

CALIBRAGEM ONLINE DA VOLATILIDADE
LOCAL APLICADA AO ESTUDO DE
COMMODITIES

Laboratório de Análise e Modelagem Matemática em
Ciências Aplicadas
IMPA

Vinicius Albani

Jorge P. Zubelli

24 de dezembro de 2012

Resumo

Neste relatório, descrevemos de forma sucinta os desenvolvimentos relacionados à metodologia de calibragem de superfícies de volatilidade para preços de *commodities* com base em técnicas de regularização de Tikhonov para funcionais convexas.

Por um lado os resultados teóricos garantem a confiabilidade e convergência dos resultados e por outro o uso da metodologia *online* permite a incorporação progressiva de novos dados a medida que os mercados evoluem para melhoria das superfícies reconstruídas.

Os resultados apresentados neste presente relatório são consequências de desenvolvimentos em duas teses de doutorado do IMPA. A primeira, de caráter mais teórico foi o trabalho desenvolvido por A. De Cezaro, sob o título *On a Parabolic Inverse Problem Arising in Quantitative Finance: Convex and Iterative Regularization* e que aparece na série de *preprints* do IMPA sob o número C111 / 2010. Já a segunda, que introduz a metodologia *online*, de autoria de Vinicius Albani, sob o título *Volatility Calibration in Equity and Commodity Markets by Convex Regularization* possui um bibliografia detalhada e descrição dos algoritmos empregados.

As contribuições aqui apresentadas fazem parte de uma das linhas de pesquisa do Laboratório de Análise e Modelagem Matemática em Ciências Aplicadas do IMPA.

Sumário

| | |
|---|-----------|
| Introdução | 3 |
| 1 Motivação e Desafios | 3 |
| 2 Objetivo | 4 |
| 3 Aplicação na Indústria do Petróleo | 5 |
| 4 Resultados Teóricos | 5 |
| 5 Exemplos Numéricos | 6 |
| 5.1 Petroleo Brasileiro S.A (PBR) | 6 |
| 5.2 WTI Brent | 6 |
| 5.3 Henry Hub Natural Gas | 15 |
| Bibliografia | 16 |

Lista de Figuras

| | |
|--|----|
| 1 PBR dia 248. | 7 |
| 2 PBR dia 248. Funcional de Kullback-Leibler | 8 |
| 3 PBR dia 250. | 9 |
| 4 PBR dia 250. Funcional de Kullback-Leibler | 10 |
| 5 WTI dia 242. | 11 |
| 6 WTI dia 242. Funcional de Kullback-Leibler | 12 |
| 7 WTI dia 244. | 13 |
| 8 WTI dia 244. Funcional de Kullback-Leibler | 14 |
| 9 HH dia 239. | 15 |
| 10 HH dia 239. Funcional de Kullback-Leibler | 16 |
| 11 HH dia 241. | 17 |
| 12 HH dia 241. Funcional de Kullback-Leibler | 18 |

Introdução

O uso de técnicas matemáticas sofisticadas em aplicações na indústria de petróleo e energia já é uma realidade em vários segmentos deste setor, como por exemplo na exploração e na distribuição. O presente relatório evidencia a sua importância também no setor de análise e cobertura de risco, bem como no setor financeiro. Em particular, no presente texto utilizamos técnicas de problemas inversos e estimação de parâmetros para calibrar modelos de preços de opções e derivativos de *commodities*. Dentre os principais parâmetros na calibragem podemos destacar a volatilidade local proposta por Bruno Dupire em seu trabalho clássico [Dup94].

Os resultados apresentados neste presente relatório são consequências de desenvolvimentos em duas teses de doutorado do IMPA. A primeira, de caráter mais teórico foi o trabalho desenvolvido por A. De Cezaro, sob o título *On a Parabolic Inverse Problem Arising in Quantitative Finance: Convex and Iterative Regularization* e que aparece na série de *preprints* do IMPA sob o número C111 / 2010. Já a segunda, que introduz a metodologia *online*, de autoria de Vinicius Albani, sob o título *Volatility Calibration in Equity and Commodity Markets by Convex Regularization* possui um bibliografia detalhada e descrição dos algoritmos empregados.

Além das teses acima mencionadas parte dos fundamentos teóricos do presente trabalho foram publicados no trabalho [DCSZ12] e o restante se encontra submetido à publicação em periódicos especializados. Outros trabalhos relevantes ao presente relatório podem ser encontrados nas teses supra-mencionados, dentre os quais destacamos os seguintes: [ABF⁺00, AFHS97, And70, Ave98a, Ave98b, Ave98c, BI97, BJ99, BMDG05, Cré03, DCSZ12, DKZ96, Dup94, EE05, EHN96].

As contribuições aqui apresentadas fazem parte de uma das linhas de pesquisa do Laboratório de Análise e Modelagem Matemática em Ciências Aplicadas do IMPA.

1 Motivação e Desafios

Grandes empresas em mercados de *commodities*, como a Petrobrás, negociam um grande volume de contratos derivativos sobre seus ativos base. Dentre estes podemos destacar os mais simples, como a opção de compra do tipo europeu que possui as seguintes características,

- dá o direito e não a obrigação do detentor deste contrato de comprar uma determinada quantidade do ativo base em questão por um preço pré-definido numa data futura.
- Este preço é denominado “strike” e esta data é denominada “vencimento”.

- O preço da opção depende ainda do preço do ativo base, que está sujeito a uma série de incertezas. Portanto, uma boa análise de risco é fundamental para que os investidores se protejam do mesmo, evitando grandes prejuízos. Assim, uma grandeza não-observável de suma importância nestas análises é a volatilidade, que, sob certas hipóteses, pode ser extraída da série histórica de preços do ativo (vol histórica), ou ainda, dos preços dos derivativos (vol implícita e vol local).

Além dos contratos simples como a opção de compra acima, na prática é fundamental o uso de contratos mais sofisticados, como os contratos de troca de commodities ou mesmo de *spread* temporal. Tais contratos mais complexos necessitam de um sólido embasamento nos parâmetros do modelo (neste caso das superfícies de volatilidade).

Propomos aqui um modelo robusto que extraia dos preços de opções de compra do tipo europeu a volatilidade local, introduzindo expectativas e informações a priori, por meio de técnicas de regularização de problemas inversos.

2 Objetivo

O nosso objetivo é extrair a superfície de volatilidade local a partir de preços de opções de compra do tipo europeu, negociadas no mercado, através de técnicas de regularização de problemas inversos. Para isto assumimos o modelo de Dupire (em “Pricing with a Smile”) onde a superfície de preços $C = C(T, K)$ é obtida a partir de uma superfície de volatilidade A via a equação de Dupire, onde K é o strike e T é o vencimento. Inconveniente: assumir que existem opções negociadas continuamente no tempo ao vencimento T e no strike K . Realidade: temos acesso a preços de opções apenas para um número bem pequeno de vencimentos T e de strikes K . Consequência: Impossibilidade de usar diretamente a fórmula de Dupire para encontrar a superfície de volatilidade A , pois a aplicação de alguma técnica de interpolação introduziria apenas mais incertezas. Solução Proposta: Aplicar a teoria de regularização de Tikhonov ao problema em questão. Assim, dada a superfície de preços C , queremos encontrar a superfície de volatilidade local A correspondente. Isto será feito da seguinte forma: encontrar um minimizador para o funcional

$$\|F(A) - C\|^2 + \alpha f(A)$$

com a superfície A sujeita a restrições apropriadas. Note que, $F(A)$ representa a solução da equação de Dupire com superfície de volatilidade A . Observe ainda que o funcional de penalização $f(A)$ é um regularizador do problema original, de mínimos quadrados, que é instável. Além disso,

$f(A)$ pode ser utilizado na introdução de informações a priori, como a exigência de suavidade de A . Já a constante c que está a frente do termo de penalização estabelece o quanto de regularização deve ser levado em conta e, portanto, deve ser escolhida de modo apropriado.

3 Aplicação na Indústria do Petróleo

Petróleo e Gás são commodities de extrema importância no mercado mundial de energia, portanto ter acesso à superfície de volatilidade correspondente aos seus muitos ativos é de fundamental importância para empresas como a Petrobrás. Isto porque, através desta quantidade não observável, dentre outras coisas, é possível obter o preço justo de um grande número de instrumentos financeiros, como as também chamadas opções exóticas. O conhecimento de tais preços é fundamental em decisões corporativas, onde se deve decidir quando o investimento num determinado projeto, como a exploração de um campo petrolífero, será vantajoso ou não, o que é crucial para a sua implementação. Logo, o desenvolvimento de técnicas confiáveis para ter acesso a essa quantidade é tão importante. Isto tem motivado um grande número de trabalhos técnicos e científicos.

4 Resultados Teóricos

Utilizando as técnicas de regularização de Tikhonov, chegamos ao seguinte problema: encontrar a superfície A que minimize o funcional:

$$\|F(A)-C\|^2 + \alpha f(A),$$

onde a variável A está sujeita a restrições apropriadas. Além disso, podemos assumir que a superfície de preços C pode estar corrompida por um ruído branco gaussiano, de nível $\delta > 0$. Assim, se denotarmos a superfície corrompida por $C(\delta)$ e a sem ruído por C , teremos que $\|C(\delta)-C\| < \delta$. Portanto, através das técnicas de análise convexa conseguimos provar os seguintes resultados:

- Existência e regularidade de solução para o problema penalizado

$$\|F(A)-C\|^2 + \alpha f(A),$$

para todo $\delta > 0$.

- Convergência da solução do problema penalizado com ruído para a solução do problema original sem ruído.
- Taxas de convergência da solução do problema penalizado com ruído para a solução do problema original.
- Escolha apropriada do parâmetro de regularização α por meio do princípio da discrepância de Morozov, com convergência e taxas de convergência.

5 Exemplos Numéricos

Nesta seção apresentaremos diversos resultados numéricos usando a metodologia desenvolvida.

5.1 Petroleo Brasileiro S.A (PBR)

Para iniciar, apresentaremos as superfícies de volatilidade associadas aos preços de opções de compra da Petrobras no mercado de Nova York no ano de 2009.

5.2 WTI Brent

Neste parágrafo apresentaremos resultados referentes aos preços de óleo do tipo Brent/WTI negociado nos mercados internacionais. Como nos mercados de equity para preços de ações da Petrobras apresentaremos os preços de opções de compra simuladas e comparados com preços reais. Na segunda apresentaremos a diferença de preços e na terceira mostraremos a superfície de volatilidade local.

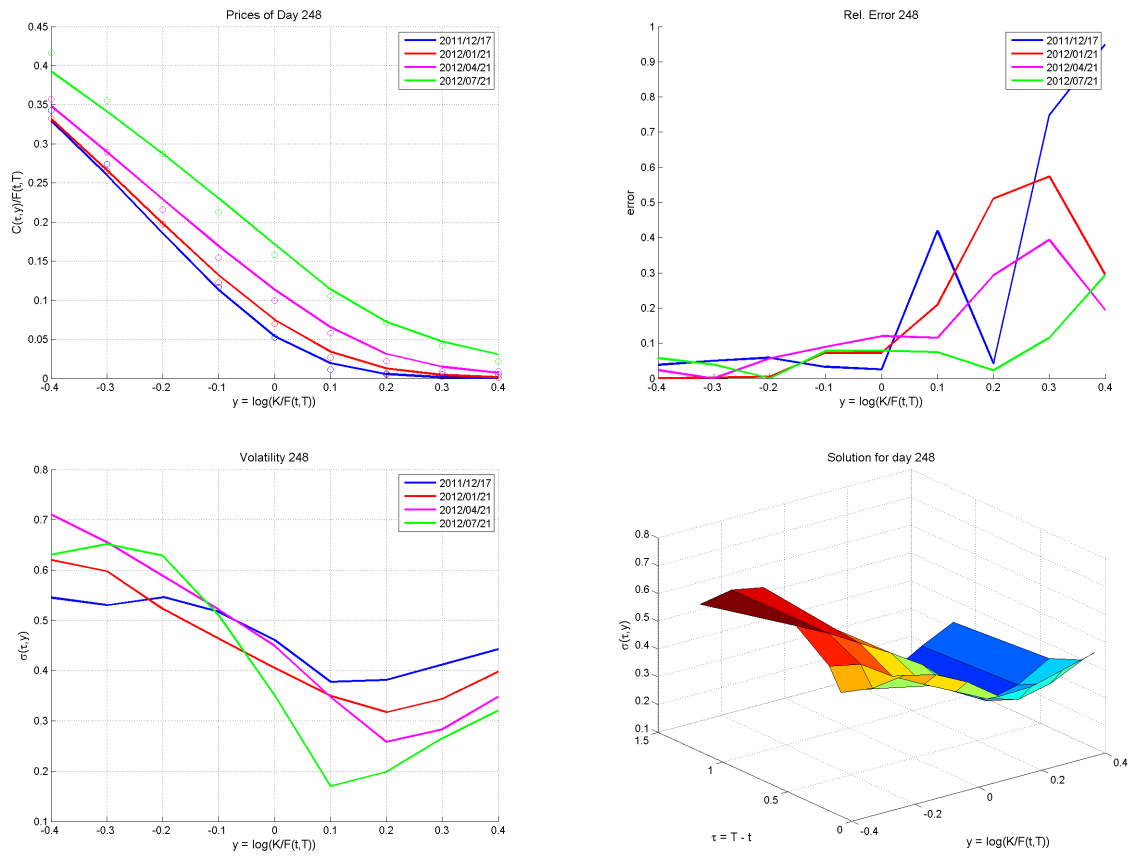


Figura 1: PBR dia 248.

Dia 248: A primeira imagem apresenta preços listados e simulados de opções de compra de ações da PBR. A segunda mostra o erro relativo entre simulads e listados. A terceira e quarta apresenta as superfícies de volatilidade local.

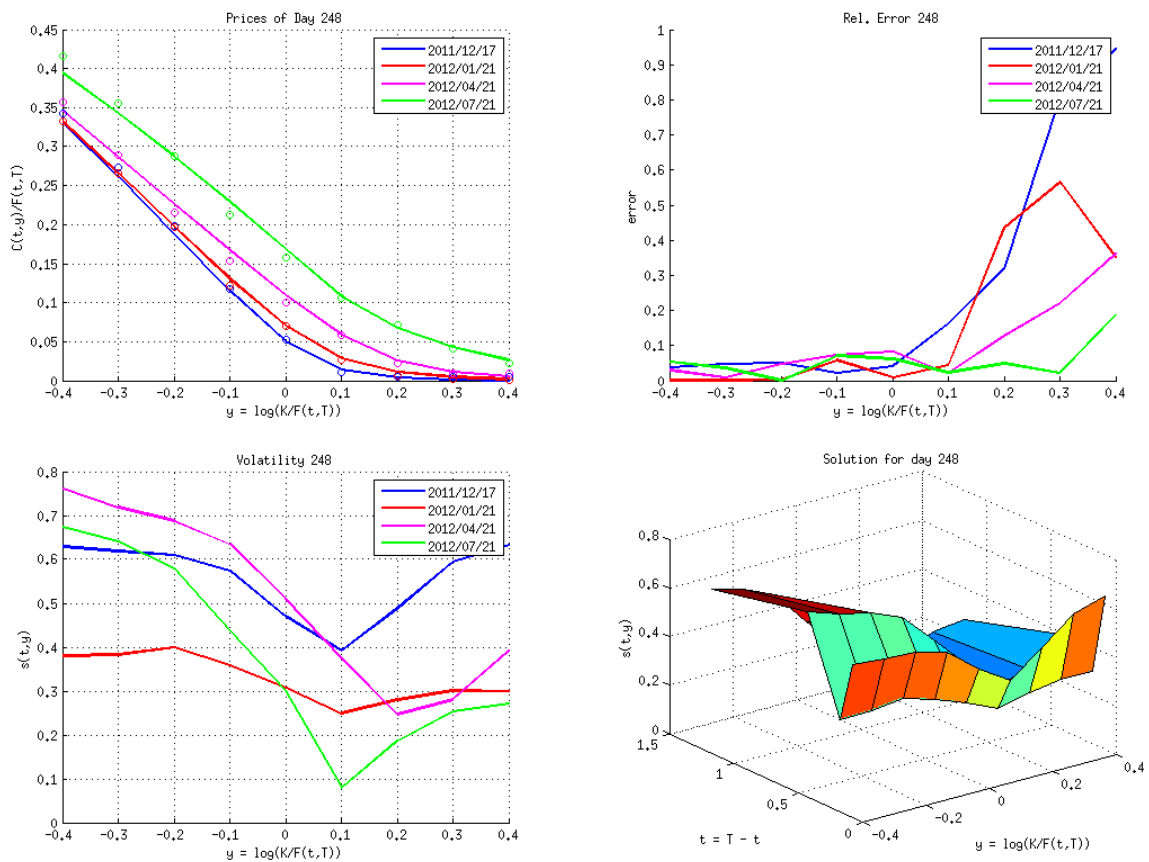


Figura 2: PBR dia 248. Funcional de Kullback-Leibler

Dia 248: A primeira imagem apresenta preços listados e simulados de opções de compra de ações da PBR. A segunda mostra o erro relativo entre simulads e listados. A terceira e quarta apresenta as superfícies de volatilidade local. Funcional de Kullback-Leibler usado na regularização.

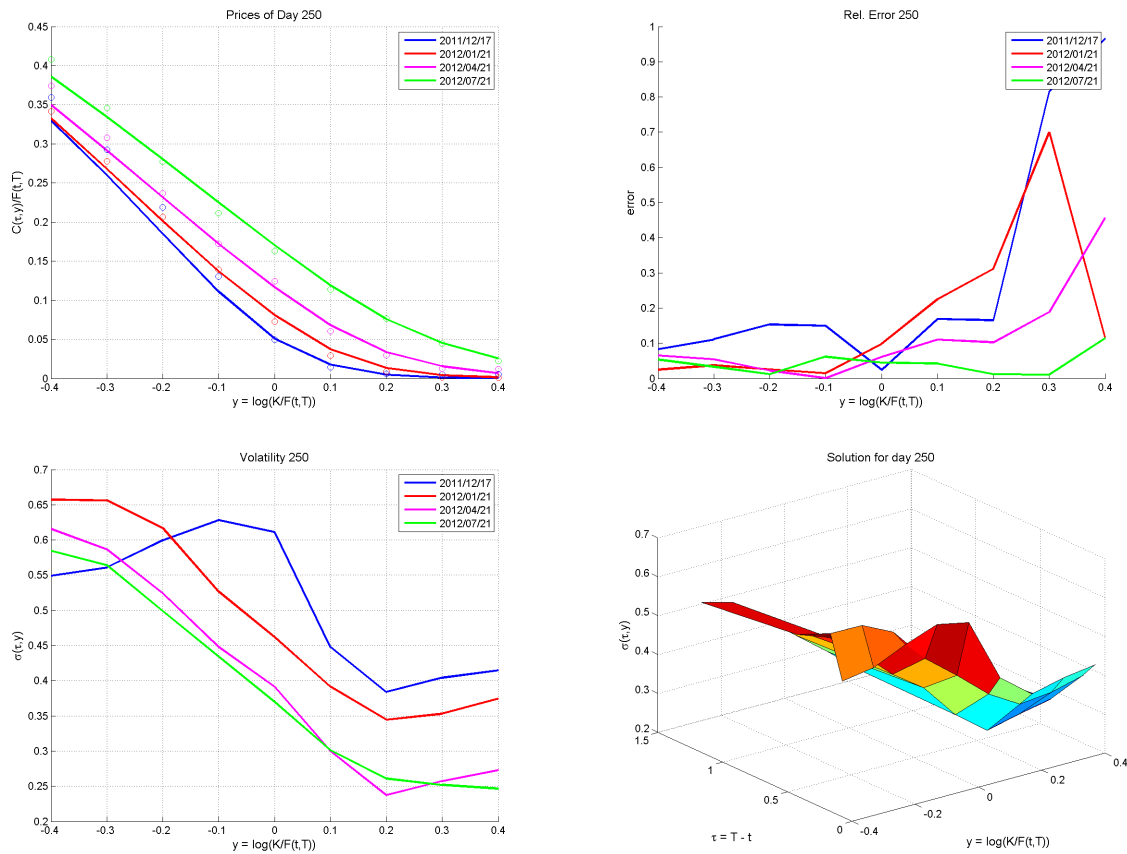


Figura 3: PBR dia 250.

Dia 250: A primeira imagem apresenta preços listados e simulados de opções de compra de ações da PBR. A segunda mostra o erro relativo entre simulads e listados. A terceira e quarta apresenta as superfícies de volatilidade local.

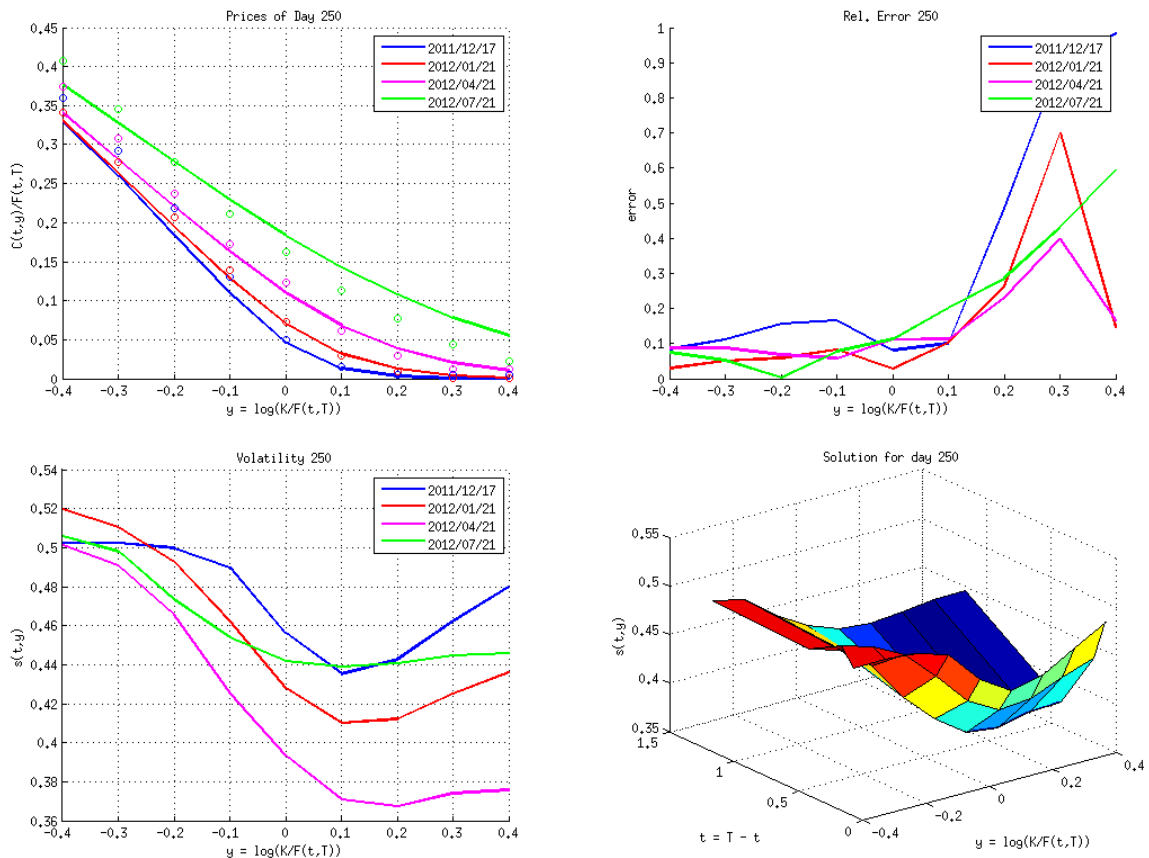


Figura 4: PBR dia 250. Funcional de Kullback-Leibler

Dia 250: A primeira imagem apresenta preços listados e simulados de opções de compra de ações da PBR. A segunda mostra o erro relativo entre simulads e listados. A terceira e quarta apresenta as superfícies de volatilidade local. A regularização fez uso da entropia de Kullback-Leibler

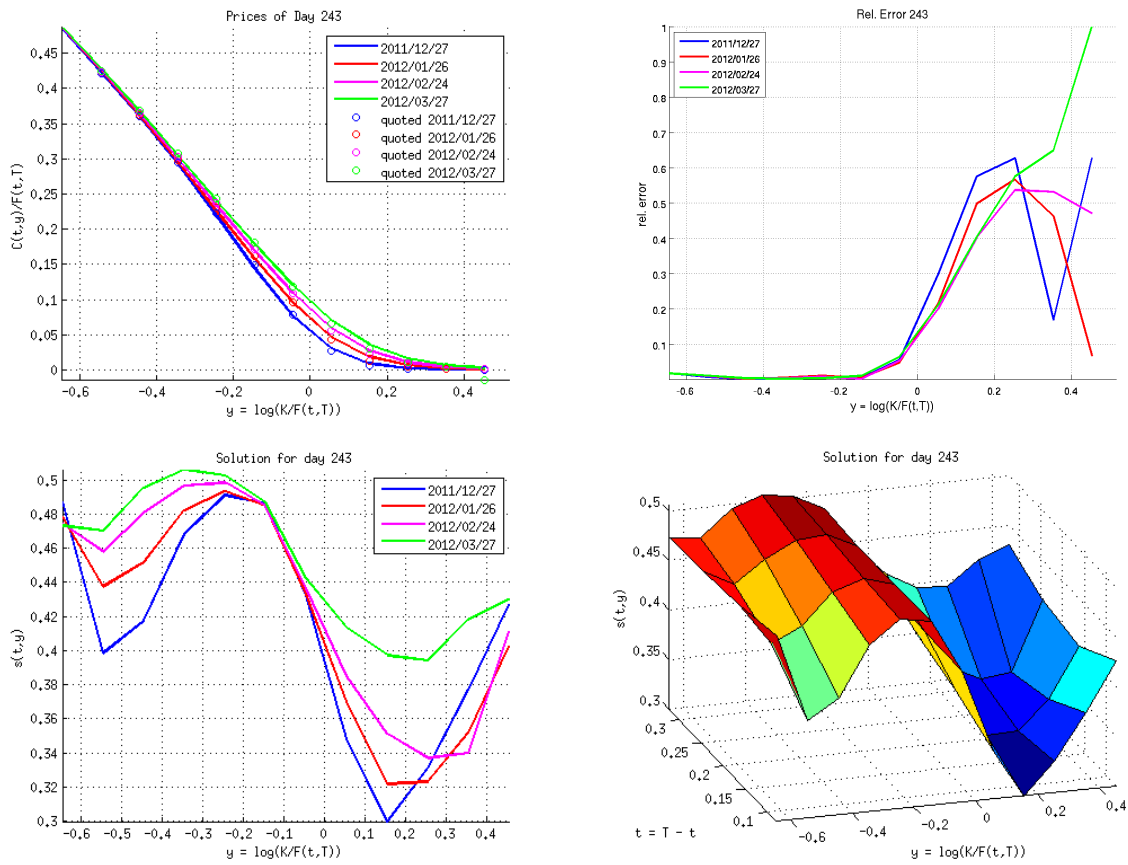


Figura 5: WTI dia 242.

Dia 242: A primeira imagem apresenta preços listados e simulados de opções de compra de ações da WTI. A segunda mostra o erro relativo entre simulads e listados. A terceira e quarta apresenta as superfícies de volatilidade local.

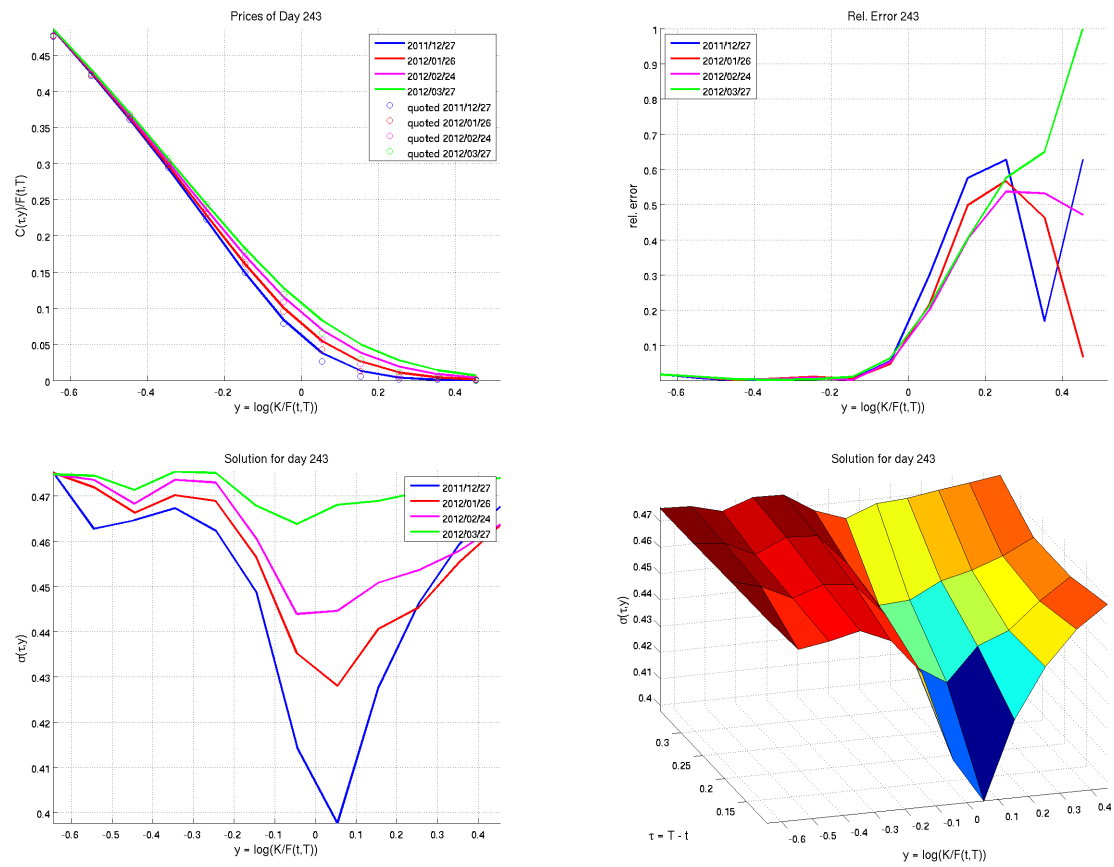


Figura 6: WTI dia 242. Funcional de Kullback-Leibler

Dia 242: A primeira imagem apresenta preços listados e simulados de opções de compra de ações da WTI. A segunda mostra o erro relativo entre simulads e listados. A terceira e quarta apresenta as superfícies de volatilidade local. Regularização com o funcional de Kullback-Leibler.

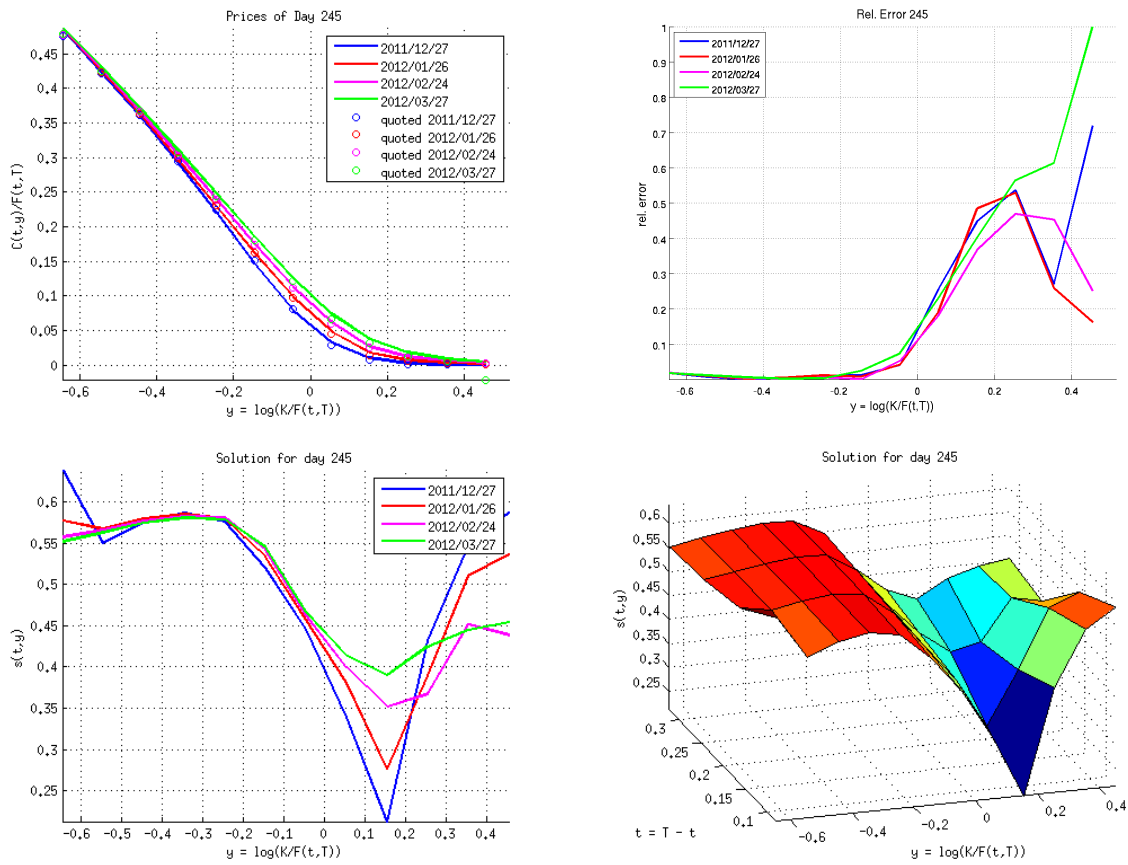


Figura 7: WTI dia 244.

Dia 244: A primeira imagem apresenta preços listados e simulados de opções de compra de ações da WTI. A segunda mostra o erro relativo entre simulads e listados. A terceira e quarta apresenta as superfícies de volatilidade local.

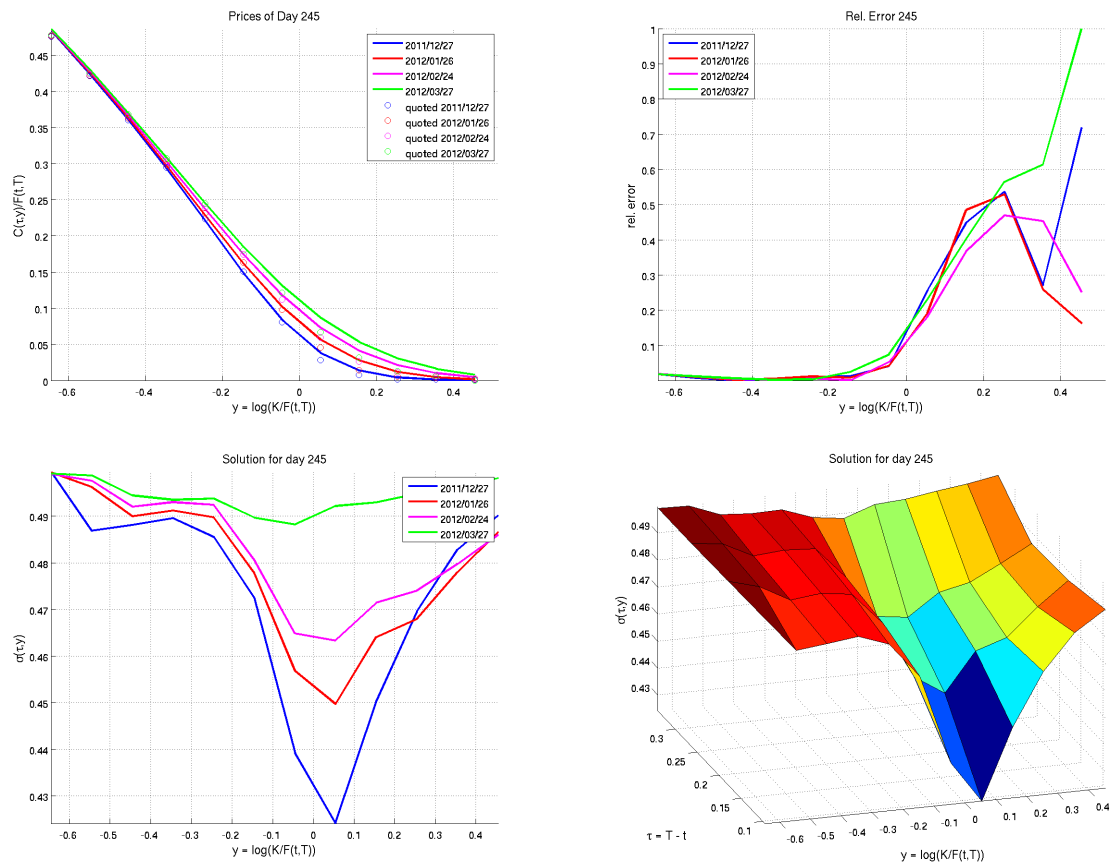


Figura 8: WTI dia 244. Funcional de Kullback-Leibler

Dia 244: A primeira imagem apresenta preços listados e simulados de opções de compra de ações da WTI. A segunda mostra o erro relativo entre simulads e listados. A terceira e quarta apresenta as superfícies de volatilidade local. Regularização com o funcional de Kullback-Leibler.

5.3 Henry Hub Natural Gas

Como nas seções anteriores apresentaremos os resultados para o mercado de gas natural negociado na bolsa de Nova York e associados ao padrão do Henry Hub.

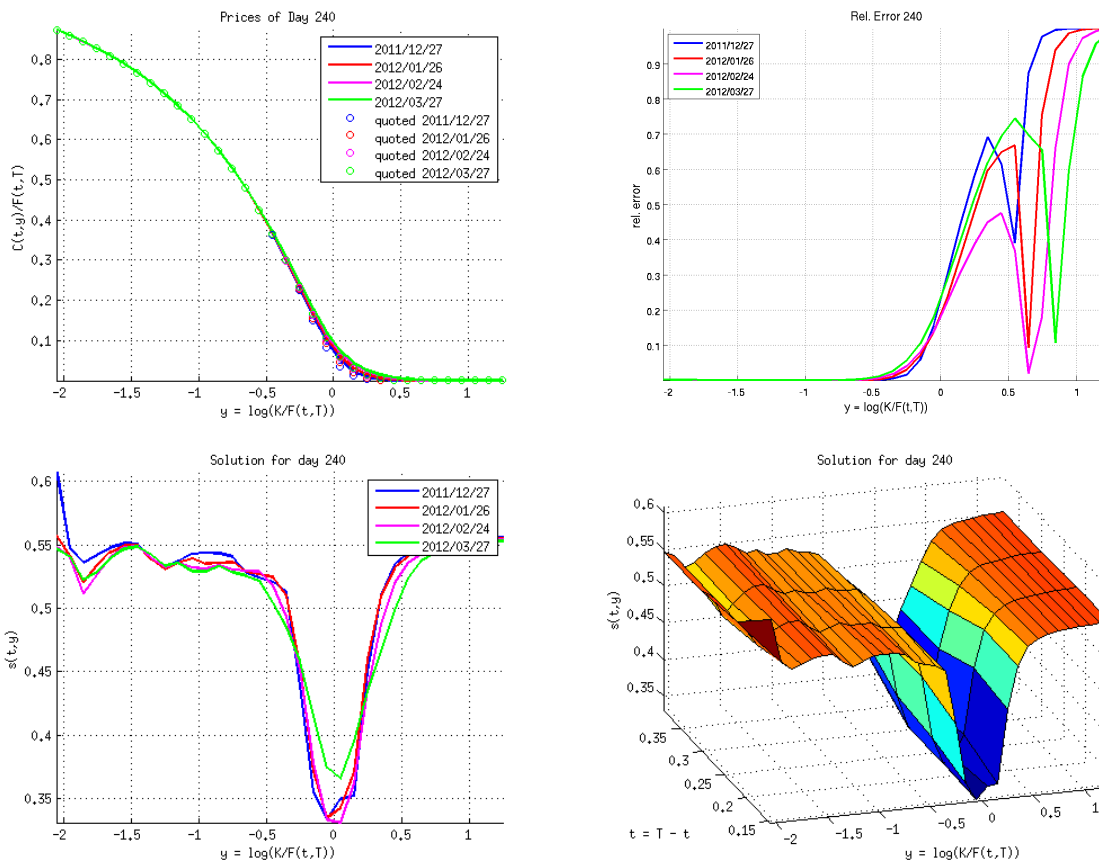


Figura 9: HH dia 239.

Dia 239: A primeira imagem apresenta preços listados e simulados de opções de compra de ações da HH. A segunda mostra o erro relativo entre simulads e listados. A terceira e quarta apresenta as superfícies de volatilidade local.

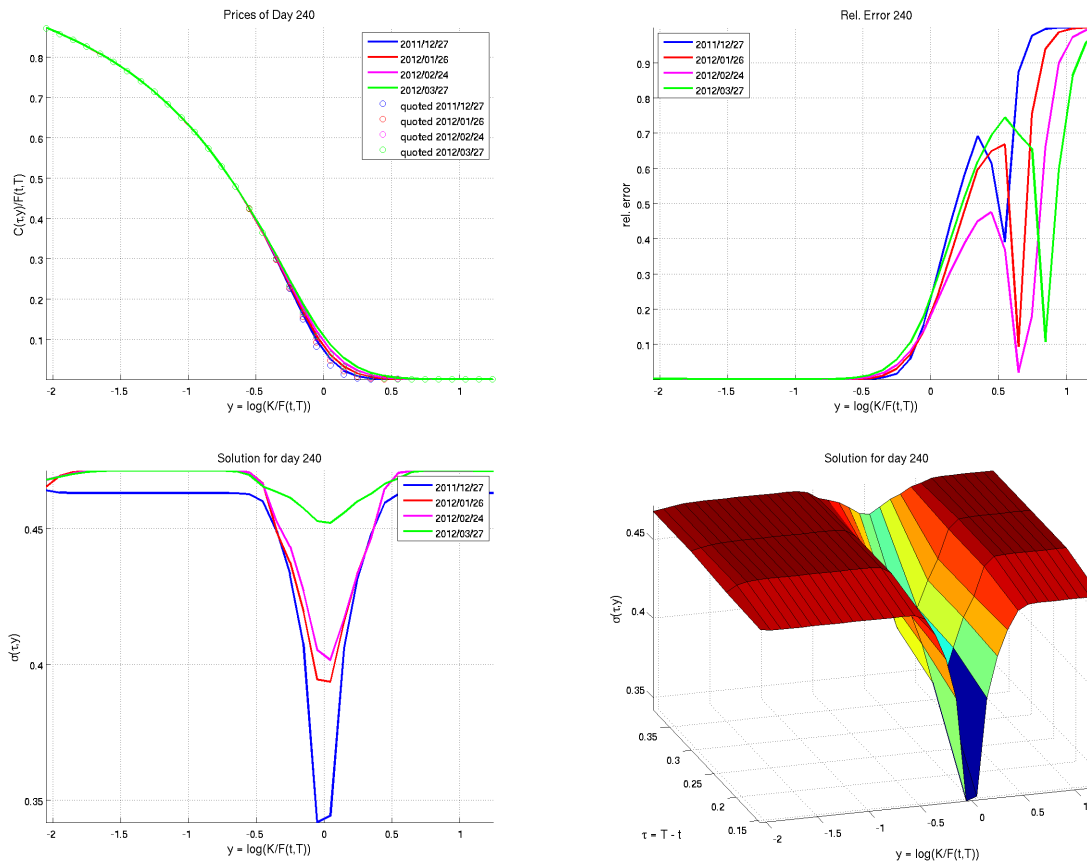


Figura 10: HH dia 239. Funcional de Kullback-Leibler

Dia 239: A primeira imagem apresenta preços listados e simulados de opções de compra de ações da HH. A segunda mostra o erro relativo entre simulads e listados. A terceira e quarta apresenta as superfícies de volatilidade local. Regularização com o funcional de Kullback-Leibler.

Referências

- [ABF⁺00] M. Avellaneda, R. Buff, C. Friedman, N. Grandchamp, L. Kruk, and J. Newman. Weighted Monte Carlo: A new technique for calibrating asset-pricing models. Spigler, Renato (ed.), Applied and industrial mathematics, Venice-2, 1998. Selected papers from the ‘Venice-2/Symposium’, Venice, Italy, June 11-16, 1998. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 1-31 (2000)., 2000.
- [AFHS97] M. Avellaneda, C. Friedman, R. Holmes, and D. Samperi. Calibrating volatility surfaces via relative-entropy minimization. *Appl. Math. Finance*, 4(1):37–64, 1997.

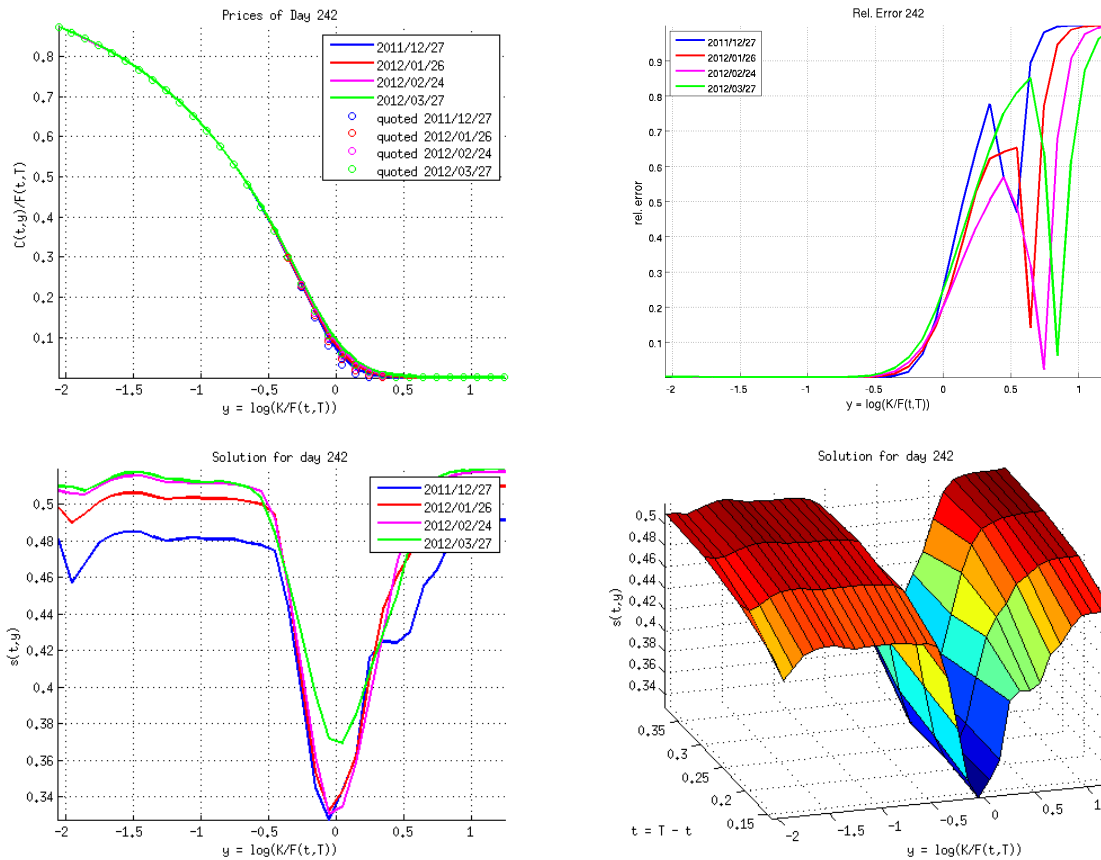


Figura 11: HH dia 241.

Dia 241: A primeira imagem apresenta preços listados e simulados de opções de compra de ações da HH. A segunda mostra o erro relativo entre simulads e listados. A terceira e quarta apresenta as superfícies de volatilidade local.

[And70] E. B. Andersen. Sufficiency and exponential families for discrete sample spaces. 65:1248–1255, 1970.

[Ave98a] M. Avellaneda. Minimum-relative-entropy calibration of asset-pricing models. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 1(4):447–472, 1998.

[Ave98b] Marco Avellaneda. The minimum-entropy algorithm and related methods for calibrating asset-pricing model. In *Trois applications des mathématiques*, volume 1998 of *SMF Journ. Annu.*, pages 51–86. Soc. Math. France, Paris, 1998.

[Ave98c] Marco Avellaneda. The minimum-entropy algorithm and related methods for calibrating asset-pricing models. In *Proceedings of the International Congress of*

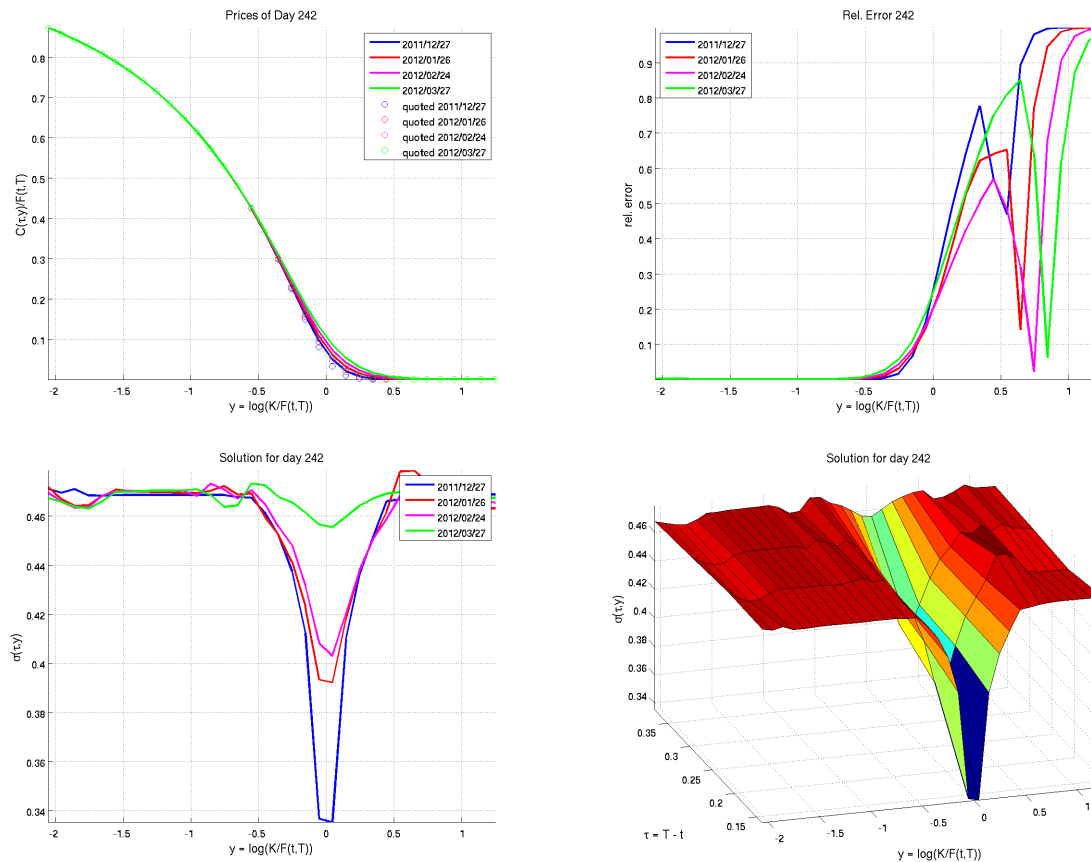


Figura 12: HH dia 241. Funcional de Kullback-Leibler

Dia 241: A primeira imagem apresenta preços listados e simulados de opções de compra de ações da HH. A segunda mostra o erro relativo entre simulads e listados. A terceira e quarta apresenta as superfícies de volatilidade local. Regularização com o funcional de Kullback-Leibler.

Mathematicians, Vol. III (Berlin, 1998), number Extra Vol. III, pages 545–563 (electronic), 1998.

[BI97] I. Bouchouev and V. Isakov. The inverse problem of option pricing. *Inverse Problems*, 13(5):L11–L17, 1997.

[BJ99] James N. Bodurtha, Jr. and Martin Jermakyan. Nonparametric estimation of an implied volatility surface. *Journal of Computational Finance*, 2(4), Summer 1999.

[BMDG05] A. Banerjee, S. Merugu, I.S. Dhillon, and J. Ghosh. Clustering with bregman divergences. *Journal of Machine Learning Research*, 6:1705–1749, 2005.

- [Cré03] S. Crépey. Calibration of the local volatility in a generalized Black-Scholes model using Tikhonov regularization. *SIAM J. Math. Anal.*, 34(5):1183–1206 (electronic), 2003.
- [DCSZ12] A. De Cezaro, O. Scherzer, and J. P. Zubelli. Convex regularization of local volatility models from option prices: convergence analysis and rates. *Nonlinear Anal.*, 75(4):2398–2415, 2012.
- [DKZ96] Emanuel Derman, Iraj Kani, and Joseph Z. Zou. The local volatility surface: Unlocking the information in index option prices. *Financial Analysts Journal*, 52(4):25–36, 1996.
- [Dup94] B. Dupire. Pricing with a smile. *Risk*, 7:18–20, 1994.
- [EE05] H. Egger and H. W. Engl. Tikhonov regularization applied to the inverse problem of option pricing: convergence analysis and rates. *Inverse Problems*, 21(3):1027–1045, 2005.
- [EHN96] H. W. Engl, M. Hanke, and A. Neubauer. *Regularization of inverse problems*, volume 375 of *Mathematics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1996.