Soluções perturbadas para o problema de deposição em múltiplas geometrias

J. M. Silva, D. Marchesin

Resumo

Propomos uma solução aproximada para o problemas de filtração em múltiplas geometrias, construída através de perturbações das equações que regem o modelo. Mostramos que ela aproxima a solução exata de que dispomos para o problema no caso da produção feita em laboratório, em situações onde a função de filtração varia pouco.

1 Introdução.

A presença de impurezas na água injetada no meio poroso é a grande responsável pela obstrução dos poros e conseqüênte perda de produtividade dos poços produtores de água potável. Os modelos para o transporte e deposição destas partículas no meio poroso dependem intrisicamente de uma função, a *função de filtração*, que não pode ser deduzida a partir de princípios físicos mas sim obtida experimentalmente. Sua escolha impõe, portanto, a necessida da conformidade experimental se a candidata é para ser tomada com uma aproximação razoável do fenômeno físico.

A escolha tomada neste corrobora e estende os resultados obtidos para o problema de recuperação em múltiplas geometrias de de Zwart em [4], observando que a deposição está intimamente ligada ao fluxo no meio poroso:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \lambda |\mathbf{u}|^{\delta} c,$$

onde σ é a concentração de partículas depositadas, c é a concentração de partículas suspensas, λ é a função de filtração, $\mathbf{u}$ é o fluxo no meio poroso e por fim δ é um parâmetro a ser ajustado, dependente inclusive da geometria do fluxo.

Acrescentamos a este modelo uma dependencia explícita de λ em termos de uma pequena dependência linear em σ, a saber:

$$\lambda(\sigma) = \lambda_0(1 + \varepsilon\sigma),$$

onde λ_0 é uma constante, tornando o sistema de EDPs não linear, porém apto a registrar as modificações na deposição conforme os poros se preenchem. Embora este novo sistema não linear não possua solução explícita conhecida para $\delta \neq 1$, sua generalidade motiva a busca por soluções aproximadas. Para isto consideramos que a solução pode ser dada em termos de uma série assintótica em ε, centrada na solução do problema não perturbado. Aplicamos o método das perturbações para encontrar uma solução aproximada de ordem um.

Comparamos esta solução aproximada com a solução no caso particular de geometria linear, onde a solução exata é conhecida. Mostramos que de fato a aproximação é boa para tempos pequenos, comparando o comportamento das duas soluções.

Prosseguimos comparando a formulação apresentada com outra que despreza o termo de acumulação das partículas suspensas na equação de conservação de massa, ambas devidas a Herzig *et al* [2]. Esta última tem se mostrado mais adequada para simulações numéricas [3]

A posse do solução aproximada por si lança alguma luz na compreensão do problema de deposição. Também é útil para a validação de métodos numéricos para este problema, estes sim o instrumento de maior peso na aproximação de soluções.

2 Desenvolvimento da solução perturbada.

Nosso problema é encontrar uma solução aproximada para o sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\, c - \dfrac{\partial}{\partial t}\, c = +\dfrac{\partial}{\partial t}\, \sigma, & \text{(a)} \\[2em] \dfrac{\partial}{\partial t}\, \sigma = \lambda_0\, x^{-\beta}(1+\varepsilon\,\sigma)c, & \text{(b)} \end{cases} \tag{1}$$

onde ε é negativo e pequeno, no sentido que $\|\varepsilon\sigma\|_{L^\infty} \ll 1$. As funções c e σ estão definidas para $x \in [x_0, 1]$, $0 < x_0 < 1$ e $t \geq 0$. Supomos c e σ tão suaves quanto o necessário para os cálculos que seguem.

2.1 Condições iniciais e de contorno.

Supomos que para $t = 0$ a rocha esteja livre de partículas depositadas e não haja partículas suspensas:

$$\sigma(x,0) \equiv 0 \quad \text{e} \quad c(x,0) \equiv 0. \tag{2}$$

Para $t > 0$ existe uma injeção de fluido pela parede $x = 1$, o que representamos como a condição de contorno:

$$c(1,t) = 1. \tag{3}$$

2.2 Método de perturbação.

Trataremos o problema (1) como uma perturbação do problema no qual $\varepsilon = 0$, caso onde dispomos das soluções exatas [4]:

$$\underset{\varepsilon=0}{c(x,t)} = \begin{cases} x^{\lambda_0}, \quad \beta = 1; & \text{(a)} \\ \exp\left\{ \dfrac{\lambda_0}{(1-\beta)} \left[x^{1-\beta} - 1 \right] \right\}, \ \beta \neq 1. & \text{(b)} \end{cases} \tag{4}$$

$$\underset{\varepsilon=0}{\sigma(x,t)} = \begin{cases} \lambda_0\, x^{\lambda_0 - 1}(t + x - 1), \quad \beta = 1; & \text{(a)} \\ \lambda_0\, x^{-\beta} \exp\left\{ \dfrac{\lambda_0}{(1-\beta)} \left[x^{1-\beta} - 1 \right] \right\}(t + x - 1), \ \beta \neq 1, & \text{(b)} \end{cases} \tag{5}$$

onde (4) e (5) valem no trapézio:

$$D = \{x \in [x_0, 1], t > 1 - x\}; \tag{6}$$

Para $\{x \in [x_0, 1], 0 < t < 1 - x\}$, o efeito da injeção (3) ainda não foi sentido, de forma que as condições iniciais (2) fazem $\sigma \equiv c \equiv 0$. Para o problema perturbado concentraremos nossa atenção no trapézio (6).

Sejam agora c e σ soluções do sistema (1), no trapézio (6). Supomos que c e σ admitam representação na forma de série assintótica em ε. Assim, esperamos que a solução de (1) esteja muito próxima da solução do sistema onde $\varepsilon = 0$. Escrevemos:

$$\begin{cases} c(x,t) = c_0(x,t) + \varepsilon\, c_1(x,t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), & \text{(a)} \\ \sigma(x,t) = \sigma_0(x,t) + \varepsilon\, \sigma_1(x,t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), & \text{(b)} \end{cases} \tag{7}$$

onde $\varepsilon\, c_1$ e $\varepsilon\, \sigma_1$ são as correções de primeira ordem e c_0 e σ_0 são as soluções de (1) quando $\varepsilon = 0$.

Substituindo (7) em (1a) obtemos:

$$\begin{aligned} &\partial_x(c_0 + \varepsilon\, c_1) - \partial_t(c_0 + \varepsilon c_1) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = \\ &\quad = (\partial_x\, c_0 - \partial_t\, c_0) + \varepsilon(\partial_x\, c_1 - \partial_t\, c_1) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{8}$$

para o lado esquerdo e:

$$\begin{aligned} &\lambda_0\, x^{-\beta}[1 + \varepsilon(\sigma_0 + \varepsilon\, \sigma_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2))][c_0 + \varepsilon\, c_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)] = \\ &\qquad = \lambda_0\, x^{-\beta}\big[(c_0 + \varepsilon\, c_1) + \varepsilon\, c_0\sigma_0\big] + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{9}$$

para o lado direito.

Igualando (8) e (9) obtemos:

$$\begin{aligned} &(\partial_x c_0 - \partial_t c_0 - \lambda_0 x^{-\beta}\, c_0) + \varepsilon(\partial_x c_1 - \partial_t c_1) = \\ &\quad = \varepsilon\, \lambda_0\, x^{-\beta}(c_0\sigma_0 + c_1) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{10}$$

Como c_0 é solução de (1) para $\varepsilon = 0$, a soma no primeiro par de parênteses é zero. Dividindo (10) por ε obtemos:

$$\partial_x\, c_1 - \partial_t\, c_1 = \lambda_0\, x^{-\beta}(c_0\sigma_0 + c_1), \tag{11}$$

onde c_0 , σ_0 são conhecidos e foram desprezados os termos de ordem mais alta.

Fazendo a substituição de (7) em (1b) obtemos:

$$
\begin{aligned}
&\partial_t(\sigma_0 + \varepsilon\,\sigma_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)) = \\
&= \lambda_0\, x^{-\beta}\big[1 + \varepsilon(\sigma_0 + \varepsilon\,\sigma_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2))\big]\big[c_0 + \varepsilon\, c_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\big] \\
&= \lambda_0\, x^{-\beta}\big[c_0 + \varepsilon\, c_1 + \varepsilon\,\sigma_0\, c_0\big] + \mathcal{O}(\varepsilon^2).
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Analogamente ao caso anterior, temos que $\partial_t\sigma_0 - \lambda_0 x^{-\beta} c_0 = 0$. Dividindo (12) por ε e desprezando os termos de ordem mais alta obtemos:

$$
\partial_t\sigma_1 = \lambda_0\, x^{-\beta}\Big(\sigma_0 c_0 + c_1\Big). \tag{13}
$$

Novamente, lembramos que σ_0 e c_0 são conhecidos. Unimos (11) e (13) no sistema:

$$
\begin{cases}
\partial_x\, c_1 - \partial_t\, c_1 = \lambda_0\, x^{-\beta}\big[c_0\sigma_0 + c_1\big]; & \text{(a)} \\
\partial_t\, \sigma_1 = \lambda_0\, x^{-\beta}\big[c_0\sigma_0 + c_1\big]; & \text{(b)}
\end{cases}
\tag{14}
$$

que é o sistema para as perturbações de primeira ordem (c_1, σ_1). A grande vantagem desta abordagem é que c_1 pode ser obtido de modo independente de σ_1 , como pode ser visto em (14a).

2.3 Condições Iniciais e de contorno para o problema perturbado.

Da expansão (7a) temos:

$$
c(1, \xi - 1) = c_0(1, \xi - 1) + \varepsilon\, c_1(1, \xi - 1) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \tag{15}
$$

vale $c(1, \xi - 1) \equiv 1$, por (3), e também $c_0(1, \xi - 1) \equiv 1$ porque c_0 é solução do problema (1) com $\varepsilon = 0$. Desprezando os termos de ordem mais alta temos que $c_1(1, \xi - 1) \equiv 0$, $\forall\, \varepsilon > 0$.

Um argumento de continuidade em adição a um comentário análogo ao anterior nos fornece $\sigma_1(x, 1 - x) = 0$.

2.4 Solução do problema perturbado.

Para resolver (14) propomos a mudança de variáveis:

$$\begin{cases} \xi = x + t; \\ X = x, \end{cases} \quad \begin{cases} x = X; \\ t = \xi - X, \end{cases}$$

donde usando a regra da cadeia obtemos:

$$\frac{d}{dX} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t}. \tag{16}$$

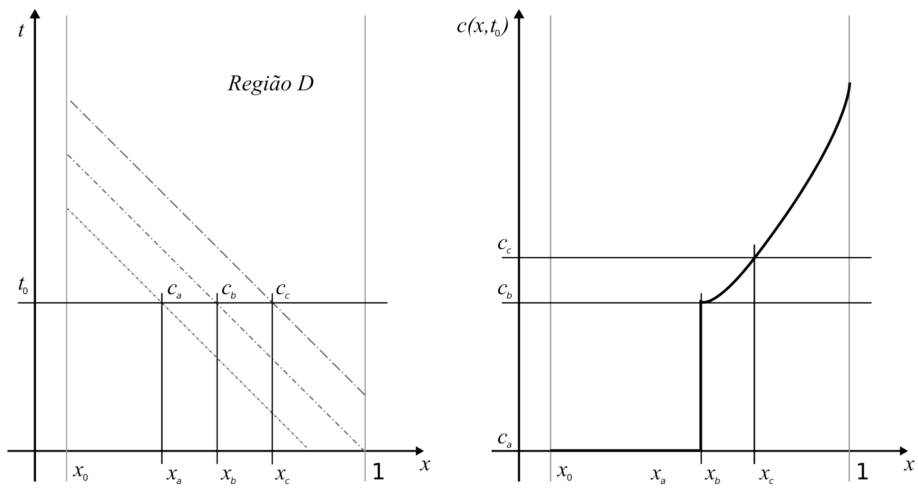

Figura 1: Ilustração do método de solução por caractetísticas.

Na Figura 1 fornecemos uma ilustração do método. À esquerda temos três características, a primeira c_a fora do trapézio (6), a segunda na regiao de transição e a terceira transportando informação do dado de contorno. Na figura à direita exibimos o perfil da solução para partículas suspensas como função da posição no instante t_0 pré-fixado. Para a região de interesse (6), temos $\xi \geq 1$. Fixando um tal ξ, a equação (14a) reduz-se à EDO:

$$\frac{d}{dX} c_1(X, \xi - X) = \lambda_0 X^{-\beta} \big[c_0(x, \xi - X)\sigma_0(X, \xi - X) + c_1(X, \xi - X) \big]. \tag{17}$$

para simplificar a notação

$$\begin{cases} c_i(X) := c_i(X, \xi - X); \\ \sigma_i(X) := \sigma_i(X, \xi - X), \quad i \in \{0, 1\}. \end{cases} \tag{18}$$

Resolvendo-a:

$$\frac{d}{dX}\,c_1(X) = \lambda_0\,X^{-\beta}\big[c_0(X)\sigma_0(X) + c_1(X)\big]$$
$$\frac{d}{dX}\,c_1(X) - \lambda_0\,X^{-\beta}\,c_1(X) = \lambda_0\,X^{-\beta}\,c_0(X)\sigma_0(X)$$

$$\frac{d}{dX}\left[\exp\left\{-\int_1^X \lambda_0 s^{-\beta}\,ds\right\}c_1(X)\right] = \exp\left\{-\int_1^X \lambda_0 s^{-\beta} ds\right\}\lambda_0 X^{-\beta} c_0(X)\sigma_0(X). \quad (19)$$

A solução de (19) é feita em casos.

i) $\beta = 1$. Neste, temos que:

$$\int_1^X \lambda_0 s^{-\beta}\,ds = \ln|X|^{\lambda_0} - \ln\,|1|^{\lambda_0} = \ln\,X^{\lambda_0},\; X \geq x_0 > 0. \quad (20)$$

Aplicando (20) em (19) temos:

$$\frac{d}{dX}\left[\exp\left\{-\ln(X)^{\lambda_0}\right\}c_1(X)\right] = \exp\left\{-\ln(X)^{\lambda_0}\right\}\lambda_0 X^{-1} c_0(X)\sigma_0(X). \quad (21)$$

$$X^{-\lambda_0}c_1(X) = c_1(1) + \int_1^X s^{-\lambda_0}\,\lambda_0\,s^{-1}\,c_0(s)\sigma(s)\,ds. \quad (22)$$

Note que $c_1(1) = c_1(1, \xi - 1)$ é o valor no "pé" da característica. Isto fornece:

$$c_1(X) = X^{\lambda_0}\int_1^X \lambda_0\,s^{-(\lambda_0+1)}\,c_0(s)\sigma_0(s)\,ds. \quad (23)$$

Substituindo (4a) e (5a) em (23) e na notação (17); $\sigma(s) = \sigma(s, \xi - s)$, $c(s) = c(s, \xi - s)$:

$$\begin{aligned} c_1(X) &= X^{\lambda_0}\int_1^X \lambda_0\,s^{-(\lambda_0+1)}(s^{\lambda_0})\big[\lambda_0\,s^{\lambda_0-1}(\xi - s + s - 1)\big]\,ds \quad (24) \\ &= \lambda_0^2\,X^{\lambda_0}(\xi - 1)\int_1^X s^{s_0-2}\,ds. \end{aligned}$$

Voltando às variáveis (x, t) temos:

$$c_1(x,t) = \lambda_0^2\,x^{\lambda_0}(t + x - 1)\int_1^x s^{\lambda_0-2}\,ds. \quad (25)$$

Escrevendo:

$$f(x) = \int_1^x s^{\lambda_0 - 2}\, ds. \tag{26}$$

temos que:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda_0 - 1}\big[x^{\lambda_0 - 1} - 1\big], & \text{se} \quad \lambda_0 \neq 1; \\ \ln x, \quad \text{se} \quad \lambda_0 = 1. \end{cases} \tag{27}$$

De posse de (25) o cálculo de σ_1 reduz-se a uma integração. Usando (14b) escrevemos:

$$\sigma_1(x,t) = \sigma_1(x, 1-x) + \lambda_0 x^{-1} \int_{1-x}^{t} [c_0(x,s)\sigma_0(x,s) + c_1(x,s)]\, ds, \tag{28}$$

onde o intervalo de integração justifica-se observando que a solução é não nula apenas acima da reta $t = 1 - x$. Lembre que $\sigma_1(1) \equiv 0$, para o problema perturbado.

Substituindo (4a), (5a), (25) e (26) em (28) obtemos:

$$\begin{aligned} \sigma_1(x,t) &= \lambda_0 x^{-1} \int_{1-x}^{t} \big[x^{\lambda_0}\lambda_0 x^{\lambda_0 - 1}(r + x - 1) + \lambda_0^2 x^{\lambda_0}\, f(x)(r + x - 1)\big] dr \\ &= \lambda_0\, x^{-1}\big[\lambda_0\, x^{2\lambda_0 - 1} + \lambda_0^2\, x^{\lambda_0}\, f(x)\big] \int_{1-x}^{t} (r + x - 1)\, dr \\ &= \lambda_0^2\, x^{\lambda_0 - 1}\big[x^{\lambda_0 - 1} + \lambda_0\, f(x)\big]\left\{\frac{t^2}{2} + tx - t - \frac{(1-x)^2}{2} - (1-x)x + (1-x)\right\}. \end{aligned} \tag{29}$$

Por fim (25), (29) é a solução procurada para $\beta = 1$.

ii) Caso $\beta \neq 1$: Temos que:

$$\int_1^X \lambda_0\, s^{-\beta}\, ds = \frac{1}{1-\beta}\big[X^{1-\beta} - 1\big]. \tag{30}$$

Substituindo (30) em (19) obtemos:

$$\begin{aligned} &e^{-\frac{\lambda_0}{1-\beta}[X^{1-\beta} - 1]}\, c_1(X) = c_1(1) + \\ &+ \int_1^X \left(e^{-\frac{\lambda_0}{1-\beta}[s^{1-\beta} - 1]}\right)\lambda_0\, s^{-\beta}\, c_0(s)\sigma_0(s)\, ds. \end{aligned} \tag{31}$$

Lembramos que $c_1(1) \equiv 0$. Substituindo (4b) e (5b) em (31):

$$
\begin{aligned}
c_1(X) &= \qquad (32)\\
&= e^{\frac{\lambda_0}{1-\beta}[X^{1-\beta}-1]} \int_1^X e^{-\frac{\lambda_0}{1-\beta}[s^{1-\beta}-1]} \lambda_0 s^{-\beta} \left(e^{\frac{\lambda_0}{1-\beta}[s^{1-\beta}-1]} \right) \left[\lambda_0 s^{-\beta} e^{\frac{\lambda_0}{1-\beta}[s^{1-\beta}-1]} (\xi - 1) \right] ds \\
&= e^{\frac{\lambda_0}{1-\beta}[X^{1-\beta}-1]} \lambda_0^2 (\xi - 1) \int_1^X s^{-2\beta} e^{\frac{\lambda_0}{1-\beta}[s^{1-\beta}-1]} ds.
\end{aligned}
$$

Retornando às variáveis (x, t) a equação (32) se escreve:

$$
c_1(x,t) = \lambda_0^2 \left[e^{\frac{\lambda_0}{1-\beta}[x^{1-\beta}-1]} \int_1^x s^{-2\beta} e^{\frac{\lambda_0}{1-\beta}[s^{1-\beta}-1]} ds \right] (t + x - 1). \qquad (33)
$$

Como $0 < x_0 \leq x < 1$, o integrando no termo entre colchetes está bem definido e é contínuo. A integral pode ser calculada, ao menos numericamente, e daqui em diante escreveremos:

$$
g(x) = \lambda_0^2 e^{\frac{\lambda_0}{1-\beta}[x^{1-\beta}-1]} \int_1^x s^{-2\beta} e^{\frac{\lambda_0}{1-\beta}[s^{1-\beta}-1]} ds. \qquad (34)
$$

Para o cálculo de σ_1, substituímos (4b), (5b), (33) e (34) em (28), integramos em relação a t e pelas mesmas considerações do caso $\beta = 1$ obtemos (lembre que c_0 não depende explicitamente de t):

$$
\begin{aligned}
\sigma_1(x,t) &= \lambda_0 x^{-\beta} \int_{1-x}^t [\lambda_0 c_0^2(x,t)(r + x - 1) + g(x)(r + x - 1)] dr \\
&= \lambda_0 x^{-\beta} [\lambda_0 c_0^2(x,t) + g(x)](t + x - 1)^2/2 \qquad (35)
\end{aligned}
$$

3 Solução explícita para o caso linear.

Para validar a solução perturbada calculada em 2.4 desenvolveremos uma solução exata do caso onde a geometria é linear ($\beta = 0$). Para isto, usando o Teorema 2.2 de [1] e a mudança de variáveis (16) podemos reescrever o sistema (1) como:

$$
\left\{
\begin{array}{rcll}
\dfrac{d}{dX} c(X, \xi - X) &=& \lambda_0 (1 + \varepsilon\, \sigma(X, \xi - X)) c(X, \xi - X); & \text{(a)} \\
\\
\dfrac{d}{dX} \sigma(X, \xi - X) &=& \lambda_0 (1 + \varepsilon\, \sigma(X, \xi - X)) \sigma(X, \xi - X), & \text{(b)}
\end{array}
\right. \qquad (36)
$$

3.1 Condição de contorno para σ.

O sistema (36) claramente dependerá de uma condição de contorno para σ em $x = 1$, o que motiva o subseqüênte cálculo. Considere a (1b) em $x = 1$. Ela reduz-se à EDO:

$$\frac{d}{dt}\sigma(1,t) = \lambda_0(1 + \varepsilon\sigma(1,t))c(1,t), \tag{37}$$

e usando a condição de contorno (3), $c(1,t) \equiv 1$, obtemos a solução:

$$\sigma(1,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon}\left[e^{\varepsilon\lambda_0 t} - 1\right], & \text{para} \quad \varepsilon > 0; \\ \lambda_0 t, & \text{para} \quad \varepsilon = 0. \end{cases} \tag{38}$$

3.2 Cálculo para $\varepsilon = 0$ da solução exata.

Partindo da (36b) que depende apenas de σ e usando a notação $\sigma(X, \xi - X) = \sigma(X)$ temos:

$$\frac{d}{dX}\sigma(X) - \lambda_0\sigma(X) = \varepsilon\lambda_0\sigma(X)^2$$

$$\frac{d}{dX}\left(e^{-\lambda_0 X}\sigma(X)\right) = \varepsilon\lambda_0 e^{-\lambda_0 X}\sigma(X)^2. \tag{39}$$

Escrevendo $p(X) = e^{-\lambda_0 X}\sigma(X)$, obtemos por separação de variáveis:

$$\frac{dp(X)}{p^2(X)} = \varepsilon\lambda_0 e^{\lambda_0 X} dX. \tag{40}$$

Integrando (40) de 1 até x e retornando para $\sigma(X, \xi - X)$ chegamos a:

$$\sigma(X, \xi - X) = \frac{e^{\lambda_0(X-1)}\sigma(1, \xi - 1)}{1 + \varepsilon\sigma(1, \xi - 1)\left[e^{\lambda_0(X-1)} - 1\right]}. \tag{41}$$

Substituindo (41) em (36a) obtemos diretamente a fórmula para $c(X, \xi - X)$:

$$c(X, \xi - X) = e^{\lambda_0(X-1)} \exp \int_1^X \varepsilon\lambda_0\sigma(s, \xi - s)ds. \tag{42}$$

Usando (38) retornamos para as variáveis (x,t), lembrando que $\xi = t + x$:

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \sigma(x,t) & = & \dfrac{e^{\lambda_0(x-1)}\sigma(1,t+x-1)}{1+\varepsilon\sigma(1,t+x-1)\left[e^{\lambda_0(x-1)}-1\right]} & \text{(a);} \\ \\ c(x,t) & = & e^{\lambda_0(x-1)} \exp \displaystyle\int_1^x \varepsilon\lambda_0\sigma(s,t+x-s)ds & \text{(b).} \end{array} \right. \tag{43}$$

4 Comparação das soluções.

Comparamos nesta seção a solução obtida para o modelo perturbado no caso de geometria linear com a exata, calculada na seção anterior, obtendo uma expressão para o erro da solução perturbada no caso $\varepsilon = 0$. Para tanto, a expressão da solução perturbada escreve-se:

$$\left\{ \begin{array}{lcll} c(x,t)_p & = & e^{\lambda_0(x-1)} + \varepsilon e^{\lambda_0(x-1)}[e^{\lambda_0(x-1)} - 1]\lambda_0(t+x-1); & \text{(a)} \\ \\ \sigma(x,t)_p & = & \lambda_0 e^{\lambda_0(x-1)}(t+x-1) + \varepsilon[e^{2\lambda_0(x-1)} - e^{\lambda_0(x-1)}/2]\lambda_0^2(t+x-1)^2 & \text{(b)} \end{array} \right. \tag{44}$$

Consideramos inicialmente que $\|\varepsilon\sigma(1,t+x-1)\|_{L^\infty} < 1$, onde podemos expandir (43a) em série de potências:

$$\begin{aligned} \sigma(x,t)_e = e^{\lambda_0(x-1)} & \left[\lambda_0(t+x-1) + \varepsilon\left(\lambda_0^2(t+x-1)^2/2 - e^{\lambda_0(x-1)}\lambda_0^2(t+x-1)^2\right)\right] \\ & + \varepsilon^2 e^{\lambda_0(x-1)}\lambda_0^3(t+x-1)^3\left[1/6 - (e^{\lambda_0(x-1)}-1) - (e^{\lambda_0(x-1)}-1)^2\right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \end{aligned} \tag{45}$$

Temos que

$$\sigma(x,t)_e - \sigma(x,t)_p = \varepsilon^2 e^{\lambda_0(x-1)}\lambda_0^3(t+x-1)^3\left[1/6 - (e^{\lambda_0(x-1)}-1) - (e^{\lambda_0(x-1)}-1)^2\right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \tag{46}$$

o melhor resultado possível na vizinhança da aproximação.

Usamos (45) em (43b) para calcular:

$$\begin{aligned} c(x,t)_e = {} & e^{\lambda_0(x-1)} + \varepsilon\lambda_0 e^{\lambda_0(x-1)}\left[e^{\lambda_0(x-1)} - 1\right](t+x-1) \\ & + \varepsilon^2\lambda_0^2 e^{2\lambda_0(x-1)}\left[e^{\lambda_0(x-1)} - 1\right](t+x-1)^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \end{aligned} \tag{47}$$

e da mesma forma:

$$c(x,t)_e - c(x,t)_p = \varepsilon^2 \lambda_0^2 e^{2\lambda_0(x-1)} \left[e^{\lambda_0(x-1)} - 1\right](t+x-1)^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \tag{48}$$

Das equações (46) e (48) vemos que o erro no pior caso é da ordem $\varepsilon^{2/3}t$.

5 Modelo de Herzig.

Um modelo bastante usado para a descrição do problema de filtração é devido a Herzig [2]. Observando que na equação (1a) o termo de acumulação para as partículas suspensas ($\partial_t c$) é bem menor que aquele das partículas depositadas ($\partial_t \sigma$), a excessão dos instantes iniciais, Herzig propõe que depreze-se a acumulação das partículas suspensas, simplificando o sistema e fornecendo ótimas propriedades numéricas [3]. Fazemos uma sucinta comparação entre a solução explícita obtida em 3, com a calculada para o modelo de Herzig para geometria linear:

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \dfrac{\partial}{\partial x} c & = & \dfrac{\partial}{\partial t} \sigma, & \text{(a)} \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial t} \sigma & = & \lambda_0 (1 + \varepsilon\, \sigma) c, & \text{(b)} \end{array} \right. \tag{49}$$

onde deve-se notar que fornecer uma condição inicial para as partículas suspensas não faz mais sentido.

Aplicando o Teorema 2 de [1], podemos escrever a solução explícita:

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \sigma_h(x,t) & = & \dfrac{e^{\lambda_0(x-1)}\sigma(1,t)}{1+\varepsilon\sigma(1,t)\left[e^{\lambda_0(x-1)}-1\right]} & \text{(a);} \\ \\ c_h(x,t) & = & e^{\lambda_0(x-1)} \exp \displaystyle\int_1^x \varepsilon\lambda_0\sigma(s,t)ds & \text{(b),} \end{array} \right. \tag{50}$$

e $\sigma(1,t)$ ainda é dada pela equação (38). O subscrito h indica que a solução provém do modelo de Herzig. Subtraindo (50a) de (43a) e tomando o limite $\varepsilon \to 0$ (o que significa que estamos avaliando o erro para o problema não perturbado, em ambos os modelos) obtemos:

$$\sigma - \sigma_h = \lambda_0 e^{\lambda_0(x-1)}(x-1). \tag{51}$$

Para o caso não perturbado em geometria linear temos portanto que o erro de aproximação para a deposição de partículas é constante. Fazendo o mesmo para a concentração de partículas suspensas vemos que o erro é zero. O caso perturbado fornece, com mais trabalho, resultado semelhante.

Referências.

[1] Alvarez, A. C., Marchesin, D., *A simple inverse solver for the filtration in flow of water with particles in porous media*, Pre-print IMPA www.impa.br

[2] Herzig, J. P. and Leclerc, D. M. and Goff, P. Le., *Flow of suspensions through porous media-application to deep filtration*, Industrial and Engineering Chemistry volume 65, #5 - 1970, p. 8-35.

[3] Silva, J. M, Marchesin, D., *Esquemas numéricos para filtração em meios porosos.*, IMPA 2007.

[4] de Zwart, A. H., Marchesin, D., Schotting, R. J., *Modelling clogging processes in different flow geometries.*

A Retorno às variáveis dimensionais.

O problema abstrato proposto em (1) provém de um modelo para a deposição profunda aplicável às geometrias lineares, radiais e cilíndricas de fluxo onde a função de filtração prevê uma possível retenção acentuada de partículas com o aumento da velocidade do fluxo.

Em termos das variáveis físicas temos:

$$\begin{cases} x = \dfrac{r^m}{r_1^m}\,, \quad r_0 \leq r \leq r_1\,; \quad t = \dfrac{|q|}{\phi V_m}\, t^*; \\ c = \dfrac{c^*}{c_{in}}\,; \quad \sigma = \dfrac{\sigma^*}{\phi c_{in}}\,; \\ \lambda_0 = r_1 \left(\dfrac{u^*_{ref}}{u^*(r_1)} \right)^{\delta} \dfrac{\lambda_0^*}{m}\,, \quad u^*(r_1) = \dfrac{q}{A_m(r_1)}\,, \end{cases}$$

onde:

- r é a distância percorrida na amostra de rocha em relação ao centro de simetria, variando entre r_0 e r_1;
- t^* é o tempo na escala adequada;
- q é o fluxo da suspensão;
- ϕ é a porosidade da rocha;
- V_m é o volume total da amostra da rocha;
- c^* é a concentração volumétrica de partículas suspensas (com respeito ao volume poroso);
- c_{in} é a concentração volumétrica de partículas injetadas;
- σ^* é a concentração volumétrica de partículas depositadas com respeito ao volume total;
- u^*_{ref} é a velocidade de referência do fluxo;
- $u^*(r_1)$ é a velocidade de Darcy em r_1;
- λ^*_0 é o coeficiente da função de filtração, cuja unidade é o recíproco da distância;
- $A_m(r_1)$ é a área da superfície de rocha em r_1;
- m é a dimensão.

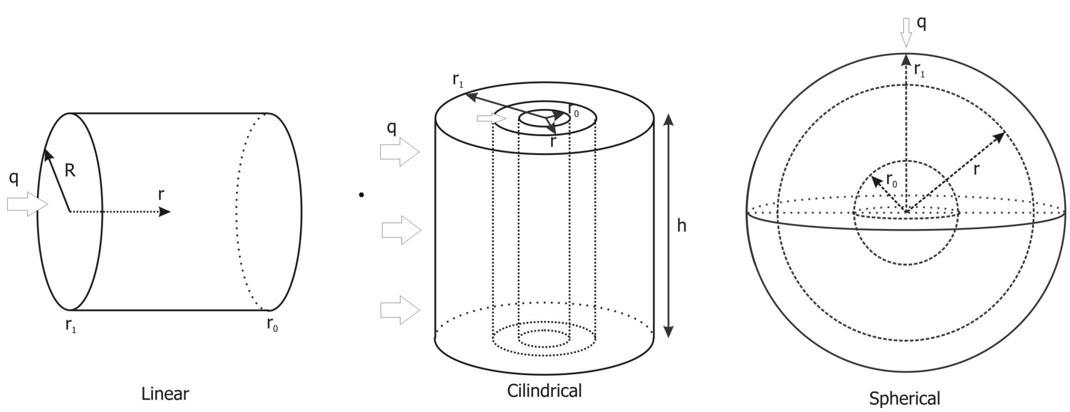

Figura 2: Ilustração das geometrias utilizadas, cedida por A. H. de Zwart.

Temos a tabela:

Geometria do fluxo	Área da seção (A_m)	Volume total (V_m)	Dimensão
Linear[1]	πR^2	$\pi R^2(r_1 - r_0)$	1
Cilíndrica[2]	$2\pi r h$	$\pi r_1^2 h$	2
Esférica	$4\pi r^2$	$4/3\,\pi r_1^3$	3

1. consideramos no fluxo linear uma rocha de seção fixa com raio R.
2. consideramos no fluxo cilíndrico uma rocha de altura fixa h.

O expoente δ é real e controla a relação entre a velocidade do fluxo e a taxa da deposição de partículas. Em função dele também escrevemos:

$$\beta = (\delta + 1)\left(\frac{m-1}{m}\right).$$