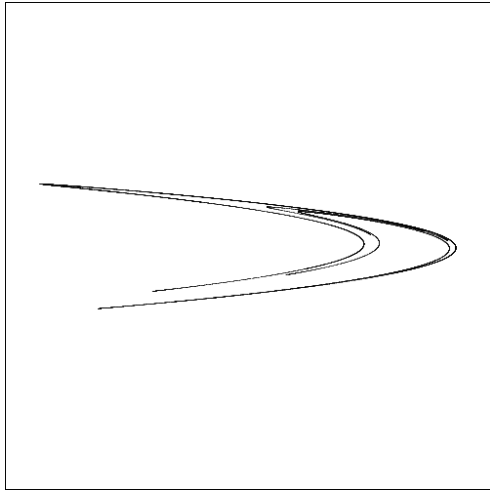
Aritmética intervalar é implementada rigorosamente em um computador mudando o modo de arredondamento de operações simples no sentido de que o resultado calculado inclua o resultado de precisão da máquina e o verdadeiro (calculado com precisão infinita). Por exemplo, quando a soma de dois intervalos é calculada, o extremo inferior do intervalo (a operação $a + c$) é avaliada no modo de arredondamento na direção de $-\infty$, enquanto o extremo superior (a operação $b + d$) é avaliada no modo de arredondamento na direção de $+\infty$.¹

3.2 Representação por Amostragem

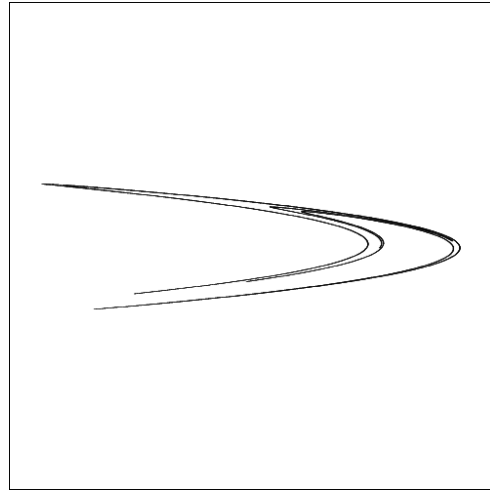
Para exibir o atrator estranho de um mapa, o método clássico de amostragem seleciona um ponto aleatório p na sua bacia de atração, calcula a órbita $O(p) = \{H(p), H^{(2)}(p), \dots\}$ usando aritmética de ponto flutuante, descarta as primeiras (cem por exemplo) iterações e plota as próximas mil ou mais. Às vezes, não é conhecido nenhum ponto na bacia de atração, então pontos aleatórios são tomados e para cada um calcula-se uma órbita da mesma maneira descrita anteriormente. Esse método é bastante utilizado em computação gráfica, mas também no estudo numérico de sistemas dinâmicos para calcular expoentes de Lyapunov, dimensões fractais ou entropias de Kolmogorov [23].

Pela falta de precisão, a órbita calculada $O(p)^* = \{H(p)^*, H^{(2)}(p)^*, \dots\}$ diverge exponencialmente da exata [13], mas devido ao lema do sombreamento, assume-se que a figura global obtida pela representação por amostragem do atrator estranho está correta. Veremos na próxima seção que nem sempre podemos assumir essa representação como correta.

¹As máquinas atuais possuem CPU que implementam o padrão IEEE 754 para aritmética de ponto flutuante que garante esse controle de arredondamento.



(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 3.2: Atrator estranho do mapa de Hénon, com $a = 1.4$ e $b = 0.3$, em uma janela de tamanho $[-1.5, 1.5]^2$. (a) O método por amostragem. (b) O método intervalar. (c) Zoom no atrator de Hénon obtido pelo método de amostragem. (d) Zoom no atrator de Hénon obtido pelo método intervalar.

Para os parâmetros clássicos do mapa de Hénon, $a = 1.4$ e $b = 0.3$, isso é confirmado pela Figura 3.2, que mostra que não há quase nenhuma diferença entre a figura obtida pela representação por amostragem e a obtida pelo confiável método intervalar via cell-mapping, que abordaremos na próxima seção.

3.3 Representação Intervalar via Cell-Mapping

Nesta seção mostraremos um método intervalar baseado em cell-mapping [11], ou seja, na decomposição celular do plano de fase do atrator, com isso fornecemos uma cobertura de um atrator estranho. No método intervalar deve-se conhecer uma caixa envolvente para o atrator estranho. Depois, subdivide-se a caixa envolvente em células retangulares e em seguida calcula-se a imagem de cada célula usando aritmética intervalar, como explicado abaixo.

Seja c_0 uma célula e $H(c_0)$ a imagem de c_0 por $H(\overline{x_0}, \overline{y_0})$ aonde $\overline{x_0}$ e $\overline{y_0}$ são intervalos das projeções de c_0 no eixo x e no eixo y respectivamente, $H(c_0)$ é obtida com aritmética intervalar. Quando $H(c_0)$ não cai fora da caixa envolvente, $H(c_0)$ intercepta células c_1, \dots, c_k . Logo os arcos $c_0 \rightarrow c_1, \dots, c_0 \rightarrow c_k$ são adicionados no grafo, dessa forma conseguimos um grafo orientado formado pelas células da subdivisão celular da caixa envolvente.

Se o grafo não contém nenhum ciclo: $c_0 \rightarrow c_0$ ou $c_0 \rightarrow c_1 \rightarrow \dots \rightarrow c_0$, então a célula c_0 não contém nenhum ponto de $\text{Rec}(H)$. Por outro lado, se existir pelo menos um ciclo: $c_0 \rightarrow c_1 \rightarrow \dots \rightarrow c_0$ no grafo, então a célula c_0 pode conter alguns pontos de $\text{Rec}(H)$.

Para otimizar o teste da existência de ciclos, as componentes fortemente conexas do grafo são calculadas uma vez com o algoritmo de Tarjan [21], que possui uma complexidade linear em relação ao número de vértices e arestas do grafo. Veremos com mais detalhes o algoritmo de Tarjan na seção 3.5.

Dizemos que uma célula c_i é *recorrente* se o grafo permite um caminho que se partimos de c_i podemos voltar para c_i , logo células recorrentes podem conter pontos recorrentes de H . Assim para ver se uma célula é recorrente, basta ver se ela pertence a alguma componente fortemente conexa do grafo.

O conjunto de células recorrentes fornece uma cobertura garantida do atrator estranho, isto é, se houver pontos de $\text{Rec}(H)$ de tal atrator eles só podem estar no interior desse conjunto de células; certamente células transitentes não possuem nenhum ponto do atrator estranho. Esse método não dá

nenhuma garantia que células recorrentes realmente contêm pontos do atrator estranho; uma resposta parcial e assintótica é uma subdivisão adaptativa das células recorrentes e usar o método novamente (veja a Figura 3.3). Na prática esses sucessivos zooms dão um método rápido para obter uma figura mais precisa do atrator estranho; é claro que quanto maior for a precisão da figura maior será o consumo de memória no computador.

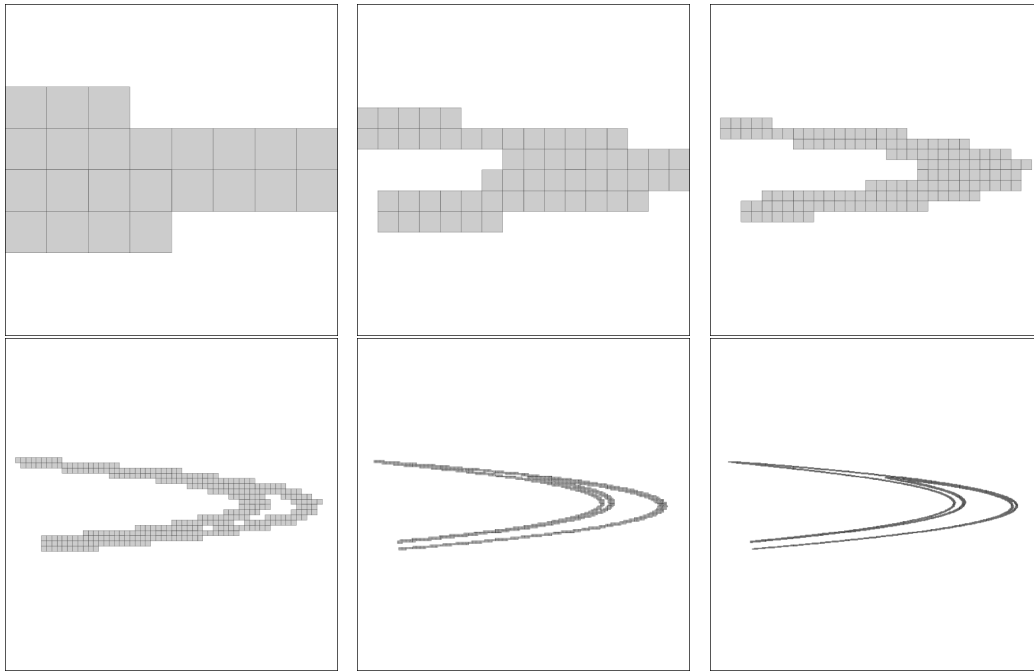


Figura 3.3: Atrator estranho do mapa de Hénon, com $a = 1.4$ e $b = 0.3$. Cada janela possui o tamanho $[-1.5, 1.5]^2$. Da esquerda para a direita e de cima para baixo, as figuras têm a sua resolução aumentada: $8^2, 16^2, 32^2, 64^2, 128^2, 256^2$ células. Com exceção da primeira figura, cada figura foi obtida a partir da anterior através de uma subdivisão adaptativa das células recorrentes.

Para ilustrarmos a confiabilidade do método intervalar na Figura 3.4 confrontamos o método por amostragem com o método intervalar e notamos diferenças entre os dois métodos, percebe-se que no método intervalar para os valores $b = 0.4, 0.5, 0.6$ o atrator do mapa de Hénon atrai menos pontos, pois para o método por amostragem os pontos transientes são aqueles que são descartados durante as primeiras iterações do método mas nada nos garante que

os pontos restantes são pontos recorrentes.

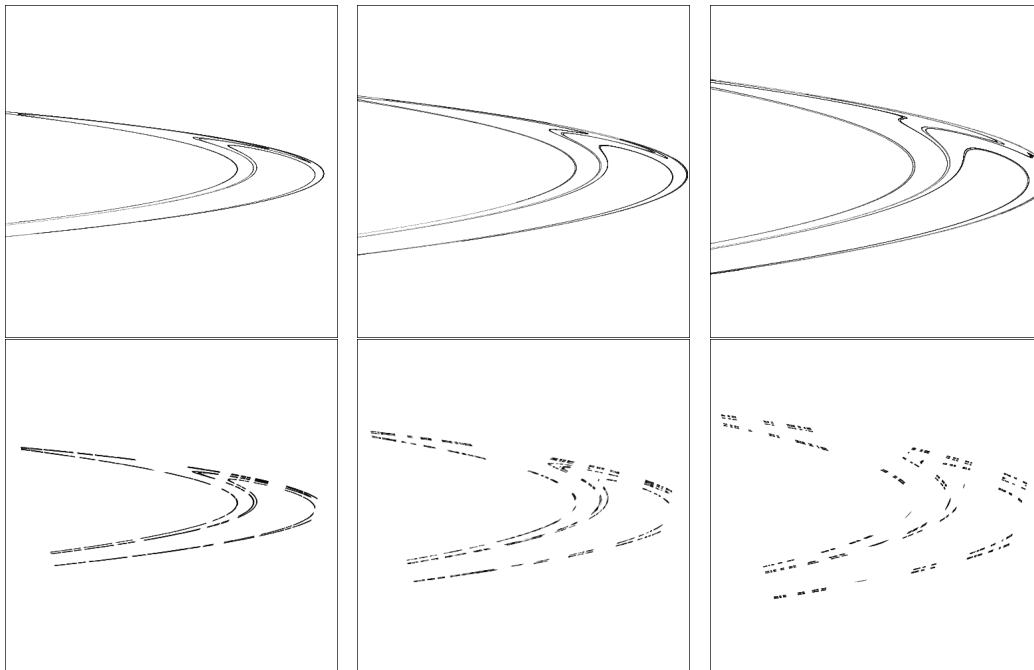


Figura 3.4: Atrator estranho do mapa de Hénon, com $a = 1.4$ e $b = 0.4, 0.5, 0.6$ da esquerda para a direita em uma janela de tamanho $[-1.5, 1.5]^2$. Acima o método por amostragem e abaixo o método intervalar via cell-mapping.

3.4 Representação por Amostragem via Cell-Mapping

O método por amostragem via cell-mapping nada mais é do que uma combinação dos dois métodos vistos acima [7, 8], isto é, fazemos uma decomposição celular da caixa envolvente que contém o atrator estranho mas em vez de usarmos aritmética intervalar tomamos um número finito de amostras em cada célula. O passo seguinte é montar um grafo orientado formado por essas células para isso aplicamos H nos pontos da amostragem feita em cada uma das células como na Figura 3.5, para cada ponto $p_i^{c_0} \in c_0$ olhamos em

qual célula a imagem do ponto $p_i^{c_0}$ irá pertencer, suponhamos que $H(p_i^{c_0}) \in c_j$ logo o arco $c_0 \rightarrow c_j$ é adicionado ao grafo.

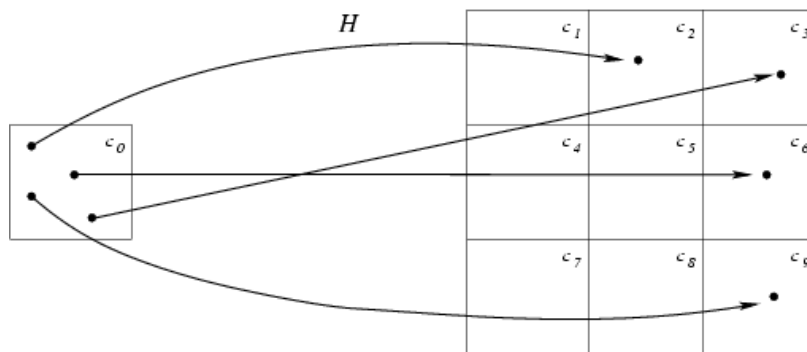


Figura 3.5: Representação por Amostragem via Cell-Mapping: Nesse caso os arcos $c_0 \rightarrow c_2$, $c_0 \rightarrow c_3$, $c_0 \rightarrow c_6$ e $c_0 \rightarrow c_9$ serão adicionados ao grafo.

Gerado o grafo, como no método intervalar usamos o algoritmo de Tarjan para encontrar as suas componentes fortemente conexas e para que possamos verificar quais células são recorrentes, encontrado $\text{Rec}(H)$ fazemos uma subdivisão adaptativa desse conjunto e em seguida usamos o método novamente. Perceba que nesse método enfrentamos o problema de sub-amostragem com isso temos a possibilidade de excluir células que podem possuir pontos de $\text{Rec}(H)$, observe na Figura 3.6.

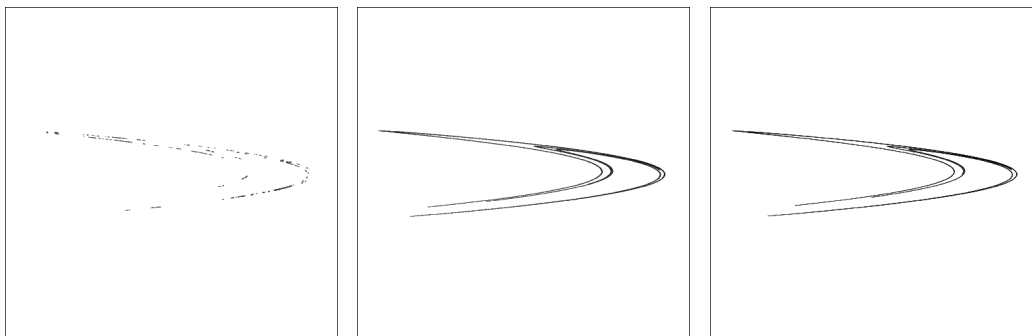


Figura 3.6: Atrator estranho do mapa de Hénon, com $a = 1.4$ e $b = 0.3$, em uma janela de tamanho $[-1.5, 1.5]^2$. Da esquerda para direita temos o método por amostragem via cell-mapping tomando 4 amostras em cada célula, depois tomando 9 amostras por célula e por último o método intervalar.

3.5 Busca de Componentes Fortemente Conexas em Grafos

Considere um grafo orientado $G = (V, A)$, aonde V é o conjunto de nós (vértices) e $A \subseteq V \times V$ é o conjunto de arestas. Um *caminho* do nó v_0 até o nó v_k em G é uma seqüência de nós $(v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_k)$ pertencentes a V com $(v_{i-1}, v_i) \in A$ para $i = 1, \dots, k$. Dois nós v e w em G estão em um *caminho equivalente* se há um caminho de v para w e um caminho de w para v . Uma *componente fortemente conexa* de G é um conjunto maximal de nós $U \subseteq V$, tal que para todo par de nós u e v em U eles estão em um caminho equivalente [16]. Na Figura 3.7 as componentes fortemente conexas do grafo são os subconjuntos $\{v_1, v_2, v_6\}$, $\{v_3, v_4, v_5\}$, $\{v_7\}$ e $\{v_8, v_9\}$.

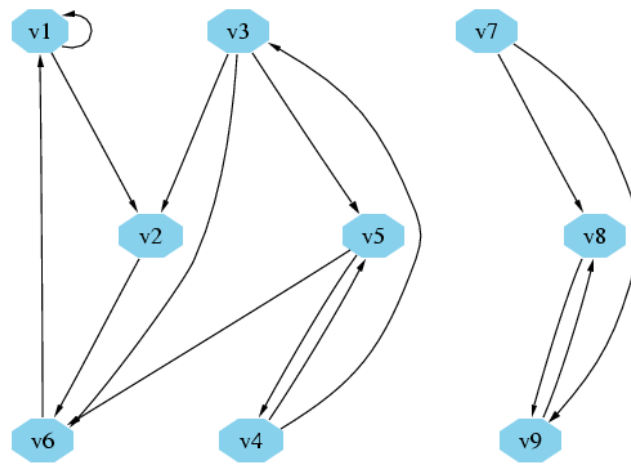


Figura 3.7: Componentes Fortemente Conexas

Tarjan [21] apresentou um algoritmo elegante que encontra componentes fortemente conexas de um grafo em tempo $\mathcal{O}(n + a)$, aonde n é o número de nós e a é o número de arestas do grafo de entrada. O algoritmo de Tarjan pode ser analisado através de dois passos: (1) uma busca em profundidade que percorre todas as arestas construindo uma árvore geradora; (2) uma vez encontrada a *raiz* da componente fortemente conexa, todos os seus descendentes que não são elementos das componentes encontradas anteriormente são marcados como elementos dessa componente. Esse segundo passo é implementado através de uma pilha aonde cada nó é armazenado durante a

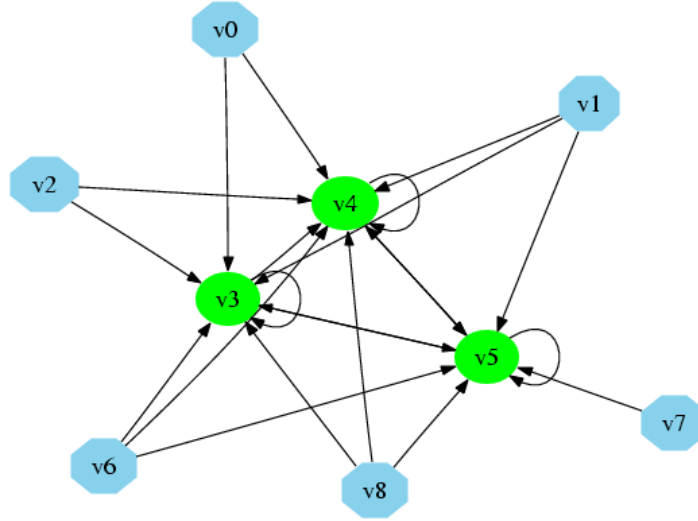


Figura 3.8: Grafo do mapa de Hénon gerado através do método intervalar com a resolução de 3^2 células, tal que cada vértice do grafo está associado a uma célula. A componente fortemente conexa desse grafo é o subconjunto formado pelos vértices $\{v_3, v_4, v_5\}$.

busca em profundidade. Quando uma raiz de uma componente é encontrada, todos os nós abaixo da raiz são removidos da pilha para formar a componente em questão. Apresentaremos a seguir a versão original do algoritmo de Tarjan [19].

3.5.1 Algoritmo de Tarjan

O algoritmo de Tarjan é mostrado no Algoritmo 1 (na página 28). Ele consiste de um procedimento recursivo *VISIT* para cada nó que ainda não foi visitado. O procedimento *VISIT* percorre os nós do grafo através de uma busca em profundidade. Para cada componente conexa C , o primeiro nó de C que o procedimento *VISIT* entra é chamado de *raiz* da componente C . O objetivo principal do algoritmo é encontrar as raízes das componentes. Para esse propósito, definimos a variável $root[v]$ para cada nó v . Quando o procedimento *VISIT* processa o nó v , $root[v]$ contém um nó candidato para a raiz da componente que contém v .

Inicialmente (na linha 03), o próprio nó v é o candidato a raiz. Quando o procedimento *VISIT* processa as arestas que partem do nó v (linhas 05–08), novos candidatos a raiz são obtidos dos nós filhos que pertencem a mesma componente de v . A operação *MIN* (linha 07) compara os nós com respeito a ordem que o procedimento *VISIT* entra neles, i.e., $MIN(x, y) = x$ se o procedimento *VISIT* entrou no nó x antes de entrar no nó y , caso contrário $MIN(x, y) = y$. Uma simples maneira de implementar isto é usar um vetor e um contador para designar um único número para cada nó visitado na busca em profundidade. Quando o procedimento *VISIT* processou todas as arestas saindo de v , $root[v] = v$ se e somente se v é a raiz da componente contendo v (linha 9). Entretanto, se v não é a raiz da componente não sabemos ao certo se $root[v]$ é a raiz certa da componente que contém v .

Para distinguir os nós que pertencem à mesma componente de v e nós que pertencem as outras componentes, uma variável booleana $InComponent[w]$ é definida para cada nó w . Seu valor inicial é `False`. Quando uma componente C é completamente detectada o procedimento *VISIT* coloca $InComponent[w] = \text{True}$ para cada nó w pertencente a C (linhas 10–13). Uma pilha é usada para este objetivo. Cada nó é armazenado na pilha no começo do procedimento *VISIT*. Quando a componente é completamente detectada os seus nós são colocados no topo da pilha. O procedimento *VISIT* remove eles da pilha e coloca o valor `True` na variável $InComponent[w]$. Os nós pertencentes à nova componente encontrada poderiam ser colocados na saída do programa, mas essa parte é omitida no Algoritmo 1.

Algoritmo 1 Algoritmo de Tarjan

```
(01) procedimento VISIT(v);  
(02) começo  
(03)   root[v] := v; InComponent[v] := False;  
(04)   PUSH(v, pilha);  
(05)   para cada nó w tal que  $(v, w) \in A$  faça começo  
(06)     se w ainda não foi visitado então VISIT(w);  
(07)     se não InComponent[w] então root[v] := MIN(root[v], root[w])  
(08)   fim;  
(09)   se root[v] = v então  
(10)     repita  
(11)       w := POP(pilha);  
(12)       InComponent[w] := True;  
(13)     até w = v;  
(14)   fim;  
(15) começo /*Programa Principal*/  
(16)   pilha :=  $\emptyset$ ;  
(17)   para cada nó v  $\in V$  faça  
(18)     se v ainda não foi visitado então VISIT(v);  
(19) fim.
```

Capítulo 4

Exemplos

Nesse capítulo com objetivo de comparar através de exemplos os métodos de visualização descritos no capítulo anterior, vamos abordar outros mapas que possuem atratores bidimensionais: o mapa de Ikeda [4], o mapa de Holmes [23], o mapa logístico [6] e mapas quadráticos [20].

Mapa de Ikeda

O mapa de Ikeda $H : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é dado por

$$H(z) = p + B \exp\left(\frac{ik - ia}{1 + |z|^2}\right) z \quad (4.1)$$

onde $z = x + yi$ é um número complexo. Esse mapa pode ser escrito no plano \mathbb{R}^2 com a seguinte forma

$$H(x, y) = (p + B(x \cos t - y \sin t), B(y \cos t + x \sin t)), \quad (4.2)$$

onde $t = t(x, y) = k - \alpha/(1 + x^2 + y^2)$.

Vamos considerar o mapa de Ikeda com os seguintes parâmetros: $p = 1$, $B = 0.9$, $k = 0.4$ e $\alpha = 6$.

Mapa de Holmes

O mapa de Holmes $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dado por

$$H(x, y) = (1.5x - x^3 + 0.95y, x). \quad (4.3)$$

Mapa logístico

O mapa logístico $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dado por

$$H(x, y) = (y, 2.27y(1 - x)). \quad (4.4)$$

Mapas quadráticos

Para cada ponto $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$, com $n \in \mathbb{N}$, os mapas quadráticos bidimensionais possuem a seguinte forma geral

$$\begin{cases} x_{n+1} = a_1 + a_2x_n + a_3x_n^2 + a_4x_ny_n + a_5y_n + a_6y_n^2 \\ y_{n+1} = a_7 + a_8x_n + a_9x_n^2 + a_{10}x_ny_n + a_{11}y_n + a_{12}y_n^2 \end{cases} \in \mathbb{R}^2, \quad (4.5)$$

que são caracterizados através dos valores dos seus doze coeficientes a_1, \dots, a_{12} . Nem sempre tais mapas quadráticos possuem um atrator estranho; Sprott [20] mostrou uma maneira bastante interessante de geração automática de atratores estranhos de mapas quadráticos, isto é, uma forma de determinar os seus doze coeficientes tal que o mapa quadrático caracterizado por esses coeficientes possui um atrator estranho.

Para simplificar a identificação desses atratores, vamos codificar através de letras do alfabeto que vão de A até Y, onde cada letra vai estar associada a um número no intervalo $[-1.2, 1.2]$ com incremento de 0.1 sobre esse intervalo, isto é, A = -1.2, B = -1.1, C = -1.0, etc. Assim cada atrator é identificado unicamente através de um nome formado por 12 letras. Analogamente, podemos estender a mesma idéia acima para gerar mapas quadráticos tridimensionais, ou seja,

$$\begin{cases} x_{n+1} = a_1 + a_2x_n + a_3x_n^2 + a_4x_ny_n + a_5x_nz_n + a_6y_n \\ \quad + a_7y_n^2 + a_8y_nz_n + a_9z_n + a_{10}z_n^2 \\ y_{n+1} = a_{11} + a_{12}x_n + a_{13}x_n^2 + a_{14}x_ny_n + a_{15}x_nz_n + a_{16}y_n \\ \quad + a_{17}y_n^2 + a_{18}y_nz_n + a_{19}z_n + a_{20}z_n^2 \\ z_{n+1} = a_{21} + a_{22}x_n + a_{23}x_n^2 + a_{24}x_ny_n + a_{25}x_nz_n + a_{26}y_n \\ \quad + a_{27}y_n^2 + a_{28}y_nz_n + a_{29}z_n + a_{30}z_n^2 \end{cases} \in \mathbb{R}^3. \quad (4.6)$$

Como no caso bidimensional o atrator gerado através do mapa quadrático tridimensional é identificado unicamente através de um nome, que agora usa 30 letras ao invés de 12 letras.

A implementação dos métodos de visualização abordados no capítulo anterior foi feita utilizando a linguagem C e nos métodos via cell-mapping utilizamos a estrutura de dados do pacote Stanford GraphBase (SGB) [9].

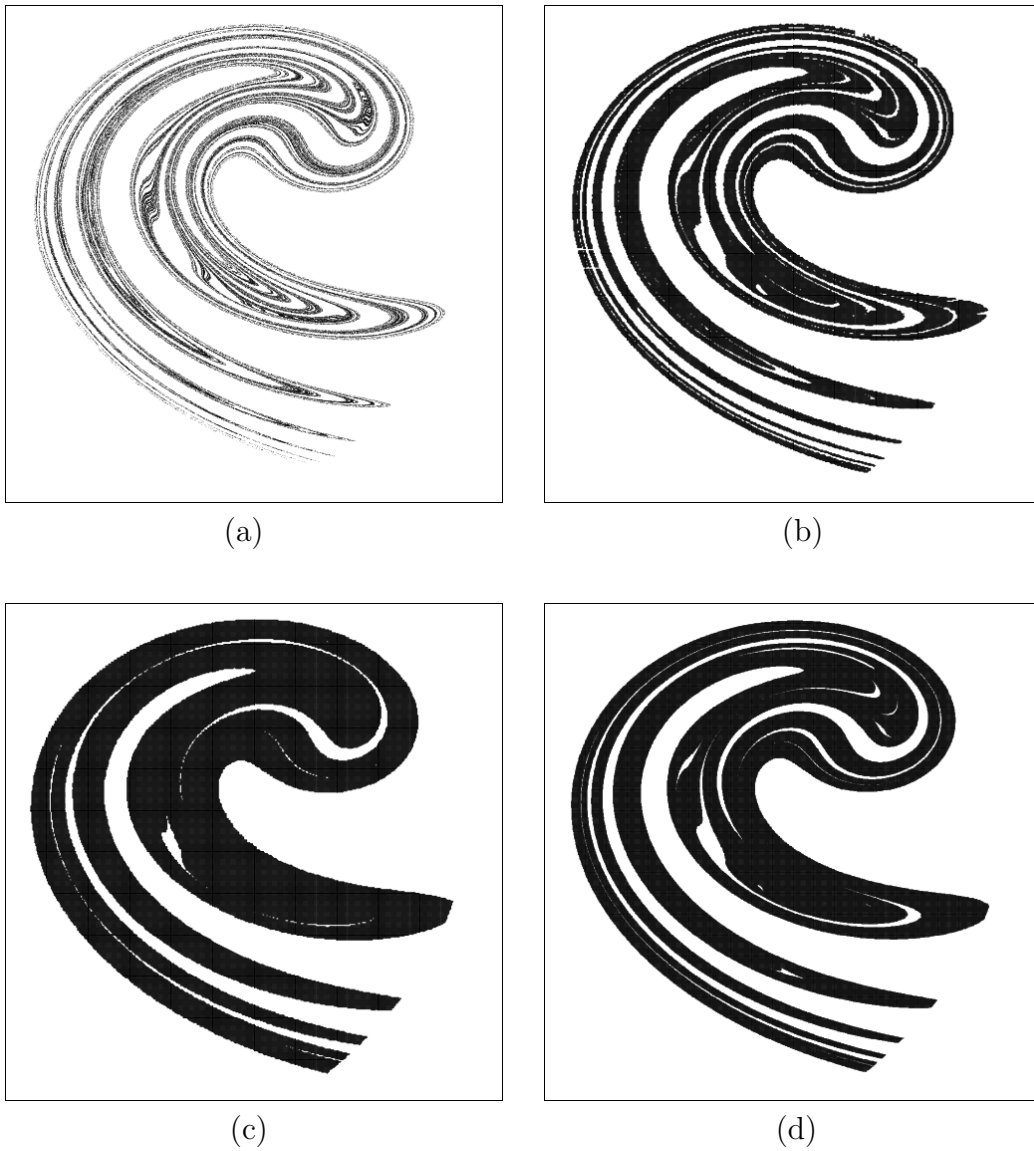


Figura 4.1: Atrator estranho do mapa de Ikeda em uma janela de tamanho $[-0.5, 2.0] \times [-2.5, 1.0]$. (a) Método por amostragem. (b) Método por amostragem via cell-mapping com a resolução de 512^2 células tomando 9 amostras em cada célula. (c) Método intervalar com a resolução de 512^2 células. (d) Método intervalar com a resolução de 1024^2 células.

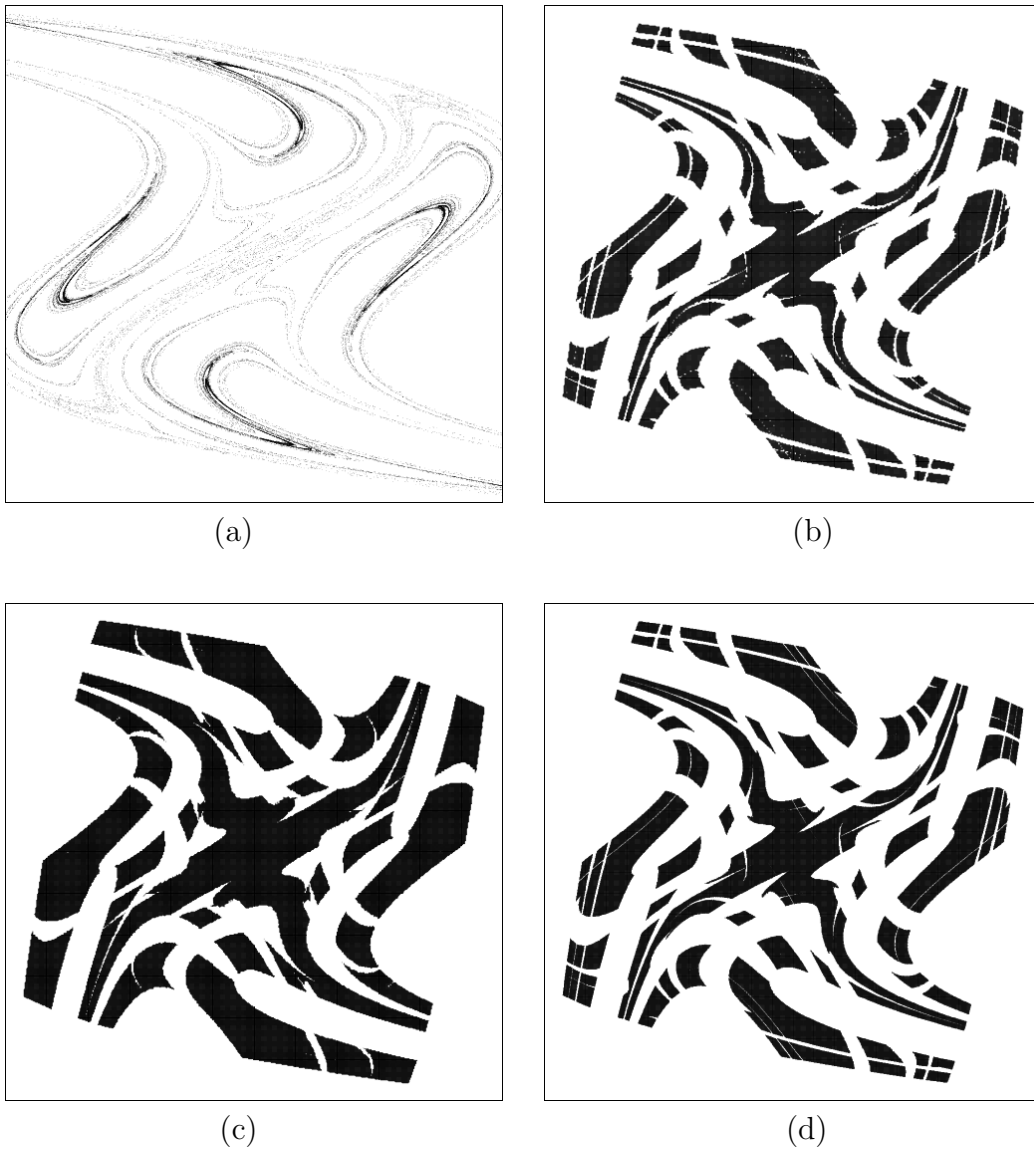


Figura 4.2: Atrator estranho do mapa de Holmes com $a = 1.5$ e $b = 0.95$ em uma janela de tamanho $[-1.8, 1.8]^2$. (a) Método por amostragem. (b) Método por amostragem via cell-mapping com a resolução de 512^2 células tomando 4 amostras em cada célula. (c) Método intervalar com a resolução de 512^2 células. (d) Método intervalar com a resolução de 1024^2 células.

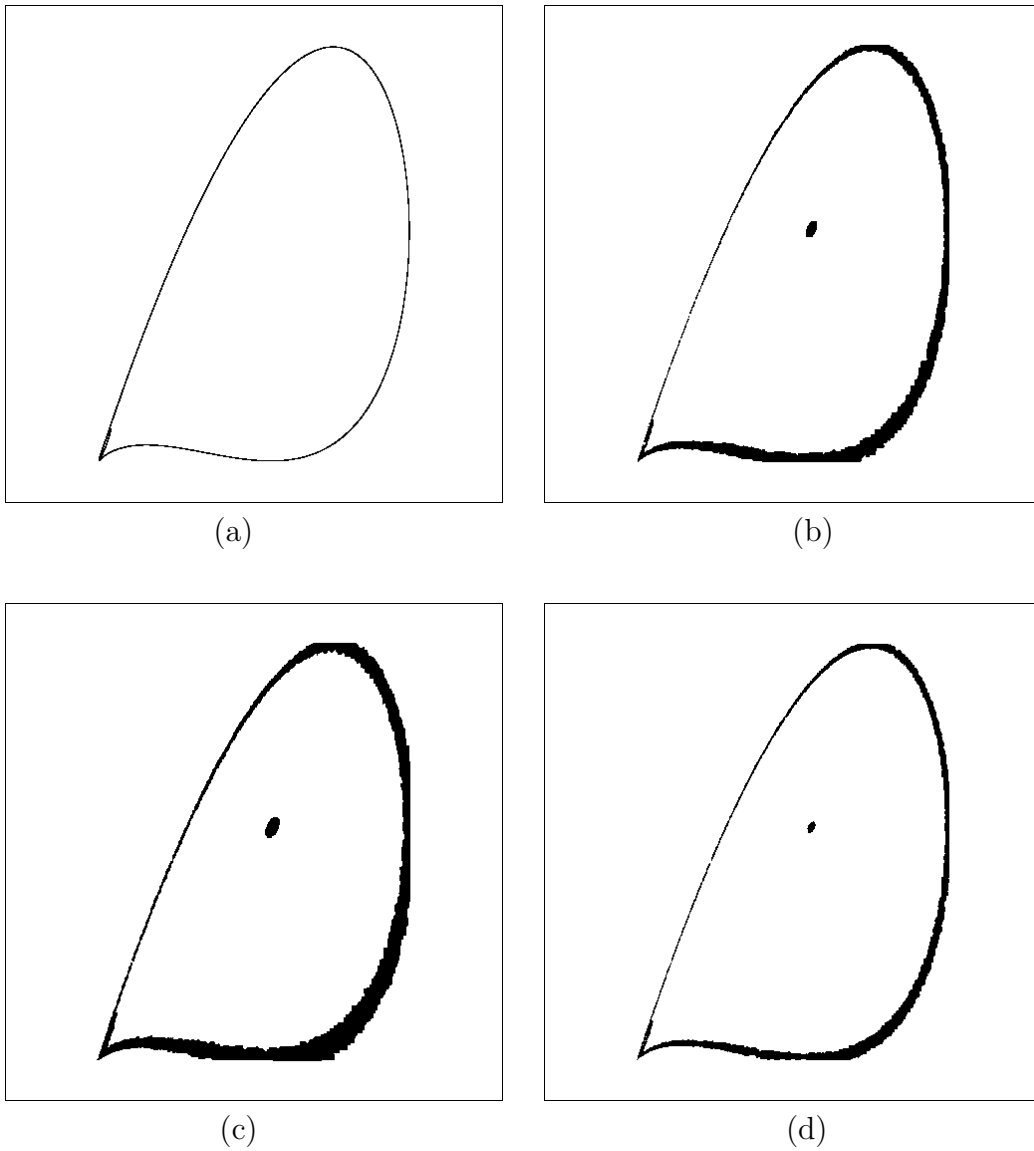


Figura 4.3: Atrator estranho do mapa logístico em uma janela de tamanho $[-0.3, 1.3] \times [-0.1, 1.1]$. (a) Método por amostragem. (b) Método por amostragem via cell-mapping com a resolução de 512^2 células tomando 16 amostras em cada célula. (c) Método intervalar com a resolução de 512^2 células. (d) Método intervalar com a resolução de 1024^2 células.

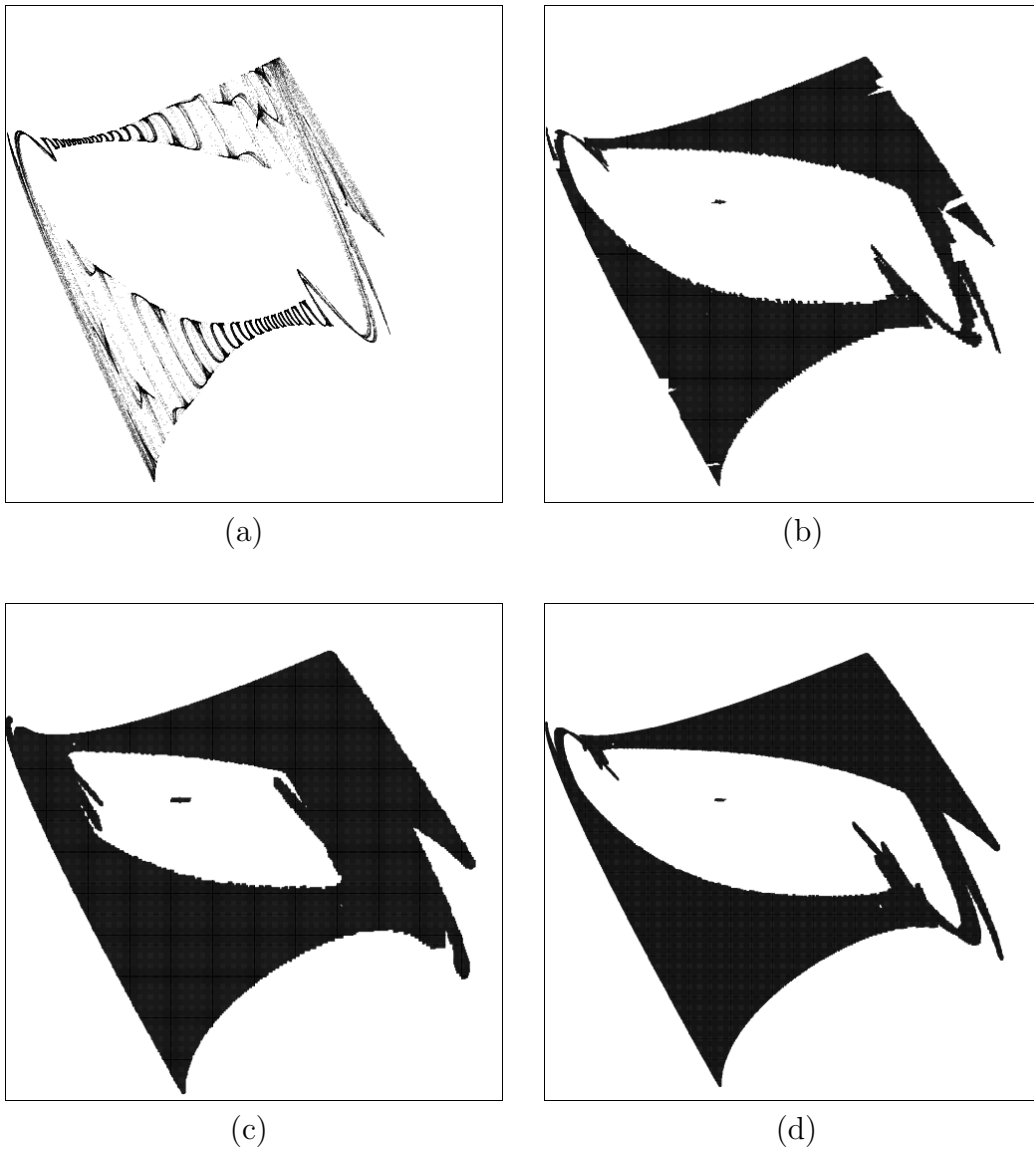


Figura 4.4: Atrator estranho do mapa quadrático AMTMNQQXUYGA em uma janela de tamanho $[-1.2, 0.2] \times [-1.5, 1.0]$. (a) Método por amostragem. (b) Método por amostragem via cell-mapping com a resolução de 512^2 células tomando 16 amostras em cada célula. (c) Método intervalar com a resolução de 512^2 células. (d) Método intervalar com a resolução de 1024^2 células

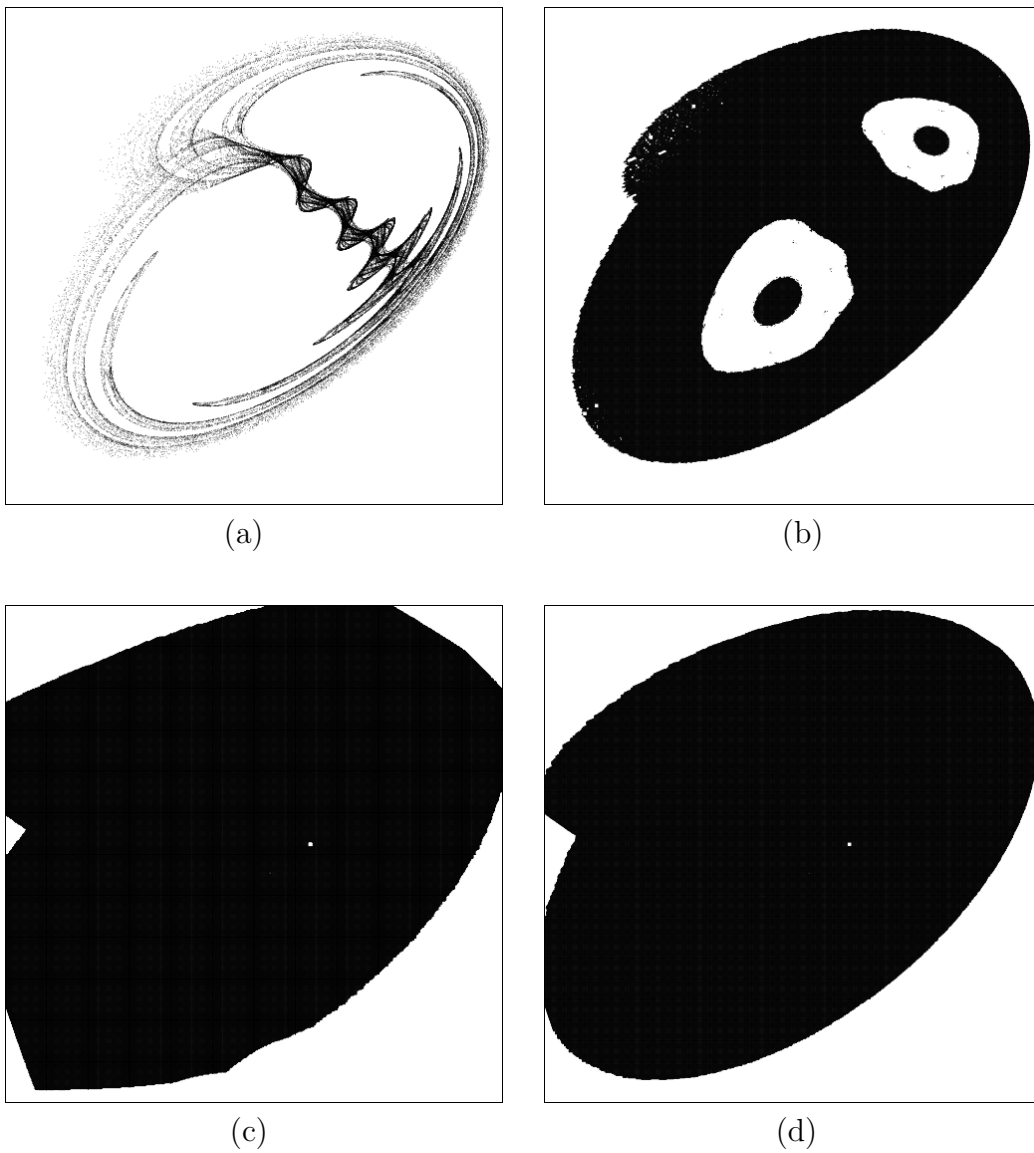


Figura 4.5: Atrator estranho do mapa quadrático LUFBBFISGJYS em uma janela de tamanho $[0.0, 2.0] \times [-1.8, -0.2]$. (a) Método por amostragem. (b) Método por amostragem via cell-mapping com a resolução de 1024^2 células tomando 9 amostras em cada célula. (c) Método intervalar com a resolução de 512^2 células. (d) Método intervalar com a resolução de 1024^2 células

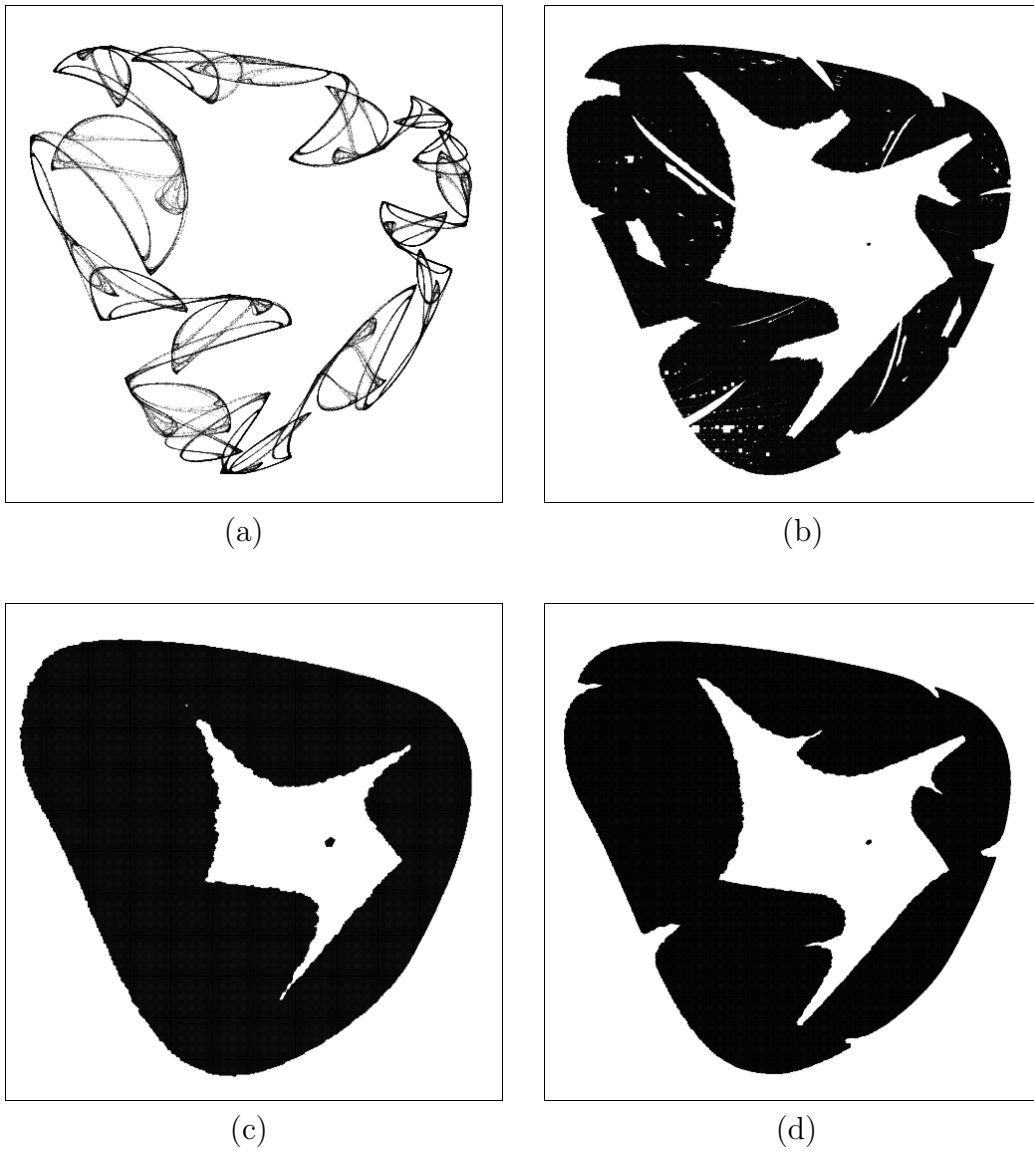


Figura 4.6: Atrator estranho do mapa quadrático WNC SLFLGIHGL em uma janela de tamanho $[-0.4, 1.1] \times [-1.3, 0.6]$. (a) Método por amostragem. (b) Método por amostragem via cell-mapping com a resolução de 1024^2 células tomando 9 amostras em cada célula. (c) Método intervalar com a resolução de 512^2 células. (d) Método intervalar com a resolução de 1024^2 células

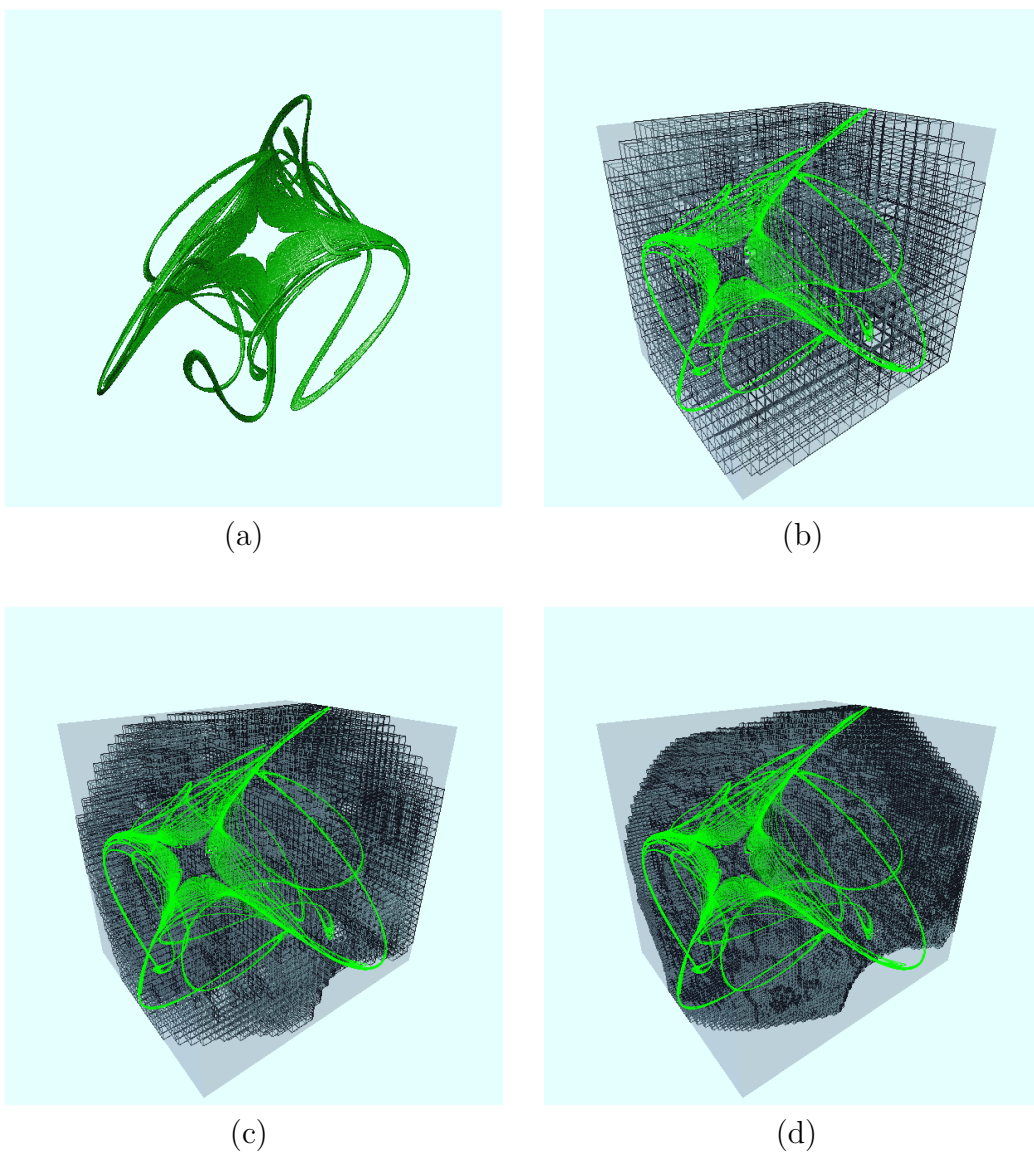


Figura 4.7: Atrator estranho do mapa quadrático tridimensional JKRADSXGDBHIJTQJJJDICEJKYSTXFNU em uma janela de tamanho $[-0.94, 0.026] \times [-0.88, 0.17] \times [-0.77, 0.34]$. (a) Método por amostragem. (b) Método intervalar com a resolução de 16^3 células (c) Método intervalar com a resolução de 32^3 células. (d) Método intervalar com a resolução de 64^3 células

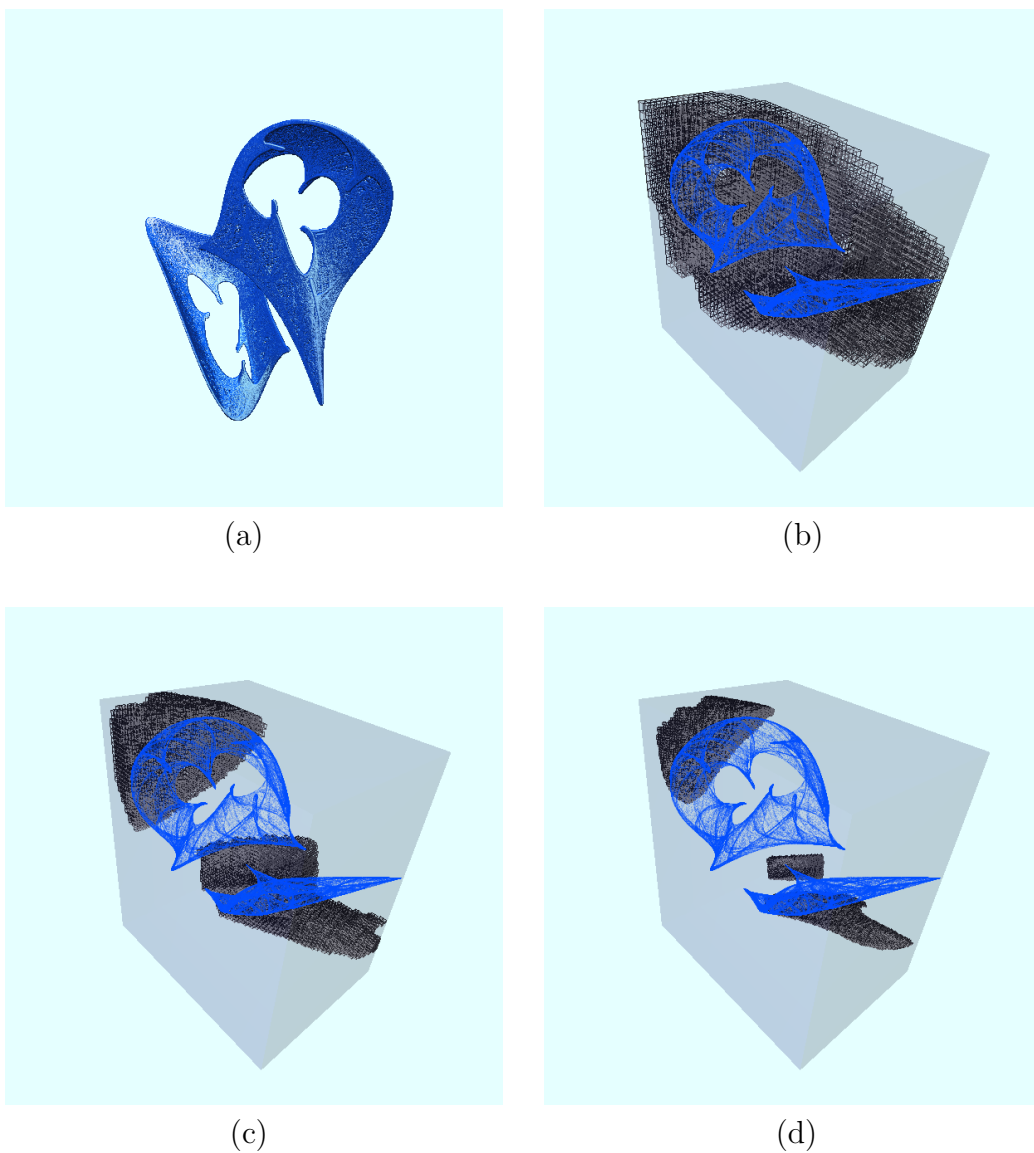


Figura 4.8: Atrator estranho do mapa quadrático tridimensional OHGW-FIHJPSGWTOJBXWJKPBLKFRUKKQ em uma janela de tamanho $[-0.19, 0.53] \times [-0.69, 0.40] \times [-0.43, 0.54]$. (a) Método por amostragem. (b) Método intervalar com a resolução de 32^3 células (c) Método intervalar com a resolução de 64^3 células. (d) Método intervalar com a resolução de 128^3 células

Capítulo 5

Conclusão

Apesar da existência do lema do sombreamento, vimos nesse trabalho que nem sempre podemos confiar nas imagens geradas pelos métodos de visualização por amostragem, no método clássico por amostragem não há nenhuma garantia de que os pontos descartados no início do método sejam realmente pontos transientes e que o restante dos pontos exibidos são realmente pontos recorrentes, isso é facilmente visto nas Figuras 4.2(a) e 4.2(d); repare também que, nas Figuras 4.7(d) e 4.8(d), parte do atrator obtido pelo método por amostragem fica fora da cobertura de células fornecida pelo método intervalar.

Já o método por amostragem via cell-mapping possui uma dependência intrínseca no número de amostras tomadas em cada célula obtida na decomposição celular da caixa envolvente do atrator, veja a Figura 3.6.

Finalmente temos o confiável e seguro método intervalar, que além de ser seguro no sentido que garante que fora da cobertura do atrator fornecida por ele, não há pontos recorrentes do mapa ele também fornece mais informações do mapa como pode ser visto comparando as Figuras 4.3(a) e 4.3(d). Note que o mapa logístico (4.4) tem o ponto $(1 - \frac{1}{2.27}, 1 - \frac{1}{2.27})$ como ponto fixo, veja que tal ponto fixo na Figura 4.3(a), obtida pelo método por amostragem, não é detectado enquanto na Figura 4.3(d) o método intervalar possibilita a visualização desse ponto fixo apesar do exagero intervalar. O mesmo ocorre nas Figuras 4.4(a), 4.4(d), 4.6(a) e 4.6(d). Por outro lado essa segurança tem um alto preço, no sentido computacional, pois o grafo gerado por esse método cresce muito e às vezes gera grafos com mais de meio milhão de vértices.

O próximo passo é utilizar *aritmética afim* [1] na finalidade de gerar grafos com menos vértices dos que obtivemos com o uso da aritmética intervalar.

Bibliografia

- [1] J. Stolfi & L.H. de Figueiredo. *Self-Validated Numerical Methods and Applications*. 21° Colóquio Brasileiro de Matemática, 1997.
- [2] G.W. Flake. *The Computational Beauty of Nature*. MIT Press, 1998.
- [3] Z. Galias. Rigorous numerical studies of existence of periodic orbits from Hénon map. *J. Universal Computer Science*, 4(2):114–124, 1997.
- [4] Z. Galias. Rigorous investigations of Ikeda map by means of interval arithmetic. *Nonlinearity*, 15:1759–1779, 2002.
- [5] M. Hénon. A two dimensional map with a strange attractor. *Commun. Math. Phys.*, 50:69–77, 1976.
- [6] A.V. Holden. *Chaos - Nonlinear Science: theory and applications*. Manchester University Press, 1986.
- [7] C.S. Hsu. *Cell-to-Cell Mapping*. Springer-Verlag New York, 1987.
- [8] C.S. Hsu. Global analysis by cell mapping. *International Journal of Bifurcations and Chaos*, 2(4):727–771, September 1992.
- [9] D.E. Knuth. *The Stanford Graph Base*. Addison-Wesley, 1993.
- [10] E.N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.*, 20:130–141, 1963.
- [11] D. Michelucci. Reliable representations of strange attractors. In Walter Kraemer & Juergen Wolff v. Gudenberg, editor, *Scientific Computing, Validated Numerics, Interval Methods*, pages 379–389, Kluwer, 2001.
- [12] R.E. Moore. *Interval Analysis*. Prentice-Hall, 1966.

- [13] E. Ott. *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press, second edition, 2002.
- [14] D.K. Arrowsmith & C.M. Place. *An Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 1990.
- [15] A. Neumaier & T. Ruge. Rigorous chaos verification in discrete dynamical systems. *Physica D*, 67:175–190, 1993.
- [16] T. Cormen & C. Leiserson & R. Rivest. *Introduction to Algorithms*. MIT Press, 1990.
- [17] C. Robinson. *Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics, and chaos*. CRC Press, 1995.
- [18] J.T. Sandefur. *Discrete Dynamical Systems*. Oxford University Press, 1990.
- [19] E. Nuutila & E. Soisalon-Soininen. On finding the strongly connected components in a directed graph. *Information Processing Letters*, 49:9–14, 1993.
- [20] J.C. Sprott. Automatic generation of strange attractors. *Computer & Graphics*, 17(3):325–332, 1993.
- [21] R. Tarjan. Depth first search and linear graph algorithms. *SIAM Journal of Computing*, 1(2):146–160, June 1972.
- [22] M. Pichat & J. Vignes. Cadna: a tool for studying chaotic behavior in dynamical systems. In *Proc. Real Numbers and Computers*, Ecole de Mines, St-Etienne, France, April 4–6 1995.
- [23] H.E. Nusse & J.A. Yorke. *Dynamics: numerical explorations*. Springer-Verlag New York, 1998.