Sólitons:
Na Crista da Onda por Mais de 100 anos.

Fabio Chalub e Jorge Zubelli
IMPA

21 de julho de 2000

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma ligeira introdução à teoria dos sólitons com ênfase em suas conexões com outros ramos da Ciência, que vão desde as áreas chamadas puras, tais como geometria simplética, geometria algébrica e teoria de operadores até aplicações em telecomunicações, mecânica de fluidos e biofísica.

1 A Descoberta das Ondas Solitárias.

> "Este é um fenômeno belíssimo e extraordinário: quando o vi pela primeira vez foi o dia mais feliz de minha vida. Nunca, ninguém tinha tido a sorte de observá-lo antes, ou, pelo menos, entender seu significado. Hoje em dia é conhecido como *onda solitária de translação*. Ninguém até então tinha imaginado uma onda solitária como algo possível. (...) É isto que uma elevação de água faz: ela não permanece onde está, mas viaja a grande distância."

Com estas palavras John Scott Russel, engenheiro naval britânico, descreve os seus sentimentos ao descobrir a onda solitária, vinte anos antes. Naquele dia, em 1834, Russel observava uma barcaça sendo puxada por dois cavalos, um em cada margem do canal de Eddinburgh-Glasgow, quando, de repente, a embarcação parou. A massa d'água que esta arrastava, no entanto, continuou, foi perseguida a galope, com velocidade constante de cerca de quinze quilômetros por hora, por mais de três quilômetros.

O interesse de Russel nesta estranha onda que não se deformara por uma razoável distância não se esgotou neste dia: fez uma série de experimentos, descobrindo como as produzir "em série": acumulando água em uma extremidade de um canal raso separada por um anteparo e, de repente, retirando este anteparo. A massa d'água excedente se propaga em uma "meia-onda" (pois só

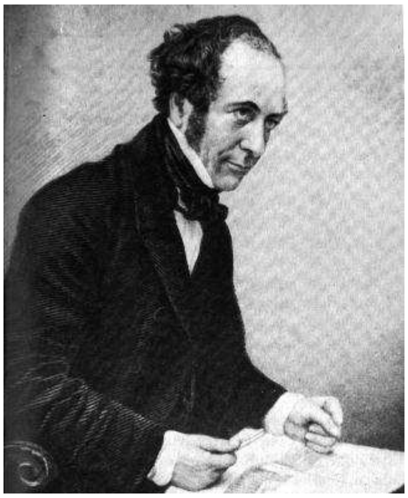

Figura 1: **John Scott Russel**: Russel morreu em 1882 sem poder ver a dedução teórica para a onda solitária, que ele mesmo havia descoberto. Tal explicação só foi possível com o trabalho de D. J. Korteweg e G. de Vries, publicado em 1895. Foto disponível em http://www.ma.hw.ac.uk/~chris/scott_russell.html

há propagação acima da linha de repouso do canal) sem se deformar (veja a Figura 2).

Com uma série de experimentos, descobriu também uma interessante relação entre a altura da onda a (em relação ao nível de repouso da água), chamada de amplitude, em um canal de profundidade h, e sua velocidade de propagação c:

$$c^2 = g(h + a) \ ,$$

onde g é a aceleração da gravidade.

Esta equação provocou certa disputa, pois estava em contradição a uma outra encontrada por argumentos puramente teóricos por Airy. Assim Lord Rayleigh e Boussinesq tentaram resolver de uma vez por todas o problema, o que só veio a ocorrer, de fato, em 1895 com o trabalho de Korteweg e de Vries [1].

2 A Equação de Korteweg-de Vries

A KdV, que recebe este nome em homenagem a seu par de descobridores, é uma das mais importantes equações da teoria de sistemas integráveis (junto com a equação de Schrödinger não-linear). Originalmente foi escrita para modelar a propagação de uma onda longa (amplitude muito menor que seu comprimento) em um canal raso (comprimento muito maior que profundidade). Para uma dedução detalhada remetemos o leitor às referências [2].

Em breves linhas, o que a dupla de pesquisadores holandeses, Korteweg e de Vries, fez foi tomar a equação básica de dinâmica de fluidos, a equação de

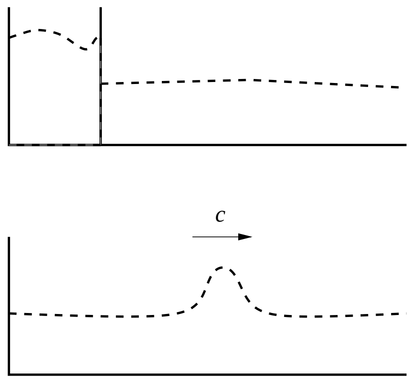

Figura 2: **Fabricando ondas solitárias em série**: O procedimento usado por Scott Russel para fabricar ondas solitárias em série consistia em acumular uma massa d'água em um tanque, usando para isto um anteparo. Subitamente o anteparo é retirado e a massa excedente se propaga sem distorções.

Navier-Stokes, e considerar uma expansão perturbativa para a propagação de uma onda com as características descritas acima. Em primeira aproximação encontra-se uma equação de onda unidirecional onde todas as perturbações se propagam com velocidade constante e igual a $c_0 = \sqrt{gh}$.

Em segunda aproximação, em um referencial que se move paralelo à propagação da onda, com velocidade c_0, a equação encontrada é

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{3}{2}\frac{c_0}{h}u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c_0 h^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \ ,$$

onde u é a elevação da água. É importante notar que x e t não são exatamente a distância e o tempo como medidos por um observador estacionário, mas sim grandezas medidas por um observador em movimento.

Adotando a convenção de sub-índices para denotar derivadas parciais e fazendo as transformações $x \to \alpha x$, $t \to \beta t$ e $u \to \lambda u$ podemos ver que os coeficientes que acompanham cada um dos termos da equação acima podem ser escolhidos arbitrariamente. Por conveniência, reescrevemos a equação de forma que

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \ . \tag{KdV}$$

A partir de agora, a esta equação chamaremos de KdV.

A KdV é uma equação com grandes características de universalidade, ou seja, aparece em muitos contextos distintos. De fato, ela passou muito tempo ignorada, até que Fermi, Pasta e Ulam, estudando os modos de propagação de ondas em redes cristalinas com acoplamento fracamente não-linear, a redescobriram [3]. Aparece também em teoria de espalhamento quântico e no estudo de fluxos de Toda [4]. Esta ubiqüidade se deve a uma característica: a KdV é, em um certo sentido, a equação mais elementar que inclui efeitos não-lineares e dispersivos. Falaremos sobre isto nos próximos parágrafos.

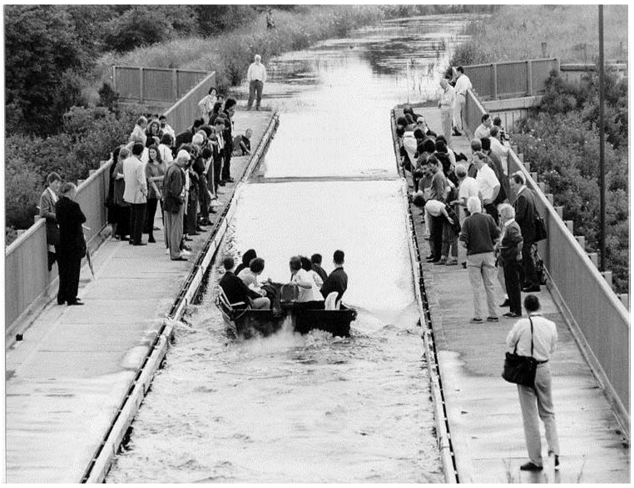

Figura 3: **Fabricando um sóliton**: Em 12 de julho de 1995, cientistas presentes em uma conferência sobre sistemas não lineares em Física e Biologia homenagearam Scott Russel fabricando um sóliton em um canal próximo a Eddinburgo, hoje batizado em sua homenagem (http://www.ma.hw.ac.uk/solitons/press.html). *Foto cortesia de Dugald Duncan e da Herriot-Watt University.*

A equação de onda mais simples que existe é dada por $u_t + cu_x = 0$, onde c é uma constante (identificada como a velocidade). Ela descreve a propagação de uma perturbação $u(x,t)$ após um tempo t em um ponto x da reta. O leitor pode verificar que a sua solução é dada por $u(x,t) = F(x-ct)$ onde F é uma função que descreve a perturbação em $t=0$. A presença do termo $x-ct$ indica uma translação para a direita do perfil descrito por F com uma velocidade c, como pode ser visto na Figura 4.

Um dos grandes avanços do século XIX foi o aparecimento da análise de Fourier. A ideia básica é a decomposição de funções arbitrárias como a superposição de senos e co-senos, ou mais geralmente de exponenciais complexas. A análise de Fourier, cujo desenvolvimento teórico só se completou no século XX, se mostrou instrumental no estudo de sinais e da propagação de ondas, bem como no estudo de equações diferenciais lineares.

Consideremos novamente a equação $u_t + cu_x = 0$. A ideia é buscar soluções da forma $A \exp i(kx - \omega t)$. A interpretação de uma solução desta forma é que para cada x fixo temos uma oscilação harmônica com período $T = 2\pi/\omega$. Para cada tempo fixo, temos uma perturbação periódica que se repete após um deslocamento de $\lambda = 2\pi/k$. A grandeza λ é chamada de comprimento de onda. Na Figura 4 mostramos a parte real de $\exp i(kx - \omega t)$.

Quando exigimos que $\exp i(kx - \omega t)$ seja solução de $u_t + cu_x = 0$ obtemos a relação $c = \omega/k = \lambda/T$ que nos relaciona a freqüência das oscilações espaciais com as temporais. A possibilidade de usar funções da forma $\exp i(kx - \omega t)$ para estudar equações lineares mais complexas, ou mesmo equações não-lineares, foi um grande avanço tanto teórico como prático. Por exemplo, se considerarmos

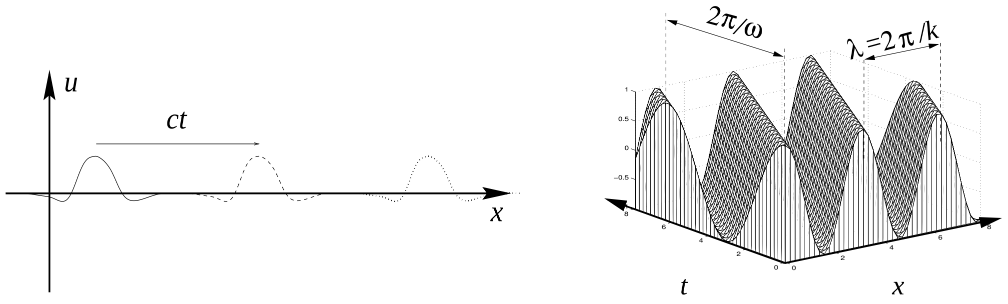

Figura 4: **(a)** Evolução no tempo de uma onda unidirecional com velocidade de propagação c. **(b)** Gráfico de $\cos(kx - \omega t)$. Para t fixo a distância entre dois picos sucessivos chama-se *comprimento de onda* λ enquanto para x fixo o intervalo de tempo entre dois picos sucessivos é o *período* T. Estes se relacionam com a *número de onda* k e com o *freqüência angular* ω por $T = 2\pi/\omega$ e $\lambda = 2\pi/k$.

uma equação da forma

$$u_t + cu_x + \beta u_{xxx} = 0 \ ,$$

ao substituirmos $u = \exp i(kx - \omega t)$ obtemos

$$\omega = ck - \beta k^3 \ . \tag{1}$$

Agora, diferente do caso $\beta = 0$, temos que harmônicos de diferentes freqüências se propagam com velocidades distintas. Isto dá origem a uma certa distorção do sinal que nos lembra bastante ligações de algumas companhias telefônicas. Quando $\beta = 0$ retornamos à equação da onda. Ao fenômeno de propagação de freqüências distintas com velocidades distintas chamamos de *dispersão*. A relação entre ω e k, tal como na equação (1), é chamada de relação de dispersão.

Considerando novamente a equação $u_t + cu_x = 0$ a maneira mais simples de incluirmos um termo não-linear é considerar a velocidade c como uma função de u. Portanto o exemplo mais simples de uma equação não-linear é dada, após uma mudança de escalas, por $u_t + uu_x = 0$. Esta equação é chamada equação de Burgers. Uma das suas características notáveis é a presença de **choque**, ou mais formalmente a perda de continuidade da solução, após algum tempo. Neste caso, para fazermos sentido da derivada, temos que trabalhar com soluções fracas da equação, ou seja, com distribuições.

O choque se dá pelo seguinte simples motivo: dada uma condição inicial arbitrária, olhando a equação de evolução e comparando-a com a equação de onda vemos que a velocidade com que a onda se propaga é proporcional à sua altura, ou seja, ao valor de u. Assim a crista se propaga mais rápido, inclinando a perturbação na direção de propagação até que a onda "quebra", tal qual uma onda do mar.

Desta forma os efeitos da dispersão e da não-linearidade são, em certo sentido, opostos. Enquando a dispersão tende a atenuar a oscilação, a não-linearidade tende a torná-la mais abrupta. A KdV inclui ambos os efeitos, o que pode ser facilmente verificado olhando cada um de seus termos. Isto explica nossa afirmação que ela é a equação mais simples que inclui estes dois efeitos. Para o problema de valor inicial (ou seja, fixando $u(x,0) = u_0(x)$) a equação pode ser estudada e resolvida, pelo menos em princípio, por um método conhecido como GGKM (em homenagem a Gardner, Greene, Kruskal e Miura) que posteriomente deu origem à transformação de espalhamento inverso [5].

3 Sólitons.

A palavra *sóliton* foi cunhada por M. Kruskal ao estudar soluções periódicas da KdV. Com este termo fundiu-se o conceito de onda *solit*ária com a terminação *on*, radical designando partícula (tal como elétron, fóton etc). Muitas definições rigorosas podem ser formuladas; no contexto deste artigo definiremos sóliton como a solução de uma equação diferencial parcial não-linear que goze das seguintes propriedades:

- representa uma onda de forma permanente, ou seja, é da forma $f(x - ct)$, onde c é uma constante real;
- é localizada, ou seja, $f(\xi) \to 0$, assim como todas suas derivadas, quando $\xi \to \pm\infty$;
- mantém sua identidade mesmo após interação com outros sólitons (e neste sentido tem um comportamento de partícula, como sugere seu nome).

Podemos então começar a procurar sólitons na KdV. Suponha $u = f(x - ct)$ e aplique na equação:

$$-cf' - 6ff' + f''' = 0 \ .$$

Integrando (e lembrando das condições de contorno em infinito) obtemos

$$-cf - 3f^2 + f'' = 0 \ .$$

Podemos multiplicar ambos os lados por f' e integrar novamente, obtendo:

$$(f')^2 = f^2(2f + c) \ ,$$

que pode ser resolvida na forma

$$f(x - ct) = -\frac{c}{2}\mathrm{sech}^2\left[\frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct - x_0)\right] \ ,$$

onde x_0 é uma constante de integração arbitrária (que pode ser ignorada). O sinal negativo se deve à escolha da direção positiva do eixo (veja Figura 5).

É fácil verificar que esta função obedece às duas primeiras exigências para ganhar o nome de sóliton; para a terceira, a demonstração deve esperar a próxima seção.

Uma importante propriedade da solução acima é que a amplitude da onda e sua velocidade estão diretamente relacionadas! (Fica como exercício para o leitor tentar entender a aparente diferença entre esta fórmula e aquela apresentada

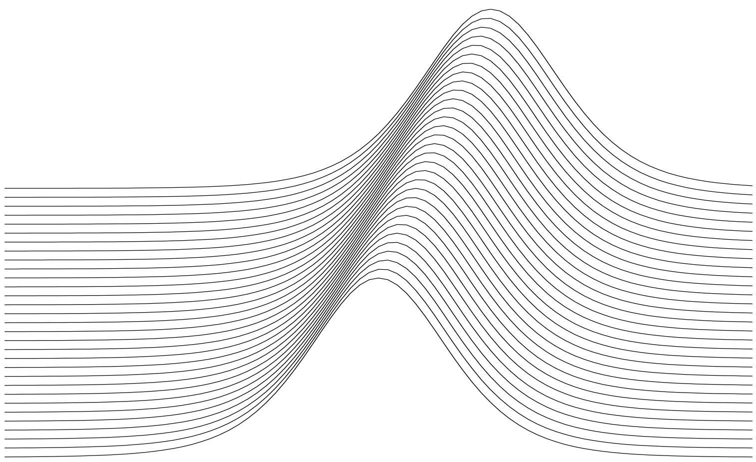

Figura 5: **Evolução no tempo de um sóliton**: Neste gráfico o eixo do tempo está apontando para dentro do papel, o eixo horizontal indica a variável x enquanto o eixo vertical é igual a $-f$. Perceba que a medida que o tempo passa o sóliton não se deforma.

no início do texto, obtida empiricamente por Russel.) Assim ondas maiores se propagam mais rápido. Além disto ondas maiores são mais *localizadas*, isto é, a região onde ela é significativa é mais estreita.

Caso não houvéssemos imposto condições de decaimento no infinito, ao integrar a KdV, obteríamos como solução funções elípticas, e imediatamente nos depararíamos com um aspecto fascinante da teoria de sistemas integráveis, a saber, sua conexão com geometria algébrica [6].

A peculiaridade da KdV possuir soluções que mantêm sua forma ao longo do tempo pode ser superada pensando no efeito de cada um dos termos. O termo u_{xxx}, como vimos, é um termo dispersivo que portanto tende a fazer desaparecer a solução. Já o termo não-linear uu_x tende a criar choques. A KdV consegue compatibilizar estes dois efeitos de forma a ter soluções estáveis. Apesar do tratamento apresentado aqui ser extremamente intuitivo, podemos tornar as afirmações rigorosa com ferramentas mais sofisticadas de análise de Fourier. O leitor pode consultar, para uma introdução à análise de Fourier aplicada às equações diferenciais parciais lineares o excelente texto [7]. Para as referências as diversas afirmações heurísticas, ver [8, 9, 10].

4 Interação de Dois Sólitons.

Como um sóliton é um fenômeno localizado pode-se produzir um, esperar um certo tempo para que ele se distancie e em seguida produzir outro, maior em amplitude e portanto mais rápido. Após uma pequena espera o segundo irá alcançar o primeiro e eles irão interagir. Como a KdV é uma equação não-linear, é muito longe do trivial prever como será esta interação.

Uma das características básicas de uma equação linear é a obediência ao princípio de superposição, isto é, se ϕ_1 e ϕ_2 são soluções, qualquer combinação linear da forma $\alpha\phi_1 + \beta\phi_2$ também é solução. De fato, é esta propriedade que caracteriza uma equação $\mathcal{L}\phi = 0$ como linear, ou, por extensão, o próprio operador $\mathcal{L}$ como linear.

Isto não ocorre na KdV, ou seja, ela não é linear e portanto suas soluções não obedecem ao princípio de superposição. Supreendentemente vale, no entanto, um princípio de "superposição aproximado". De maneira mais precisa, os dois sólitons descritos acima interagem e posteriormente se separam sem alterar sua forma. A única mudança é uma ligeira alteração da posição que cada um deles teria após o mesmo tempo caso não houvesse interação. A isto chamamos de "mudança de fase". Veja Figura 6.

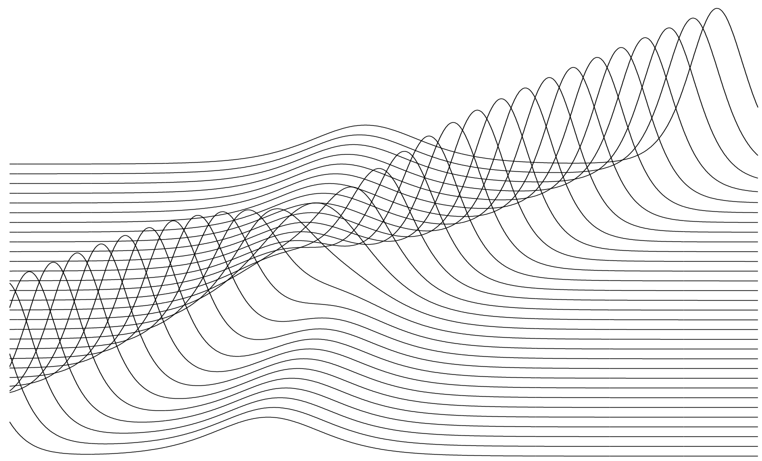

Figura 6: **Interferência entre dois sólitons**: Dois sólitons evoluindo no tempo (que é o eixo que "entra" no papel). Perceba como o sóliton maior é também o mais rápido e que após a interferência ambos retornam à sua forma de origem, apenas com uma pequena alteração da fase. Por conveniência o eixo u negativo foi colocado para cima.

Veremos todas as afirmações acima com um pouco mais de cuidado estudando a solução de dois sólitons. Para isto reescrevemos a solução de um sóliton (adotando o sub-índice 1 para designar o primeiro sóliton produzido)

$$u_1(x,t) = -2\partial_x^2 \log(1 + e^{\sqrt{c_1}(x - c_1 t)})$$

e igualmente para o segundo sóliton (eventualmente incluindo uma fase δ).

Com algum esforço pode-se provar que

$$u = -2\partial_x^2 \log \phi \ ,$$

com

$$\phi(x,t) \quad = \quad 1 + \frac{1}{\sqrt{c_1}} e^{\sqrt{c_1}(x - c_1 t)} + \frac{1}{\sqrt{c_2}} e^{\sqrt{c_2}(x - c_2 t + \delta)} +$$

$$+ \quad \left(\frac{\sqrt{c_2}-\sqrt{c_1}}{\sqrt{c_2}+\sqrt{c_1}}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{c_1 c_2}} e^{\sqrt{c_1}(x-c_1t)+\sqrt{c_2}(x-c_2t+\delta)}$$

é solução da KdV.

A primeira observação importante é que caso $c_1 = c_2$, ou seja os sólitons sejam idênticos em tamanho (e portanto em velocidade), o último termo, o termo de interferência, desaparece. Isto é esperado pois não havendo movimento relativo não há porque mudar a forma de cada um dos sólitons.

Para vermos como a solução acima obedece à terceira propriedade que define um sóliton devemos estudar o comportamento deste último termo. Suponha que estejamos nos movimentando junto a um dos dois sólitons, por exemplo o primeiro (isto é, estamos em um referencial que se move à direita com velocidade c_1). Neste caso o termo $x - c_1t$ tem valor constante e finito. A medida que o tempo passa, o termo $x - c_2t$, no entanto, tende a menos infinito pois, neste referencial ele vale $(c_1 - c_2)t$ e como supomos $c_2 > c_1$ a exponencial deste valor tende a zero. O mesmo acontece com o terceiro termo (associado ao segundo sóliton). Assim vemos que o primeiro sóliton se separa do segundo em tempo suficientemente grande. Claro que o mesmo acontece com o outro sóliton, de forma que eles se separam depois de algum tempo e cada um segue seu caminho.

A mudança relevante é que a fase δ inicialmente pertencente ao segundo sóliton passa a aparecer na solução de cada um deles isoladamente. Assim a **única** alteração do ponto de vista *prático* no comportamento dos sólitons após a interação é uma mudança de fase.

5 Soluções de N-sólitons.

Para estudar as soluções de N-sólitons vamos definir uma nova variável apenas para suavizar a notação

$$k = \frac{\sqrt{c}}{2} \ .$$

Assim a solução de um sóliton se escreve

$$u(x,t) = -2k^2 \mathrm{sech}^2(k(x-ct)) \ .$$

Para gerarmos um sóliton associado a $k = 1$ devemos impor uma condição inicial $u_0^{(1)} = -2\mathrm{sech}^2 x$. Para $k = 2$ a condição inicial deve ser $u_0^{(2)} = -8\mathrm{sech}^2 2x$. A interferência destes dois sólitons, tal como visto na seção anterior, é dada por

$$u(x,t) = -12 \frac{3 + 4\cosh(2x-8t) + \cosh(4x-64t)}{[\cosh(3x-36t) + 3\cosh(x-28t)]^2} \ .$$

Em $t = 0$ (onde a interferência destes dois sólitons é máxima) esta solução vale $u(x,0) = -6\mathrm{sech}^2 x$. Ou seja, a amplitude da interferência destes dois sólitons não é a simples soma das amplitudes de cada um dos sólitons, o que seria característica de uma interação linear.

Mas o que chama a atenção é que em ambos os casos (para $k=1$ e para a interferência $k=1$ e $k=2$) as condições iniciais são da forma $u_0=-C\text{sech}^2 x$. Um resultado importante é que caso C seja da forma $N(N+1)$ onde N é um inteiro positivo então teremos uma solução de N-sólitons, ou seja, após um certo tempo os vários sólitons inicialmente superpostos se separam, sendo que estes sólitons são associados a valores $k=1,2,\cdots,N$. Neste caso a solução de N-sólitons representa inteiramente a evolução daquela condição inicial.

Caso C não possa ser escrito desta forma então tomemos p o único número positivo tal que $p(p+1)=C$. Também aqui a condição inicial se divide em N sólitons associados a valores $k=p-N,p-N+1,\cdots,p$ onde N é o maior inteiro menor que p. Neste caso, no entanto, os sólitons não esgotam as soluções, a evolução temporal apresenta também algumas oscilações conhecidas como "ripples", ou, em português, "marolas".

As condições iniciais da forma $u_0^{(N)}(x)=-N(N+1)\text{sech}^2 x$, que são as condições que geram evolução puramente solitônicas, são exatamente os potenciais que, ao serem colocados na equação de Schrödinger, a equação básica da Mecânica Quântica, não produzem reflexão. Ou seja, uma evolução governada por

$$-\partial_x^2\Psi(x,\tau)+u_0^{(N)}(x)\Psi(x,\tau)=i\partial_\tau\Psi(x,\tau)$$

e sujeito a condições iniciais dada por uma onda Ψ vindo de menos infinito produz como resultado em tempo mais infinito apenas uma onda caminhando para a direita. É importante ter em mente que o tempo da equação de Schrödinger τ não tem nenhuma relação com o tempo t da KdV, e por isto optou-se por uma diferente notação. Soluções da KdV com dependência explícita no tempo podem ser colocadas como potencial da equação de Schrödinger e neste caso t é apenas um parâmetro que classifica uma família contínua de potenciais. Em suma, não há retro-espalhamento produzido pelo potencial $u_0^{(N)}$! Isto mostra uma importante conexão entre teoria de espalhamento e teoria de sólitons. O leitor que se interessar por este importante e atual tópico deve consultar as referências [11, 10].

Outro tópico associado às soluções de N-sólitons são as chamadas transformações de Darboux e de Bäcklund. Estas são usadas para produzir de maneira recursiva soluções de N-sólitons da KdV (e de outras equações) a partir da solução de $(N-1)$-sólitons. Estas duas transformações aparecem em muitas outras situações na análise aplicada às equações diferenciais parciais. Soluções de N-sólitons também podem ser obtidas generalizando o procedimento da seção anterior; de fato isto foi feito por Hirota [12].

6 Sistemas Integráveis.

Nas seções anteriores estudamos propriedades das soluções da KdV, que foram obtidas explicitamente, ou pelo menos indicou-se como construí-las. Nesta seção veremos como muitas propriedades das soluções da KdV podem ser obtidas apenas a partir do estudo da expressão da equação, ou seja, de suas propriedades algébricas. De fato, o que faremos aqui é bastante geral, podendo ser aplicado a várias equações, chamadas de sistemas integráveis.

Para começar a estudar tais propriedades reescrevemos a KdV na seguinte forma:

$$u_t = (3u^2 - u_{xx})_x \ .$$

Integrando de menos infinito a infinito (estes limites de integração serão omitidos mas o leitor deve ter em mente que eles estão sempre presentes), e lembrando que $u \to 0$ (assim como todas as suas derivadas) em $x \to \pm\infty$ podemos escrever

$$\frac{d}{dt}\int u dx = \int u_t dx = (3u^2 - u_{xx})|_{-\infty}^{\infty} = 0 \ ,$$

ou seja,

$$\int u dx = A_1 \ ,$$

onde A_1 é constante.

A expressão acima é uma *grandeza conservada*, ou seja ao longo da evolução ditada pela KdV $\int T_1 dx$, onde $T_1 = u$, não se altera. Fisicamente significa que a *massa* não se altera, ou seja, temos uma expressão para a conservação da massa. Podemos começar a procurar por outras grandezas conservadas, em particular associadas a outras entidades físicas.

Multiplicando a KdV por u, podemos reescrevê-la

$$u \times (\text{KdV}) = \frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}u^2) + \frac{\partial}{\partial x}(uu_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2 - 2u^3) = 0 \ ,$$

e portanto escrevendo $T_2 = u^2$ temos que $\int T_2 dx$ é constante, e temos uma segunda lei de conservação, esta associada a conservação do *momento*.

Com um pouco mais de trabalho podemos obter uma terceira lei de conservação, desta vez associada à *energia*:

$$3u^2 \times (\text{KdV}) + u_x \times \frac{\partial}{\partial x}(\text{KdV}) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}(u^3 + \frac{1}{2}u_x^2) + \frac{\partial}{\partial x}(-\frac{9}{2}u^4 + 3u^2 u_{xx} - 6uu_x^2 + u_x u_{xxx} - \frac{1}{2}u_{xx}^2) = 0 \ .$$

Assim obtemos $T_3 = u^3 + u_x^2/2$ e uma nova lei de conservação, $\int T_3 dx$.

É importante notar que sempre que tivermos uma expressão da forma

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial x} = 0$$

e condições de contorno apropriadas, no caso $X \to 0$ em $x \to \pm\infty$, teremos uma lei de conservação, que pode ser escrita $\int T dx =$ constante. A verificação disto é deixada para o leitor.

Dado que em um problema físico típico as leis de conservação aplicadas são exatamente aquelas associadas a massa, momento e energia, poder-se-ia pensar, a primeira vista, que as três leis enunciadas acima esgotam as leis de conservação da KdV. No entanto, com muito esforço, Miura, Gardner e Kruskal em 1968 [13] encontraram mais oito leis de conservação independentes, totalizando onze. Para surpresa de muitos provou-se, em seguida, que a KdV possui um número **infinito** de leis de conservação, e que, além disto, esta característica é compartilhada por um grande número de equações diferenciais (aquelas que recebem o título de sistemas integráveis). É o que veremos agora.

Para ver isto escreveremos a KdV de uma forma completamente distinta do que estávamos fazendo. De fato, veremos que uma equação integrável nunca vem só, mas acompanhada de "parentes". Estes formam um conjunto infinito de equações diferenciais parciais que são genericamente chamados de *hierarquia* (ou, por vezes, *família*). No caso em questão construiremos a hierarquia da KdV e mostraremos como uma série de propriedades desta pode ser obtida de uma única vez, não apenas para ela, mas também para todos seus parentes.

O método que empregaremos para construir a hierarquia da KdV foi resultado de longo desenvolvimento cujos detalhes fogem ao escopo do presente artigo. A primeira vista pode parecer um pouco artificial e excessivamente algébrico. Quanto a aparente artificialidade, esperamos que isto porem estimule o leitor interessado a buscar mais detalhes na bibliografia [14]. Quanto ao caráter algébrico, isto demonstra mais uma vez a ligação dos problemas aqui abordados com diversas áreas distintas da Matemática.

Considere um operador diferencial linear (na variável x) de segunda ordem. Genericamente escrevemos $\alpha_2\partial_x^2 + \alpha_1\partial_x + \alpha_0$. Podemos normalizar de forma a supor $\alpha_2 = 1$. Além disto podemos fazer uma mudança de variável a fim de cancelar o termo de primeira ordem. Isto é intuitivamente equivalente ao que se faz inicialmente quando se deseja resolver uma equação algébrica de grau n para cancelar o termo de grau $n-1$. Fica a cargo do leitor descobrir a transformação exata que gera tal simplificação.

Assim podemos considerar o operador $\mathcal{L} = \partial_x^2 + u$ como um operador diferencial de segunda ordem geral. Vamos supor que a função u depende também de t, onde t é uma variável que será relevante adiante. Consideraremos também a "raiz-quadrada" $\mathcal{L}^{1/2}$ do operador $\mathcal{L}$, ou seja, um operador tal que $\mathcal{L}^{1/2}\mathcal{L}^{1/2} = \mathcal{L}$. Este operador não será, em geral, um operador diferencial, mas um operador *pseudo-diferencial.* Operadores pseudo-diferenciais são aqueles que incluem não apenas expoentes inteiros positivos do operador de derivação ∂_x, mas também expoentes inteiros negativos, tal como ∂_x^{-1} ou ∂_x^{-2}. Estes são definidos de maneira puramente formal (ou seja, sem preocupação em precisar o domínio de definição subjacente), sendo suas propriedades mais importantes

$$\partial_x^m \partial_x^n = \partial_x^{m+n} \qquad \text{e}$$

$$\partial_x^k f = f\partial_x^k + \binom{k}{1} f'\partial_x^{k-1} + \binom{k}{2} f''\partial_x^{k-2} + \cdots \ ,$$

onde m, n, $k \in \mathbb{Z}$ e

$$\binom{k}{i} = \frac{k(k-1)\cdots(k-i+1)}{i!} \ .$$

Vamos agora calcular $\mathcal{L}^{1/2}$. Como $\mathcal{L}$ é operador de segunda ordem, sua raiz-quadrada é de primeira, logo podemos supor $\mathcal{L}^{1/2} = \partial_x + \alpha_0 + \alpha_{-1}\partial^{-1} + \cdots$. Elevando ao quadrado e igualando a $\mathcal{L}$ encontramos

$$\mathcal{L}^{1/2} = \partial_x + \frac{u}{2}\partial_x^{-1} - \frac{u_x}{4}\partial_x^{-2} + \cdots \ .$$

Podemos, agora, tomar potências deste operador (que para expoentes ímpares será pseudo-diferencial) e escrever

$$\mathcal{P}_n = \mathcal{L}^{n/2}|_+ \ ,$$

onde $|_+$ indica que tomamos apenas a parte diferencial do operador. Desta forma $\mathcal{P}_1 = \partial_x$, $\mathcal{P}_2 = \mathcal{L}$ e $\mathcal{P}_3 = \partial_x^3 + \frac{3u}{2}\partial_x + \frac{3u_x}{4}$. Finalmente escrevemos

$$u_t = [\mathcal{P}_n, \mathcal{L}] \ ,$$

onde $[A, B] = AB - BA$ é o comutador de dois operadores. Para $n = 1$ temos $u_t = [\partial_x, \partial_x^2 + u] = u_x$ e portanto a equação da onda unidirecional. Para $n = 2$ o comutador é trivial. Para $n = 3$ temos $4u_t = u_{xxx} + 6uu_x$ que é exatamente a KdV (basta fazer uma transfomação de variáveis para retomar a forma que nos é mais conhecida). Fazendo n varrer os números naturais vamos encontrando várias equações e construímos a hierarquia da KdV.

Para construir um número infinito de grandezas conservadas vamos definir um operador, chamado *resíduo*, tal que o resíduo de um operador pseudo-diferencial é o coeficiente de seu termo de grau -1

$$\mathrm{res}(\alpha_k \partial_x^k + \cdots) = \alpha_{-1} \ .$$

Não é difícil provar que os funcionais da forma

$$J_n = \int \mathrm{res}\mathcal{L}^{n/2} dx$$

são grandezas conservadas para todos os elementos da hierarquia. Esta demostração o leitor interessado pode obter nas referências [14]. Deixamos como exercício provar que as primeiras grandezas conservadas são exatamente aquelas anteriormente encontradas.

Tal método pode ser generalizado para operadores $\mathcal{L}$ de grau maior que dois. Para cada grau obtemos uma diferente hierarquia. Para o grau 3, por exemplo, temos a hierarquia da Boussinesq. Usando métodos algébricos mais abstratos, todas estas hierarquias podem ser consideradas como casos particulares de uma única. Esta é conhecida como hierarquia da equação de Kadomtsev-Petviashvili, ou KP:

$$(u_t - 6uu_x + u_{xxx})_x + u_{yy} = 0 \ ,$$

que é uma espécie de generalização bidimensional da KdV. Perceba que se u não depende de y e com condições de contorno apropriadas no infinito, retomamos a KdV.

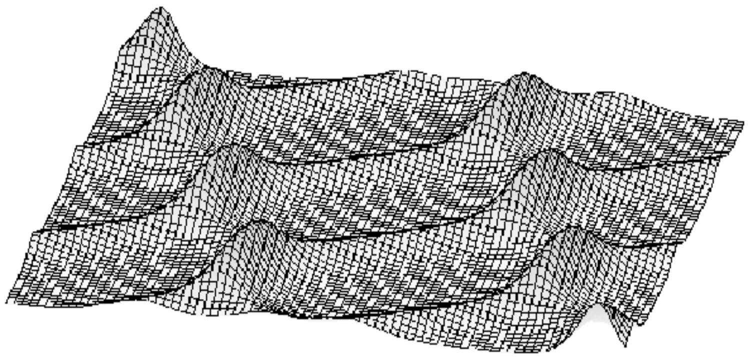

Figura 7: **Solução bifásica da KP**: Solução estacionária bifásica da KP, vista em perspectiva. *Foto cortesia de Ron Flickinger e do Departamento de Matemática Aplicada da Universidade do Colorado, Boulder.* Disponível em http://amath.colorado.edu/appm/other/kp/pictures/picture2a.gif

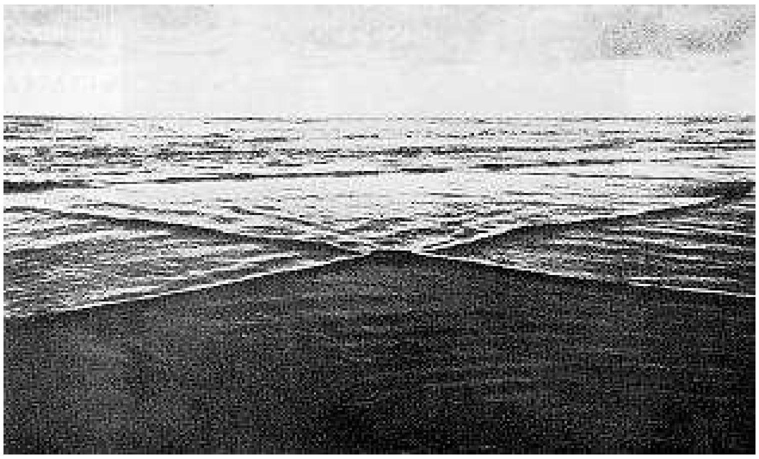

Figura 8: **Sóliton na água**: Formação de sóliton bi-dimensionais em água rasa. Compare com a figura anterior. *Foto de T. Toedtemeier, cortesia de Ron Flickinger e do Departamento de Matemática Aplicada da Universidade do Colorado, Boulder.* http://amath.colorado.edu/appm/other/kp/waterwaves/kpsoliton.jpg

Para mais informações sobre a KP veja por exemplo [15] e referências no mesmo. Muito sobre a KP pode ser encontrado no endereço URL: http://amath.colorado.edu/appm/other/kp/kp.html.

Uma outra técnica, particularmente elegante devido a sua interpretação geométrica, que pode ser usada para a construção da hierarquia da KdV (a mesma hierarquia acima!) leva em consideração as características bi-hamiltonianas da equação. Definimos *colchetes de Poisson* em uma variedade M como uma aplicação bilinear

$$\{\cdot,\cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M) \ ,$$

onde $C^\infty(M)$ é o conjunto de funções infinitamente diferenciáveis em M, que satisfaz as seguintes propriedades:

- $\{g,f\} = -\{f,g\}$, ou seja a aplicação é anti-simétrica;
- $\{fg,h\} = f\{g,h\} + \{f,h\}g$, ou seja $\{\cdot,h\}$ é uma derivação (i. e., obedece à regra de Leibniz);
- $\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$, que é conhecida como a identidade de Jacobi.

A noção de colchete de Poisson foi fundamental no desenvolvimento da Mecânica Clássica e posteriormente da Mecânica Quântica.

Dizemos que uma variedade é *bi-hamiltoniana* quando esta possuir dois colchetes de Poisson linearmente independentes tal que qualquer combinação linear destes deve ainda ser um colchete de Poisson. As duas primeiras propriedades enumeradas acima são automaticamente satisfeitas; no entanto a necessidade de obedecer à identidade de Jacobi restringe em muito nossa capacidade de escolha dos colchetes.

Definimos agora dois colchetes: [1]

$$\{F,G\}_0 = 2\int \frac{\delta F}{\delta u}\left(\frac{\delta G}{\delta u}\right)_x dx$$

e

$$\{F,G\}_1 = \frac{1}{2}\int \frac{\delta F}{\delta u}\left(\left(\frac{\delta G}{\delta u}\right)_{xxx} - 4u\left(\frac{\delta G}{\delta u}\right)_x - 2u_x\frac{\delta G}{\delta u}\right)dx \ .$$

F e G devem ser entendidos como funcionais de u da forma:

$$F[u] = \int f(u, u_x, u_{xx}, \cdots)dx \ .$$

A derivada variacional $\delta F/\delta u$ pode ser calculada por

$$\frac{\delta F}{\delta u} = \frac{\partial f}{\partial u} - \partial_x \frac{\partial f}{\partial u_x} + \partial_x^2 \frac{\partial f}{\partial u_{xx}} - \cdots \ .$$

Por exemplo, se $F[u] = \int(u^3 + \frac{1}{2}u_x^2)dx$ então $\delta F/\delta u = 3u^2 - u_{xx}$.

[1] O leitor atento notará que evitamos definir a variedade na qual está definido tal colchete. Uma possivel variedade é dada pelo espaço de Schwarz. Esta variedade de fato possui dimensão infinita e deve ser entendida como uma estrutura de variedade de Frechet.

Os dois colchetes acima apresentados são compatíveis, o que deixamos para ser verificado pelo leitor. F. Magri [16] observou que para se construir uma hierarquia bi-hamiltoniana a partir destes dois colchetes bastava encontrar uma seqüência de funções tais que

$$\{\cdot, H_0\}_0 = 0 \qquad \text{e} \qquad \{\cdot, H_n\}_0 = \{\cdot, H_{n-1}\}_1 \ .$$

Esta seqüência é obtida definindo

$$H_n = 2\int h_{n+2}dx$$

onde

$$h_1 = \frac{u}{2} \qquad \text{e} \qquad h_{n+1} = -\frac{1}{2}((h_n)_x + \sum_{i=1}^{n-1} h_{n-i}h_i) \ .$$

Esta última recursão ao ser resolvida, nos dá $h_1 = u/2$, $h_2 = -u_x/4$, $h_3 = (u_{xx} - u^2)/8$ e daí por diante. Para H_n encontramos $dH_{2n} = 0$ para todo n e H_{2n+1} constitui uma hierarquia bi-hamiltoniana. Explicitamente: $dH_{-1} = 1$, $dH_1 = -u/2$ e $dH_3 = (-u_{xx} + 3u^2)/8$. Este processo é recursivo e pode ser repetido arbitrariamente.

Definindo a n-ésima equação da hierarquia como

$$u_t = -2\partial_x(dH_n)$$

temos para $n = 1$, $u_t = u_x$ e para $n = 3$, $4u_t = (u_{xxx} - 6uu_x)$, novamente a KdV, exceto por uma mudança na escala temporal.

A teoria de variedades bi-hamiltonianas e sua aplicação a equações solitônicas foi desenvolvida nos trabalhos de I. Gelfand, I. Dorfmann, F. Magri e colaboradores. Ela teve sua origem no trabalho seminal [17]. Para uma excelente introdução o leitor deve consultar [18].

7 Aplicações.

Além das ondas em canais rasos já citadas, muitos outros sólitons podem ser observados diretamente na natureza. Um exemplo particularmente grandioso é o da *pororoca*, no Rio Amazonas, que ocorre quando, devido a peculiaridades com a maré, a água do mar invade o rio, se propagando por alguns quilômetros foz a dentro. Esta onda tem grande estabilidade podendo, até mesmo, com algum grau de coragem, ser surfada. É interessante notar que tal fenômeno ocorre em diversos lugares, sendo conhecida em inglês como "bore"e em francês "mascaret".

Ainda em dinâmica de fluidos, sólitons podem aparecer em propagação de ondas em águas profundas, que são governadas pela equação de Benjamin-Ono

$$u_t + uu_x + \fint \frac{u_{\xi\xi}}{\xi - x}d\xi = 0 \ ,$$

Figura 9: **Pororoca do rio Quiantang, Hangzhou, China**: A pororoca é um tipo de sóliton, como pode ser observado nesta foto. Basta ver o alinhamento da frente da onda. A inclinação perto da borda (parte inferior da foto) é provavelmente devida a uma reflexão na margem. Perceba como a frente se mantém retilínea mesmo após a colisão. *Foto cortesia de Dr. Eric Jones*, http://www.uq.edu.au/~e2hchans/pictures/hang01.jpg

onde a integral cortada indica o *valor principal de Cauchy*. Para referências veja [10]. Para um exemplo dos interessantes problemas matemáticos associado a existência de tais soluções [19].

Para produzir sólitons mecânicos em laboratório, um modelo que pode ser seguido é o de acoplar pêndulos de torção por molas. A equação que governa este movimento é a equação de sine-Gordon

$$u_{tt} - u_{xx} + \mathrm{sen} u = 0 \ ,$$

que também tem soluções do tipo sóliton. Veja [10]. Para ver uma interessante animação consulte o endereço URL:
http://homepages.tversu.ru/~s000154/collision/pendulum/pendulum.html.

É importante observar que esta equação aparece pela primeira vez a partir do estudo das condições do compatibilidade entre as equações de Gauss e Codazzi para a pseudo-esfera. Para referências e uma excepcional exposição sobre o tema consulte [20].

Um exemplo em biofísica é dado pela propagação do pulso: a batida do coração propaga-se podendo ser sentida a distância, no punho ou no pescoço, por exemplo. Um modelo recente que vem sendo usado é o de sólitons [10].

Outro exemplo aparece em eletromagnetismo. A equação de Ginzburg-Landau, originalmente da teoria de supercondutividade,

$$u_t + a u_{xx} = bu + cu|u|^2$$

também possui soluções do tipo sóliton [8].

Uma das equações mais usadas em física de partículas é a equação de campo de Yang-Mills (que não escreveremos aqui). Suas soluções tipo sóliton representam partículas elementares. Veja por exemplo [8, 21, 22].

Outra área onde aplicações da teoria de sólitons têm sido muito proveitosas é na óptica não-linear, regida pela equação de Schrödinger não-linear

$$iu_t + u_{xx} + |u|^2 u = 0 \ ,$$

que originalmente aparece em física de plasmas [10]. Em 1992 uma equipe do *Bell Labs* conseguiu manter um pulso, ou seja, um sóliton, por 15.000 quilômetros! Estes podem ser usado para comunicação ultra-rápida a distância. Veja o URL http://www.att.com/press/0292/920206.blb.html para esta e outras informações.

Muitas outras aplicações de sólitons tanto na Matemática e na Física, quanto em outras áreas da Ciência, ou mesmo na indústria podem ser encontradas. O leitor interessado certamente as achará seguindo as referências.

8 Conclusões.

Este artigo de divulgação começou com uma descrição histórica de 150 anos atrás, a partir de uma observação feita por um engenheiro naval. Mostrou-se como isto desenvolveu uma Matemática de primeira linha e, mais importante, extremamente atual e produtiva.

Muito do desenvolvimento do estudo de sólitons foi feito por uma parceria implícita de físicos, matemáticos e engenheiros (e, mais recentemente, de biólogos) e a cada dia esta interação tem ficado mais intensa, incluindo hoje em dia setores industriais de ponta.

Esta parceria implícita continua ativa, não apenas na teoria de sistemas integráveis, mas também em outras áreas do conhecimento. A moral da estória é que devemos nos manter atentos as inter-conexões entre as diversas áreas do conhecimento pois das mesmas resultam avanços científicos surpreendentes.

Referências

[1] D. J. Korteweg and G. De Vries. On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel and on a new type of long stationary waves. *Phil. Mag.*, 39:442–443, 1895.

[2] Morikazu Toda. *Nonlinear waves and solitons.* Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1989. Translated from the Japanese.

[3] E. Fermi, J. R. Pasta, and S. M. Ulam. Studies on nonlinear problems. Technical Report LA-1940, Los Alamos Sci. Lab., 1955.

[4] H. Flaschka. On the Toda lattice. II. Inverse-scattering solution. *Progr. Theoret. Phys.*, 51:703–716, 1974.

[5] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, and R. M. Miura. Method for solving the Korteweg-de Vries equation. *Phys. Rev. Lett.*, 19:1095–1097, 1967.

[6] David Mumford. *Tata lectures on theta. II.* Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1984. Jacobian theta functions and differential equations, With the collaboration of C. Musili, M. Nori, E. Previato, M. Stillman and H. Umemura.

[7] Rafael Iório Jr. and Valéria de Magalhães Iório. *Equações diferenciais parciais: uma introdução.* Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1988.

[8] Roger K. Dodd, J. Chris Eilbeck, John D. Gibbon, and Hedley C. Morris. *Solitons and nonlinear wave equations.* Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], London, 1982.

[9] P. G. Drazin and R. S. Johnson. *Solitons: an introduction.* Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[10] Michel Remoissenet. *Waves called solitons.* Springer-Verlag, Berlin, third edition, 1999. Concepts and experiments.

[11] Francesco Calogero and Antonio Degasperis. *Spectral transform and solitons. Vol. I.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1982. Tools to solve and investigate nonlinear evolution equations, Lecture Notes in Computer Science, 144.

[12] R. Hirota. Exact solution of Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons. *Phys. Rev. Lett*, 27(18):1192–1194, 1971.

[13] R. M. Miura, C. S. Gardner, and M. D. Kruskal. Korteweg-de Vries equation and generalizations - 2 - existence of conservation laws and constants of motion. *J. Math. Phys.*, 9:1204–, 1968.

[14] L. A. Dickey. *Soliton equations and Hamiltonian systems.* World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 1991.

[15] B. A. Dubrovin, Ron Flickinger, and Harvey Segur. Three-phase solutions of the Kadomtsev-Petviashvili equation. *Stud. Appl. Math.*, 99(2):137–203, 1997.

[16] Franco Magri. On the geometry of soliton equations. *Acta Appl. Math.*, 41(1-3):247–270, 1995. Geometric and algebraic structures in differential equations.

[17] Franco Magri. A simple model of the integrable Hamiltonian equation. *J. Math. Phys.*, 19(5):1156–1162, 1978.

[18] Gregorio Falqui, Marco Pedroni, Franco Magri, and Paolo Casati. *Soliton equations, bi-Hamiltonian manifolds and integrability.* Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 1997.

[19] R. Iorio, F. Linares, and M. Scialom. KdV and BO equations with bore-like data. *Differential Integral Equations*, 11(6):895–915, 1998.

[20] Rogers C., Schief W.K., and Johnston M.E. Bäcklund and his works, applications in soliton theory. A ser publicado, Lecture Notes of the Australian Mathematical Society.

[21] Gerald V. Dunne, R. Jackiw, So-Young Pi, and Carlo A. Trugenberger. Self-dual Chern-Simons solitons and two-dimensional nonlinear equations. *Phys. Rev. D (3)*, 43(4):1332–1345, 1991.

[22] R. Jackiw and C. Rebbi. Solitons with fermion number 1/2. *Phys. Rev. D (3)*, 13(12):3398–3409, 1976.