

# Histerese na Permeabilidade Relativa para o Armazenamento de Gás em Aquífero

Daniel Magalhães Moura Neto

Trabalho de Iniciação Científica.

**Orientador** : Christian E. Schaerer

Laboratório de Dinâmica dos Fluidos

IMPA — Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada.

Estrada Dona Castorina 110, 22460-320

Rio de Janeiro — Brasil

Julho 2007

# Sumário

<b>Sumário</b>	<b>i</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Modelo Matemático do Armazenamento de Gás em Aquífero</b>	<b>3</b>
2.1 Balanço de Massa e Momento . . . . .	3
2.2 Histerese na Permeabilidade Relativa . . . . .	5
<b>3 Algoritmo Numérico</b>	<b>8</b>
3.1 Método de Godunov Corrigido . . . . .	8
3.2 Problema de Riemann . . . . .	9
<b>4 Resultados Obtidos</b>	<b>21</b>
<b>5 Conclusão</b>	<b>23</b>

# 1 Introdução

O gás natural (GN) é um combustível de origem fóssil, com elevado rendimento energético, resultante da decomposição da matéria orgânica fóssil encontrada no interior da Terra, acumulada em rochas porosas, freqüentemente acompanhado por petróleo [5, 11].

O GN apresenta várias vantagens [12, 13] quando comparado com as fontes de energia tradicionais, tais como facilidade de transporte, segurança, menor corrosão de equipamentos e manutenção mais barata. Além disso, o GN apresenta muitas vantagens nas questões ambientais pois, é um combustível menos poluente que o óleo, possuindo uma combustão mais limpa, não exigindo tratamento dos gases de combustão.

A tendência de consolidar o GN, no Brasil, como fonte de energia é um fato. Ainda que, atualmente, a participação do gás natural seja de 7,5% da matriz energética brasileira, a Petrobrás está tentando firmar um crescimento progressivo, que possibilite chegar a 15% da matriz até 2015 [13], aumentando a sua diversificação.

Para viabilizar tal crescimento, a Petrobrás (GASPETRO) lançou mão de dois grandes projetos. O gasoduto Bolívia-Brasil que é o maior e mais complexo projeto da GASPETRO, tem uma estrutura que exigiu até hoje o maior volume de recursos, com 3.150 km de extensão e custo total em torno de US\$ 2 bilhões, e o gasoduto Uruguaiana-Porto Alegre que faz parte do projeto de importação de GN da Argentina com o objetivo de atender parte da demanda de combustíveis e energia elétrica no Rio Grande do Sul [12].

Um dos problemas existentes na tecnologia do GN consiste na necessidade de armazená-lo próximo dos locais de consumo, de forma a balancear o consumo com a produção, especialmente em regiões sensíveis a câmbios de consumo. O armazenamento, normalmente, é feito em tanques ou no subsolo.

O armazenamento no subsolo é considerado como o mais eficiente, devido à alta capacidade de estocagem [14]. Por exemplo, em 1996 / 1997, existiam 580 reservatórios subterrâneos de gás

no mundo, com uma capacidade de  $262 \times 10^9 m^3$ . Outras formas de armazenamento apresentam capacidade limitada, por exemplo, mecanismos baseados em LNG (*Liquefied Natural Gas*) tem apenas uma capacidade de armazenamento de  $7,6 \times 10^9 m^3$ .

O armazenamento no subsolo se classifica em três tipos: cavernas de sal (que apresentam uma alta dependência geográfica), antigos reservatórios e aquíferos. Neste último, o princípio de armazenamento consiste em criar um campo artificial, injetando gás no seu interior.

Hoje em dia, o armazenamento subterrâneo responde por 98% da capacidade de armazenamento mundial [14]. Conseqüentemente, é de suma importância desenvolver técnicas que permitam entender o comportamento do reservatório, o que envolve conhecimentos geológicos e monitoramento sísmico, descrição do fluxo no interior do reservatório (através de simulações numéricas utilizando computação de alto desempenho), topologia de poços, entre outros. Com base neste conhecimento e metodologias, é possível otimizar e aprimorar as técnicas de armazenamento.

Este trabalho tem o propósito de desenvolver um *software* que permita capturar a histerese presente na permeabilidade relativa, permitindo saber o fluxo no interior do reservatório. O fenômeno da histerese é particularmente importante em processos cíclicos, como por exemplo em WAG [2], bem como em processos térmicos de recuperação de óleo viscoso [2, 5, 8] e em processos de armazenamento de gás em aquíferos [9].

O entendimento deste fenômeno acarreta diretamente no aumento do desempenho do reservatório e na redução dos custos operacionais. De fato, a histerese altera o comportamento do fluxo de gás quando armazenado em aquífero. Assim, simuladores convencionais não conseguem prever adequadamente a distribuição do gás no aquífero. Por outro lado, os simuladores baseados nas técnicas desenvolvidas com captura de histerese (em desenvolvimento), além de fornecer um panorama claro de como o gás se encontra distribuído no interior do reservatório, permitirá determinar o volume de trabalho e otimizar os poços.

Em particular, analisamos aqui a histerese quando se considera os termos da velocidade e a ação da gravidade simultaneamente. Modelos de histerese foram apresentados em [3, 6, 8] e

a importância da histerese na permeabilidade relativa na simulação da segregação em aquíferos foi apresentada em [9], onde foi desenvolvido uma discretização de forma a incluir a histerese no processo de segregação gravitacional de dois fluidos imiscíveis. Na seção 2, realizamos uma extensão da formulação apresentada em [9] para incluir a histerese nos termos associados à velocidade.

Na seção 3, o algoritmo necessário para o desenvolvimento do simulador é apresentado. Na seção 4, o *software* é descrito e resultados são apresentados. A parte numérica foi desenvolvida em linguagem C++ de forma a torná-lo compatível com *softwares* de visualização, como o Matlab, e pensando em futuras implementações bidimensionais. Os resultados obtidos através da simulação mostram a eficiência do *software* em capturar a histerese na solução teórica (problema de Riemann) apresentada na seção 3. As conclusões e perspectivas de trabalhos futuros são apresentadas na seção 5, onde ressaltamos as vantagens da técnica discutida neste trabalho.

## 2 Modelo Matemático do Armazenamento de Gás em Aquífero

Nesta seção, inicialmente, introduzimos as leis básicas de balanço de massa e momento. Em seguida, descrevemos um modelo da permeabilidade relativa que incorpora os efeitos de histerese.

### 2.1 Balanço de Massa e Momento

Para modelar o aquífero consideramos dois fluidos imiscíveis e incompressíveis, um dos quais chamamos de fase molhante (água) e o outro de fase não-molhante (gás), se deslocando em um meio poroso. Para representar a primeira fase utilizamos o índice  $w$  e para a outra o índice  $g$ . Um meio poroso é formado por um meio sólido perfurado por poros interconectados onde os fluidos ficam alojados. A porosidade é dada pela variável  $\phi$  que representa a porcentagem do espaço que é ocupada pelos fluidos. A porcentagem do poro que cada fluido ocupa é chamada de saturação

e é representada por  $s$ . Assumimos que o poro é completamente ocupado por ambos os fluidos, assim  $s_w + s_g = 1$ .

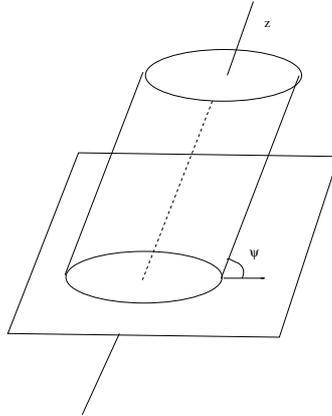


Figura 1: Cilindro

Os fluidos se movimentam devido à ação de forças de pressão e gravitacionais. Para simular o aquífero consideramos um cilindro inclinado com ângulo  $\psi$  em relação a horizontal com o eixo  $z$  passando pelo eixo do tubo, conforme ilustrado na figura 1. Queremos saber a saturação da fase molhante ao longo do eixo  $z$ .

O deslocamento dos fluidos no aquífero pode ser descrito usando a lei de conservação de massa para as fases e a lei de D'Arcy. A conservação de massa para cada uma das fases é:

$$\partial_t(\rho_w \phi s_w) + \nabla \cdot (\rho_w u_w) = 0 \quad \text{e} \quad \partial_t(\rho_g \phi s_g) + \nabla \cdot (\rho_g u_g) = 0, \quad (1)$$

onde o primeiro termo representa o acúmulo e o segundo o transporte de massa de cada uma das fases. Aqui,  $\rho$  e  $u$  representam, respectivamente, a densidade e a velocidade dos fluidos. A lei de D'Arcy, de natureza empírica, determina a velocidade de cada uma das fases em função do gradiente de pressão e da gravidade e é dada por:

$$u_w = -\frac{k_w}{\mu_w}(\nabla p_w - \rho_w g \nabla Z) \quad (2)$$

e

$$u_g = -\frac{k_g}{\mu_g}(\nabla p_g - \rho_g g \nabla Z), \quad (3)$$

onde  $p$ ,  $k$  e  $\mu$  são a pressão, a permeabilidade e a viscosidade dos fluidos, respectivamente, e  $g$  é o módulo da aceleração da gravidade e  $Z$  é a profundidade com o sentido da gravidade [1].

Definimos as permeabilidades efetivas como  $k_w := k k_{rw}$  e  $k_g := k k_{rg}$ , onde  $k$  é a permeabilidade do meio poroso e  $k_{rw}$  e  $k_{rg}$  são chamadas de permeabilidade relativa da fase molhante e da não-molhante. Definimos ainda as funções de fluxo fracional para ambas as fases  $\lambda_w := \frac{k_{rw}}{\mu_w \lambda}$  e  $\lambda_g := \frac{k_{rg}}{\mu_g \lambda}$ , onde  $\lambda := \frac{k_{rw}}{\mu_w} + \frac{k_{rg}}{\mu_g}$ ; e  $v$ , a velocidade total como a soma da velocidade das duas fases,  $v := u_w + u_g$ . Com as definições acima e as equações (1), (2) e (3) obtemos:

$$\phi \partial_t s_w - \nabla \cdot (k \lambda \lambda_w \lambda_g \nabla p_c) + \nabla \cdot (\lambda_w v) + \nabla \cdot (k \lambda \lambda_w \lambda_g g \nabla Z (\rho_w - \rho_g)) = 0. \quad (4)$$

Com base em [9] consideramos, neste trabalho, que os efeitos da pressão capilar são modelados principalmente pelos termos da permeabilidade relativa. Desta forma, os termos difusivos associados à pressão capilar serão desconsiderados. Considerando o fluxo unidimensional então  $\nabla Z = g \sin \psi$ , a equação (4) se reduz a

$$\partial_t s_w + \partial_z F = 0, \quad (5)$$

onde

$$F := \frac{\lambda_w v + k \lambda \lambda_w \lambda_g g \sin \psi (\rho_w - \rho_g)}{\phi} \quad (6)$$

é chamada de função fluxo.

## 2.2 Histerese na Permeabilidade Relativa

Usamos o *Scanning Hysteresis Model* (SHM), [6, 8, 9], para modelar o fenômeno da histerese observada experimentalmente [3, 4]. Consideramos, unicamente a histerese na permeabilidade relativa da fase não molhante. Esta permeabilidade relativa depende de um parâmetro que foi introduzido por Plorh *et al* [8] e também pela tendência da saturação da água, se está aumentando (imbibição) ou diminuindo (drenagem). Esse parâmetro é chamado de parâmetro de histerese e é representado por  $\pi$ .

Baseado em [8, 9], temos as seguintes funções de permeabilidade, para a fase molhante

$$k_{rw}(s_w) := \gamma s_w^\beta, \quad (7)$$

onde  $\beta > 1$  e  $\gamma$  é um parâmetro a ser ajustado; para a drenagem e imbibição da fase não-molhante

$$k_{rg}^d(s_w) := (1 - s_w)^\eta \text{ quando } \partial_t s_w < 0 \text{ e } k_{rg}^i(s_w) := (1 - s_w)^\theta \text{ quando } \partial_t s_w > 0, \quad (8)$$

onde  $1 < \theta < \eta$ ; e para a região de *scanning* entre a drenagem e a imbibição da fase não-molhante

$$k_{rg}(s_w, \pi) := \frac{(1 - \pi)^\xi}{(1 - \alpha\pi)^\zeta} (1 - \alpha s_w)^\zeta, \quad (9)$$

e cada valor de  $\pi$  ( $0 \leq \pi \leq 1$ ) determina uma curva de *scanning*. Neste trabalho, vamos usar os valores  $\gamma = 1$ ,  $\beta = 2$ ,  $\eta = 3$ ,  $\theta = 2$ ,  $\xi = 2$ ,  $\zeta = 1$  e  $\alpha = 0.5$ , sugeridos em [9]. Definimos as funções  $s_w^i(\pi)$  e  $s_w^d(\pi)$  implicitamente por:

$$k_{rg}^i(s_w^i(\pi)) = k_{rg}(s_w^i(\pi), \pi) \text{ e} \quad (10)$$

$$k_{rg}^d(s_w^d(\pi)) = k_{rg}(s_w^d(\pi), \pi). \quad (11)$$

No modelo SHM, a curva de *scanning* associada ao parâmetro  $\pi$  é definida no intervalo de saturação  $s_w^i(\pi) < s_w < s_w^d(\pi)$ . As funções  $\pi^i(s_w)$  e  $\pi^d(s_w)$  são definidas como a inversa das funções  $s_w^i(\pi)$  e  $s_w^d(\pi)$ , definidas nas equações (10) e (11). Usando as permeabilidades relativas definidas nas equações (7), (8) e (9) observamos que a função de fluxo é função da saturação  $s_w$  e de  $\pi$ , da seguinte forma:

$$F(s_w, \pi) \text{ para } \partial_t \pi = 0, \text{ (região de } \textit{scanning}) \quad (12)$$

$$F^d(s_w) := F(s_w, \pi^d(s_w)) \text{ para } \partial_t s < 0, \text{ (drenagem)} \quad (13)$$

$$F^i(s_w) := F(s_w, \pi^i(s_w)) \text{ para } \partial_t s > 0 \text{ (imbibição)}. \quad (14)$$

Definimos as curvas de drenagem e imbibição, respectivamente, por:

$$dr := \{(s_w, F) \in \mathbb{R}^2 \mid F = F^d(s_w)\} \text{ e } im := \{(s_w, F) \in \mathbb{R}^2 \mid F = F^i(s_w)\}. \quad (15)$$

Definimos, também, a região de *scanning*  $\Omega$  por  $\Omega := \Omega_v \cup \Omega_g$ , onde:

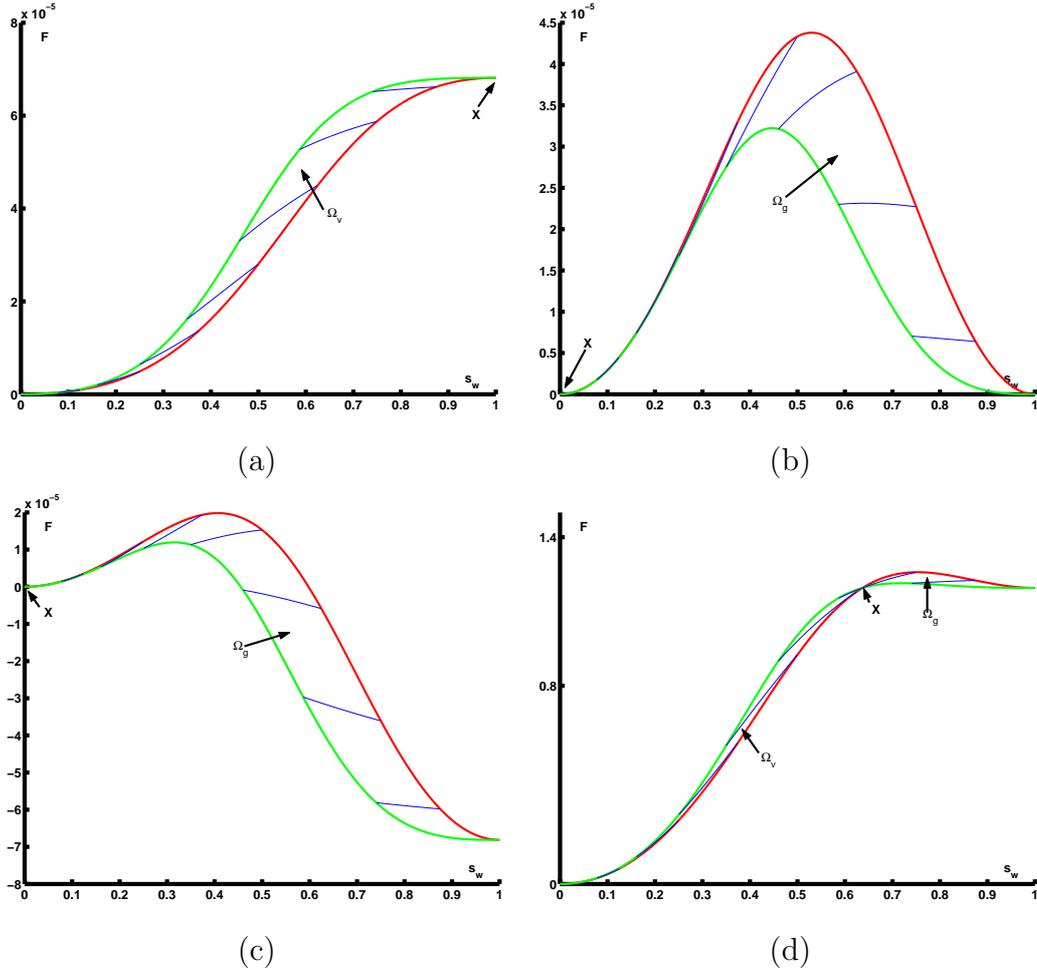


Figura 2: Funções de fluxo  $F$  quando: (a)  $g = 0$ , (b)  $v = 0$ , (c)  $v < 0$  e (d)  $v > 0$

$$\Omega_v := \{(s_w, F) \in \mathbb{R}^2 \mid F^i(s_w) \leq F \leq F^d(s_w)\} \text{ e} \quad (16)$$

$$\Omega_g := \{(s_w, F) \in \mathbb{R}^2 \mid F^d(s_w) \leq F \leq F^i(s_w)\}. \quad (17)$$

A região de *scanning*  $\Omega$  tem como fronteira as curvas de drenagem e imbibição (veja figura 2). O ponto  $X = (s_X, F_X)$  é a interseção das curvas de drenagem e imbibição; ele separa as duas regiões de *scanning* ( $\Omega_v$  e  $\Omega_g$ ). A saturação  $s_X$  é dada pela solução da equação

$$F^d(s_X) - F^i(s_X) = 0 \text{ no intervalo } 0 < s_X < 1, \quad (18)$$

e se a equação (18) não tiver solução, então:

$$\begin{aligned} s_X &= 0 \text{ se } F^d(s_w) < F^i(s_w) \text{ para } 0 < s_w < 1 \text{ e} \\ s_X &= 1 \text{ se } F^d(s_w) > F^i(s_w) \text{ para } 0 < s_w < 1. \end{aligned} \quad (19)$$

Finalmente,  $F_X$  é dado por  $F_X = F^d(s_X)$ . As duas outras interseções da curva de imbibição com a de drenagem são dadas por  $X_O$  para  $s_w = 0$  e  $X_F$  para  $s_w = 1$ .

**Observação.** Na figura 2 estão representadas as funções de fluxo, em verde a curva de dreno, em vermelho a de imbibição e em azul as curvas de *scanning*.

### 3 Algoritmo Numérico

Para cada uma das funções de fluxo (12), (13) e (14) a equação (5) estabelece diferentes tipos de fluxo descritos pelas seguintes leis de conservação:

1. drenagem e imbibição,

$$\partial_t s_w + \partial_z F^d(s_w) = 0, \quad (20)$$

$$\partial_t s_w + \partial_z F^i(s_w) = 0, \quad (21)$$

2. *scanning*,

$$\partial_t s_w + \partial_z F(s_w, \pi) = 0, \quad (22)$$

$$\partial_t \pi = 0, \quad (23)$$

onde  $\partial_t \pi = 0$  representa a conservação da variável  $\pi$  na região de *scanning*.

Nesta seção discutimos um algoritmo numérico para a resolução deste problema.

#### 3.1 Método de Godunov Corrigido

Na simulação das equações (20)-(23) utilizamos o método de Godunov Corrigido, apresentado em [9], que é uma extensão do método de Godunov, apresentado em [7], para incluir o parâmetro de histerese  $\pi$ . Para isso, primeiro discretizamos o plano  $z-t$ , onde  $z$  é o eixo do tubo que vamos

simular. Se  $L$  é o comprimento do tubo temos  $h_z := L/N_z$ , onde  $N_z$  é o número de pontos da malha espacial. Cada intervalo de tempo é dado por  $h_t$ . Dessa forma obtemos a malha formada pelos pontos  $(z_j, t_n)$ , onde:

$$z_j = jh_z + h_z/2, z_{j\pm 1/2} = z_j \pm h_z/2, j = 0, 1, 2, \dots, N_z - 1 \quad (24)$$

$$t_n = nh_t, n = 0, 1, 2, \dots \quad (25)$$

O método consiste de duas etapas em cada intervalo de tempo. Na primeira etapa (preditor), são resolvidas numericamente, utilizando o método Godunov, as equações (20)-(22). A segunda etapa (corretor) corrige o parâmetro  $\pi$  no caso em que o estado previsto cai fora da região admissível (*scanning* ou sob as curvas de drenagem ou imbibição).

O estado associado a uma célula  $(z_j, t_n)$  é representado como  $(s_j^n, \pi_j^n)$  ou equivalentemente por  $(s_j^n, F(s_j^n, \pi_j^n))$ . Então, o método de Godunov na célula  $[z_{j-1/2}, z_{j+1/2}] \times [t_n, t_{n+1}]$  para a saturação é:

$$s_j^{n+1} = s_j^n - \frac{h_t}{h_z} [F^\#((s_j^n, \pi_j^n), (s_{j+1}^n, \pi_{j+1}^n)) - F^\#((s_{j-1}^n, \pi_{j-1}^n), (s_j^n, \pi_j^n))] \quad (26)$$

onde,  $F^\#((s_j^n, \pi_j^n), (s_{j+1}^n, \pi_{j+1}^n))$  e  $F^\#((s_{j-1}^n, \pi_{j-1}^n), (s_j^n, \pi_j^n))$  são os fluxos numéricos nas fronteiras esquerda e direita da célula. Detalhes do esquema numérico encontram-se em [9].

**Observação.** Para cada par de estados  $(s_w, \pi)$  os fluxos numéricos podem ser determinados diretamente da solução do problema de Riemann que será apresentado a seguir.

## 3.2 Problema de Riemann

O problema de Riemann é um problema de valor inicial, onde temos os estados  $L = (s_L, F_L)$  e  $R = (s_R, F_R)$  como valores iniciais. Antes de apresentar a solução do problema de Riemann associado às equações (20)-(23), definimos alguns pontos e curvas importantes que estão ilustrados na figura 3(a). A curva  $Q_d Q_i$  é dada por:

$$Q_d Q_i := \{Q = (s, F(s, \pi)) \in \Omega_g \mid \partial_s F(s, \pi) = 0, \forall \pi\}. \quad (27)$$

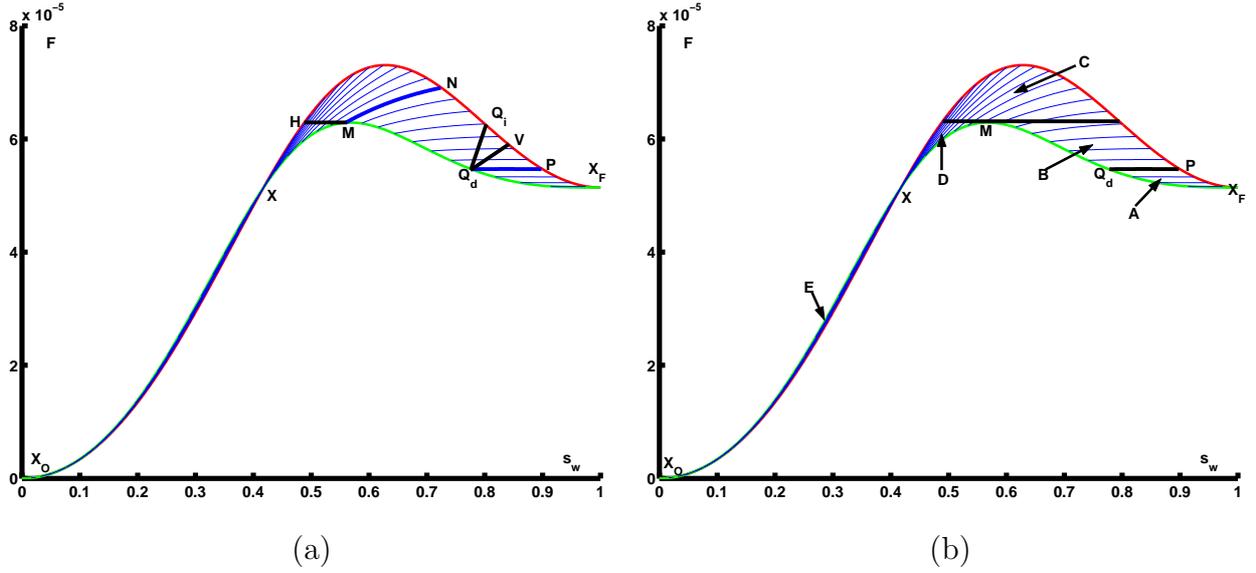


Figura 3: (a) Pontos e curvas importantes (b)  $\Omega$  sub-regiões de L

Essa curva representa a reta que passa pelos pontos de máximo das curvas de *scanning*. Traçando a curva de *scanning* que passa pelo ponto  $Q_i$  achamos na drenagem o ponto  $J = (s_J, F^d(s_J))$  associado à saturação  $s_J := s^d(\pi(s_{Q_i}))$ . O ponto  $P = (s_P, F_P)$  é o ponto na curva de imbibição que tem o mesmo valor de  $\pi$  que o ponto  $Q_d$ . A curva  $Q_dV$  é definida por:  $\{Q_dV := \{W \in \Omega_g \mid W = (s_I + 2(s_Q - s_I), F_I) \mid Q \in Q_dQ_i \text{ e } F(s_Q) = F(s_I), \forall I \in dr\}$ . O ponto  $M = (s_M, F_M)$  é dado pelo ponto onde a curva de dreno é máxima, ou seja:  $\partial_{s_w} F^d(s_M) = 0$ ,  $0 < s_M < 1$  e  $F_M = F^d(s_M)$ . Já o ponto  $N = (s_N, F_N)$  é dado pela interseção da curva de *scanning* que passa pelo ponto  $M$  com a curva de imbibição. O ponto  $H = (s_H, F_H)$  é formado pela interseção de uma horizontal que passa pelo ponto  $M$  com a curva de imbibição quando  $s_H < s_M$ , ou seja, em  $H$  têm se  $F_H = F^i(s_H) = F^d(s_M)$ . O valor de  $\pi$  do ponto  $Y = (s_Y, F^d(s_Y))$  é o mesmo que a saturação do ponto  $X$ ,  $s_Y := s^d(\pi(s_X))$ . A curva de *scanning*  $U_dU_i$  tem o ponto  $U_i = (s_{U_i}, F^i(s_{U_i}))$  determinada pela solução de

$$\partial_{s_w s_w} F^i(s_{U_i}) = 0, \text{ onde } s_{U_i} < s_X. \quad (28)$$

Definimos alguns pontos relativos ao ponto  $L = (s_L, F_L)$ . Os pontos  $E = (s_E, F_E)$  e  $K = (s_K, F_K)$  têm o mesmo valor de fluxo do ponto  $L$  ( $F_E := F_K := F_L$ ) e estão ou na curva de imbibição ou na de drenagem, quando necessário as figuras de cada caso ilustram a posição

de cada um desses pontos ( $E_i$ ,  $E_d$ ,  $K_i$  e  $K_d$ ). Os pontos  $C$  e  $S$  estão na drenagem e na mesma curva de *scanning* de  $E_i$  e  $K_i$ , ou seja,  $\pi_C := \pi_{E_i}$  e  $\pi_S := \pi_{K_i}$ . Já o ponto  $D$  está na imbibição e na curva de *scanning* do ponto  $K_d$  ( $\pi_D := \pi_{K_d}$ ).

Para representar o segmento de reta e as curvas de *scanning*, drenagem e imbibição que passam por dois pontos, p.ex.  $A$  e  $B$ , utilizamos a notação  $\overline{AB}$ ,  $(AB)^{sc}$ ,  $(AB)^{dr}$  e  $(AB)^{im}$ , respectivamente.

A solução do problema de Riemann para o caso em que a gravidade é desprezada (figura 2(a)) já foi apresentado por [8] e o caso em que a velocidade é desprezada (figura 2(b)) foi apresentado por [9]. A solução para o caso que considera a velocidade e gravidade (figuras 2(c) e (d)) é abordada neste trabalho.

Para isso, dividimos a região  $\Omega$  em cinco sub-regiões de  $L$  (figura 3(b)) definidas como:

$$A := \{(s_w, F) \in \Omega_g \mid s_{Qd} \leq s \leq 1 \text{ e } F \leq F(s, \pi_{Qd})\}$$

$$B := \{(s_w, F) \in \Omega_g \mid s_M \leq s \leq s_P \text{ e } F(s, \pi_{Qd}) \leq F \leq F^d(s_M)\}$$

$$C := \{(s_w, F) \in \Omega_g \mid 0 \leq s \leq 1 \text{ e } F^d(s_M) \leq F\}$$

$$D := \{(s_w, F) \in \Omega_g \mid s_X \leq s \leq s_M \text{ e } F^d(s_X) \leq F \leq F^d(s_M)\}$$

$$E := \Omega_v$$

A solução para o problema de Riemann consiste em uma seqüência de ondas de choque, rarefação e descontinuidade (choque com velocidade nula), como já foi apresentado em [9]. Neste trabalho, usamos  $sh$ ,  $ra$  e  $st$ , para representar, respectivamente, essas ondas; ainda, acompanhando  $sh$  e  $ra$  tem um sinal (+) ou (-) indicando se é um choque, ou rarefação, positivo(a) ou negativo(a). Nos gráficos  $F \times s_w$ , as ondas de choque são representadas por linhas tracejadas e as de rarefação por linhas sólidas.

Apresentamos em detalhe as soluções para todos os casos, A, B, C, D e E.

Tabela 1: Solução de Riemann para  $L \in A$

	$R$	solução	fluxo
1.	$R_1 \in R_A^I$	$L \xrightarrow{sh(-)} I_1 \xrightarrow{st} R_1$	$F(s_R, \pi_R)$
2.	$R_2 \in R_A^{II}$	$L \xrightarrow{sh(-)} I_2 \xrightarrow{sh(+)} R_2$	$F^d(s^d(\pi_R))$
3.	$R_3 \in R_A^{III}$	$L \xrightarrow{sh(-)} B \xrightarrow{ra(-)} I_3 \xrightarrow{sh(+)} R_3$	$F^d(s^d(\pi_R))$
4.	$R_4 \in R_A^{IV}$	$L \xrightarrow{sh(-)} B \xrightarrow{ra(-)} M \xrightarrow{st} I_4 \xrightarrow{sh(+)} R_4$	$F(s_M, \pi_M)$
5.	$R_5 \in R_A^V$	$L \xrightarrow{sh(-)} B \xrightarrow{ra(-)} M \xrightarrow{st} I_5 \xrightarrow{ra(+)} R_5$	$F(s_M, \pi_M)$
6.	$R_6 \in R_A^{VI}$	$L \xrightarrow{sh(-)} B \xrightarrow{ra(-)} M \xrightarrow{st} H \xrightarrow{ra(+)} I_6 \xrightarrow{ra(+)} R_6$	$F(s_M, \pi_M)$
7.	$R_7 \in R_A^{VII}$	$L \xrightarrow{sh(-)} B \xrightarrow{ra(-)} M \xrightarrow{st} H \xrightarrow{ra(+)} I_7 \xrightarrow{sh(+)} I_{7_2} \xrightarrow{ra(+)} R_7$	$F(s_M, \pi_M)$

**Caso A:** Dividimos  $\Omega$  em 7 sub-regiões de  $R$  para  $L = (s_L, F(s_L, \pi_L)) \in A$ :

$$R_A^I := \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (X_F Q_d)^{dr}, \overline{Q_d V}, (V X_F)^{im}\}$$

$$R_A^{II} := \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (Q_d B)^{dr}, (BG)^{sc}, (GV)^{im}, \overline{V Q_d}\}$$

$$R_A^{III} := \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (BM)^{dr}, (MN)^{sc}, (NG)^{im}, (GB)^{sc}\}$$

$$R_A^{IV} := \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } \overline{MH}, (HN)^{im}, (NM)^{sc}\}$$

$$R_A^V := \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (XH)^{im}, \overline{HM}, (MX)^{dr} \text{ e por } (YX)^{dr}, (XY)^{sc}\}$$

$$R_A^{VI} := \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (U_d Y)^{dr}, (YX)^{sc}, (XU_i)^{im}, (U_i U_d)^{sc}\}$$

$$R_A^{VII} := \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (X_O U_d)^{dr}, (U_d U_i)^{sc}, (U_i X_O)^{im}\}$$

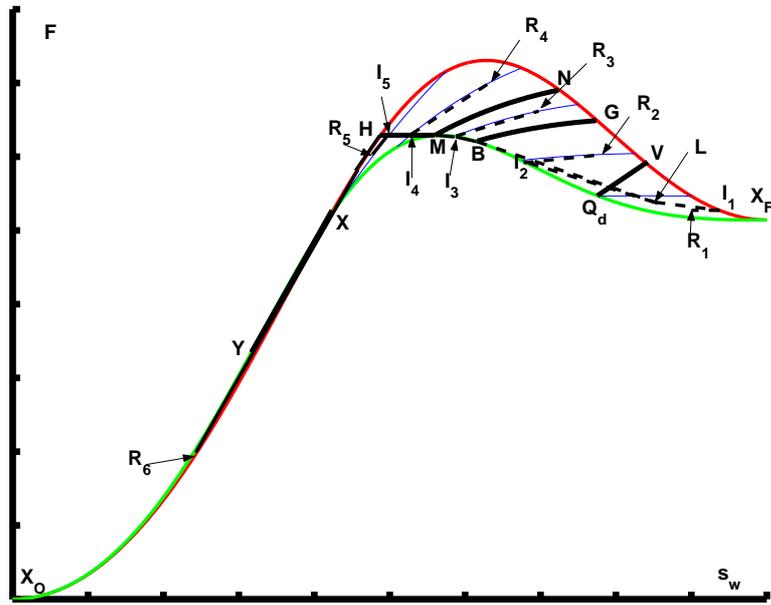
Aqui, o estado  $B = (s_B, F_B)$  é o ponto de tangência da curva de drenagem com a reta que passa por  $L$  e tangencia a curva de drenagem em  $\Omega_g$ :

$$\partial_{s_w} F^d(s_B) = \frac{(F^d(s_B) - F_L)}{(s_B - s_L)} \quad (29)$$

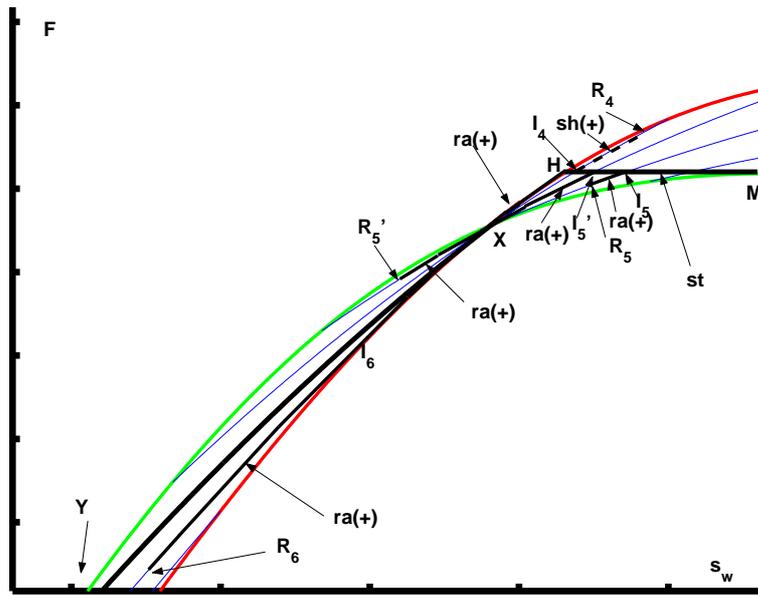
O ponto  $G = (s_G, F_G)$  é dado por

$$s_G = s_w^i(\pi^d(s_B)) \text{ e } F_G = F^i(s_G). \quad (30)$$

Assim, os estados  $B$  e  $G$  possuem o mesmo valor de  $\pi$ . A solução de Riemann está descrita na tabela 1 e ilustrada nas figuras 4 e 5(a).

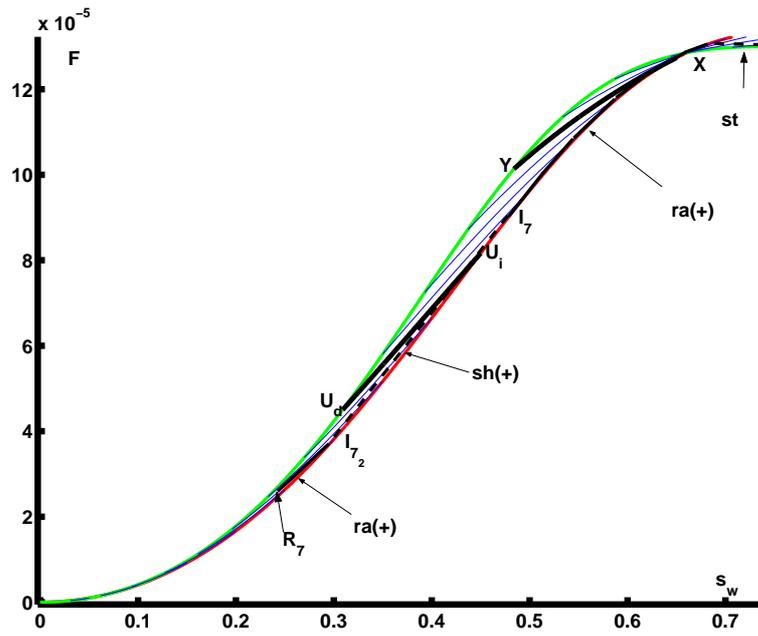


(a)

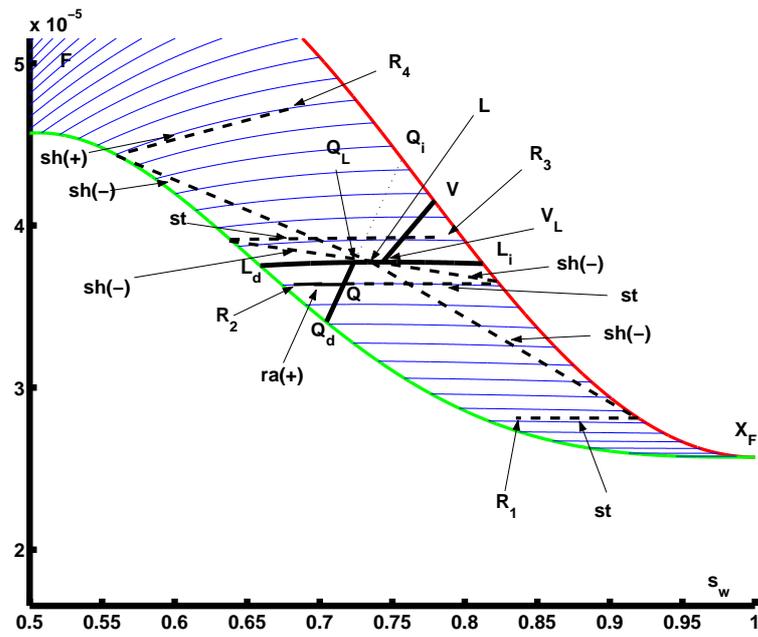


(b)

Figura 4: Solução de Riemann para  $L \in A$  (a) figura completa, (b) trecho ampliado.



(a)



(b)

Figura 5: Solução de Riemann para (a)  $L \in A$  e  $R_7 \in R_A^{VII}$ , (b)  $L \in B$

Tabela 2: Solução de Riemann para  $L \in B$

	$R$	solução	fluxo
1.	$R_1 \in R_B^I$	$L \xrightarrow{sh(-)} I_1 \xrightarrow{st} R_1$	$F(s_R, \pi_R)$
2.	$R_2 \in R_B^{II}$	$L \xrightarrow{sh(-)} I_2 \xrightarrow{st} Q \xrightarrow{ra(+)} R_2$	$F(s_Q, \pi_Q)$
3.	$R_3 \in R_B^{III}$	$L \xrightarrow{sh(-)} I_3 \xrightarrow{st} R_3$	$F(s_R, \pi_R)$
4.	$R_4 \in R_B^{IV}$	$L \xrightarrow{sh(-)} I_4 \xrightarrow{sh(+)} R_4$	$F^d(s^d(\pi_R))$
5.	$R_5 \in R_B^V$	$L \xrightarrow{sh(-)} B \xrightarrow{ra(-)} I_5 \xrightarrow{sh(+)} R_5$	$F^d(s^d(\pi_R))$
6.	$R_6 \in R_B^{VI}$	$L \xrightarrow{sh(-)} B \xrightarrow{ra(-)} M \xrightarrow{st} I_6 \xrightarrow{sh(+)} R_6$	$F(s_M, \pi_M)$
7.	$R_7 \in R_B^{VII}$	$L \xrightarrow{sh(-)} B \xrightarrow{ra(-)} M \xrightarrow{st} I_7 \xrightarrow{ra(+)} R_7$	$F(s_M, \pi_M)$
8.	$R_8 \in R_B^{VIII}$	$L \xrightarrow{sh(-)} B \xrightarrow{ra(-)} M \xrightarrow{st} H \xrightarrow{ra(+)} I_8 \xrightarrow{ra(+)} R_8$	$F(s_M, \pi_M)$
9.	$R_9 \in R_B^{IX}$	$L \xrightarrow{sh(-)} B \xrightarrow{ra(-)} M \xrightarrow{st} H \xrightarrow{ra(+)} I_9 \xrightarrow{sh(+)} I_{9_2} \xrightarrow{ra(+)} R_9$	$F(s_M, \pi_M)$

**Caso B:** As sub-regiões  $R$  de  $\Omega$  para  $L = (s_L, F(s_L, \pi_L)) \in B$  são:

$$R_B^I := \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (X_F Q_d)^{dr}, \overline{Q_d Q_L}, (Q_L K)^{sc}, (K X_F)^{im}\}$$

$$R_B^{II} := \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (Q_d L_d)^{dr}, (L_d Q_L)^{sc}, \overline{Q_L Q_d}\}$$

$$R_B^{III} := \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (L_i V_L)^{sc}, \overline{V_L V}, (V L_i)^{im}\}$$

$$R_B^{IV} := \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (V_L L_d)^{sc}, (L_d B)^{dr}, (B G)^{sc}, (G V)^{im}, \overline{V V_L}\}$$

$$R_B^V := \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (B M)^{dr}, (M N)^{sc}, (N G)^{im}, (G B)^{sc}\}$$

$$R_B^{VI} := \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } \overline{M H}, (H N)^{im}, (N M)^{sc}\}$$

$$R_B^{VII} := \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (X H)^{im}, \overline{H M}, (M X)^{dr} \text{ e por } (Y X)^{dr}, (X Y)^{sc}\}$$

$$R_B^{VIII} := \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (U_d Y)^{dr}, (Y X)^{sc}, (X U_i)^{im}, (U_i U_d)^{sc}\}$$

$$R_B^{IX} := \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (X O U_d)^{dr}, (U_d U_i)^{sc}, (U_i X O)^{im}\}$$

Aqui  $L_d = (s_{L_d}, F_{L_d})$  é dado por  $s_{L_d} = s^d(\pi_L)$  e  $F_{L_d} = F^d(s_{L_d})$ , e o estado  $L_i = (s_{L_i}, F_{L_i})$  por  $s_{L_i} = s^i(\pi_L)$  e  $F_{L_i} = F^i(s_{L_i})$ . Os pontos  $Q_L$  e  $V_L$  são dados pela interseção das curvas  $\overline{Q_d Q_i}$  e  $\overline{Q_d V}$  com a curva  $(L_d L_i)^{sc}$ , respectivamente.

As soluções de Riemann para  $R$  nas regiões  $R_B^{IV}$ ,  $R_B^V$ ,  $R_B^{VI}$ ,  $R_B^{VII}$ ,  $R_B^{VIII}$  e  $R_B^{IX}$  e  $L \in B$  são análogas as soluções para  $R$  nas regiões  $R_A^{II}$ ,  $R_A^{III}$ ,  $R_A^{IV}$ ,  $R_A^V$ ,  $R_A^{VI}$  e  $R_A^{VII}$  e  $L \in A$ . Todas as soluções estão na tabela 2, entretanto na figura 5(b) estão apenas as soluções para  $R$  nas regiões  $R_B^I$ ,  $R_B^{II}$ ,  $R_B^{III}$  e  $R_B^{IV}$ .

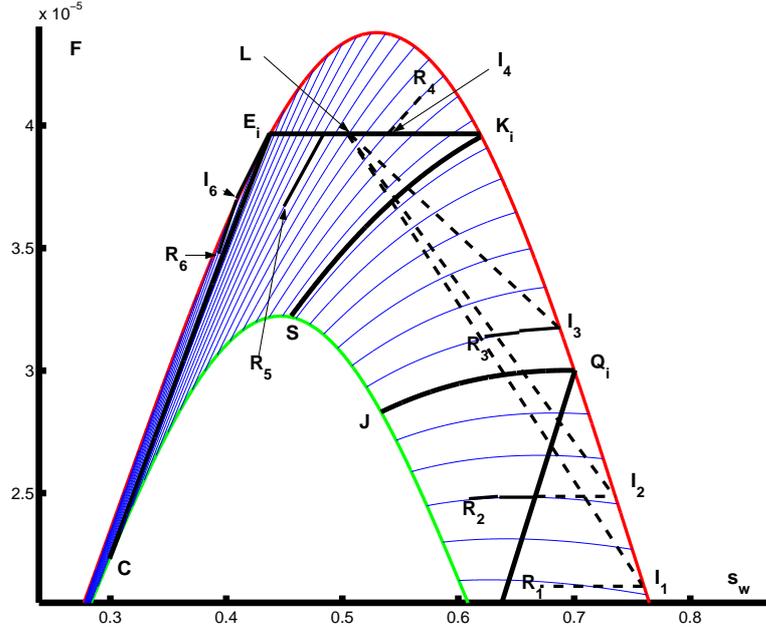


Figura 6: Solução de Riemann para  $L \in C$ .

Caso C: As sub-regiões  $R$  de  $\Omega$  para  $L = (s_L, F(s_L, \pi_L)) \in C$  são:

$$\begin{aligned}
 R_C^I &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (X_F Q_d)^{dr}, \overline{Q_d Q_i}, (Q_i X_F)^{im}\} \\
 R_C^{II} &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (Q_d J)^{dr}, (J Q_i)^{sc}, \overline{Q_i Q_d}\} \\
 R_C^{III} &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (J S)^{dr}, (S K)^{sc}, (K Q_i)^{im}, (Q_i J)^{sc}\} \\
 R_C^{IV} &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } \overline{K E}, (E K)^{im}\} \\
 R_C^V &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (C E)^{sc}, \overline{E K}, (K S)^{sc}, (S C)^{dr}\} \\
 R_C^{VI} &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (X E)^{im}, (E C)^{sc}, (C X)^{dr}\} \\
 R_C^{VII} &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (Y X)^{dr}, (X Y)^{sc}\} \\
 R_C^{VIII} &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (U_d Y)^{dr}, (Y X)^{sc}, (X U_i)^{im}, (U_i U_d)^{sc}\} \\
 R_C^{IX} &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (X O U_d)^{dr}, (U_d U_i)^{sc}, (U_i X O)^{im}\}
 \end{aligned}$$

A solução para este caso está na tabela 3 e na figura 6.

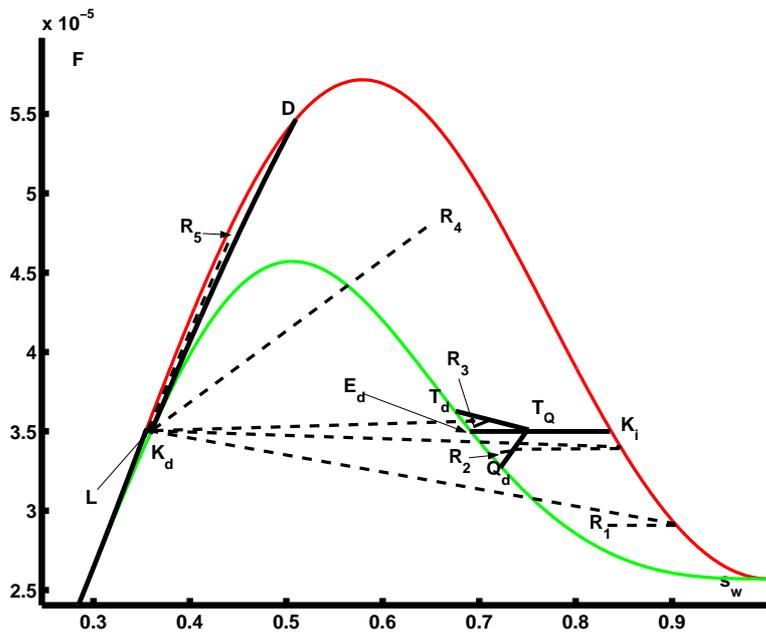
Tabela 3: Solução de Riemann para  $L \in C$

	$R$	solução	fluxo
1.	$R_1 \in R_C^I$	$L \xrightarrow{sh(-)} I_1 \xrightarrow{st} R_1$	$F(s_R, \pi_R)$
2.	$R_2 \in R_C^{II}$	$L \xrightarrow{sh(-)} I_2 \xrightarrow{st} Q \xrightarrow{ra(+)} R_2$	$F(s_Q, \pi_Q)$
3.	$R_3 \in R_C^{III}$	$L \xrightarrow{sh(-)} I_3 \xrightarrow{ra(+)} R_3$	$F^i(s^i(\pi_R))$
4.	$R_4 \in R_C^{IV}$	$L \xrightarrow{st} I_4 \xrightarrow{sh(+)} R_4$	$F(s_L, \pi_L)$
5.	$R_5 \in R_C^V$	$L \xrightarrow{st} I_5 \xrightarrow{ra(+)} R_5$	$F(s_L, \pi_L)$
6.	$R_6 \in R_C^{VI}$	$L \xrightarrow{st} E \xrightarrow{ra(+)} I_6 \xrightarrow{ra(+)} R_6$	$F(s_L, \pi_L)$
7.	$R_7 \in R_C^{VII}$	$L \xrightarrow{st} E \xrightarrow{ra(+)} I_7 \xrightarrow{ra(+)} R_7$	$F(s_L, \pi_L)$
8.	$R_8 \in R_C^{VIII}$	$L \xrightarrow{st} E \xrightarrow{ra(+)} I_8 \xrightarrow{ra(+)} R_8$	$F(s_L, \pi_L)$
9.	$R_9 \in R_C^X$	$L \xrightarrow{st} E \xrightarrow{ra(+)} I_9 \xrightarrow{sh(+)} I_{9_2} \xrightarrow{ra(+)} R_9$	$F(s_L, \pi_L)$

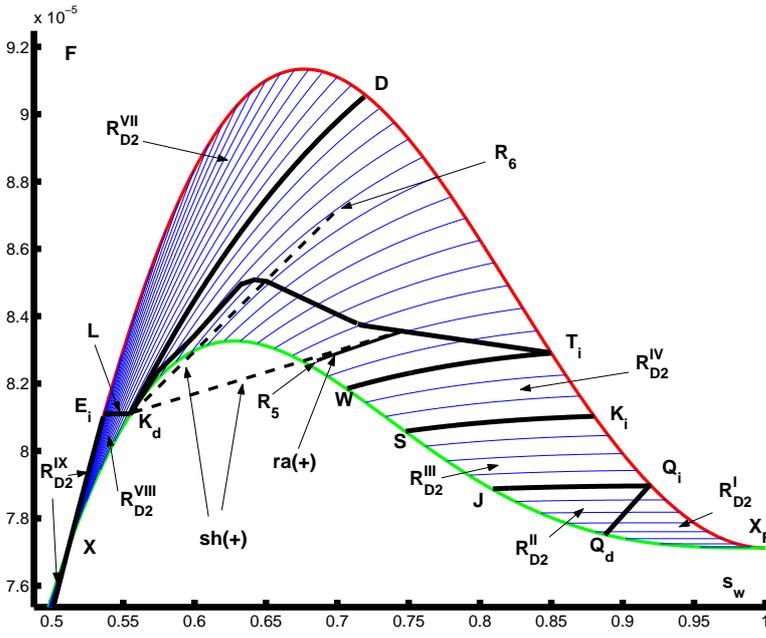
Caso D: As sub-regiões  $R$  de  $\Omega$  para  $L1 = (s_L, F(s_L, \pi_L)) \in D$  são:

$$\begin{aligned}
 R_{D1}^I &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (X_F Q_d)^{dr}, \overline{Q_d T_Q}, \overline{T_Q K_i}, (K_i X_F)^{im}\} \\
 R_{D1}^{II} &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (Q_d E_d)^{dr}, \overline{E_d T_Q}, \overline{T_Q Q_d}\} \\
 R_{D1}^{III} &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (E_d T_d)^{dr}, (T_d T_Q)^{tan}, \overline{T_Q E_d}\} \\
 R_{D1}^{IV} &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (T_d T_Q)^{tan}, (T_d K_d)^{dr}, (K_d D)^{sc}, (DK_i)^{im}, \overline{K_i T_Q}\} \\
 R_{D1}^V &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } \overline{K_d E_i}, (E_i D)^{im}, (DK_d)^{sc}\} \\
 R_{D1}^{VI} &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (X E_i)^{sc}, \overline{E_i K_d}, (K_d X)^{dr}\} \\
 R_{D1}^{VII} &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (X E_i)^{dr}, (E_i X)^{sc}\} \\
 R_{D1}^{VIII} &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (Y X)^{dr}, (X Y)^{sc}\} \\
 R_{D1}^X &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (U_d Y)^{dr}, (Y X)^{sc}, (X U_i)^{im}, (U_i U_d)^{sc}\} \\
 R_{D1}^X &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (X_O U_d)^{dr}, (U_d U_i)^{sc}, (U_i X_O)^{im}\}
 \end{aligned}$$

A curva  $T_d T_i$  é formada pelos pontos  $(s_T, F_T)$  onde as curvas de *scanning* são tangentes ao ponto  $K_d$ . A solução encontra-se na tabela 4. As soluções que não são análogas às soluções de outros casos estão na figura 7 (a). O caso  $D$  diferentemente dos casos apresentados anteriormente, possui uma ligeira diferença na solução quando há mudanças na função de fluxo. Isso acontece porque a curva dos pontos tangentes e a curva  $Q_d Q_i$  variam conforme a velocidade varia, fazendo com que o ponto  $T_Q$  fique fora da região de *scanning*. Então, torna-se necessário descrever as novas regiões para  $L_2 \in D$ :



(a)



(b)

Figura 7: Solução de Riemann para (a)  $L_1 \in D$  (b)  $L_2 \in D$

	$R$	solução	fluxo
1.	$R_1 \in R_{D1}^I$	$L_1 \xrightarrow{sh(-)} I_1 \xrightarrow{st} R_1$	$F(s_R, \pi_R)$
2.	$R_2 \in R_{D1}^{II}$	$L_1 \xrightarrow{sh(-)} I_2 \xrightarrow{st} Q \xrightarrow{ra(+)} R_2$	$F(s_Q, \pi_Q)$
3.	$R_3 \in R_{D1}^{III}$	$L_1 \xrightarrow{st} K_d \xrightarrow{sh(+)} I_3 \xrightarrow{ra(+)} R_3$	$F(s_L, \pi_L)$
4.	$R_4 \in R_{D1}^{IV}$	$L_1 \xrightarrow{st} K_d \xrightarrow{sh(+)} R_4$	$F(s_L, \pi_L)$
5.	$R_5 \in R_{D1}^V$	$L_1 \xrightarrow{st} I_5 \xrightarrow{sh(+)} R_5$	$F(s_L, \pi_L)$
6.	$R_6 \in R_{D1}^{VI}$	$L_1 \xrightarrow{st} I_6 \xrightarrow{ra(+)} R_6$	$F(s_L, \pi_L)$
7.	$R_7 \in R_{D1}^{VII}$	$L_1 \xrightarrow{st} E_i \xrightarrow{ra(+)} I_7 \xrightarrow{ra(+)} R_7$	$F(s_L, \pi_L)$
8.	$R_8 \in R_{D1}^{VIII}$	$L_1 \xrightarrow{st} E_i \xrightarrow{ra(+)} I_8 \xrightarrow{ra(+)} R_8$	$F(s_L, \pi_L)$
9.	$R_9 \in R_{D1}^{IX}$	$L_1 \xrightarrow{st} E_i \xrightarrow{ra(+)} I_9 \xrightarrow{ra(+)} R_9$	$F(s_L, \pi_L)$
10.	$R_{10} \in R_{D1}^X$	$L_1 \xrightarrow{st} E_i \xrightarrow{ra(+)} I_{10} \xrightarrow{sh(+)} I_{10_2} \xrightarrow{ra(+)} R_{10}$	$F(s_L, \pi_L)$

Tabela 4: Solução de Riemann para  $L_1 \in D$

$$\begin{aligned}
R_{D2}^I &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (X_F Q_d)^{dr}, \overline{Q_d Q_i}, (Q_i X_F)^{im}\} \\
R_{D2}^{II} &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (Q_d J)^{dr}, (J Q_i)^{sc}, \overline{Q_i Q_d}\} \\
R_{D2}^{III} &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (J S)^{dr}, (S K_i)^{sc}, (K_i Q_i)^{im}, (Q_i J)^{sc}\} \\
R_{D2}^{IV} &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (S W)^{dr}, (W T_i)^{sc}, (T_i K_i)^{im}, (K_i S)^{sc}\} \\
R_{D2}^V &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (W K_d)^{dr}, (K_d T_i)^{tan}, (T_i W)^{sc}\} \\
R_{D2}^{VI} &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (K_d D)^{sc}, (D T_i)^{im}, (T_i K_d)^{tan}\} \\
R_{D2}^{VII} &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } \overline{K_d E_i}, (E_i D)^{im}, (D K_d)^{sc}\} \\
R_{D2}^{VIII} &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (X E_i)^{sc}, \overline{E_i K_d}, (K_d X)^{dr}\} \\
R_{D2}^{IX} &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (X E_i)^{im}, (E_i X)^{sc}\} \\
R_{D2}^X &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (Y X)^{dr}, (X Y)^{sc}\} \\
R_{D2}^{XI} &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (U_d Y)^{dr}, (Y X)^{sc}, (X U_i)^{im}, (U_i U_d)^{sc}\} \\
R_{D2}^{XII} &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (X O U_d)^{dr}, (U_d U_i)^{sc}, (U_i X O)^{im}\}
\end{aligned}$$

As soluções para esse caso estão descritas na tabela 5 e desenhadas na figura 7 (b).

Caso E: Para determinar as sub-regiões  $R$  para  $L = (s_L, F(s_L, \pi_L)) \in E$  vamos definir a reta  $A$ :

$$A := \{(s_A, F_A), F_L \leq F_A\} \quad (31)$$

onde:

$$s_A(F_A) := \frac{F_A - F^i(s_{E_i})}{\partial_{s_w} F^i(s_{E_i})} \quad (32)$$

	$R$	solução	fluxo
1.	$R_1 \in R_{D_2}^I$	$L_2 \xrightarrow{sh(-)} I_1 \xrightarrow{st} R_1$	$F(s_R, \pi_R)$
2.	$R_2 \in R_{D_2}^{II}$	$L_2 \xrightarrow{sh(-)} I_2 \xrightarrow{st} Q \xrightarrow{ra(+)} R_2$	$F(s_Q, \pi_Q)$
3.	$R_3 \in R_{D_2}^{III}$	$L_2 \xrightarrow{sh(-)} I_3 \xrightarrow{ra(+)} R_3$	$F(s_L, \pi_L)$
4.	$R_4 \in R_{D_2}^{IV}$	$L_2 \xrightarrow{st} K_d \xrightarrow{sh(+)} I_4 \xrightarrow{ra(+)} R_4$	$F(s_L, \pi_L)$
5.	$R_5 \in R_{D_2}^V$	$L_2 \xrightarrow{st} K_d \xrightarrow{sh(+)} T \xrightarrow{ra(+)} R_5$	$F(s_L, \pi_L)$
6.	$R_6 \in R_{D_2}^{VI}$	$L_2 \xrightarrow{st} K_d \xrightarrow{sh(+)} R_6$	$F(s_L, \pi_L)$
7.	$R_7 \in R_{D_2}^{VII}$	$L_2 \xrightarrow{st} I_7 \xrightarrow{sh(+)} R_7$	$F(s_L, \pi_L)$
8.	$R_8 \in R_{D_2}^{VIII}$	$L_2 \xrightarrow{st} I_8 \xrightarrow{ra(+)} R_8$	$F(s_L, \pi_L)$
9.	$R_9 \in R_{D_2}^{IX}$	$L_2 \xrightarrow{st} E_i \xrightarrow{ra(+)} I_9 \xrightarrow{ra(+)} R_9$	$F(s_L, \pi_L)$
10.	$R_{10} \in R_{D_2}^{X}$	$L_2 \xrightarrow{st} E_i \xrightarrow{ra(+)} I_{10} \xrightarrow{ra(+)} R_{10}$	$F(s_L, \pi_L)$
11.	$R_{11} \in R_{D_2}^{XI}$	$L_2 \xrightarrow{st} E_i \xrightarrow{ra(+)} I_{11} \xrightarrow{ra(+)} R_{11}$	$F(s_L, \pi_L)$
12.	$R_{12} \in R_{D_2}^{XII}$	$L_2 \xrightarrow{st} E_i \xrightarrow{ra(+)} I_{12} \xrightarrow{sh(+)} I_{12_2} \xrightarrow{ra(+)} R_{12}$	$F(s_L, \pi_L)$

Tabela 5: Solução de Riemann para  $L_2 \in D$

	$R$	solução	fluxo
1.	$R_1 \in R_E^I$	$L \xrightarrow{st} E_i \xrightarrow{sh(+)} R_1$	$F(s_L, \pi_L)$
2.	$R_2 \in R_E^{II}$	$L \xrightarrow{st} E_i \xrightarrow{ra(+)} I_2 \xrightarrow{sh(+)} R_2$	$F(s_{I_2}, \pi_{I_2})$
3.	$R_3 \in R_E^{III}$	$L \xrightarrow{st} I_3 \xrightarrow{ra(+)} R_3$	$F(s_L, \pi_L)$
4.	$R_4 \in R_D^{IV}$	$L \xrightarrow{st} K_d \xrightarrow{ra(+)} I_4 \xrightarrow{ra(+)} R_4$	$F(s_L, \pi_L)$

Tabela 6: Solução de Riemann para  $L \in E$

Definimos, então, as seguintes sub-regiões  $R$  de  $\Omega$  para  $L \in E$  (figura 8):

$$R_E^I := \{(s_w, F) \in \Omega \mid F \geq F_L, s_w \geq s_A(F)\}$$

$$R_E^{II} := \{(s_w, F) \in \Omega \mid F \geq F_L, s_w \leq s_A(F)\}$$

$$R_E^{III} := \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (SE_d)^{im}, \overline{E_d K_i}, (K_i S)^{sc}\}$$

$$R_E^{IV} := \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (X_O S)^{im}, (SK_i)^{sc}, (K_i X_O)^{dr}\}$$

A solução se encontra na tabela 6.

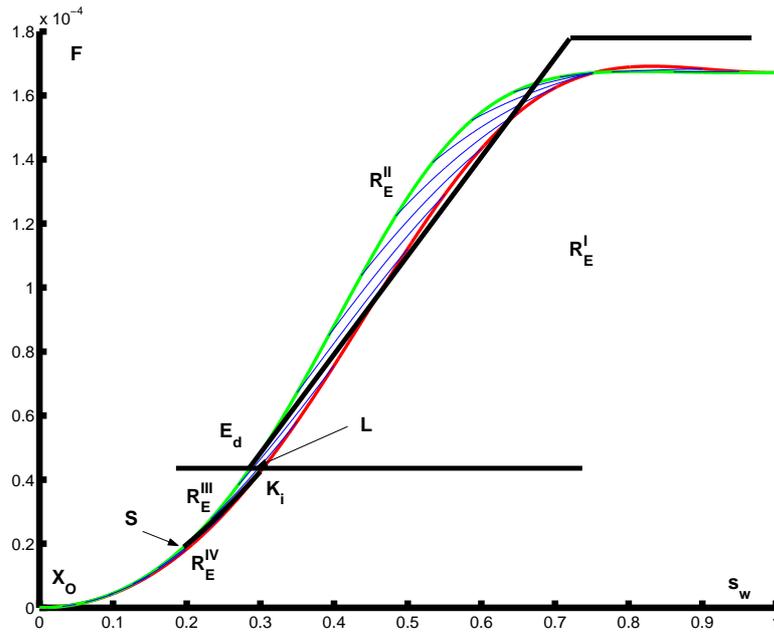


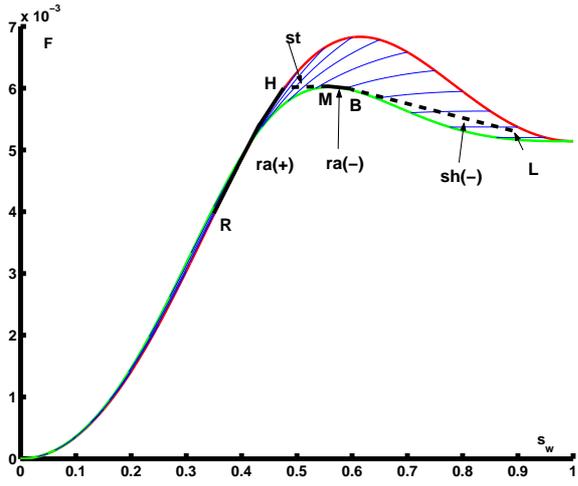
Figura 8: Sub-regiões  $R$  de  $\Omega$  para  $L \in E$

## 4 Resultados Obtidos

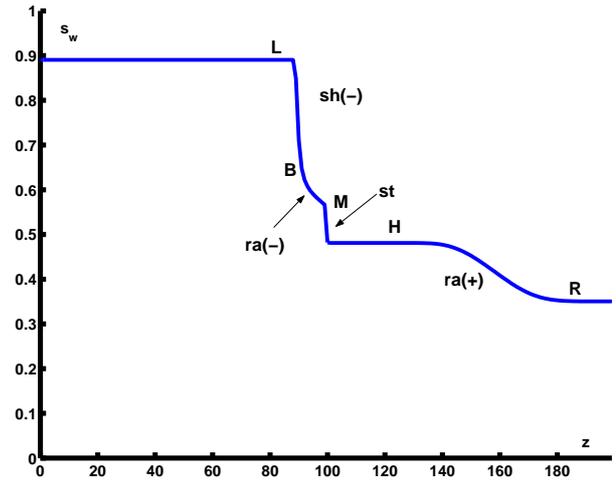
Para simular o problema estamos desenvolvendo um programa em linguagem C++, que utiliza bibliotecas do Matlab para mostrar os gráficos. O programa tem uma interface gráfica onde o usuário pode inserir os dados, pode salvar e abrir simulações realizadas e visualizar o resultado graficamente.

A inserção de dados é feita em dois estágios. No primeiro, o usuário fornece todos os parâmetro necessários, exceto o estado inicial ( $L$  e  $R$ ); no segundo, tem três opções para inserir o estado inicial: clicando no gráfico  $F \times s_w$ , clicando no gráfico  $\pi \times s_w$  ou escrevendo os valores.

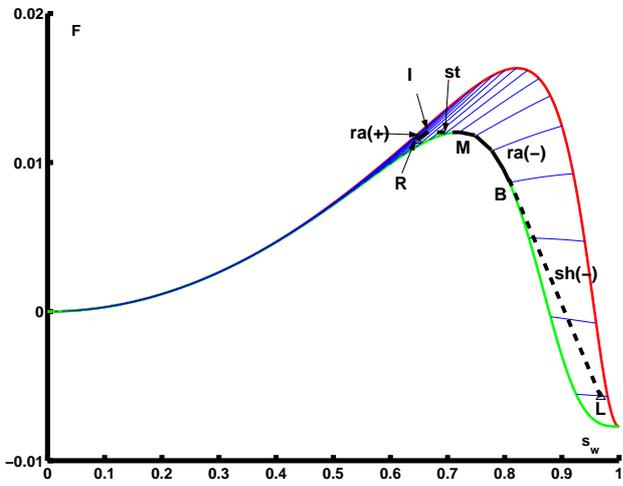
Nas figura 9 estão alguns exemplos (b) dos resultados da simulação obtidos com o *software* e (a) a solução do problema de Riemann, onde estão ilustrados os pontos principais e as ondas (choque, rarefação e descontinuidade). No exemplo da figura 9.1 a velocidade é positiva,  $L \in A$  e  $R \in R_A^V$ , a solução está na tabela 1. Já o exemplo da figura 9.2 ilustra o mesmo caso em que  $L \in A$  e  $R \in R_A^V$ , entretanto a velocidade é negativa. A velocidade positiva significa injeção de gás no aquífero, para armazená-lo; e, a velocidade negativa representa a situação em que se está retirando o gás do aquífero (produção). A figura 9.3 ilustra um caso em que a saturação aumenta além do estado inicial.



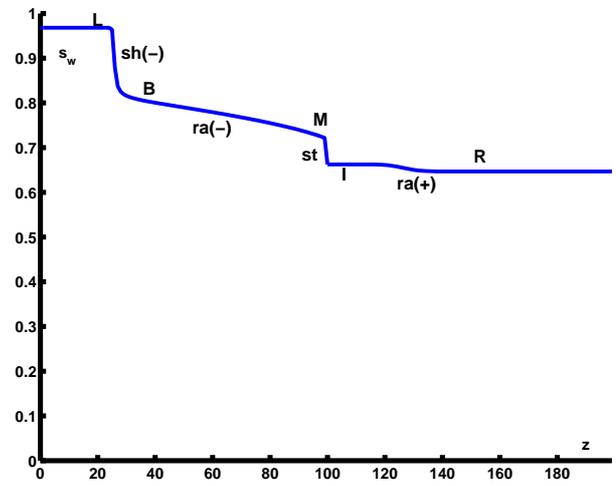
(1a)



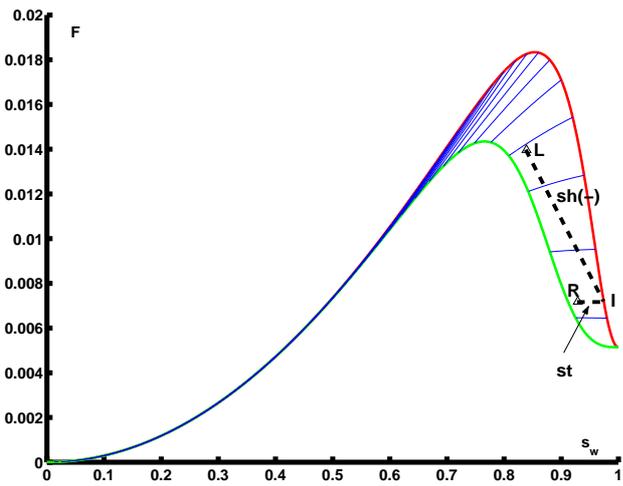
(1b)



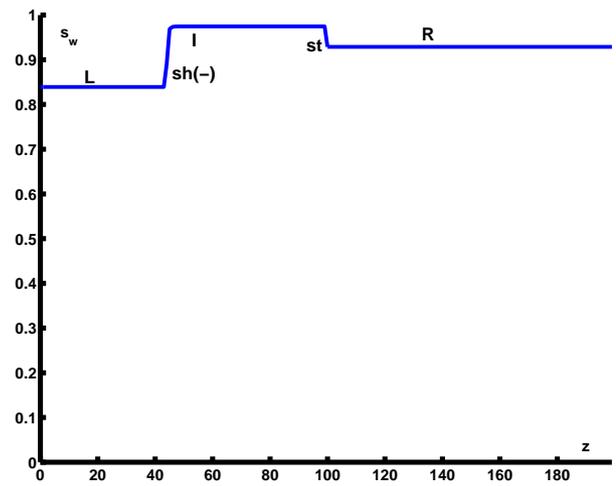
(2a)



(2b)



(3a)



(3b)

Figura 9: (a) Solução do problema de Riemann (b) Resultado da simulação

## 5 Conclusão

Neste trabalho foi considerada a histerese na permeabilidade relativa nos termos associados à velocidade e à gravidade simultaneamente. As soluções de Riemann encontradas para as equações que modelam o escoamento em um aquífero quando usado para armazenar gás, permite determinar diretamente o perfil da solução quando é dado o estado inicial.

Os resultados numéricos, obtidos com a implementação do método de Godunov Corrigido (seção 4), verificam as soluções de Riemann teóricas apresentadas na seção 3. O *software*, assim como os modelos e as técnicas desenvolvidos apresentam as vantagens de poder ser utilizados em outros contextos tais como na simulação do comportamento de óleos viscosos ou em WAG, o que permite aumentar o fator de recuperação de petróleo viscoso.

Finalmente, as técnicas desenvolvidas podem ser facilmente estendidas para futuros trabalhos como a inclusão de condições de fronteira cíclicas — caso da utilização contínua do aquífero para armazenamento e fornecimento de gás — bem como a implementação em duas ou três dimensões espaciais. Desta forma, os métodos e o *software* desenvolvidos podem se tornar ferramentas importantes na viabilização da técnica para armazenar gás no Brasil, ampliando a utilização de gás na matriz energética brasileira, o que é economicamente e ambientalmente positivo.

**AGRADECIMENTOS** Meus agradecimentos a Pavel Bedrikovetsky por ter sugerido o tema de pesquisa assim como as aplicações práticas do trabalho. Meus agradecimentos a Dan Marchesin, Marcus Sarkis e Christian E. Schaerer pelas discussões e cuidadosas sugestões relativas a este trabalho.

## Referências

- [1] AZIZ K., SETTARI A., Petroleum Reservoir Simulation, Applied Science, London, 1979.
- [2] BEDRIKOVETSKY P., Mathematical Theory of Oil and Gas Recovery: With Application to ex-USSR oil and Gas Fields. Kluwer Academic Publishers, 1990.
- [3] BRAUN E.M., HOLLAND R.F., Relative permeability hysteresis: laboratory measurements and a conceptual model, *SPE Reservoir Engineering*, No 28615, pp 222–228, 1995.

- [4] BRIGGS J.E., KATZ D.L., Drainage of Water from Sand in Developing Aquifer Storage, *Society of Petroleum Engineers of AIME*, SPE 1501, 1966.
- [5] EWING R. E., The Mathematics of Reservoir Simulation, *Frontiers In Applied Mathematics*, SIAM, Philadelphia, 1983.
- [6] FURATI K.M., Effects of relative permeability hystory dependence on two-phse flow in porous media, *Transport in Porous Media*, Vol 28, pp. 181–203, 1997.
- [7] GODUNOV S.K., A finite difference method for the numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics, *Mat. Sb.*, Vol. 47, pp. 271–290, 1959.
- [8] FLORH B., MARCHESIN D., BEDRIKOVETSKY P., KRAUSE P., Modeling hysteresis in porous media flow via relaxation, *Computational Geosciences*, Vol. 5, no 3, pp 225–256, 2001.
- [9] SCHAEERER C.E., SARKIS M., MARCHESIN D., BEDRIKOVETSKY P., Counterflow segregation problem with hysteretic permeability, submetido ao *SIAM Applied Mathematics*.
- [10] SCHAEERER C.E., SARKIS M., MARCHESIN D., Numerical simulation of gravity counterflow segregation, *CILAMCE XXV, Iberian Latin American Congress on Computational Methods*, November 10–12, Recife, Pernambuco, Brasil.
- [11] Ambientebrasil - portal ambiental, <http://www.ambientebrasil.com.br>.
- [12] Gaspetro, <http://www.gaspetro.com.br>
- [13] Portal GásEnergia - A Energia do Gás Natural, <http://www.gasenergia.com.br>.
- [14] Underground Gas Storage: Technological Innovations for Increased Efficiency, [http://www.worldenergy.org/wec-geis/publications/default/tech\\_papers/17th\\_congress/2\\_2\\_09.asp](http://www.worldenergy.org/wec-geis/publications/default/tech_papers/17th_congress/2_2_09.asp)