Instituto de Matemática y Ciencias Afines

Integrabilidade de Equações Diferenciais no Plano Complexo

Jorge Vitório Pereira

Lima – Peru

2001

Prefácio

Nesta monografia apresentamos o leitor à alguns aspectos da teoria de integração explícita de equações diferenciais. Tratamos o caso de equações polinomiais no plano complexo. Não buscamos a originalidade, de fato todos os resultados apresentados podem ser encontrados na literatura, mas sim expor de forma *elementar* alguns métodos clássicos de integração e baseados em resultados recentes discutir a sua surpreendente eficácia.

No primeiro capítulo são expostas as noções básicas a serem utilizadas ao longo do texto. Além de apresentar os conceitos de integrais primeiras, fatores de integração e curvas algébricas invariantes, é posta em evidência a dualidade entre 1–formas diferenciais e campos de vetores no plano complexo.

No segundo capítulo apresentamos a estratégia utilizada por Darboux para obter integrais primeiras para 1–formas polinomiais em $\mathbb{C}^2$. Destaca-se nesse capítulo o critério de Darboux-Jouanolou que pode ser sucintamente enunciado da seguinte forma: uma 1–forma diferencial polinomial admite integral primeira racional se, e somente se, admite uma infinidade de curvas algébricas invariantes.

No terceiro capítulo voltamos a nossa atenção para o paradigma introduzido por Lie para resolver equações diferenciais. Este baseia-se no uso de simetrias infinitesimais para obter integrais primeiras. Como resultado principal do capítulo mostramos que um campo de vetores polinomial admite um fator de integração racional se, e somente se, admite uma simetria infinitesimal. Após uma breve digressão para caracterizar as 1–formas racionais fechadas em $\mathbb{C}^2$ explicitamos a forma das integrais primeiras obtidas por este paradigma.

No quarto capítulo apresentamos o belo Teorema de Singer que caracteriza as equações diferenciais polinomiais em $\mathbb{C}^2$ que podem ser *integradas* utilizando os métodos do cálculo diferencial. Este capítulo pressupõe uma certa maturidade matemática do leitor ao assumir alguma familiaridade com aspectos básicos da teoria de extensão corpos. Isso deve-se ao fato de que o Teorema de Singer é um resultado do âmbito da álgebra diferencial e apesar de expormos os conceitos desta teoria que utilizamos, ela baseia-se na teoria clássica de corpos. Concluímos mostrando que, após uma pequena alteração, o método de integração de Darboux permite integrar qualquer equação diferencial polinomial em $\mathbb{C}^2$ que possa ser integrada por métodos do cálculo diferencial.

Em um quinto e último capítulo reunimos referências a questões relacionadas com o material desta monografia. Não pretendemos ser completos nesta lista e certamente cometemos omissões graves. O objetivo desta é apenas fornecer subsídio para que o leitor interessado possa ter uma idéia aos desenvolvimentos recentes da teoria de equações diferenciais polinomiais no plano complexo e também de sua natural generalização a teoria das folheações holomorfas.

Estas notas foram redigidas à partir de um curso dado no IMCA no mês de outubro de 2001. Agradeço ao interesse e atenção dos que participaram do curso. Agradeço também aos colegas do IMCA pela hospitalidade durante a minha visita ao seu instituto.

Jorge Vitório Pereira
Rio de Janeiro, novembro de 2001.

Conteúdo

CAPíTULO 1

Noções Básicas

Considere um sistema de equações diferenciais da forma

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x,y) \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x,y) \end{aligned} \tag{1}$$

onde P e Q são polinômios complexos em duas variáveis. Dizemos que uma função holomorfa $\phi : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ é uma *solução* de (1) se para qualquer $t \in U$ vale que

$$\phi'(t) = (P \circ \phi(t), Q \circ \phi(t))\,.$$

A existência de soluções para o sistema (1) é garantida pelo conhecido teorema de existência e unicidade. Para a comodidade do leitor o enunciamos abaixo.

Teorema 1 (Existência e unicidade)**.** *Considere um sistema de equações diferenciais na forma (1). Então valem as seguintes afirmações:*

a. *Para qualquer $p \in \mathbb{C}^2$ existe um número real positivo r_p e uma função holomorfa $\phi_p : \mathbb{D}(0, r_p) \to \mathbb{C}^2$ tal que $\phi_p(0) = p$ e $\phi'_p(t) = (P \circ \phi_p(t), Q \circ \phi_p(t))$, ou seja, ϕ_p é uma solução de (1) passando por p.*
b. *Seja $U \subset \mathbb{C}$ um aberto contendo a origem. Se $\psi : U \to \mathbb{C}^2$ é uma solução de (1) tal que $\psi(0) = p$ então $\psi_{|V} = \phi_{p|V}$ onde $V = U \cap \mathbb{D}(0, r_p)$.*

COMENTÁRIO 1. O Teorema acima vale sob hipóteses bem mais fracas. Por exemplo podemos supor que P e Q são apenas funções holomorfas definidas em algum aberto de $\mathbb{C}^2$.

1. Integrais primeiras e fatores de integração

Apesar do teorema 1 nos garantir a existência de soluções locais para o sistema (1) passando por qualquer ponto $p \in \mathbb{C}^2$, na maioria das vezes muito pouco de sabe sobre a natureza das soluções. Entretanto em algumas situações é possível encontrar integrais primeiras para (1) e estas, de certa forma, permitem entender o comportamento qualitativo das soluções da equação diferencial em questão.

Definição 1 (Integral primeira)**.** Seja $U \subset \mathbb{C}^2$ um aberto e $F : U \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa não-constante. Dizemos que F é uma integral primeira em U para o sistema de equações diferenciais (1) se F é constante ao longo das soluções de (1) contidas em U.

Exemplo 1 (Equação de Lotka-Volterra)**.** Considere o sistema de equações diferenciais de Lotka-Volterra [1]

$$\begin{array}{rcl} \frac{dx}{dt} & = & ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} & = & -cy + dxy \end{array}, \tag{2}$$

onde a, b, c e d são números complexos. Afirmamos que em qualquer aberto simplesmente conexo U contido em $\mathbb{C}^2 \setminus \{x \cdot y = 0\}$ vale que qualquer determinação da função

$$F(x, y) = dx + by - c \log x - a \log y$$

é uma integral primeira para (2).

De fato se $\phi = (\phi_1, \phi_2) : V \to \mathbb{C}^2$ é uma solução do sistema (2) temos que

$$\phi'(t) = (a\phi_1(t) - b\phi_1(t)\phi_2(t), -c\phi_2(t) + d\phi_1(t)\phi_2(t))$$

[1] Quando a, b, c e d são reais e positivos o sistema acima *modela* a competição entre espécies.

e portanto $\frac{d}{dt}(F \circ \phi)(t) = dF(\phi(t)) \cdot \phi'(t)$ é igual a

$$\left(d - \frac{c}{\phi_1}\right)(a\phi_1 - b\phi_1\phi_2) + \left(b - \frac{a}{\phi_2}\right)(-c\phi_2 + d\phi_1\phi_2) = 0\,.$$

Conseqüentemente qualquer determinação de F é constante ao longo das soluções de (2), ou seja qualquer determinação de F é uma integral primeira do sistema (2).

De posse da integral primeira podemos efetuar de maneira relativamente simples o estudo qualitativo das soluções da equação diferencial em questão. Para exemplificar este fato vamos supor que a, b, c e d são reais positivos e interpretar (2) como uma equação diferencial real. As curvas de nível de F passando por qualquer ponto do conjunto $U = \{(x, y) | x > 0 \text{ e } y > 0\}$ são fechadas(exercício para o leitor). Com isso podemos concluir que toda solução com condição inicial pertencente ao aberto U é periódica. □

Podemos associar ao sistema (1) a 1-forma diferencial holomorfa

$$\omega = Pdy - Qdx\,.$$

Convidamos o leitor a verificar que F é uma integral primeira para o sistema (1) se, e somente se,

$$\omega \wedge dF = 0\,.$$

O simples fato de associar a 1-forma ω ao sistema (1) algumas vezes torna a obtenção de uma integral primeira uma tarefa trivial.

Exemplo 2 (Sistemas exatos)**.** Suponha que o sistema de equações diferenciais (1) é tal que

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial y}\,.$$

Vê-se então que a 1-forma diferencial $\omega = Pdy - Qdx$ é fechada, i.e., $d\omega = 0$. Portanto a função

$$F(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x,y)} \omega$$

obtida integrando ω ao longo de qualquer caminho ligando um ponto inicial arbitrário (x_0, y_0) ao ponto (x, y) está bem definida(pois ω é fechada e $\mathbb{C}^2$ simplesmente conexo) e é tal que $\omega = dF$. Portanto F é uma integral primeira para o sistema (1). $\square$

Nos cursos básicos de equações diferenciais aprendemos que podemos utilizar integrais ao longo de caminhos para obter integrais primeiras para equações diferenciais que admitem fatores de integração.

Definição 2 (Fator de integração)**.** Seja $U \subset \mathbb{C}^2$ um aberto e $\mu : U \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa não-constante. Dizemos que μ é um fator de integração para o sistema de equações diferenciais (1) se

$$\frac{\partial \mu P}{\partial x} = -\frac{\partial \mu Q}{\partial y} .$$

Equivalentemente μ é um fator de integração para (1) se a 1-forma diferencial $\mu \cdot \omega$ é fechada, i.e., $d(\mu\omega) = 0$.

Exemplo 3 (Equações diferenciais lineares)**.** Considere a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y + b(x) \ , \ a, b \in \mathbb{C}(x) \ .$$

Podemos associar a esta equação a 1-forma racional ω,

$$\omega = dy - (a(x)y + b(x))dx .$$

Ao tentar encontrar um fator de integração μ que dependa apenas da variável x vemos que μ deve satisfazer

$$0 = d(\mu \cdot \omega) = \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu \cdot a(x) \right) dx \wedge dy .$$

Vê-se então que

$$\mu(x) = \exp\left(-\int a(x)dx \right) \ ,$$

é tal que $d(\mu\omega) = 0$ e portanto μ é um fator de integração para ω. $\square$

2. Soluções Algébricas

Como veremos ao longo do texto as soluções algébricas de (1) terão um papel de destaque nas questões relacionadas a existência de integrais primeiras e de fatores de integração.

Definição 3 (Soluções algébricas). Seja $\phi : V \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ uma solução de (1). Dizemos que ϕ é uma solução algébrica se existe um polinômio não-nulo $f \in \mathbb{C}[x, y]$ tal que $f(\phi(t)) = 0$ para qualquer $t \in V$.

Definição 4 (Curvas algébricas invariantes). Seja $f \in \mathbb{C}[x, y]$. Dizemos que $C = \{f = 0\}$ é uma curva algébrica invariante por (1) se para qualquer solução de (1), $\phi : \mathbb{D}(0, r) \to \mathbb{C}^2$, satisfazendo $f(\phi(0)) = 0$ temos que

$$f(\phi(t)) = 0$$

para todo $t \in V$.

Proposição 1. *Seja $f \in \mathbb{C}[x, y]$ um polinômio reduzido. A curva algébrica C descrita implicitamente por $\{f = 0\}$ é invariante por (1) se, e somente se, existe uma 2–forma polinomial Θ_f tal que*

$$\omega \wedge df = f \cdot \Theta_f \,.$$

demonstração: Suponha que existe Θ_f polinomial tal que

$$\omega \wedge df = f \cdot \Theta_f \,. \tag{3}$$

Seja $\phi : \mathbb{D}(0, r) \to \mathbb{C}^2$ uma solução de (1) tal que $f(\phi(0)) = 0$. Observando que

$$\omega(\phi(t)) \wedge df(\phi(t)) = -(f \circ \phi)'(t) dx \wedge dy \,,$$

segue de (3) que $(f \circ \phi)'(t) = 0$, para qualquer $t \in \mathbb{D}(0, r)$. Portanto ϕ é uma solução algébrica de (1) e C é uma curva algébrica invariante.

Reciprocamente se $C = \{f = 0\}$ é uma curva algébrica invariante temos que para qualquer solução $\phi : V \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ contida em C vale que

$$(\omega \wedge df)(\phi(t)) = 0$$

para todo $t \in V$. Portanto $(\omega \wedge df)_{|C} = 0$ e pelo teorema dos zeros de Hilbert [2] f divide $\omega \wedge df$. □

Pode-se interpretar geometricamente a proposição anterior da seguinte forma. O polinômio f, através de suas curvas de nível $\{f = c, c \in \mathbb{C}\}$, define uma decomposição de $\mathbb{C}^2$ em curvas algébricas. O espaço tangente da curva que passa pelo ponto $p \in \mathbb{C}^2$ coincidindo com o núcleo de $df(p)$. Vê-se então que o lugar de zeros de $\omega \wedge df$ coincide com as tangências entre as soluções de (1) e as curvas de nível de f. Nesses termos a proposição nos diz que a curva algébrica $C = \{f = 0\}$ é invariante por (1) se, e somente se, C está contida no lugar de tangências entre as soluções de (1) e a decomposição de $\mathbb{C}^2$ induzida por f.

Exercício 1. *Seja $f \in \mathbb{C}[x, y]$ um polinômio(não necessariamente reduzido) e ω uma 1–forma polinomial. Prove que:*

a. *Se a decomposição de f em polinômios irredutíveis é dada por $f = {f_1}^{n_1} {f_2}^{n_2} \cdots {f_k}^{n_k}$ então*

$$\omega \wedge \frac{df}{f} = \sum_{i=1}^{k} n_i \left(\omega \wedge \frac{df_i}{f_i} \right) .$$

b. *A curva algébrica definida implicitamente por $\{f = 0\}$ é invariante por ω se, e somente se, $\omega \wedge \frac{df}{f}$ é uma 2–forma polinomial.*

3. Campos de Vetores e Derivações

Podemos associar ao sistema de equações diferenciais (1) o campo de vetores

$$X = P(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y)\frac{\partial}{\partial y} .$$

[2] Utilizamos o teorema dos zeros de Hilbert apenas para garantir que se $h \in \mathbb{C}[x, y]$ é tal que $h_{|C} = 0$ então existe $g \in \mathbb{C}[x, y]$ tal que $h = fg$.

O campo X atua sobre $\mathbb{C}(x,y)$ da seguinte forma

$$\begin{array}{rcl} X:\mathbb{C}(x,y) & \to & \mathbb{C}(x,y) \\ f & \mapsto & X(f) := P\dfrac{\partial f}{\partial x} + Q\dfrac{\partial f}{\partial y}\,. \end{array}$$

A aplicação $X:\mathbb{C}(x,y)\to\mathbb{C}(x,y)$ é $\mathbb{C}$-linear e satisfaz a regra de Leibnitz, i.e.,

$$\begin{array}{rcl} X(\lambda f + \mu g) & = & \lambda X(f) + \mu X(g) \\ X(f\cdot g) & = & fX(g) + gX(f)\,, \end{array}$$

onde f e g são funções holomorfas e λ e μ números complexos.

Definição 5 (Derivações). *Uma derivação de $\mathbb{C}(x,y)$ é uma aplicação $D:\mathbb{C}(x,y)\to\mathbb{C}(x,y)$ $\mathbb{C}$–linear e que satisfaz a regra de Leibnitz.*

Portanto qualquer campo polinomial X pode ser visto como uma derivação. Reciprocamente dada uma derivação $D:\mathbb{C}(x,y)\to\mathbb{C}(x,y)$ podemos interpretar D como um campo de vetores racional da forma

$$D(x)\frac{\partial}{\partial x} + D(y)\frac{\partial}{\partial y}\,.$$

Vê-se facilmente que o campo de vetores D é polinomial se, e somente se, $D(\mathbb{C}[x,y])\subset\mathbb{C}[x,y]$.

Se $X = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y}$ e $\omega = Pdy - Qdx$ então verifica-se facilmente que para qualquer função racional $f\in\mathbb{C}(x,y)$

$$\begin{array}{rcl} \omega\wedge df & = & -X(f)dx\wedge dy\,, \\ d\omega & = & \operatorname{div}(X)\,. \end{array}$$

Motivados pelas relações de dualidade acima dizemos que F é uma integral primeira para X se, e somente se, $X(F)=0$. Dizemos também que μ é um fator de integração para X se, e somente se, $\operatorname{div}(\mu X)=0$. Podemos ainda reformular a proposição 1 do seguinte modo.

Proposição 2. *Seja $f\in\mathbb{C}[x,y]$ um polinômio reduzido. A curva algébrica $C=\{f=0\}$ é invariante por (1) se, e somente se,* *existe um polinômio L_f tal que*

$$X(f) = L_f \cdot f\,.$$

CAPíTULO 2

O método de integração de Darboux

Como vimos no capítulo anterior o problema de encontrar uma integral primeira para um sistema de equações diferenciais da forma

$$
\begin{array}{rcl} \frac{dx}{dt} & = & P(x,y) \\ \frac{dy}{dt} & = & Q(x,y) \end{array}, \tag{4}
$$

com $P, Q \in \mathbb{C}[x,y]$, é equivalente a encontrar uma função f tal que $\omega \wedge df = 0$, onde $\omega = Pdy - Qdx$. Neste capítulo faremos uma exposição da estratégia utilizada por Darboux em [**3**] para atacar este problema.

1. Encontrando Integrais Primeiras

Considere a 1-forma polinomial $\omega = Pdy - Qdx$. Se ω admite uma curva algébrica invariante, dada implicitamente por $\{f = 0\}$, vimos no capítulo anterior que

$$\omega \wedge \frac{df}{f} = \Theta_f$$

onde Θ_f é uma 2-forma polinomial.

Definição 6. Seja f uma curva algébrica invariante por ω. Diremos que a 2–forma polinomial Θ_f é um cofator de f.

Observe que se ω possui grau d então os cofatores associados a eventuais curvas algébricas invariantes possuem grau menor ou igual a $d - 1$.

Proposição 3. *Seja ω uma 1–forma polinomial em $\mathbb{C}^2$. Se existem curvas invariantes por ω dadas implicitamente por $f_1, f_2, \dots, f_n$*

e números complexos(não todos nulos) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *tais que*

$$\alpha_1 \Theta_{f_1} + \alpha_2 \Theta_{f_2} + \ldots + \alpha_n \Theta_{f_n} = 0\,,$$

então ω *admite uma integral primeira* F *da forma*

$$F = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \log f_i\,.$$

<u>demonstração:</u> Considere a 1-forma meromorfa η dada por

$$\eta = \alpha_1 \frac{df_1}{f_1} + \alpha_2 \frac{df_2}{f_2} + \ldots + \alpha_n \frac{df_n}{f_n}\,.$$

Claramente η é fechada($d\eta = 0$). Vale ainda que η satisfaz

$$\omega \wedge \eta = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \omega \wedge \frac{df_i}{f_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Theta_{f_i} = 0\,. \tag{5}$$

Portanto a função multivaluada

$$F = \int \eta = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \log f_i\,,$$

é tal que $\omega \wedge dF = \omega \wedge \eta = 0$. Concluímos que F é uma integral primeira para ω. Mais precisamente, ao tomarmos um aberto simplesmente conexo U contido no complementar de $\{f_1 \cdot f_2 \cdots f_n = 0\}$ obtemos que qualquer determinação de F em U é constante ao longo das soluções de ω contidas em U. $\square$

Corolário 1. *Seja* ω *uma* 1*–forma polinomial de grau* d *em* $\mathbb{C}^2$*. Se* ω *admite* $\frac{d(d+1)}{2} + 1$ *curvas algébricas invariantes então* ω *admite uma integral primeira* F *da forma*

$$F = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \log f_i\,.$$

<u>demonstração:</u> Suponha que existem $n = \frac{d(d+1)}{2} + 1$ curvas algébricas invariantes por ω, dadas implicitamente por polinômios irredutíveis $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Os cofatores associados a curvas algébricas invariantes são 2–formas diferenciais de grau menor ou igual a $d-1$. Como o $\mathbb{C}$–espaço vetorial das 2-formas diferenciais de grau $d-1$ possui dimensão igual a $\frac{d(d+1)}{2}$ temos que os cofatores associados às curvas $f_i, i = 1 \ldots n$ são linearmente dependentes. Portanto existem números complexos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tais que

$$\alpha_1 \Theta_{f_1} + \alpha_2 \Theta_{f_2} + \ldots + \alpha_n \Theta_{f_n} = 0 . \tag{6}$$

Pela proposição 3 temos o corolário. □

Exemplo 4. Suponha que $\omega = \alpha x dy + \beta y dx$, onde α e β são números complexos não nulos. Vê-se facilmente que as curvas algébricas descritas implicitamente por $\{x = 0\}$ e $\{y = 0\}$ são invariantes. Calculemos portanto os seus cofatores. O cofator associado a x é dado por

$$\Theta_x = \omega \wedge \frac{dx}{x} = -\alpha dx \wedge dy \ ,$$

enquanto o cofator associado a y é

$$\Theta_y = \omega \wedge \frac{dy}{y} = \beta dx \wedge dy \ .$$

Portanto

$$\beta \Theta_x + \alpha \Theta_y = 0 \ .$$

Conseqüentemente $F = \beta \log x + \alpha \log y$ é uma integral primeira para ω.

2. Critério de Darboux-Jouanolou

Jouanolou, em [**6**], obteve como corolário das idéias de Darboux expostas no início desta seção o belo teorema [1] a seguir.

Teorema 2. *Seja ω uma 1-forma diferencial polinomial e de grau d em $\mathbb{C}^2$. Se ω admite $\frac{d(d+1)}{2} + 2$ curvas algébricas invariantes então ω admite uma integral primeira racional.*

[1]De fato o resultado que aqui apresentamos é uma versão simplificada de um teorema de Jouanolou. O resultado original de Jouanolou é enunciado em um contexto bem mais geral: folheações holomorfas de codimensão um em espaços projetivos.

demonstração: Sejam $f_1, f_2, \dots, f_k$ as $\frac{d(d+1)}{2}+2$ curvas algébricas invariantes por ω. Utilizando os cofatores associados a $f_1, f_2, \dots, f_{k-1}$ podemos construir uma 1-forma racional η_1 da forma

$$\eta_1 = \alpha_1 \frac{df_1}{f_1} + \alpha_2 \frac{df_2}{f_2} + \ldots + \alpha_{k-1} \frac{df_{k-1}}{f_{k-1}},$$

tal que $\omega \wedge \eta_1 = 0$. De forma análoga podemos utilizar os cofatores associados a $f_2, f_3, \dots, f_k$ para construir uma 1-forma racional η_2 da forma

$$\eta_2 = \beta_2 \frac{df_2}{f_2} + \beta_3 \frac{df_3}{f_3} + \ldots + \beta_k \frac{df_k}{f_k},$$

tal que $\omega \wedge \eta_2 = 0$ e $\beta_k \neq 0$.

Como estamos tomando $\beta_k \neq 0$ temos que o conjunto de pólos de η_1 e η_2 são distintos. Dessa forma temos que existe uma função racional não constante F tal que $\eta_1 = F\eta_2$. Tomando a diferencial exterior desta última expressão vemos que

$$d\eta_1 = F d\eta_2 + dF \wedge \eta_2 .$$

Como η_1 e η_2 são fechadas concluímos que $dF \wedge \eta_2 = 0$. Conseqüentemente sendo $\omega \wedge \eta_2 = 0$ temos que $\omega \wedge dF = 0$. Portanto F é uma integral primeira racional para ω. $\square$

Corolário 2. *Seja ω uma 1-forma diferencial polinomial em $\mathbb{C}^2$. Existe uma integral primeira racional para ω se, e somente se, ω admite uma infinidade de curvas algébricas invariantes.*

demonstração: Se ω admite uma integral primeira racional então existem $f, g \in \mathbb{C}[x, y]$, tal que

$$\omega \wedge d\left(\frac{f}{g}\right) = 0,$$

e em particular

$$\omega \wedge (f dg - g df) = 0. \tag{7}$$

Façamos então $f_\lambda = f - \lambda g, \lambda \in \mathbb{C}$. Segue que

$$\omega \wedge df_\lambda = \omega \wedge df - \lambda\omega \wedge dg .$$

De (7) vemos que

$$\omega \wedge \frac{df}{f} = \omega \wedge \frac{dg}{g} .$$

Conseqüentemente

$$\omega \wedge df_\lambda = (f - \lambda g)\omega \wedge \frac{df}{f} = (f - \lambda g)\omega \wedge \frac{dg}{g} .$$

Logo $\omega \wedge \frac{df_\lambda}{f_\lambda}$ é uma 2–forma polinomial, ou seja, os fatores irredutíveis de f_λ são curvas algébricas invariantes. Como λ é uma número complexo arbitrário temos uma infinidade de curvas algébricas invariantes.

Reciprocamente, se ω admite uma infinidade de curvas algébricas invariantes o teorema 2 nos garante que ω admite uma integral primeira racional. □

Corolário 3. *Seja ω uma 1-forma diferencial polinomial em $\mathbb{C}^2$. Então existe uma cota para o grau das curvas álgebricas invariantes por ω.*

demonstração: Segue facilmente do teorema 2. □

3. Encontrando Fatores de Integração

Proposição 4. *Seja ω uma 1–forma polinomial em $\mathbb{C}^2$. Se ω admite curvas algébricas invariantes $f_1, f_2, \dots, f_n$ e números complexos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tais que*

$$\alpha_1 \Theta_{f_1} + \alpha_2 \Theta_{f_2} + \ldots + \alpha_n \Theta_{f_n} = d\omega$$

então ω admite um fator de integração da forma

$$F = \prod_{i=1}^{n} f_i^{\alpha_i} .$$

demonstração: Caso existam números complexos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tais que

$$\alpha_1 \Theta_{f_1} + \alpha_2 \Theta_{f_2} + \ldots + \alpha_n \Theta_{f_n} = d\omega$$

então a 1–forma racional fechada η, dada por

$$\eta = \alpha_1 \frac{df_1}{f_1} + \alpha_2 \frac{df_2}{f_2} + \ldots + \alpha_n \frac{df_n}{f_n}\,,$$

é tal que $d\omega = (-\eta) \wedge \omega$.

Ao considerarmos a função multivaluada

$$F = \exp\left(\int \eta\right) = f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \cdots f_n^{\alpha_n}$$

vemos que $dF = F\eta$ e portanto

$$d(F\omega) = dF \wedge \omega + F d\omega = 0\,.$$

Logo F é um fator de integração para ω. Mais precisamente se tomarmos um aberto simplesmente conexo U contido no complementar de $\{f_1 \cdot f_2 \cdots f_n = 0\}$ temos que para qualquer determinação de F em U a 1–forma $F\omega$ é fechada. Sendo U simplesmente conexo segue que $F\omega$ é de fato exata em U e sua primitiva é uma integral primeira para $\omega_{|U}$. □

Corolário 4. *Seja ω uma 1–forma polinomial de grau d em $\mathbb{C}^2$. Se ω admite $\frac{d(d+1)}{2}$ curvas algébricas invariantes então ω admite um fator de integração ou uma integral primeira da forma*

$$F = \prod_{i=1}^{n} f_i^{\alpha_i}\,. \tag{8}$$

<u>demonstração:</u> Suponha que existem $n = \frac{d(d+1)}{2}$ curvas algébricas invariantes por ω, dadas implicitamente por polinômios irredutíveis $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Os cofatores associados a curvas algébricas invariantes são 2–formas diferenciais de grau menor ou igual a $d-1$. Como o $\mathbb{C}$–espaço vetorial das 2-formas diferenciais de grau $d-1$ possui dimensão igual a $\frac{d(d+1)}{2}$ temos que os cofatores associados às curvas $f_i, i = 1 \ldots n$ ou são linearmente dependentes ou formam uma base para o $\mathbb{C}$–espaço vetorial das 2–formas diferenciais de grau $d-1$. No primeiro caso existem números complexos(não todos nulos) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tais que

$$\alpha_1 \Theta_{f_1} + \alpha_2 \Theta_{f_2} + \ldots + \alpha_n \Theta_{f_n} = 0\,, \tag{9}$$

e pela proposição 3 vemos que

$$F = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \log f_i \, ,$$

é uma integral primeira para ω. Tomando a exponencial de F, que ainda é uma integral primeira, temos uma integral primeira como (8). Quando os cofatores geram o espaço das 2–formas polinomiais de grau menor ou igual a $d-1$ temos que $d\omega$, que é uma 2–forma polinomial de grau menor ou igual a $d-1$, pode ser escrita como uma combinação linear dos Θ_{f_i}. Assim, pela proposição 4 temos um fator de integração da forma (8). □

Exemplo 5 (Equação de Lotka-Volterra revisitada)**.** Considere o sistema de equações diferenciais de Lota-Volterra

$$\begin{array}{rcl} \frac{dx}{dt} & = & \alpha x - \beta xy \\ \frac{dy}{dt} & = & -\gamma y + \delta xy \end{array} , \tag{10}$$

onde α, β, γ e δ são números complexos. Discutir a existência de integrais primeiras para (10) é o mesmo que discutir a existência de integrais primeiras para a 1-forma diferencial

$$\omega = y(\gamma - \delta x)dx + x(\alpha - \beta y)dy \, .$$

Verifica-se facilmente que as curvas algébricas dadas implicitamente por $\{x = 0\}$ e $\{y = 0\}$ são invariantes, e seus cofatores são dados por

$$\begin{array}{rcccl} \Theta_x & = & \omega \wedge \frac{dx}{x} & = & (\beta y - \alpha)dx \wedge dy \, , \quad \text{e} \\ \Theta_y & = & \omega \wedge \frac{dy}{y} & = & (\gamma - \delta x)dx \wedge dy. \end{array}$$

Em geral estes cofatores são linearmente independentes. Entretanto ao considerarmos a diferencial de ω, vemos que

$$d\omega = (\alpha - \beta y) - (\gamma - \delta x)dx \wedge dy = -\Theta_x - \Theta_y \, ,$$

e portanto

$$d\omega = \omega \wedge \left(-\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} \right) \, .$$

Logo vemos que $(xy)^{-1}$ é um fator de integração para ω e temos como integral primeira a função multivaluada F dada pela integral de $(xy)^{-1}\omega$, ou seja,

$$\begin{aligned} F &= \int \frac{\omega}{xy} \\ &= \int (\gamma - \delta x)\frac{dx}{x} + (\alpha - \beta y)\frac{dy}{y} \\ &= -\delta x - \beta y + \gamma \log x + \alpha \log y \,. \end{aligned}$$

Proposição 5. Seja ω uma 1–forma polinomial. Se existem duas formas racionais fechadas η_1 e η_2 tais que

$$d\omega = \eta_i \wedge \omega \qquad i \in \{1,2\}$$

então ω admite um fator de integração racional. Em particular se ω admite dois fatores de integração da forma

$$\prod_{i=1}^{k} f_i^{\alpha_i}$$

então ω admite um fator de integração racional.

demonstração: Considere a 1–forma $\eta_0 = \eta_1 - \eta_2$. Segue das hipóteses que $\omega \wedge \eta_0 = 0$. Portanto existe uma função racional h tal que $h \cdot \omega = \eta_0$. Como η_0 é fechada temos que h é um fator de integração racional para ω. □

Resumimos na tabela a seguir os tipos integrais primeiras obtidas ao longo do capítulo através de relações lineares entre os cofatores associados a curvas algébricas invariantes e a diferencial exterior da 1–forma a ser integrada.

Relações	Tipo de Integral primeira
$\sum \alpha_i \Theta_{f_i} = d\omega$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$	$\int f_1^{\alpha_1} \cdots f_k^{\alpha_k} \omega$
$\sum \alpha_i \Theta_{f_i} = 0$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$	$\sum \alpha_i \log f_i$
$\sum \alpha_i \Theta_{f_i} = 0$, $\alpha_i \in \mathbb{Q}$	F/G com $F, G \in \mathbb{C}[x,y]$

Tabela 1: Relações entre cofatores e integrais primeiras

CAPíTULO 3

Integrabilidade na presença de simetrias

> The earliest researches in the subject of differential equations were devoted to the problem of integration in the crude sense, that is to say to finding devices by which particular equations or classes of equations could be forced to yeld up their solutions directly, or be reduced to a more tractable form.(...) Thus on the one hand, there exists a number of apparently disconnected methods of integration, each adapted only to one particular class of equations(...)
>
> This heterogeneous mass of knowledge was coordinated in a very striking way by means of the theory of continuous groups. The older methods of integration were shown to depend upon one general principle, which in its turn proved to be a powerful instrument for breaking newground.(...)
>
> E. L. Ince [**5**]

Neste capítulo vamos investigar a correlação entre simetrias e integrabilidade. Buscamos uma abordagem elementar e baseada em propriedades básicas do colchete de Lie entre campos de vetores. Apesar das idéias terem forte apelo geométrico escolhemos uma abordagem que depende apenas de álgebra linear e de algumas das propriedades de campos de vetores e derivações expostas no capítulo 1.

Na última seção apresentamos a caracterização de 1–formas racionais fechadas em $\mathbb{C}^2$. Com isso podemos precisar explicitamente a forma das integrais primeiras de equações polinomiais que admitem simetrias infinitesimais. Esta caracterização também terá importância no próximo capítulo.

1. Colchete de Lie e simetrias infinitesimais

Definição 7. Sejam X e Y campos de vetores holomorfos em $\mathbb{C}^2$. O *colchete de Lie* de X e Y, denotado por $[X,Y]$, é o campo de vetor holomorfo dado pela expressão

$$(X(Y(x)) - Y(X(x)))\frac{\partial}{\partial x} + (X(Y(y)) - Y(X(y)))\frac{\partial}{\partial y}.$$

Exemplo 6. Sejam X e Y são campos lineares em $\mathbb{C}^2$ dados por

$$\begin{aligned} X &= a\tfrac{\partial}{\partial x} + b\tfrac{\partial}{\partial y}, \\ Y &= cx\tfrac{\partial}{\partial x} + dy\tfrac{\partial}{\partial y}, \end{aligned}$$

com a, b, c e d números complexos, então o colchete entre X e Y é

$$[X,Y] = ac\frac{\partial}{\partial x} + bd\frac{\partial}{\partial y}.$$

Definição 8. Seja X um campo de vetores racional em $\mathbb{C}^2$. Dizemos que um campo de vetores racional Y é uma simetria infinitesimal de X se existe uma função racional $\mu \in \mathbb{C}(x,y)$ tal que $[X,Y] = \mu \cdot X$.

Exemplo 7. Considere X e Y como no exemplo 6 e suponha que $ac \neq 0$ e $bd \neq 0$. Neste caso, se existe $\lambda \in \mathbb{C}(x,y)$ tal que

$$[X,Y] = \lambda X,$$

verifica-se que λ é de fato um função racional constante, ou seja, $\lambda \in \mathbb{C}$. Explicitando a, b, c e d verifica-se que Y é uma simetria infinitesimal de X se, e somente se, Y é um múltiplo do campo radial, i.e.,

$$Y = \lambda\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Proposição 6. *Sejam X e Y campos de vetores racionais em $\mathbb{C}^2$ e $T = \det(X,Y)$. Se $T \neq 0$ então*

$$[X,Y] = \left(\frac{Y(T)}{T} + \operatorname{div}(Y)\right)X + \left(\frac{X(T)}{T} + \operatorname{div}(X)\right)Y.$$

demonstração: Suponha que $X = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$ e $Y = c\frac{\partial}{\partial x} + d\frac{\partial}{\partial y}$. Portanto

$$T = \det(X,Y) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc\,,$$

e

$$[X,Y] = (X(c) - Y(a))\,\frac{\partial}{\partial x} + (X(d) - Y(b))\,\frac{\partial}{\partial y},.$$

Decompondo $[X,Y]$ com respeito a X e Y temos que

$$[X,Y] = \frac{\det([X,Y],Y)}{T}X - \frac{\det([X,Y],X)}{T}Y\,.$$

Portanto a prova da proposição reduz-se a demonstrar que

$$\begin{aligned} \det([X,Y],X) &= X(T) - T\cdot \operatorname{div}(X) \quad \text{e} \\ \det([X,Y],Y) &= Y(T) - T\cdot \operatorname{div}(Y)\,. \end{aligned}$$

Mostremos então a validade da primeira igualdade.

Utilizando a multilinearidade do determinante vemos que

$$X(T) = \det\begin{pmatrix} X(a) & c \\ X(b) & d \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a & X(c) \\ b & X(d) \end{pmatrix}\,, \tag{11}$$

e que

$$\det([X,Y],X) = \det\begin{pmatrix} X(c) & a \\ X(d) & b \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} Y(a) & a \\ Y(b) & b \end{pmatrix}\,. \tag{12}$$

Conseqüentemente, após somar (11) e (12),

$$X(T) + \det([X,Y],X) = \det\begin{pmatrix} X(a) & c \\ X(b) & d \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} Y(a) & a \\ Y(b) & b \end{pmatrix}\,.$$

Desenvolvendo a expressão a esquerda verifica-se que

$$X(T) + \det([X,Y],X) = (ad - bc)\cdot \operatorname{div}X = T\cdot \operatorname{div}X\,,$$

e com isso concluímos que

$$\det([X,Y],X) = X(T) - T\cdot \operatorname{div}(X)\,.$$

Cálculos completamente análogos mostram que

$$\det([X,Y],Y) = Y(T) - T\cdot \operatorname{div}(Y)\,,$$

e temos a validade da proposição. □

2. Simetrias e fatores de integração racionais

Teorema 3. *Seja X um campo de vetores polinomial em $\mathbb{C}^2$. Existe um fator de integração racional para X se, e somente se, X admite uma simetria infinitesimal.*

demonstração: Suponha que $X = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y}$ admite uma simetria infinitesimal. Por definição existe um campo de vetores racional Y e uma função racional μ tal que

$$[X, Y] = \mu X\,.$$

Segue da proposição 6 que $T = \det(X, Y)$ é tal que

$$\frac{X(T)}{T} + \operatorname{div}(X) = 0\,.$$

Conseqüentemente temos que

$$\operatorname{div}(TX) = \frac{\partial(TP)}{\partial x} + \frac{\partial(TQ)}{\partial y} = T\left(\frac{X(T)}{T} + \operatorname{div}(X)\right) = 0\,.$$

Concluímos que T é uma fator de integração racional para X.

Se por outro lado X admite um fator de integração racional, o qual denotaremos por λ, temos que

$$Y = \frac{1}{\operatorname{div} X}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

é tal que

$$T = \det(X, Y) = -\frac{X(\lambda)}{\operatorname{div} X}\,.$$

Como λ é fator de integração para X vale que

$$0 = \operatorname{div}(\lambda X) = \lambda \operatorname{div} X + X(\lambda)\,,$$

logo $T = \lambda$. Pela proposição 6 temos que

$$[X, Y] = \left(\frac{Y(T)}{T} + \operatorname{div}(Y)\right) X\,.$$

Com isso vemos que Y é uma simetria infinitesimal para X e concluímos a prova do teorema. $\square$

3. Formas racionais fechadas

Uma consequência interessante do teorema que acabamos de demonstrar é que para obter uma descrição explícita das integrais primeiras que podem ser obtidas utilizando simetrias infinitesimais basta descrever os campos de vetores racionais de divergente nulo ou, equivalentemente, descrever as 1-formas racionais fechadas.

Teorema 4. *Seja η uma 1-forma racional fechada η em $\mathbb{C}^2$. Então η pode ser escrita na seguinte forma:*

$$\eta = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{df_j}{f_j} + d\left(\frac{g}{f_1^{n_1}\cdots f_p^{n_p}}\right) ,$$

onde $n_i \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{C}^*, g, f_j \in \mathbb{C}[x,y]$ e os f_j são polinômios irredutíveis. As curvas álgebricas $f_j = 0$ são os pólos de η e os λ_j's são os resíduos de η em torno de $f_j = 0$:

$$\lambda_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j} \eta$$

onde γ_j são pequenos círculos em torno de $f_j = 0$.

demonstração: Sejam $f_1, f_2, \dots, f_p$ e $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ como no enunciado. Então a 1–forma meromorfa

$$\Omega = \eta - \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{df_j}{f_j}$$

é fechada e satisfaz

$$\int_{\gamma_j} \Omega = 0 \ , \tag{13}$$

para qualquer $j = 1, \dots, p$. De fato

$$\int_{\gamma_k} \Omega = \lambda_k \cdot 2\pi i - \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \int_{\gamma_k} \frac{df_j}{f_j} \ .$$

Via a fórmula de mudança de variáveis vemos que

$$\int_{\gamma_k} \frac{df_j}{f_j} = \int_{f_j\circ\gamma_k} \frac{dz}{z} = \begin{cases} 2\pi i & \text{se } k = j, \\ 0 & \text{se } k \neq j \end{cases}$$

pois estamos supondo os f_j irredutíveis. Provamos assim (13).

Utilizaremos agora o fato não trivial de que o primeiro grupo de homologia de $\mathbb{C}^2 \setminus \{f_1 \cdot f_2 \cdots f_p = 0\}$ com coeficientes complexos é gerado pelos γ_j, ver [**1**] e referências lá citadas. Em termos mais concretos para toda 1-forma Ω definida no aberto $U = \mathbb{C}^2 \setminus \{f_1 \cdot f_2 \cdots f_p = 0\}$ satisfazendo (13) temos que existe uma função holomorfa $H : U \to \mathbb{C}$ tal que

$$\Omega = dH\,. \tag{14}$$

Resta mostrar que a função holomorfa H definida no aberto U é de fato uma função racional, i.e., $H \in \mathbb{C}(x, y)$.

Para tanto iremos utilizar a seguinte propriedade das funções holomorfas definidas em abertos do plano complexo[1]: se para todos x_0 e y_0 fixados as funções $z \mapsto H(x_0, z)$ e $z \mapsto H(z, y_0)$ são racionais então H é uma função racional.

Suponha, sem perda de generalidade, que o conjunto de pólos de Ω não contém retas da forma $x - c = 0$ e $y - c = 0$, onde $c \in \mathbb{C}$. Considere então a função $f_c(z) = H(c, z)$, para algum $c \in \mathbb{C}$. Se $i_c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ denota a aplicação de inclusão dada por $z \mapsto (c, z)$ então $f_c = i_c^* H$ e segue de (14) que

$$df_c = di_c^* H = i_c^* \Omega = \frac{p(z)}{q(z)} dz\,, \quad \text{com } p, q \in \mathbb{C}[z]\,.$$

Claramente podemos tomar $q \in \mathbb{C}[z]$ mônico e ao denotarmos por $a_1, a_2, \ldots, a_p \in \mathbb{C}$ as suas raízes podemos escrever

$$q(z) = (x - a_1)^{n_1} (x - a_2)^{n_2} \cdots (x - a_p)^{n_p}$$

onde n_i, $i = 1 \ldots r$, são inteiros positivos. Considere então a decomposição em frações parciais de $\frac{p(z)}{q(z)}$, i.e.,

$$\frac{p(z)}{q(z)} = r(z) + \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\alpha_{ij}}{(x - a_i)^j}\,, \quad \text{onde } r \in \mathbb{C}[x] \text{ e } \alpha_{ij} \in \mathbb{C}.$$

Pela definição de Ω pode-se verificar que $\alpha_{i1} = 0$ para qualquer $i = 1 \ldots p$. Com isso podemos garantir que a primitiva de $\frac{p(z)}{q(z)} dz$, e

[1] Veja exercício 10 na página 72 de [**2**].

portanto f_c, é uma função racional para todo $c \in \mathbb{C}$. Argumentando da mesma forma podemos garantir que as funções $z \mapsto H(z,c)$ também são racionais para todo $c \in \mathbb{C}$. Concluímos que H é de fato uma função racional e temos assim a prova do teorema. $\square$

O leitor pode encontrar uma versão do teorema 4 para 1–formas meromorfas fechadas em [**1**].

Exercício 2. *Seja X um campo de vetores polinomial em $\mathbb{C}^2$. Prove que X admite uma simetria infinitesimal se, e somente se, X admite uma integral primeira da forma*

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \log f_j + \left(\frac{g}{f_1^{n_1} \cdots f_p^{n_p}} \right) ,$$

onde $n_i \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{C}^*, g, f_j \in \mathbb{C}[x,y]$ e os f_j são polinômios irredutíveis.

CAPíTULO 4

Integrais primeiras liouvillianas

> During the period between 1833 and 1841, J. Liouville presented a theory of integration in finite terms. He determined the form which the integral of an algebraic function must have when the integral can be expressed with the operations of elementary analysis, carried out a finite number of times.
>
> J. F. Ritt [**8**]

Neste capítulo iremos caracterizar as equações diferenciais polinomiais no complexo que podem ser integradas via os métodos do cálculo diferencial. O primeiro passo para tanto é formalizar a vaga sentença acima, e o ambiente natural para faze-lo é a teoria de corpos diferenciáveis, parte da álgebra diferencial. Não iremos nos aprofundar no assunto, e ainda falando vagamente, podemos dizer que o resultado que apresentaremos nesse capítulo está para a teoria de corpos diferenciáveis assim como a caracterização dos números construtíveis [1] está para a teoria de corpos.

1. Rudimentos de Álgebra Diferencial

Estamos interessados em descrever as 1-formas polinomiais que possam ser integradas através de uma sequência finita de operações familiares a um aluno de cálculo diferencial. De forma imprecisa, uma função é dita liouvilliana se pode ser escrita a partir das funções racionais utilizando uma sequência finita das seguintes operações:

1. soma e produto;
2. diferenciação;

[1] Aqueles que podem ser *construídos* a partir dos inteiros utilizando régua e compasso.

3. integração de 1-formas fechadas;
4. exponenciação ;
5. solução de equações algébricas.

Para definir o conceito de função liouvilliana de modo mais preciso utilizaremos alguns conceitos básicos de álgebra diferencial.

Definição 9 (corpo diferencial)**.** Seja K um corpo e Δ um conjunto finito de derivações de K. Dizemos que o par (K, Δ) é um *corpo diferencial* se para quaisquer $\delta_1, \delta_2 \in \Delta$ e $f \in K$ temos que $\delta_2(\delta_1(f)) = \delta_1(\delta_2(f))$.

Exemplo 8. Segue do lema de Schwarz que

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}$$

para qualquer $f \in \mathbb{C}(x, y)$. Portanto o par $\Big(\mathbb{C}(x, y), \{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\}\Big)$ é um corpo diferencial.

No que segue iremos trabalhar apenas com o corpo diferencial $\Big(\mathbb{C}(x, y), \{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\}\Big)$ e extensões liouvillianas deste.

Definição 10 (extensão liouvilliana)**.** Uma *extensão liouvilliana* (K, Δ) de $\Big(\mathbb{C}(x, y), \{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\}\Big)$ é um corpo diferencial obtido da seguinte maneira. Existe uma torre de corpos diferenciais (K_i, Δ_i), $i = 1, \dots, n$, tal que:

1. $(K_0, \Delta_0) = \Big(\mathbb{C}(x, y), \{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\}\Big)$ e $(K_n, \Delta_n) = (K, \Delta)$;
2. $K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n = K$;
3. $\Delta_i|_{K_{i-1}} = \Delta_{i-1}$ e denotamos $\Delta_i = \{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\}$.
4. O corpo de constantes de K_i coincide com $\mathbb{C}$, isto é
$$\left\{ f \in K_i \,\middle|\, \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \right\} = \mathbb{C}.$$
5. $K_i = K_{i-1}(t_i)$ onde t_i é de um dos 3 tipos abaixo:
   6.a. t_i é algébrico sobre K_{i-1},
   6.b. $\dfrac{\partial t_i}{\partial x}, \dfrac{\partial t_i}{\partial y} \in K_{i-1}$.

6.c. $\dfrac{1}{t_i}\dfrac{\partial t_i}{\partial x}, \dfrac{1}{t_i}\dfrac{\partial t_i}{\partial y} \in K_{i-1}$.

Comentário 2. Se f é um elemento de K, por construção f pode ser visto como uma função analítica em um certo aberto U_f de $\mathbf{C}^2$.

A condição 4.b nos permite adicionar a primitiva de uma forma diferencial fechada com coeficientes em K_{i-1}; e 4.c permite que adicionemos a exponencial de um elemento de K_{i-1}.

Se K é uma extensão liouvilliana de $\mathbb{C}(x,y)$ então para todo elemento $f \in K$ podemos considerar a sua diferencial exterior como

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\,,$$

e portanto df é uma 1-forma com coeficientes em K. Denotaremos o K-módulo de 1-formas com coeficientes em K por Ω^1_K, i.e., α pertence a Ω^1_K se, e somente se, α se escreve como $\alpha = adx + bdy$, onde $a, b \in K$.

Utilizando as formas diferenciais podemos reformular as condições 4.b e 4.c na definição de extensão liouvilliana como

4.b. $dt_i \in \Omega^1_{K_{i-1}}$.

4.c. $\frac{dt_i}{t_i} \in \Omega^1_{K_{i-1}}$.

Definição 11. *Seja ω uma 1-forma racional em $\mathbb{C}^2$. Dizemos que ω possui uma integral primeira liouvilliana se existe uma extensão liouvilliana $(K, (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}))$ de $\mathbb{C}(x,y)$ e um elemento $f \in K$ tal que $df \neq 0$ e*

$$\omega \wedge df = 0\,.$$

2. Critério de Singer

O próximo resultado, devido a Singer[**9**], caracteriza as 1–forma racionais $\mathbb{C}^2$ que admitem integral primeira liouvilliana.

Teorema 5. *Se ω é uma 1-forma racional em $\mathbb{C}^2$ então ω admite uma integral primeira liouvilliana se, e somente se, existe uma 1-forma racional fechada η tal que $d\omega = \eta \wedge \omega$.*

Como veremos a seguir a essência da prova do teorema está no seguinte lema.

Lema 1. *Seja K um extensão de $(\mathbb{C}(x,y),(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}))$ e $K(t)$ uma extensão de K tal que ou (a) t é algébrico, ou (b) $\frac{dt}{t}\in\Omega^1_K$ ou (c) $dt\in\Omega^1_K$. Se $\omega\in\Omega^1_K$ então*

$$\begin{aligned} d\omega &= \eta\wedge\omega \\ d\eta &= 0 \end{aligned}$$

admite solução em Ω^1_K se, e somente se, admite solução em $\Omega^1_{K(t)}$.

prova: É claro que qualquer solução em Ω^1_K também é solução em $\Omega^1_{K(t)}$. Suponha então que temos um solução η em $\Omega^1_{K(t)}$. Vamos analisar cada possibilidade para t separadamente.

(a) t é algébrico. Seja σ uma automorfismo de Galois da extensão $K(t):K$. Se η é fechada então $\sigma^*\eta$ também é , e portanto

$$dw=\left(\frac{1}{[K(t):K]}\sum_{\sigma\in Gal(K(t):K)}\sigma^*\eta\right)\wedge\omega\,.$$

Temos portanto uma solução em Ω^1_K.

(b) $\frac{dt}{t}\in\Omega^1_K$. Uma solução $\eta\in\Omega^1_{K(t)}$ pode ser escrita como

$$\eta=a(t)dx+b(t)dy\ ,$$

onde $a,b\in K(t)$. Considerando a série de Laurent de a e b podemos escrever η na forma

$$\eta=\sum_{i=-k}^{\infty}t^i\eta_i\ \text{ com } \eta_i\in\Omega^1_K.$$

Como t é transcendente vemos que $d\omega=\eta\wedge\omega$ implica que

$$\eta_i\wedge\omega=\begin{cases} d\omega & \text{para } i=0,\\ 0 & \text{para } i\neq 0.\end{cases}$$

Sendo η fechada temos que

$$0=\sum_{i=-k}^{\infty} t^i\left(d\eta_i + i\frac{dt}{t}\wedge\eta_i\right). \tag{15}$$

Observando que para todo inteiro i maior ou igual a $-k$

$$d\eta_i + i\frac{dt}{t}\wedge\eta_i \in \Omega^1_K$$

segue de (15) que $d\eta_0 = 0$. Conseqüentemente $\eta_0 \in \Omega^1_K$ é uma solução.

(c) $dt \in \Omega^1_K$. Escreva η como

$$\eta = \frac{\sum_{i=0}^{k} t^i\eta_i}{p(t)}$$

onde $\eta_i \in \Omega^1_K$ e $p(t)$ é um polinômio mônico em $K[t]$ de grau l. Diferenciando obtemos

$$0 = p(t)\left(\sum_{i=0}^{k} t^i d\eta_i + it^{i-1}dt\wedge\eta_i\right) - \left(\sum_{i=0}^{k} t^i\eta_i\right)\wedge dp(t).$$

Lembrando que $p(t)$ é mônico, vê-se que o coeficiente de t^{l+k} na expressão acima é $d\eta_k$, e portanto $d\eta_k = 0$. Como $d\omega = \eta\wedge\omega$ temos que

$$p(t)d\omega = \left(\sum_{i=0}^{k} t^i\eta_i\right)\wedge\omega,$$

e portanto k é maior ou igual a l. Se $k = l$ então $d\omega = \eta_k\wedge\omega$ e temos uma solução em Ω^1_K. Caso $k > l$ então $\eta_k\wedge\omega = 0$ e conseqüentemente existe $h \in K$ tal que $\eta_k = h\omega$. Logo temos uma solução em Ω^1_K dada por

$$d\omega = -\frac{dh}{h}\wedge\omega.$$

□

Prova do teorema 5: Suponha que exista η fechada tal que $d\omega = \eta\wedge\omega$. Então existe uma extensão liouvilliana K de $\mathbb{C}(x,y)$ onde podemos definir $F = \exp\left(\int\eta\right)$. Claramente, F satisfaz $dF = F\cdot\eta$.

Assim

$$d\left(\frac{\omega}{F}\right) = \frac{F d\omega - dF \wedge \omega}{F^2} = 0\,.$$

Ao adjuntar a primitiva de $\frac{\omega}{F}$ à K obtemos uma extensão liouvilliana de K, e consequentemente de $\mathbb{C}[x, y]$, onde ω admite uma integral primeira.

Reciprocamente se ω admite uma integral primeira F na extensão liouvilliana K então existe $h \in K$ tal que $dF = h\omega$. Como anteriormente

$$dw = -\frac{dh}{h} \wedge \omega\,.$$

Aplicando repetidas vezes o lema 1 vemos que existe uma 1-forma racional η em $\mathbb{C}^2$ tal que $dw = \eta \wedge \omega$. □

Corolário 5. *Seja ω uma 1-forma racional em $\mathbb{C}^2$. Se ω admite uma integral primeira liouvilliana então ω admite uma integral primeira liouvilliana da forma*

$$\int f_1^{\lambda_1} \cdot f_2^{\lambda_2} \cdots f_k^{\lambda_k} e^{\frac{g}{f_1^{n_1} \cdots f_k^{n_k}}} \omega\,,$$

onde $g, f_i \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$ e $n_i \in \mathbb{N}$ para $i = 1, \ldots, k$.

prova: Pelo teorema 5 se ω possui integral primeira liouvilliana então existe uma 1-forma racional fechada η cuja exponencial da integral é uma fator integrante de ω, i.e., ω admite uma integral primeira liouvilliana da forma

$$\int e^{\int \eta} \omega\,.$$

Integrando η obtemos o resultado. □

3. O método de Darboux revisitado

Assumindo que somos capazes de determinar todas as curvas algébricas invariantes por uma 1-forma polinomial ω em $\mathbb{C}^2$, o método de integração de Darboux, como apresentado no capítulo

2, não está muito longe de determinar se ω admite uma integral primeira liouvilliana. De fato o método de Darboux baseia-se na busca 1-formas diferenciais da forma

$$\eta = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \frac{df_i}{f_i}$$

tais que

$$d\omega = \eta \wedge \omega \, .$$

Por outro lado, o teorema 4 nos diz que 1–forma racional fechada em $\mathbb{C}^2$ é da forma

$$\eta = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{df_j}{f_j} + d\left(\frac{g}{f_1^{n_1} \cdots f_p^{n_p}} \right) .$$

Resta portanto alterar o método de Darboux para que este passe a levar em conta a contribuição dada pelo termo

$$d\left(\frac{g}{f_1^{n_1} \cdots f_p^{n_p}} \right)$$

na expressão de η acima.

Definição 12. Seja ω uma 1–forma diferencial polinomial de grau d e $f, g \in \mathbb{C}[x, y]$ polinômios sem fatores comuns. Dizemos que $h = \exp(g/f)$ é um *fator exponencial* da 1–forma polinomial ω, se

$$\omega \wedge \frac{dh}{h}$$

é uma 2–forma polinomial de grau menor ou igual a $d - 1$. Esta 2–forma é chamada de *cofator* do fator exponencial h. Denotaremos o cofator de h por Θ_h.

Proposição 7. *Seja ω uma 1–forma polinomial de grau d e $h = \exp(g/f)$ um fator exponencial para ω. Então valem as seguintes afirmações*

1. *A curva algébrica $\{f = 0\}$ é invariante por ω;*
2. *O polinômio $g \in \mathbb{C}[x, y]$ satisfaz a seguinte equação*

$$\omega \wedge dg = g\Theta_f + f\Theta_h \, .$$

demonstração: Deixamos a prova da proposição como exercício para o leitor. $\square$

Utilizando argumentos análogos aos utilizados ao longo do capítulo 2 e a caracterização das formas racionais fechadas o leitor poderá facilmente provar a seguinte proposição.

Proposição 8. *Seja ω uma 1-forma polinomial em $\mathbb{C}^2$. Se ω admite p curvas algébricas invariantes distintas f_i, for $i = 1, \dots, p$, e q fatores exponenciais independentes e_j, for $j = 1, \dots, q$, então valem as seguintes afirmações .*

(a) *Se existem $\lambda_i, \rho_j \in \mathbb{C}$ não todos zero tais que*

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \Theta_{f_i} + \sum_{j=1}^{q} \rho_j \Theta_{e_j} = d\omega \,,$$

então a função (multi-valuada)

$$\int f_1^{\lambda_1} \cdots f_k^{\lambda_k} e_1^{\rho_1} \cdots e_q^{\rho_q} \omega$$

é uma integral primeira para ω.

(b) *Se existem $\lambda_i, \rho_j \in \mathbb{C}$ tais que*

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \Theta_{f_i} + \sum_{j=1}^{q} \rho_j \Theta_{e_j} = 0 \,,$$

então a função(multivaluada)

$$F = \sum \lambda_i \log f_i + \sum \rho_j \log e_j$$

é uma integral primeira de ω. Quando todos os λ_i são inteiros ω admite uma integral primeira monovaluada dada por

$$\exp(F) = {f_1}^{\lambda_1} \cdots {f_p}^{\lambda_k} {e_1}^{\rho_1} \cdots {e_q}^{\rho_q} \,.$$

(c) *Se existem $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ tais que*

$$\sum \lambda_i \Theta_{f_i} = d\omega$$

então existem $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $n_i \in \mathbb{N}$ e $g \in \mathbb{C}[x, y]$ tais que a função

$$f_1^{\alpha_1} \cdot f_2^{\alpha_2} \cdots f_p^{\alpha_p} \exp\left(\frac{g}{f_1^{n_1} \cdots f_p^{n_p}} \right)$$

é uma integral primeira para ω.

Resumimos na tabela a seguir os tipos integrais primeiras obtidas ao longo do texto. Segue do Teorema de Singer que qualquer 1–forma polinomial que possua integral primeira liouvilliana enquadra-se em ao menos um dos casos da tabela.

Relações	Tipo de Integral primeira
$\sum \alpha_i \Theta_{f_i} + \sum \beta_j \Theta_{e_j} = d\omega$	$\int f_1^{\alpha_1} \cdots f_k^{\alpha_k} e_1^{\beta_1} \cdots e_l^{\beta_l} \omega$
$\sum \alpha_i \Theta_{f_i} + \sum \beta_j \Theta_{e_j} = 0$	$\sum \alpha_i \log f_i + \sum \beta_j \log e_j$
$\sum \alpha_i \Theta_{f_i} = d\omega \ , \ \alpha_i \in \mathbb{Z}$	$f_1^{\lambda_1} \cdot f_2^{\lambda_2} \cdots f_k^{\lambda_k} \exp\left(\frac{g}{f_1^{n_1} \cdots f_k^{n_k}}\right)$
$\sum \alpha_i \Theta_{f_i} = 0 \ , \ \alpha_i \in \mathbb{Q}$	$\frac{F}{G}$ com $F, G \in \mathbb{C}[x, y]$

Tabela 2: Relações entre cofatores e integrais primeiras

Para que todo o processo de integração via o método de Darboux possa ser considerado um algoritmo para decidir se uma equação diferencial admite, ou não, uma integral primeira liouvilliana basta que possamos resolver algoritmicamente dois problemas.

1. Dada uma 1–forma polinomial ω limitar o grau das curvas algébricas invariantes.
2. Dada uma 1–forma polinomial ω e uma curva algébrica invariante $\{f = 0\}$ limitar o grau dos polinômios $g \in \mathbb{C}[x, y]$ tal que $\exp(g/f^k), k \in \mathbb{N}$, é um fator exponencial para ω.

De fato se resolvemos (1) e (2) podemos, em princípio, determinar todas as curvas invariantes e todos os fatores exponenciais que ω admite. De posse dessa informação o método de Darboux(revisitado) reduz o problema de integração a um simples problema de álgebra linear.

CAPíTULO 5

Leituras Suplementares

1. Integrabilidade

1.1. Integrais elementares e o método de Darboux. Uma variante do conceito de função liouvilliana é o conceito de função elementar. Uma função é dita elementar se pode ser obtida a partir das funções racionais utilizando um número finito das seguintes operações: soma e produto; diferenciação; tomar o logaritmo de uma função; exponenciação ; e solução de equações algébricas. A analogia com as funções liouvillianas é clara. Apenas substituímos a integração 1-formas fechadas por calcular o logaritmo de uma função. Em particular toda função elementar é liouvilliana.

As 1–formas polinomiais que possuem integral primeira elementar foram caracterizadas por Prelle e Singer. Listamos a seguir, além do artigo original de Prelle-Singer [PS], artigos do tipo *survey* que descrevem tanto o método de Darboux(em alguns casos apresentando interessantes aplicações) quanto a caracterização de Singer. A única exceção é o artigo [MM] onde são discutidas questões relacionadas a implementação do método de Darboux em sistemas de computação algébrica .

[CL] C. Christopher e J. Llibre, *Algebraic aspects of integrability for polynomial systems*, Qual. Theory Dyn. Syst. **1** (1999), no. 1, 71–95.

[MM] Y.-K. Man e M. MacCallum, *A rational approach to the Prelle-Singer algorithm*, J. Symbolic Comput. **24** (1997), no. 1, 31–43.

[PS] M. J. Prelle e M. F. Singer, *Elementary first integrals of differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **279** (1983), no. 1, 215–229.

[S1] D. Schlomiuk, *Elementary first integrals and algebraic invariant curves of differential equations*, Exposition. Math. **11** (1993), no. 5, 433–454.

[S2] D. Schlomiuk, *Basic algebro-geometric concepts in the study of planar polynomial vector fields*, Proceedings of the Symposium on Planar Vector Fields (Lleida, 1996). Publ. Mat. **41** (1997), no. 1, 269–295.

1.2. Integrabilidade e Holonomia. Quando investigamos questões como a integrabilidade de uma equação diferencial, não estamos interessados na parametrização das soluções, mas sim na decomposição do espaço de fase induzida pela equação. Desse modo somos levados naturalmente ao contexto da teoria de folheações.

Um ponto de vista que tem sido bastante explorado nos últimos anos é relacionar o grupo de holonomia de curvas algébricas invariantes com estruturas transversais e integrais primeiras da folheação. Listamos a seguir alguns artigos que exploram este ponto de vista.

Incluímos também artigos que tratam da relação entre integrabilidade e linearização no caso local e que estudam o grupo de monodromia das integrais primeiras liouvillianas.

[BT] M. Berthier e F. Touzet, *Sur l'intégration des équations différentielles holomorphes réduites en dimension deux*, Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) **30** (1999), no. 3, 247–286.

[CS1] C. Camacho e B. Azevedo Scárdua, *Beyond Liouvillian transcendence*, Math. Res. Lett. **6** (1999), no. 1, 31–41.

[CS2] C. Camacho; B. Azevedo Scárdua, *Holomorphic foliations with Liouvillian first integrals*, Ergodic Theory Dynam. Systems **21** (2001), no. 3, 717–756.

[CeS] D. Cerveau and P. Sad, *Liouvillian integration and Bernoulli foliations*, Transactions of the American Mathematical Society **350**(8) (1998), 3065–3081.

[P] E. Paul, *Feuilletages holomorphes singuliers à holonomie résoluble.*, J. Reine Angew. Math. **514** (1999), 9–70.

[Sc] B. A. Scárdua, *Transversely affine and transversely projective foliations*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Quatrième Série **30** (1997), 169–204.

[T] F. Touzet, *Sur les intégrales premières dans la classe de Nilsson d'équations différentielles holomorphes.*, Trans. Amer. Math. Soc. 352 (2000), no. 4, 1601–1622.

[Zo1] H. Zoladek, *The extended monodromy group and Liouvillian first integrals*, J. Dynam. Control Systems **4** (1998), no. 1, 1–28.

1.3. Generalizações do critério de Darboux-Jouanolou. O critério de Darboux–Jouanolou pode ser estendido sob diferentes formas como testemunham os artigos a seguir.

[G] E. Ghys, *À propos d'un théorème de J.–P. Jouanolou concernant les feuilles fermées des feuilletages holomorphes*, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo **49** 1, 2000

[GM] X. Gomez–Mont, *Integrals for holomorphic foliations with singularities having all leaves compact*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **39** 2, 1989

[L] J.-M. Lion, *Un critère de Darboux d'existence d'intégrale première pour les 1-formes différentielle analytiques*, Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática, 31 (2), 2000

[P1] J. V. Pereira, *Vector fields, invariant varieties and linear systems*, Annales de l'Institute Fourier, **5**, 2001, 1385-1405.

2. O problema de Poincaré

Um dos primeiros matemáticos a abordar a questão de limitar o grau de curvas algébricas invariantes por equações diferenciais polinomiais foi Poincaré, investigando-a na série de artigos [**7**]. Atualmente, o problema de limitar o grau de curvas algébricas invariantes é conhecido como o problema de Poincaré e tem sido tema de vários artigos recentes.

Já o problema de limitar o grau do fator exponencial, até aonde o autor sabe, tem sido bem pouco explorado na literatura. Entre os artigos que seguem, os únicos que abordam esta questão são os artigos [W1] e [W2].

[Ca] M. Carnicer, *The Poincaré problem in the nondicritical case*, Annals of Mathematics **140** (1994), 289–294.

[CLN] D. Cerveau and A. Lins Neto, *Holomorphic foliations in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ having an invariant algebraic curve*, Ann. Inst. Fourier **41** (1991), 883-903.

[LN] A. LINS NETO , *Some Examples for Poincaré and Painlevé Problems*, Preprint, IMPA, 2000.

[P2] J.V. PEREIRA, *On the Poincaré problem for foliations of general type*, www.preprint.impa.br, 2001.

[W1] S. WALCHER, *On the Poincaré problem*, J. Differential Equations **166** (2000), no. 1, 51–78.

[W2] S. WALCHER, *Plane polynomial vector fields with prescribed invariant curves.*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **130** (2000), no. 3, 633–649.

[Za1] A. G. ZAMORA, *Foliations in Algebraic Surfaces having a rational first integral*, Publicacions Matemàtiques **41** (1997), 357–373.

2.1. Generalizações do problema de Poincaré. O leitor interessado no problema mais geral de limitar o *grau* de subvariedades invariantes por folheações holomorfas, generalização natural do problema de Poincaré, pode consultar os seguintes artigos.

[BM] M. BRUNELLA AND L.G. MENDES, *Bounding the degree of solutions to Pfaff equations*, preprint 206, U. Bourgogne, 1999.

[E] E. ESTEVES, *The Castelnuovo-Mumford regularity of a variety left invariant by a vector field on projective space*, www.preprint.impa.br , 2001.

[S1] M. SOARES, *The Poincaré problem for hypersurfaces invariant by one–dimensional foliations*, Invent. Math. **128** (1997), 495–500.

[S2] M. SOARES, *Projective varieties invariant by one–dimensional foliations*, Ann. of Math. (2) **152** (2000), no. 2, 369–382

[Za2] A. G. ZAMORA, *Sheaves associated to holomorphic first integrals*, Ann. Inst. Fourier **50**, 3 (2000), 909–919

3. Equações diferenciais sem soluções algébricas

Jouanolou em [**6**] construiu folheações de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ que não possuem nenhuma curva algébrica invariante . Uma consequência interessante é que as folheações sem curva algébrica invariante acabam sendo *genéricas*. Com isso pode-se demonstrar que *genericamente* uma equação diferencial polinomial não admite integral primeira liouvilliana.

Apresentamos a seguir alguns artigos que discutem o próprio exemplo de Jouanolou além de fornecer novos exemplos de equações diferenciais que não admitem curva algébrica invariante.

[CR] S. C. Coutinho and B. F. M. F. Ribeiro, *On the Computation of Algebraic Solutions of Holomorphic Foliations*, Preprint, UFRJ, 1999.

[MMNS] A. J. Maciejewski, J. Moulin Ollagnier, A. Nowicki and J.-M. Strelcyn, *Around Jouanolou non-integrability theorem*, Indagationes Mathematicae **11** (2), 239–254, 2000.

[MNS] J. Moulin Ollagnier, A. Nowicki and J.-M. Strelcyn, *On the non–existence of constants of derivations: the proof of a theorem of Jouanolou and its development*, Bull. Sci. math. **119**, 195–233, 1995.

[Z2] H. Zoladek, *On algebraic solutions of algebraic Pfaff equations*, Studia Mathematica **114**, 117–126, 1995.

[Z3] H. Zoladek, *New examples of holomorphic foliations without algebraic leaves*, Studia Mathematica **131**(2), 137–142, 1998.

Bibliografia

[1] D. Cerveau and J-F. Mattei , *Formes intégrables holomorphes singulières*, Astérique **97**, SMF, 1982.

[2] B. Chabat, *Introduction à l'analyse complexe Tome 2: Fonctions de plusieurs variables*, Éditions Mir Moscou, 1990.

[3] G. Darboux, *Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré (Mélanges)*, Bulletin Sciences Mathématiques 2ème série **2** (1878), 60–96; 123–144; 151–200.

[4] E. Hille, *Ordinary differential equations in the complex domain*, John Wiley & Sons, 1976.

[5] E. L. Ince, *Ordinary differential equations*, Dover, 1956.

[6] J. P. Joaunolou , *Equations de Pfaff Algébriques* , Lecture Notes in Math. **708**, Springer, 1979

[7] H. Poincaré, *Sur l'integration algébrique des équations différentielles du premier ordre et du premier degré* I and II, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **5** (1891), 161–191; **11** (1897), 193–239.

[8] J. F. Ritt, *Integration in finite terms: Liouville's Theory of Elementary Methods*, Columbia University Press, 1948.

[9] M. F. Singer, *Liouvillian first integrals of differential equations*, Transactions of the American Mathematical Society **333** (1992), 673–688.

Índice