



INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

# Reconstrução de Regiões a partir de Amostras com Ruído

**Emilio Ashton Vital Brazil**

Orientador: Luiz Henrique de Figueiredo

Rio de Janeiro, 5 de março de 2007





# Agradecimentos

A Cristina, Dinah e Gelia, pelo amor e paciência dedicados a mim. A Seu Genaro que primeiro me apresentou a matemática e depois incentivou e deu os ensinamentos para chegar ao IMPA. A Danilo Felizardo Barbosa e Alan Almeida que junto com Seu Genaro me mostraram a beleza da matemática, a meu irmão Ashton e Dona Arlete que sempre me apoiaram e a Arthur, Laura e Judy que acolheram à minha família.

Aos professores, Luiz Henrique de Figueiredo, que me orientou não só nesse trabalho como em diversas outras situações; Paulo Cezar Carvalho e Luiz Velho pelas ótimas aulas e conversas sobre diversos temas em Computação Gráfica e afins.

Aos meus colegas do VISGRAF, que muito me ajudaram, especialmente, Ives, Dimas e Geisa.

A todos eficientes e prestativos funcionários do IMPA, citando Sérgio (meu caro) que estive mais próximo porém sem esquecer dos demais.

E a todos os excelentes amigos que fiz no IMPA.



# Resumo

Extrair informações a partir de nuvens de pontos é um problema clássico em várias áreas de pesquisa, como estatística, visão computacional, modelagem, engenharia reversa e geometria computacional. Neste trabalho estamos interessados em nuvens de pontos do plano que representem uma região limitada, definida por um conjunto finito de curvas simples e fechadas. Delimitamos o problema de reconstrução de regiões do plano a partir de uma nuvem de pontos ruidosa como sendo um problema de aproximação de funções. Apresentamos um algoritmo de reconstrução baseado em funções de base radial que apresentou resultados interessantes e coerentes com a teoria desenvolvida em sua construção.

**Palavras-Chave:** Amostras Ruidosa; Aproximação de Funções; Funções de Base Radial



# Abstract

Information extraction from point clouds is a classic problem in fields as diverse as statistics, computer vision, geometric modeling, reverse engineering and computational geometry. In this work, we are interested in point clouds representing a bounded region of the plane defined by a finite set of simple closed curves. We approach this problem as one of function approximation. We designed a reconstruction algorithm based on radial basis functions that presented interesting results in conformance with the theory developed for its construction.

**Keywords: Noisy Samples; Function Approximation; Radial Basis Functions**



# Sumário

<b>1</b>	<b>O Problema</b>	<b>1</b>
1.1	Introdução . . . . .	1
1.2	O problema . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Aproximação por Coerência Espacial</b>	<b>7</b>
2.1	Visão geral do método . . . . .	7
2.2	Núcleos . . . . .	8
2.3	Raio . . . . .	12
2.4	A função aproximante $\hat{F}_\Lambda$ . . . . .	15
2.5	Ruído . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Resultados</b>	<b>19</b>
3.1	Conjunto de teste . . . . .	20
3.2	Amostras estruturadas $\times$ Amostras sem estrutura . . . . .	23
3.3	Convergência do erro $\times$ Quantidade de pontos . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Conclusões</b>	<b>39</b>
	<b>Notação</b>	<b>43</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>45</b>





# Lista de Figuras

1.1	Nuvem de pontos ruidosa sobre $\Lambda$ . . . . .	2
1.2	Amostragem espargida sobre $\mathcal{O}(\Omega, F_\Lambda)$ . . . . .	5
2.1	Perfil dos núcleos compactos, variando $k$ . . . . .	9
2.2	Perfil dos núcleos não compactos, variando $k$ . . . . .	9
2.3	Aspecto local dos núcleos quando variamos a distância das amostras .	10
2.4	Mapa de altura de $\Phi$ , variando o núcleo de reconstrução . . . . .	11
2.5	Cálculo de $R_0$ . . . . .	13
2.6	Cálculo de $r$ . . . . .	14
2.7	Mapas de altura das funções $\Phi$ e $\widehat{F}_\Lambda$ e $\widehat{\Lambda}$ . . . . .	16
2.8	Comparação entre amostradas sobre $\mathcal{O}(S, \chi_\Lambda)$ e $\mathcal{O}(S, \tilde{\chi}_\Lambda)$ . . . . .	18
3.1	Funções característica das regiões usadas para gerar o conjunto de teste	20
3.2	Funções $\tilde{\chi}_a$ e $\tilde{\chi}_Q$ construídas a partir de um filtro Gaussiano de passa- baixa . . . . .	21
3.3	Tipos de amostras usadas para gerar o conjunto de teste . . . . .	22
3.4	$\widehat{F}$ , $\Delta_{\widehat{F}}$ , $\widehat{\Lambda}$ e $\Delta_{\widehat{\Lambda}}$ variando a estrutura espacial da amostra, com 1.000 pontos amostrados sobre $\mathcal{O}(\Omega, \chi_a)$ . . . . .	27
3.5	$\widehat{F}$ , $\Delta_{\widehat{F}}$ , $\widehat{\Lambda}$ e $\Delta_{\widehat{\Lambda}}$ variando a estrutura espacial da amostra, com 10.000 pontos amostrados sobre $\mathcal{O}(\Omega, \chi_a)$ . . . . .	28
3.6	$\widehat{F}$ , $\Delta_{\widehat{F}}$ , $\widehat{\Lambda}$ e $\Delta_{\widehat{\Lambda}}$ variando a estrutura espacial da amostra, com 1.000 pontos amostrados sobre $\mathcal{O}(\Omega, \tilde{\chi}_a)$ , com 2% de ruído . . . . .	29
3.7	$\widehat{F}$ , $\Delta_{\widehat{F}}$ , $\widehat{\Lambda}$ e $\Delta_{\widehat{\Lambda}}$ variando a estrutura espacial com 10.000 pontos sobre $\mathcal{O}(\Omega, \tilde{\chi}_a)$ , 2% de ruído . . . . .	30

3.8	Nuvens de pontos usadas para gerar a figura 3.4 . . . . .	31
3.9	Nuvens de pontos usadas para gerar a figura 3.5 . . . . .	32
3.10	Nuvens de pontos usadas para gerar a figura 3.6 . . . . .	33
3.11	Nuvens de pontos usadas para gerar a figura 3.7 . . . . .	34
3.12	Gráfico da evolução do erro quando aumentamos a quantidade de pontos amostrados sobre $\Omega$ , com $\Lambda$ sendo “a” . . . . .	35
3.13	Gráfico da evolução do erro quando aumentamos a quantidade de pontos amostrados sobre $\Omega$ , com $\Lambda$ sendo “Q” . . . . .	36
3.14	Comparação de reamostragem com a aproximação . . . . .	37
3.15	Efeito de arredondamento na aproximação de “Q” usando amostras GR	37
4.1	Ilustração da geração de amostras sintéticas a partir de um digitali- zador de superfícies . . . . .	41
4.2	Funções característica das regiões usadas para gerar o conjunto de teste	41

# Lista de Tabelas

3.1	Tabela de $\overline{\Delta}_{\hat{F}} \mid \overline{\Delta}_{\hat{\Lambda}}$ com 500 pontos amostrados sobre $\Omega$ . . . . .	23
3.2	Tabela de $\overline{\Delta}_{\hat{F}} \mid \overline{\Delta}_{\hat{\Lambda}}$ com 1.000 pontos amostrados sobre $\Omega$ . . . . .	23
3.3	Tabela de $\overline{\Delta}_{\hat{F}} \mid \overline{\Delta}_{\hat{\Lambda}}$ com 4.000 pontos amostrados sobre $\Omega$ . . . . .	24
3.4	Tabela de $\overline{\Delta}_{\hat{F}} \mid \overline{\Delta}_{\hat{\Lambda}}$ com 10.000 pontos amostrados sobre $\Omega$ . . . . .	24



# Capítulo 1

## O Problema

### 1.1 Introdução

Extrair informações a partir de nuvens de pontos é um problema clássico em várias áreas de pesquisa, como estatística, visão computacional, modelagem [CBC<sup>+</sup>01], engenharia reversa [LCW05] e geometria computacional [dG95]. Em cada área a abordagem do problema e o tipo de informação que se deseja extrair são bem distintos. Neste trabalho estamos interessados em nuvens de pontos do plano que representem uma região limitada, definida por um conjunto finito de curvas simples e fechadas.

Diferente da maioria das pesquisas relacionadas com reconstrução a partir de uma nuvem de pontos, nosso trabalho se baseia não apenas na informação da fronteira [dG95, CBC<sup>+</sup>01, LCW05, DG04], mas também em informações do interior da região. Entretanto diferente do trabalho de [EKS83], nossa abordagem não é simplesmente geométrica, pois usaremos teoria de aproximação de funções para abordar o problema.

### 1.2 O problema

Neste trabalho abordaremos o problema de reconstruir uma região  $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^2$ , a partir de uma nuvem de pontos amostrados com ruído sobre esta região (figura 1.1).

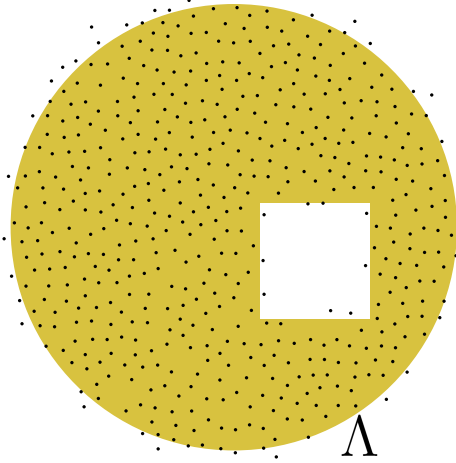


Figura 1.1: Nuvem de pontos ruidosa sobre  $\Lambda$

Descrito assim, este problema é intuitivamente bem simples de ser entendido. Entretanto para abordarmos este problema com o ferramental matemático de aproximação de funções teremos que definir alguns conceitos e fazer algumas simplificações.

Para simplificar o problema vamos considerar a região  $\Lambda$  definida por um conjunto finito de curvas simples e fechadas, contidas em um conjunto suporte  $\Omega$ , uma região limitada do plano, tipicamente um retângulo. E vamos definir:

**Definição 1** *Dado  $S$  um conjunto do plano, uma função difusa de pertinência de  $S$  é uma função  $\tilde{\chi}_S : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$  tal que:*

$$\tilde{\chi}_S(x) = 0 \Rightarrow x \notin S$$

$$\tilde{\chi}_S(x) = 1 \Rightarrow x \in S$$

Observe que, ao contrário da função *característica de  $S$* ,  $\chi_S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \{0, 1\}$  e  $x \in S \Leftrightarrow \chi_S(x) = 1$ , dado um conjunto  $S$  existem, infinitas funções difusas de pertinência para  $S$  e também, dada uma função difusa de pertinência diferente da característica, existem infinitos conjuntos que podem ser associados a ela. Vamos usar a notação  $\tilde{\chi}_S$ , apesar de ser dúbia, para ressaltar que a função está relacionada com  $S$  e será uma aproximação de sua função característica e também quando explicitarmos a função  $\tilde{\chi}_S$ , identificá-la como uma função de pertinência de  $S$ .

Faremos agora certas imposições sobre os tipos de nuvens que abordaremos pois, ao contrário dos problemas clássicos de aproximação, nos quais sabemos os valores funcionais dos pontos da nuvem [Buh03], nós não possuímos tal informação; teremos então que explorar a coerência espacial das amostras. Por isso faremos certas restrições sobre os possíveis espalhamento dos pontos sobre a região. Queremos nuvens que tenham um espalhamento como se os pontos fossem borrifado sobre a região, desejamos explorar o fato que, dada uma unidade de área, sobre uma região amostrada de maneira *espargada*, esperamos uma baixa variação no número de pontos amostrado por unidade de área. Definimos então:

**Definição 2** *Um método de amostragem sobre um retângulo  $\Omega$  do plano, será dito espargido quando para todo  $\Lambda \subseteq \Omega$  temos:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\Lambda}{N} = \frac{\mathcal{A}(\Lambda)}{\mathcal{A}(\Omega)}$$

*Por abuso de notação  $\#\Lambda = \#(\mathcal{P} \cap \Lambda)$ , onde  $\mathcal{P}$  é a nuvem de pontos gerada pelo método de amostragem e  $N$  o número de pontos de  $\mathcal{P}$ .*

Chamamos de método de amostragem um algoritmo de escolha de pontos sobre  $\Omega$ , sendo estas escolhas aleatórias ou não. Observamos que métodos que simulem a distribuição uniforme sobre  $\Omega$  são espargidos. Além das amostragens com distribuição uniforme usaremos outras amostragem espargidas, como a de grade regular, grade regular perturbada e disco de Poisson [Coo86], estudaremos os efeitos dessas amostras no capítulo 3.

Usaremos um método de amostragem muito utilizado em simulações, o método da rejeição, que simula amostragem de distribuição contínua com função densidade  $f(x)$  a partir de amostragem com função densidade  $g(x)$  [Ros85].

**Definição 3** *Método de rejeição: dada uma função densidade  $g(x)$  tal que exista uma constante  $c$  que  $\frac{f(x)}{g(x)} \leq c$ , geramos uma amostra  $X$  com função densidade proporcional a  $f(x)$  em dois passos:*

- 1. Gere uma amostra  $Y$  com densidade  $g(x)$  e um número aleatório  $U$  com distribuição uniforme entre 0 e 1*

2. Se  $U \leq \frac{f(x)}{cg(x)}$ ;  $X = Y$ ; se não volte ao passo 1

**Teorema 1** *Uma amostragem gerada pelo método de rejeição tem função densidade proporcional a  $f(x)$  [Ros85]*

Para chegarmos a formulação final do problema e podermos atacá-lo com o feramental de aproximações de funções faremos mais algumas definições:

**Definição 4** *Um objeto planar é um par  $\mathcal{O}(S, F)$  onde  $S \subseteq \mathbb{R}^2$  e  $F$  é a função de atributos de  $S$ ,  $F : S \rightarrow \mathbb{A}$ , e  $\mathbb{A}$  é um espaço de atributos [GV03]*

**Definição 5** *Amostragem espargida sobre um objeto planar  $\mathcal{O}(\Omega, F)$ : é um método de rejeição que geramos  $Y$  por um método de amostragem espargido sobre  $\Omega$ , fazemos  $g(x) = 1$ ,  $c = \sup \{f(x)\}$  e  $f(x) = F$ . Onde  $\Omega$ , é uma caixa envolvente de  $\Lambda$  a região que queremos reconstruir. Para nós  $F$  ou é  $\chi_\Lambda$  a função característica de  $\Lambda$  ou é  $\tilde{\chi}_\Lambda$ , uma função de pertinência difusa.*

Observe que a definição 5 é uma generalização para a definição de amostragem uniforme sobre uma região do plano, que acontece quando  $F$  é  $\chi_\Lambda$  e a amostragem espargida simula uma variável aleatória com função densidade  $g(x) = \frac{\chi(\Omega)}{\mathcal{A}(\Omega)}$ . Neste caso o teorema 1 garante uma amostragem uniforme sobre  $\Lambda$ .

Vamos usar  $F_\Lambda$  para denotar a função de atributos de  $\Omega$  indicando que a região que queremos reconstruir é  $\Lambda$ . Quando  $F_\Lambda \neq \chi_\Lambda$  teremos pontos que, mesmo tendo sido amostrados sobre a região  $\Lambda$ , serão descartados e outros que, mesmo estando fora, serão mantidos pois poderemos ter valores entre 0 e 1 para  $F_\Lambda$  (vide figura 1.2). A esta incerteza de pertinência da amostra chamaremos de *ruído*. Observe que quanto mais aproximada  $F_\Lambda$  for da função característica  $\chi_\Lambda$ , menos ruído teremos em nossa amostragem e esperamos obter uma melhor reconstrução.

Reformulamos então o problema final como sendo:

*Dada uma nuvem de pontos obtida por um método de amostragem espargido sobre  $\mathcal{O}(\Omega, F_\Lambda)$ , onde se desconhece os valores funcionais de  $F_\Lambda$ , obter uma aproximação para  $\Lambda$ .*



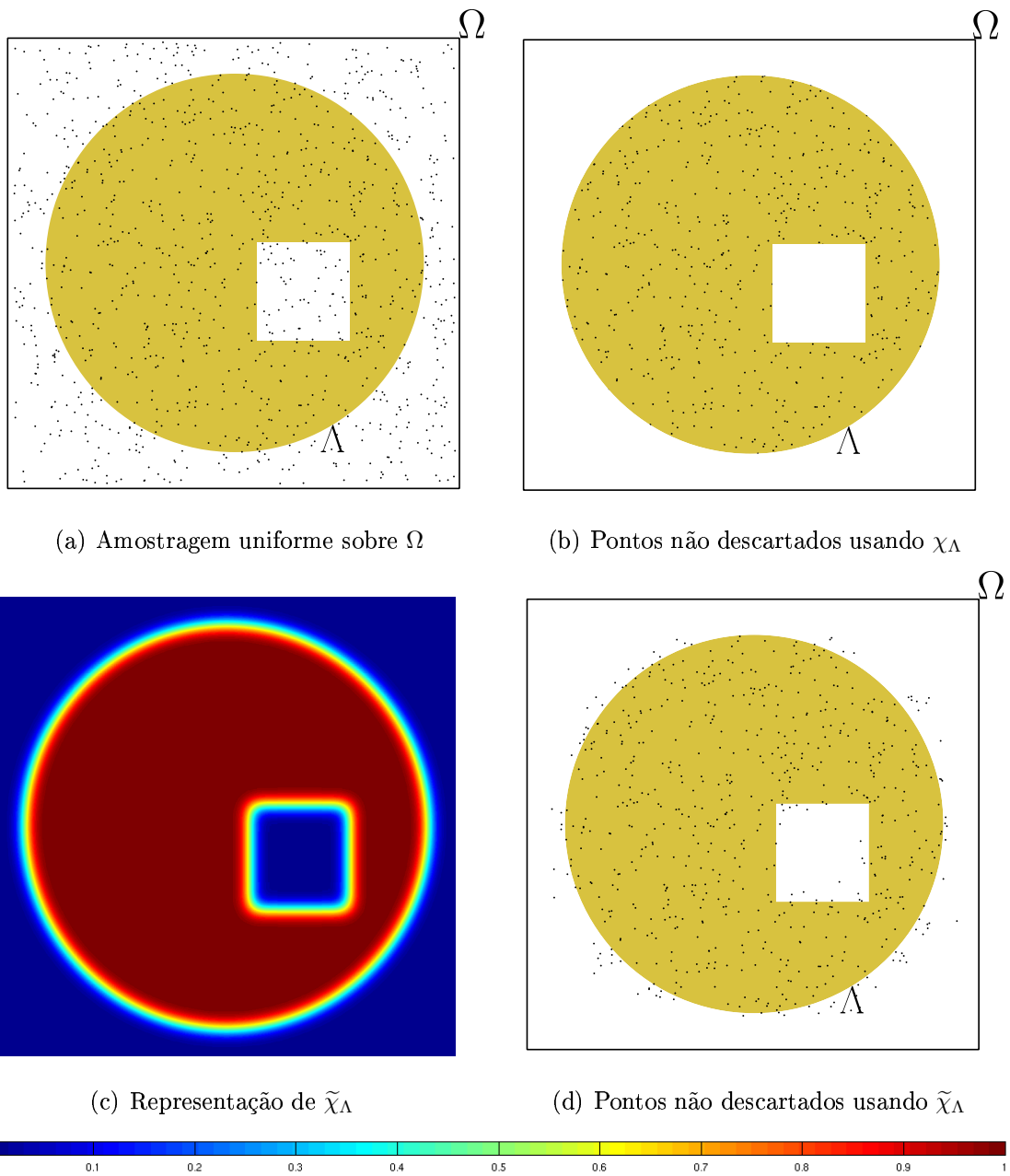


Figura 1.2: Amostragem espargida sobre  $\mathcal{O}(\Omega, F_\Lambda)$



# Capítulo 2

## Aproximação por Coerência Espacial

### 2.1 Visão geral do método

Como definido no capítulo anterior, estamos procurando uma função aproximante para funções difusas de conjuntos do plano que são delimitados por curvas de Jordan. Para obter uma aproximação de  $F_\Lambda$  vamos utilizar funções de base radial [Buh03] para construir uma função implícita a qual normalizamos e obtemos a função aproximante final.

Mais precisamente, temos que dada uma nuvem  $\mathcal{P}$  com  $N$  pontos, amostrados de modo espargido sobre  $\mathcal{O}(\Omega, F_\Lambda)$ , construímos  $\Phi(x) = \sum_{\xi \in \mathcal{P}} K_\xi(x)$  uma função,  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , implícita de base radial, onde  $K_\xi(x)$  é a *função núcleo* centrada em  $\xi$  (discutida na seção 2.2). Aproximamos então  $F_\Lambda$  por  $\widehat{F}_\Lambda$ , uma função difusa calculada a partir de uma normalização de  $\Phi$  por uma altura de corte  $c$ :

$$(2.1) \quad \widehat{F}_\Lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \Phi(x) \leq c(1 - \alpha) \\ \frac{\Phi(x) - c(1 - \alpha)}{c(\alpha + \beta)} & \text{se } c(1 - \alpha) \leq \Phi(x) \leq c(1 + \beta) \\ 1 & \text{se } \Phi(x) \geq c(1 + \beta) \end{cases}$$

Diremos que a região  $\Lambda$  é aproximada por:

$$(2.2) \quad \widehat{\Lambda} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \widehat{F}_\Lambda > \delta\},$$

para algum limiar  $\delta \in (0, 1]$ .

## 2.2 Núcleos

Uma grande diversidade de núcleos podem ser usados para definir  $\Phi$ . Para cada família de núcleos teremos diferentes características na reconstrução. Restringimos nossas escolhas pela natureza do problema proposto. Como assumimos que nossa amostragem é espargida, não existe nenhuma direção que os pontos “prefiram” ou estejam concentrados. Escolhemos então núcleos de base radial *isotrópicos*, i.e., tais que o valor de  $K_\xi(x)$  só depende da distância  $|x - \xi|$ , não da direção  $x - \xi$ . Outro ponto importante é o núcleo ter ou não suporte compacto. Experimentalmente percebemos que este fato influi fortemente na topologia dos objetos aproximantes (figura 2.4). Descreveremos a seguir algumas famílias de núcleos testadas e faremos alguns comentários sobre o porquê das escolhas.

Definimos as famílias de funções por  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  onde alterando  $\psi$ , alteramos o núcleo. Para cada família de núcleos testada temos diversos parâmetros, que definimos assim:  $K_\xi(x) = \psi\left(\frac{d(x,\xi)}{r}\right)$ , onde  $d(x,\xi)$  é a distância euclidiana do ponto  $x$  ao ponto amostral  $\xi$ . Definimos também os seguintes parâmetros:  $r$  o *raio de influência* dos pontos da amostra,  $\varepsilon$  o *erro máximo do truncamento* e  $k$  a *potência* do núcleo,  $k \in \mathbb{N}$ .

Para gerar núcleos de suporte compacto definimos  $\psi(u) = 0$  para todo  $u > 1$  e testamos as seguintes funções (figura 2.1):

1. Constante:  $\psi(u) = 1$
2. Linear:  $\psi(u) = 1 - u$
3. Polinomial:  $\psi(u) = 1 - 2u^k + u^{k+1}$
4. Racional:  $\psi(u) = \frac{1}{\varepsilon^{-1}u^k + 1}$
5. Exponencial compacto:  $\psi(u) = e^{-\log(\varepsilon^{-1})u^k}$

Para núcleos de suporte não compacto testamos (figura 2.2):

1. Exponencial:  $\psi(u) = e^{-u^k}$

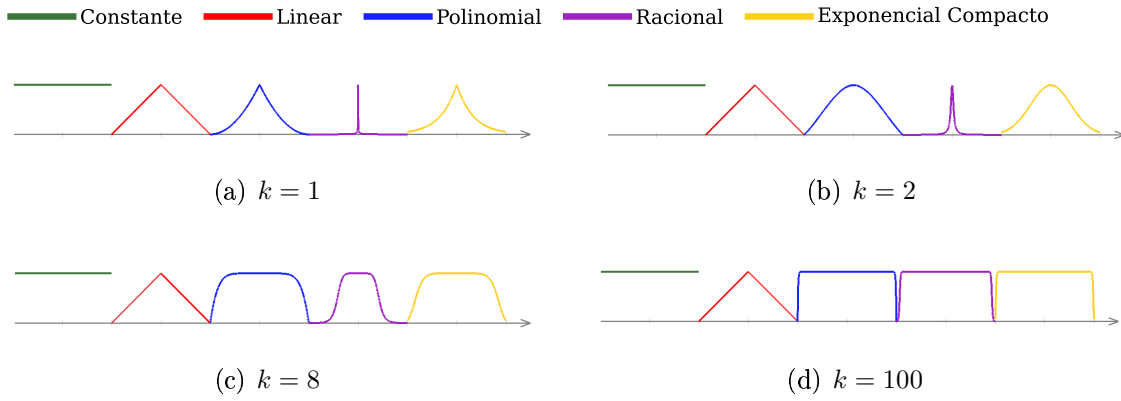


Figura 2.1: Perfil dos núcleos compactos, variando  $k$

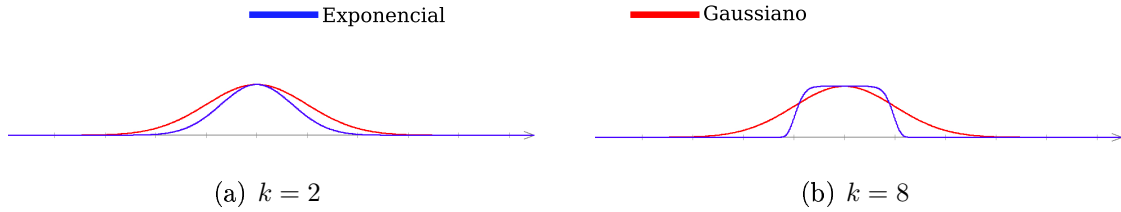
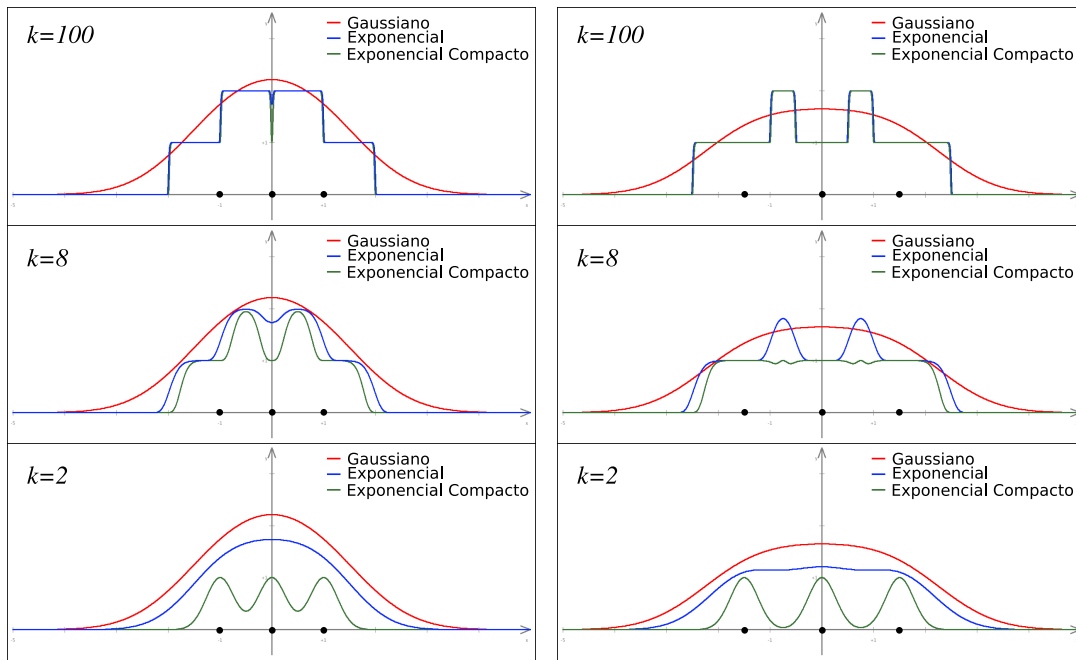


Figura 2.2: Perfil dos núcleos não compactos, variando  $k$

## 2. Gaussiano: $\psi(u) = e^{-u^2/2}$

Todos os núcleos de suporte compacto se mostraram semelhantes dada uma escolha apropriada de  $k$ . Observe que os núcleos Polinomial, Racional e Exponencial Compacto tendem ao núcleo Constante quando  $k$  vai para infinito. Estes núcleos tiveram muita dificuldade em capturar corretamente a topologia do objeto, criando muitos falsos buracos na aproximação; isso ocorreu principalmente com amostragens uniformes sem estrutura espacial. Como as amostras uniformes não têm necessariamente uma regularidade espacial, i.e., podemos ter pequenos agrupamentos de pontos e áreas vazias, e os núcleos compactos influem apenas localmente. Quando há áreas vazias que contêm um círculo de raio  $r$ , estas áreas ficaram marcadas como buraco, apesar de no objeto original não serem. Na figura 2.3 ilustramos o perfil de  $\Phi$  quando temos amostras sobre o raio (figura 2.3(a)) e quando as amostras tem espaçamento 50% a mais que o raio (figura 2.3(b)); estão ilustrados a utilização dos núcleos não compactos e escolhemos o exponencial compacto para representar os núcleos compactos, já que dada uma escolha apropriada de  $k$ , obtemos resultados semelhantes. Mesmo com todas as amostras sobre o raio o núcleo compacto não



(a) Perfis de  $\Phi$  com 3 amostras com espaçamento igual ao raio

(b) Perfis de  $\Phi$  com 3 amostras com espaçamento 50% maior que o raio

Figura 2.3: Aspecto local dos núcleos quando variamos a distância das amostras

apresenta nenhuma altura de corte apropriada, a não ser quando  $k \rightarrow \infty$ , ou seja o núcleo constante, porém este núcleo é muito sensível ao espaçamento da amostra; qualquer amostra fora do raio pode criar falsos buracos. Observe que na figura 2.4 nos mapas de altura de  $\Phi$  não existe altura  $c$  que não seja “contaminada” por falsos buracos, quando usamos os núcleos compactos e o exponencial.

Com o núcleo Gaussiano obtivemos melhores resultados, pois como ele não é compacto e sua “queda” é bem mais lenta que a dos outros núcleos isto torna este núcleo bem menos sensível a possíveis inconsistências espaciais da amostra (i.e., áreas com agrupamentos de amostra e outras mais vazias). Mesmo quando a amostra tem regularidade espacial a reconstrução utilizando este núcleo se mostrou mais consistente sendo a topologia melhor capturada. Com este núcleo temos como principal problema da reconstrução a suavização da geometria. Temos então que escolher um raio bem adaptado à nossa nuvem, que trataremos na próxima seção. A partir de agora, todos os parâmetros serão analisados somente para o núcleo Gaussiano.

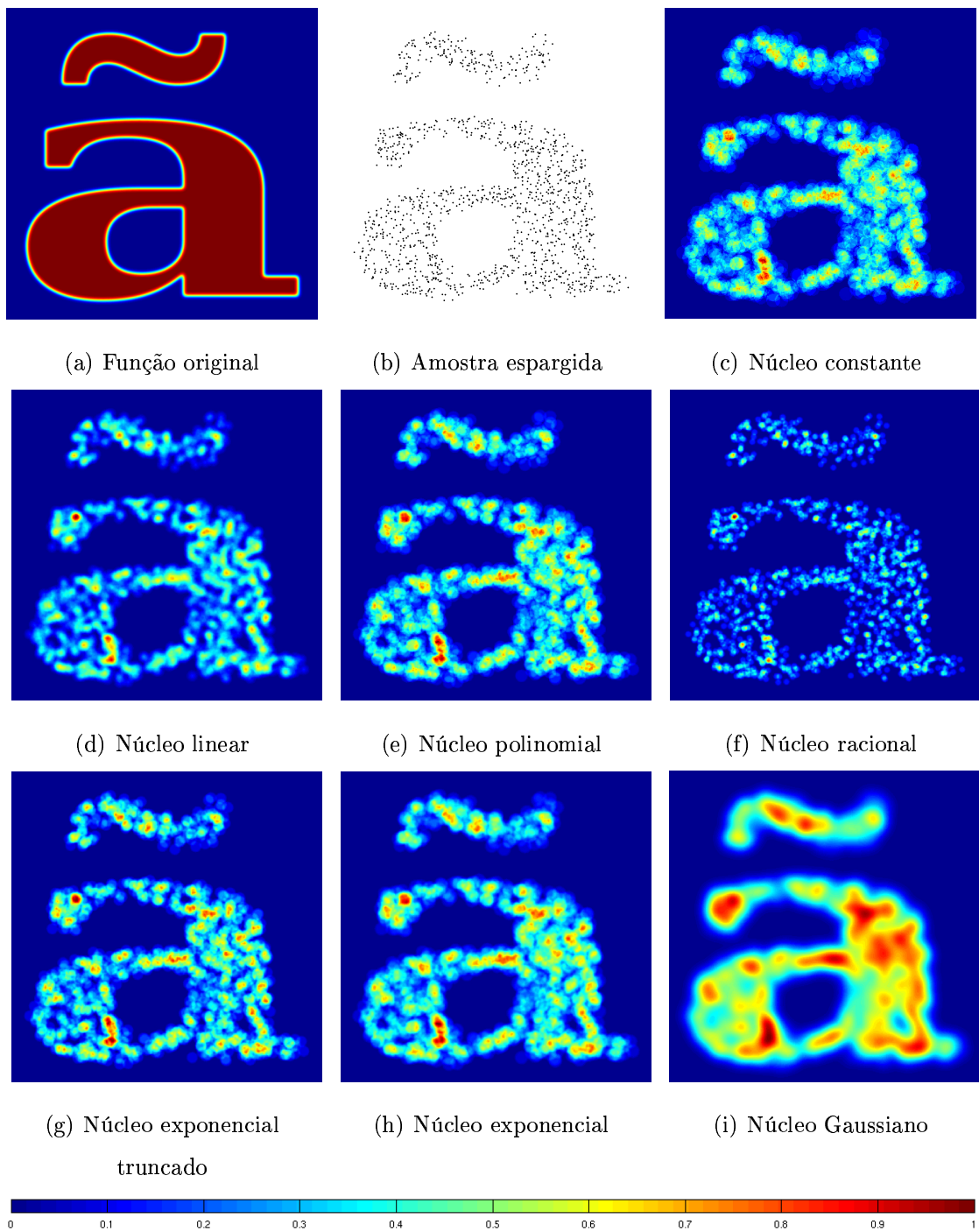


Figura 2.4: Mapa de altura de  $\Phi$ , variando o núcleo de reconstrução

## 2.3 Raio

O raio é o principal parâmetro que usamos na reconstrução, pois ele definirá o comportamento dos núcleos e terá que ser adaptado para cada nuvem de pontos. Vamos usar raios menores para amostras mais densas e maiores para amostras mais esparsas; isto reflete a quantidade de informação que atribuímos a cada ponto da amostra. Quanto menos pontos na nuvem mais temos que assumir que individualmente eles são representativos para região.

Para tornar a escolha do raio automática, vamos explorar o fato de nossas amostras serem espargidas. Então assumimos que, para os pontos sobre  $\Lambda$ , teremos uma baixa variação no número de pontos por unidade de área. Atribuímos o mesmo raio para todos os pontos amostrais  $\xi$ , pois esperamos que, dado um raio  $r$  e um ponto  $x$  sobre  $\Lambda$ , o valor funcional  $\Phi(x)$  seja influenciado por aproximadamente o mesmo número de pontos, gerando um valor maior que um certo patamar  $c$ ; este valor será usado como valor de corte para definir  $\widehat{F}_\Lambda(x)$ . O raio irá deixar a construção das curvas de Jordan mais, ou menos, suaves. Quanto maior o raio, mais suaves tendem ser as curvas que delimitam nossos conjuntos aproximantes  $\widehat{\Lambda}$  (equação 2.2). Entretanto, se o raio for pequeno, cada ponto da amostra apenas influenciará uma pequena área do seu entorno, não conseguindo interagir com os outros pontos amostrais. Como consequência, amostras cujo espalhamento espacial permitir agrupamentos e áreas vazias terão falsos buracos na aproximação.

Note que o tamanho do raio não depende apenas da densidade da amostra mas também de sua estrutura espacial. Estamos considerando que a amostragem mantém as mesmas características em toda a região, conexa ou não, e também a densidade em uma componente conexa será aproximadamente a mesma das outras. Chamamos de *densidade da amostra* a idéia intuitiva do número de pontos da amostra dividido pela área da região de  $\Lambda$  que estes pontos representam.

Para tornar a escolha do raio sensível à estrutura espacial da amostra vamos dividir o cálculo de  $r$  em duas etapas. Na primeira iremos calcular o tamanho das células que irão isolar espacialmente nossa amostra em uma grade regular. Esta



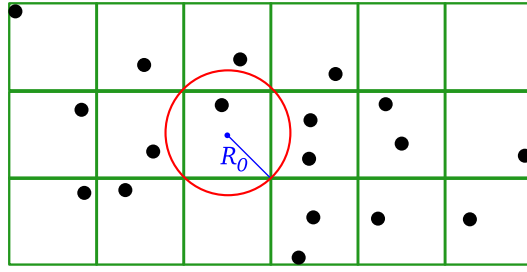


Figura 2.5: Cálculo de  $R_0$

etapa é importante para evitar que a distância entre duas componentes conexas interfira no cálculo do raio. Fazemos então uma primeira aproximação como se a nuvem de pontos ocupasse uniformemente um retângulo alinhado com os eixos e usaremos este valor para criar a grade:

$$(2.3) \quad R_0 = \sqrt{\frac{a \cdot b}{2 \cdot N}}$$

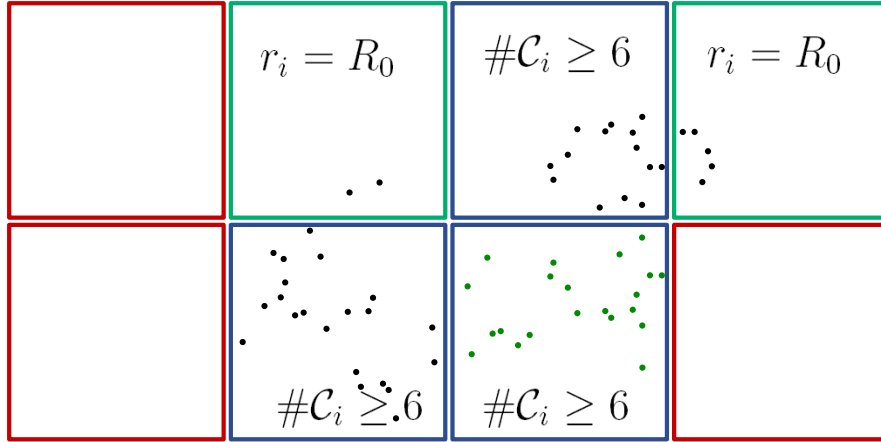
onde  $a$  e  $b$  são as dimensões do retângulo envolvente de  $\mathcal{P}$  e  $N$  é o seu número de pontos.  $R_0$  representa o raio de um círculo que circunscreve uma célula da grade que divide o retângulo em  $N$  células quadradas, figura 2.5.

Para a segunda parte do cálculo (figura 2.6) definiremos  $B_\xi^n$  como sendo a bola centrada em  $\xi$  com raio  $r(\xi, n) = \min \{k > 0; \#(\mathcal{P} \cap B(\xi, k)) \geq n\}$  com  $n \geq 2$ , i.e.,  $B_\xi^n$  é a menor bola centrada em  $\xi$  que contém pelo menos  $n$  amostras. Calculamos enfim  $r$  fazendo uma grade regular com células de lado  $2R_0$ . Por abuso de notação,  $\mathcal{C}_i = \mathcal{C}_i \cap \mathcal{P}$ . Para cada célula  $\mathcal{C}_i \neq \emptyset$  calculamos  $r_i$  (figura 2.6(b)). Se  $\#\mathcal{C}_i \geq N$ , então  $r_i$  será a média dos raios das  $B_\xi^N$  com  $\xi \in \mathcal{C}_i$ ; caso contrário,  $r_i = R_0$ .

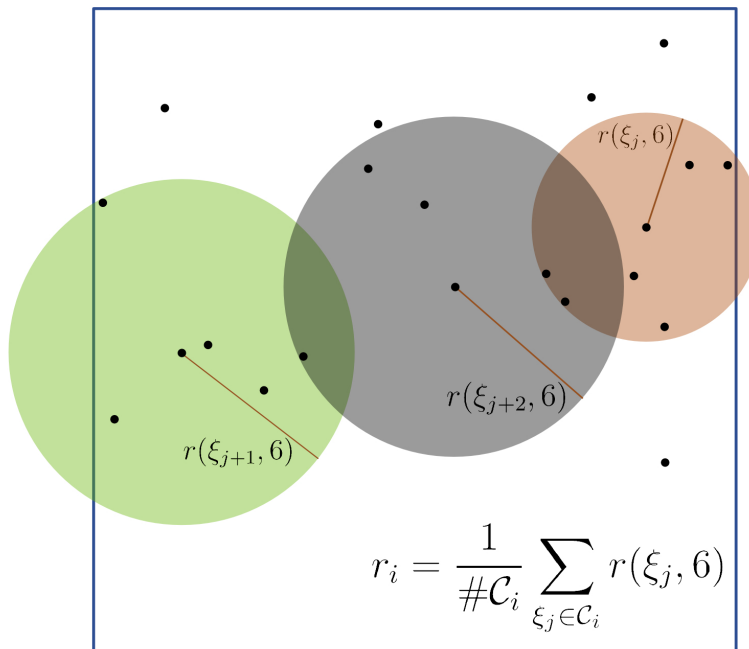
$$(2.4) \quad r = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m r_i$$

onde  $m$  é o número de células  $\mathcal{C}_i \neq \emptyset$ . Pela equação 2.3 teremos aproximadamente  $N$  células no total; como consequência, se  $\Lambda$  preencher “bem” um retângulo alinhado com os eixos teremos  $r \approx R_0$ , pois teremos em média um ponto em cada célula, já que assumimos nossa amostra espargida.

Como a estrutura espacial da amostra garante por hipótese que não teremos agrupamentos nem vazios nas regiões amostradas é bem intuitivo inferir se a amostra é



(a) Ilustração do cálculo do raio com  $n = 6$



(b) Cálculo de  $r_i$  com  $n = 6$

Figura 2.6: Cálculo de  $r$

ou não estruturada espacialmente usando o fato de que quanto maior a estrutura espacial menor será a variação de  $r(x_0, n)$ , para  $x_0 \in \Lambda$ . Lembrando que quanto maior a estrutura espacial da amostra menor é o raio necessário para construir  $\widehat{F}_\Lambda(x)$ , temos então que tornar nossa escolha do raio adequada à amostra. Observe que quanto maior  $n$ , maior será o raio; porém, estamos procurando um raio mínimo que represente bem nossa região. Como assumimos que nossa amostra é espargida, esperamos que, para um raio apropriado, o número de amostras dentro de uma bola tenha pequena variação. Podemos também pensar que, para um número  $n$  fixo de elementos amostrais,  $r(\xi, n)$  terá um pequeno desvio padrão relativo  $\frac{\sigma}{r}$ . Usaremos este fato para definirmos  $n$  e conseqüentemente  $r$ . Calculamos  $r$  usando a equação 2.4 para um  $n$  inicial igual a 2, se  $\frac{\sigma}{r} \leq 25\%$  consideramos nossa amostra com estrutura espacial<sup>1</sup> e aceitamos  $r$ , se  $\frac{\sigma}{r} < 1\%$  diremos que a amostra tem uma forte estrutura espacial e usaremos  $r/2$ . Agora se  $\frac{\sigma}{r} > 25\%$  repetimos o cálculo para  $n+1$ , até conseguirmos  $\frac{\sigma}{r} \leq 25\%$ . Se  $n \geq 12$  inferimos a amostra como não espargida.

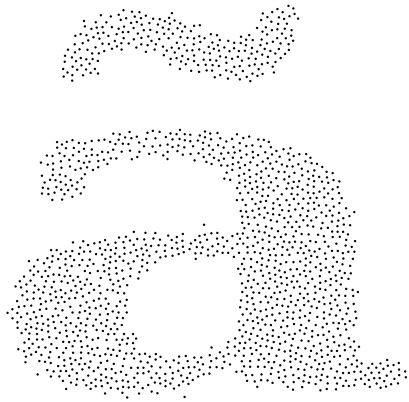
## 2.4 A função aproximante $\widehat{F}_\Lambda$

Após o cálculo de  $\Phi$  obtemos  $\widehat{F}_\Lambda$ , a aproximação para  $F_\Lambda$ , normalizando  $\Phi$  tendo como base uma altura de corte  $c$  conforme equação 2.1 (vide figura 2.7). Temos então que escolher apropriadamente  $c$ . É intuitivo procurarmos sempre um ponto de corte proporcional ao valor máximo de  $\Phi$ , pois se temos  $\lambda\Phi$  esperamos que a altura de corte ideal seja também  $\lambda c$ ; e como dada a mesma amostragem espargida sobre um outro objeto planar  $\mathcal{O}(\Omega', F_{\Lambda'})$  esperamos que  $\Phi$  tenha o mesmo comportamento e logo o mesmo  $c$ .

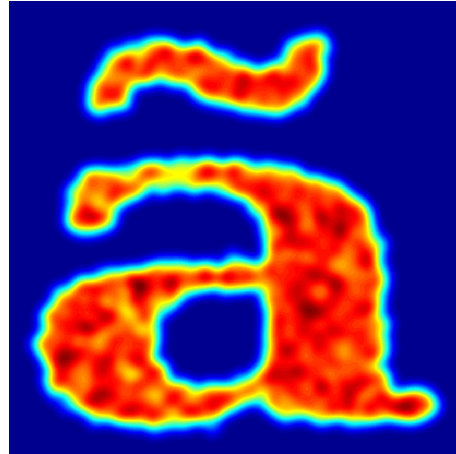
Procuramos experimentalmente o corte ideal  $c$  para uma amostra  $\mathcal{P}$  e um  $\mathcal{O}(\Omega, F_\Lambda)$ . A partir deste corte calculamos sua proporção com o máximo e testamos em outros objetos mantendo a mesma amostragem, percebemos que a proporção se mantinha. Trocamos a amostragem porém mantendo o número de amostras e o tipo de amostra,

---

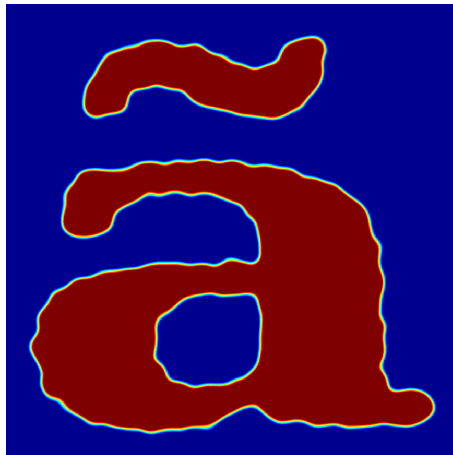
<sup>1</sup>Por exemplo uma grade regular com uma perturbação menor que 30% ou uma amostra de disco de Poisson.



(a) Amostra sobre a função 2.4(a)



(b)  $\Phi(x)$



(c)  $\hat{F}_\Lambda(x)$



(d)  $\hat{\Lambda}$

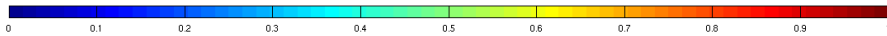


Figura 2.7: Mapas de altura das funções  $\Phi$  e  $\hat{F}_\Lambda$  e  $\hat{\Lambda}$

mais uma vez percebemos que a proporção se manteve. Mudamos então o número de amostras, percebemos então que o corte tinha que sofrer uma correção em função de  $N$ , o número de amostras, após estudarmos o comportamento da flutuação de  $c$ , concluímos de forma empírica que temos a seguinte formulação para  $c$ :

$$(2.5) \quad c = \frac{2 \max \{\Phi(x), x \in \Omega\}}{\log(N)}$$

A escolha do corte, assim como a do raio, influenciará nas fronteiras de  $\hat{\Lambda}$ : se  $c$  for muito perto de zero teremos fronteiras distantes de  $\Lambda$  e se tivermos  $c$  muito perto de  $\max(\Phi)$  teremos muitos falsos buracos. Experimentalmente escolhemos  $\alpha = 0,3$ ,  $\beta = 0,5$  e  $\delta = 0,5$ , obtendo assim  $\hat{\Lambda}$  conforme equação 2.2.

## 2.5 Ruído

Observe que nosso modelo de ruído se dá pela caracterização de  $F_\Lambda$ . Quanto menor a distância  $\int_\Omega (\chi_\Lambda(x) - F_\Lambda(x))^2 dx$  menos ruído teremos. O nosso método identifica partes ruidosas observando que em áreas onde  $F_\Lambda$  for perto de zero teremos uma menor densidade de pontos amostrais logo o valor de  $\Phi(x_0)$  tende a ser menor nessas áreas, então quando normalizarmos  $\Phi$  descartamos a informação de pontos mais afastados da nuvem. Mais uma vez vemos a necessidade de um bom ajuste para os parâmetros de raio e corte pois quanto maior o raio e menor a altura de corte (em proporção a  $\max \{\Phi(x)\}$ ) menos sensível ao ruído fica nossa reconstrução.

Na figura 2.8 ilustramos o efeito do ruído sobre a qualidade da entrada de dados. Fixamos  $\Lambda$ ,  $\Omega$  e a amostragem sobre  $\Omega$  e variamos  $F_\Lambda$ , obtendo assim uma amostra sem ruído e outra ruidosa. Vemos em 2.8(e) em azul os pontos que pertenciam a  $\Lambda$  e foram eliminados e em vermelho os pontos que mesmo fora da região foram mantidos e em verde os pontos em comum. No capítulo 3 comparamos reconstruções com e sem ruído.

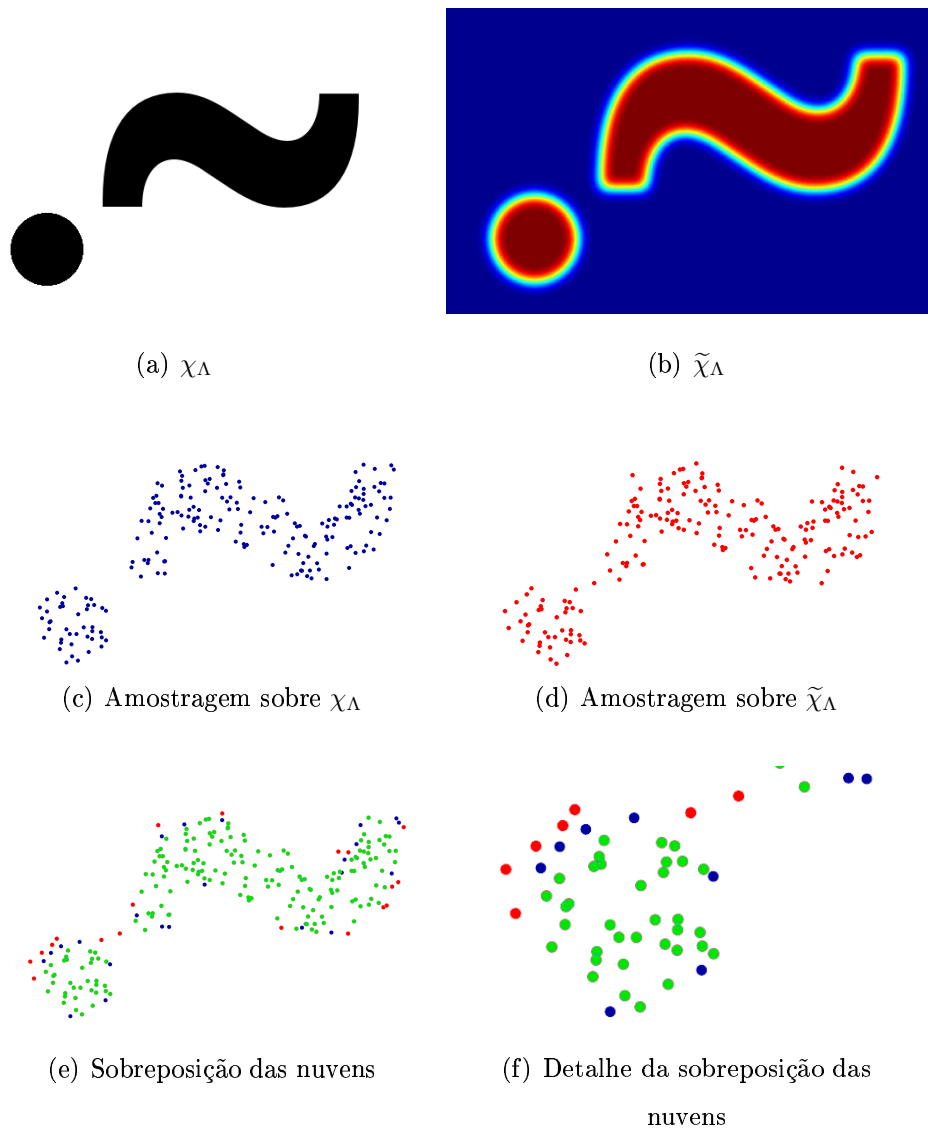


Figura 2.8: Comparação entre amostradas sobre  $\mathcal{O}(S, \chi_\Lambda)$  e  $\mathcal{O}(S, \tilde{\chi}_\Lambda)$

# Capítulo 3

## Resultados

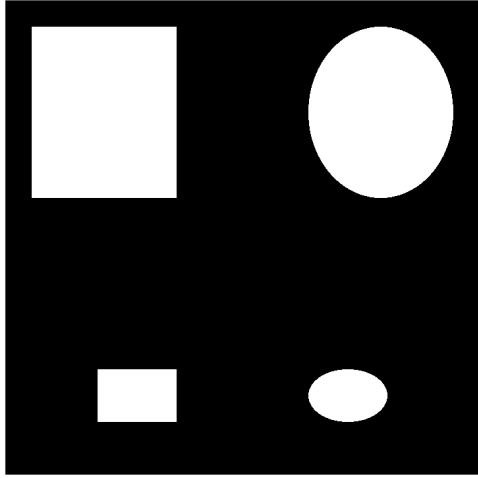
Neste capítulo iremos discutir os resultados obtidos com os parâmetros descritos anteriormente e com o núcleo Gaussiano, pois como visto no capítulo 2, esse núcleo foi o que apresentou melhores resultados, indiferente ao tipo de amostra, quantidade de pontos na nuvem e geometria/topologia da região. Comparamos os resultados em duas diferentes regiões, sendo que cada uma delas com 3 funções distintas, 4 tipos de amostras uniformes e 4 quantidades de pontos amostrados sobre as regiões.

Usaremos como parâmetro de comparação da qualidade de reconstrução a medida de erro da equação 3.1, que medirá o quão longe a reconstrução está da função que originou a amostra e da equação 3.2 que compara a aproximação  $\widehat{\Lambda}$  com  $\Lambda$ .

$$(3.1) \quad \Delta_{\widehat{F}}^2 = \frac{1}{\mathcal{A}(\Omega)} \int_{\Omega} \left( F_{\Lambda}(x) - \widehat{F}(x) \right)^2 dx$$

$$(3.2) \quad \Delta_{\widehat{\Lambda}}^2 = \frac{1}{\mathcal{A}(\Omega)} \int_{\Omega} \left( \chi_{\Lambda}(x) - \chi_{\widehat{\Lambda}}(x) \right)^2 dx$$

Aqui  $\Omega$  é o retângulo envolvente de  $\Lambda$ , lembrando que  $F_{\Lambda}$  e  $\widehat{F}_{\Lambda}$  são maiores ou igual a zero e são limitadas. Nós normalizamos o erro dividindo pela área de  $\Omega$ , para obtermos uma comparação entre reconstruções com áreas diferentes e mesma região de suporte. Todo o nosso conjunto de teste terá o mesmo  $\Omega$ .



(a) Função característica da região “Q”



(b) Função característica da região “a”

Figura 3.1: Funções característica das regiões usadas para gerar o conjunto de teste

### 3.1 Conjunto de teste

Para a escolha das regiões levamos em consideração a necessidade de observar tantos aspectos topológicos como geométricos. Um dos problemas da reconstrução é a suavização da geometria da borda da região. Para observar os diferentes efeitos das amostras e quantidades de pontos na suavização da geometria usamos uma região delimitada por uma curva com ângulos retos (figura 3.1(a)), que chamamos de “Q”. Com a segunda região de teste, “a” (figura 3.1(b)), queremos observar aspectos gerais de topologia, como buracos e componentes conexas, e na geometria áreas suaves junto com outras mais “pontigudas”. Para ambas regiões usamos a função característica e duas funções difusas. Para facilitar as comparações de resultados fixamos uma caixa envolvente para os seis objetos testados, estão todos contidos no retângulo  $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$ . Obtivemos as funções difusas aplicando filtros Gaussianos sobre a função característica, sendo um dos filtros com  $\sigma^2$  igual a 2% da área de  $\Omega$ , e o outro com 4% (figura 3.2).

Utilizamos 4 tipos de amostra para construir nosso conjunto de teste: uma grade regular (GR), uma grade regular perturbada, com 30% de perturbação do diâmetro

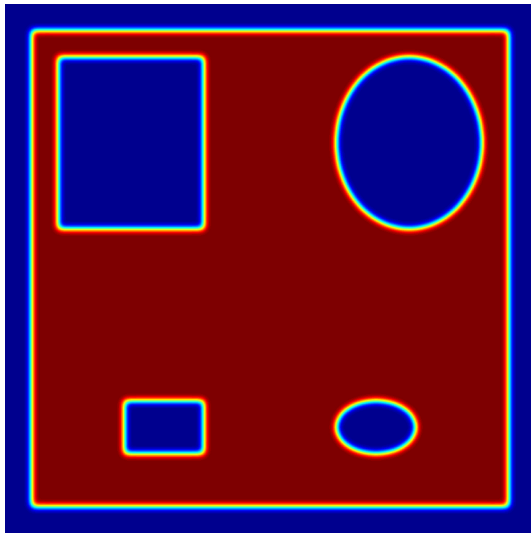




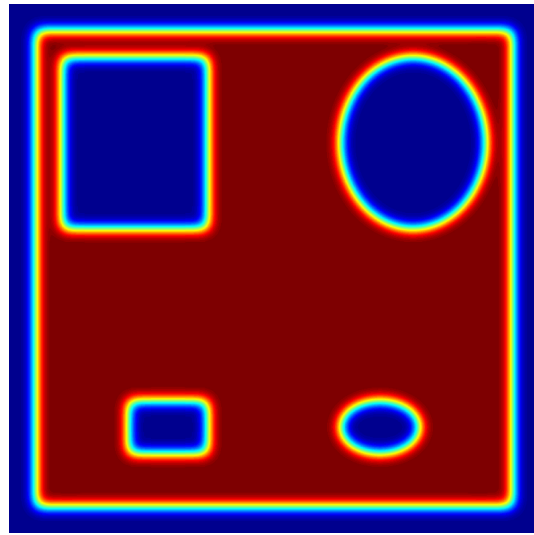
(a)  $\tilde{\chi}_a$  com  $\sigma^2$  equivalente a 2% da área de  $\Omega$



(b)  $\tilde{\chi}_a$  com  $\sigma^2$  equivalente a 4% da área de  $\Omega$



(c)  $\tilde{\chi}_Q$  com  $\sigma^2$  equivalente a 2% da área de  $\Omega$



(d)  $\tilde{\chi}_Q$  com  $\sigma^2$  equivalente a 4% da área de  $\Omega$

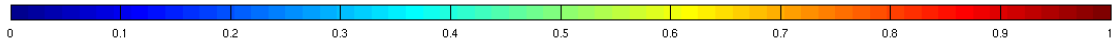


Figura 3.2: Funções  $\tilde{\chi}_a$  e  $\tilde{\chi}_Q$  construídas a partir de um filtro Gaussiano de passa-baixa

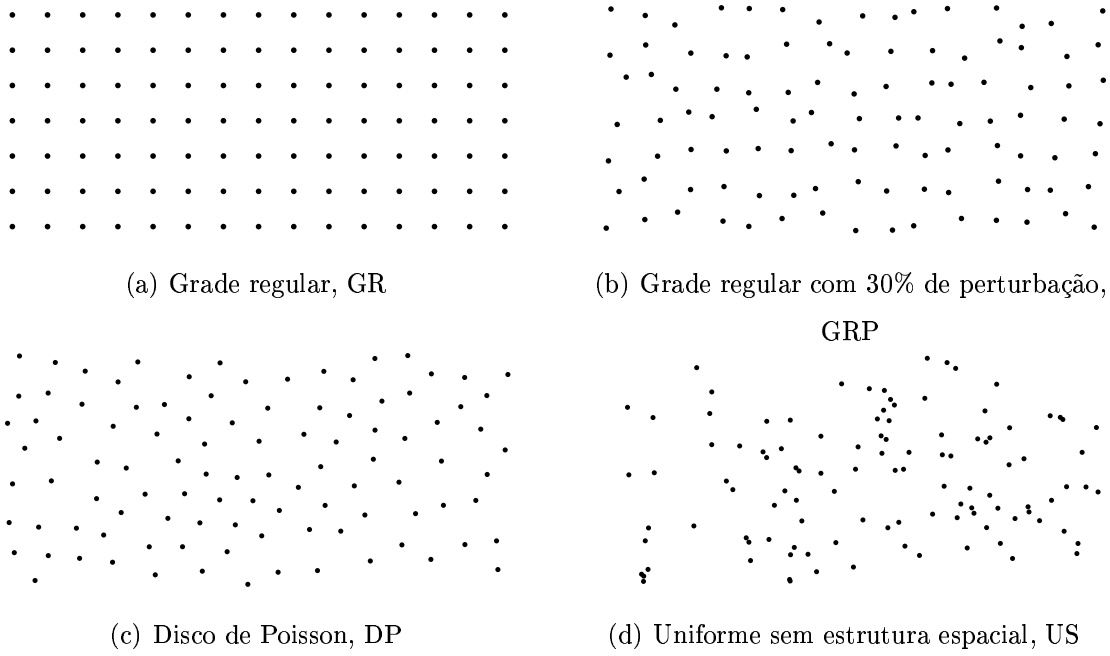


Figura 3.3: Tipos de amostras usadas para gerar o conjunto de teste

da célula (GRP)<sup>1</sup>, uma com distribuição em disco de Poisson (DP), descrito em [DH06] e uma com distribuição uniforme, sem estrutura espacial (US), todas ilustradas na figura 3.3. Quanto à quantidade testamos quatro quantidades de pontos: 500, 1.000, 4.000 e 10.000 pontos amostrados sobre  $\Omega$ . As nuvens foram obtidas conforme descrito no capítulo 1, por amostragem sobre um objeto planar. Teremos um conjunto de teste de 96 elementos.

Como a nossa entrada de dados, uma nuvem de pontos, é gerada usando processos não determinístico, para cada elemento do nosso conjunto de teste que haviam fatores aleatórios na sua construção (i.e., todos a menos das funções característica junto com a grade regular), repetimos sua construção 100 vezes e avaliamos  $\Delta_{\hat{F}}$  e  $\Delta_{\hat{\Lambda}}$ . Os resultados nas tabelas 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 e na seção 3.2 são a média dos 100 testes realizados, para diferenciar dos resultados simples vamos denotá-los por  $\overline{\Delta_{\hat{F}}}$  e  $\overline{\Delta_{\hat{\Lambda}}}$ . Observamos que tivemos um baixa variância relativa, com menos de 1% em todos 96 grupos testados. Esta baixa variância relativa indica uma consistência em relação à amostragem, i.e., duas nuvens de pontos obtidas com o mesmo tipo

<sup>1</sup>Cada ponto da amostra tem distribuição uniforme dentro de um quadrado com lado igual a 30% do lado da célula e centrado em um dos verticés da grade regular

de amostra e número de pontos, sobre o mesmo objeto, terão resultados com erros muito próximos. Este resultado nos permitiu fazer em apenas uma etapa o estudo sobre convergência quanto ao número de pontos, descrito na seção 3.3.

	GR	GRP	DP	US
$\chi_Q$	<b>0,082</b>   0,081	0,088   0,076	0,092   <b>0,076</b>	0,194   0,172
$\tilde{\chi}_Q$ 2%	0,082   0,081	<b>0,079</b>   <b>0,079</b>	0,080   0,079	0,178   0,172
$\tilde{\chi}_Q$ 4%	0,100   0,099	<b>0,082</b>   <b>0,085</b>	0,084   0,089	0,167   0,171
$\chi_a$	<b>0,061</b>   <b>0,058</b>	0,077   0,062	0,086   0,066	0,175   0,162
$\tilde{\chi}_a$ 2%	0,073   0,072	<b>0,065</b>   <b>0,063</b>	0,074   0,069	0,165   0,162
$\tilde{\chi}_a$ 4%	0,077   0,079	<b>0,068</b>   <b>0,070</b>	0,075   0,077	0,158   0,164

Tabela 3.1: Tabela de  $\overline{\Delta}_{\hat{F}} | \overline{\Delta}_{\hat{\Lambda}}$  com 500 pontos amostrados sobre  $\Omega$

	GR	GRP	DP	US
$\chi_Q$	<b>0,050</b>   <b>0,047</b>	0,056   0,053	0,065   0,054	0,137   0,118
$\tilde{\chi}_Q$ 2%	0,060   0,056	<b>0,056</b>   <b>0,056</b>	0,059   0,059	0,123   0,119
$\tilde{\chi}_Q$ 4%	0,091   0,082	<b>0,073</b>   <b>0,068</b>	0,073   0,070	0,120   0,123
$\chi_a$	<b>0,041</b>   <b>0,040</b>	0,052   0,043	0,055   0,043	0,116   0,102
$\tilde{\chi}_a$ 2%	0,055   0,054	<b>0,047</b>   <b>0,047</b>	0,048   0,047	0,106   0,104
$\tilde{\chi}_a$ 4%	0,071   0,067	<b>0,058</b>   <b>0,055</b>	0,058   0,056	0,102   0,107

Tabela 3.2: Tabela de  $\overline{\Delta}_{\hat{F}} | \overline{\Delta}_{\hat{\Lambda}}$  com 1.000 pontos amostrados sobre  $\Omega$

## 3.2 Amostras estruturadas $\times$

### Amostras sem estrutura

Nesta seção discutiremos a influência da estrutura espacial da amostra nas aproximações. As figuras 3.4, 3.5, 3.6 e 3.7, ilustram os resultados obtidos usando diferentes tipos de amostras. Em cada figura fixamos  $F_a$  e a quantidade de pontos e variamos a estrutura espacial da amostra. Nas duas primeiras colunas ilustramos:  $\hat{F}$  e  $\Delta_{\hat{F}}$ ,

	GR	GRP	DP	US
$\chi_Q$	<b>0,027</b>   <b>0,027</b>	0,036   0,034	0,040   0,038	0,060   0,047
$\tilde{\chi}_Q$ 2%	0,047   0,040	<b>0,044</b>   <b>0,040</b>	0,045   0,042	0,052   0,050
$\tilde{\chi}_Q$ 4%	0,088   0,078	0,071   0,056	0,070   0,057	<b>0,065</b>   <b>0,056</b>
$\chi_a$	<b>0,028</b>   <b>0,027</b>	0,032   0,030	0,032   0,029	0,050   0,041
$\tilde{\chi}_a$ 2%	0,049   0,046	<b>0,038</b>   <b>0,035</b>	0,038   0,036	0,043   0,042
$\tilde{\chi}_a$ 4%	0,072   0,063	0,061   0,049	0,057   <b>0,046</b>	<b>0,052</b>   0,048

Tabela 3.3: Tabela de  $\overline{\Delta}_{\hat{F}} | \overline{\Delta}_{\hat{\Lambda}}$  com 4.000 pontos amostrados sobre  $\Omega$

	GR	GRP	DP	US
$\chi_Q$	<b>0,022</b>   <b>0,021</b>	0,025   0,023	0,028   0,027	0,037   0,030
$\tilde{\chi}_Q$ 2%	0,051   0,044	0,042   0,036	0,042   0,036	<b>0,036</b>   <b>0,033</b>
$\tilde{\chi}_Q$ 4%	0,084   0,072	0,072   0,055	0,070   0,053	<b>0,057</b>   <b>0,040</b>
$\chi_a$	<b>0,018</b>   <b>0,018</b>	0,021   0,021	0,023   0,022	0,031   0,026
$\tilde{\chi}_a$ 2%	0,046   0,043	0,036   0,031	0,035   0,030	<b>0,031</b>   <b>0,024</b>
$\tilde{\chi}_a$ 4%	0,069   0,058	0,061   0,047	0,058   0,044	<b>0,047</b>   <b>0,035</b>

Tabela 3.4: Tabela de  $\overline{\Delta}_{\hat{F}} | \overline{\Delta}_{\hat{\Lambda}}$  com 10.000 pontos amostrados sobre  $\Omega$

respectivamente, e nas duas últimas:  $\hat{\Lambda}$  e  $\Delta_{\hat{\Lambda}}$ . Usamos a função  $|F_{\Lambda}(x) - \hat{F}(x)|$  para ilustrar  $\Delta_{\hat{F}}$  e  $|\chi_{\Lambda}(x) - \chi_{\hat{\Lambda}}(x)|$  para  $\Delta_{\hat{\Lambda}}$ . Podemos comparar os resultados com as nuvens que usamos para gera-los, figuras 3.8, 3.9, 3.10 e 3.10 exibem estas nuvens. Observe que infelizmente o resultado numérico muitas vezes não acompanha a percepção visual.

Quando colocamos estrutura espacial em uma amostra (como em GR, GRP e DP), esperamos resultados melhores, já que sabemos por hipótese que não teremos pequenos agrupamentos nem áreas vazias. Nos casos sem ruído esta melhora se mostrou de maneira independente do número de pontos, i.e., obtivemos resultados superiores aos conseguidos com US em todas as quantidades de pontos, figuras 3.4 e 3.5. Quando a quantidade de pontos foi reduzida, a estrutura espacial se mostrou fundamental para garantir uma boa aproximação, independente da nuvem ser ou

não ruidosa, figuras 3.4 e 3.6.

Nota-se a melhor reconstrução com utilização de amostragem US para nuvens ruidosas geradas a partir de uma amostra de 10.000 pontos (figura 3.7(d)) e tabela 3.4, mostrando que a total falta de estrutura espacial se adapta melhor às oscilações espaciais provocadas pelo ruído. Na figura 3.11, percebemos que a amostragem US (3.11(d)) é a menos afetada pelo ruído quando temos 10.000 pontos lançados sobre  $\Omega$  e que visualmente a que mais ressalta o ruído é a gerada a partir de uma grade regular (3.11(a)).

### 3.3 Convergência do erro $\times$ Quantidade de pontos

Para estudar a convergência do erro quando aumentamos a quantidade de pontos na amostra, fizemos testes com nuvens com o número de pontos variando em intervalos de 500 unidades até chegarmos a 25 mil, após 25 mil aumentamos o intervalo para 1000 até alcançarmos 50 mil, deste ponto em diante pulamos de 2 mil em 2 mil até 100 mil. Exibimos os gráficos resultantes nas figuras 3.12 e 3.13. Notamos que independentes da região amostrada os gráficos se comportaram de maneira semelhante em função do ruído, i.e. o gráfico de  $\chi_Q$  e semelhante ao de  $\chi_a$ , e assim por diante.

Quanto maior a quantidade de pontos amostrais esperamos que nosso erro diminua porém percebemos que o erro tende a estabilizar quando a nossa nuvem é ruidosa. Esta estabilização se deu de forma relativamente precoce, com aproximadamente 20 mil pontos, não houve mais grandes alterações no erro. Importante notar que, confirmando os resultados da seção anterior quando temos nuvens ruidosas, a melhor aproximação se deu quando utilizamos amostragem US. Isto indica que as amostras com estrutura espacial têm como barreira de aproximação o ruído, o interpretando como geometria da região, visto nas figuras 3.7(a), 3.7(b) e 3.7(c). Nota-se que quando aumentamos o ruído o comportamento dos gráficos se acentua, i.e., há uma estabilização do erro em um patamar bem distinto para cada tipo de amostra.

No caso das nuvens sem ruído todas as amostragens se mostraram semelhantes quando aumentamos a quantidade de pontos, exibindo uma lenta convergência a

partir de 30 mil pontos. Notamos que nestes casos que, além da convergência do erro para cada tipo de amostra todos os tipos parecem convergir para os mesmos resultados, figuras 3.12(a) e 3.13(a). Quando usamos uma amostragem de grade regular junto com uma função característica (i.e. sem ruído), obtemos um resultado semelhante a pegarmos uma imagem da  $\chi_\Lambda$  e reamostrarmos para a resolução da quantidade de pontos amostrais usando um núcleo constante, vemos um exemplo disso na figura 3.14.

Para ilustrar o efeito da suavização da borda da região usamos a função característica de “Q” junto com a amostra GR, com 3 quantidades de pontos diferentes: 1 mil, 10 mil e 100 mil. Vemos o resultado na figura 3.15, onde na primeira linha ilustramos a aproximação e na segunda o erro cometido, usando as mesmas funções descrita nas seções anteriores. Percebemos que quanto maior a quantidade de pontos menos impressão de arredondamento temos, pois o raio usado na aproximação diminui. Porém sempre haverá este efeito de arredondamento nos cantos, pois nosso núcleo é isotrópico e tem base radial.

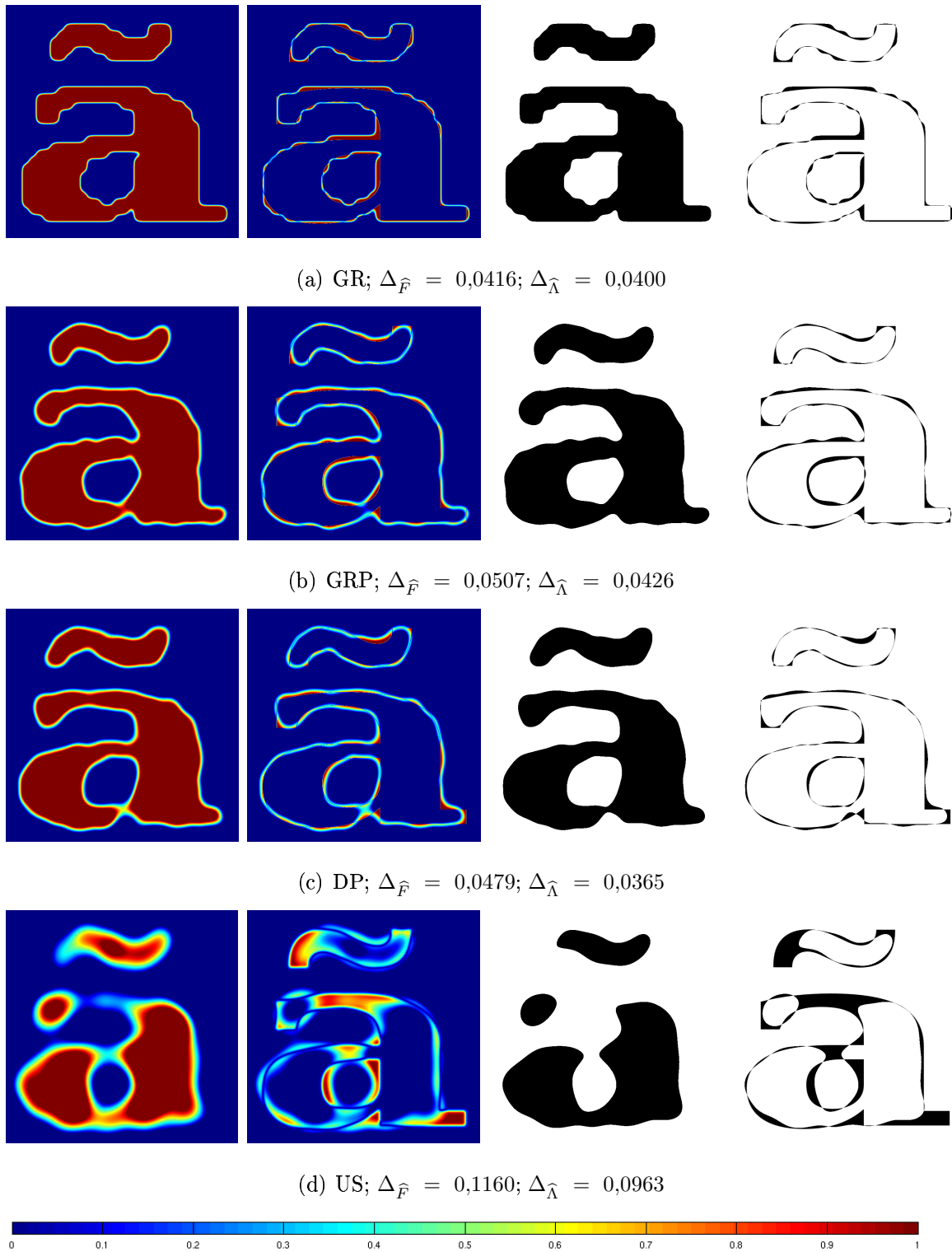


Figura 3.4:  $\hat{F}$ ,  $\Delta_{\hat{F}}$ ,  $\hat{\Lambda}$  e  $\Delta_{\hat{\Lambda}}$  variando a estrutura espacial da amostra, com 1.000 pontos amostrados sobre  $\mathcal{O}(\Omega, \chi_a)$

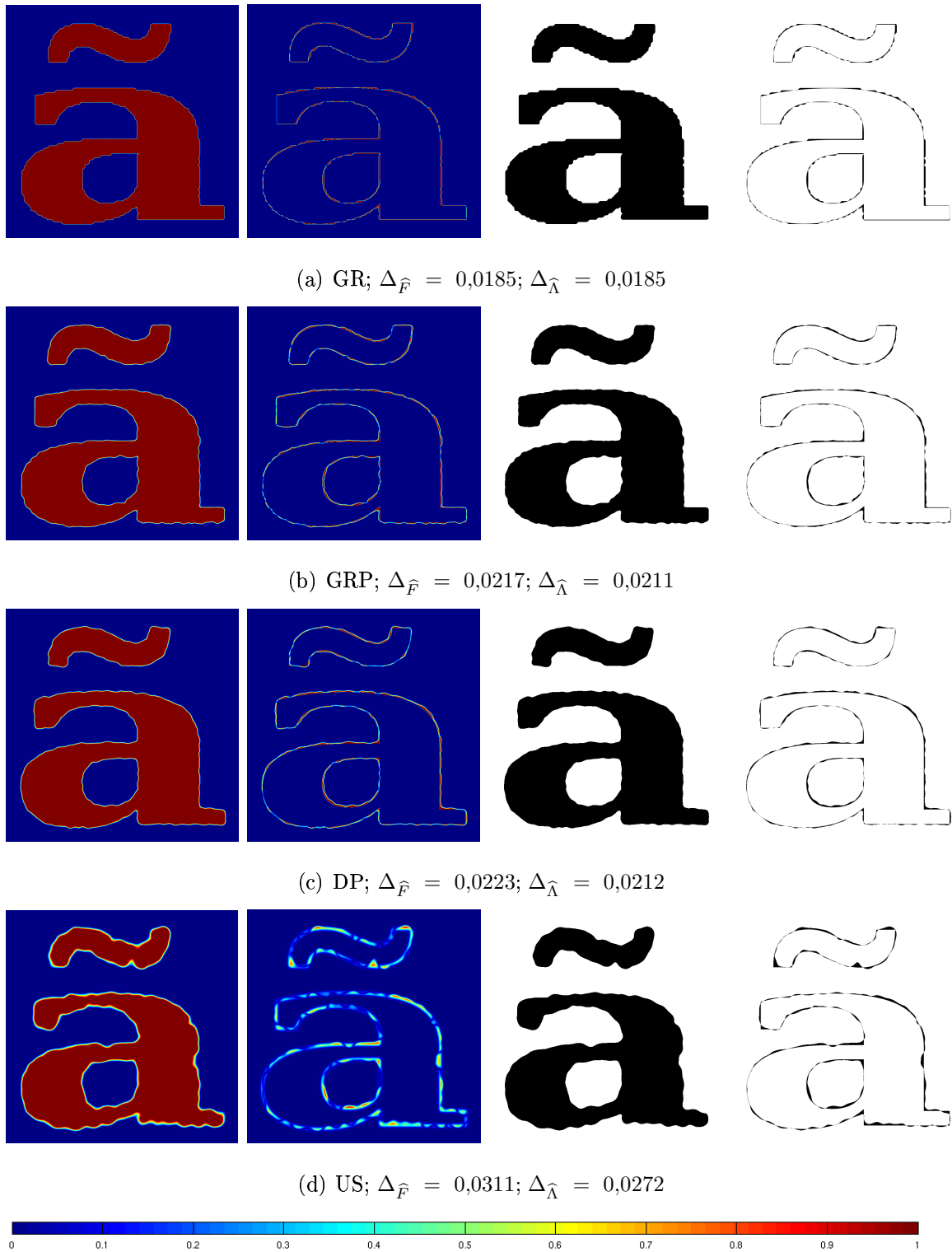


Figura 3.5:  $\hat{F}$ ,  $\Delta_{\hat{F}}$ ,  $\hat{\Lambda}$  e  $\Delta_{\hat{\Lambda}}$  variando a estrutura espacial da amostra, com 10.000 pontos amostrados sobre  $\mathcal{O}(\Omega, \chi_a)$



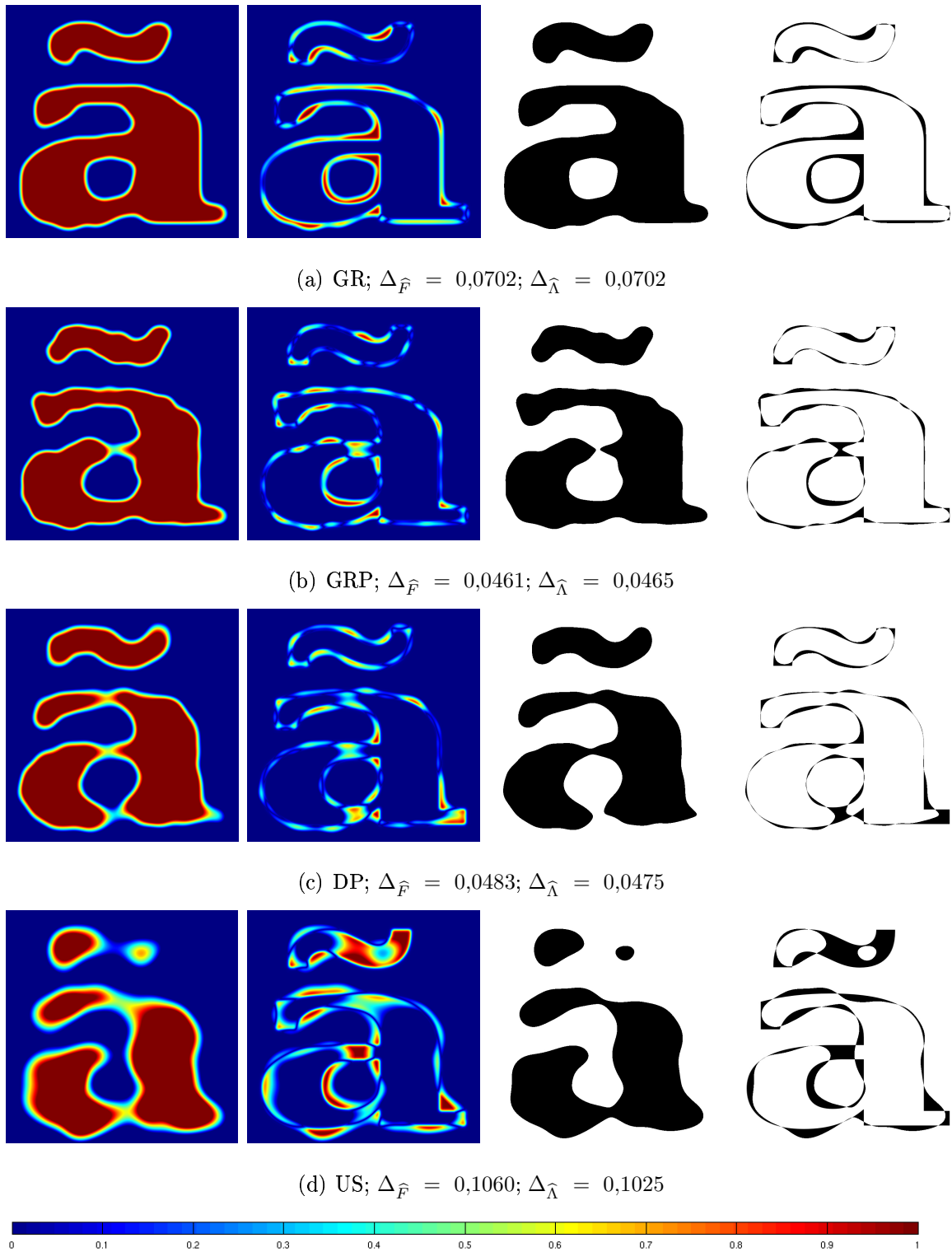
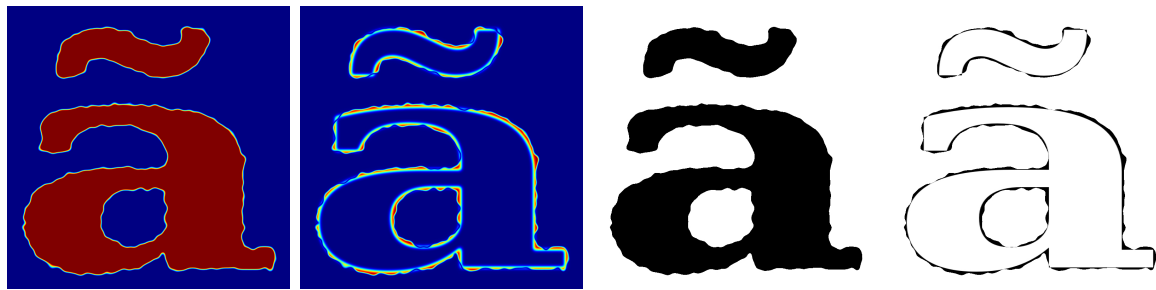
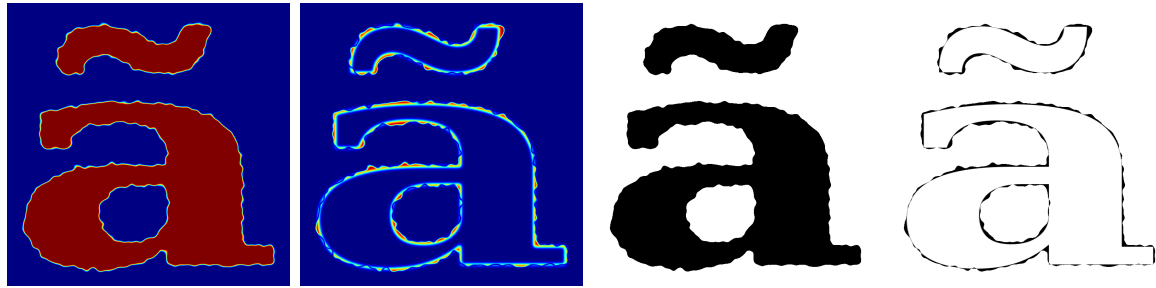


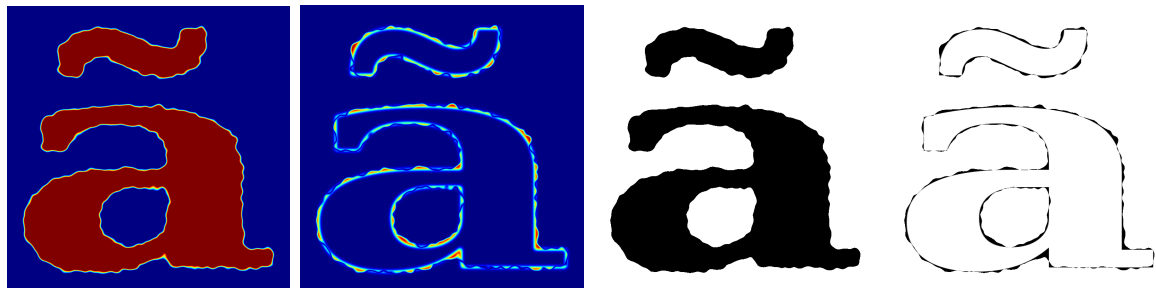
Figura 3.6:  $\hat{F}$ ,  $\Delta_{\hat{F}}$ ,  $\hat{\Lambda}$  e  $\Delta_{\hat{\Lambda}}$  variando a estrutura espacial da amostra, com 1.000 pontos amostrados sobre  $\mathcal{O}(\Omega, \tilde{\chi}_a)$ , com 2% de ruído



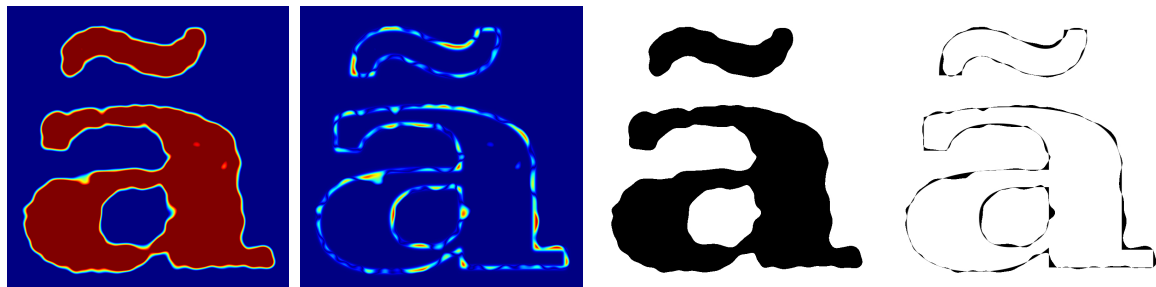
(a) GR;  $\Delta_{\hat{F}} = 0,0443$ ;  $\Delta_{\hat{\Lambda}} = 0,0413$



(b) GRP;  $\Delta_{\hat{F}} = 0,0377$ ;  $\Delta_{\hat{\Lambda}} = 0,0331$



(c) DP;  $\Delta_{\hat{F}} = 0,0334$ ;  $\Delta_{\hat{\Lambda}} = 0,0286$



(d) US;  $\Delta_{\hat{F}} = 0,0307$ ;  $\Delta_{\hat{\Lambda}} = 0,0284$

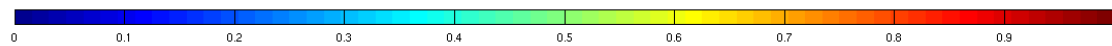
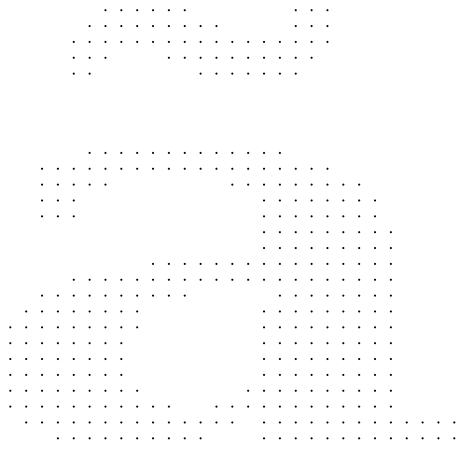
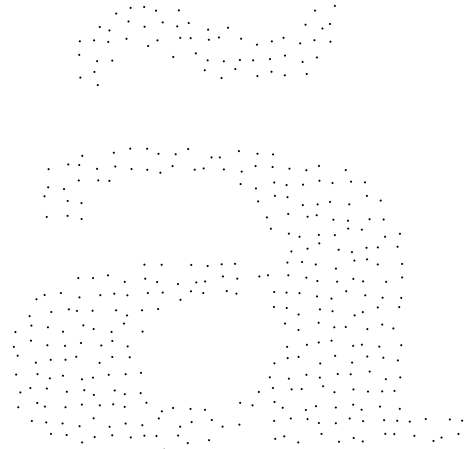


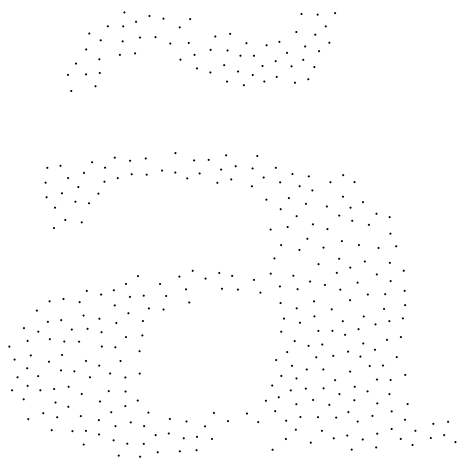
Figura 3.7:  $\hat{F}$ ,  $\Delta_{\hat{F}}$ ,  $\hat{\Lambda}$  e  $\Delta_{\hat{\Lambda}}$  variando a estrutura espacial com 10.000 pontos sobre  $\mathcal{O}(\Omega, \tilde{\chi}_a)$ , 2% de ruído



(a) GR;  $\chi_a$ ; 1.000 pontos



(b) GRP;  $\chi_a$ ; 1.000 pontos



(c) DP;  $\chi_a$ ; 1.000 pontos

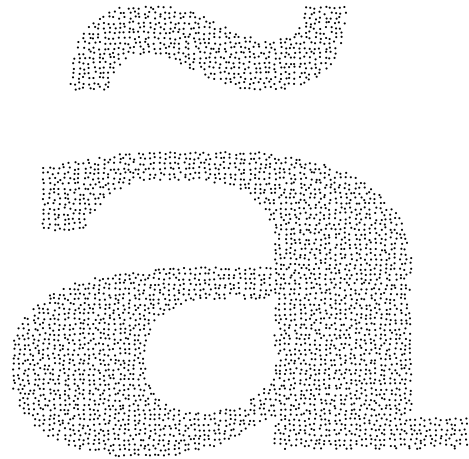


(d) US;  $\chi_a$ ; 1.000 pontos

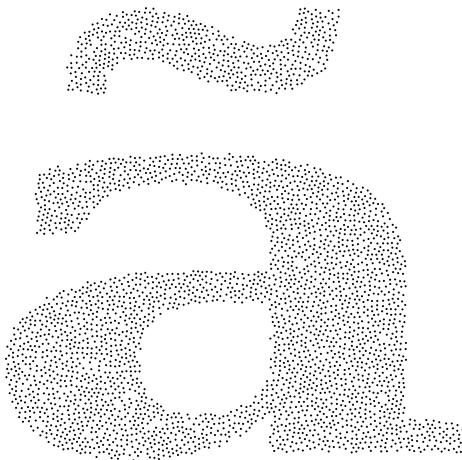
Figura 3.8: Nuvens de pontos usadas para gerar a figura 3.4



(a) GR;  $\chi_a$ ; 10.000 pontos



(b) GRP;  $\chi_a$ ; 10.000 pontos

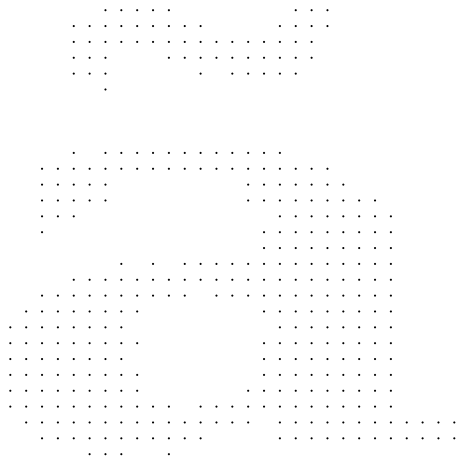


(c) DP;  $\chi_a$ ; 10.000 pontos

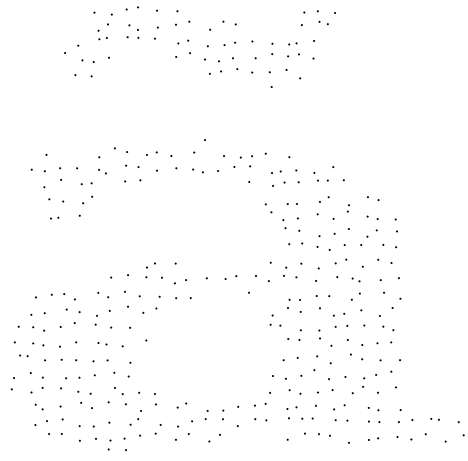


(d) US;  $\chi_a$ ; 10.000 pontos

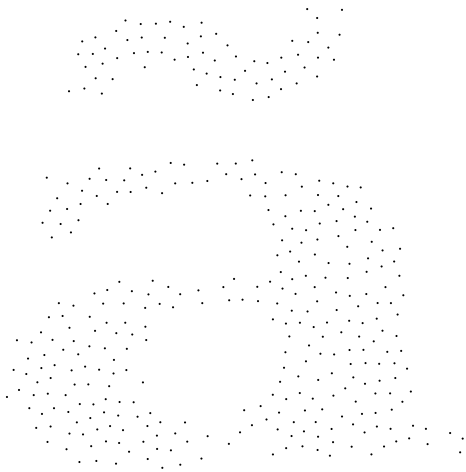
Figura 3.9: Nuvens de pontos usadas para gerar a figura 3.5



(a) GR;  $\tilde{\chi}_a$ , 2%; 1000 pontos



(b) GRP;  $\tilde{\chi}_a$ , 2%; 1000 pontos



(c) DP;  $\tilde{\chi}_a$ , 2%; 1000 pontos

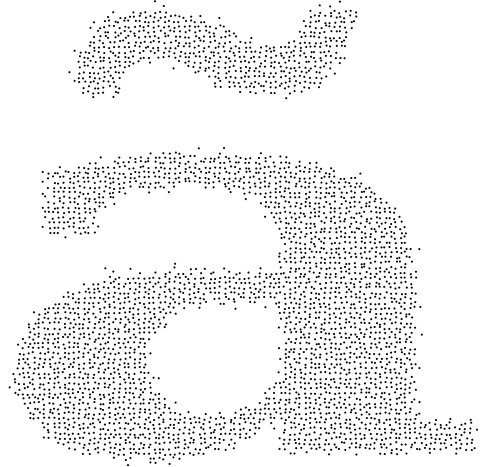


(d) US;  $\tilde{\chi}_a$ , 2%; 1000 pontos

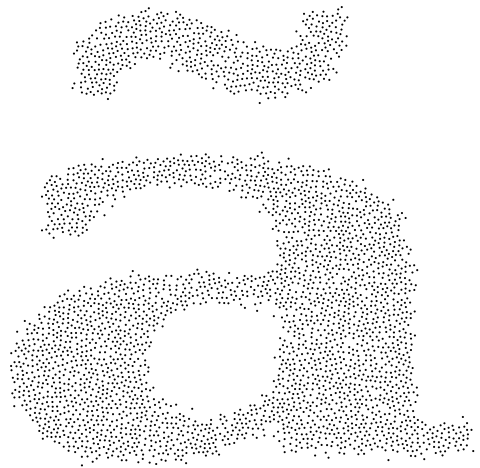
Figura 3.10: Nuvens de pontos usadas para gerar a figura 3.6



(a) GR;  $\tilde{\chi}_a$ , 2%; 10.000 pontos



(b) GRP;  $\tilde{\chi}_a$ , 2%; 10.000 pontos

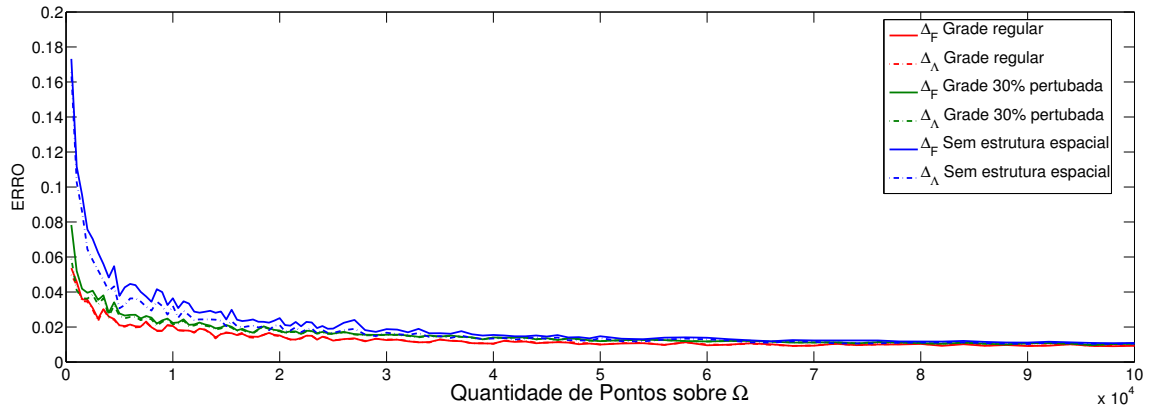


(c) DP;  $\tilde{\chi}_a$ , 2%; 10.000 pontos

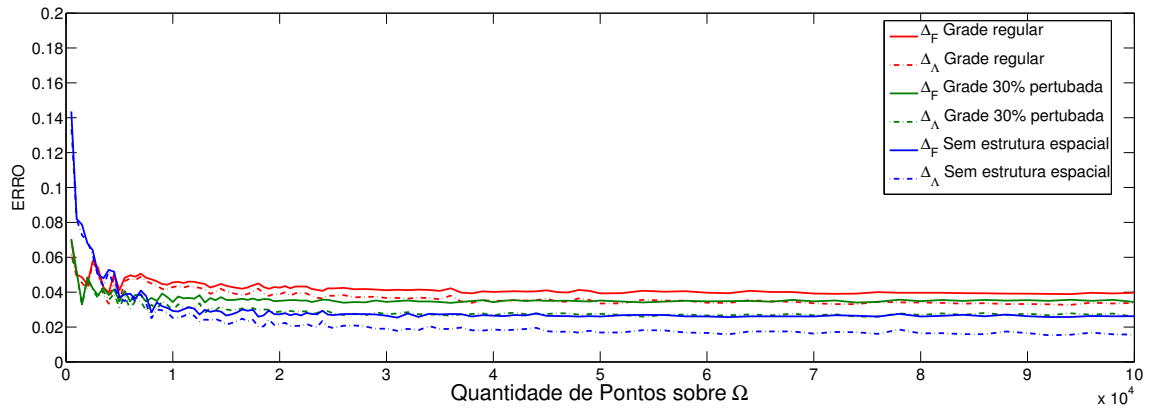


(d) US;  $\tilde{\chi}_a$ , 2%; 10.000 pontos

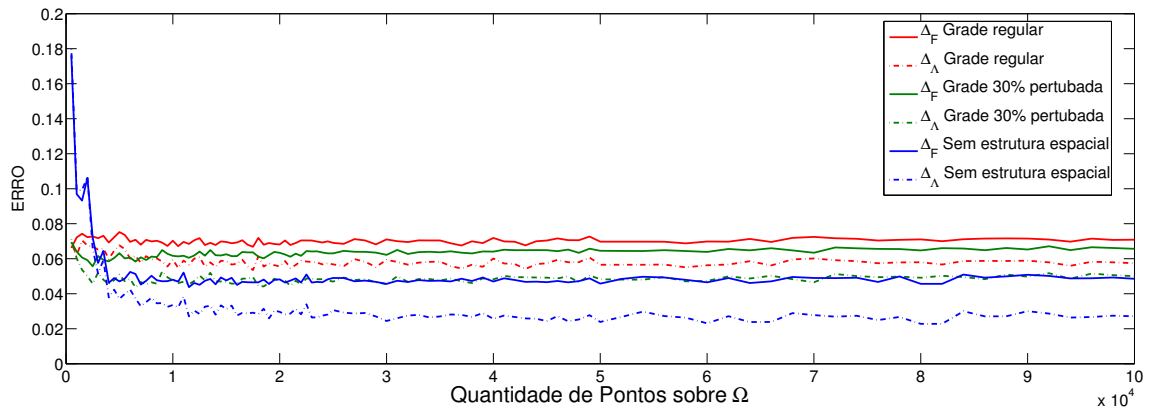
Figura 3.11: Nuvens de pontos usadas para gerar a figura 3.7



(a)  $\chi_a$

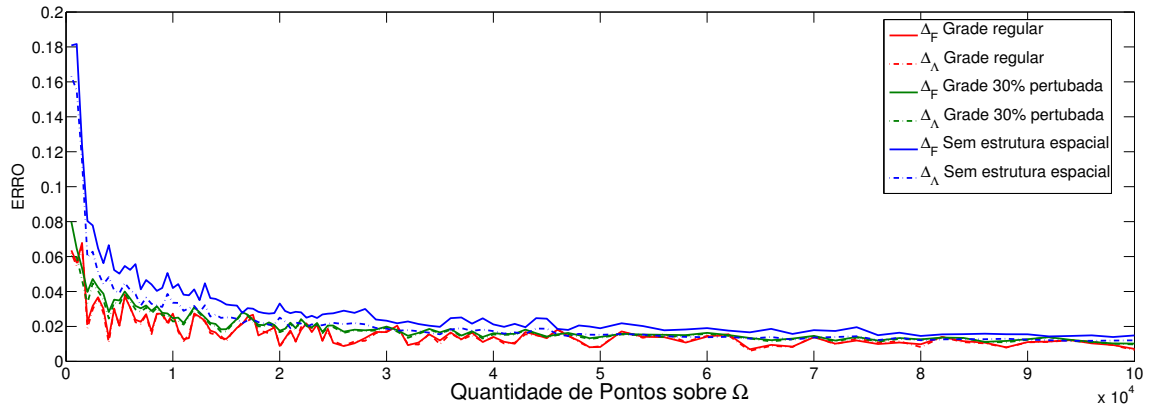


(b)  $\tilde{\chi}_a$  2%

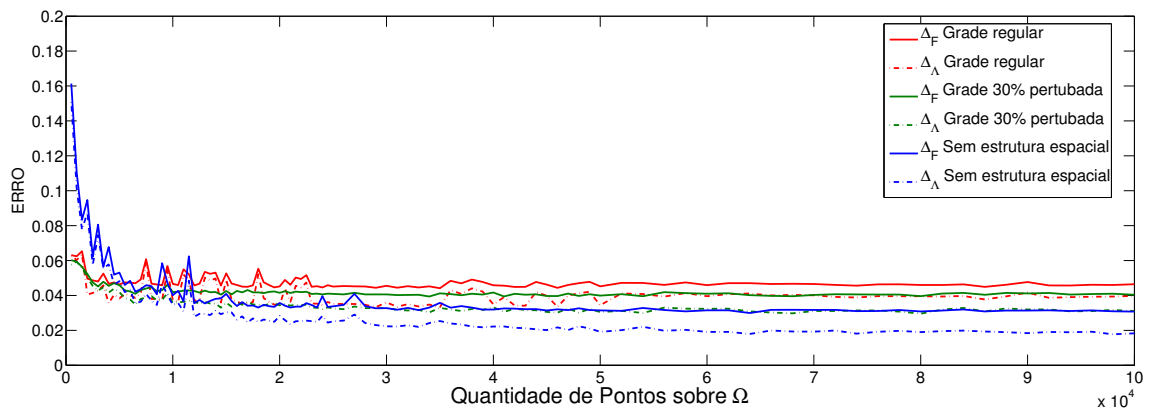


(c)  $\tilde{\chi}_a$  4%

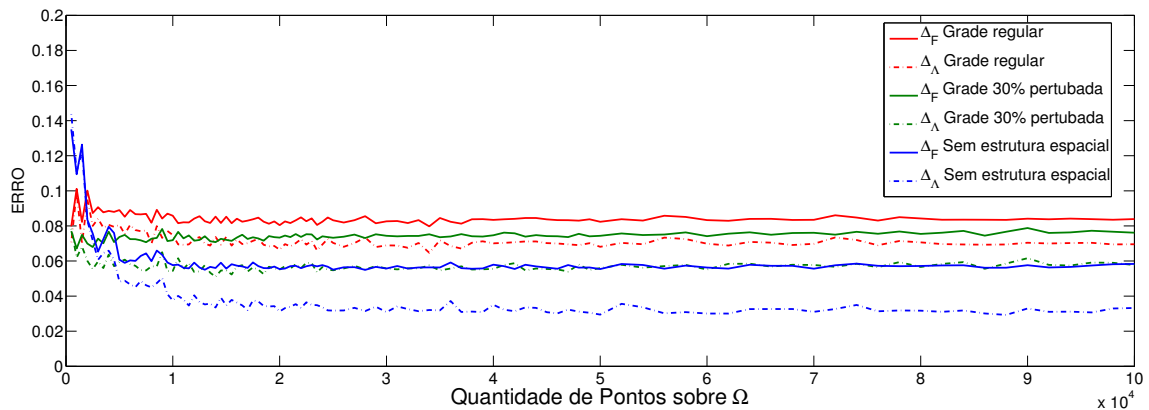
Figura 3.12: Gráfico da evolução do erro quando aumentamos a quantidade de pontos amostrados sobre  $\Omega$ , com  $\Lambda$  sendo “a”



(a)  $\chi_Q$



(b)  $\tilde{\chi}_Q$  2%



(c)  $\tilde{\chi}_Q$  4%

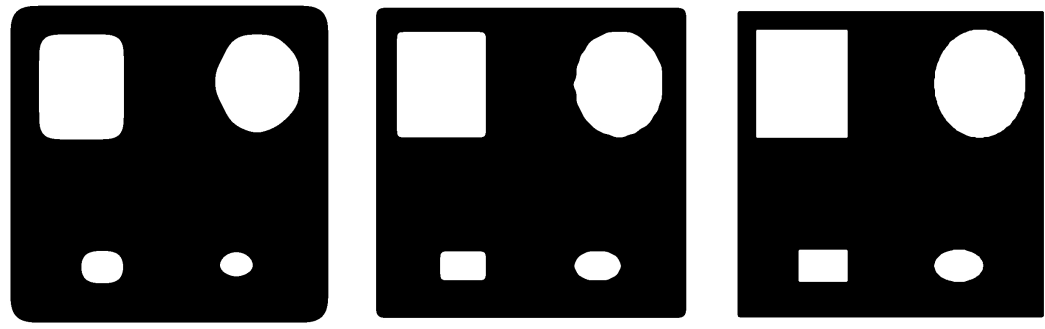
Figura 3.13: Gráfico da evolução do erro quando aumentamos a quantidade de pontos amostrados sobre  $\Omega$ , com  $\Lambda$  sendo “Q”



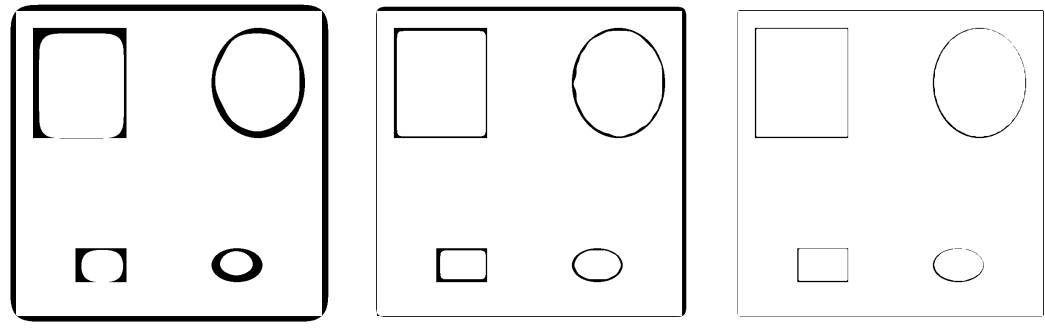


(a) Reamostragem de uma imagem de  $\chi_a$  com 100x100 pixel      (b)  $\hat{\chi}_a$  usando amostragem de grade regular com 10.000 pontos

Figura 3.14: Comparação de reamostragem com a aproximação



(a)  $\hat{Q}$ , 1.000 pontos      (b)  $\hat{Q}$ , 10.000 pontos      (c)  $\hat{Q}$ , 100.000 pontos



(d)  $\Delta_{\hat{Q}}$ , 1.000 pontos      (e)  $\Delta_{\hat{Q}}$ , 10.000 pontos      (f)  $\Delta_{\hat{Q}}$ , 100.000 pontos

Figura 3.15: Efeito de arredondamento na aproximação de “Q” usando amostras GR



# Capítulo 4

## Conclusões

Neste trabalho delimitamos o problema de reconstrução de regiões do plano a partir de uma nuvem de pontos ruidosa como sendo um problema de aproximação de funções. Apresentamos um algoritmo baseado em funções de base radial que apresentou resultados interessantes e coerentes com a teoria desenvolvida em sua construção. Desenvolvemos heurísticas para automatizar a escolha dos parâmetros e identificar os tipos de amostras, tornando o algoritmo totalmente independente da intervenção do usuário.

Fizemos um estudo com vários núcleos e parâmetros que resultou na escolha do núcleo Gaussiano que apresentou melhores resultados, indiferente ao tipo de amostra, quantidade de pontos na nuvem e geometria/topologia da região. Definimos a escolha do raio a partir da distribuição espacial dos pontos amostrais, automatizamos esta escolha utilizando a variância e a média do comprimento do raio da menor bola centrada nos pontos da nuvem que contém pelo menos  $n$  amostras. Nossas aproximações são normalizações de um função implícita. Todos os parâmetros foram estimados experimentalmente e se comportaram de maneira consistente em todo nosso conjunto de teste, mais de 10 mil, indicando que o método desenvolvido deve continuar a ser estudado.

Avaliamos a utilização de quatro tipos de amostragens diferentes. Concluimos que, possuir estrutura espacial é de fundamental importância quando temos poucos pontos amostrais. Entretanto notou-se que nuvens ruidosas e densas, formadas de

amostras sem nenhuma estrutura espacial (US), obtiveram melhores resultados. Isto sugere que quando podemos ter uma amostra densa sobre a nossa região, a melhor amostragem a ser usada é a uniforme sem estrutura espacial.

### Trabalhos futuros

- Corrigir a geometria (i.e., a fronteira) com a utilização da estrutura ponto normal e a equação de Poisson [KBH06], pois, com a função implícita  $\Phi$  e os parâmetros de corte já desenvolvidos, facilmente extraímos essas informações.
- Desenvolver métodos para a visualização dos dados usando técnicas artísticas.
- Estudar mais profundamente as condições para a convergência do erro.
- Estimar os parâmetros de maneira específica para cada tipo de amostra.
- Estender para amostras sobre objetos volumétricos para descobrir as fronteiras de um fluido simulado com SPH [MCG03].
- Estudar a reconstrução média para regiões ruidosas, i.e., amostrar várias vezes o mesmo objeto planar e observar a aproximação média.
- Estender o algoritmo para pontos no  $\mathbb{R}^3$ , visando aplicações em reconstruções de objetos reais utilizando um digitalizador de superfícies. Preenchendo o prolongamento do raio com amostras sintéticas após o encontro do raio com a superfície, obtemos um nuvem volumétrica (figura 4.1), que após uma transformação projetiva será apropriada para aplicação do algoritmo, proporcionando uma reconstrução “watertight” (sugestão do professor Luiz Velho).
- Utilizar o método para aproximar curvas “ruidosas” do plano. Com pequenas alterações no algoritmo atual, já obtivemos os primeiros resultados (figura 4.2). Para aproximar a curva usamos o esqueleto da aproximação da função (figura 4.2(d)).

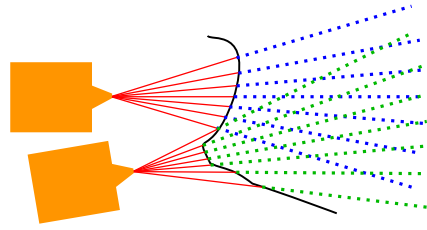
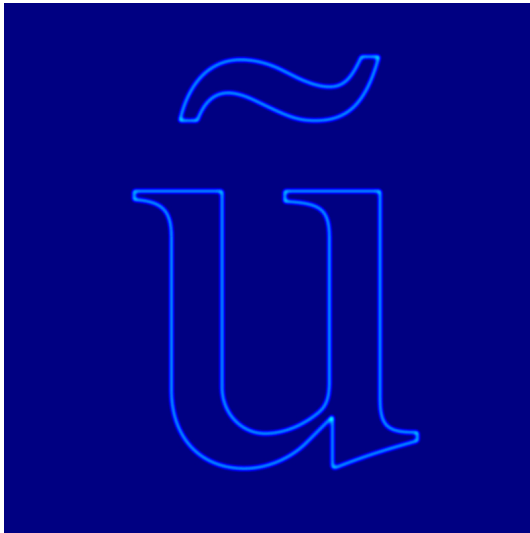
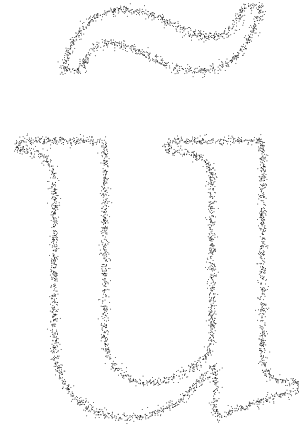


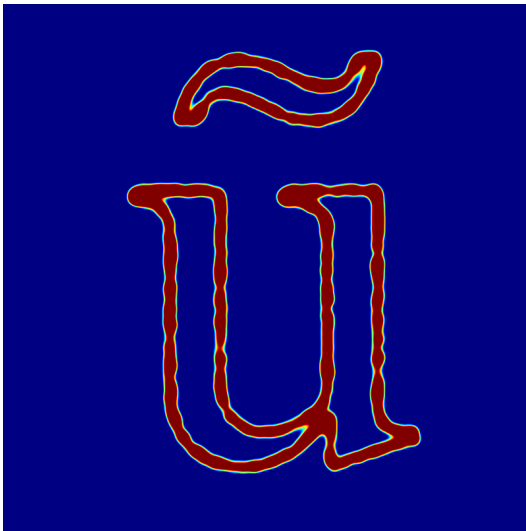
Figura 4.1: Ilustração da geração de amostras sintéticas a partir de um digitalizador de superfícies



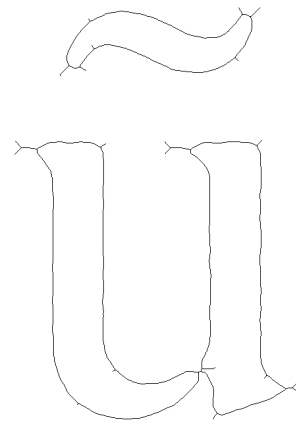
(a) Função amostrada associada a curva “u”



(b) Nuvem gerada com 200 mil pontos amostrados sobre  $\Omega$



(c) Função aproximada associada a curva “u”



(d) Curva aproximada a curva “u” via esqueleto

Figura 4.2: Funções característica das regiões usadas para gerar o conjunto de teste



# Notação

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
$S$	Conjunto do plano
$\chi_S$	Função característica de $S$ , $\chi_S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \{0, 1\}$ e $x \in S \Leftrightarrow \chi_S(x) = 1$
$\tilde{\chi}_S$	<b>Função de pertinência difusa:</b> $\tilde{\chi}_S : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ ; $\tilde{\chi}_S(x) = 0 \Rightarrow x \notin S$ ; $\tilde{\chi}_S(x) = 1 \Rightarrow x \in S$
$\mathcal{O}(S, F)$	<b>Objeto planar:</b> onde $F$ é a função de atributos de $S$
$F_S$	$F_S : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ que será $\chi_S$ ou $\tilde{\chi}_S$
$\sup \{f(x)\}$	Supremo da imagem de $f(x)$
$\mathcal{P}$	Nuvem de pontos do plano com $N$ pontos
$\#S$	Número de elementos do conjunto $S$
$\mathcal{A}(S)$	$\int_{\mathbb{R}^2} \chi_S$ A área de do conjunto $S$
$B(x_0, \delta)$	Bola na norma euclidiana de centro $x_0$ e raio $\delta$
$r(x_0, n)$	$\min \{k > 0 \text{ tal que } \#(\mathcal{P} \cap B(x_0, k)) \geq n\}$
$B_{x_0}^n$	Bola centrada em $x_0$ com raio $r(x_0, n)$
$\sigma$	desvio padrão
$\frac{\sigma}{r}$	desvio padrão relativo com média $r$
$\hat{F}$	Função que aproxima $F$
$\hat{\Lambda}$	Região que aproxima $\Lambda$
$\Delta_{\hat{F}}$	$\frac{1}{\mathcal{A}(\Omega)} \int_{\mathbb{R}^2} (F_{\Lambda}(x) - \hat{F}(x))^2 dx$ - Erro na aproximação de $F$ por $\hat{F}$
$\Delta_{\hat{\Lambda}}$	$\frac{1}{\mathcal{A}(\Omega)} \int_{\mathbb{R}^2} (\chi_{\Lambda}(x) - \chi_{\hat{\Lambda}}(x))^2 dx$ - Erro na aproximação de $\Lambda$ por $\hat{\Lambda}$
$\overline{\Delta}_{\hat{F}}$	Erro médio cometido na aproximação de $F$ por $\hat{F}$
$\overline{\Delta}_{\hat{\Lambda}}$	Erro médio cometido na aproximação de $\Lambda$ por $\hat{\Lambda}$





# Referências Bibliográficas

- [Buh03] Martin D. Buhmann. *Radial Basis Functions*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2003.
- [CBC<sup>+</sup>01] J. C. Carr, R. K. Beatson, J. B. Cherrie, T. J. Mitchell, W. R. Fright, B. C. McCallum, and T. R. Evans. Reconstruction and representation of 3d objects with radial basis functions. In *SIGGRAPH '01: Proceedings of the 28th annual conference on computer graphics and interactive techniques*, pages 67–76, New York, NY, USA, 2001. ACM Press.
- [Coo86] Robert L. Cook. Stochastic sampling in computer graphics. *ACM Transactions on Graphics*, 5(1):51–72, 1986.
- [dG95] Luiz Henrique de Figueiredo and Jonas Gomes. Computational morphology of curves. *The Visual Computer*, 11(2):105–112, 1995.
- [DG04] Tamal K. Dey and Samrat Goswami. Provable surface reconstruction from noisy samples. In *SCG '04: Proceedings of the twentieth annual symposium on computational geometry*, pages 330–339, New York, NY, USA, 2004. ACM Press.
- [DH06] Daniel Dunbar and Greg Humphreys. A spatial data structure for fast poisson-disk sample generation. *ACM Transactions on Graphics*, 25(3):503–508, 2006.
- [EKS83] Herbert Edelsbrunner, David G. Kirkpatrick, and Raimund Seidel. On the shape of a set of points in the plane. *IEEE Transactions on Information Theory*, 29(4):551–558, 1983.

- [GV03] Jonas Gomes and Luiz Velho. *Fundamentos da Computação Gráfica*. Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, RJ, Brazil, 2003.
- [KBH06] Michael Kazhdan, Matthew Bolitho, and Hugues Hoppe. Poisson surface reconstruction. In *Eurographics SGP '06: Symposium on Geometry Processing*, pages 61–70, 2006.
- [LCW05] Hongwei Lin, Wei Chen, and Guojin Wang. Curve reconstruction based on an interval B-spline curve. *The Visual Computer*, 21(6):418–427, 2005.
- [MCG03] Matthias Müller, David Charypar, and Markus Gross. Particle-based fluid simulation for interactive applications. In *SCA '03: Proceedings of the 2003 ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation*, pages 154–159, Aire-la-Ville, Switzerland, Switzerland, 2003. Eurographics Association.
- [Ros85] Sheldon M. Ross. *Introduction to Probability Models*. Academic Press, Inc, Orlando, FL, USA, third edition, 1985.