O trabalho de Ennio De Giorgi sobre o problema de Plateau

Alexander Arbieto[*], Carlos Matheus[†] e Krerley Oliveira[‡]

17 de junho de 2003

1 Introdução

O objetivo deste artigo é fazer uma rápida investigação dos trabalhos de Ennio De Giorgi acerca do problema de Plateau. Para isso, começamos com uma introdução (não tão rápida assim!) à bela história desta questão.

Em 1760, Joseph Louis Lagrange apresentou o seguinte problema :

1. "Dada uma curva fechada, simples (i.e., sem auto-interseções) C, existe uma superfície que tem C como bordo cuja área é mínima dentre todas as superfícies de bordo C ?".

Este problema foi proposto por Lagrange para ilustrar um método (dito cálculo das variações), que ele criou para estudar problemas de minimização de comprimento de curvas, área de superfícies e energia, entre outros. O problema acima contou com o estudo do físico belga Joseph Antoine Ferdinand Plateau, o qual realizou experiências (entre 1843 e 1869) com películas de líquido (em especial, bolhas de sabão) sob a ação da tensão superficial. Como uma das conclusões desses experimentos, Plateau "provou" a existência de superfícies que minimizam área para "qualquer" contorno C. De fato, a "prova" de Plateau consistia em tomar o contorno C, mergulhar em água com sabão e, então, a superfície desejada é a representada pela bolha de sabão que aparecer. A explicação física para esta superfície assim obtida

[*]A. Arbieto foi parcialmente suportado pela Faperj-Brasil
[†]C. Matheus foi parcialmente suportado pela Faperj-Brasil
[‡]K. Oliveira foi parcialmente suportado pelo Cnpq-Brasil

minimizar a área é uma lei conhecida como *princípio da mínima ação*, que implica que as partículas da bolha de sabão irão se dispor sobre a superfície de modo a minimizar a energia (e, consequentemente, a área). Desde então, o problema 1 ficou conhecido como **o Problema de Plateau**. Note que Plateau era cego, o que torna seu feito surpreendente !

Como citado no agradável livro de do Carmo [dC], a situação do problema no início do século passado é destacada pela intrigante frase de Darboux : "A análise matemática não pôde até agora imaginar um método geral que permita começar o estudo desta bela questão". De fato, o problema de Plateau atraiu grandes matemáticos como Riemann, Weierstrass e Schwarz sendo, entretanto, apenas resolvido no caso de certos contornos poligonais.

As primeiras tentativas de resolver o problema de Plateau visavam *explicitar* uma solução. Porém, no século passado mudou-se este ponto de vista, visando-se não mais soluções explícitas, mas primeiro provar a existência de soluções e daí mostrar outras propriedades relevantes (unicidade, regularidade, etc.). Em particular, este novo ponto de vista foi aplicado, com sucesso, por dois matemáticos : o húngaro Tibor Radó (em 1930) e, independentemente, o americano Jesse Douglas (em 1931). Mais precisamente, se $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ é o disco unitário de $\mathbb{R}^2$ e $\partial D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ é o seu bordo, eles provaram que :

> Fixado um contorno C, existe uma função diferenciável $f : D \to \mathbb{R}^3$ que se estende a ∂D levando-o bijetivo e continuamente em C, cuja área é mínima dentre todas as outras as funções diferenciáveis que levam ∂D bijetiva e continuamente em C.

Dito de um modo mais claro, o resultado acima diz que existe uma solução do problema de Plateau no conjunto das superfícies que são imagens do disco D em $\mathbb{R}^3$ (ditas superfícies "tipo disco"). Isto resolve o chamado *problema de Plateau do disco*.[1]

O motivo da restrição de Douglas às superfícies tipo disco deve-se ao fato de que, sendo o enunciado do problema de Plateau um tanto *vago*, faz parte do problema identificar um espaço "razoável" de superfícies para se trabalhar. Isto nos conduz a uma série de possíveis generalizações do teorema de Douglas : para superfícies que não são tipo disco, imersas em $\mathbb{R}^n$ ou, em geral, para superfícies m-dimensionais contidas em $\mathbb{R}^n$ (i.e., qualquer dimensão

[1] Lembramos que em 1936, Douglas foi laureado com a famosa *medalha Fields* por este trabalho. Neste mesmo ano, Lars Alhfors também recebeu esta medalha, sendo eles os primeiros "medalha Fields" da história.

e codimensão), levando-nos aos vários problemas de Plateau existentes na literatura (ver a última seção deste artigo para maiores detalhes). Antes de entrarmos nestas questões, vamos discutir um pouco a idéia de Douglas.

A solução de Douglas consiste em utilizar a intuição física que aprendemos no primeiro parágrafo. Ou seja, definimos o que é energia de uma superfície (a qual representaremos pela função f correspondente) e em seguida, após uma certa escolha de espaços de funções, minimizamos a energia de f neste espaço. Não é difícil então mostrar que minimizar energia implica em minimizar a área. O ponto complicado é fazer a escolha certa dos espaços. Em particular, foi necessário métodos de análise do século passado, confirmando, como citado em [dC], a profecia de Darboux sobre a importância de novas ferramentas "para iniciar o estudo desta bela questão".

Voltando as possíveis generalizações do teorema de Douglas, existem na literatura (tanto em português quanto em inglês) bons textos que tratam dos casos de superfícies que não são tipo disco e/ou imersas em $\mathbb{R}^n$ (ver [L]), além da unicidade e regularidade no teorema de Douglas (ver [dC], [L]). Para maiores informações sobre estes casos, o leitor deve consultar as referências contidas em [dC] e [L], em especial o texto de do Carmo [dC].

Passemos agora para o problema de Plateau em dimensão e codimensão quaisquer. O problema de Plateau em toda sua generalidade só foi resolvido há aproximadamente 50 anos, usando uma ferramenta conhecida hoje como **Teoria Geométrica da Medida**. Dentre os principais matemáticos que utilizaram esta ferramenta (de modos distintos, como veremos) estão Herbert Federer, Wendell Fleming, Fred Almgren, W. Allard e, o "herói" deste artigo, Ennio De Giorgi. O enfoque de cada um destes autores é dado abaixo.

No formalismo de Federer e Fleming, uma superfície de dimensão k em $\mathbb{R}^n$ é uma *corrente retificável*, ou seja, um conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ sobre o qual temos várias propriedades geométricas interessantes. Por exemplo, apesar de S pode ser bastante geral, "quase" todo ponto de S admite um plano tangente canônico, e podemos integrar uma forma diferencial ω, gerando assim uma *corrente*, isto é, um funcional linear contínuo sobre as formas diferenciais :

$$\omega \mapsto \int_S \omega.$$

O nome *corrente* provém de uma analogia com correntes elétricas. Este conceito é uma generalização de distribuições devida a de Rham. Já correntes retificáveis foram definidas no trabalho [FF] de Federer e Fleming[2].

[2]Este artigo de 1960 recebeu o *AMS Steele Prize* em 1986 dada a sua importância.

Um ponto de vista diferente foi tomado por Almgren e também por Allard, os quais definiam superfícies k-dimensionais de $\mathbb{R}^n$ como um *varifold*. Sendo este conceito bastante técnico, por motivo de completeza, diremos aos entendidos apenas que um *varifold* é uma medida de Radon em $\mathbb{R}^n \times G(k,n)$, onde $G(k,n)$ é o Grassimaniano de k-planos em $\mathbb{R}^n$.

Por outro lado, Ennio De Giorgi pensava em uma hipersuperfície de $\mathbb{R}^n$ como o bordo de certos conjuntos E (ditos conjuntos de Caccioppoli), os quais tem boas propriedades geométrico-diferenciais. Por exemplo, o bordo ∂E de um conjunto de Caccioppoli E tem plano tangente canônico (em quase todo ponto). Neste aspecto, o formalismo de Ennio De Giorgi se assemelha bastante com as correntes de Federer e Fleming. De fato, tais formalismos são *equivalentes*, no sentido de se ter um "dicionário" entre as correntes, de Federer e Fleming, e os bordos de conjuntos de Caccioppoli, de De Giorgi.

Tendo tantos pontos de vista diferentes, o leitor pode-se perguntar: por que os autores escolheram justamente apresentar, como o título indica, os trabalhos de De Giorgi e não os trabalhos sobre superfícies que não são tipo disco, ou unicidade no teorema de Douglas, ou as correntes de Federer (ou ainda os varifolds de Almgren)? Para tentar responder a esta pertinente questão, vamos dar três motivos pelos quais fizemos esta opção.

O primeiro é de cunho pessoal. Após o curso de "Teoria Geométrica da Medida", no IMPA, com o professor Hermano Frid, ficamos com forte impressão acerca da beleza do problema de Plateau.

Além disso, lembramos que existem excelentes textos sobre o problema de Plateau no disco, inclusive unicidade no teorema de Douglas e superfícies (tipo disco ou não) em $\mathbb{R}^n$. Por isso, optamos por tratar o caso geral do problema de Plateau, e não os métodos acima (que não ajudam na investigação do problema geral).

Finalmente, uma vez decidido escrever sobre o problema geral, não foi difícil chegar ao nome de Ennio De Giorgi. Bom, para aprender sobre varifolds e correntes tem-se o livro de Herbert Federer [F] (que é um pouco exaustivo para os leitores menos experientes), do qual foi feito a obra-prima "Geometric Measure Theory" de Frank Morgan [M], um livro muito didático onde Morgan objetiva fazer um "roteiro de estudos" para o livro de Federer [F]. Por outro lado, não existem textos tão acessíveis quanto o livro do Morgan sobre a teoria de Ennio De Giorgi (sendo o livro de Enrico Guisti [G] uma das únicas referências). Portanto, é natural tentar escrever um roteiro de estudo (análogo ao de Morgan [M]) para o livro do Guisti [G], cuja primeira leitura não é tão fácil assim.

Agora esclarecidas as razões dos autores, vamos dizer porque existem poucas referências sobre as idéias de Ennio De Giorgi. Para isso vamos contar um pouco da vida pessoal e matemática de De Giorgi (parte dos dados abaixo provém de [N], [LM] e [E]).

Ennio De Giorgi nasceu em 1928 na cidade de Lecce (localizada no sul da Itália). Recebeu sua *laurea* (uma espécie de diploma de graduação) em Roma (em 1950). Começou suas pesquisas em 1951, já demonstrando suas habilidades matemáticas ante outros pesquisadores.

Sendo atraído por cálculo das variações, De Giorgi conheceu Renato Caccioppoli. Sugerindo certas simplificações as idéias de Caccioppoli, De Giorgi definiu o conceito de perímetro de conjuntos Borelianos e usou este conceito para estudar o problema de Plateau. Uma das jóias da coroa desse seu estudo foi o seguinte resultado: *Se $n \leq 7$, todas as soluções do problema de Plateau são regulares.* Mais tarde, em 1969, em colaboração com Guisti e Bombieri, ele mostrou que este resultado era ótimo: existem soluções singulares se $n \geq 8$.

Além disso, De Giorgi se interessou também por equações diferenciais parciais, provando um teorema de regularidade conhecido entre os especialistas como teorema de De Giorgi-Nash. De fato De Giorgi obteve este resultado antes de Nash, o que deixou Nash um pouco abalado, como relatado em [N].

Quanto à figura humana de Ennio De Giorgi, ele foi um defensor dos direitos humanos (participando ativamente da Anistia Internacional) que tinha muita fé em Deus (chegando ao ponto de ter tentado provar a existência de Deus com matemática). Apesar de ter ocupados cargos de prestígio, sempre teve uma aparência muito pobre. Com efeito, o matemático Garabedian certa vez comentou: "Era um cara sujo, magro, parecendo morto de fome. Mas eu descobri que ele havia escrito um artigo". Era sempre dedicado às pesquisas de tal modo que jamais estabelecera uma vida íntima ou alguma atividade fora da matemática. Ele morava literalmente em seu escritório de trabalho. Em resumo, era uma figura agradável e singular. Em particular, dado este "isolamento", seus trabalhos nunca foram publicados em revistas de prestígio ou de grande circulação. Por isso, muitas pessoas (como Guisti [G]) tiveram que divulgar suas idéias.

De Giorgi faleceu em 25 de outubro de 1996 em Pisa, Itália, deixando uma geração de jovens matemáticos que o tem como exemplo. Algumas fotos dele estão disponíveis em [M] e [E].

Fechando esta breve descrição da vida pessoal de De Giorgi, temos uma pequena anedota (será que é verdade?) :

"Toda vez que De Giorgi mudava de gabinete de trabalho (o que significava também uma mudança de casa), seus alunos eram encarregados de recolocar seus objetos (tanto pessoais quanto profissionais). Certa vez, numa dessas mudanças, os alunos ficaram espantados ao verem uma gaveta cheia de meias entre outras coisas. Ao vasculharem o fundo da gaveta, eles viram um calhamaço de papéis e perguntaram a De Giorgi se aqueles papéis eram apenas lixo. De Giorgi examinou bastante o conteúdo dos escritos e falou: não, não façam isso porque estes papéis são dois trabalhos que eu queria publicar a uns dois anos atrás mas havia perdido...".

Encerrando esta introdução, vamos falar mais um pouco sobre fortes aplicações da teoria geométrica da medida, cujo uso na matemática de hoje transcendeu as motivações originais de De Giorgi, Federer e Fleming.

A teoria geométrica da medida é a linguagem natural para estudar geometria de conjuntos singulares (no sentido de não serem regulares como vemos na geometria diferencial). Por isso, ela se adapta muito bem ao estudo de muitos fenômenos físicos como formação de bolhas de sabão, buracos negros, cristais e defeitos de materiais. Por exemplo, como dito em [M], Jean Taylor usou esta teoria para analisar bolhas de sabão e criaturas do mar. Por outro lado, Richard Shoen e Shing-Tung Yau[3] usaram esta teoria para provar de maneira original a conjectura de *positividade da massa* em cosmologia (sendo este resultado estendendido a uma prova da conjectura Riemanniana de Penrose por Bray). Em 2000, Hutchings, Morgan, Ritoré e Ros provaram a conjectura da *bolha dupla* que grosseiramente diz que a bolha dupla de sabão é a maneira mais econômica de se empacotar dois volumes prescritos *a priori*. Para aprender mais sobre esta e muitas outras conjecturas interessantes que utilizam teoria geométrica da medida veja [M] e a seção 5 abaixo.

2 Soluções regulares para o problema de Plateau: a estratégia básica

Como visto na introdução, estaremos interessados em estudar hiperfícies do $\mathbb{R}^n$ que são mínimas (ou seja, minimizam área). Para isto, a estratégia a ser adotada será :

1. Definir o que é uma superfície (em geral de modo a ter-se um conceito

[3] Este trabalho (somado a outras importantes contribuições) levou Yau a ganhar a medalha Fields em 1982.

mais amplo que variedades, mas com alguma geometria diferencial);

2. Mostrar que existem superfícies (no sentido acima) que minimizam área via um teorema de compacidade;

3. Provar a regularidade da superfície acima (i.e., a superfície acima existe "fisicamente" em $\mathbb{R}^n$). Em outras palavras, a superfície mínima obtida acima é uma variedade suave (no sentido usual).

Este tipo de método (dito método direto) é um velho amigo dos matemáticos que trabalham com EDP's. A vantagem deste método é que a definição de superfície pode ser tão geral que o teorema de compacidade no item 2 acima é fácil de se provar. Por outro lado, uma definição muito geral implica em sérias dificuldades no momento em que tentamos provar o item 3. De fato, isto será nitidamente verificado nas subseções a seguir, onde a regularidade ocupará a posição central no desenrolar da história.

Vamos começar (seguindo o item 1 da estratégia) por descrever precisamente quais as superfícies em questão.

3 Preliminares

Para fixar notação, dedicaremos esta seção à relembrar ou introduzir alguns conceitos menos usuais. Aos que estes conceitos soam de forma familiar, recomendamos que passem a ler a próxima seção. Dizemos mais, aos leitores que forem se "perdendo" mas que estão curiosos pelo final da história, recomendamos fortemente sempre consultar a subseção 4.2, a qual é uma espécie de oásis no meio do mar de resultados que se seguiram.

Inicialmente, introduziremos uma maneira de medir o tamanho de um subconjunto do $\mathbb{R}^n$. Esta maneira consiste em associar um número, chamado dimensão de Hausdorff, a cada subconjunto de modo que qualquer aberto do $\mathbb{R}^n$ estará associado ao número n, enquanto retas ao número 1 e pontos ao 0. Conjuntos fractais como o conjunto de Cantor usual, estarão associados a números fracionários.

Definição 3.1. A medida de Hausdorff s-dimensional de um conjunto A é definida por:

$$H_s(A) = \lim_{\epsilon \to 0} \sup_{|\mathcal{U}| \leq \epsilon} \left\{ \sum_{U \in \mathcal{U}} (diamU)^s ; A \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \right\}$$

onde $|\mathcal{U}| = \sup_{U \in \mathcal{U}} \text{diam} U$ é o diâmetro da partição $\mathcal{U}$.

Observe que em geral, $m_s(A) \in [0, \infty]$. É um exercício para o leitor verificar que m_s é de fato uma medida, se $s = n$ então H_s é de fato a medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ e que se $s_1 < s_2$, então $H_{s_1}(A) \geq H_{s_2}(A)$. Vamos introduzir agora a definição de dimensão de Hausdorff de um conjunto:

Definição 3.2. Definiremos a **dimensão de Hausdorff** de A como:

$$HD(A) = \sup\{s; H_s(A) = \infty\}$$

Um exercício instrutivo para o leitor fixar o conceito de dimensão de Hausdorff é calcular a dimensão do conjunto de Cantor ternário usual.

3.1 Funções BV

Definição 3.3. Diremos que uma função integrável $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tem *variação limitada* em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, se

$$\int_\Omega |Df| := \sup\{\int_\Omega f \ \text{div} g; g \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n) \text{ e } \|g(x)\| \leq 1\} < \infty$$

onde $\text{div} g(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial x_i}(x)$ e $C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ é o conjunto das funções que são infinitamente diferenciáveis em Ω e com suporte compacto contido em Ω.

O conceito de variação de uma função pode ser melhor entendido com o exemplo abaixo:

Exemplo 3.4. Se f possui todas as derivadas parciais integráveis, então por integração por partes,

$$\int_\Omega f \ \text{div} g = \int_\Omega \text{grad} f \ g.$$

Tomando o supremo das igualdades no conjunto $\{g \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n); \|g(x)\| \leq 1\}$ temos que

$$\int_\Omega |Df| = \int_\Omega \|\text{grad} f\|.$$

Uma das primeiras propriedades importantes de funções BV é que a variação é uma função semicontínua:

Lema 3.5. *Seja f_j uma sequência de funções BV convergindo em $L^1(\Omega)$ para uma função $f \in L^1(\Omega)$, isto é,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_j - f| = 0.$$

então:

$$\int_\Omega |Df| \leq \liminf \int_\Omega |Df_j|$$

Demonstração. A prova deste lema é uma aplicação imediata do lema de Fatou. Para cada $g \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, temos que $\|f_j \mathrm{div} g - f \mathrm{div} g\|_{L^1} \to 0$ donde, pelo lema de Fatou vale:

$$\int_\Omega f \mathrm{div} g \leq \liminf \int f_j \mathrm{div} g \leq \liminf \int_\Omega |Df_j|$$

Tomando o supremo do lado esquerdo provamos o lema. □

Exemplo 3.6. Se E é um conjunto tal que a fronteira $\partial E \cap \Omega$ é C^2, pelo teorema de Gauss-Green, se χ_E denota a função característica de E:

$$\int_\Omega \chi_E \mathrm{div} g = \int_{E\cap\Omega} \mathrm{div} g = \int_{\partial(E\cap\Omega)} g(x)\eta(x) dH^{n-1},$$

onde H^{n-1} é a medida de Hausdorff (que coincide com a medida de Lebesgue) da superfície $\partial E \cap \Omega$.

Assim,

$$\int_\Omega |D\chi_E| = \sup\{\int_\Omega \chi_E \mathrm{div} g; \|g(x)\| \leq 1, g \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)\} = H^{n-1}(E \cap \Omega).$$

O exemplo anterior indica que a variação da função característica χ_E de um conjunto E generaliza a noção de área do bordo. Inspirados no exemplo anterior:

Definição 3.7. $\int_\Omega |D\chi_E|$ é o *perímetro* de um conjunto E com respeito a Ω. Quando o perímetro for finito, E é dito um *conjunto de Caccioppoli.*

Exemplo 3.8. Atenção: A igualdade $\int_\Omega |D\chi_E| = H_{n-1}(\partial E \cap \Omega)$ do exemplo 3.6 nem sempre acontece! Por exemplo, se $\{r_i\}$ é uma enumeração dos pontos com coordenadas racionais e $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} B(r_i, 2^{-i})$ então, pelo lema anterior o perímetro de E é finito já que se $E_k = \bigcup_{i=1}^{k} B(r_i, 2^{-i})$ então $\chi_{E_k} \to \chi_E$ em $L^1(\mathbb{R}^n)$ e

$$\int_{\mathbb{R}^n} |D\chi_{E_k}| \leq C(n)$$

onde $C(n)$ só depende de n. Porém, $H_{n-1}(\partial E) = \infty$ pois os pontos com coordenadas racionais são densos em $\mathbb{R}^n$, donde não ocorre a igualdade.

Observação 3.9. Podemos definir uma norma no conjunto $BV(\Omega)$, o conjunto das funções de variação limitada, pela seguinte expressão:

$$\|f\|_{BV} = \int_{\Omega} |f| + \int_{\Omega} |Df|.$$

O leitor pode verificar que $BV(\Omega)$ com esta norma é um espaço de Banach.

Nosso primeiro passo é mostrar que existem conjuntos de Caccioppoli minimizantes, o que corresponde ao análogo as superfícies mínimas no sentido clássico. Para tanto, utilizaremos um teorema muito útil de compacidade para funções BV. Antes porém, relembraremos a definição de função Lipschitz:

Definição 3.10. Uma função f é dita Lipschitz, se existe uma constante C tal que $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$.

As funções Lipshitz tem lugar em vários ramos da matemática (com aplicações desde a geometria das superfícies mínimas até os sistemas dinâmicos, na construção das *medidas SRB*). Estas funções tem a propriedade de que, apesar de não serem necessariamente diferenciáveis, verificam essa propriedade em quase todo ponto (pelo teorema de Rademacher, ver [EG]). Outro fato de interesse é que essas funções preservam conjuntos de medida nula.

Diremos que um conjunto tem bordo Lipschitz, se localmente seu bordo pode ser escrito como gráfico de uma função Lipschitz. Nesse contexto:

Teorema 3.11 (Rellich). *Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ com bordo Lipschitz. Dada uma sequência $f_j \in BV(\Omega)$ tal que $\int_\Omega |f_j| + \int_\Omega |Df_j| \leq M$ para todo j, então existe $f \in BV(\Omega)$ tal que:*

1. $\int_\Omega |f - f_j| \to 0$
2. $\int_\Omega |Df| \leq M$.

Em outras palavras: O conjunto das funções BV com norma limitada por um $M > 0$ é relativamente compacto na topologia induzida pela norma L^1.

Reunido os ingredientes, mostraremos agora a existência de conjuntos de Caccioppoli minimizantes:

Teorema 3.12 (Existência de Superfícies Mínimas). *Seja Ω um aberto limitado com bordo Lipschitz. Dado um conjunto de Caccioppoli F, existe um conjunto de Caccioppoli E coincidindo com F fora de Ω tal que para todo conjunto de Caccioppoli L coincidindo com F fora de Ω vale:*

$$\int |D\chi_E| \leq \int |D\chi_L|$$

Demonstração. Como Ω é limitado, podemos escolher r tal que $\Omega \subset B_r(0)$. Assim, dado qualquer conjunto L coincidindo com F fora de Ω, temos que:

$$\int |D\chi_L| = \int_{B_r(0)} |D\chi_L| + \int_{\mathbb{R}^n - B_r(0)} |D\chi_F|.$$

Deste modo, basta mostrar que existe um conjunto E coincidindo com F fora de Ω tal que para todo L conjunto de Caccioppoli coincidindo com F fora de Ω vale:

$$\int_{B_r(0)} |D\chi_E| \leq \int_{B_r(0)} |D\chi_L| \tag{1}$$

Como $\int_{B_r(0)} |D\chi_F|$ é limitado, tomando E_n uma sequência minimizante para (1), temos que $\int_{B_r(0)} |D\chi_{E_j}|$ é limitado por algum $M > 0$. Pelo teorema de compacidade de Rellich, existe alguma função $f \in BV(\Omega)$ tal que $\chi_{E_j} \to f$ em $L^1(B_r(0))$ e $\int_{B_r(0)} |Df| \leq M$.

Observe que como χ_{E_j} converge para f, temos que f coincide em qtp com a função característica de algum conjunto E. Pelo lema 3.5, temos que E é minimizante. $\square$

O teorema acima é dito existência de superfícies mínimas pois, como vimos na introdução, De Giorgi considera como superfície o bordo de conjuntos de Caccioppoli e o enunciado acima diz que o perímetro (i.e., a área) pode ser minimizada. Note que, assim como havíamos comentado, este resultado não foi muito difícil de ser provado.

Para concluir esta subseção, veremos um resultado que mostra que conjuntos de Caccioppoli são aproximados por conjuntos suaves. Para a idéia da prova deste teorema veja o apêndice deste artigo.

Teorema 3.13. *Seja E um conjunto de Caccippoli. Então existe uma sequência de conjuntos E_j com o bordo C^∞ tal que:*

1. $\int_\Omega |\chi_E - \chi_{E_j}| \to 0$

2. $\int_\Omega |D\chi_{E_j}| \to \int_\Omega |D\chi_E|$.

Nosso principal objetivo agora é mostrar um conjunto de Caccioppoli (**não necessariamente minimizante**), não só é aproximado por conjuntos suaves, mas ele próprio é suave na maioria dos pontos de seu bordo.

3.2 Regularidade de conjuntos de Caccioppoli I : o caso geral

Durante esta subseção estaremos interessados no estudo de conjuntos de Caccioppoli E quaisquer e vamos procurar entender como ∂E é na maioria de seus pontos. Um objeto de importância nesta subseção será uma generalização de vetor normal. Com o intuito de motivar a definição geral, vamos fazer como em Análise (especialmente distribuições), ou seja, estudar primeiro um exemplo caso regular:

Exemplo 3.14. Suponha ∂E uma hipersuperfície C^2 e $x \in \partial E$. Defina $\nu_\rho(x) := \frac{\int_{B_\rho(x)} D\varphi_E}{\int_{B_\rho(x)} |D\varphi_E|}$. Usando-se a teoria de traço de funções BV e o teorema de Stokes, pode-se provar que

$$\nu_\rho(x) = \frac{1}{m_{n-1}(\partial E \cap B_\rho(x))} \cdot \int_{\partial E \cap B_\rho(x)} \nu \cdot dH_{n-1}$$

onde ν é a normal interior a ∂E e H_{n-1} é a medida de Hausdorff $(n-1)$-dimensional. Por continuidade de ν, é fácil verificar que $\nu(x) = \lim_{\rho\to 0} \nu_\rho(x)$. Ou seja, se ∂E é hipersuperfície C^2 então $\lim_{\rho\to 0} \nu_\rho(x)$ é o vetor unitário normal interior (para detalhes ver [G][pg.44]).

Inspirados por este exemplo faremos a definição:

Definição 3.15. Um ponto $x \in \partial E$ pertence ao **bordo reduzido** (denotado por $\partial^* E$) se valem as seguintes condições:

1. $\int_{B_\rho(x)} |D\varphi_E| > 0$ para todo $\rho > 0$,
2. Existe o limite $\lim_{\rho \to 0} \nu_\rho(x) = \nu(x)$, onde $\nu_\rho(x) = \frac{\int_{B_\rho(x)} D\varphi_E}{\int_{B_\rho(x)} |D\varphi_E|}$
3. $|\nu(x)| = 1$

Observação 3.16. Pelo teorema de Besicovitch de diferenciação de medidas (ver [EG]), segue que $\nu(x)$ existe e $|\nu(x)| = 1$ para $|D\varphi_E|$- quase todo $x \in \mathbb{R}^n$ e, mais ainda, $D\varphi_E = \nu |D\varphi_E|$.

Observação 3.17. **A definição acima generaliza a noção de vetor normal unitário**, como comprova o exemplo 3.14. De fato, se ∂E é C^2, pelo exemplo temos que $\partial^* E = \partial E$ e $\nu(x)$ é o vetor normal unitário interior.

Vamos ilustrar a definição 3.15 com mais um exemplo:

Exemplo 3.18. Seja E o quadrado unitário de $\mathbb{R}^2$. Na definição 3.15, as condições 1 e 2 são satisfeitas em todo o bordo e 3 só não é satisfeita nos pontos onde o bordo não é suave (em tais pontos vale $|\nu| = \frac{1}{\sqrt{2}}$). Fica como exercício verificar os detalhes.

Após estes exemplos, vamos preparar a chegada do teorema de regularização com alguns lemas:

Lema 3.19. *Se E é conjunto de Caccioppoli então $\partial^* E$ é denso em ∂E.*

No que se segue, $\nu_i(x)$ denotará a i-ésima componente do vetor $\nu(x)$.

Lema 3.20. *Se $\nu(x)$ não varia muito então E tem, localmente, bordo Lipschitz. Ou seja, se $\nu_n(x) \geq q > 0$ para algum q fixo e $|D\chi_E|$-q.t.p. $x \in \Omega$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto convexo) então existe $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ e $f : A \to \mathbb{R}$ função Lipschitz tais que:*

$$\partial E \cap \Omega = \{(y, t) : y \in A, t = f(y)\} = graf(f).$$

Mais ainda, $|f(y) - f(\widetilde{y})| \leq q^{-1}\sqrt{1 - q^2}|y - \widetilde{y}|$, i.e., a constante de Lipschitz de f só depende de q.

Ainda sobre o lema 3.20 podemos dizer:

Lema 3.21. *Nas condições do lema 3.20, valem as fórmulas para qtp x:*

$$\nu_i(x) = \frac{D_i f(y)}{\sqrt{1+|Df(y)|^2}}, \quad i = 1, \ldots, n-1$$

e

$$\nu_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1+|Df(y)|^2}}.$$

Observação 3.22. Como funções Lipschitz tem derivadas em qtp (teorema de Rademacher [EG]), tomar derivadas no lema acima faz sentido.

Colocando estes lemas geométricos lado a lado temos o teorema de regularidade, o qual é o resultado central desta subseção:

Teorema 3.23. *Seja E Caccioppoli em Ω tal que $\nu(x)$ existe para todo $x \in \partial E \cap \Omega$ e é* ***contínuo****. Então $\partial E \cap \Omega$ é uma hipersuperfície C^1.*

Demonstração. Por hipótese, ν é contínuo. Porém, $|\nu(x)| = 1$ em $\partial^* E$ e, pelo lema 3.19, $\partial^* E$ é denso em ∂E. Logo $|\nu(x)| = 1$ em ∂E. Fixe $x_0 \in \partial E \cap \Omega$. A menos de uma rotação, como $|\nu(x_0)| = 1$, podemos colocar $\nu(x_0)$ no semi-eixo positivo x_n e supor $\nu_n(x) \geq q > 0$ em vizinhança convexa de x_0, para $q > 0$ fixado. Pelo lema 3.20, ∂E é, nesta vizinhança de x_0, o gráfico de uma função Lipschitz f que verifica (pelo lema 3.21)

$$(*) D_i f(y) = \frac{\nu_i(x)}{\nu_n(x)}, x = (y, f(y)).$$

Como, $\nu_i(x)$, $\nu_n(x)$ são contínuas, $\nu_n(x)$ afastado de 0, $(*)$ diz que $D_i f(y)$ coincide em qtp com uma função contínua. Portanto, f é C^1. □

4 A idéia de Ennio De Giorgi

Primeiramente, vamos tornar oficial a definição de conjunto mínimo:

Definição 4.1. Um conjunto de Caccioppoli E é dito *mínimo* em Ω se $\int_\Omega |D\chi_E| \leq \int_\Omega |Df|$, para toda $f \in \mathrm{BV}$ tal que $\mathrm{supp}(f - \chi_E) \subset \Omega$.

A idéia de Ennio de Giorgi consiste em provar o seguinte lema, o qual está centrado na hipótese abaixo (dita condição de De Giorgi (CDG)):

Lema 4.2 (Lema de De Giorgi). *Para todo $n \geq 2$ e $0 < \alpha < 1$, existe uma constante $\sigma(n, \alpha)$ tal que se E é Caccioppoli em $\mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\rho > 0$, E é mínimo em $B_\rho(x)$ e*

$$(CDG) \int_{B_\rho(x)} |D\varphi_E| - |\int_{B_\rho(x)} D\varphi_E| < \sigma(n, \alpha) \cdot \rho^{n-1}$$

então vale

$$\int_{B_{\alpha\rho}(x)} |D\varphi_E| - |\int_{B_{\alpha\rho}(x)} D\varphi_E| \leq \alpha^n \left\{ \int_{B_\rho(x)} |D\varphi_E| - |\int_{B_\rho(x)} D\varphi_E| \right\}.$$

Este lema é um dos mais duros da teoria. Apesar de muito técnico e aparentemente não informar nada intuitivo, uma interpretação geométrica pode ser feita assim. Defina

$$\Lambda(E, \rho) := \rho^{1-n} \cdot \{\int_{B_\rho} |D\chi_E| - |\int_{B_\rho} D\chi_E|\}.$$

Pelas propriedades do bordo reduzido temos

$$\Lambda(E, \rho) = \rho^{1-n}\{H_{n-1}(B_\rho \cap \partial^* E) - |\int_{B_\rho \cap \partial^* E} \nu(x) dH_{n-1}\}.$$

Isto significa que $\Lambda(E, \rho)$ mede o quanto o vetor normal varia e, portanto, o Lema de De Giorgi nos dá informação sobre esta variação (de fato a condição de De Giorgi (CDG) pede que esta variação $\Lambda(E, \rho)$ seja menor que uma constante pequena $\sigma(n, \alpha)$). Este tipo de resultado sobre vetores normais é útil para a regularidade, como vimos no teorema 3.23. Os teoremas que darão regularidade em qtp são os seguintes.

4.1 Regularidade de conjuntos de Caccioppoli II : o caso mínimo

Teorema 4.3. *Suponha E Caccioppoli em $\mathbb{R}^n$, $x \in \partial E$, $\rho > 0$ e $0 < \alpha < 1$ tais que E é mínimo em $B_\rho(x)$ e que vale (CDG) do lema 4.2.*

Então $\partial E \cap B_\rho(x)$ é hipersuperfície analítica para $r = \rho(\alpha - \alpha^{\frac{n}{n-1}})$.

Teorema 4.4. *Seja E Caccioppoli, mínimo em $B_1(0)$. Então $H_{n-1}(\partial E - \partial^* E) = 0$.*

A demonstração destes teoremas contém uma bela matemática, a qual inclui teoria da medida (coberturas de Vitali), Análise e EDP (funções harmônicas, equações elíticas) e geometria. Alguns lemas são bastante importantes (ao ponto de terem aplicações a Geometria Simplética, na prova do famoso teorema *non-squeezing* de Gromov).

Porém, a prova é intrincada o suficiente para desmotivar os bravos leitores que resistiram até aqui. Por isso, mais detalhes foram deixados para o apêndice. Vamos apenas mostrar como o Lema de De Giorgi prova a regularidade em quase todo ponto.

Não é difícil ver que se x está no bordo reduzido $\partial^* E$ então x satisfaz a condição de De Giorgi (CDG). Com efeito, tome $\varepsilon < \frac{2\sigma(n,\alpha)}{n\omega_n}$, onde ω_m é o volume da bola unitária m-dimensional. Por um (importante) lema a ser enunciado no apêndice, tem-se sempre $\int_{B_\rho(x)} |D\chi_E| \leq \frac{1}{2} n\omega_n r^{n-1}$, se E é mínimo e $x \in \partial E$. De outro lado, se x está no bordo reduzido então $|\nu_\rho(x)| \to 1$ quando $\rho \to 1$. Concluímos que, escrevendo a definição de ν_ρ,

$$\int_{B_\rho(x)} |D\varphi_E| - |\int_{B_\rho(x)} D\varphi_E| < \varepsilon \int_{B_\rho(x)} |D\chi_E| \leq \varepsilon(\frac{1}{2} n\omega_n \rho^{n-1}) \leq \sigma(n,\alpha)\rho^{n-1},$$

para ρ pequeno, ou seja, verificamos (CDG).

Agora, vamos ver no apêndice que, como corolário do lema de De Giorgi (ver o corolário 6.6 no apêndice), todo ponto onde vale (CDG) está no bordo reduzido $\partial^* E$. Entretanto, o teorema 4.3 diz que todo ponto que satisfaz (CDG) (logo, todo ponto de $\partial^* E$) tem vizinhança onde ∂E é regular. Em outras palavras, pelo teorema 4.3 e lema 3.19, ∂E é regular numa vizinhança de qualquer ponto do aberto e denso $\partial^* E$. Mais ainda, pelo teorema 4.4, H_{n-1} quase todo ponto de ∂E está em $\partial^* E$. Resumindo,

Se E é Caccioppoli mínimo então ∂E é regular (analítica) numa vizinhança de H_{n-1} quase todo ponto.

4.2 Mais um pouco de motivações

Caro leitor, não pense que os autores não estão conscientes da quantidade de informação descrita nos emocionantes parágrafos acima: funções BV, método direto das EDPs, teoria da medida e até lemas com aplicações à geometria simplética (em particular o misterioso teorema de Gromov) e, quem diriam, a teoria ergódica (medidas SRB, mapas expansores por partes). Isto é que é uma verdadeira rede de conexão de idéias. Por isso, gastaremos um parágrafo (ou dois se nos permitirem) para explicar, de maneira global, o que fizemos até agora e o que pretendemos fazer adiante.

Lembramos que estamos seguindo o método direto: introduzimos o conceito de superfície na definição 3.7 e vimos (no teorema 3.12) que é relativamente simples provar a existência de superfícies mínimas. Seguindo ainda a idéia do método direto, estudamos a regularidade dos conjuntos de Caccioppoli em 2 casos: o caso geral e o caso mínimo, sendo este último o mais interessante pois é ligado ao problema de Plateau. A partir daqui é que começa a parte mais díficil da teoria.

O fluxo de raciocínio foi a grosso modo assim: o centro das atenções foi o vetor normal (e consequentemente o bordo reduzido, um conceito intimamente relacionado). De fato, observamos no teorema 3.23 que o vetor normal variar bem implica em regularidade da nossa solução mínima ao problema de Plateau (a qual é a priori somente mensurável). Aproveitando esta idéia, aprendemos como o Lema de De Giorgi 4.2 sobre variação do vetor normal interior implica em um fortalecimento substancial da regularização no caso mínimo.

Porém, ainda resta saber se os pontos singulares (i.e., os pontos não regulares) existem mesmo ou foi somente uma "falha" dos teoremas acima, os quais podem ter sido um tanto fracos de modo a não cobrir os casos gerais.

Esta questão é muito interessante e ela será o tema da seção seguinte. Fazendo um pouco de cenas dos próximos capítulos, adiantaremos o que vai acontecer. Vamos mostrar que pontos singulares, apesar de não terem plano tangente associado (i.e., falta-lhes geoemtria diferencial), estão associados a *cones* tangentes. O passo a seguir é provar que tais cones não existem (ao menos se a dimensão é baixa, $n \leq 7$ para ser preciso). Com isso, concluímos (de novo em baixas dimensões) que os pontos singulares não podem existir. Para completar, tem-se um resultado de Bombieri[4], De Giorgi e Guisti onde prova-se a existência de pontos singulares em dimensões altas (a partir de 8).

Sem mais demoras, passemos ao próximo objeto de estudo.

4.3 Pontos Singulares e Cones Mínimos

Começaremos por descrever um procedimento de estudo local de singularidades bastante difundido em várias partes da matemática, o famoso processo

[4]Enrico Bombieri foi premiado, assim como outros matemáticos citados neste artigo, com a medalha Fields (em 1974) por essa e outras diversas contribuições.

de *blow-up*.

Lema 4.5. *Seja E mínimo em B_1 tal que $0 \in \partial E$. Para $t > 0$ defina $E_t := \{x \in \mathbb{R}^n : tx \in E\}$. Então dada $t_j \to 0$ sequência de números, existe uma subsequência s_j tal que E_{s_j} converge localmente em $\mathbb{R}^n$ a um cone mínimo C.*

Diremos que C acima é o cone tangente a E em 0 e o procedimento acima é o *blow-up* de E em 0. Observe que se E é regular em 0, é fácil ver que C é um semi-espaço. O lema abaixo trata da recíproca.

Lema 4.6. *Suponha E_j sequência de conjuntos mínimos em B_1 convergindo localmente a um* ***conjunto*** *mínimo C. Seja $x \in \partial^* C$ e $x_j \in \partial E_j$, $x_j \to x$. Então, se j é grande, x_j é regular para ∂E_j e $\nu^{E_j}(x_j) \to \nu(x)$, onde ν^{E_j} é o vetor normal relativo a E_j.*

Agora estamos em posição de concluir:

Teorema 4.7. *Suponha que não existem cones mínimos singulares em $\mathbb{R}^n$. Então, para qualquer $E \subset \mathbb{R}^n$ mínimo em B_ρ, $\partial E \cap B_\rho$ é hipersuperfície analítica.*

Demonstração. É suficiente provar que todo ponto de $\partial E \cap B_\rho$ é regular. Como E_k converge localmente a C cone mínimo (pelo lema 4.5) e, por hipótese, não existem cones mínimos singulares, 0 é ponto regular de C. Pelo lema 4.6, se j é grande, $x_j = \frac{x}{j}$ é regular em E_j. Como a transformação $x \to \frac{x}{j}$ preserva regularidade, x é ponto regular de E. $\square$

Portanto, reduzimos o problema de pontos singulares a existência de cones em $\mathbb{R}^n$. Sobre isso temos:

Teorema 4.8 (Simons). *Suponha E cone mínimo tal que seu bordo ∂E é regular em $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Então, ou ∂E é um hiperplano ou $n \geq 8$.*

Um corolário imediato do teorema de Simons é o resultado central de regularidade que aparece neste artigo:

Teorema 4.9. *Se $n \leq 7$ e E é mínimo em B_ρ então $\partial E \cap B_\rho$ é hipersuperfície analítica.*

Demonstração. Basta juntar o teorema de Simons e o teorema 4.7. $\square$

Para encerrar esta seção, o seguinte resultado dá exemplos onde o teorema acima falha em dimensões altas:

Teorema 4.10 (Bombieri, De Giorgi, Guisti). *Seja S o cone definido por*

$$S := \{x \in \mathbb{R}^{2m} : x_1^2 + \cdots + x_m^2 < x_{m+1}^2 + \cdots + x_{2m}^2\}.$$

Se $m \geq 4$, S é cone mínimo singular na origem.

A prova deste resultado encontra-se em [BDGG]. O cone S acima definido no caso $m = 4$ (i.e., $S = \{x \in \mathbb{R}^8 : x_1^2 + \cdots + x_4^2 < x_5^2 + \cdots + x_8^2\}$) é dito o cone de Simons.

Uma pergunta natural a partir destes teoremas é: já que existem os pontos singulares, qual é o *tamanho* máximo do conjunto singular? Para a pergunta fazer sentido, temos que dizer o que significa tamanho. Mas isto é fácil, prezado leitor: por que não usar a dimensão de Hausdorff?

Isto nos conduz a nossa última seção (módulo considerações finais e o esperado apêndice).

4.4 Estimativa da dimensão do conjunto singular

Provaremos um teorema de Federer segundo o qual o conjunto singular $\Sigma := \partial E - \partial^* E$ tem dimensão de Hausdorff no máximo $n-8$. Em outras palavras, este resultado refina o teorema 4.4. Os seguintes lemas vem ao resgate.

Lema 4.11. *Seja E um conjunto mínimo em $\Omega \subset \mathbb{R}^8$. Então o conjunto singular $\Sigma \cap \Omega$ consiste no máximo de pontos isolados.*

Observação 4.12. Nas hipóteses do lema 4.11, caso E seja um cone, então o conjunto singular tem no máximo um ponto. Com efeito, se tivesse mais de um então, como E é cone, toda semi-reta ligando estes dois pontos seria formada por pontos singulares, contrariando a conclusão do lema.

Lema 4.13. *Suponha E conjunto mínimo em Ω tal que $H_k(\Sigma) > 0$. Então existe C cone mínimo em $\mathbb{R}^n$ tal que $H_k(\partial C - \partial^* C) > 0$.*

Lema 4.14. *Se C é cone mínimo com $H_k(\partial C - \partial^* C) > 0$ então existe $x_0 \neq 0$ tal que fazendo o blow-up de C em x_0 obtemos um cilindro mínimo $Q = A \times \mathbb{R}$ com $H_k(\partial Q - \partial^* Q) > 0$. Mais ainda, A é um cone mínimo.*

Entra em cena agora o teorema de Federer:

Teorema 4.15 (Federer). *Suponha E mínimo em Ω e seja $\Sigma = (\partial E - \partial^* E) \cap \Omega$. Então $H_s(\Sigma) = 0$, $\forall\ s > n - 8$.*

Demonstração. Seja $k > 0$ com $H_k(\Sigma) > 0$. Pelo lema 4.13 podemos construir cone mínimo C em $\mathbb{R}^n$ tal que $H_k(\partial C - \partial^* C) > 0$. Pelo lema 4.14, existe $x_0 \neq 0$ tal que fazendo blow-up de C por x_0 obtemos cilindro $Q = A \times \mathbb{R}$ com $H_k(\partial Q - \partial^* Q) > 0$. Logo o cone mínimo A satisfaz $H_{k-1}(\partial A - \partial^* A) > 0$. Repetindo este argumento concluímos que para todo $m \leq k$ inteiro existe cone mínimo C em $\mathbb{R}^{n-m}$ tal que $H_{k-m}(\partial C - \partial^* C) > 0$. Agora, pela observação 4.12, cones mínimos em $\mathbb{R}^8$ tem no máximo um ponto singular donde, para todo m inteiro tal que $k - m > 0$, vale $n - m > 8$. Logo $k \leq n - 8$. $\square$

5 Considerações Finais

Este é um momento crítico. Explico: neste ponto temos que decidir entre continuar a escrever sobre os vários desdobramentos da teoria geométrica da medida (inclusive outras contribuições de De Giorgi) ou cometer o pecado de privilegiar apenas uma parte da teoria e omitir outras. Bom, optamos pela última. Porém, para aliviar a carga que este pecado acarreta indicaremos, ao leitor desejoso em continuar esta aventura pela geometria do problema de Plateau, algumas possíveis veertentes da teoria.

As funções BV foram bastante úteis no enfoque de De Giorgi mas ela aparecem em outras aplicações. Por exemplo, na teoria ergódica: construção de *medidas físicas (ou SRB)* para sistemas dinâmicos expansores por partes e decaimento de correlações.

Por outro lado, na geometria Riemanniana, Schoen e Yau foram capazes de encontrar obstruções à existência de métricas de curvatura positiva usando para isto os teoremas de regularidade que vimos acima.

Além disso, a conjectura da bolha dupla foi provada por Hutchings, Morgan, Ritoré e Ros usando teoria geométrica da medida. Também foi provada a conjectura da casa de abelhas (honey comb conjecture) usando esta teoria (a conjectura diz que a melhor maneira de ladrilhar o plano com perímetro mínimo é utilizando hexágonos, como fazem as abelhas). Entretanto, esta conjectura foi mostrada ser falsa em 3 dimensões.

Outra omissão foram os outros problemas de Plateau. Por exemplo, se fixarmos que nossas superfícies só podem ser *gráficos*, o problema de Plateau continua tendo solução? Esta é a famosa parte *não-paramétrica* da teoria de De Giorgi (o que vimos acima denomina-se parte *paramétrica* da teoria).

Este lado da história é motivado pelo famoso teorema de Bernstein: gráficos mínimos de funções $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são planos (i.e., f é linear). Sobre isso muita coisa é sabida, como por exemplo que um teorema de regularidade também vale no caso não-paramétrico, que uma condição dita estabilidade é suficiente para caracterizar o plano (teorema de Barbosa-do Carmo), etc. Poderíamos ainda proceder diferente e tomar duas curvas convexas em planos paralelos de $\mathbb{R}^3$ e perguntar se existe uma superfície mínima com um certo tipo topológico fixado. Sobre este problema conjectura-se (conjectura de Meeks) que tais superfícies não existem.

Logicamente poderíamos alongar a lista de matemática que utiliza os métodos de teoria geométrica da medida. Porém, após tantas informações e tantas possibilidades como descritas acima, o leitor certamente não permitiria que continuássemos (e, talvez, o editor da revista nos censurasse por isso!). Portanto, vamos nós mesmos nos censurar (antes que alguém o faça...) e tomar a atitude moralmente correta de finalizar aqui.

Para encerrar o artigo gostaríamos de parafrasear um colega nosso do IMPA (quem será?): *Senhores foi um prazer.*

Agradecimentos. Os autores são gratos aos colegas do IMPA que leram versões preliminares e fizeram sugestões que contribuiram para o enriquecimento do trabalho. Em particular, agradeçemos a Cleber Haubrichs dos Santos e Marcos Petrúcio Cavalcante.

Gostaríamos também de dizer um obrigado ao nosso orientador comum, Marcelo Viana, que nunca se incomodou *muito* com as "escapadas" para a geometria de seus teimosos alunos de dinâmica. Agradecemos ao prof. Manfredo do Carmo por suas conversas estimulantes e o parabenizamos pela merecida placa em homenagem ao seu título de prof. emérito do IMPA. Por fim, agradeçemos ao IMPA e todos que contribuem para esta instituição sem a qual este artigo não existiria.

6 Apêndice

A primeira parte do apêndice refere-se a parte de funções BV e a existência de superfícies mínimas.

6.1 Apêndice I: Funções BV

Assim como ficou combinado, veremos a idéia da prova do teorema abaixo, o qual aparece na seção 3.1 com o nome de teorema 3.13.

Teorema 6.1. *Seja E um conjunto de Caccippoli. Então existe uma sequência de conjuntos E_j com o bordo C^∞ tal que:*

1. $\int_\Omega |\chi_E - \chi_{E_j}| \to 0$
2. $\int_\Omega |D\chi_{E_j}| \to \int_\Omega |D\chi_E|$.

Primeiramente lembramos a fórmula da coárea de Federer.

Proposição 6.2 (Fórmula da coárea). *Seja f uma função BV e $F_t = \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) \leq t\}$. Então:*

$$\int_\Omega |Df| = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_\Omega |D\chi_{F_t}| dt$$

Outro importante resultado é que uma função BV pode ser "bem aproximada" por funções C^∞. Mais precisamente:

Proposição 6.3. *Dada $f \in BV(\Omega)$ existe uma sequência $f_j \in C^\infty$ tal que :*

1. $\int_\Omega |f - f_j| \to 0$
2. $\int_\Omega |Df_j| \to \int_\Omega |Df|$.

Como consequência da fórmula da coárea e da proposiçao anterior, o teorema 6.1 segue. De fato, basta tomar, usando a proposição 6.3, funções f de classe C^∞ aproximando χ_E e considerar, para t grande, o conjunto $F_t = \{x : f(x) \leq t\}$. A sequência E_j desejada é, então, da forma F_t.

6.2 Apêndice II: O lema de De Giorgi

Na seção 4, enquanto estudávamos a regularidade no caso mínimo (na subseção 4.1), afirmamos dois fatos:

1. Se E é mínimo então $\int_{B_\rho(x)} |D\chi_E| \leq \frac{1}{2} n\omega_n r^{n-1}$, onde ω_m é o volume da bola unitária m-dimensional;

2. A condição de De Giorgi (CDG) implica que o ponto está no bordo reduzido;

3. Valem os teoremas 4.3 e 4.4.

Estes fatos estão relacionados com os lemas abaixo.

Lema 6.4. *Se E é mínimo em B_R e $r < R$, então vale*

$$\omega_{n-1} r^{n-1} \leq \int_{B_\rho(x)} |D\chi_E| \leq \frac{1}{2} n\omega_n r^{n-1},$$

para qualquer $x \in \partial R$, onde ω_m é o volume da bola unitária m-dimensional.

Aparentemente este inocente lema apenas estima o perímetro de superfícies mínimas em função do tamanho da bola que consideramos na superfície. Porém ele tem consequências profundas. Por exemplo, Gromov mostrou que as transformações que preservam volume diferem das transformações simpléticas no sentido de não existirem funções simpléticas que comprimem uma bola de modo a fazê-la passar por um buraco de uma agulha (uma frase um pouco bíblica não?), ao passo que sempre podemos fazer isso de maneira a preservar volume. A partir desta observação (dita teorema nonsqueezing de Gromov), fundou-se a área conhecida como *Geometria Simplética.*

Por isso dedicado leitor, faça figuras e procure entender este lema.

Lema 6.5. *Nas hipóteses do Lema de De Giorgi (i.e., se vale (CDG)), então $\forall\ 0 < s < t < \rho$ vale*

$$|\nu_s(x) - \nu_t(x)| \leq \eta(n, \alpha)\sqrt{\frac{t}{\rho}},$$

onde $\eta(n,\alpha) = \frac{2-\sqrt{\alpha}}{1-\sqrt{\alpha}}\sqrt{\frac{\sigma(n,\alpha)}{\omega_{n-1}\alpha^n}}$.

Lembre que $\nu_t(x) = \frac{\int_{B_\rho(x)} D\varphi_E}{\int_{B_\rho(x)} |D\varphi_E|}$. Bom, como corolário dos lemas acima temos:

Corolário 6.6. *Suponha que x satisfaz (CDG). Então $x \in \partial^* E$ e*

$$|\nu(x) - \nu_t(x)| \leq \eta(n, \alpha)\sqrt{\frac{t}{\rho}}.$$

Demonstração. O lema 6.5 diz que $\nu_t(x)$ é sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^n$. Além disso, como x satisfaz (CDG), vale o lema de De Giorgi. Aplicando-o j vezes, temos $|\nu_{\alpha^j \rho}(x)| \to 1$ quando $j \to \infty$. Portanto $x \in \partial^* E$. A desigualdade fica como exercício. $\square$

O corolário mostra que (CDG) implica $x \in \partial^* E$. Ainda mais, ele permite provar o teorema 4.3.

Prova do teorema 4.3. Fixe $z \in \partial E \cap B_r(x)$, $R = \rho(\alpha^{\frac{n}{n-1}})$. Como $B_R(z) \subset B_{\alpha\rho}(x)$, temos $\int_{B_R(z)} |D\varphi_E| - |\int_{B_R(z)} D\varphi_E| \leq \int_{B_{\alpha\rho}(z)} |D\varphi_E| - |\int_{B_{\alpha\rho}(z)} D\varphi_E| \leq \sigma(n, \alpha)\alpha^n \rho^{n-1} \Rightarrow \int_{B_R(z)} |D\varphi_E| - |\int_{B_R(z)} D\varphi_E| \leq \sigma(n, \alpha) R^{n-1} \Rightarrow z$ satisfaz as hipóteses do corolário 6.6 $\Rightarrow z \in \partial^* E$ e

$$|\nu(z) - \nu_t(z)| = |\nu(z) - \frac{\int_{B_t(z)} D\varphi_E}{\int_{B_t(z)} |D\varphi_E|}| \leq \eta(n, \alpha)\sqrt{\frac{t}{R}}. \tag{2}$$

Como z é arbitrário, $\forall z \in \partial E \cap B_r(x)$ valem $z \in \partial^* E$ e 2. Segue de 2, por integração em t,

$$|\nu(z) - \widetilde{\nu}(t, z)| \leq \eta(n, \alpha)\sqrt{\frac{t}{R}} \tag{3}$$

onde $\widetilde{\nu}(t, z) := \frac{\int_0^t ds \int_{B_s(z)} D\varphi_E}{\int_0^t ds \int_{B_s(z)} |D\varphi_E|}$. Claramente $\widetilde{\nu}(t, z)$ é contínua em t e z. Por 3, temos que $\widetilde{\nu}(t, z)$ converge a $\nu(z)$ uniformemente para $z \in B_r(x)$ quando $t \to 0$. Logo $\nu(z)$ é contínua em $\partial E \cap B_r(x)$, donde, pelo teorema 3.23 , $\partial E \cap B_r(x)$ é hipersuperfície C^1. A analiticidade segue da teoria de regularização de equações diferenciais parciais elípticas porque já sabemos que nossa hipersuperfície **mínima** é C^1. Veja [G]. $\square$

Fechando o apêndice II, vamos provar o teorema 4.4. Para isso relembramos o lema das coberturas de Vitali da teoria da medida.

Lema 6.7 (Lema de cobertura de Vitali). *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ e $\rho : A \to (0, \eta)$, onde $\eta > 0$ é uma constante. Então existe sequência x_j em A tal que $B_{\rho(x_i)}(x_i) \cap B_{\rho(x_j)}(x_j) = \emptyset$ se $i \neq j$ e $A \subset \cup_{i=1}^{\infty} B_{3\rho(x_i)}(x_i)$.*

Prova do teorema 4.4. Seja $K \subset \partial E - \partial^* E$ um compacto. Como, pela observação que segue a definição de bordo reduzido, $|D\varphi_E|$-qtp em ∂E está em $\partial^* E$, vale $\int_K |D\varphi_E| = 0$. Porém, já que $|D\varphi_E|$ é medida regular (ver [G]), $\forall \varepsilon > 0$, existe aberto A_ε, $K \subset A_\varepsilon \subset B_1$ tal que $\int_{A_\varepsilon} |D\varphi_E| < \varepsilon$. Fixe $\eta > 0$. Para cada $x \in K$, existe $\rho(x) < \eta$ tal que $B_{3\rho(x)}(x) \subset A_\varepsilon$. Pelo lema de Vitali, segue que existem x_j satisfazendo $B_{\rho_j}(x_j) \cap B_{\rho_i}(x_i) = \emptyset$ se $i \neq j$ e $\cup_{j=0}^{\infty} B_{3\rho_j}(x_j) \supset K$, onde $\rho_j := \rho(x_j)$. Logo $\sum_j \int_{B_{\rho_j}} |D\varphi_E| \leq \int_{A_\varepsilon} |D\varphi_E| < \varepsilon$. Pelo lema 6.4, $\int_{B_{\rho_j}} |D\varphi_E| \geq \omega_{n-1}\rho^{n-1} \Rightarrow \omega_{n-1} \sum_{j=0}^{\infty} \rho_j^{n-1} \leq \varepsilon$. Portanto, $H_{n-1}(K) \leq 3^{n-1}\varepsilon$. Como ε é arbitrário, $H_{n-1}(K) = 0$. Agora, como K é qualquer, o teorema segue. $\square$

6.3 Apêndice III: O lema de De Giorgi (bis)

Finalizando o apêndice, gostaria de dizer algo sobre a prova do lema de De Giorgi. A idéia é aproximar ∂E (que é mínimo) por superfícies "quase mínimas" C^1. Para este tipo de superfície temos $E \cap B_\rho = \{(x,t) : x \in A,\ t > f(x)\} \cap B_\rho$, onde $f \in C^1(A)$ e $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$. Segue que $\int_{B_\rho} |D\chi_E| = \int_A \sqrt{1 + |Df|^2}$. Logo o problema que estamos olhando é quase minimizar a integral da direita sobre $C^1(A)$. Se $|Df|$ é pequena, i.e., ∂E é quase plano em B_ρ então $\sqrt{1 + |Df|^2}$ é aproximadamente igual a $1 + \frac{1}{2} \cdot |Df|^2$. Portanto, procuramos por f que minimiza $I(f) = \int_A |Df|^2$, ou seja, f é quase *harmônica.* Porém as estimativas de De Giorgi valem no caso harmônico. Logo, para concluir a prova do lema de De Giorgi basta usar um argumento de aproximação.

Referências

[BDGG] E. Bombieri, E. De Giorgi, E. Guisti, Minimal cones and the Bernstein problem, *Inventiones Math.*, 243–268, 7, 1969.

[dC] Manfredo do Carmo, Superfícies Mínimas, 16.o Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA.

[E] M. Emmer, Interview with Ennio De Giorgi, *Notices of the A.M.S.*, 1097–1101, v. 44, October 1997

[EG] L. Evans, R. Gariepy, Measure theory and fine properties of functions Studies in Advanced Math., CRC Press

[F] Herbert Federer, Geometric Measure Theory, Springer-Verlag, 1969.

[FF] H. Federer, Fleming, On Normal and Integral Currents, *Annals of Math.*, 458–520, v. 72, 1960

[G] Enrico Guisti, Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation, Birkhäuser, 1984.

[L] H. Blaine Lawson, Lectures on Minimal Submanifolds, Pub. Mat. do IMPA, v.1, 1980.

[LM] J.-L. Lions, F. Murat, Ennio De Giorgi (1928–1996), *Notices of the A.M.S.*, 1095–1097, v.44, October 1997.

[M] Frank Morgan, Geometric Measure Theory, A Beginner's Guide, Academic Press, Third Edition, 2000.

[N] Sylvia Nasar, Uma mente brilhante.

Alexander Arbieto (alexande@impa.br)
Carlos Matheus (matheus@impa.br)
IMPA, Est. D. Castorina, 110, Jardim Botânico, 22460-320
Rio de Janeiro, RJ, Brasil
Krerley Oliveira (krerley@mat.ufal.br)
Departamento de Matemática, UFAL, Campus A. C. Simões s/n, 57000-000
Maceió, AL, Brasil